

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Corso di Laurea in Fisica

**VINCOLI COSMOLOGICI DA  
SUPERNOVAE AD ALTO REDSHIFT**

Relatore:  
Prof. Lauro Moscardini

Presentata da:  
Matteo Billi

Sessione II  
Anno Accademico 2014/2015



*A tutti coloro che mi hanno sostenuto,  
alla mia famiglia, ai miei amici e a Valentina*



*...e l'Universo non ha confini.*



# Sommario

Le SNe Ia vengono utilizzate in cosmologia come indicatori di distanza. Nel 1998 due team di ricerca, il Supernova Cosmology Project e l'High-z Supernova Search Team compirono degli studi su un campione di SNe in galassie lontane a  $z = 0.2 \div 0.9$ . Da questi lavori emerse che le luminosità apparenti erano tipicamente inferiori del 25% rispetto ai valori attesi. Questo indica che tali oggetti si trovano ad una distanza di luminosità superiore a quella prevista da modelli d'Universo dominati da materia. Venne quindi determinata per la prima volta l'evidenza di un Universo in condizione di espansione accelerata.

Lo scopo del presente lavoro di tesi è quello di analizzare i vincoli cosmologici imposti da SNe Ia ad alto redshift. È stato compiuto uno studio sui moduli di distanza osservativi di un campione di 580 SNe Ia al fine di trovare i parametri cosmologici che meglio descrivono il loro andamento in funzione del redshift nell'ambito dei modelli cosmologici standard con costante cosmologica positiva.

Nella prima parte si illustreranno i modelli d'Universo di Friedmann, introducendo i concetti di redshift, di fattore di scala e i vari tipi di distanza. Nella seconda parte si descriverà cosa sono le Supernovae, e in particolare, le SNe di tipo Ia, le proprietà che le rendono candele standard e l'importanza che hanno assunto in cosmologia. Nella terza parte verranno presentati i risultati prodotti per i due modelli studiati, verrà inoltre discussa la compatibilità con i parametri prodotti nei lavori compiuti dai due team di ricerca.



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Geometria dello spazio-tempo cosmologico</b>	<b>3</b>
2.1	Metrica di Robertson-Walker . . . . .	3
2.1.1	Distanze metriche e legge di Hubble . . . . .	6
2.2	Redshift cosmologico . . . . .	8
2.3	Parametro di decelerazione . . . . .	10
2.4	Distanze cosmologiche . . . . .	12
2.4.1	Distanza di luminosità . . . . .	12
2.4.2	Distanza angolare . . . . .	14
2.4.3	Modulo di distanza . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Modelli cosmologici di Friedmann</b>	<b>17</b>
3.1	Trattazione Newtoniana dell'equazioni di Friedmann . . . . .	17
3.2	Equazione di stato . . . . .	20
3.2.1	Variazione nel tempo della densità . . . . .	21
3.3	Modelli di Universo dominati da materia e radiazione . . . . .	22
3.3.1	Densità critica e parametro di densità . . . . .	22
3.3.2	Equazione di Friedmann in funzione del parametro di densità	23
3.3.3	Considerazioni dinamiche . . . . .	24
3.4	Modelli di Universo con costante cosmologica . . . . .	25
3.5	Caso generale: modelli di Universo a multi-componenti . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Supernovae</b>	<b>33</b>
4.1	Generalità sulle Supernovae . . . . .	33
4.2	Classificazione . . . . .	34
4.2.1	SNe di tipo I . . . . .	34
4.2.2	Supernovae di tipo II . . . . .	35
4.3	Progenitori . . . . .	36
4.3.1	SNe a collasso di core . . . . .	37
4.3.2	SNe termonucleari . . . . .	38

4.4	SNe di tipo Ia come indicatori di distanza . . . . .	41
4.4.1	Curve di luce e dispersione della magnitudine di picco .	41
4.4.2	Problematiche legate al calcolo della distanza di luminosità	42
<b>5</b>	<b>Vincoli cosmologici da SNe Ia</b>	<b>45</b>
5.1	Introduzione . . . . .	45
5.2	Modulo di distanza teorico . . . . .	49
5.2.1	Calcolo numerico . . . . .	51
5.3	Trattazione dei dati . . . . .	52
5.3.1	Minimi quadrati . . . . .	52
5.3.2	Regioni di confidenza . . . . .	53
5.4	Risultati . . . . .	54
5.4.1	Modello $\Lambda$ CDM: un parametro libero . . . . .	55
5.4.2	Modello $o\Lambda$ CDM: due parametri liberi . . . . .	59
5.5	Discussione e conclusioni . . . . .	62
5.5.1	Compatibilità modelli $\Lambda$ CMD e $o\Lambda$ CMD . . . . .	62
5.5.2	Compatibilità con SCP . . . . .	64
	<b>Bibliografia</b>	<b>67</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

Il modello di Universo attualmente più condiviso è chiamato modello di Hot Big Bang. Secondo questo modello, l'Universo ha avuto origine da una singolarità dello spazio-tempo con densità e temperatura elevatissime. L'espansione è avvenuta in modo isotropo e mantenendo una densità uniforme; non si può definire un punto privilegiato da cui è iniziata: non è la materia che si espande nello spazio, ma è lo spazio stesso che aumenta il suo fattore di scala.

Dopo questa singolarità ogni particella ha cominciato ad allontanarsi molto velocemente da ogni altra particella. In questi primi attimi l'Universo può essere considerato come un gas di particelle in rapida espansione.

Allo stato attuale l'Universo a grande scala è composto da Galassie, insieme gravitazionalmente legati di stelle, gas, polveri e materia oscura. Le Galassie non sono distribuite uniformemente nello spazio, bensì aggregate gravitazionalmente in vari sistemi che vanno dai gruppi con poche decine di oggetti agli ammassi con migliaia di Galassie, ai superammassi che sono aggregati di decine di gruppi e ammassi.

La distribuzione delle Galassie è un dato fondamentale per gli studi cosmologici in quanto i modelli teorici sull'origine dell'Universo devono riprodurre lo schema osservativo attuale: mediata su grandi scale spaziali la distribuzione di Galassie è sostanzialmente la stessa in qualunque direzione, ovvero l'Universo è isotropo. L'Universo si sta ancora espandendo e l'espansione risulta accelerata.

Un concetto molto importante per lo sviluppo del modello teorico che descrive l'espansione dell'Universo è il Principio Cosmologico.

Il Principio Cosmologico afferma che l'Universo è omogeneo e isotropo su scala opportunamente grande. L'omogeneità e l'isotropia sono rispettivamente le proprietà dello spazio di essere uguale in ogni punto e indipendente dalla direzione. Il Principio Cosmologico asserisce quindi che l'aspetto gene-

rale dell'Universo non deve dipendere dalla posizione dell'osservatore e dalla direzione d'osservazione.

Questo Principio fu introdotto da Einstein senza alcuna giustificazione osservativa. Successivamente il Principio Cosmologico fu suffragato da numerose osservazioni riguardanti la distribuzione delle strutture cosmiche su grandi scale (maggiore alle centinaia di Mpc). La prova più importante arriva però dall'isotropia della radiazione cosmica di fondo. Il Principio Cosmologico costituisce una buona descrizione dell'Universo a livello della distribuzione degli ammassi di galassie, mentre, a piccola scala l'Universo è chiaramente disomogeneo.

Passiamo ora ad analizzare la metrica dell'Universo e i possibili modelli cosmologici che meglio descrivono l'espandersi dell'Universo.

# Capitolo 2

## Geometria dello spazio-tempo cosmologico

### 2.1 Metrica di Robertson-Walker

La forza dominante a grande scala è quella gravitazionale, così la parte più importante per una descrizione fisica dell'Universo è una teoria della gravità. La teoria più completa ed esaustiva che abbiamo per la sua descrizione è la Relatività Generale di Einstein. La gravità esercita la stessa forza per unità di massa su ogni corpo e la chiave di volta della teoria di Einstein è quella di trasformare la gravitazione da forza a proprietà dello spazio-tempo. La Relatività Generale è essenzialmente una teoria geometrica, in essa lo spazio-tempo non è necessariamente piatto, come lo spazio-tempo di Minkowski, ma può essere curvo; bisogna pertanto investigare le proprietà metriche degli spazi isotropi e omogenei (condizione imposta dal Principio Cosmologico).

Consideriamo l'Universo come un fluido continuo e assegniamo ad ogni elemento di fluido le tre coordinate spaziali  $x^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), definite coordinate comoventi. Si ha così che ogni punto dello spazio-tempo è individuato dalle coordinate  $x^\alpha$ , corrispondenti all'elemento di fluido che passa attraverso il punto al tempo proprio  $t$ , misurato da un orologio solidale con l'elemento di fluido.

L'intervallo tra due eventi nello spazio-tempo  $x^j$  e  $x^j + dx^j$  ( $x^0 = ct$ , coordinata temporale) può essere rappresentato come:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.1)$$

Il tensore metrico  $g_{ij}$  descrive le proprietà geometriche di questo spazio quadrimensionale.

Il percorso di un raggio luminoso è dato da:

$$ds^2 = 0, \quad (2.2)$$

questo intervallo viene definito di tipo luce. Se  $ds^2 > 0$ , tale intervallo è di tipo tempo, al contrario se  $ds^2 < 0$  è un intervallo di tipo spazio.

Le particelle si muovono in modo da minimizzare la distanza tra due punti, ovvero, l'integrale lungo una qualsiasi curva  $\gamma$  è stazionario:

$$\delta \int_{\gamma} ds = 0. \quad (2.3)$$

Le traiettorie che le particelle compiono nello spazio sono dette geodetiche. Nello spazio-tempo di Minkowski, essendo uno spazio piatto, le geodetiche sono rette, mentre in presenza di campi esterni, come quello gravitazionale o elettromagnetico, le traiettorie possono deviare dal percorso rettilineo, a causa della curvatura dello spazio stesso.

L'omogeneità e l'isotropia postulate dal Principio Cosmologico permettono di scegliere un tempo universale per il quale la metrica sia uguale in ogni punto e direzione. Prendiamo come tempo universale il tempo proprio, definito come:

$$dt = \frac{ds}{c}. \quad (2.4)$$

Possiamo riscrivere la metrica dello spazio-tempo nella forma:

$$ds^2 = (cdt)^2 - dl^2, \quad (2.5)$$

dove  $dl^2$  identifica la metrica spaziale tridimensionale. Tutto quindi si risolve nel trovare  $dl^2$ .

Per semplicità iniziamo descrivendo il caso bidimensionale. Lo spazio può avere curvatura costante nulla, positiva o negativa:

- *piano euclideo bidimensionale*: spazio piatto.

La distanza tra due punti in coordinate polari  $\rho(0 \leq \rho < \infty)$  e  $\phi(0 \leq \phi < 2\pi)$  è data da:

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2, \quad (2.6)$$

ponendo  $\rho = ar$  con  $a$  costante arbitraria avente la dimensione di una lunghezza e  $r(0 \leq r < \infty)$  coordinata adimensionale, si ottiene:

$$dl^2 = a^2(dr^2 + r^2 d\phi^2). \quad (2.7)$$

- *superficie sferica di raggio R*: spazio curvo, con curvatura costante positiva.

La metrica in coordinate  $\theta(0 \leq \theta < \pi)$  e  $\phi(0 \leq \phi < 2\pi)$  è definita da:

$$dl^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2); \quad (2.8)$$

ponendo  $R = a$  e  $\sin \theta = r$  ( $0 \leq r \leq 1$ ) si ottiene  $\left(\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\right)$ :

$$dl^2 = a^2 \left( \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\phi^2 \right). \quad (2.9)$$

- *superficie iperbolica*: spazio curvo, con curvatura negativa.

Caso opposto rispetto alla superficie sferica. La metrica risulta essere:

$$dl^2 = a^2 \left( \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\phi^2 \right), \quad (2.10)$$

dove  $R = a$  e  $\sinh \theta = r$  ( $0 \leq r < \infty$ )

È possibile riassumere queste tre metriche in una forma più compatta:

$$dl^2 = a^2 \left( \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\phi^2 \right); \quad (2.11)$$

mediante il parametro di curvatura  $K$  si identificano i tre tipi di curvatura. Il parametro  $K$  è normalizzato in modo tale da poter assumere solo tre valori interi  $(0, 1, -1)$ . Nel caso più generale di uno spazio tridimensionale si hanno ancora tre tipi di metrica:

$$dl^2 = a^2(dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (2.12)$$

$$dl^2 = a^2(d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2) = a^2 \left( \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (2.13)$$

$$dl^2 = a^2(d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega^2) = a^2 \left( \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2 \right); \quad (2.14)$$

con  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ ; ( $0 \leq \chi \leq \pi$ ) e  $r = \sin \chi$  nella (2.13); ( $0 \leq \chi < \infty$ ) e  $r = \sinh \chi$  nella (2.14).

In forma compatta si può scrivere:

$$dl^2 = a^2 \left( \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (2.15)$$

dove:

$$K = \begin{cases} 0 & \text{metrica euclidea} \\ +1 & \text{metrica sferica} \\ -1 & \text{metrica iperbolica} \end{cases} \quad (2.16)$$

Mentre lo spazio iperbolico e quello euclideo sono aperti, lo spazio sferico è chiuso ma senza confini. Definiamo come raggio di curvatura  $R_c$ :

$$R_c \equiv \frac{a}{\sqrt{K}}, \quad (2.17)$$

esso è rispettivamente positivo e immaginario nel caso sferico e iperbolico (nel caso euclideo non ha senso geometrico).

La metrica dello spazio-tempo su cui si basa il modello standard di Universo si ottiene dalla (2.15). Questa metrica, definita di Robertson-Walker, rappresenta la metrica più generale che descrive un Universo isotropo e omogeneo:

$$ds^2 = (cdt)^2 - a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]; \quad (2.18)$$

le coordinate  $(r, \theta, \phi)$  sono le coordinate comoventi in forma polare e  $t$  è il tempo proprio. La dipendenza della metrica dal tempo è contenuta nel fattore di scala  $a(t)$ . Se il fattore di scala è una funzione crescente del tempo, allora lo spazio si sta espandendo:  $a(t)$  è strettamente legato al tasso di espansione dell'Universo.

### 2.1.1 Distanze metriche e legge di Hubble

Consideriamo due punti  $P$  e  $P_0$  in un sistema di coordinate polari  $(r, \theta, \phi)$ , con origine  $P_0$ . La distanza tra  $P$  e  $P_0$  misurata simultaneamente al tempo  $t = cost$  ( $dt = 0$ ), da una catena di osservatori sincronizzati, è definita distanza propria  $d_p(t)$ . Dalla metrica di Robertson-Walker, integrando lungo la coordinata  $r$ , si ha che:

$$d_p(t) = \int_0^r dl = \int_0^r a(t) \left( \frac{1}{\sqrt{1 - Kr^2}} \right) dr = a(t)f(r), \quad (2.19)$$

dove la funzione  $f(r)$  è rispettivamente:

$$f(r) = \int_0^r \left( \frac{1}{\sqrt{1 - Kr^2}} \right) dr = \begin{cases} r & K=0 \\ \sin^{-1}r & K=+1 \\ \sinh^{-1}r & K=-1 \end{cases} . \quad (2.20)$$

La distanza propria al tempo presente  $t_0$  è detta distanza comovente, infatti essa definisce una coordinata comovente radiale per il punto  $P$ :

$$d_c = d_p(t_0) = a_0 f(r) = \frac{a(t_0)}{a(t)} d_p(t). \quad (2.21)$$

La distanza può variare nel tempo a causa del fattore di scala  $a(t)$ , in questo caso il punto  $P$  ha una velocità radiale rispetto all'origine  $P_0$  data da:

$$v_r = \frac{d(d_p(t))}{dt} = \dot{a}(t) f(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} d_p(t), \quad (2.22)$$

da cui :

$$v_r = H(t) d_p(t); \quad (2.23)$$

dove la funzione  $H(t)$  è detta parametro di Hubble:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (2.24)$$

La velocità  $v_r$  è unicamente legata all'espansione dell'Universo. Il parametro  $H(t)$ , varia nel tempo ma non nello spazio, ovvero  $H(t)$  è isotropo.

Al tempo attuale il parametro di Hubble assume valore costante nello spazio:

$$H_0 \equiv H(t_0) = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}. \quad (2.25)$$

Questa costante è molto importante e viene definita costante di Hubble. Fu infatti Hubble che per primo la misurò sperimentalmente osservando la recessione delle Galassie.

Nel 1929 Hubble presentò l'evidenza osservativa che le Galassie mostrano uno spostamento delle righe spettrali verso il rosso correlato alla loro distanza  $d_c$ , propose pertanto la seguente relazione, detta legge di Hubble:

$$z c = \frac{\lambda_{os} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} c = H_0 d_c, \quad (2.26)$$

dove  $\lambda_{em}$  è la lunghezza d'onda di una particolare riga nel sistema di riferimento della Galassia, e  $\lambda_{os}$  è la lunghezza d'onda della stessa riga nel sistema di riferimento dell'osservatore; il fattore  $z$  è detto redshift.

Hubble interpretò il redshift osservato come un effetto Doppler non relativistico causato dalla velocità radiale delle Galassie rispetto all'osservatore. Le righe spettrali sono spostate rispetto alla configurazione di laboratorio secondo la formula (non relativistica):

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}, \quad (2.27)$$

e lo spostamento è verso le lunghezze d'onda maggiori quando si ha un moto relativo di allontanamento (redshift). Lo spettro nel suo insieme risulta quindi deformato, essendo gli spostamenti maggiori per  $\lambda$  maggiori.

Con questa interpretazione la legge di Hubble può essere riscritta nella forma:

$$v_r = H_0 d_c. \quad (2.28)$$

Le recenti misure della costante di Hubble, basate sui dati raccolti con il metodo delle Cefeidi dallo Hubble Space Telescope, danno:

$$H_0 = 71 \pm 4 \frac{Km}{Mpc \cdot s}. \quad (2.29)$$

Hubble si rese conto dell'importanza cosmologica delle sue osservazioni che suggerivano un processo di espansione dell'Universo, non potendo essere l'osservatore terrestre in alcun modo privilegiato. L'effetto di redshift non è dovuto ad un moto peculiare delle Galassie, bensì ad una recessione globale dovuta all'espansione dell'universo stesso, il cosiddetto "Hubble Flow". La legge di Hubble risulta essere invariante rispetto allo spazio, questo comporta un'espansione che conserva i rapporti delle distanze relative: l'Universo rimane uguale a se stesso, cambia solo la scala delle sue dimensioni.

Nell'ipotesi semplificata che l'Universo si espanda omologamente, sempre alla stessa velocità, l'inverso della costante di Hubble rappresenta l'età dell'Universo  $t_{univ}$ , ovvero il tempo intercorso per raggiungere l'attuale conformazione partendo da una configurazione iniziale in cui tutto l'Universo era concentrato in un solo punto:

$$t_{univ} = \frac{d}{v_r} = \frac{d}{H_0 d} = H_0^{-1}, \quad (2.30)$$

da cui, usando il valore (2.29) si ottiene:

$$T_{univ} = 13.7 \pm 0.2 \text{ Gyr} \quad (2.31)$$

La legge di Hubble è la prova osservativa che l'Universo si espande. Questa legge è stata confermata fino a redshift di:

$$z \approx 1 \div 1, 5, \quad (2.32)$$

dopodiché intervengono gli effetti geometrici del modello cosmologico.

## 2.2 Redshift cosmologico

Il redshift  $z$  è una grandezza fondamentale in cosmologia. È strettamente correlato al fattore di scala  $a(t)$ , pertanto dalla sua misura diretta si può stimare il fattore  $a(t)$  ottenendo così informazioni sull'evoluzione dell'Universo.

Si definisce il redshift di una sorgente luminosa come:

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1, \quad (2.33)$$

dove  $\lambda_e$  è la lunghezza d'onda del segnale emesso dalla sorgente al tempo  $t_e$  nel punto  $P$ , mentre  $\lambda_0$  è la lunghezza d'onda della radiazione osservata al tempo  $t_0$  nel punto  $P_0$  (origine del sistema di coordinate). La sorgente ha coordinata comoviente  $r$  e si sta muovendo con l'espansione dell'Universo. La radiazione si propaga lungo una traiettoria a geodetica nulla ( $ds^2 = 0$ ), pertanto, utilizzando la metrica R-W:

$$ds^2 = (cdt)^2 - a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] = 0; \quad (2.34)$$

per un raggio luminoso che viaggia radialmente ( $d\theta = d\phi = 0$ ) si ha che:

$$\frac{cdt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (2.35)$$

Pertanto il percorso del segnale che viaggia dalla sorgente in  $r$  all'osservatore posto nell'origine risulta essere:

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = f(r). \quad (2.36)$$

La funzione  $f(r)$  non varia perché dipende unicamente dalla coordinata comoviente  $r$  e sia l'osservatore che la sorgente si muovono con l'espansione cosmologica.

Consideriamo un impulso emesso dalla sorgente in  $P$  al tempo  $t_e$  di durata  $\delta t_e$ , esso giungerà all'origine nell'intervallo temporale  $(t_0, t_0 + \delta t_0)$ ; usando l'equazione di propagazione dei raggi luminosi (2.27) si ottiene la seguente relazione per l'inizio e la fine dell'impulso:

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = f(r) = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{a(t)}. \quad (2.37)$$

Se  $\delta t_e$  e  $\delta t_0$  sono infinitesimi allora  $a(t_0)$  e  $a(t_e)$  possono essere considerati costanti e il secondo integrale diventa:

$$\begin{aligned} \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} &= \int_{t_e + \delta t_e}^{t_e} \frac{cdt}{a(t)} + \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} \\ &= -\frac{c\delta t_e}{a(t_e)} + \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} + \frac{c\delta t_0}{a(t_0)}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Dunque la relazione tra l'inizio e la fine dell'impulso implica che:

$$\frac{\delta t_e}{a(t_e)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)}. \quad (2.39)$$

In particolare se  $\delta t_e \equiv \frac{1}{\nu_e}$  e  $\delta t_0 \equiv \frac{1}{\nu_0}$ , allora l'equazione (2.39) può essere riscritta come:

$$\nu_e a(t_e) = \nu_0 a(t_0), \quad (2.40)$$

e in funzione della lunghezza d'onda si ha:

$$\frac{a(t_e)}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{\lambda_0}. \quad (2.41)$$

Possiamo infine scrivere la relazione che lega il redshift al fattore di scala:

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}. \quad (2.42)$$

La quantità  $(1 + z)$  è osservabile spettroscopicamente e misura il rapporto tra i fattori di scala della metrica all'istante di ricezione e all'istante di emissione, quindi stima il fattore di espansione dell'Universo in quell'intervallo di tempo cosmico.

Inoltre, essendo  $z > 0$ , si ha che:

$$a(t_0) > a(t_e), \quad (2.43)$$

questo implica che l'Universo è in espansione.

## 2.3 Parametro di decelerazione

Il parametro di Hubble  $H(t)$  misura il tasso di espansione ad ogni particolare tempo  $t$ , esso però varia nel tempo in un modo che dipende dal contenuto dell'Universo. Bisogna quindi sviluppare la relazione lineare tra il parametro di Hubble e la coordinata comovente  $r$ .

Per ricavare questa dipendenza cominciamo con lo sviluppare in serie di Taylor il fattore di scala in un intorno del punto  $t_0$ :

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t)|_{t_0}(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t)|_{t_0}(t - t_0)^2 + o(\Delta t^3). \quad (2.44)$$

Si definisce parametro di decelerazione:

$$q_0 \equiv q(t_0) \equiv -\frac{\ddot{a}(t_0)a(t_0)}{\dot{a}(t_0)^2}, \quad (2.45)$$

è una quantità adimensionale e risulta essere positiva se l'Universo si espande in maniera decelerata. Sostituiamo nello sviluppo in serie:

$$a(t) = a(t_0) \left[ 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t - t_0)^2 + o(\Delta t^3) \right]. \quad (2.46)$$

Ricordandosi la relazione tra il redshift e il fattore di scala ( $1 + z \equiv \frac{a(t_0)}{a(t)}$ ), si può ottenere lo sviluppo in serie di Taylor di  $z$ :

$$z = H_0(t_0 - t) + \left(1 + \frac{1}{2}q_0\right) H_0^2(t_0 - t)^2 + o(\Delta t^3), \quad (2.47)$$

e, invertendo:

$$(t_0 - t) = \frac{1}{H_0} \left[ z - \left(1 + \frac{1}{2}q_0\right) z^2 + o(z^3) \right]. \quad (2.48)$$

Per trovare la coordinata  $r$  come funzione del redshift  $z$  riconsideriamo l'equazione che descrive la propagazione di un raggio luminoso che viaggia radialmente:

$$\int_t^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = f(r). \quad (2.49)$$

Introduciamo nel primo integrale lo sviluppo in serie di potenze del redshift, nel secondo consideriamo invece lo sviluppo di  $r$  nell'intorno di  $r = 0$ :

$$\begin{aligned} & \frac{c}{a(t_0)} \int_t^{t_0} \left[ 1 + H_0(t_0 - t) + \left(1 + \frac{1}{2}q_0\right) H_0^2(t_0 - t)^2 + o(\Delta t^3) \right] dt = \\ & = \int_0^r \left[ 1 + \frac{Kr}{(1 - Kr^2)^{\frac{3}{2}}} \Big|_{r=0} r + \frac{K}{(1 - Kr^2)^2} \Big|_{r=0} r^2 + o(r^3) \right] dr, \end{aligned} \quad (2.50)$$

e quindi:

$$r = \frac{c}{a(t_0)} \left[ (t_0 - t) + \frac{1}{2} H_0(t_0 - t)^2 + o(\Delta t^3) \right]. \quad (2.51)$$

Inserendo in quest'equazione lo sviluppo di  $(t_0 - t)$  si ha l'espressione della distanza in funzione del redshift:

$$r = \frac{c}{H_0 a(t_0)} \left[ \left( z - \frac{1}{2}(1 + q_0)z^2 + o(z^3) \right) \right]. \quad (2.52)$$

La legge di Hubble scritta in funzione di  $z$  è:

$$cz = H_0 a(t_0) r = H_0 d_p(t_0). \quad (2.53)$$

Si noti che il termine al secondo ordine nell'equazione (2.52) modifica tale legge e ne determina uno scostamento dall'andamento lineare a grandi  $z$ .

L'espressione (2.52) fa notare anche che per avere una stima del parametro di decelerazione  $q_0$  è necessario raccogliere dati da lontano, ovvero a grandi  $z$ , mentre se si vuole misurare la costante di Hubble bisogna andare relativamente vicino.

## 2.4 Distanze cosmologiche

Nella misura operativa delle distanze di oggetti astronomici si è limitati dalla finitezza della velocità della luce.

La distanza propria, definita nella sezione precedente, di fatto è la distanza misurata su una ipersuperficie a tempo proprio costante. Gli oggetti astronomici sono osservati attraverso la luce che emettono, i raggi luminosi però impiegano un tempo finito per andare dalla sorgente all'osservatore, di conseguenza non si può misurare in nessun modo diretto la distanza propria di questi oggetti. Possiamo misurare la distanza solo lungo il cammino dei raggi luminosi che viaggiano verso di noi dal nostro passato, ovvero solo nel nostro cono di luce passato.

Per questo motivo si definiscono altri tipi di distanze che si possono misurare direttamente.

### 2.4.1 Distanza di luminosità

Uno dei metodi più usati per determinare le distanze in cosmologia è basato sulla misura della luminosità apparente di un oggetto di cui si conosce la luminosità assoluta. La luminosità assoluta  $L$  è l'energia emessa per unità di tempo, mentre la luminosità apparente  $l$  è l'energia ricevuta per unità di tempo e per unità di superficie, ovvero è il flusso ricevuto. Se in uno spazio euclideo l'energia è emessa in modo isotropo allora si può trovare la relazione tra la luminosità assoluta e quella apparente immaginando che la sorgente sia circondata da una sfera il cui raggio è uguale alla distanza  $d$  tra l'oggetto e l'osservatore. L'energia totale per secondo che passa attraverso la sfera è:

$$l = \frac{L}{4\pi d^2}, \quad (2.54)$$

da cui si ricava la distanza dell'oggetto osservato:

$$d = \left( \frac{L}{4\pi l} \right)^{1/2}. \quad (2.55)$$

Per oggetti a distanze cosmologiche questa legge va corretta, in modo da tener conto dell'espansione cosmologica. Consideriamo una sorgente in  $P$ , posta a distanza comovente  $r$  dall'osservatore, situato in  $P_0$ . La radiazione emessa dalla sorgente al tempo  $t$  viene osservata in  $P_0$  al tempo  $t_0$ . Bisogna considerare tre fattori:

- *Espansione spazio-tempo*

I fotoni arrivano meno frequentemente perchè lo spazio si espande. L'area della superficie sferica centrata in  $P$  e passante in  $P_0$  al tempo  $t_0$  risulta essere:

$$A = 4\pi r^2 a^2(t_0). \quad (2.56)$$

Nella formula per la luminosità apparente bisogna sostituire il fattore  $\left(\frac{1}{d^2}\right)$  con  $\left(\frac{1}{r^2 a^2(t_0)}\right)$ .

- *Redshift*

I fotoni perdono energia a causa del redshift. La radiazione emessa dalla sorgente arriva all'osservatore spostata verso il rosso a causa dell'espansione cosmologica di un fattore:

$$\frac{a(t_0)}{a(t)} = 1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e}. \quad (2.57)$$

Dal momento che la frequenza diminuisce, diminuisce anche l'energia dei singoli fotoni:

$$E_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{hc}{\lambda_e(1+z)} = \frac{E_e}{1+z}. \quad (2.58)$$

- *Dilatazione del tempo*

Si deve considerare infine l'effetto di dilatazione del tempo: i fotoni emessi dalla sorgente nell'intervallo  $\delta t$  arrivano in  $P_0$  nell'intervallo:

$$\delta t_0 = \frac{a(t_0)}{a(t)} \delta t = (1+z) \delta t. \quad (2.59)$$

Mettendo insieme questi tre fattori si ottiene la formula corretta per la luminosità apparente di una sorgente posta alla coordinata comovente  $r$  con un qualsiasi redshift  $z$ :

$$l = \frac{L}{4\pi r^2 a^2(t_0)(1+z)^2}. \quad (2.60)$$

Da questa espressione si può definire la distanza di luminosità, che conserva la legge dell'inverso del quadrato della distanza tra luminosità assoluta e apparente:

$$d_L = a(t_0)(1+z)r. \quad (2.61)$$

Questa è la distanza che si misura osservando candele campione e confrontandone la luminosità apparente con quella assoluta.

Per  $z \ll 1$  si può ricavare, con un procedimento analogo a quello seguito per determinare la distanza in coordinate comoventi in funzione del redshift, la relazione tra la distanza di luminosità e il redshift come serie di potenze:

$$d_L = \frac{c}{H_0} \left[ z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 + o(z^3) \right]. \quad (2.62)$$

## 2.4.2 Distanza angolare

Consideriamo un corpo celeste che abbia un'estensione nel piano del cielo di  $\Delta\theta$ . Se applichiamo la metrica R-W, il suo diametro proprio  $D_p(t)$ , perpendicolare alla linea di vista ( $dr = 0$ ), al tempo proprio  $t$  e alla coordinata comovente  $r$  risulta essere:

$$D_p(t) = a(t)r\Delta\theta. \quad (2.63)$$

Definiamo come distanza angolare la grandezza:

$$d_A \equiv \frac{D_p(t)}{\Delta\theta} = a(t)r = \frac{a(t_0)}{1+z}r. \quad (2.64)$$

Tra la distanza angolare e quella di luminosità c'è la seguente relazione:

$$d_L = (1+z)^2 d_A. \quad (2.65)$$

Esiste anche una relazione di consistenza tra queste due distanze cosmologiche e quelle metriche. Per  $r \rightarrow 0$  e  $t \rightarrow t_0$  si ha che:

$$d_p \simeq d_c \simeq d_L \simeq d_A. \quad (2.66)$$

Se questa relazione non fosse vera allora la metrica R-W sarebbe sbagliata.

## 2.4.3 Modulo di distanza

Gli astronomi sono soliti lavorare con le magnitudini, piuttosto che con le luminosità. La scala delle magnitudini è definita logicamente come:

$$m = -2.5 \log_{10} l + cost, \quad (2.67)$$

dove la costante è scelta in modo da riprodurre le scale di magnitudini ottiche definite empiricamente da Tolomeo.

Si definisce magnitudine assoluta  $M$ , la magnitudine apparente di una sorgente qualora posta convenzionalmente alla distanza di 10 pc:

$$M = -2.5 \log_{10} l_{(10pc)} + cost. \quad (2.68)$$

La relazione tra la distanza di luminosità di una sorgente, la sua magnitudine apparente e la sua magnitudine assoluta è:

$$d_L = 10^{1+\frac{m-M}{5}} (pc). \quad (2.69)$$

Si definisce modulo di distanza la grandezza:

$$m - M = -5 + 5 \log_{10} d_L (pc). \quad (2.70)$$



## Capitolo 3

# Modelli cosmologici di Friedmann

La metrica di Robertson-Walker è stata ottenuta solo sulla base di considerazioni geometriche dell'Universo. Essa fornisce una rappresentazione generale della metrica universale, ma non dice come essa evolva nel tempo, ovvero come evolva il fattore di scala  $a(t)$ , e non stabilisce se l'Universo sia chiuso, piatto o aperto ( $k = 1, 0, -1$ ).

La teoria della Relatività Generale permette di collegare la geometria dello spazio-tempo con la distribuzione di materia ed energia dell'Universo. Se la metrica è la Robertson-Walker allora dalle equazioni di campo di Einstein si ricavano una coppia di equazioni, dette di Friedmann che descrivono l'andamento del fattore di scala  $a(t)$ ; dalle soluzioni delle equazioni di Friedmann si sviluppa il modello cosmologico standard.

Per quanto riguarda la notazione d'ora in avanti il pedice 0 indica che il parametro è stato calcolato al tempo presente  $t_0$ , per esempio:  $a_0 = a(t_0)$ . Inoltre, per alleggerire la notazione, il fattore di scala calcolato ad un generico tempo  $t$  potrà essere indicato solamente con  $a$ .

### 3.1 Trattazione Newtoniana dell'equazioni di Friedmann

Le equazioni di Friedmann per una distribuzione di materia isotropa e omogenea si possono ottenere anche mediante una trattazione Newtoniana: ciò è giustificato dal teorema di Birkhoff.

Il teorema di Birkhoff è l'analogo relativistico del primo teorema di Newton sul campo gravitazionale (il campo gravitazionale prodotto all'esterno di un corpo a simmetria sferica è lo stesso di quello prodotto da un punto

massivo avente la massa dell'oggetto e posto al suo centro): un campo gravitazionale a simmetria sferica nel vuoto è statico e può sempre essere descritto dalla metrica di Schwarzschild, ovvero dalla metrica generata da un punto massivo in uno spazio vuoto.

Un importante corollario del teorema di Birkhoff afferma che il campo dentro una cavità sferica al centro di una distribuzione sferica omogenea di massa-energia è nullo e la metrica è Minkowskiana, quindi lo spazio dentro la cavità è piatto (questo è l'analogo del secondo teorema di Newton: all'interno di una superficie sferica omogenea di materia il campo gravitazionale è nullo). Questo corollario può essere applicato anche se lo spazio all'esterno della cavità è infinito: l'unica condizione imposta è che la distribuzione di massa-energia sia a simmetria sferica. Dal momento che l'Universo nel suo insieme può essere approssimato come una grande sfera di materia di raggio molto grande, lo spazio al suo interno risulta essere piatto: si può pertanto utilizzare la meccanica Newtoniana per descrivere il comportamento dei corpi al suo interno.

La prima equazione di Friedmann si ricava assumendo la conservazione dell'energia totale. Consideriamo l'evoluzione di un corpo di massa unitaria nel punto  $P$  sulla superficie di una sfera centrata in  $O$  e di raggio:

$$l = \frac{a}{a_0} d_c. \quad (3.1)$$

All'interno della sfera è contenuta solo materia non relativistica e l'unica forza agente è quella gravitazionale. L'equazione del moto del corpo risulta essere:

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = -\frac{GM}{l^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho l; \quad (3.2)$$

moltiplichiamo entrambi i membri dell'espressione per la derivata prima temporale del raggio  $l$ :

$$\frac{1}{2} \frac{dl^2}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{GM}{l}. \quad (3.3)$$

Quest'equazione esprime la legge di conservazione dell'energia per unità di massa. Se ora si integra:

$$\dot{l}^2 = \frac{2GM}{l} + C, \quad (3.4)$$

dove la costante di integrazione  $C$  è proporzionale all'energia totale. Poniamo:

$$C \equiv -K \left( \frac{d_c c^2}{a_0} \right). \quad (3.5)$$

A questo punto mediante alcuni semplici passaggi algebrici si ottiene la prima equazione di Friedmann:

$$\dot{a}^2 + Kc^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2. \quad (3.6)$$

Analizzando il segno della costante  $C$  si possono trarre informazioni riguardo le componenti dell'energia totale. Con un' opportuna normalizzazione si può fare in modo che  $K$  assuma solo i valori  $(1, 0, -1)$ :

- ( $C > 0 \longrightarrow K = -1$ ): *energia totale positiva*

La componente cinetica prevale su quella potenziale gravitazionale. La geometria è iperbolica e l'espansione non cessa mai.

- ( $C = 0 \longrightarrow K = 0$ ): *energia totale è nulla*

Il termine cinetico e quello potenziale sono in equilibrio. La geometria è piatta e l'espansione cessa a  $t \longrightarrow \infty$ .

- ( $C < 0 \longrightarrow K = 1$ ): *energia totale è negativa*

L'energia potenziale è maggiore di quella cinetica. In questo caso la geometria è sferica e può accadere che l'espansione ad un certo tempo finisca e sia poi seguita da un collasso.

La seconda equazione di Friedmann si ottiene supponendo che all'interno della sfera sia presente materia relativistica. La densità  $\rho$  va sostituita con una densità efficace fornita dalla Relatività Generale:

$$\rho_{eff} = \rho + 3\frac{P}{c^2}; \quad (3.7)$$

in quest'equazione  $\rho$  indica la densità di energia e  $P$  la pressione. L'equazione del moto diventa:

$$\frac{d^2l}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G \left( \rho + 3\frac{P}{c^2} \right) l, \quad (3.8)$$

da cui si ottiene la seconda equazione di Friedmann:

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G \left( \rho + 3\frac{P}{c^2} \right) a. \quad (3.9)$$

Bisogna notare che un Universo la cui espansione è descritta da questa espressione per essere statico ( $\ddot{a}(t) = 0$ ) deve soddisfare la seguente condizione:

$$\rho = -3\frac{P}{c^2}. \quad (3.10)$$

Questo implica che o la densità di energia  $\rho$  o la pressione  $P$  debbano essere negative.

## 3.2 Equazione di stato

Un'importante assunzione che si fa nei modelli cosmologici di Friedmann è quella di considerare l'Universo come un fluido perfetto che si espande in maniera adiabatica:

$$\delta Q = 0 \quad \Longrightarrow \quad dE = -PdV, \quad (3.11)$$

da cui si ricava la seguente condizione:

$$d(\rho c^2 a^3) = -Pda^3. \quad (3.12)$$

Per trovare le soluzioni di questi modelli è necessario specificare l'equazione di stato  $P(\rho)$  per il fluido perfetto contenuto nell'Universo. Cerchiamo questa funzione nella forma generale:

$$P = \omega \rho c^2, \quad (3.13)$$

con il parametro  $\omega$  che dipende dalle proprietà del fluido e il cui valore, per la materia ordinaria, può variare nell'intervallo di Zel'dovich:

$$0 \leq \omega < 1. \quad (3.14)$$

Per il momento consideriamo che  $\omega$  sia costante nel tempo.

Individuiamo due casi:

- $\omega \simeq 0$ : *materia*

Questo caso rappresenta un fluido di materia non relativistica (polvere, gas, materia aggregata). La pressione risulta trascurabile nella dinamica globale. Consideriamo un fluido di particelle di massa  $m_p$ , in equilibrio a temperatura  $T$ :

$$P = nK_B T = \frac{\rho_m}{m_p} K_B T = \frac{K_B T}{m_p c^2} \rho_m c^2 = \omega(T) \rho_m c^2 \simeq 0, \quad (3.15)$$

dove  $n$  è la densità numerica,  $K_B$  la costante di Boltzmann e  $\rho_m$  la densità del fluido di materia. Per una particella di questo tipo di fluido l'energia termica è molto minore dell'energia a riposo :

$$K_B T \ll m_p c^2, \quad (3.16)$$

pertanto:

$$\omega(T) \simeq 0. \quad (3.17)$$

- $\omega = \frac{1}{3}$ : *radiazione*

Questo caso è il caso di un fluido radiativo non-degenere di particelle ultra-relativistiche. All'equilibrio termico, l'equazione di stato risulta essere:

$$P = \frac{1}{3}\rho_r c^2, \quad (3.18)$$

dove  $\rho_r$  è la densità del fluido di radiazione

### 3.2.1 Variazione nel tempo della densità

Vediamo ora come varia la densità del fluido perfetto nel tempo. Consideriamo l'equazione (3.12), che esprime la condizione di espansione adiabatica, e inseriamo in essa la forma generale dell'equazione di stato:

$$d(\rho a^3 c^2) = -P da^3 = -\omega \rho c^2 da^3; \quad (3.19)$$

tralasciando i semplici passaggi algebrici si ottiene l'equazione:

$$-3(1 + \omega) \frac{da}{a} = \frac{d\rho}{\rho}; \quad (3.20)$$

integrando entrambi i membri si ottiene la seguente relazione, che mostra l'andamento della densità in funzione del fattore di scala:

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\omega)}. \quad (3.21)$$

In funzione del redshift  $z$  diventa:

$$\rho = \rho_0 (1 + z)^{3(1+\omega)}. \quad (3.22)$$

Pertanto per i due tipi di fluido precedentemente introdotti si ha:

- *materia*

$$\rho_m = \rho_{0m} (1 + z)^3. \quad (3.23)$$

- *radiazione*

$$\rho_r = \rho_{0r} (1 + z)^4. \quad (3.24)$$

Si nota quindi che  $\rho_m$  e  $\rho_r$  variano nel tempo in modo diverso. La densità della materia ordinaria decresce con il cubo del fattore di scala mentre la densità di radiazione decresce con la quarta potenza del fattore di scala, questo a causa dell'effetto di redshift cosmologico che agisce sulla lunghezza d'onda della componente relativistica.

Al tempo attuale la densità di materia è circa  $10^4$  volte superiore a quella della radiazione, esiste allora un momento del passato in cui radiazione e materia avevano stessa densità; questo momento viene chiamato equivalenza.

### 3.3 Modelli di Universo dominati da materia e radiazione

I modelli di Universo dominati da materia e radiazione sono descritti dalle soluzioni delle seguenti tre equazioni:

$$\dot{a}^2 + Kc^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2, \quad (3.25)$$

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G\left(\rho + 3\frac{P}{c^2}\right)a, \quad (3.26)$$

$$d(\rho c^2 a^3) = -Pda^3. \quad (3.27)$$

Le prime due sono le equazioni di Friedmann e la terza è la condizione di espansione adiabatica. Come si nota subito, non sono modelli di Universo statico.

Risolvendo le (3,25),(3,26),(3,27) si può determinare l'evoluzione del fattore di scala  $a(t)$  per i tre tipi di geometria dell'Universo e, se si conosce l'equazione di stato del fluido perfetto, anche  $\rho(t)$  e  $P(t)$ .

#### 3.3.1 Densità critica e parametro di densità

Si consideri inizialmente un Universo piatto ( $K = 0$ ), considerando  $t = t_0$ , la prima equazione di Friedmann diventa:

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0. \quad (3.28)$$

Definiamo la densità critica al tempo presente  $t_0$  come:

$$\rho_{0c} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (3.29)$$

Introduciamo ora una grandezza fondamentale: il parametro di densità:

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}; \quad (3.30)$$

al tempo presente il parametro di densità risulta essere:

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{0c}}. \quad (3.31)$$

### 3.3.2 Equazione di Friedmann in funzione del parametro di densità

Se consideriamo il caso di un Universo dominato da materia e radiazione, è utile introdurre i concetti di densità totale  $\Omega$  e densità di curvatura dell'Universo  $\Omega_K$ :

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_r, \quad (3.32)$$

$$\Omega_K = 1 - \Omega; \quad (3.33)$$

dove  $\Omega_m$  è il parametro di densità della materia e  $\Omega_r$  quello della densità di radiazione.

È possibile riscrivere l'equazione di Friedmann, al tempo  $t = t_0$ , in termini del parametro di densità:

$$H_0^2(1 - \Omega_0) = H_0^2\Omega_{0K} = -\frac{Kc^2}{a_0^2}. \quad (3.34)$$

In base al valore che assume  $\Omega_0$  si determina quindi la geometria dell'Universo:

- $\Omega_0 = 1$ : *Universo piatto*

La caratteristica di questi modelli d'Universo è che il fattore di scala  $a(t)$  cresce indefinitamente con il tempo con il parametro di decelerazione  $q$  che rimane costante e positivo. All'aumentare del fattore  $\omega$  e quindi della pressione, l'espansione frena. Al contrario, un valore negativo del parametro  $\omega$ , corrispondente ad un fluido con pressione negativa, può produrre un'espansione accelerata.

- $\Omega_0 < 1$ : *Universo aperto*

A tempi sufficientemente vicini al Big Bang si ha un comportamento analogo al modello piatto, quindi in un Universo molto giovane si può ignorare il termine di curvatura. Come nel modello piatto, il fattore di scala cresce indefinitamente, la sua derivata  $\dot{a}$  non si annulla mai e il parametro  $q$  tende a zero.

- $\Omega_0 > 1$ : *Universo chiuso*

Anche in questo caso per un Universo molto giovane l'andamento del fattore di scala è approssimabile con quello del modello piatto. Diversamente dai modelli precedenti, esiste un tempo finito ( $\bar{t}$ ) tale per cui:

$$\dot{a}(\bar{t}) = 0. \quad (3.35)$$

Si ha pertanto che la funzione  $a(t)$  è simmetrica rispetto al valore  $a(\bar{t})$ . Al tempo  $t_f = 2\bar{t}$  si verifica un'altra singolarità, detta collasso finale, in posizione simmetrica rispetto al Big Bang.

Il seguente grafico (figura 3.1) mostra l'andamento del fattore di scala  $a(t)$  per i tre modelli sopra descritti.

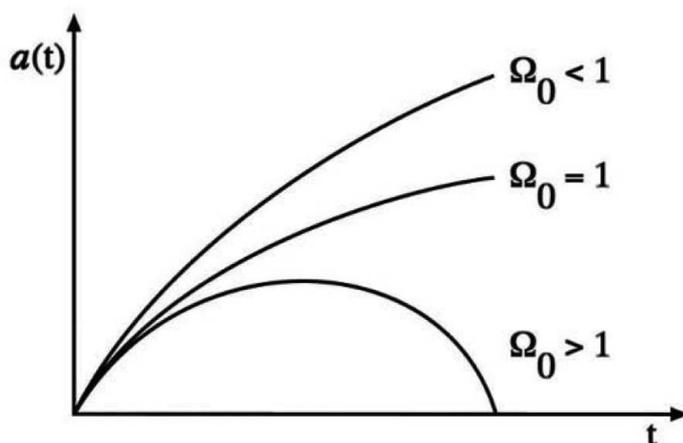


Figura 3.1: Evoluzione del parametro di espansione  $a(t)$  nei tre casi di Universo descritti. Figura tratta da *Cosmology*, Coles e Lucchin

### 3.3.3 Considerazioni dinamiche

Questi modelli di Universo hanno la proprietà che ad un dato tempo  $t = 0$  la densità  $\rho$  diverge, il fattore di scala  $a(t)$  si annulla e si verifica la singolarità del Big Bang:

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\omega)} \longrightarrow \infty. \quad (3.36)$$

Per materia e radiazione il parametro  $\omega$  è compreso nell'intervallo di Zel'dovich, da cui segue che  $P > 0$  e si ha:

$$\ddot{a}(t) < 0. \quad (3.37)$$

L'Universo si trova in una condizione di espansione decelerata. Le osservazioni mostrano inoltre che:

$$\dot{a}(t) > 0. \quad (3.38)$$

Pertanto l'andamento del fattore di scala in funzione del tempo è rappresentato da una funzione concava, come mostrato nel grafico (figura 3.1)

Essendo la funzione  $a(t)$  concava, il tempo tra la singolarità e un generico tempo  $t$  è sempre minore del tempo caratteristico di espansione dell'Universo dato da:

$$\tau_H = \frac{1}{H} = \frac{a}{\dot{a}}. \quad (3.39)$$

### 3.4 Modelli di Universo con costante cosmologica

Introduciamo ora il termine di costante cosmologica. I modelli di Universo finora discussi descrivono tutti un Universo in espansione; Einstein, al fine di ottenere un'equazione che ne descrivesse uno stazionario, introdusse nell'equazione di campo della Relatività Generale un termine definito costante cosmologica e indicata con  $\Lambda$ . Con un'opportuna scelta del termine  $\Lambda$  si può ottenere un modello di Universo statico.

Dall'equazione di campo così modificata si hanno le seguenti relazioni per pressione  $\tilde{P}$  e densità  $\tilde{\rho}$  effettive:

$$\tilde{P} = P - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}, \quad (3.40)$$

$$\tilde{\rho} = \rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}; \quad (3.41)$$

si noti che  $\Lambda$  dimensionalmente è  $[L]^{-2}$ .

Per un Universo descritto dalla metrica di Robertson-Walker, le equazioni di Friedmann assumono la seguente forma:

$$\begin{aligned}\dot{a}^2 + Kc^2 &= \frac{8}{3}\pi G\tilde{\rho}a^2 \\ &= \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 + \frac{\Lambda c^2 a^2}{3},\end{aligned}\tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}\ddot{a} &= -\frac{4}{3}\pi G\left(\tilde{\rho} + 3\frac{\tilde{P}}{c^2}\right)a \\ &= -\frac{4}{3}\pi G\left(\rho + 3\frac{P}{c^2}\right)a + \frac{\Lambda c^2 a}{3}.\end{aligned}\tag{3.43}$$

Queste espressioni ammettono una soluzione statica ( $\ddot{a} = \dot{a} = 0$ ) per:

$$\tilde{\rho} = -3\frac{\tilde{P}}{c^2} = \frac{3Kc^2}{8\pi Ga^2}.\tag{3.44}$$

Consideriamo il modello d'Universo di De Sitter che descrive un Universo piatto e vuoto ( $p = \rho = 0$ ), dove l'unica componente è rappresentata dalla costante cosmologica. Dalle espressioni della pressione e della densità effettive si ottiene:

$$\tilde{P} = -\tilde{\rho}c^2 = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}.\tag{3.45}$$

Dal momento che l'Universo è vuoto, questa è l'equazione di stato della costante cosmologica intesa come un fluido perfetto. In altre parole questo modello di Universo mette in luce il fatto che la costante cosmologica può essere considerata come un fluido perfetto in grado di contrastare il collasso gravitazionale, avente una pressione negativa ed un'equazione di stato del tipo:

$$P = -\rho_\Lambda c^2.\tag{3.46}$$

Si tratta quindi di un fluido perfetto con parametro  $\omega$  fuori dall'intervallo di Zel'dovich:

$$\omega = -1.\tag{3.47}$$

La densità del fluido espressa in termini della costante cosmologica è:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}.\tag{3.48}$$

Bisogna notare che la densità  $\rho_\Lambda$  non varia con l'espansione cosmologica: rimane costante nel tempo e nello spazio. Se consideriamo l'equazione (3,22),

che descrive l'andamento della densità in funzione del redshift, per  $w = -1$ , si ha infatti che:

$$\rho_\Lambda = \rho_{0\Lambda}. \quad (3.49)$$

Sostituendo l'equazione di stato all'interno della prima equazione di Friedmann si può determinare un valore critico della costante cosmologica:

$$H^2 = \frac{\Lambda c^2}{3} \quad \implies \quad \Lambda_c = \frac{3H^2}{c^2}. \quad (3.50)$$

Calcolata al tempo presente:

$$\Lambda_{0c} = \frac{3H_0^2}{c^2}. \quad (3.51)$$

Definiamo ora il relativo parametro di densità:

$$\Omega_{0\Lambda} = \frac{\Lambda_0}{\Lambda_{0c}}. \quad (3.52)$$

Considerando sempre un Universo privo di materia ordinaria (non necessariamente piatto), riscriviamo l'equazione di Friedmann in funzione del parametro di densità  $\Omega_{0\Lambda}$ :

$$H_0^2(1 - \Omega_{0\Lambda}) = -\frac{Kc^2}{a_0^2}. \quad (3.53)$$

Il modello di de Sitter risulta utile per la descrizione dell'Universo nello stato inflazionario, mentre è di scarso interesse per quella dell'Universo al tempo attuale.

### 3.5 Caso generale: modelli di Universo a multi-componenti

I modelli cosmologici composti da fluidi aventi il parametro  $\omega$  compreso nell'intervallo:

$$-\frac{1}{3} \leq \omega \leq 1, \quad (3.54)$$

come quelli per Universi dominati da materia e radiazione, prevedono il verificarsi della singolarità del Big Bang.

L'equazione di Friedmann può essere formulata in modo da rendere implicito il parametro di curvatura  $K$ . Inseriamo la funzione di stato in forma generale (3.13) e il parametro di densità relativo alla componente con parametro  $\omega$  nell'equazione di stato, definito come:

$$\Omega_{0\omega} = \frac{\rho_{0\omega}}{\rho_{0c}}. \quad (3.55)$$

Calcolata al tempo presente diventa:

$$\frac{\dot{a}^2}{a_0^2} = H_0^2 \left[ \Omega_{0\omega} \left( \frac{a_0}{a} \right)^{1+3\omega} + 1 - \Omega_{0\omega} \right]; \quad (3.56)$$

in termini del parametro di Hubble:

$$H^2(t) = H_0^2 \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 \left[ \Omega_{0\omega} \left( \frac{a_0}{a} \right)^{1+3\omega} + 1 - \Omega_{0\omega} \right]. \quad (3.57)$$

Per studiare la dinamica di un Universo composto da un fluido a più componenti si riscrive l'equazione (3.56) esplicitando tutte le componenti:

$$\frac{\dot{a}^2}{a_0^2} = H_0^2 \left[ \sum_i \Omega_{0\omega_i} \left( \frac{a_0}{a} \right)^{1+3\omega_i} + 1 - \sum_i \Omega_{0\omega_i} \right]. \quad (3.58)$$

Nel caso in cui si considerino le componenti di materia, radiazione e costante cosmologica, si ottiene la seguente formula generale:

$$\frac{\dot{a}^2}{a_0^2} = H_0^2 \left[ \Omega_{0m} \left( \frac{a_0}{a} \right) + \Omega_{0r} \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 + \Omega_{0\Lambda} \left( \frac{a_0}{a} \right)^{-2} + (1 - \Omega_{0m} + \Omega_{0r} + \Omega_{0\Lambda}) \right], \quad (3.59)$$

che può essere scritta anche nella forma:

$$H^2(z) = H_0^2 \left[ \Omega_{0r}(1+z)^4 + \Omega_{0m}(1+z)^3 + \Omega_{0K}(1+z)^2 + \Omega_{0\Lambda} \right], \quad (3.60)$$

dove:

$$\Omega_{0K} = 1 - (\Omega_{0r} + \Omega_{0m} + \Omega_{0\Lambda}). \quad (3.61)$$

È importante notare che il valore di  $\Omega_{0K}$  determina la geometria, ma le sue componenti determinano l'accelerazione o la decelerazione dell'espansione. Infatti se il termine della costante cosmologica  $\Omega_{\Lambda}$  è positivo allora si avrà una tendenza nell'accelerazione dell'Universo.

Per studiare in modo quantitativo questa accelerazione bisogna considerare il parametro di decelerazione  $q$ :

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}, \quad (3.62)$$

che assume un valore negativo nel caso in cui l'espansione stia accelerando.

Il parametro  $q$  può essere scritto in funzione dei parametri di densità. Consideriamo l'Universo al tempo attuale in cui domina la materia e la costante cosmologica, mentre la radiazione, dominante nell'Universo primordiale, è considerata trascurabile. La seconda equazione di Friedmann (3.26) diventa:

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G \left( \rho_{\Lambda} + 3\frac{P_{\Lambda}}{c^2} + \rho_m + 3\frac{P_m}{c^2} \right) a, \quad (3.63)$$

sostituendo nell'espressione:

$$\begin{aligned} P_m &\simeq 0, \\ P_\Lambda &= -\rho c^2, \\ H &= \frac{\dot{a}}{a}, \\ \rho_{cr} &= \frac{3H^2}{8\pi G}. \end{aligned}$$

si ottiene:

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = \frac{4\pi G}{3H^2}(\rho_m - 2\rho_\Lambda) = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda, \quad (3.64)$$

pertanto l'espressione di  $q$  in funzione dei parametri di densità risulta essere:

$$q = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda. \quad (3.65)$$

Se il parametro di densità della costante cosmologica ha valore positivo, allora in un determinato istante del passato il parametro  $q$  ha cambiato segno passando da positivo a negativo. A questo istante, corrispondente ad un redshift  $z_F$ , l'andamento del fattore di scala  $a(t)$  presenta un flesso poiché manifesta un cambio di curvatura. In  $z_F$  l'Universo passa da una condizione d'espansione decelerata ad una accelerata.

Durante la fase precedente  $z_F$ , l'effetto della materia è stato dominante. Con l'espandersi dell'Universo la materia va rarefacendosi e la mutua forza di gravità diminuisce, la costante cosmologica invece rimane costante. Si arriva ad un tempo, detto d'equivalenza, al quale materia e costante cosmologica presentano stessa densità. Da questo istante in poi la costante cosmologica comincia a prendere il sopravvento e arrivati al redshift di flesso avviene il cambio fra decelerazione e accelerazione dell'espansione cosmologica.

Per calcolare il redshift  $z_F$  si pone  $q = 0$  e l'equazione (3.65) diventa:

$$\frac{\Omega_m}{2} = \Omega_\Lambda, \quad (3.66)$$

da cui:

$$\frac{\rho_m}{2} = \rho_\Lambda. \quad (3.67)$$

La densità di materia è funzione del redshift, mentre la densità della costante cosmologica è costante, allora:

$$\frac{\rho_{0m}}{2}(1 + z_F)^3 = \rho_{0\Lambda}, \quad (3.68)$$

tornando ai parametri di densità:

$$\frac{\Omega_{0m}}{2}(1+z_F)^3 = \Omega_{0\Lambda}. \quad (3.69)$$

Se ora risolviamo questa equazione in funzione di  $z_F$  si ha:

$$z_F = \left( \frac{2\Omega_{0\Lambda}}{\Omega_{0m}} \right)^{1/3} - 1. \quad (3.70)$$

In modo analogo si può calcolare il redshift  $z_E$ , corrispondente al tempo d'equivalenza in densità tra materia e costante cosmologica. Partendo dalla condizione:

$$\rho_m = \rho_\Lambda, \quad (3.71)$$

si ottiene:

$$z_E = \left( \frac{\Omega_{0\Lambda}}{\Omega_{0m}} \right)^{1/3} - 1. \quad (3.72)$$

Bisogna tenere conto che in un Universo accelerato la relazione tra la distanza comovente  $d_c$  e il redshift  $z$  cambia rispetto a quella che si ha in un Universo che sta decelerando; questo ha degli enormi effetti sulla distanza di luminosità.

Nel grafico (figura 3.2) viene mostrato l'andamento della distanza di luminosità in funzione del redshift. Si noti come, a parità di redshift, nell'Universo con costante cosmologica,  $d_L$  cresca molto più rapidamente. Questo avviene perchè il redshift che si misura da una sorgente lontana dipende solo dalla velocità di regressione nel momento in cui la luce che si osserva è stata emessa, invece la distanza di luminosità dipende da come l'Universo si è espanso fino a quel particolare momento. Quindi in un Universo dominato da materia e privo di costante cosmologica, in cui l'espansione sta decelerando, la distanza  $d_L$  è minore di quella misurata in un Universo dominato da costante cosmologica positiva, in cui invece l'espansione sta accelerando.

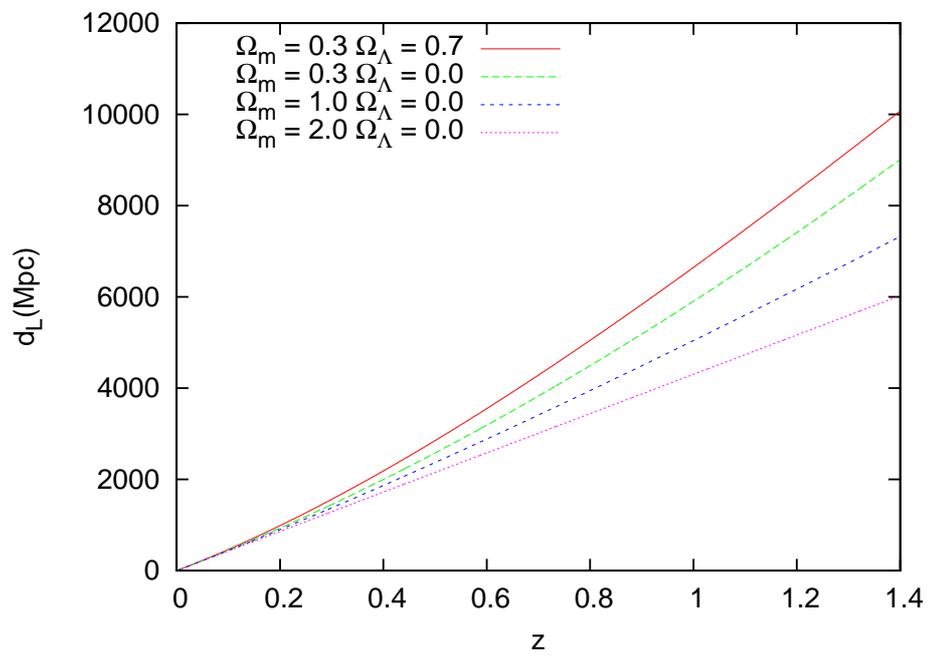


Figura 3.2: distanza di luminosità in funzione del redshift, al variare dei parametri cosmologici.



# Capitolo 4

## Supernovae

In questa seconda parte verrà presentata una panoramica generale sulle esplosioni di Supernovae (SNe). Verrà fornita una classificazione basata sulle proprietà osservative e presentati modelli che descrivono i progenitori e il meccanismo che le origina. Infine ci concentreremo su una particolare sottoclasse, le SNe di tipo Ia, che per la loro omogeneità si prestano ad essere utilizzate come candele standard, andando così a ricoprire un ruolo fondamentale in cosmologia permettendo il calcolo delle distanze ad alto redshift.

### 4.1 Generalità sulle Supernovae

Le Supernovae (SNe) sono eventi violenti che caratterizzano gli ultimi stadi della fase evolutiva delle stelle di grande massa. Durante l'esplosione viene rilasciata una grande quantità di energia cinetica  $\sim 10^{51} \text{erg}$ , di cui ne viene irradiata  $\sim 10^{49} \text{erg}$ .

La luminosità assoluta subisce un drastico aumento in pochi giorni. Dopo aver raggiunto il picco, la luminosità decresce nel giro di qualche centinaia di giorni, fino a che le SNe diventano praticamente invisibili.

Il materiale stellare durante l'esplosione viene espulso a grande velocità ( $\sim 10\%$  della velocità della luce) generando un'onda d'urto nel mezzo interstellare (ISM) che produce un involuppo di gas e polveri in espansione, detto Supernovae Remnant.

Le SNe giocano un ruolo fondamentale nell'arricchimento dell' ISM poiché espellono in esso gli elementi pesanti prodotti dai fenomeni di nucleosintesi durante la vita della stella progenitrice.

In tempi moderni non è stata osservata nessuna SN nella nostra galassia, anche se si presume ne avvenga una ogni 20 anni circa. A partire dagli anni 30-40 del secolo scorso si è cominciato a ricercare in modo sistematico questi

oggetti e al giorno d'oggi vengono scoperte circa 100÷150 SNe extragalattiche all'anno.

Per quanto riguarda la nomenclatura è stata adottata la convenzione di chiamare le SNe con l'anno in cui sono state scoperte seguito da una lettera che indica l'ordine all'interno di quel determinato anno: per esempio l'oggetto 1992G è la settima SNe scoperta nel 1992 (SNe di tipo Ia osservata il 9 febbraio 1992 da Shunji Sasaki nella galassia NGC 3294).

## 4.2 Classificazione

La moderna classificazione delle SNe si deve a Minkowski e si basa sulle osservazioni spettroscopiche. Lo studio delle righe spettrali ha permesso di distinguere due macroclassi: le SNe di tipo I, definite dall'assenza di righe d'assorbimento dell'idrogeno neutro, e le SNe di tipo II, nello spettro delle quali invece tali righe risultano essere presenti. Altro utile strumento per la classificazione e lo studio delle SNe è la loro curva di luce, la quale mostra l'andamento temporale della luminosità in una banda fissata.

Lo spettro delle SNe è composto da un continuo termico sovrapposto ad un profilo discreto di tipo P-Cygni, caratteristico di oggetti con un involucro esterno di gas in rapida espansione. Lo spettro pertanto conferma che le Supernovae sono stelle in fase esplosiva.

Nelle prime fasi, a causa della temperatura estremamente elevata, il continuo prevale sulle righe d'emissione e per l'alta densità dell'involucro esterno difficilmente si possono ottenere informazioni sulle strutture interne. Con il diminuire della temperatura e della densità degli strati esterni prevale lo spettro d'emissione e diventa possibile osservare la radiazione emessa dalle regioni più interne, ricavando informazioni che permettono di far luce sulle differenze fisiche tra le varie SNe.

### 4.2.1 SNe di tipo I

Le SNe di tipo I sono caratterizzate dall'assenza delle righe di Balmer. Presentano una curva di luce con un profilo caratteristico e la maggior parte della luminosità è emessa nell'ottico. Inoltre possono risultare più brillanti anche di due magnitudini rispetto alle SNe di tipo II.

A causa di differenze negli spettri e nelle curve di luce si possono distinguere tre sottoclassi:

- *SNe di tipo Ia*

Definite dalla presenza di una profonda riga d'assorbimento a 6150 Å, vicino al massimo di luminosità, dovuta al Silicio. Dalla profondità

della riga è possibile trarre informazioni sull'abbondanza dell'elemento che l'ha prodotta, pertanto si deduce che nelle SNe Ia il silicio è presente in grande quantità negli strati esterni. Le SNe Ia presentano caratteristiche uniformi; si è scoperta inoltre una correlazione tra la luminosità di picco e la larghezza della curva di luce. La relazione "picco-larghezza curva" ha reso possibile la calibrazione della magnitudine assoluta, permettendo così di utilizzare le SNe Ia come indicatori di distanza. Costituiscono all'incirca il 70% di tutte le SNe osservate. Sono presenti in quasi tutte le galassie e sono associate a popolazioni stellari vecchie.

- *SNe di tipo Ib e Ic*

Queste tipologie di SNe non presentano la riga d'assorbimento del silicio. Si differenziano tra loro perchè nello spettro delle Ib, nel mese successivo al picco, è presente un profondo assorbimento dovuto a HeI. Questa distinzione tra le due sottoclassi non è sempre particolarmente netta, come lo può essere quella con le SNe Ia; spesso ci si riferisce ad esse come SNe Ib/c. Si ritiene che le SNe Ib/c siano prodotte da fenomeni simili tra loro in cui la differenza sostanziale è la presenza di elementi diversi nella fotosfera del progenitore nel momento dell'esplosione. Le SNe Ib/c presentano un picco di luminosità più debole di circa 1,5 magnitudini rispetto alle SNe Ia. Lo spettro si distingue da quello delle SNe Ia, perchè all'incirca dopo un centinaio di giorni, quello delle SNe Ia è dominato dalle righe del Fe, mentre quello delle SNe Ib/c dalle righe proibite dell'O. Queste due classi sono associate ai bracci di galassie a spirale, pertanto i loro progenitori devono essere stelle giovani e massicce.

## 4.2.2 Supernovae di tipo II

Sono una classe estremamente disomogenea sia da un punto di vista spettroscopico che fotometrico: hanno una curva di luce che varia da caso a caso e non mostra un profilo tipico. Sono associate a galassie a spirale e in particolar modo sono osservate nei bracci dove è presente grande formazione stellare. A differenza delle SNe di tipo I, presentano righe di Balmer ed emettono maggiormente in UV.

In base alla curva di luce nel visuale (V) le SNe di tipo II sono suddivise (figura 5.1) in Lineari (SN II-L) e Plateau (SN II-P):

- *SNe di tipo II-L*

Mostrano una crescita verso il picco molto veloce, a cui segue un declino lineare.

- *SNe di tipo II-P*

Presentano un picco seguito da breve discesa. Dopo questa discesa la curva di luce presenta un plateau: la magnitudine si assesta, rimanendo costante per un periodo che va dai 2 ai 3 mesi. Dopo questo periodo la luminosità subisce un rapido declino.

Anche in questo caso la distinzione tra le due classi non è netta, a causa anche dell'eterogeneità delle curve di luce. Esistono oggetti dalle caratteristiche intermedie. Il seguente grafico (figura 4.1) confronta l'andamento delle SNe II-L e SNe-P.

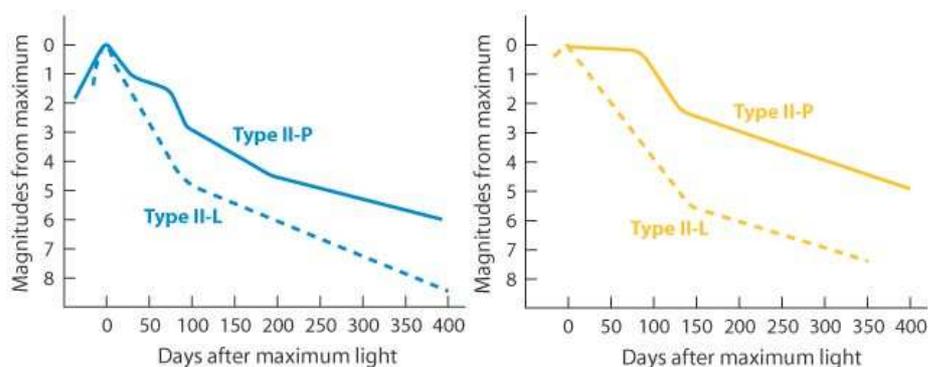


Figura 4.1: curve di luce modellizzate di SNe II-L e SNe II-P in banda visuale. Doggett, J. B. & Branch, D. *Astronomical J*, vol. 90, Nov. 1985

### 4.3 Progenitori

Per comprendere le proprietà fisiche delle SNe è necessario sviluppare un modello teorico che descriva i progenitori ed il meccanismo che genera l'esplosione. Questi modelli per essere consistenti devono tener conto dell'evoluzione delle SNe mostrata dagli spettri e dalle curve di luce. Si presume quindi che le SNe Ia, le quali non mostrano righe dell'idrogeno, derivino da stelle evolute di massa piccola, in cui i bruciamenti nucleari sono esauriti da tempo e l'involuppo esterno di idrogeno è andato perduto. Le SNe I b/c e le SNe II invece dovrebbero avere origine da progenitori più massicci e giovani, ancora in fase di bruciamento di H e He nelle shell più esterne (per quanto riguarda

le SNe I b/c in particolare esse hanno perso la shell più esterna di H, infatti nello spettro non si notano le righe di Balmer) al momento dell'esplosione.

In base alle ipotesi sui progenitori e alle osservazioni spettroscopiche e fotometriche si possono distinguere essenzialmente due meccanismi diversi che generano le esplosioni. Si distinguono pertanto: le SNe a collasso di core e le SNe termonucleari.

### 4.3.1 SNe a collasso di core

Si tratta di una tipologia di SNe che si forma dall'esplosione di stelle di massa intermedia o elevata (figura 4.2). Nelle stelle massicce, con masse superiori a  $12M_{\odot}$ , i fenomeni di nucleosintesi arrivano a produrre nel nucleo l'isotopo  $^{56}Fe$ . Tale elemento non è impiegabile nei processi di nucleosintesi in quanto possiede il più elevato valore di energia di legame per nucleone. Il  $^{56}Fe$  si accumula nel nucleo stellare e nel momento in cui viene superata la massa limite di  $1.44M_{\odot}$  (limite di Chandrasekhar) inizia il collasso andando a formare una stella compatta di materia degenere. Il limite di Chandrasekhar rappresenta la massa limite per una struttura sorretta dalla pressione di degenerazione elettronica.

Durante il collasso avvengono due importanti fenomeni: la fotodisintegrazione del  $^{56}Fe$  e la produzione di neutroni per cattura elettronica. Il primo processo prevede la decomposizione dei nuclei di ferro in nuclei di elio e neutroni liberi per opera di fotoni gamma ad alta energia prodotti durante il collasso. All'aumentare della densità aumenta la probabilità che protoni catturino elettroni (processo di cattura elettronica) andando a produrre neutroni e neutrini elettronici; quest'ultimi sottraggono energia e accelerano il collasso

I neutrini prodotti da questa reazione sono i responsabili dell'esplosione di SNe: una piccola frazione di essi ( $\sim 1\%$ ) cede la propria energia ( $\sim 10^{51}erg$ ) agli strati sovrastanti il nucleo, dando inizio all'esplosione.

Le SNe lasciano come residuo, oltre ad un resto nebuloso, una stella compatta di materia degenere. A seconda della massa del progenitore si possono formare due differenti residui: una stella di neutroni o un buco nero.

Ricollegandoci alla classificazione di Minkowski si può presumere che SNe II e SNe I b/c si originino con questo tipo di meccanismo. Si collegano la maggior parte delle SNe II a progenitori di massa dell'ordine di  $12M_{\odot}$ . Si pensa invece che le SNe I b/c siano associate a progenitori molto giovani e molto massicci, con massa di circa  $30M_{\odot}$ , i quali hanno perso in precedenza l'involuppo di idrogeno (anche quello di elio, nel caso delle SNe Ic) a causa di violente pulsazioni.

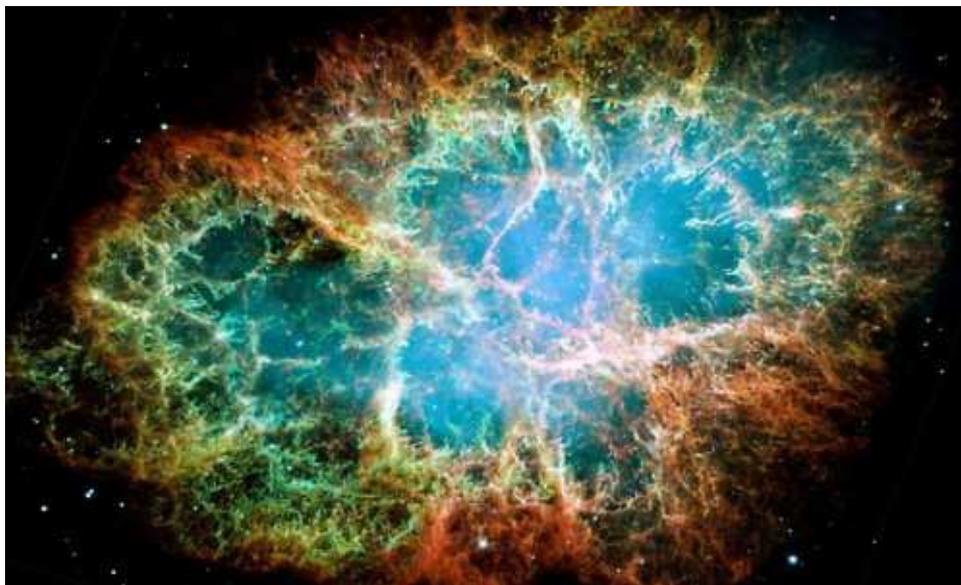


Figura 4.2: Immagine della nebulosa del Granchio ottenuta dal Hubble Space Telescope. Esempio di supernova a collasso di core. Credit: NASA/ESA/Hubble.

### 4.3.2 SNe termonucleari

Sono SNe originate dall'esplosione di una stella in un sistema binario. Questo modello teorico spiega il meccanismo di origine delle SNe di tipo Ia.

Le SNe di tipo Ia sono prodotte dall'esplosione di nane bianche al carbonio-ossigeno (dette carbon-oxygen white dwarfs, COWDs) facenti parte di un sistema binario. Una COWD per esplodere come SNe deve raggiungere la massa limite di Chandrasekhar di  $1.44M_{\odot}$ , allora la pressione degli elettroni degeneri non è più in grado di mantenere il suo equilibrio termodinamico e inizia il collasso. Secondo l'attuale teoria di evoluzione stellare una nana bianca al carbonio-ossigeno non può avere originariamente una massa superiore a  $1.1M_{\odot}$  e pertanto la COWD deve ricevere materiale della stella compagna.

Ci sono diversi modelli che provano a spiegare la struttura del sistema binario e come avviene l'accrescimento di massa della nana bianca. I due modelli che meglio conciliano le evidenze osservative sono quelle di singola degenerare (single degenerate) e di doppia degenerare (double degenerate), figura (4.3).

- *Singola degenerare*

In questo scenario il sistema binario è inizialmente formato da due stelle di sequenza principale di massa leggermente diversa tra loro, ma intermedia ( $\sim 6 \div 8M_{\odot}$ ). La primaria, avendo massa superiore, subisce un'evoluzione più rapida e raggiunge prima la fase di nana bianca al carbonio-ossigeno. La compagna può cominciare a cederle materiale sia se si trova ancora nella sequenza principale, sia se si trova già nella fase di gigante rossa. L'incremento di pressione e densità dovuto all'aumento di massa provoca un innalzamento della temperatura all'interno del nucleo della nana bianca. Quando si raggiunge la massa limite di  $1.44M_{\odot}$  la temperatura è sufficiente a innescare il bruciamento del carbonio nel nucleo in condizioni di forte degenerazione. Tale fenomeno provoca un ulteriore aumento della temperatura nel core e la conseguente fusione dell'ossigeno. La struttura della nana bianca, regolata dalla pressione degli elettroni degeneri, è indipendente dalla temperatura e pertanto si viene a innescare un runaway termico nel nucleo, che provoca un'accelerazione drammatica delle reazioni termoneucleari, che possono arrivare a produrre il  $^{56}\text{Ni}$ . Le reazioni finiscono per destabilizzare la stella, che quindi esplose come SNe. L'esplosione disintegra la nana bianca ma la stella compagna sopravvive.

- *Doppia degenerare*

In questo modello, il sistema è composto da due nane bianche. Le due stelle perdono progressivamente il loro momento angolare sia a seguito delle interazioni magnetiche che avvengono tra loro, sia a causa dell'emissione di onde gravitazionali. Le due stelle arrivano infine a fondersi tra loro e se la massa totale dell'oggetto risultante supera la massa limite di Chandrasekhar allora si ha l'esplosione di SNe. In questo caso il sistema è distrutto e nessuna delle due stelle sopravvive.

Questi modelli permettono di capire l'omogeneità di proprietà osservate nelle SNe Ia: l'esplosione avviene quando i sistemi binari si trovano tutti nelle stesse condizioni fisiche. La differenza riscontrata tra un evento e l'altro nella luminosità di picco può essere spiegata ipotizzando che la magnitudine al massimo sia correlata alla quantità di  $^{56}\text{Ni}$  radioattivo prodotto nel nucleo. Questi scenari spiegano inoltre gran parte delle evidenze osservative riguardanti le SNe Ia, come l'assenza delle righe di idrogeno nel materiale espulso ed il fatto che esplodano in tutte le galassie, comprese quelle ellittiche che contengono prevalentemente stelle di massa piccola.

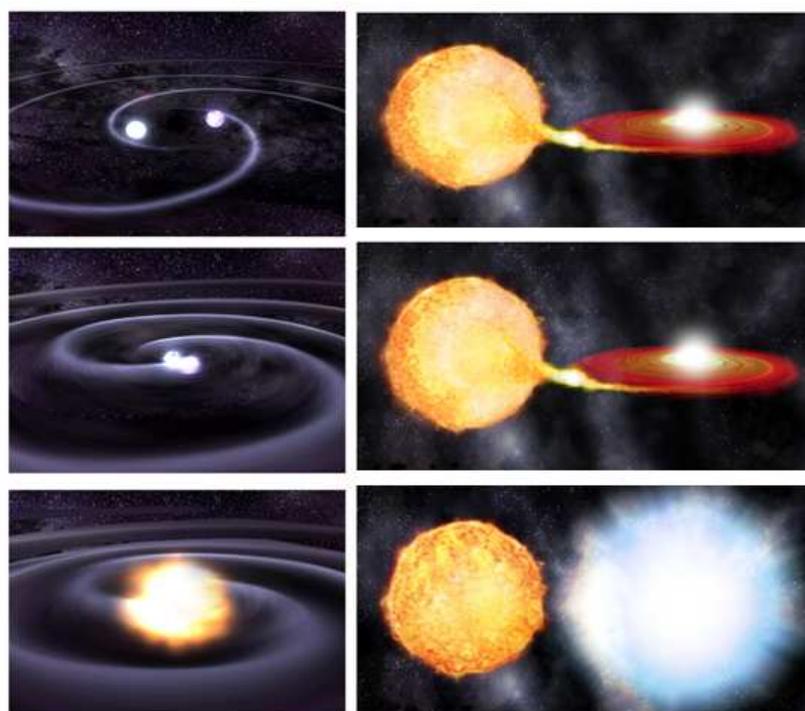


Figura 4.3: Rappresentazione artistica. Modello doppia degenere (sinistra), modello singola degenere (destra).

## 4.4 SNe di tipo Ia come indicatori di distanza

Le SNe di tipo Ia costituiscono la classe di SNe più omogenea, con spettri e curve di luce molto caratteristici. Sono le SNe con la luminosità assoluta di picco maggiore (il che permette di scoprirle a distanze maggiori), e presentano una piccola dispersione del valore di massimo. Per questi motivi sono prese come candele standard, ovvero oggetti di cui si conosce la luminosità assoluta e è possibile misurarne la distanza dal confronto con la luminosità apparente.

Misure di distanza effettuate con il sistema delle variabili cefeidi hanno permesso di calcolare la distanza di galassie ospiti di SNe Ia e calibrarne la magnitudine assoluta di picco.

Come precedentemente accennato nella sezione dedicata alla classificazione dei vari tipo di supernova, differenti SNe di tipo Ia hanno differenti picchi di luminosità. Diventa di fondamentale importanza, ai fini del loro utilizzo come candele standard, trovare un modo per ridurre l'errore di distanza prodotto da questo fenomeno. È stato scoperto esserci una relazione tra il valore di picco e la velocità con cui decresce la luminosità nel tempo. Analizziamo ora i profili delle curve di luce e i metodi per correggere tale eterogeneità.

### 4.4.1 Curve di luce e dispersione della magnitudine di picco

La maggior parte dell'emissione delle SNe Ia avviene nell'ottico, per questo motivo per le curve di luce si fa uso delle bande ottiche (U,B,V,R,I) e solo in alcuni casi del vicino infrarosso. Il profilo della curva di luce dell SNe Ia è molto caratteristico ed è caratterizzato da tre fasi distinte (figura 4.4, pannello superiore, si noti che nel grafico l'asse delle ordinate è invertito). La prima fase è antecedente al minimo della magnitudine ed è caratterizzata da una rapida crescita della curva  $-0.5mag/giorno$ ; la durata è di circa due settimane, la dipendenza è di tipo quadratico, in accordo con il fatto che il fenomeno è costituito da una sfera in espansione a temperatura praticamente costante. La fase di salita della curva termina con un picco largo 1-2 giorni, seguito da una rapida discesa con andamento lineare ed una pendenza di circa  $0.1mag/giorno$ . Dopo un mese circa dal picco, il tasso di declino diminuisce notevolmente ( $\sim 0.015mag/giorno$ ) e si ha un andamento di tipo esponenziale.

Il valore di picco in magnitudini, ottenuto dalla calibrazione con le variabili cefeidi, nella banda B risulta essere:

$$M_B = (-19.48 \pm 0.07)mag. \quad (4.1)$$

Bisogna tener conto della variazione della magnitudine al minimo che si osserva tra un fenomeno e l'altro.

La correzione della discrepanza può essere fatta in modi diversi. Nel 1993 Phillip scoprì che la magnitudine assoluta al minimo e il tasso di decrescita della curva di luce nella banda B nei 15 giorni successivi al picco sono correlati da una relazione lineare:

$$M_{max}(B) = a + b[\Delta m_{15}(B) - 1.1], \quad (4.2)$$

dove  $\Delta m_{15}(B)$  indica l'aumento di magnitudine che si osserva nei 15 giorni dopo il minimo in banda B. I parametri  $a$  e  $b$  vengono determinati dall'osservazione di SNe a basso redshift. Dopo alcuni anni si trovò che la correlazione tra  $M_{max}(B)$  e  $\Delta m_{15}(B)$  è meglio descritta da una relazione di tipo esponenziale.

Un altro metodo fu introdotto da Riess nel 1996, definito come Multi Light Curve Shape (MLCS), basato sulla costruzione di un modello di riferimento ottenuto da molte curve di luce di SNe Ia. La curva di luce osservata viene quindi parametrizzata con tre fattori: modulo di distanza, differenza tra la luminosità al massimo osservata e quella di riferimento ed infine un valore relativo all'estinzione dovuta alla polvere.

Un altro metodo, detto di Stretch Factor fu sviluppato da Perlmutter nel 1997. Lo "stretch factor metod" mostra come tutte le curve di luce possono essere rappresentate come uno stretching temporale di una curva standard. La correzione è espressa come:

$$(m_B)^{corr} = m_B + \Delta_{corr}(s); \quad (4.3)$$

la funzione correttiva  $\Delta_{corr}(s)$  è una funzione semplice e monotona del parametro  $s$ , che rappresenta il fattore di allargamento o restringimento della curva di luce rispetto al caso di riferimento, (figura 4.4).

Tutti e tre i metodi comunque si basano sull'evidenza che più brillanti sono le SNe, più lentamente evolve la curva di luce.

Qualsiasi metodo si applichi resta comunque una dispersione intrinseca alla magnitudine assoluta di picco di circa 0.17 mag. Si nota comunque che i tre metodi forniscono risultati compatibili tra loro. Le SNe così calibrate sono diventate ottime candele standard e sono utilizzate con successo in cosmologia per la misura di distanze.

#### 4.4.2 Problematiche legate al calcolo della distanza di luminosità

Oltre alla dispersione della magnitudine di picco, ci sono altri fenomeni che introducono errori nel calcolo delle distanze. Nel calcolo della magnitudine

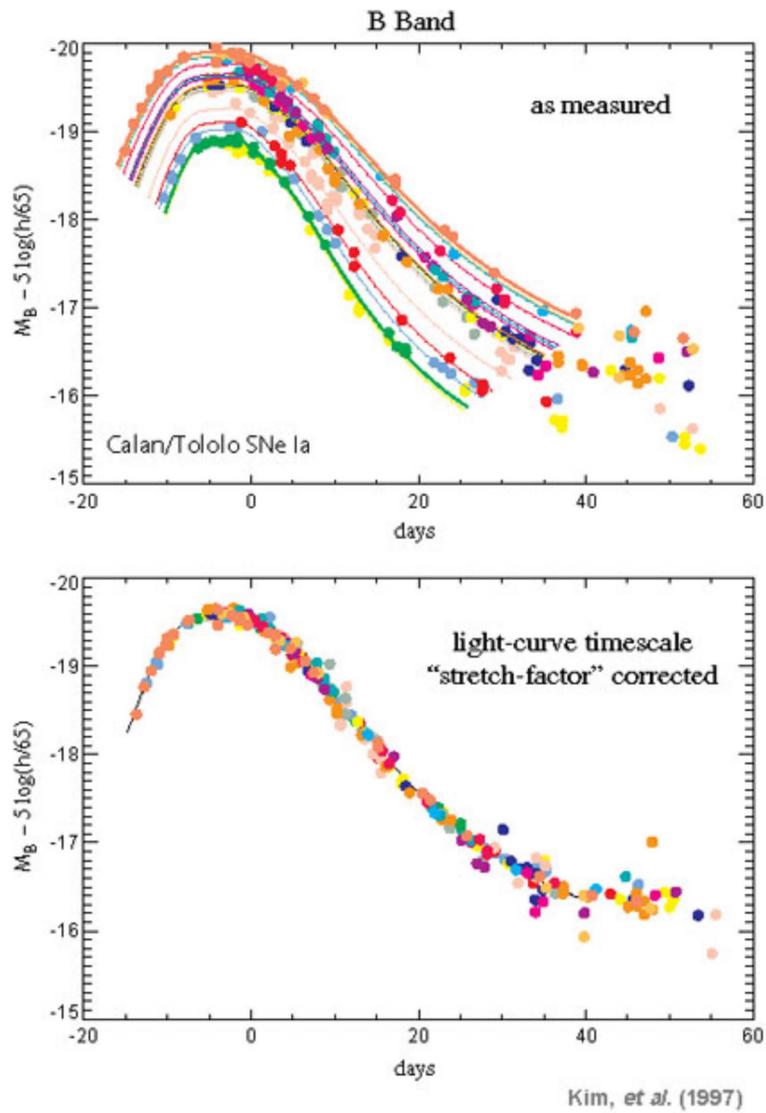


Figura 4.4: Curva di luce in banda B per alcune SNe osservate (pannello superiore). Curva di luce per differenti SNe dopo la correzione con il metodo dello Stretch factor (pannello inferiore). Kim et al. 1997

apparente relativa al picco di luminosità bisogna tener conto anche della variazione del colore dovuto al redshift e del fenomeno di estinzione galattica ed extragalattica dovuta alla polvere. Questi problemi possono essere fondamentalmente risolti confrontando le supernovae ad alto redshift con quelle a basso redshift, delle quali si possono avere ottime osservazioni riguardo spettri, magnitudini ed eventuali arrossamenti.

Nessuna di queste fonti di errore è stato in grado di mettere in discussione quello che finora è stato il risultato più importante raggiunto tramite le SNe: il fatto cioè che l'Universo sia in espansione accelerata.

# Capitolo 5

## Vincoli cosmologici da SNe Ia

### 5.1 Introduzione

In ambito internazionale i due maggiori team di ricerca che si occupano dello studio delle SNe Ia al fine di tracciare un modello dell'espansione dell'Universo sono: il Supernovae Cosmology Project (SCP) diretto da Saul Perlmutter e l'High-z Supernovae Search Team (Hz SN) creato da Brian P. Schmidt.

Nel 1998 entrambi i gruppi di ricerca condussero uno studio sulla relazione tra la distanza di luminosità e il redshift, effettuando osservazioni di SNe Ia e comparando i dati ottenuti con previsioni teoriche, al fine di trovare i parametri cosmologici che meglio li descrivessero. In questo modo determinarono per la prima volta l'evidenza di un Universo in accelerazione e di una costante cosmologica positiva.

Il SCP condusse lo studio su un campione di 42 SNe Ia con  $z$  compreso fra 0.18 e 0.83, insieme a 18 SNe a  $z < 0.1$  prese dal Calán/Tololo Supernova Survey. Lo studio esclude, con un livello di confidenza del 99% valori nulli o negativi di  $\Omega_{0\Lambda}$ . Per un Universo piatto con  $\Omega_{0K} = \Omega_{0r} = 0$  i dati indicarono:

$$\Omega_{0m} = 0.28^{+0.09}_{-0.08}(68\%CL). \quad (5.1)$$

L'Hz SN studiò originariamente 16 SNe Ia con  $z$  compreso tra 0.16 e 0.97 (inclusendo 2 SNe da SCP) insieme a 34 SNe Ia a basso redshift, concludendo che  $\Omega_{0\Lambda} > 0$  con un livello di confidenza del 99.7%. Il best-fit per un Universo piatto risultò essere:

$$\Omega_{0m} = 0.28 \pm 0.10(68\%CL). \quad (5.2)$$

Per i risultati ottenuti da entrambi i team si ha un parametro di decelerazione:

$$q_0 = -0.58, \quad (5.3)$$

il che indica che l'Universo si sta espandendo oggi in modo accelerato. Il grafico (figura 5.1) riporta i dati ottenuti dal SCP e da Hz SN nei lavori originali del 1998.

Questo lavoro valse a Perlmutter, Riess e Schmidt il premio Nobel per la fisica nel 2011.

Lo scopo che si propone la presente tesi è quello di riprodurre i risultati ottenuti da questi due gruppi di ricerca per i modelli cosmologici  $\Lambda$ CDM (dove  $\Lambda$  indica la presenza della costante cosmologica e CDM, Cold Dark Matter), ovvero dimostrare che la costante cosmologica ha valore positivo e che l'Universo si trova in una condizione di espansione accelerata.

Per lo studio condotto in questo progetto è stato utilizzato come catalogo sulle SNe Ia quello fornito dal team SCP, denominato "SCP Union 2.1 Compilation", disponibile al pubblico. Questo catalogo non è quello usato nei lavori del 1998, si tratta della versione aggiornata al 2011 in cui sono presenti i dati relativi a 580 SNe Ia. Nel catalogo vengono riportati i nomi, il redshift, il modulo di distanza e il relativo errore per ogni SN (per una trattazione dettagliata dei metodi di analisi e di fit delle curve di luce delle SNe Ia presenti nel catalogo si veda Suzuki et al. (2011) SCP).

Il grafico (figura 5.2) mostra i moduli di distanza osservativi con le relative incertezze in funzione del redshift.

È stato sviluppato un codice in linguaggio c++ che permette di confrontare i moduli di distanza osservativi con quelli previsti dai modelli teorici al fine di stimare i parametri cosmologici che meglio descrivono le evidenze osservative.

Nello sviluppo e calcolo delle equazioni all'interno del programma è stata fatta l'assunzione che l'Universo al tempo attuale sia dominato da materia e costante cosmologica; la componente di radiazione, dominante nell'Universo primordiale, è considerata trascurabile. Sotto questa condizione l'equazione (3.60) diventa:

$$H^2(z) = H_0^2 \left[ \Omega_{0m}(1+z)^3 + \Omega_{0K}(1+z)^2 + \Omega_{0\Lambda} \right], \quad (5.4)$$

dove:

$$\Omega_{0K} = 1 - (\Omega_{0m} + \Omega_{0\Lambda}). \quad (5.5)$$

Il programma è essenzialmente strutturato in tre parti: la prima adibita alla lettura del campione di SNe, la seconda in cui vengono calcolati i moduli di distanza ed una terza parte per l'analisi statistica dei dati in cui vengono confrontati valori teorici e sperimentali.

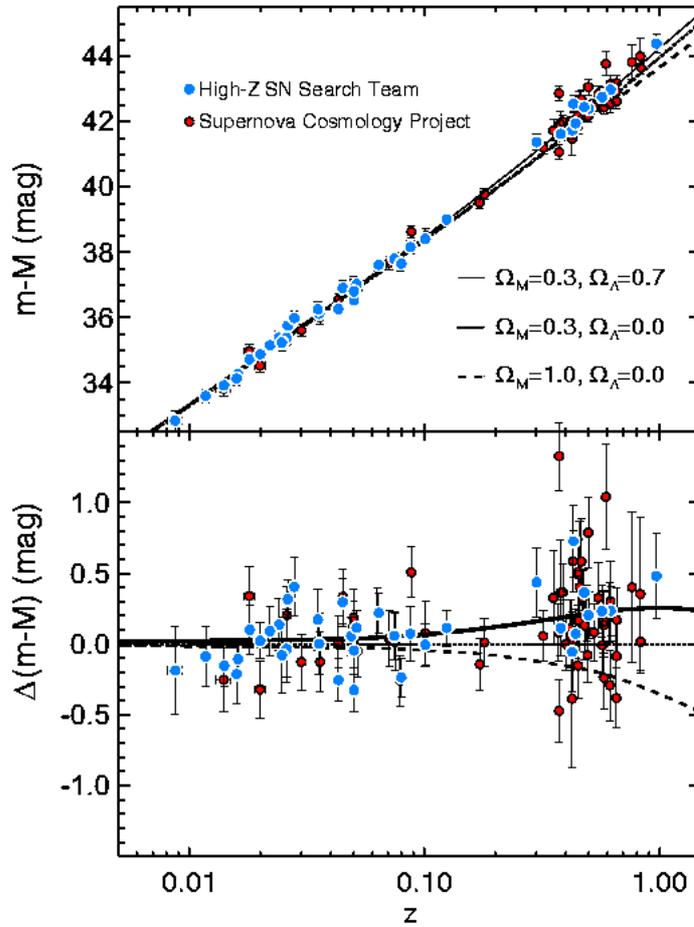


Figura 5.1: Nel pannello superiore: modulo di distanza in funzione del redshift. Nel pannello inferiore: differenza tra i dati e il modello Einstein-de Sitter con  $\Omega_m = 0.3$  e  $\Omega_\Lambda = 0$ . In rosso i dati ottenuti da SCP ed in blu i dato ottenuti da Hz SN. Riess et al. 1998

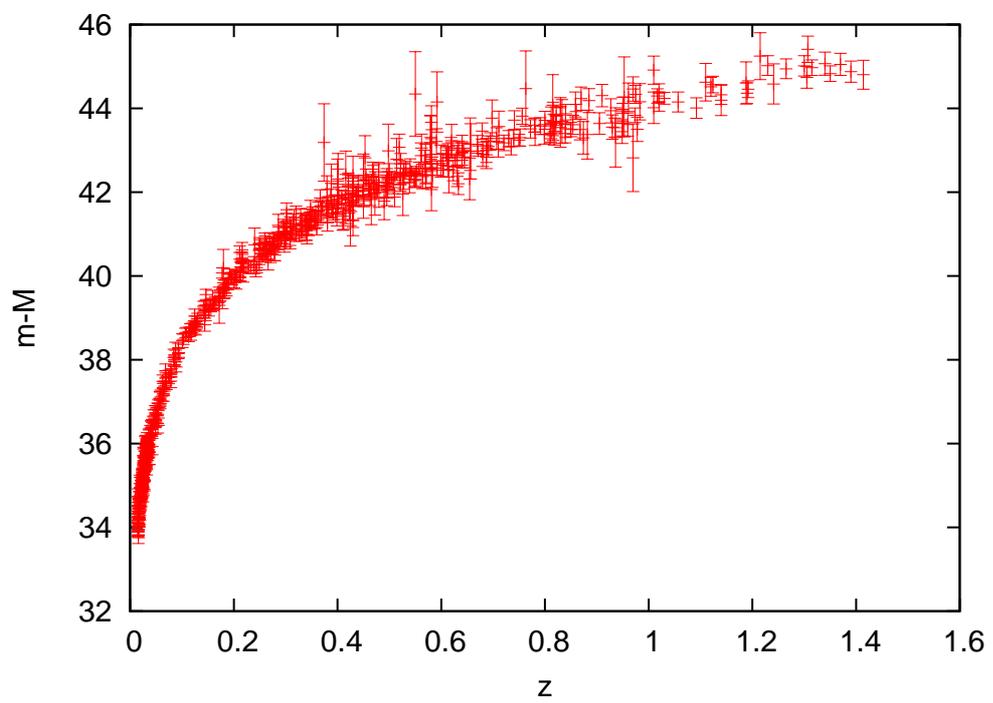


Figura 5.2: Dati relativi a 580 SNe, catalogo SCP Union 2.1, utilizzati in questa tesi

## 5.2 Modulo di distanza teorico

La distanza di luminosità nella sua espressione analitica dipende dalla curvatura e dalla dinamica dell'Universo. È necessario necessario ridefinirla considerando la dinamica di espansione e la presenza di una geometria non euclidea.

Consideriamo una sorgente di luminosità assoluta  $L$ , avente coordinata comovente  $r$ . La distanza di luminosità  $d_L$  misurata da un osservatore posto nell'origine del sistema di coordinate risulta essere:

$$d_L = a_0(1+z)r. \quad (5.6)$$

Vogliamo ora trovare  $d_L$  in funzione del redshift, per fare ciò è necessario trovare l'espressione della coordinata  $r$  in funzione di  $z$ .

Consideriamo la funzione:

$$f(r) = \begin{cases} r & K=0 \\ \sin^{-1} r & K=1 \\ \sinh^{-1} r & K=-1 \end{cases}. \quad (5.7)$$

Dall'equazione (2.27) sappiamo che può essere scritta come:

$$f(r) = \int_t^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}, \quad (5.8)$$

dove quest'equazione è stata ricavata partendo dalla propagazione di un raggio luminoso emesso dalla sorgente al tempo  $t$  e osservato al tempo  $t_0$ . Derivando rispetto al tempo la relazione tra il fattore di scala  $a(t)$  e il redshift  $z$  (2.33) si ottiene:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{a_0}{a^2(t)}\dot{a}(t) = -\frac{a_0}{a(t)}H(t), \quad (5.9)$$

da cui:

$$dt = -\frac{a_0}{a^2(t)}\dot{a}(t) = -\frac{dz}{\frac{a_0}{a(t)}H(t)}. \quad (5.10)$$

Andiamo ora a sostituire nell'equazione (5.8), cambiando opportunamente gli estremi di integrazione ( $z(t_0) = 0$ ,  $z(t) = z$ ):

$$f(r) = \int_0^z \frac{c}{a_0 H(t)} dz = \frac{c}{a_0 H_0} \int_0^z \left( \frac{H_0}{H(z)} \right) dz. \quad (5.11)$$

Per un Universo contenente materia e costante cosmologica vale l'equazione (5.4), da cui si ha:

$$\frac{H_0}{H(z)} = \left[ \Omega_{0m}(1+z)^3 + \Omega_{0K}(1+z)^2 + \Omega_{0\Lambda} \right]^{-1/2} \equiv [E(z)]^{-1}. \quad (5.12)$$

Quindi la funzione  $f(r)$  in funzione del redshift  $z$  è:

$$f(r) = \frac{c}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{1}{E(z)} dz. \quad (5.13)$$

Dalle equazioni (5.7) e (5.8) è possibile ottenere l'espressione della coordinata  $r$  al variare della geometria dello spazio:

$$r = \begin{cases} \int_t^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \frac{c}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{1}{E(z)} dz & K=0 \\ \sin \left[ \int_t^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} \right] = \sin \left[ \frac{c}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{1}{E(z)} dz \right] & K=1 \\ \sinh \left[ \int_t^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} \right] = \sinh \left[ \frac{c}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{1}{E(z)} dz \right] & K=-1 \end{cases} \quad (5.14)$$

Dalla generalizzazione dell'equazione (3,34) al caso di un Universo contenente materia e costante cosmologica si ha che:

$$\Omega_{0k} = -\frac{Kc^2}{H_0^2 a_0^2}, \quad (5.15)$$

che permette di scrivere il fattore di scala al tempo presente  $a_0$  in funzione del parametro di densità  $\Omega_{0k}$ :

$$a_0 = \frac{c}{H_0 (|\Omega_{0k}|)^{1/2}}. \quad (5.16)$$

A questo punto possiamo scrivere l'equazione della distanza di luminosità in funzione del redshift per i tre possibili tipi di geometria dello spazio:

$$d_L = \frac{c}{H_0} (1+z) \int_0^z \frac{1}{E(z)} dz \quad \Omega_{0k} = 0, \quad (5.17)$$

$$d_L = \frac{c}{H_0} \frac{(1+z)}{(|\Omega_{0k}|)^{1/2}} \sin \left[ (|\Omega_{0k}|)^{1/2} \int_0^z \frac{1}{E(z)} dz \right] \quad \Omega_{0k} < 0, \quad (5.18)$$

$$d_L = \frac{c}{H_0} \frac{(1+z)}{(\Omega_{0k})^{1/2}} \sinh \left[ (\Omega_{0k})^{1/2} \int_0^z \frac{1}{E(z)} dz \right] \quad \Omega_{0k} > 0. \quad (5.19)$$

Infine, se si inserisce questa espressione della distanza di luminosità nell'equazione (2.70):

$$m - M = -5 + 5 \log_{10} d_L (pc), \quad (5.20)$$

si ottiene il modulo di distanza teorico per un determinato valore di redshift  $z$ , relativo ad una particolare geometria.

### 5.2.1 Calcolo numerico

Per effettuare il calcolo numerico delle distanze si è scelto di calcolare il modulo di distanza tra 0 ed il redshift massimo e poi successivamente, attraverso un'operazione di interpolazione lineare, si è trovato il valore corrispondente ai precisi valori redshift delle SNe. Il modulo di distanza (indicato con  $DM$ ), in funzione del redshift ha un andamento regolare, pertanto scegliendo un passo ragionevolmente piccolo si ottiene una stima precisa. In alternativa si poteva calcolare direttamente  $DM$  per ogni redshift  $z$  in input; il vantaggio della metodologia scelta è che il codice deve calcolare l'integrale all'interno dell'espressione della distanza di luminosità una sola volta per ogni coppia di parametri invece che 580 e questo riduce di molto i tempi di calcolo.

Il primo passaggio della procedura è risolvere l'integrale interno all'espressione della distanza. L'intervallo di integrazione è  $(0, z_M)$  con  $z_M = 1,414$  redshift massimo, corrispondente alla SN più lontana presente nel catalogo. Per l'integrazione numerica si utilizza il metodo dei trapezi: si suddivide l'intervallo d'integrazione  $[0, 1.414]$  in  $n$  sottointervalli uguali ( $z_0 = 0, z_1, \dots, z_k, \dots, z_N = z_M$ ), ottenendo così una griglia, e si imposta la seguente procedura ricorsiva:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_0 = \frac{[E(z_1)+E(z_0)]z_M}{2n} \\ I_1 = \frac{[E(z_2)+E(z_1)]z_M}{2n} + I_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ I_k = \frac{[E(z_{k+1})+E(z_k)]z_M}{2n} + I_{k-1} \\ \cdot \end{array} \right. \quad (5.21)$$

Se si vuole trovare l'andamento del modulo di distanza  $DM$  in funzione del redshift  $z$  è necessario calcolare per ogni valore  $z_k$  la distanza di luminosità  $d_{L,k}$  e il corrispettivo modulo di distanza  $DM_k$ . Consideriamo un Universo euclideo, si ha:

$$d_{L,k} = \frac{c}{H_0}(1+z) \left\{ \frac{[E(z_{k+1}) + E(z_k)]z_M}{2n} + I_{k-1} \right\}. \quad (5.22)$$

Analogamente nel caso di un Universo sferico o iperbolico si ha rispettivamente:

$$d_{L,k} = \frac{c}{H_0} \frac{(1+z)}{(|\Omega_{0k}|)^{1/2}} \sin \left[ (|\Omega_{0k}|)^{1/2} I_k \right], \quad (5.23)$$

$$d_{L,k} = \frac{c}{H_0} \frac{(1+z)}{(\Omega_{0k})^{1/2}} \sinh \left[ (\Omega_{0k})^{1/2} I_k \right]. \quad (5.24)$$

A questo punto si calcola il modulo di distanza relativo a  $z_k$  applicando la formula:

$$DM_k = 5 \log_{10}(d_{L,k}) - 25, \quad (5.25)$$

da notare che l'argomento del  $\log_{10}$  deve essere una distanza scritta in Mpc.

Alla fine della procedura ricorsiva si ottiene un vettore le cui componenti sono i moduli  $DM_k$ , e questo permette di individuare l'andamento di  $DM$  in funzione del redshift. In questo particolare caso, impostando  $N = 1000$  si raggiunge un ottimo grado di precisione e un tempo di esecuzione accettabile.

Ora mediante la procedura di interpolazione lineare è possibile stimare la previsione teorica del modulo di distanza per ognuna delle 580 SNe.

Attraverso un ciclo ricorsivo per ogni redshift  $z$  si cercano i valori della griglia tra cui è compreso e dopodichè si calcola il modulo di distanza  $DM$ . Supponiamo che il punto  $z$  sia compreso tra i punti della griglia  $z_{k-1}$  e  $z_k$ , a cui corrispondono i valori  $DM_{k-1}$  e  $DM_k$ , il valore del modulo di distanza relativo a  $z$  si ottiene dalla seguente formula:

$$DM = (z - z_{k-1}) \frac{DM_k - DM_{k-1}}{z_k - z_{k-1}}. \quad (5.26)$$

Ognuno di questi valori andrà a costituire una componente del vettore modulo di distanza teorico.

In conclusione, per ogni coppia di parametri  $\Omega_{0m}$  e  $\Omega_{0\Lambda}$  che vengono dati in input alla sezione di calcolo, viene creato un vettore contenente le previsioni teoriche dei moduli di distanza per le 580 SNe del catalogo.

## 5.3 Trattazione dei dati

Nella presente analisi ci si è limitati ad una trattazione statistica dei risultati, tralasciando quella sistematica. In questa sezione verranno presentate le strategie adottate per confrontare valori sperimentali e previsioni teoriche al fine di determinare i parametri cosmologici che forniscono il miglior accordo tra essi. Questa operazione è definita fit.

### 5.3.1 Minimi quadrati

La tecnica di fit che si è scelto di utilizzare è quella definita dei minimi quadrati. Questo metodo si propone di identificare la previsione teorica che massimizza la probabilità di ottenere il set di valori sperimentali, data dal prodotto della probabilità di ottenere ognuno dei singoli dati. Nell'ipotesi

che ogni singolo dato presenti una distribuzione normale di probabilità si ha:

$$P(DM_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{[DM_i - DM_{i,t}(z_i, p)]^2}{2\sigma_i^2}}, \quad (5.27)$$

dove  $DM_i$  e  $DM_{i,t}(z_i, p)$  sono rispettivamente il modulo di distanza osservativo e quello teorico, entrambi riferiti a redshift  $z_i$ ;  $\sigma_i$  è l'errore associato a  $DM_i$  e  $p$  rappresenta il set di parametri liberi.

Quindi la probabilità di ottenere l'intero campione di  $n$  dati è

$$P = \prod_{i=1}^n P(DM_i) \propto \exp^{-\chi^2/2}, \quad (5.28)$$

dove:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{DM_i - DM_{i,t}(z_i, p)}{\sigma_i} \right]^2. \quad (5.29)$$

Pertanto massimizzare la probabilità  $P$  equivale a minimizzare il valore del  $\chi^2$ , da qui il nome dei minimi quadrati.

I valori di  $\chi^2$  per un fit considerato buono sono:

$$\chi^2 \approx \nu, \quad (5.30)$$

dove  $\nu$  rappresenta i gradi di libertà del sistema, definiti come la differenza tra il numero di dati sperimentali  $n$  e il numero di parametri liberi  $c$ :

$$\nu = n - c. \quad (5.31)$$

Attraverso i gradi di libertà è possibile definire il  $\tilde{\chi}^2$ , definito chi-quadrato ridotto, come:

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{\nu}, \quad (5.32)$$

utile per confrontare tra loro la bontà di modelli con un numero differente di parametri liberi.

### 5.3.2 Regioni di confidenza

Con la tecnica dei minimi quadrati è stato possibile calcolare i valori dei parametri che forniscono il fit migliore, vogliamo ora trovare l'errore ad essi associato.

Variando il valore dei parametri liberi si ottengono valori diversi di  $\chi^2$ , ognuno dei quali sarà maggiore di quello associato al best-fit. Definiamo il seguente parametro:

$$\Delta\chi_i^2 = \chi_i^2 - \chi_{min}^2, \quad (5.33)$$

dove  $\chi_{min}^2$  è il  $\chi^2$  relativo ai parametri che producono il best-fit; il  $\chi_i^2$  è quello prodotto dal set  $i$ -esimo dei parametri liberi.

Consideriamo un modello con  $\alpha$  parametri liberi. È possibile rappresentare in uno spazio  $(\alpha + 1)$ -dimensionale il loro andamento in funzione del  $\Delta\chi^2$ . Un intervallo di confidenza è la varietà  $\alpha$ -dimensionale corrispondente ad un valore costante di  $\Delta\chi^2$ , pertanto determina la regione dello spazio dei parametri entro la quale la probabilità che venga prodotto l'insieme dei dati che si sta analizzando assume un determinato valore.

Fissato un dato livello di probabilità, il preciso valore di  $\Delta\chi^2$  varia in base al numero di parametri liberi. Nella seguente tabella è riportato il  $\Delta\chi^2$  per i casi più comuni.

Probabilità	Gradi di libertà		
	1	2	3
68.3%	1.00	2.30	3.53
90%	2.71	4.61	6.25
95.4%	4.00	6.17	8.02
99%	6.63	9.21	11.3
99.73%	9.00	11.8	14.2
99.99%	15.1	18.4	21.1

## 5.4 Risultati

I modelli cosmologici considerati in questa analisi sono:

- $\Lambda$ CDM: modello con costante cosmologica costante e geometria euclidea.
- $o\Lambda$ CDM: modello con costante cosmologica costante senza condizioni sulla geometria.

Nel modello  $\Lambda$ CDM, per la ricerca dei parametri cosmologici viene posta la condizione:

$$\Omega_{0K} = 0, \quad (5.34)$$

da cui segue:

$$\Omega_{0m} + \Omega_{0\Lambda} = 1. \quad (5.35)$$

Quindi in questo modello solo uno dei parametri cosmologici è libero.

Nel modello  $o\Lambda$ CDM invece non viene posta nessuna condizione sulla curvatura dell'Universo,  $\Omega_{0m}$  e  $\Omega_{0\Lambda}$  possono variare in modo indipendente tra loro. Questo modello possiede pertanto due parametri liberi.

La scelta dei parametri liberi in entrambi i modelli è arbitraria. Nel primo modello si può scegliere in modo indifferente  $\Omega_{0m}$  o  $\Omega_{0\Lambda}$ . Nel modello  $\Lambda$ CDM si può lasciare liberi  $\Omega_{0m}$  e  $\Omega_{0\Lambda}$  oppure  $\Omega_{0m}$  e  $\Omega_{0K}$  in base a quale parametro si preferisce dare maggior rilievo.

### 5.4.1 Modello $\Lambda$ CDM: un parametro libero

Si è scelto di dimostrare i risultati utilizzando come parametro libero  $\Omega_{0m}$ . Questo viene fatto variare, mediante un ciclo ricorsivo, nell'intervallo  $[0, 1]$  aggiungendo ad ogni passaggio il valore di 0.001. Il parametro  $\Omega_{0\Lambda}$  varia in modo dipendente da  $\Omega_{0m}$ , secondo la relazione:

$$\Omega_{0\Lambda} = 1 - \Omega_{0m}, \quad (5.36)$$

condizione caratteristica di una geometria di tipo euclideo.

Attraverso una procedura ricorsiva per ogni valore di  $\Omega_{0m}$  si effettua il calcolo del modulo di distanza teorico e del relativo  $\chi^2$ , al fine di trovare il valore per cui è prodotto il fit con il miglior accordo, ovvero quello per cui si minimizza il  $\chi^2$ .

Fissando la costante di Hubble:

$$H_0 = 69.6 \frac{Km}{Mpc \cdot s}, \quad (5.37)$$

il best-fit si ottiene per:

$$\Omega_{0m,best} = 0.296, \quad (5.38)$$

$$\Omega_{0\Lambda,best} = 0.704. \quad (5.39)$$

Il grafico (figura 5.3) mostra i moduli di distanza osservativi delle 580 SNe, con le relative barre d'errore e il miglior andamento teorico in funzione del redshift  $z$ .

Indicativo della bontà del fit risulta essere il grafico (figura 5.4) che mostra per ognuno dei 580 valori di redshift la differenza tra il valore previsto e il valore osservato in unità dell'errore associato alla misura sperimentale. In altre parole, nel grafico lungo l'asse troviamo i valori della previsione teorica e poi distribuiti a diverse altezze i valori sperimentali; le altezze dei dati sperimentali sono date da:

$$\sigma_i = \frac{DM_i - DM_{i,t}}{\Delta DM_i}. \quad (5.40)$$

Se il fit è buono ci si aspetta un'uguale concentrazione di dati sopra e sotto l'asse dell'ascisse, come nel caso del fit prodotto da questa analisi.

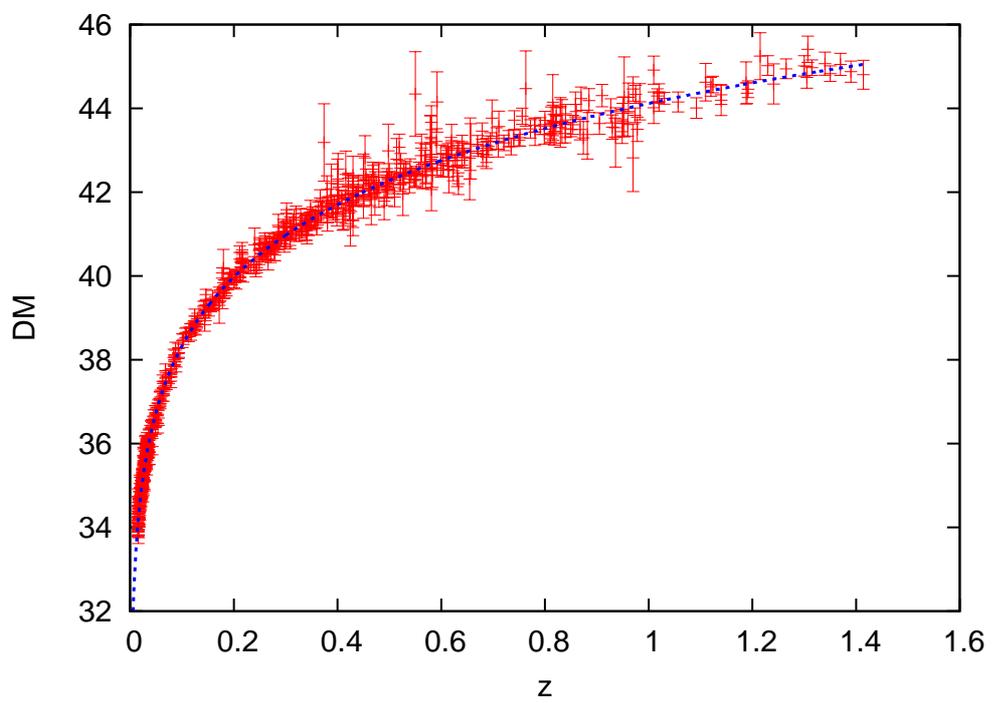


Figura 5.3: Dati catalogo SCP Union 2.1, best-fit teorico modello con un parametro libero

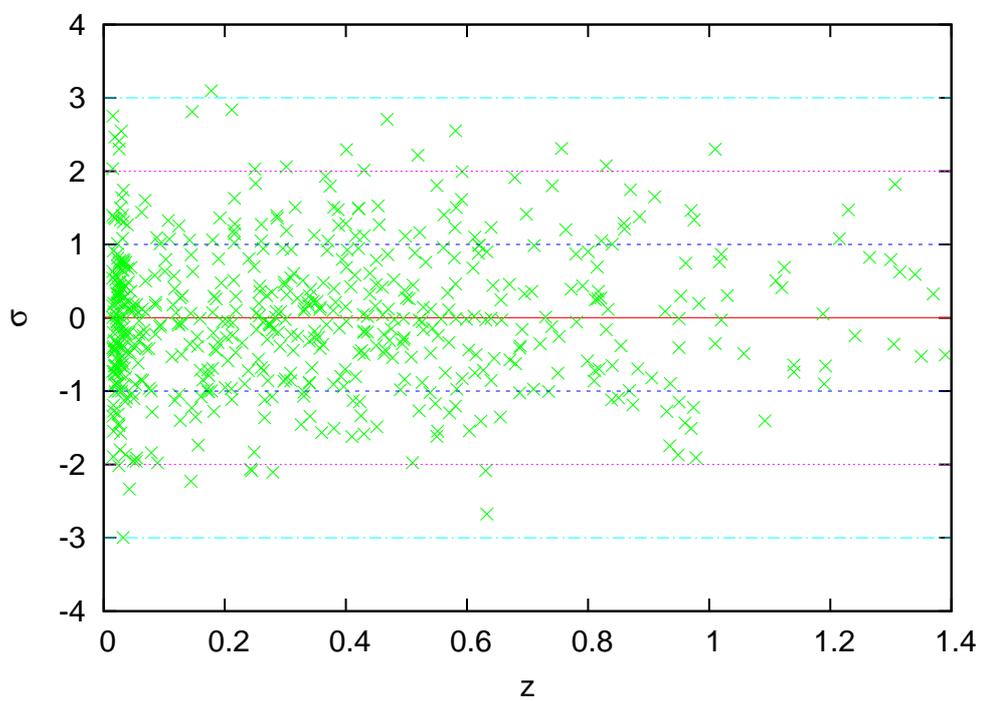


Figura 5.4: Dispersione valori sperimentali rispetto best-fit. Le rette tratteggiate indicano i  $\sigma$  di confidenza

Nel grafico vengono inoltre rappresentate le rette corrispondenti ad 1, 2 e 3  $\sigma$ . All'interno della regione  $1\sigma$  si trovano 405 valori, che corrispondono al 69.8% dei dati, entro  $2\sigma$ , 552 valori (95.1%) ed entro  $3\sigma$ , 579 dati (99.8%). Questo porta a supporre che la distribuzione dei valori attorno al best-fit abbia un andamento di tipo Gaussiano.

Vogliamo ora determinare gli errori sul valore  $\Omega_{0m,best}$ . Seguendo la procedura descritta nella sezione precedente è stato possibile ottenere un grafico che descrivesse l'andamento del  $\Delta\chi^2$  in funzione del parametro di densità della materia (figura 5.5).

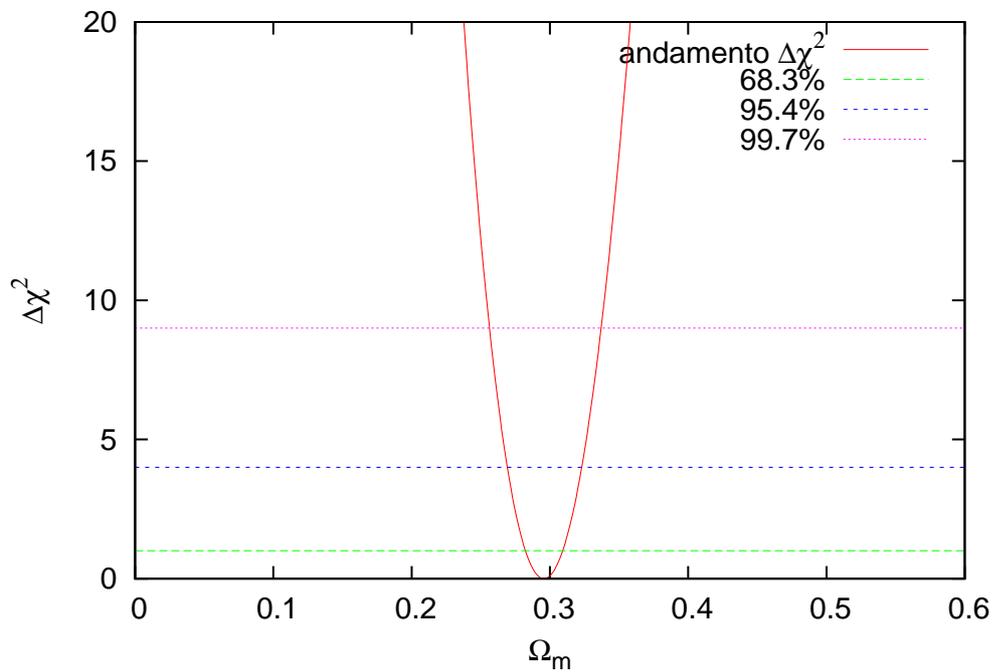


Figura 5.5: intervalli di confidenza

Attraverso una procedura ricorsiva sono stati calcolati gli intervalli di confidenza. Nella tabella sono riportati i risultati ottenuti:

Probabilità	$\Omega_{0m}$	$\Omega_{0\Lambda}$
68.3%	$0.296^{+0.013}_{-0.013}$	$0.704^{+0.013}_{-0.013}$
95.4%	$0.296^{+0.027}_{-0.026}$	$0.704^{+0.027}_{-0.026}$
99.73%	$0.296^{+0.041}_{-0.039}$	$0.704^{+0.041}_{-0.039}$

Da notare come gli intervalli di confidenza non siano simmetrici rispetto al valore migliore, risultato che si poteva intuire anche visivamente dal grafico.

Il modello  $\Lambda$ CDM presenta un valore positivo della costante cosmologica, emerge pertanto che al tempo attuale l'Universo si trova in una condizione di espansione accelerata. Il parametro di decelerazione  $q_0$  calcolato dai risultati ottenuti è:

$$q_0 = -0.556_{-0.026}^{+0.026}. \quad (5.41)$$

Applicando l'equazione (3.70) si può calcolare  $z_F$ :

$$z_F = 0.682 \pm 0.014. \quad (5.42)$$

L'equivalenza tra materia e costante cosmologica avviene invece a:

$$z_E = 0.335 \pm 0.007. \quad (5.43)$$

### 5.4.2 Modello $o\Lambda$ CDM: due parametri liberi

Per i fini che si propone questa analisi si è scelta come coppia di parametri liberi  $\Omega_{0m}$  e  $\Omega_{0\Lambda}$ . Mediante un doppio ciclo ricorsivo vengono fatti variare indipendentemente: per ogni valore di  $\Omega_{0m}$  compreso nell'intervallo  $[0, 1]$ , il parametro  $\Omega_{0\Lambda}$  viene fatto variare tra  $[0, 1]$ . Fissando, come nel caso precedente, un incremento di 0.001, si ottengono 1000000 di combinazioni, per ognuna di queste coppie di parametri vengono poi calcolate le previsioni teoriche dei moduli di distanza e confrontati con i valori osservativi attraverso il metodo del  $\chi^2$ .

Il best-fit risulta essere prodotto per:

$$\Omega_{0m,best} = 0.244, \quad (5.44)$$

$$\Omega_{0\Lambda,best} = 0.637. \quad (5.45)$$

Di seguito vengono mostrati i grafici del best-fit e della dispersione dei valori sperimentali rispetto alla previsione teorica (figura 5.6).

Analogamente al caso precedente la dispersione dei dati permette di vedere che il fit può essere considerato buono (figura 5.7).

Come nel modello  $\Lambda$ CDM, i dati sembrano disporsi in modo normale attorno al valore di best-fit: 407 dati si trovano entro  $1\sigma$  (70%), 551 entro  $2\sigma$  (95%) e 579 entro  $3\sigma$  (99.8%).

Gli errori sul valore  $\Omega_{0m,best}$  e  $\Omega_{0\Lambda,best}$  sono stati calcolati seguendo la procedura descritta nella sezione precedente. In un grafico tridimensionale è stato possibile rappresentare l'andamento del  $\Delta\chi^2$  in funzione dei due parametri cosmologici. Fissando un valore di  $\Delta\chi^2$  costante si ottiene un grafico bidimensionale che individua la regione di confidenza dei parametri (figura 5.8).

Nella tabella seguente sono riportati gli intervalli di confidenza:

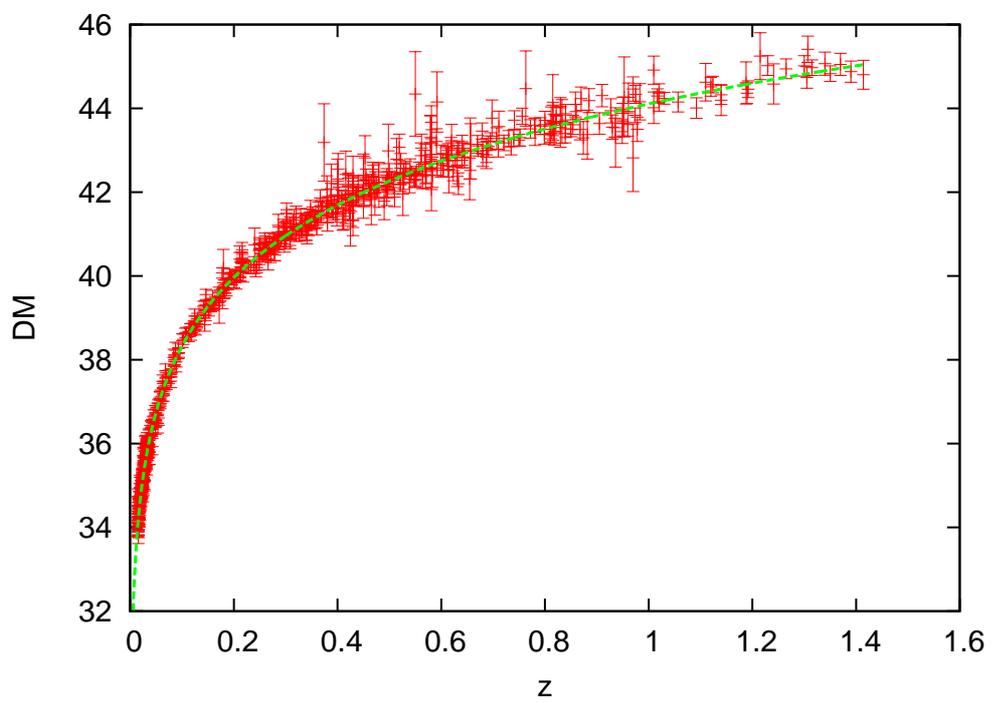


Figura 5.6: Dati catalogo SCP Union 2.1, best-fit teorico modello con due parametri liberi

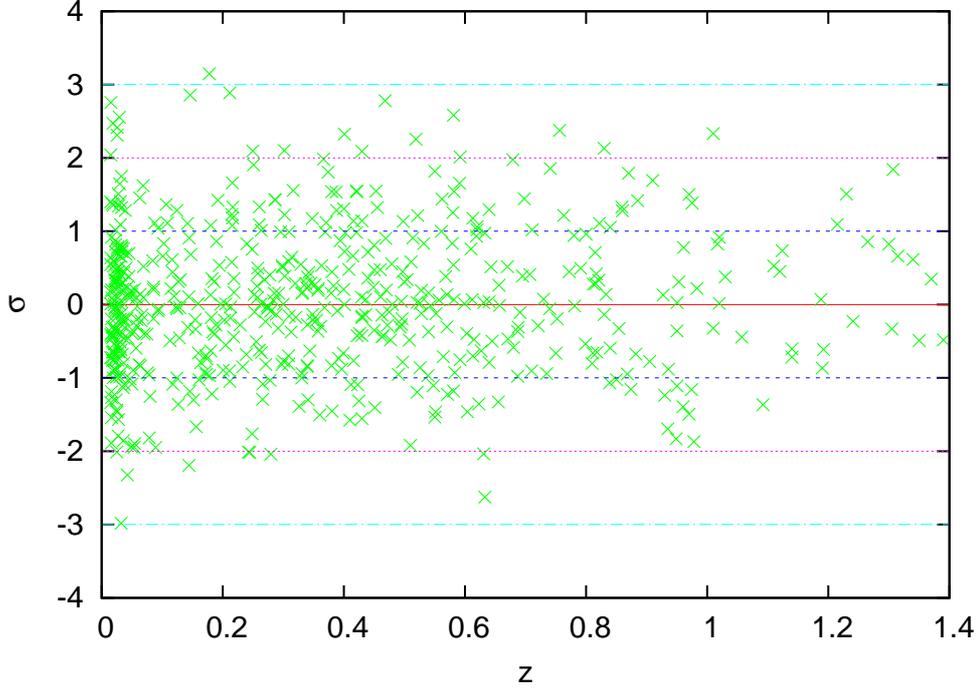


Figura 5.7: Dispersione valori sperimentali rispetto al best-fit. Le rette tratteggiate individuano  $\sigma$  di confidenza

Probabilità	$\Omega_{0m}$	$\Omega_{0\Lambda}$
68.3%	$0.244^{+0.097}_{-0.099}$	$0.637^{+0.120}_{-0.125}$
95.4%	$0.244^{+0.158}_{-0.164}$	$0.637^{+0.192}_{-0.206}$
99.73%	$0.244^{+0.217}_{-0.229}$	$0.637^{+0.262}_{-0.285}$

Dai valori  $\Omega_{0m,best}$  e  $\Omega_{0\Lambda,best}$  si ottiene il seguente parametro di densità di curvatura:

$$\Omega_{0K} = -0.119^{+0.217}_{-0.224}. \quad (5.46)$$

L'errore sul parametro è stato calcolato propagando le incertezze sui due parametri  $\Omega_{0m,best}$  e  $\Omega_{0\Lambda,best}$  corrispondenti al limite di confidenza del 68.3%. Per ottenere una stima più accurata di  $\Omega_{0K}$ , si può riprodurre l'analisi fissando però come parametri liberi  $\Omega_{0K}$  ed uno tra  $\Omega_{0m}$  e  $\Omega_{0\Lambda}$ .

Il modello  $\Lambda$ CDM descrive un Universo che al tempo attuale si espande in maniera accelerata. Il parametro di decelerazione che si ottiene dai risultati è:

$$q_0 = -0.515^{+0.217}_{-0.224}. \quad (5.47)$$

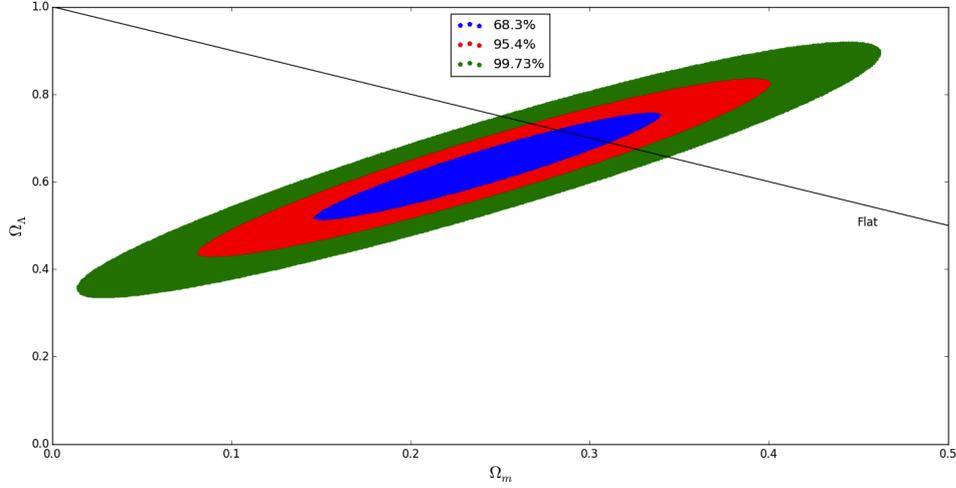


Figura 5.8: regioni di confidenza relative al 68.5%, 99.4% e 99.7% di probabilità

L'espansione passa da decelerata ad accelerata a  $z_F$ :

$$z_F = 0.735^{+0.144}_{-0.147}. \quad (5.48)$$

L'equivalenza tra materia e costante cosmologica avviene invece a:

$$z_E = 0.377^{+0.074}_{-0.076}. \quad (5.49)$$

## 5.5 Discussione e conclusioni

### 5.5.1 Compatibilità modelli $\Lambda$ CMD e $\circ\Lambda$ CMD

Le regioni di confidenza in (figura 5.8) mostrano in modo esplicito che i due modelli risultano in accordo. Nella seguente tabella vengono riportati i valori dei parametri prodotti per i due modelli con le incertezze calcolate per il 68.3% CL.

	$\Lambda$ CMD	$\circ\Lambda$ CMD
$\Omega_{0m}$	$0.296^{+0.013}_{-0.013}$	$0.244^{+0.097}_{-0.099}$
$\Omega_{0,\Lambda}$	$0.704^{+0.013}_{-0.013}$	$0.637^{+0.120}_{-0.125}$
$\Omega_{0K}$	fissata	$-0.119^{+0.217}_{-0.224}$
$q_0$	$-0.556^{+0.026}_{-0.026}$	$-0.515^{+0.217}_{-0.224}$
$z_F$	$0.682^{+0.014}_{-0.014}$	$0.735^{+0.144}_{-0.147}$
$z_E$	$0.335^{+0.007}_{-0.007}$	$0.377^{+0.074}_{-0.076}$

Si può notare che per ciascun parametro i valori ottenuti risultano compatibili e compresi entro un'incertezza di  $1\sigma$ .

È stato inoltre calcolato il  $\tilde{\chi}^2$  per entrambi i modelli:

$$\tilde{\chi}_1^2 = 0.973991, \quad (5.50)$$

$$\tilde{\chi}_2^2 = 0.974517. \quad (5.51)$$

Le due previsioni teoriche non presentano una differenza significativa.

Nel grafico in (figura 5.9) sono rappresentati gli andamenti teorici del modulo di distanza in funzione del redshift previsti dai modelli  $\Lambda$ CMD e o $\Lambda$ CMD insieme a quelli previsti da modelli con costante cosmologica nulla.

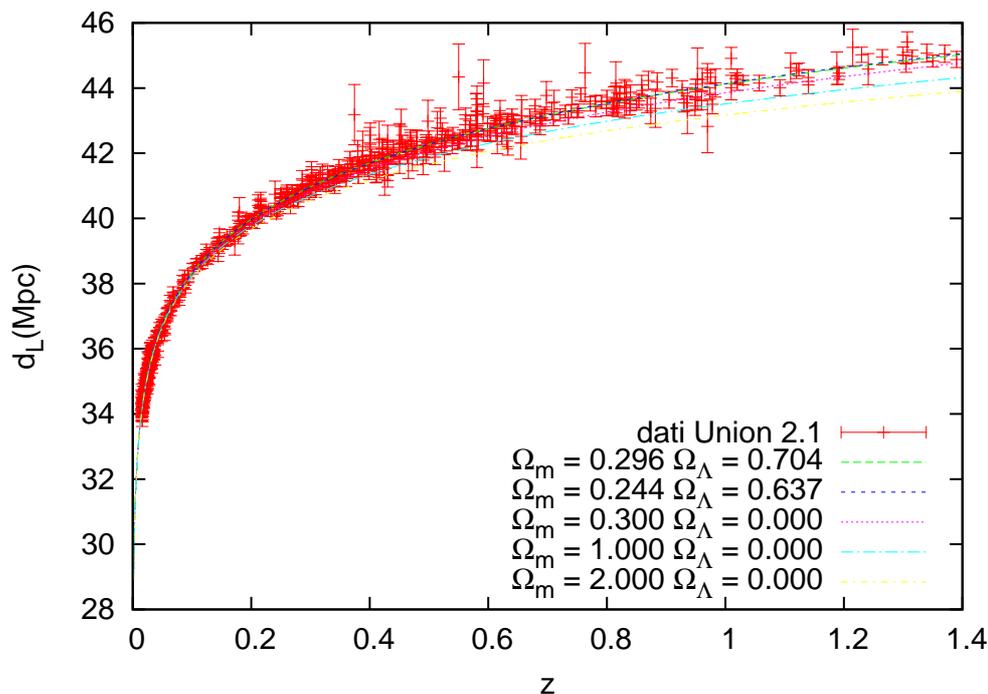


Figura 5.9: Andamenti teorici modulo di distanza.

Si noti come le curve relative ai modelli  $\Lambda$ CMD e o $\Lambda$ CMD siano completamente sovrapposte. Risulta invece evidente come i modelli con costante cosmologica nulla si discostino in modo significativo dai moduli di distanza osservati.

## 5.5.2 Compatibilità con SCP

Lo studio compiuto ha prodotto risultati compatibili con quelli prodotti dal SCP.

Per il modello  $\Lambda$ CDM a geometria piatta, i valori risultano essere in accordo sia con quelli del lavoro originale del 1998, sia con quelli prodotti dal lavoro del 2011 condotto sul campione "Union 2.1" (catalogo utilizzato in questa analisi). Per questo motivo risulta più significativa la compatibilità con lo studio del 2011. La seguente tabella mostra il valore del parametro  $\Omega_{0m}$  ottenuto nelle tre analisi (con la sigla t-2015 ci si riferisce al presente lavoro di tesi), con incertezza relativa all'intervallo di confidenza del 68%:

	SCP 1998	SCP 2011	t-2015
$\Omega_{0m}$	$0.296^{+0.013}_{-0.013}$	$0.277^{+0.022}_{-0.021}$	$0.296^{+0.013}_{-0.013}$

Il valore riportato per lo studio del 2011 è quello prodotto considerando solo una trattazione statistica dei dati. Il valore ottenuto includendo anche una trattazione sistematica è:

$$\Omega_{0m} = 0.295^{+0.043}_{-0.040}. \quad (5.52)$$

Per il modello  $o\Lambda$ CMD, si verifica la compatibilità solo con il lavoro del 2011, in quanto lo studio del 1998 era incentrato prevalentemente su modelli di Universo a geometria euclidea.

	SCP 2011	t-2015
$\Omega_{0m}$	$0.282^{+0.015}_{-0.014}$	$0.244^{+0.097}_{-0.099}$
$\Omega_{0K}$	$-0.004^{0.006}_{-0.006}$	$-0.119^{+0.217}_{-0.224}$

Il parametro  $\Omega_{0K}$  prodotto da SCP presenta un valore che si discosta da quello ottenuto in questa analisi. I due parametri sono comunque compatibili fra loro.

Bisogna inoltre precisare che i risultati riportati dal SCP per il modello  $o\Lambda$ CMD sono ottenuti dall'unione degli intervalli di confidenza dei vincoli da SNe Ia, da CMB (Cosmic Microwave Background) e da BAO (Barionic Acoustic Oscillations). Il grafico (figura 5.10) mostra gli intervalli di confidenza relativi a questi vincoli.

I vincoli sui parametri cosmologici possono essere dedotti anche da osservazioni indipendenti dalle SNe Ia, importanti risultati in questo senso sono stati raggiunti dallo studio della radiazione cosmica di fondo (CMB). Il progetto Planck, nel lavoro del febbraio 2015, per il modello  $\Lambda$ CMD ha prodotto il seguente valore per il parametro di densità  $\Omega_{0m}$ :

$$\Omega_{0m} = 0.3121 \pm 0.0087, \quad (5.53)$$

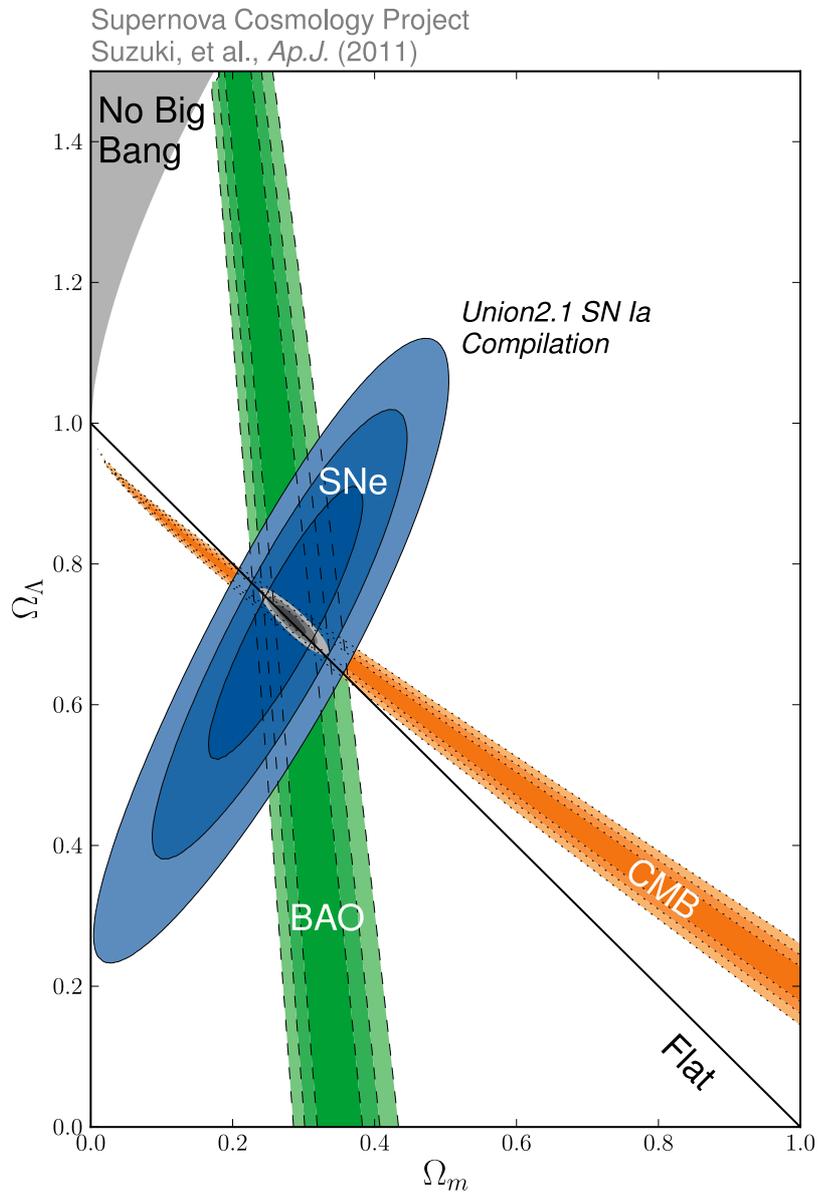


Figura 5.10: intervalli di confidenza del 68%, 95%, and 99.7% su  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$  ottenuti da CMB (arancione), BAO (verde), e Union Compilation (blu). Suzuki et al. 2011

senza condizioni imposte sulla curvatura è stato trovato il seguente valore di  $\Omega_{0K}$ :

$$\Omega_{0K} = -0.040^{+0.038}_{-0.041}. \quad (5.54)$$

I risultati ottenuti sono in accordo con quelli prodotti dallo studio condotto sulle SNe Ia. Inoltre essendo le osservazioni indipendenti tra loro, i vincoli determinati dalle due analisi possono essere uniti in modo da produrre una stima più accurata dei vincoli sui parametri cosmologici.

# Bibliografia

- [1] Coles P., Lucchin F., *Cosmology. The Origin and Evolution of Cosmic Structure*, John Wiley & Son, Ltd, second edition, 2002.
- [2] Perlmutter S. et al., *Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae*, arXiv:astro-ph/9812133v1, 1998.
- [3] Planck Collaboration, *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*, arXiv:1502.01589, 2015.
- [4] Riess A. G. et al., *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, arXiv:astro-ph/9805201, 1998.
- [5] Schmidt B. et al., *The High-Z Supernova Search: Measuring Cosmic Deceleration and Global Curvature of the Universe Using Type Ia Supernovae*, arXiv:astro-ph/9805200, 1998.
- [6] Suzuki N. et al., *The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey: V. Improving the Dark Energy Constraints Above  $z > 1$  and Building an Early-Type-Hosted Supernova Sample*, arXiv:1105.3470v1, 2011
- [7] Weinberg S., *Cosmology*, Oxford University Press, 2008.



# Ringraziamenti

Vorrei ringraziare innanzitutto il mio relatore, prof. Lauro Moscardini, per la grande disponibilità dimostrata nei miei confronti. In secondo luogo la mia famiglia, e in particolare i miei genitori, Luciano e Nadia, senza la cui guida questo percorso sarebbe stato molto più difficile. Ci tengo poi a ringraziare Valentina, per l'amore che è stata in grado di darmi ogni giorno e i miei amici, che in questi anni hanno saputo regalarmi momenti veramente indimenticabili.

Ringrazio infine tutti coloro che partecipano alla mia felicità per il conseguimento della laurea.