

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

**LO SPAZIO DODECAEDRICO
DI POINCARÉ**

Tesi di Laurea in Topologia Algebrica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
MASSIMO FERRI

Presentata da:
ANDREA D'ALONZO

Seconda Sessione
Anno Accademico 2014-15

Indice

Introduzione	5
1 Nozioni preliminari	7
1.1 Quaternioni	7
1.1.1 Introduzione [Du Val]	7
1.1.2 Azioni sinistre [Du Val, Lang]	8
1.2 Morfismi di rivestimento [Du Val, BLM]	9
1.2.1 $SO(3)$	9
1.2.2 $SO(4)$	10
2 Lo spazio di Poincaré	13
2.1 Sottogruppi finiti di S^3 [Thurston, Milnor]	13
2.2 Politopi e gruppi	15
2.3 Lo spazio \mathfrak{D} [Thurston]	16
2.4 Simmetrie del dodecaedro [Du Val]	18
2.5 Azione di $2I$ [Du Val]	20
2.6 Proprietà di \mathfrak{D}	21
2.7 Altri spazi dodecaedrici	24
Bibliografia	25

Introduzione

Lo spazio di Poincaré, apparso per la prima volta nel 1904 sui *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* in un'appendice a uno stesso lavoro di Poincaré, è sicuramente una curiosità matematica, ma ha una importanza storica notevole, per quanto riguarda l'allora nascente area della topologia algebrica, per almeno due motivi.

Il primo è prettamente storico: lo spazio dodecaedrico nasce come esigenza di trovare un controesempio alla prima versione della congettura di Poincaré e quindi è la spinta per affermare la versione definitiva, che ha permeato tutto il *XX* secolo, in una sorta di traguardo inafferrabile e che ha ispirato il lavoro di innumerevoli matematici.

Il secondo è ancora più importante per la materia: lo spazio di Poincaré insieme alla necessità di distinguerlo dalla sfera, segna la nascita (da parte dello stesso Poincaré) del gruppo fondamentale di uno spazio, nozione oramai base di ogni corso di topologia. Dal punto di vista matematico, inoltre, questo spazio è il primo esempio (peraltro unico, perché l'unico con gruppo fondamentale finito) di sfera d'omologia (in dimensione 3), quindi il primo esempio della bontà di strumenti algebrici quali l'omologia e il gruppo fondamentale.

La descrizione notevolissima come spazio ottenuto da identificazioni sul bordo di un dodecaedro, si deve a Threlfall e Seifert e risale al 1931. Nonostante un numero abbondante di descrizioni alternative, meno geometriche, questa è stata scelta per questo scritto perché sfrutta e esemplifica alcune delle coincidenze algebrico-geometriche più notevoli e misteriosamente affascinanti: il fatto che sulla 3-sfera possa essere adottata una struttura di gruppo, cosa che capita solo in altre due sfere e il conseguente legame intrinseco tra gruppi finiti sulla sfera e politopi 4-dimensionali. Questo assieme al fatto che il dodecaedro sia faccia di un particolare politopo, permette di far agire gruppi sui politopi in modo conciso ed elegante, e facendo agire sul politopo che ha per facce dei dodecaedri si ottiene proprio il dodecaedro identificato di Poincaré. Questa descrizione permette inoltre di ricavare molto brevemente gruppo fondamentale e omologia dello spazio, grazie a risultati

base della topologia.

Nel primo capitolo verrà affrontata la parte più algebrica, nel secondo quella più geometrica, riguardante i politopi e la costruzione vera e propria dello spazio di Poincaré. Dove necessario all'inizio di ogni sezione è riportata la bibliografia essenziale a proposito.

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 Quaternioni

1.1.1 Introduzione [Du Val]

È noto che \mathbb{R}^4 può essere dotato di una struttura di algebra di Banach non commutativa con la norma euclidea usuale, con le operazioni di somma di vettori e, chiamati i vettori della base canonica $1, i, j$ e k , con il prodotto riassunto dalle famose relazioni di Hamilton $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Chiameremo questo spazio, spazio dei quaternioni \mathbb{H} . \mathbb{H} contiene \mathbb{C} come sotto algebra (commutativa però!) formata dai quaternioni della forma $a+bi$; inoltre contiene la sottoalgebra (di dimensione reale 3) detta dei quaternioni puri, \mathbb{H}_{puri} cioè quelli della forma $bi+cj+dk$, che sarà identificata con \mathbb{R}^3 , e il sottogruppo normale di \mathbb{H}^* , $Sp(1) = \{q \in \mathbb{H}, \|q\| = 1\}$, che sarà identificato con S^3 .

Un modo alternativo per descrivere i quaternioni, ma più pratico per certi versi, consiste nello sfruttare l'isomorfismo di algebre:

$$\begin{aligned} \lambda: \quad \mathbb{H} &\longrightarrow \mathcal{M}(2, \mathbb{C}) \\ a + bi + cj + dk &\longmapsto \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dove $\alpha = a + di$ e $\beta = -b + ci$. In questo modo il prodotto di quaternioni diventa prodotto opportuno di matrici, e la norma (al quadrato) diventa un semplice determinante, cosa dal quale si ricava (per la formula di Binet) che la norma di quaternioni è moltiplicativa. Inoltre l'isomorfismo si restringe facilmente a un isomorfismo tra $Sp(1)$ e $SU(2)$.

1.1.2 Azioni sinistre [Du Val, Lang]

Si consideri $p \in Sp(1)$; si chiamerà *azione sinistra* l'applicazione $q \mapsto pq$ definita su tutto \mathbb{H} (analogamente per quella destra). Naturalmente questa è un'applicazione lineare e anzi è un'isometria diretta, infatti è rappresentata dalla matrice $\lambda(p)$ che è ortogonale speciale. Si vuole analizzare come agisce questa azione.

Si pensi dunque p come una matrice a elementi in \mathbb{C} ; come è noto anche un numero complesso $a + bi$ può essere identificato con una matrice 2×2 a entrate reali (tramite l'isomorfismo $a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$) quindi, sostituendo a blocchi, p può essere pensata come matrice 4×4 reale, nel caso specifico $p \in SO(4)$. Ora però vale:

Proposizione 1.1. *Per ogni $A \in SO(n)$ esiste una base ortonormale di \mathbb{R}^n rispetto alla quale A è a blocchi in $SO(2)$ più eventualmente, se n è dispari, un blocco I_1 .*

Dimostrazione. Sia $S = A + A^t$; questa è simmetrica dunque è diagonalizzabile tramite una matrice ortogonale, inoltre gli autospazi sono ortogonali fra loro, la loro somma diretta è tutto \mathbb{R}^n e inoltre, poiché A e S commutano (per una semplice verifica), quelli sono anche A -invarianti (infatti se v è vettore dell'autospazio relativo all'autovalore μ : $SAv = ASv = A\mu v = \mu Av$). Dunque scegliendo come base l'unione di basi ortogonali degli autospazi, A si scrive a blocchi. Ora si consideri un singolo blocco R_i relativo all'autovalore μ_i e autospazio V_i . Ci sono due casi: o $\mu_i = \pm 2$ e in tal caso A opera su V_i come moltiplicazione per ± 1 ; oppure $\mu_i \neq \pm 2$ cioè A non ha autovettori in V_i e in tal caso se $v \in V_i$, v e Av sono indipendenti. Infatti se $\mu_i = \pm 2$ si ha: $\|(A \mp I)v\|^2 = \langle (A \mp I)v, (A \mp I)v \rangle = \langle (A \mp I)^t (A \mp I)v, v \rangle = \langle (2I \mp S)v, v \rangle = 0$ e quindi $(A \mp I)v = 0$ cioè $Av = \pm v$; nel secondo caso, se A avesse autovettori in V_i , poiché i possibili autovalori di una matrice ortogonale sono ± 1 , μ_i sarebbe ± 2 , e ciò contraddice l'ipotesi. Segue anche che v e Av sono indipendenti perché se fosse dipendenti si avrebbe $Av + \alpha v = 0$ e quindi v sarebbe un autovettore $\in V_i$ di A .

Ora, nel primo caso si avranno dei blocchi di tipo $\pm I_1$; nel secondo caso invece, poiché v e Av sono indipendenti, si consideri $W = \text{Span}(v, Av)$. Allora, W è A -invariante, infatti vale $(A + A^t - \mu_i)v = 0$ da cui moltiplicando per A : $(A^2 + I - \mu_i A)v = 0$ e quindi

$$A(av + bAv) = aAv + bA^2v = aAv - b(I - \mu_i A)v \in W$$

Quindi se il blocco R_i (che comunque è ortogonale) avesse determinante pari a -1 , si scriverebbe come $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Ma d'altra parte vale

$(R_i + R_i^t - \mu_i)v = 0$ cioè $\begin{pmatrix} 2\alpha - \mu_i & \beta \\ \beta & -2\alpha - \mu_i \end{pmatrix} = 0$ da cui $\mu_i = \pm 2$ che è un assurdo perché ci si trovava nel secondo caso; quindi $R_i \in SO(n)$.

A questo punto poiché il determinante di A è positivo, se n è pari ci devono essere un numero uguale di blocchi banali con segno concorde che quindi si possono raggruppare per ottenere la forma dell'enunciato. Se n dispari si procede ugualmente ma rimarrà fuori un blocco I_1 . \square

Quindi, per un'opportuna base ortonormale di $\mathbb{H}(\mathbb{R}^4)$, p si scriverà come

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & & \\ \sin \theta & \cos \theta & & \\ & & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ & & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

cioè, in conclusione, esistono due piani assolutamente ortogonali tra loro, tali che l'azione sinistra tramite un quaternion unitario agisca come due rotazioni indipendenti su questi piani. Questo risultato sarà un punto cruciale della descrizione geometrica dello spazio di Poincaré data in questo scritto, in quanto sarà valutato proprio come agiscono su un dato politopo le azioni sinistre degli elementi del suo gruppo di simmetria.

1.2 Morfismi di rivestimento [Du Val, BLM]

1.2.1 $SO(3)$

Naturalmente il discorso della precedente sezione si ripete senza modifiche nel caso di azioni destre. Dunque, supponiamo di aver fissato $p \in Sp(1)$, come prima, e quattro assi ortonormali w, x, y, z rispetto ai quali p si scriva nella forma della Proposizione 1.1. Allora l'azione sinistra di p consiste nella rotazione di un angolo α nel piano (w, x) e una di un angolo β nel piano (y, z) . Si può verificare allora che l'azione destra di p^{-1} ruota (w, x) di un angolo $-\alpha$ e (y, z) di un angolo β . Dunque l'applicazione composta $\mathcal{R}_p : q \mapsto pqp^{-1}$ ha come unico effetto quello di ruotare di un angolo 2β il piano (y, z) , cioè è rappresentata da una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \cos 2\beta & -\sin 2\beta \\ & & \sin 2\beta & \cos 2\beta \end{pmatrix}$$

Restringendo e corestringendo l'applicazione a \mathbb{H}_{puri} (si può fare perché q è puro sse $q\bar{q} = \|q\|^2 = 1$ sse $q^{-1} = \bar{q}$ allora $\overline{p\bar{q}\bar{p}} = \overline{\bar{p}\bar{q}\bar{p}} = p\bar{x}\bar{p} = -p\bar{q}\bar{p}$

cioè anche pqp^{-1} è puro), cioè in questo caso lo spazio (x, y, z) , si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos 2\beta & -\sin 2\beta \\ & \sin 2\beta & \cos 2\beta \end{pmatrix}$$

che rappresenta una rotazione (diretta) dello spazio tridimensionale.

Per il viceversa si introduce un'altra notazione per i quaternioni, nella forma $q = (a, v)$ con v vettore di \mathbb{R}^3 . In questo modo il prodotto diventa: $(a, v)(a', v') = (aa' - \langle v, v' \rangle, av' + a'v + v \times v')$ (per una semplice verifica) e quindi è ben visibile che (sempre per la Proposizione 1.1), se si ha una rotazione dello spazio di un angolo 2β attorno all'asse v , allora l'azione sinistra di $(\cos \beta, v \sin \beta)$ ha come piani invarianti il piano (w, v) e quello a lui assolutamente ortogonale, sia π , quindi $\mathcal{R}_{(\cos \beta, v \sin \beta)}$ ristretta allo spazio (v, π) è la rotazione di partenza.

Quindi è ben definita e suriettiva l'applicazione:

$$\begin{aligned} \Gamma: Sp(1) &\longrightarrow SO(3) \\ p &\longmapsto \mathcal{R}_p \end{aligned}$$

che risulta, dopo una breve verifica, essere un morfismo, non 1-1, infatti $\mathcal{R}_p = \mathcal{R}_{-p}$. In realtà è un morfismo 2:1 e $\ker \Gamma = \{\pm 1\}$ da cui, grazie alle identificazioni già discusse per $Sp(1)$, gli eleganti risultati:

Teorema 1.2. $SO(3) \simeq SU(2)/\mathbb{Z}_2$ (dove si identifica \mathbb{Z}_2 con $\{\pm I\}$ e $Sp(1)$ con S^3) e quindi anche:

$$SO(3) \simeq \mathbb{RP}^3$$

Una volta data una topologia (quella metrica di \mathbb{R}^{n^2}) per $SO(n)$, queste identificazioni sono anche omeomorfismi e Γ è un rivestimento di ordine 2, universale (perché lo spazio di rivestimento è semplicemente connesso). Poiché si cercheranno degli spazi a geometria sferica, cioè in pratica quozienti di S^3 tramite azioni di gruppi finiti, d'ora in poi si vedrà $\Gamma: S^3 \mapsto SO(3)$ e anche i gruppi che agiranno sulla sfera proverranno dal rivestimento Γ , come si vedrà nella Sezione 2.1

1.2.2 $SO(4)$

Abbiamo visto come parametrizzare le rotazioni dello spazio che preservano l'orientamento, tramite i quaternioni unitari. In modo assolutamente sorprendente ciò si può estendere alle rotazioni dello spazio 4-dimensionale grazie all'omomorfismo di rivestimento (doppio):

$$\begin{aligned} \gamma : Sp(1) \times Sp(1) &\longrightarrow SO(4) \\ (q_1, q_2) &\longmapsto \mathcal{R}_{q_1, q_2} \end{aligned}$$

dove $\mathcal{R}_{q_1, q_2}(x) = q_1 x q_2^{-1}$, $\forall x \in \mathbb{H}$ è una rotazione 4-dimensionale perché composizione di azioni destre e sinistre di quaternioni unitari; viceversa una rotazione di $SO(4)$ si esprime in questa forma: infatti sia $\mathfrak{R} \in SO(4)$, e supponiamo che mandi 1 nel quaternioni unitario p ; l'azione sinistra di p , chiamiamola \mathcal{P} , fa la stessa cosa quindi $\mathcal{P}^{-1}\mathfrak{R}$ è una rotazione che lascia fisso l'asse w , cioè è una rotazione di $SO(3)$ e quindi si esprime nella forma coniugio tramite un qualche $q_2 \in Sp(1)$. Quindi $\mathfrak{R} : q \rightarrow p q_2 q q_2^{-1} = q_1 q q_2^{-1}$.

Con ulteriori verifiche si scopre che γ è un morfismo $2 : 1$ con nucleo $\{\pm(1, 1)\}$ e topologicamente è un rivestimento (universale) di ordine 2.

Queste parametrizzazioni di $SO(3)$ e $SO(4)$ sono due manifestazioni (eccezionali) di una costruzione generale di rivestimenti doppi per $SO(n)$. Infatti si può costruire (come sottogruppo del gruppo moltiplicativo di determinate algebre di Clifford), un gruppo $Spin(n)$ e un morfismo (nonché proiezione di rivestimento, data un'opportuna topologia sul gruppo Spin), Γ_n , tali che sia esatta la successione corta:

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow Spin(n) \xrightarrow{\Gamma_n} SO(n) \rightarrow 1$$

Questo gruppo gode per l'appunto di alcuni isomorfismi eccezionali:

- $Spin(1) = O(1)$
- $Spin(2) = U(1) = SO(2)$
- $Spin(3) = Sp(1) = SU(2)$
- $Spin(4) = SU(2) \times SU(2)$
- $Spin(6) = SU(4)$

dovuti anche al fatto che \mathbb{R} , \mathbb{C} e \mathbb{H} sono delle particolari algebre di Clifford. Per $n > 2$, $Spin(n)$ è semplicemente connesso, e quindi il rivestimento trovato è il rivestimento universale di $SO(n)$. Per una trattazione dettagliata, si può fare riferimento a [BLM].

Capitolo 2

Lo spazio di Poincaré

2.1 Sottogruppi finiti di S^3 [Thurston, Milnor]

Definizione 2.1. Si dice *gruppo binario* $2G$ associato a un sottogruppo G (finito) di $SO(3)$, la controimmagine di G tramite il rivestimento Γ .

Per quanto visto su Γ in 1.2, $2G$ ha ordine doppio rispetto a quello di G (in questo scritto i gruppi saranno sempre finiti). Nonostante il centro di $Sp(1)$ sia $\{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}_2$ non è sempre vero che $2G$ si possa scrivere come $G \times \mathbb{Z}_2$, anzi vale:

Proposizione 2.1. $2G$ è isomorfo a $G \times \mathbb{Z}_2$ sse G ha ordine dispari.

Dimostrazione. \Leftarrow) Consideriamo $\Gamma : 2G \rightarrow G$ e pensiamo la moltiplicazione a sinistra per un elemento di $2G$ come una permutazione di $2G$; allora la moltiplicazione per -1 traspone un numero dispari di coppie di elementi di $2G$ (perché per ipotesi $|G|$ è dispari), quindi è una permutazione dispari. Inoltre il sottogruppo $G_0 \subseteq 2G$ formato dalle permutazioni pari, è proiettato da Γ isomorficamente su G (perché ha ordine uguale a quello di G e Γ è suriettiva). Quindi:

$$\begin{aligned} 2G &\longrightarrow G_0 \times \mathbb{Z}_2 \simeq G \times \mathbb{Z}_2 \\ \sigma \in G_0 &\longmapsto (\sigma, +1) \\ \sigma \notin G_0 &\longmapsto (-\sigma, -1) \end{aligned}$$

è ben definito ed è l'isomorfismo cercato.

\Rightarrow) Sia $|G|$ pari, allora ha un elemento σ di ordine due; sia una delle sue due controimmagini $\tilde{\sigma}$. Allora $\tilde{\sigma}^2 = id$ ma non può essere $\tilde{\sigma} = 1$ perché altrimenti sarebbe $\sigma = id$ e d'altra parte in $Sp(1)$ l'unico elemento di ordine 2 è -1 , quindi $\tilde{\sigma} = -1$. Ora se fosse $2G \simeq G \times \mathbb{Z}_2$, $\tilde{\sigma}$ si scriverebbe come $(\tilde{\sigma}', +1)$

che ha quadrato diverso (per la seconda componente) da meno l'unità, che sarebbe $(-1, -1)$. Quindi è impossibile una tale decomposizione di $2G$. \square

L'utilità più evidente del 'portare su' i gruppi di rotazioni spaziali tramite Γ è che si possono classificare i sottogruppi finiti di $Sp(1)$ 'portando su' la classificazione dei sottogruppi finiti di $SO(3)$. Per quanto riguarda quest'ultima vale il seguente risultato:

Teorema 2.2. *A meno di coniugio i sottogruppi finiti di $SO(3)$ sono:*

- *gruppi ciclici, \mathbb{Z}_n ;*
- *gruppi diedrali, D_{2n} ;*
- *gruppi di simmetria¹ del tetraedro, T , ottaedro, O , e icosaedro, I .*

La dimostrazione di questa classificazione non è necessaria in questo contesto ma viene consigliata la lettura in [Thurston], perché costituisce (insieme alla costruzione di Γ e dello stesso spazio di Poincaré) un sorprendente esempio di risultato algebrico ottenuto con considerazioni strettamente geometriche (in questo caso si usano i poliedri e le loro versioni 'sferiche', cioè i poliedri stessi proiettati su una sfera che li circonda e i possibili modi di costruirli a partire da triangoli sferici). Come conseguenza:

Corollario 2.3. *A meno di coniugio i sottogruppi finiti di S^3 sono:*

- *gruppi ciclici, \mathbb{Z}_n ;*
- *gruppi diedrali binari, $2D_{2n}$;*
- *gruppi binari di simmetria dei poliedri, $2T$, $2O$, $2I$.*

Dimostrazione. Sia H un sottogruppo finito di S^3 e sia $G = \Gamma(H)$. Se $H = 2G$ allora: se G è ciclico di ordine m con generatore g , scelto $f \in \Gamma^{-1}(g)$, si ha $f^m = \pm 1$. Se $f^m = -1$ allora H è isomorfo a \mathbb{Z}_{2m} ; altrimenti $H_1 = \langle f \rangle$ ha ordine dispari e quindi m è dispari e quindi $2G \simeq G \times \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_{2m}$. Se G non fosse ciclico avremmo, per definizione e per 2.2, che H è un gruppo binario diedrale o un gruppo binario di simmetrie di un poliedro. Infine se invece fosse $H \neq \Gamma^{-1}(G)$ allora H sarebbe isomorfo a G e $2G \simeq H \times \mathbb{Z}_2$ quindi H ha ordine dispari. Ora G ha ordine dispari quindi è ciclico e quindi H è ciclico. Viceversa se H è ciclico di ordine dispari, allora è isomorfo a $\Gamma(H)$ perché $H \cap \ker \Gamma = H \cap \{\pm 1\} = \{1\}$, perciò $H \neq \Gamma^{-1}(H)$. \square

¹Gruppo formato dalle simmetrie dirette del poliedro, cioè dagli elementi di $SO(3)$ che lasciano invariato un poliedro inscritto in S^2 .

2.2 Politopi e gruppi

Definizione 2.2. Si chiama *politopo* la chiusura convessa di un insieme finito \mathfrak{P}^0 di punti in \mathbb{R}^n , detti *vertici* del politopo. Si chiama *dimensione* del politopo, la dimensione del più piccolo sottospazio affine che lo contiene. Un politopo è detto *regolare* se esiste un gruppo di isometrie (dirette) transitivo rispetto a \mathfrak{P}^0 , che siano simmetrie del politopo.

Si chiama *k-cella* di un politopo \mathfrak{P} di dimensione n ($k \leq n$), un sottopolitopo (cioè generato da un sottoinsieme di \mathfrak{P}^0) interamente incluso nel bordo di \mathfrak{P} , di dimensione k .

Dopo un po' di riflessione, è facile convincersi che questa sia una buona generalizzazione del concetto di poligoni e che un n -politopo regolare è sempre inscritto in una $(n-1)$ -sfera. In questo scritto un n -politopo regolare sarà sempre pensato (a meno di traslazioni) inscritto in una S^{n-1} e (a meno di rotazioni) con un vertice in $(1, 0, \dots, 0)$ (cosicché il gruppo di isometrie che esiste per definizione si possa vedere come un sottogruppo di $SO(n)$).

Definizione 2.3. Si chiama *duale* $\tilde{\mathfrak{P}}$ del politopo regolare \mathfrak{P} , il politopo avente per vertici i centri delle $(n-2)$ -sfere in cui sono inscritte le $(n-1)$ -celle di \mathfrak{P} .

Ora, si è visto nelle precedenti sezioni che alcune S^n possono essere dotate di una struttura di gruppo (poche in realtà²): per esempio S^1 eredita una struttura di algebra reale dall'algebra \mathbb{C} (o anche da \mathbb{H}). In questo caso è possibile legare politopi e sottogruppi finiti della sfera.

Infatti se si iscrive un poligono regolare (standard, nel senso che ha 1 per vertice) in S^1 , l'insieme dei vertici è della forma $\{e^{k\frac{2\pi}{n}}, k = 0, \dots, n-1\}$ che forma un gruppo (la moltiplicazione in S^1 consiste nel sommare gli angoli). Viceversa se G è un sottogruppo finito (di ordine ≥ 3 ; gli altri casi sono banali) di S^1 , la sua chiusura convessa è un poligono regolare, perché dati due vertici $e^{i\theta}$ e $e^{i\varphi}$ esiste una rotazione di angolo $|\theta - \varphi|$ che porta uno nell'altro ed è rappresentata dalla moltiplicazione per $e^{i|\theta - \varphi|}$, che è un isomorfismo del gruppo e quindi la rotazione sovrappone il poligono a se stesso. Dunque esiste una corrispondenza biunivoca tra poligoni standard di n lati e sottogruppi della circonferenza, di ordine n .³ Inoltre è chiaro che in questa corrispondenza il gruppo associato a un poligono è il suo stesso gruppo di simmetria.

²Un risultato importantissimo a proposito è il teorema di Gelfand-Mazur: a meno di isomorfismi ci sono solo tre algebre reali di Banach che siano algebre di divisione e sono esattamente \mathbb{R} , \mathbb{C} e \mathbb{H} . Vedi [GP].

³O tra poligoni (non per forza standard) e sottogruppi a meno di coniugio.

Una situazione analoga avviene in 4 dimensioni: sicuramente un sottogruppo di S^3 o $Sp(1)$ ha chiusura convessa che è un politopo regolare (eventualmente degenere, cioè interamente contenuto in un sottospazio di dimensione inferiore a 4). Infatti dati due elementi p e q del gruppo, la rotazione $\mathcal{R}_{q,p}$ porta p in q ed è un isomorfismo del sottogruppo, quindi una simmetria della chiusura convessa. Il viceversa è un po' diverso: dato un politopo regolare standard rimane associato un gruppo delle simmetrie in $SO(4)$. Poiché questo è simmetrico rispetto ai vertici del politopo possiamo descriverlo (invece che con elementi \mathcal{R}_{q_1,q_2}) fissando il vertice $q_2 = 1$, tramite elementi del tipo $\mathcal{R}_{q_1,1}$ cioè tramite azioni sinistre di quaternioni unitari cioè tramite un insieme di punti di S^3 . Si vorrebbe concludere che questi punti sono proprio i vertici del politopo di partenza ma non è sempre vero: infatti un politopo e il suo duale hanno lo stesso gruppo di simmetria (ma hanno un numero differente di vertici, a meno che non sia un politopo autoduale) dunque le stesse rotazioni possono portare il vertice 1 nel vertice q_1 oppure nella 3-cella che ha centro in q_2 . In ogni caso esisterà una corrispondenza tra politopi standard *a meno di dualità* e sottogruppi finiti di S^3 . Sfruttare questa ambiguità data dalla dualità sarà il punto focale della costruzione dello spazio di Poincaré. Tra un politopo e il suo duale, per scegliere quello che ha vertici corrispondenti al suo gruppo di simmetrie basta fare un confronto tra il numero dei vertici e la cardinalità del gruppo.

Gli n -politopi regolari sono facilmente classificabili (vedi [Du Val]): in dimensione 2 sono i poligoni regolari; in dimensione 3 sono i solidi platonici; in dimensione 4 sono quelli riassunti nella seguente tabella.

	(Vertici, Spigoli)	2-celle	3-celle	Duale
4-simpleso	(5, 10)	10 triangoli	5 tetraedri	se stesso
Ipercubo	(16, 32)	24 quadrati	8 cubi	16-celle
16-celle	(8, 24)	32 triangoli	16 tetraedri	Ipercubo
24-celle	(24, 96)	96 triangoli	24 ottaedri	se stesso
120-celle	(600, 1200)	720 pentagoni	120 dodecaedri	600-celle
600-celle	(120, 720)	1200 triangoli	600 tetraedri	120-celle

2.3 Lo spazio \mathcal{D} [Thurston]

Lo spazio ideato da Poincaré (anche se non descritto in questa forma nel suo lavoro originale, vedi [Poincaré]), consiste in un particolare incollamento

delle facce di un dodecaedro (questa versione è sicuramente significativa, a maggior ragione se la si confronta con il caso più semplice e più noto dell'incollamento di lati di poligoni, che genera una classificazione delle superfici bidimensionali). Il dodecaedro è uno dei cinque poliedri regolari: ha 20 vertici e 30 spigoli mentre le sue facce sono pentagonali e si incontrano a gruppi di 3 attorno a ogni vertice (da cui la notazione di Schläfli, $\{5, 3\}$). L'aspetto più significativo è che le facce si presentano a coppie di facce parallele ruotate di un angolo (minimo) di $\pi/5$ (si potrebbero prendere multipli di quest'angolo: vedi sezione 2.7). L'identificazione sul dodecaedro consiste dunque nell'incollare una faccia alla sua opposta mediante una applicazione affine che ruota una faccia (fissiamo un senso, per esempio antiorario, dall'alto verso il basso) di $\pi/5$, sul piano in cui è contenuta, e la proietta su quella opposta. Il dodecaedro è considerato pieno: al suo interno l'identificazione è quella banale. Un po' di inseguimento sul solido mostra che l'identificazione è consistente e riunisce i vertici in 5 gruppi di 4, gli spigoli in 10 gruppi di 3 e ovviamente le facce in 6 gruppi di 2. Questo è lo spazio dodecaedro di Poincaré, \mathfrak{D} .

Calcolando la sua caratteristica di Eulero, si ha $\chi = 5 - 10 + 6 - 1 = 0$. Ma vale:

Teorema 2.4. *Un incollamento 3-dimensionale è una 3-varietà sse la sua caratteristica di Eulero è nulla.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio triangolato di dimensione n , in cui i link di ogni p -simplex siano delle $(n - p - 1)$ -sfere: allora X è una varietà. Infatti in generale se σ è un p -simplex di un complesso simpliciale, un punto nell'interno di σ ha $|st \sigma|$ come intorno topologico nel corpo del complesso e un po' di visualizzazione simpliciale basta per convincersi che $|st \sigma|$ è omeomorfo a $D^p \times C |lk \sigma|$ (C indica il cono su uno spazio). Ma i link sono sferici quindi ogni punto di X ha intorno della forma $D^p \times CS^{n-p-1}$ che è omeomorfo a $D^p \times D^{n-p}$ (il cono su una sfera è una palla): questi intorni ricoprono X , che quindi è una varietà. Questo discorso si estende agli incollamenti (simpliciali, cioè quozienti del corpo di un insieme di n -simplessi partizionati a coppie identificate tramite applicazioni affini) perché per incollamenti 3-dimensionali il link di uno spigolo è un cerchio e quindi si ripete il ragionamento.

Il viceversa non vale in generale (sorprendente che un controesempio provenga dallo stesso spazio di Poincaré, vedi [Edwards]), ma vale in dimensione 3. Infatti, sia v un vertice di X , incollamento 3-dimensionale che sia varietà. In generale X è localmente 1-connesso relativamente al vertice v sse $|lk v|$ è semplicemente connesso. Ma l'unica superficie chiusa semplicemente connessa è S^2 quindi se i link non fossero sferici, X non sarebbe localmente 1-connesso. Ma questo non è possibile per ogni varietà di dimensione superiore a 2 è localmente 1-connessa. Quindi rimane dimostrato:

Sublemma 2.5. *Un incollamento 3-dimensionale è una 3-varietà sse il corpo del link di ogni vertice è omeomorfo a S^2 .*

Ora siano v_1, \dots, v_k i vertici di X , solito 3-incollamento simpliciale e siano e , f e t i numeri dei suoi spigoli, facce e tetraedri. Allora $f = 2t$ poiché ogni faccia giace in 2 tetraedri e ogni tetraedro ha 4 facce. Inoltre

$$\sum_{i=1}^k \chi(\text{lk } v_i) = 2e - 3f + 4t,$$

perché ogni spigolo apporta 2 vertici nel conto totale delle somme dei tutti i link di un vertice (ogni vertice rientra nel conteggio della caratteristica del link dell'altro vertice dello spigolo), ogni faccia 3 spigoli (ogni spigolo rientra nel conteggio del link del vertice opposto) e similmente ogni tetraedro 4 facce. Quindi:

$$\chi(X) = k - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \chi(\text{lk } v_i).$$

Ma allora usando il lemma, poiché la caratteristica di una S^2 è 2 (e la caratteristica di ogni altra superficie chiusa è minore di 2) si ha $\chi(X) \geq 0$ con uguale sse X è una varietà. \square

Questa dimostrazione è stata fatta per spazi triangolabili (finiti), quindi triangolando eventualmente \mathfrak{D} (per triangolazioni virtuose vedi [BK]):

Teorema 2.6. *\mathfrak{D} è una 3-varietà.*

L'idea delle prossime sezioni sarà di descrivere \mathfrak{D} come 3-varietà sferica, ossia come quoziente di S^3 tramite l'azione propriamente discontinua di un sottogruppo finito di isometrie della sfera.

2.4 Simmetrie del dodecaedro [Du Val]

Il gruppo delle isometrie dirette del dodecaedro, I , ha 60 elementi:

- l'identità;
- 24 rotazioni di $2\pi/5$ o suoi multipli attorno a un asse che unisce due centri di facce opposte (esclusa l'identità);
- 15 rotazioni di π attorno a un asse che unisce i punti medi di due spigoli opposti;

- 20 rotazioni di $2\pi/3$ o suoi multipli attorno a un asse che unisce due vertici opposti (esclusa l'identità).

Se si aggiungono anche le isometrie che invertono l'orientazione dello spazio si ottiene un gruppo di 120 elementi, semplicemente aggiungendo $-Id$ e le sue composizioni con le simmetrie già elencate e si ottiene $I \times \mathbb{Z}_2$. Questo gruppo è profondamente diverso dal gruppo $2I$ per quando visto in 2.1. In ogni caso poiché cerchiamo un sottogruppo di $SO(4)$, l'idea è di considerare il gruppo binario $2I$, visto come gruppo di quaternioni unitari. Infatti in tal modo si può sfruttare la corrispondenza

$$\begin{array}{l} \text{Rotazione di } SO(3) \\ \text{di angolo } \beta \text{ attorno alla direzione } v \end{array} \longleftrightarrow \pm(\cos \beta, v \sin \beta) \in S^3$$

vista in 1.2 per dare una descrizione analitica di $2I$. Il risultato di questa costruzione, espresso sinteticamente, è:

$$2I = H \oplus ((\pm\tau, \pm 1, \pm\tau^{-1}, 0))$$

dove le doppie parentesi indicano tutte le permutazioni pari delle componenti, $\tau = (\sqrt{5} + 1)/2$, e H è il gruppo delle unità di Hurwitz, cioè $H = ((\pm 1, 0, 0, 0)) \oplus \{\frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$. In realtà questo è a sua volta esattamente $2T$ il quale è a sua volta somma diretta di 3 copie del gruppo quaternionico $Q_8 = ((\pm 1, 0, 0, 0))$ (che non può più essere scritto come prodotto diretto né semidiretto di gruppi più piccoli). Si può anche dimostrare che $2I$ può essere visto come somma diretta di cinque copie di $2T$ (in perfetta simmetria con il caso 3-dimensionale del dodecaedro, in cui possono essere iscritti 5 tetraedri), e così via ci sono molti modi di descrivere $2I$ (si veda [Du Val] per queste costruzioni nel dettaglio).

Un modo però più diretto può essere sfruttare quanto visto nella sezione 2.2: dopo un confronto del numero di vertici con la tabella dei 4-politopi, si può concludere che il gruppo $2I$ forma un 600-celle, i cui vertici, per quanto appena visto, trasposto nell'ambito dei politopi, si possono dividere per inscrivere cinque 24-celle (che sarebbero delle copie di $2T$). A questo punto si può descrivere analiticamente i vertici del 4-politopo, come si farebbe per un poliedro (tramite intersezioni di semi-iperpiani, che definiscono, all'aumentare del numero di questi coinvolti nell'intersezione, le celle al diminuire della dimensione). In ogni caso questo politopo è lo specchio del dodecaedro nel senso che a ogni vertice, in coppia con il suo opposto, è associata univocamente una simmetria del dodecaedro.

2.5 Azione di $2I$ [Du Val]

Ora abbiamo un sottogruppo di S^3 scritto esplicitamente, che agisce (tramite azione sinistra) sulla sfera S^3 . Questo gruppo è anche un 4-politopo; ma tutti i politopi hanno bordo omoomorfo a S^3 quindi, invece che S^3 , si può vedere come agisce $2I$ sul politopo duale del politopo $2I$ stesso, cioè un 120-celle. Questa è sicuramente una buona scelta perché il 120-celle ha 3-celle che sono dodecaedri; questi dodecaedri sono inscritti in S^3 e si incontrano intorno ai vertici a gruppi di 3 come un tetraedro (come riassunto dal simbolo di Schläfli $\{5, 3, 3\}$). Un modo intuitivo per visualizzarlo è proposto in [8]: si prende una torre di 10 dodecaedri impilati uno sull'altro, quindi ciascuno ruotato attorno alla verticale di 36 gradi rispetto a quello sottostante, e la si chiude identificando la due facce estreme, che a questo punto sono allineate. Ora si ha un anello di dodecaedri: prese 6 copie le si inanellano come dei cerchi di Hopf. In \mathbb{R}^3 non si chiude alla perfezione, ma in S^3 sì. A questo punto si prende un'altra copia di questo oggetto e la si unisce alla prima come si uniscono due tori solidi⁴ per formare S^3 .

Dunque abbiamo 120 dodecaedri che tassellano la 3-sfera e al centro dei quali si trovano i punti di $2I$. Mettiamoci nel punto 1 di $2I$: i punti più vicini a questo sono

$$\frac{1}{2}(\tau, 0, \pm 1, \pm \tau^{-1}), \frac{1}{2}(\tau, \pm \tau^{-1}, 0, \pm 1), \frac{1}{2}(\tau, \pm 1, \pm \tau^{-1}, 0)$$

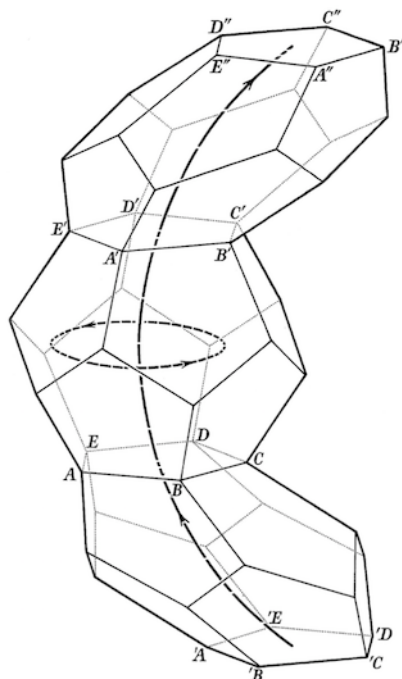
che sono i vertici di un icosaedro nello spazio $w = \tau/2$ (perché $2I$ è un 600-celle). Passando alla sfera o al duale: si ha un dodecaedro centrato in 1, e un anello di 12 dodecaedri centrati nei punti dell'icosaedro già calcolato, tutti l'anello giacente in $w = \tau/2$.

Dunque le azioni sinistre degli elementi calcolati hanno come piano invariante quello che contiene 1 e un punto dell'icosaedro, e quindi parallelo a una faccia del dodecaedro centrato in quel punto. L'angolo di rotazione è $\pi/5$ perché $\cos \pi/5 = \tau/2$ quindi facendo agire i punti dell'icosaedro, l'anello di dodecaedri viene mandato in se stesso facendo scorrere i dodecaedri uno nell'altro e pertanto una successione di facce parallele una nell'altra ruotata di $\pi/5$ (vedi figura 2.1).

Per definizione di poliedro regolare, questo succede se centriamo lo stesso discorso, al posto che in 1, in un qualunque punto: quindi in conclusione, per

⁴Formalmente si può scrivere $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ come $\mathcal{U}_+ \cup \mathcal{U}_-$ dove $\mathcal{U}_{+-} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1| \geq |z_2|\}$ che sono due tori solidi avverti bordo in comune che è il toro $\{|z_1| = |z_2|\}$. Per 'visualizzarlo': si prenda un toro pieno in \mathbb{R}^3 , centrato nell'asse z ; il secondo toro si ottiene riempiendo il resto dello spazio con anelli che circondano il primo toro con in più l'asse z che tramite una compattificazione di \mathbb{R}^3 , che è una S^3 , si chiuderà ad anello, chiudendo così il secondo toro. Per approfondimenti si veda [ST].

Figura 2.1: Anello di dodecaedri nel 120-celle



trovare un dominio fondamentale basta prendere un dodecaedro e ripetere il discorso per le sei catene di dodecaedri corrispondenti alla sei coppie di facce parallele: questo è proprio la costruzione con cui si era definito \mathfrak{D} e quindi:

Teorema 2.7. \mathfrak{D} è omeomorfo a $S^3/2I$.

2.6 Proprietà di \mathfrak{D}

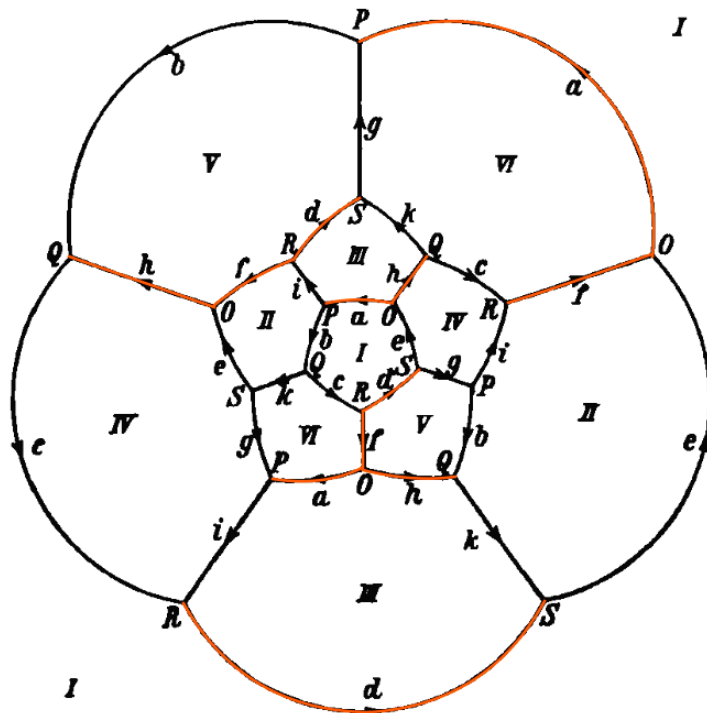
Data la descrizione per \mathfrak{D} del teorema 2.7, e agendo $2I$ come un gruppo di omeomorfismi di $S^3 \simeq 120$ -celle, propriamente discontinuo, da risultati fondamentali sulle proiezioni di rivestimento si ottiene:

Teorema 2.8. $\pi_1(\mathfrak{D}) \simeq 2I$ e \mathfrak{D} ha come rivestimento universale la proiezione $\pi : S^3 \mapsto S^3/2I$.

Inoltre:

Teorema 2.9. \mathfrak{D} è una 3-sfera d'omologia ed è l'unica 3-sfera d'omologia non banale con gruppo fondamentale finito.

Figura 2.2: Diagramma del dodecaedro con le identificazioni



Per dimostrarlo introduciamo la nozione di gruppo perfetto:

Definizione 2.4. Un gruppo si dice *perfetto* se ha abelianizzazione banale.

Proposizione 2.10. $2I$ è perfetto.

Dimostrazione. Un modo pratico per dimostrare questo fatto è calcolare una presentazione per $2I$, tramite la presentazione del gruppo fondamentale di \mathcal{D} : seguendo i pentagoni nel diagramma delle identificazioni in figura 2.2, (dove il dodecaedro è stato proiettato su un piano stereograficamente, ed è stato evidenziato un albero massimale) si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} bce = 1 \\ bkej^{-1} = 1 \\ jk^{-1} = 1 \\ cj^{-1}g^{-1}e = 1 \\ bg = 1 \\ g^{-1}k^{-1}c = 1 \end{array} \right.$$

da cui eliminando $g = b^{-1}$ e $k = j$:

$$\begin{cases} bce = 1 \\ bjej^{-1} = 1 \\ cj^{-1}be = 1 \\ bj^{-1}c = 1 \end{cases}$$

e ancora, si ricavano dalla prima e ultima equazione, $e = c^{-1}b^{-1}$ e $j = cb$, quindi eliminando adesso e e j , si ottengono le relazioni: $bcbc^{-1}b^{-2}c^{-1} = 1$ e $cb^{-1}c^{-1}bc^{-1}b^{-1} = 1$. Quindi⁵:

$$2I \simeq \langle b, c |, bcbc^{-1}b^{-2}c^{-1}, cb^{-1}c^{-1}bc^{-1}b^{-1} \rangle$$

Permettendo alle lettere di commutare si ottiene il gruppo

$$\langle b, c |, cc^{-1}bbb^{-2}c^{-1}, bb^{-1}cc^{-1}c^{-1}b^{-1} \rangle \simeq \langle b, c |, c^{-1}, c^{-1}b^{-1} \rangle \simeq \langle b, c | c, b \rangle \simeq 0$$

□

Inoltre con una verifica diretta (ricalcata su quella appena svolta per $2I$) si può dimostrare che tra i sottogruppi di S^3 , elencati al corollario 2.3, $2I$ è l'unico perfetto. Dunque, tornando all'omologia di \mathfrak{D} :

Dimostrazione. (Teorema 2.9) $H_0(\mathfrak{D}) \simeq \mathbb{Z}$ banalmente; $H_1(\mathfrak{D}) \simeq 0$ perché $2I$ è perfetto. Il resto dell'omologia viene per dualità: $H_2 \simeq 0$ e $H_3 \simeq \mathbb{Z}$ (non ci sono coefficienti di torsione). Quindi \mathfrak{D} è una sfera d'omologia. Per quanto riguarda l'unicità: se X ha la stessa omologia di una sfera ed è una varietà sferica allora il suo gruppo fondamentale è uno dei gruppi del corollario 2.3, dove $2I$ era l'unico perfetto. Per quanto riguarda gli altri casi, la dimostrazione necessita di una classificazione piuttosto complessa dei gruppi che agiscono liberamente su una sfera d'omologia nella quale però $2I$ continua a rimanere l'unico gruppo perfetto (vedi [Milnor, Kervaire]). □

Questi risultati sono i principali che mostrano l'utilità esemplificativa di \mathfrak{D} nel contesto della topologia algebrica: per il teorema 2.9 l'omologia non è uno strumento algebrico abbastanza potente da distinguere \mathfrak{D} da una sfera

⁵Scrivendo la prima relazione come $bcbc^{-1}(cb^{-1}c^{-1}bc^{-1}b^{-1})b^{-2}c^{-1} = 1$ cioè $b^2c^{-1}b^{-3}c^{-1} = 1$ e aggiungendo un nuovo generatore definito da $a = bc^{-1}$ otteniamo, per esempio sostituendo $c = a^{-1}b$, una presentazione più compatta:

$$2I \simeq \langle b, u | b^5 = (ba)^2 = a^3 \rangle$$

che ha come possibili generatori $a = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$ e $a = \frac{1}{2}(\tau, \tau^{-1}, 1, 0)$

mentre per il teorema 2.8, il gruppo fondamentale sì (quello di \mathfrak{D} non è banale quindi non può esserci omeomorfismo con una sfera). Queste non sono che manifestazioni dal fatto che gruppo fondamentale e omologia hanno carattere functoriale e quindi a priori sono solo dei test negativi per testare omeomorfismi: se due spazi hanno omologia o gruppo fondamentale distinti allora non sono omeomorfi, mentre non è valido in generale il viceversa.

In particolare, dunque, \mathfrak{D} è un controesempio alla prima, incorretta, congettura di Poincaré, che prevedeva che la sola omologia fosse sufficiente per caratterizzare le 3-sfere tra le 3-varietà chiuse. Proprio ragionando sulla validità o meno di tale congettura, lo stesso Poincaré ideò lo spazio \mathfrak{D} (non nelle due forme viste in questo elaborato⁶ ma soprattutto ideò il gruppo fondamentale, per poter effettivamente dire che $\mathfrak{D} \not\cong S^3$).

2.7 Altri spazi dodecaedrici

Ripercorrendo le identificazioni fatte sul dodecaedro si può notare che identificando facce opposte con angoli diversi da $\pi/5$ si ottengono ancora degli incollamenti compatibili, in particolare:

- con una rotazione di $3\pi/10$, gli spigoli vengono identificati in 6 gruppi di 5, e i vertici sono tutti identificati, quindi la χ è nulla e si ottiene una varietà detta spazio dodecaedrico di Seifert-Weber;
- con una rotazione di $5\pi/10$ si ottiene $\mathbb{R}P^3$ perché l'identificazione è quella antipodale (il dodecaedro ha simmetria centrale e l'equatore è rappresentato da una linea spezzata che divide in due metà di 6 pentagoni il dodecaedro).

⁶Ci sono innumerevoli descrizioni di \mathfrak{D} , più topologiche e meno strettamente geometriche; vedi [KS].

Bibliografia

- [BK] A. Björner and F. H. Lutz, Simplicial manifolds, bistellar flips and a 16-vertex triangulation of the Poincaré homology 3-sphere, 1999.
- [BLM] H. Blaine Lawson, jr. and Marie-Louise Michelsohn, Princeton University Press, 1989.
- [Du Val] P. Du Val, Homographies, quaternions and rotations, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1964.
- [Edwards] R. D. Edwards, Suspension of homology spheres, 1975.
- [GP] M. C. Garcia and A. R. Palacios, Non-associative normed algebras, Cambridge University Press, 2014.
- [Kervaire] M. A. Kervaire, Smooth homology sphere and their fundamental groups, Courant Institute of Mathematical Science, 1968.
- [KS] R. C. Kirby, M. G. Scharlemann, Eight faces of the Poincaré homology 3-sphere, Academic Press, 1979.
- [Lang] S. Lang, Algebra Lineare, Boringhieri, Torino 1989.
- [Milnor] J. Milnor Groups which act on S^n without fixed points, Amer. J. Math. 79, 1957.
- [Poincaré] H. Poincaré, Cinquième complément à l'analyse situs, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1904.
- [ST] H. Seifert and W. Threlfall, A Textbook of Topology, Academic press, 1980
- [Thurston] W. P. Thurston, Three-Dimensional Geometry and Topology 1, Princeton University Press, 1997.