Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Le funzioni armoniche e le formule di media

Tesi di laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Annamaria Montanari

Presentata da:
Caterina Mazzetti

II Sessione
Anno Accademico 2014/2015

Alla mamma, al babbo
e a Michele

Indice

Introduzione

In questa tesi studiamo le funzioni armoniche e le loro proprietà fondamentali.

Nel primo Capitolo definiamo le funzioni armoniche come funzioni di classe $\mathcal{C}^2$ su un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ che risolvono l'equazione di Laplace:

$$\Delta u = 0, \quad \Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}.$$

Affrontiamo successivamente le formule di rappresentazione di Green ed illustriamo come le funzioni armoniche, tramite quest'ultime, siano analitiche nel loro dominio di definizione. In particolare, la seconda formula di rappresentazione di Green insieme alla rappresentazione del nucleo di Poisson per un arbitrario disco di $\mathbb{R}^n$ getteranno le basi per un nuovo approccio allo studio delle funzioni armoniche studiato in dettaglio nei Capitoli 2 e 3.

Nel secondo Capitolo ricaviamo il seguente il risultato:
dato un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ e una funzione $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ armonica in Ω, allora valgono:

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial D(x_0, r)|} \int_{\partial D(x_0,r)} u(x)\, d\sigma(x), \tag{1}$$

$$u(x_0) = \frac{1}{|D(x_0, r)|} \int_{D(x_0,r)} u(x)\, dx, \tag{2}$$

per ogni disco $D(x_0, r)$ avente $\overline{D(x_0, r)} \subseteq \Omega$.
Le identità (1) e (2) sono chiamate rispettivamente formule di media di superficie e di volume.
Dimostriamo poi che per una funzione di classe $\mathcal{C}^2$, definita su un aperto di $\mathbb{R}^n$, le proprietà (1) e (2) sono una condizione sufficiente affinché la funzione in questione sia armonica. Tramite tali risultati scaturiscono diverse conseguenze importanti, quali la disuguaglianza di Harnack sui dischi, il teorema di Liouville e i principi di massimo debole e forte.
Riprendendo le fila del primo Capitolo, enunciamo e dimostriamo che:

dato un disco $D = D(0,R)$ e presa una funzione φ continua su ∂D, allora la funzione u definita da:

$$u(x) = \begin{cases} \frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial D} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} \, d\sigma(y) & , \text{per } x \in D \\ \varphi(x) & , \text{per } x \in \partial D \end{cases}$$

appartiene a $\mathcal{C}^2(D) \cap \mathcal{C}\left(\overline{D}\right)$ e soddisfa $\Delta u = 0$ in D.
Da questo risultato possiamo fare un salto notevole nello studio dell'armonicità delle funzioni, infatti riusciamo a provare che dato un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$, una funzione è armonica in Ω se e solo se è continua e soddisfa le formule di media. Ciò mostra di fatto come le formule di media siano una proprietà caratterizzante delle funzioni armoniche, ma non solo: la condizione di regolarità sulla funzione presa in analisi è più debole, basta che sia continua e non più di classe $\mathcal{C}^2$.

Nel terzo Capitolo sfruttiamo tutti i risultati dei capitoli precedenti per applicarli allo studio del Problema di Dirichlet per il Laplaciano. Illustriamo infatti un metodo, noto come *metodo di Perron per le funzioni subarmoniche*, in grado di costruire una funzione armonica soluzione di:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} \quad \Omega \\ u = \varphi & \text{su} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

dove Ω è un aperto connesso e limitato di $\mathbb{R}^n$ e φ è una funzione continua sul bordo di Ω.
In concomitanza, grazie alle nozioni di *funzione barriera* e di *punto regolare*, riusciamo a stabilire un criterio per la risolubilità del Problema (3).

Notazioni di base

- $\mathbb{R}^n$: spazio euclideo n-dimensionale, $n \geq 2$, di punti $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x > 0\}$.
- Dato $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
- ∂S: *bordo* di $S \subseteq \mathbb{R}^n$; $\overline{S}$ = *chiusura* di $S = S \cup \partial S$.
- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *dominio*: Ω aperto e connesso di $\mathbb{R}^n$.
- $D(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ |x - x_0| < r\}$: *disco* o *palla* di $\mathbb{R}^n$ di centro x_0 e raggio r.
- Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $D(x_0, r) \subset\subset \Omega$: $\overline{D(x_0, r)} \subseteq \Omega$.
- ω_n: volume del disco unitario in $\mathbb{R}^n$.
- $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $D_{ij} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$; $Du = (D_1 u, \ldots, D_n u)$ = gradiente di u.
- $D^2 u = [D_{ij} u]$ = matrice delle derivate seconde di u, $\ i, j = 1, \ldots, n$.
- $\mathcal{C}^k(\Omega)$: insieme delle funzioni aventi tutte le derivate di ordine $\leq k$ continue in Ω (k = intero ≥ 0 o $k = \infty$).
- $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, β_i intero non negativo, con $|\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i$, è un *multi-indice*; definiamo:

$$D^\beta u = \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}}.$$

Capitolo 1

L'equazione di Laplace

1.1 Nozioni preliminari

Definizione 1.1. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. Si definisce **Laplaciano**, o **operatore di Laplace** di u, denotato Δu, la seguente quantità:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} D_{ii} u. \tag{1.1}$$

Definizione 1.2. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. La funzione u si dice **armonica** (**subarmonica, superarmonica**) in Ω se soddisfa:

$$\Delta u = 0 \quad (\geq 0, \leq 0)\,. \tag{1.2}$$

L'equazione (1.2) è nota come **equazione di Laplace**.

Riportiamo in questo capitolo il teorema cardine per lo studio delle funzioni armoniche e delle formule di media: il teorema della divergenza. Per poterlo enunciare e dimostrare necessitiamo di ulteriori conoscenze fondamentali:

Definizione 1.3. Un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ si dice **regolare** se:

1. Ω è limitato;
2. $\operatorname{int}\left(\overline{\Omega}\right) = \Omega$;
3. il $\partial\Omega$ è una $(n-1)$- varietà differenziabile di classe almeno $\mathcal{C}^1$.

Definizione 1.4. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto regolare. Fissato $x_0 \in \partial\Omega$, un vettore $\nu \in \mathbb{R}^n$ si definisce **normale esterna** a Ω in x_0 se:

1. ν è ortogonale a $\partial\Omega$ in x_0, $|\nu| = 1$;
2. $\exists \delta > 0$ tale che $x_0 + t\nu \notin \bar{\Omega}$, $x_0 - t\nu \in \Omega$, $\quad \forall t \in (0, \delta)$.

Teorema 1.1.1 (**Integrazione per parti**).
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto regolare.*
Sia $f \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right)$. *Allora:*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx = \int_{\partial\Omega} f \nu_j \, d\sigma \qquad , j = 1, ..., n, \tag{1.3}$$

dove $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ *è la normale esterna a* Ω.

1.2 Il teorema della divergenza

Definizione 1.5. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto regolare e sia $F \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$.
Si definisce **divergenza** del campo F la quantità:

$$divF = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}.$$

Teorema 1.2.1 (**Teorema della divergenza**).
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto regolare.*
Sia $F \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$. *Allora:*

$$\int_\Omega divF \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma, \tag{1.4}$$

dove $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ *è la normale esterna a* Ω.

Dimostrazione. Dal teorema di integrazione per parti segue che:

$$\begin{aligned}\int_\Omega divF \, dx &= \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}\, dx = \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial F_j}{\partial x_j}\, dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial\Omega} F_j \nu_j \, d\sigma = \\ &= \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma.\end{aligned}$$

□

Osservazione 1.1. In particolare, se $u \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$, applicando il teorema a $F = Du$, otteniamo questo interessante risultato:

$$\int_\Omega \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} Du \cdot \nu \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma. \tag{1.5}$$

Osservazione 1.2. Il teorema della divergenza segue dal teorema di integrazione per parti, ma vale anche il viceversa, infatti:
prendendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto regolare e $F = (0, \ldots, f, \ldots, 0)$ con $f \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right)$ nel posto j-esimo, otteniamo:

$$\langle F, \nu \rangle = f\nu_j \quad \text{e} \quad divF = \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

e quindi applicando il teorema della divergenza vale:

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} f\nu_j d\sigma.$$

Esempio 1.1. Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R \in \mathbb{R}_+$ fissati.
Consideriamo $\Omega = D(x_0, R)$, disco di $\mathbb{R}^n$ di centro x_0 e raggio r.
Sia $F(x) = |x - x_0|^2 - R^2$, allora $DF = 2(x - x_0)$, per cui risulta naturale scegliere come normale esterna a Ω in x_0 il vettore $\nu = \frac{x - x_0}{|x - x_0|}$.
Applichiamo ora il teorema della divergenza al campo $\tilde{F} = (x - x_0)$:

$$\int_{D(x_0,R)} div\tilde{F}\, dx = \int_{D(x_0,R)} n\, dx = \int_{\partial D(x_0,R)} \left\langle (x - x_0), \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \right\rangle d\sigma(x),$$

abbiamo che:

$$n \int_{D(x_0,R)} dx = R \int_{\partial D(x_0,R)} d\sigma(x).$$

Denotiamo con

$$\omega_n = \int_{D(0,1)} dx = |D(0,1)|$$

la misura di Lebesgue del disco unitario in $\mathbb{R}^n$.
Allora, siccome su $D(x_0, R)$ vale: $|x - x_0|^2 < R^2$, se attuiamo il cambio di variabili:

$$y = \frac{x - x_0}{R} \quad \text{, allora:} \quad x = x_0 + Ry \quad \text{, da cui:} \left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right| = R^n,$$

per cui otteniamo:

$$\int_{D(x_0,R)} dx = \int_{D(0,1)} R^n\, dy = R^n \omega_n,$$

in questo modo:

$$nR^n\omega_n = n \int_{D(x_0,R)} dx = R \int_{\partial D(x_0,R)} d\sigma(x),$$

da cui risulta che:

$$|\partial D(x_0, R)| = \int_{\partial D(x_0,R)} d\sigma = nR^{n-1}\omega_n.$$

Ciò mostra come la misura del bordo di un disco di $\mathbb{R}^n$ sia una costante dipendente esclusivamente dal raggio e dalla dimensione dello spazio considerato. Tale risultato sarà molto utile in numerose dimostrazioni.

Proposizione 1.2.2 (Prima identità di Green).
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto regolare.
Siano $u \in \mathcal{C}^2\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right)$ e $v \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right)$. Allora:

$$\int_\Omega (v\Delta u + Du \cdot Dv)\, dx = \int_{\partial\Omega} v\, \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma. \tag{1.6}$$

Dimostrazione. Sia $F = v\,(Du)$, allora $divF = v\Delta u + Du \cdot Dv$, infatti:

$$divF = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\left(v\left(D_j u\right)\right)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\left(v\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) =$$
$$= v\Delta u + Dv \cdot Du.$$

Per il teorema della divergenza:

$$\int_\Omega (v\Delta u + Du \cdot Dv)\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle v\,(Du), \nu\rangle\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} v\, \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma.$$

□

Proposizione 1.2.3 (Seconda identità di Green).
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto regolare.
Siano $u, v \in \mathcal{C}^2\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right)$. Allora:

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) d\sigma. \tag{1.7}$$

Dimostrazione. Abbiamo:

$$u\Delta v - v\Delta v = \sum_{j=1}^n \left(u\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} - v\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial\left(u\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)}{\partial x_j} - \frac{\partial\left(v\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)}{\partial x_j}\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial\left(u\frac{\partial v}{\partial x_j} - v\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)}{\partial x_j} = div\left(u\,Dv - v\,Du\right).$$

Applichiamo il teorema della divergenza:

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta v)\ dx &= \int_\Omega div\,(u\,Dv - v\,Du)\ dx = \int_{\partial\Omega} \langle u\,Dv - v\,Du, \nu\rangle\ d\sigma = \\ &= \int_{\partial\Omega} (u\,\langle Dv,\nu\rangle - v\,\langle Du,\nu\rangle)\ d\sigma = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\ d\sigma.\end{aligned}$$

□

Osservazione 1.3. Se in (1.6) prendiamo $v = u$, allora otteniamo:

$$\int_\Omega \left(u\Delta u + |Du|^2\right)\ dx = \int_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial u}{\partial v}\ d\sigma. \tag{1.8}$$

Tale identità è nota come **identità dell'energia**.

Esempio 1.2. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso, aperto regolare.
Consideriamo il seguente Problema di Dirichlet (PD):

$$\begin{cases}\Delta u = 0 & , x \in \Omega \\ u = 0 & , x \in \partial\Omega\end{cases}$$

Allora esiste ed è unica $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$ soluzione di PD: $u \equiv 0$.

Applicando (1.8) otteniamo infatti:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |Du|^2\ dx = 0 &\Longrightarrow |Du| \equiv 0 \quad \text{in } \Omega \\ &\Longrightarrow u \equiv \text{cost} \quad \text{, essendo } \Omega \text{ connesso} \\ &\Longrightarrow u \equiv 0 \quad \text{, essendo } u \text{ continua fino al bordo.}\end{aligned}$$

1.3 Soluzione fondamentale del Laplaciano

L'obiettivo è quello di cercare una soluzione u dell'equazione di Laplace (1.2) in $\Omega = \mathbb{R}^n$ avente la forma:

$$u(x) = v(r)\,,$$

dove $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ e v deve essere scelto (se possibile) in modo tale che $\Delta u = 0$.
Cerchiamo di caratterizzare al meglio tale soluzione fornendo questa definizione:

Definizione 1.6. Si dice che $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ è una **funzione radiale** se:

$$u(x) = v(|x|), \quad \text{con} \quad v : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Ricerchiamo dunque le funzioni radiali armoniche:

Sia $v \in \mathcal{C}^2((0, +\infty), \mathbb{R})$.
Notiamo che, ponendo $r = |x|$, per $i = 1, \ldots, n$ si ha:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{x_i}{r} \quad (x \neq 0).$$

Inoltre:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = v'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right).$$

Allora:

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r).$$

Da cui risulta che $\Delta u = 0$ se e solo se:

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0,$$

ma questo è equivalente a:

$$\begin{aligned} r^{n-1} \left(v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) \right) = 0 \iff \left(r^{n-1} v' \right)' = 0 \iff \\ \iff r^{n-1} v' = c \iff \\ \iff v' = \frac{c}{r^{n-1}}, \end{aligned}$$

con c costante reale.
Distinguiamo dunque due casi:

$$\begin{aligned} n = 2 \quad &\Longrightarrow \quad v' = \frac{c}{r} \quad e \quad v(r) = c \log r + c_0, \\ n \geq 3 \quad &\Longrightarrow \quad v' = \frac{c}{r^{n-1}} \quad e \quad v(r) = c \left(\frac{r^{2-n}}{2-n} \right) + c_0. \end{aligned}$$

Da cui:

$$v(r) = \begin{cases} c \log r + c_0 & , n = 2 \\ c \left(\frac{r^{2-n}}{2-n} \right) + c_0 = c_n r^{2-n} + c_0 & , n \geq 3 \end{cases}$$

con c_n, c_0 costanti reali.

Queste considerazioni motivano la seguente

Definizione 1.7. La funzione $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log|x| & , n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} |x|^{2-n} & , n \geq 3 \end{cases} \tag{1.9}$$

è chiamata **soluzione fondamentale del Laplaciano**.

Osservazione 1.4. Il motivo della particolare scelta di costanti in (1.9) sarà mostrato nella prossima sezione.

Osservazione 1.5. Per costruzione l'applicazione $x \longmapsto \Phi(x)$ è armonica per $x \neq 0$. Se spostiamo l'origine in un nuovo punto $y \in \mathbb{R}^n$, la funzione $x \longmapsto \Phi(x-y)$ è ancora armonica come funzione di x, $x \neq y$.

1.4 Formule di rappresentazione

1.4.1 Formule di Green

Proposizione 1.4.1 (**Prima formula di rappresentazione di Green**).

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$*,* $n \geq 3$*, aperto regolare e* $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$*.*
Sia $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *la funzione radiale definita come in* (1.9)*.*
Allora, per ogni $x_0 \in \Omega$*, vale:*

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \Phi(x-x_0) - u(x) \frac{\partial \Phi(x-x_0)}{\partial \nu} \right) d\sigma - \int_{\Omega} \Phi(x-x_0) \Delta u \, dx. \tag{1.10}$$

Dimostrazione. Prendiamo $\varepsilon > 0$ tale che $D(x_0, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n$ e $D(x_0, \varepsilon) \subset\subset \Omega$. Definiamo $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{D(x_0, \varepsilon)}$, ovviamente Ω_ε è un aperto regolare e la funzione $v(x) := \Phi(x-x_0)\, n(n-2)\,\omega_n = |x-x_0|^{2-n}$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \supseteq \overline{\Omega_\varepsilon}$.

Applichiamo la seconda identità di Green a v e a u su Ω_ε, otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} (u\Delta v - v\Delta u)\, dx &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma = \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma - \int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma. \end{aligned}$$

In questa identità vogliamo passare al limite per $\varepsilon \to 0$.

Procediamo per gradi:

1. Essendo v armonica in Ω_ε si ha:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\varepsilon} (u\Delta v - v\Delta u)\ dx &= -\int_{\Omega_\varepsilon} v\Delta u\, dx = \\ &= -\int_{\Omega} \chi_{\Omega_\varepsilon} v\Delta u\, dx \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -\int_{\Omega} v\Delta u\, dx.\end{aligned}$$

   Tale ultimo passaggio al limite è giustificato dal teorema di convergenza dominata di Lebesgue, infatti:

   - la convergenza puntuale della funzione integranda è immediata;
   - la funzione $u \in \mathcal{C}^2\left(\overline{\Omega}\right)$ per ipotesi, dunque Δu è continua sul compatto $\bar{\Omega}$ e perciò è limitata su $\bar{\Omega}$;
   - $|\chi_{\Omega_\varepsilon}| \leq 1, \forall \varepsilon > 0$;
   - la funzione $v \in L^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^n\right)$, infatti, per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n, \exists R > 0$ tale che $K \subseteq D\left(x_0, R\right)$, pertanto abbiamo:

$$\int_K v\left(x\right)\ dx \leq \int_{D(x_0,R)} v\left(x\right)\ dx = \int_{|x-x_0|<R} \left|x - x_0\right|^{2-n}\ dx.$$

     Facendo il cambio di variabili $y = x - x_0$:

$$\begin{aligned}\int_K v\left(x\right)\ dx \leq \int_{|x-x_0|<R} \left|x-x_0\right|^{2-n}\ dx &= \int_{|y|<R} |y|^{2-n}\ dy = \\ &= \int_0^R \int_{|y|=r} \left(|y|^{2-n}\ d\sigma\left(y\right)\right)\ dr = \\ &= \int_0^R r^{2-n} n\omega_n r^{n-1}\, dr = n\omega_n \int_0^R r\, dr = \\ &= n\omega_n \frac{R^2}{2} < +\infty.\end{aligned}$$

     Quindi la funzione v è localmente sommabile, sicché è totalmente giustificato il passaggio al limite sotto al segno di integrale.

2. Consideriamo:

$$\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} u\,\frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\sigma.$$

   La derivata normale di una funzione radiale è ancora una funzione radiale, infatti, assumendo come normale esterna a $\partial D\left(x_0, \varepsilon\right)$ il vettore $\nu = \frac{x-x_0}{|x-x_0|}$, si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v\left(x\right)}{\partial \nu} &= \left\langle D\left(\left|x-x_0\right|^{2-n}\right), \frac{x-x_0}{\left|x-x_0\right|}\right\rangle = \\ &= \left\langle \left(2-n\right)\left|x-x_0\right|^{1-n}\left(\frac{x-x_0}{\left|x-x_0\right|}\right), \frac{x-x_0}{\left|x-x_0\right|}\right\rangle = \\ &= \left(2-n\right)\left|x-x_0\right|^{1-n}.\end{aligned}$$

Su $\partial D\left(x_0,\varepsilon\right)$ risulta che $\left|x-x_0\right|=\varepsilon$, quindi:

$$-\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} u\,\frac{\partial v}{\partial \nu}\,d\sigma=-\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} u\,(2-n)\,\varepsilon^{1-n}\,d\sigma=$$
$$=(n-2)\left(\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)}\left(u\left(x\right)-u\left(x_0\right)\right)\,d\sigma+\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} u\left(x_0\right)\,d\sigma\right)\varepsilon^{1-n}=$$
$$=\varepsilon^{1-n}\left(n-2\right)\left(o\left(1\right)n\omega_n\varepsilon^{n-1}+u\left(x_0\right)n\omega_n\varepsilon^{n-1}\right)\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} n\left(n-2\right)\omega_n\,u\left(x_0\right).$$

3. Ora stimiamo:
$$\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} v\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\sigma.$$
Si ha:
$$\left|\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\sigma\right|\le \sup_{\overline{\Omega}}\left|Du\right|\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)}\left|x-x_0\right|^{2-n}\,d\sigma\left(x\right)=$$
$$=c\left(u\right)\varepsilon^{2-n}n\,\omega_n\,\varepsilon^{n-1}=$$
$$=c\left(u\right)n\,\omega_n\,\varepsilon\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

In definitiva abbiamo:

$$-\int_\Omega v\Delta u\,dx=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu}-v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\,d\sigma+n\left(n-2\right)\omega_n u\left(x_0\right)+0.$$

Da cui segue subito:

$$-\int_\Omega \Phi\left(x-x_0\right)n\left(n-2\right)\omega_n\Delta u\,dx=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu}-v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\,d\sigma+n\left(n-2\right)\omega_n u\left(x_0\right).$$

Isolando al primo membro $u\left(x_0\right)$ e per come abbiamo definito la funzione v, abbiamo la tesi. □

Osservazione 1.6. Completiamo la proposizione studiando il caso $n=2$, motivando fino in fondo la scelta delle costanti in (1.9).
Sia $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ aperto regolare e sia $u\in\mathcal{C}^2\left(\overline{\Omega}\right)$.
Sia $\Phi:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ la funzione radiale definita come in (1.9).
Allora, per ogni $x_0\in\Omega$ vale la formula di rappresentazione (1.10) per $c=-\frac{1}{2\pi}$.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga alla precedente, ciò che dobbiamo modificare e riadattare al caso bidimensionale si trova nello studio di:
$$\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} u\,\frac{\partial v}{\partial \nu}\,d\sigma.$$

Infatti:

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \Phi'(r) = c\,\frac{1}{r},$$

cosicché:

$$\begin{aligned}-\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)}\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) d\sigma = &-\int_{|x-x_0|=\varepsilon} u(x)\,\frac{c}{\varepsilon}\,d\sigma(x) + \\ &+\int_{|x-x_0|=\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,(c\log\varepsilon)\,d\sigma(x) =: -I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Stimiamo prima I_2:
tramite un cambio di variabili e sfruttando il teorema di Weierstrass, possiamo dire che:

$$|I_2| \leq\ |c|\,|\varepsilon\log\varepsilon| \int_{|z|=1}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0+\varepsilon z)\right| d\sigma(z) \leq\ |c|\,|\varepsilon\log\varepsilon|\,\eta \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Consideriamo ora I_1 attuando lo stesso cambio di variabili:

$$I_1 = \frac{c}{\varepsilon}\,\varepsilon \int_{|z|=1} u(x_0+\varepsilon z)\,d\sigma(z) = c\,2\pi\left(\frac{1}{|\partial D(0,1)|}\int_{|z|=1} u(x_0+\varepsilon z)\,d\sigma(z)\right).$$

Allora:

$$I_1 \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} c\,2\pi\,u(x_0).$$

Perciò, affinché valga (1.10) anche nel caso bidimensionale, la costante c deve essere uguale a $-\frac{1}{2\pi}$. □

Osservazione 1.7. Se in (1.10) prendiamo $\Omega = D(x_0, r) =: D$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}_+$, allora, sfruttando il fatto che $|x - x_0| = r$ sul bordo e applicando (1.5), otteniamo:

$$\begin{aligned}u(x_0) &= \int_{\partial D}\left(\Phi(x-x_0)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x)\,\frac{\partial \Phi(x-x_0)}{\partial \nu}\right) d\sigma - \\ &- \int_D \Phi(x-x_0)\,\Delta u(x)\,dx = \\ &= \Phi(r)\int_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\sigma - \Phi'(r)\int_{\partial D} u\,d\sigma - \int_D \Phi(x-x_0)\,\Delta u(x)\,dx = \\ &= \Phi(r)\int_D \Delta u\,dx + \frac{1}{n\,\omega_n\,r^{n-1}}\int_{\partial D} u\,d\sigma - \int_D \Phi(x-x_0)\,\Delta u(x)\,dx,\end{aligned}$$

quindi:

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial D|}\int_{\partial D} u\,d\sigma - \int_D \left(\Phi(x-x_0) - \Phi(r)\right)\Delta u(x)\,dx. \tag{1.11}$$

Osservazione 1.8. Se u è armonica in Ω, allora:

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(x - x_0) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x) \frac{\partial \Phi(x - x_0)}{\partial \nu} \right) d\sigma \qquad , \forall x_0 \in \Omega. \tag{1.12}$$

Poiché la funzione integranda è di classe $\mathcal{C}^\infty$ e analitica in x_0, data l'arbitrarietà di x_0, segue che u è analitica in Ω. Le funzioni armoniche sono pertanto analitiche nel loro dominio di definizione.

Definizione 1.8. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto regolare e sia $x \in \Omega$ fissato.
Sia $h_x \in \mathcal{C}^2\left(\overline{\Omega}\right)$, armonica in Ω e tale che $h_x(y) = \Phi(x - y)$ $, \forall y \in \partial\Omega$.
Se h_x esiste per ogni $x \in \Omega$, si definisce **funzione di Green** per Ω:

$$G(x, y) := \Phi(x - y) - h_x(y) \qquad , \ x, y \in \Omega, \ x \neq y.$$

Proposizione 1.4.2 (**Seconda formula di rappresentazione di Green**).

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto regolare dotato di funzione di Green G e sia $u \in \mathcal{C}^2\left(\overline{\Omega}\right)$.
Allora, per ogni $x \in \Omega$ vale:

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu} d\sigma(y) - \int_\Omega \Delta u(y) G(x, y)\, dy. \tag{1.13}$$

*Chiamiamo $-\frac{\partial G}{\partial \nu}$ **nucleo di Poisson** per Ω.*

Dimostrazione. Applichiamo la seconda identità di Green alle funzioni h_x e u, così:

$$\int_\Omega (u\Delta h_x - h_x \Delta u)\, dy = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial h_x}{\partial \nu} - h_x \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma.$$

Poiché h_x è armonica si ha:

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial h_x}{\partial \nu} - h_x \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma + \int_\Omega h_x \Delta u\, dy.$$

Sommando membro a membro questa espressione con la prima formula di rappresentazione di Green e sfruttando la simmetria della funzione Φ, otteniamo:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left[(\Phi(x - y) - h_x(y)) \frac{\partial u}{\partial \nu} - u(y) \left(\frac{\partial \Phi(x - y)}{\partial \nu} - \frac{\partial h_x(y)}{\partial \nu} \right) \right] d\sigma +$$
$$+ \int_\Omega \Delta u (h_x(y) - \Phi(x - y))\, dy.$$

Osservando che $G \equiv 0$ su $\partial\Omega$, allora:

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu} d\sigma(y) - \int_\Omega \Delta u(y) G(x, y)\, dy.$$

□

1.4.2 Nucleo di Poisson per il disco

Definizione 1.9. Sia $R \in \mathbb{R}_+$ fissato. La funzione

$$x \longmapsto \bar{x} = \begin{cases} \left(\frac{R}{|x|}\right)^2 x & , x \neq 0 \\ \\ +\infty & , x = 0, \end{cases} \tag{1.14}$$

si chiama **inversione** rispetto a $\partial D\,(0, R)$.

Osservazione 1.9. La mappa (1.14) agisce in questo modo:

fissati $x \in \mathbb{R}^n$ e $R \in \mathbb{R}_+$ tali che $|x| > R$, allora:

$$|\bar{x}| = \frac{R^2}{|x|^2}\,|x| = \frac{R^2}{|x|} < R.$$

Ossia, tutti i punti al di fuori di $D\,(0, R)$ tramite questa mappa vengono portati all'interno del disco.
Analogamente, fissati $x \in \mathbb{R}^n$ e $R \in \mathbb{R}_+$ tali che $|x| < R$, allora:

$$|\bar{x}| = \frac{R^2}{|x|^2}\,|x| = \frac{R^2}{|x|} > R.$$

Ossia, tutti i punti all'interno di $D\,(0, R)$ tramite (1.14) vengono portati fuori dal disco.
Infine, se $|x| = R$, la (1.14) coincide con la mappa identità.

Proposizione 1.4.3. *La funzione di Green per $D\,(0, R)$ è:*

$$G\,(x, y) = \Phi\,(x - y) - \Phi\left((\bar{x} - y)\,\frac{|x|}{R}\right) \quad , x, y \in D\,(0, R)\,, x \neq y. \tag{1.15}$$

Dimostrazione. Sia $x \in D\,(0, R)$, per ogni $y \in \partial D\,(0, R)$ calcoliamo:

$$\begin{aligned}\left(\frac{|x - y|}{|\bar{x} - y|}\right)^2 &= \frac{|x|^2 + |y|^2 - 2 < x, y >}{|\bar{x}|^2 + |y|^2 - 2 < \bar{x}, y >} = \\ &= \frac{|x|^2 + R^2 - 2 < x, y >}{\left|\left(\frac{R}{|x|}\right)^2 x\right|^2 + R^2 - 2 < \frac{R^2}{|x|^2}x, y >} = \\ &= \frac{|x|^2 + R^2 - 2 < x, y >}{\left(\frac{R}{|x|}\right)^2 \left(|x|^2 + R^2 - 2 < x, y >\right)} = \left(\frac{|x|}{R}\right)^2.\end{aligned}$$

Allora:

$$\frac{|x-y|}{|\bar{x}-y|}=\frac{|x|}{R} \quad , \forall x \in D\left(0,R\right), \, x \neq 0, \, \forall y \in \partial D\left(0,R\right).$$

Così:

$$|x-y|^{2-n}=\left(\frac{|x|}{R}\,|\bar{x}-y|\right)^{2-n}.$$

Di conseguenza:

$$\Phi\left(x-y\right)=\Phi\left(\left(\bar{x}-y\right)\frac{|x|}{R}\right)=\left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-n}\Phi\left(\bar{x}-y\right).$$

Osserviamo ora come la funzione:

$$y\longmapsto\Phi\left(\left(\bar{x}-y\right)\frac{|x|}{R}\right)=\left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-n}\Phi\left(\bar{x}-y\right),$$

goda di tutte le proprietà richieste dalla funzione h_x, infatti:

- è $\mathcal{C}^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{x}\}\right)\Rightarrow$ è $\mathcal{C}^{\infty}\left(\overline{D}\right)$;
- è armonica in $\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{x}\}\Rightarrow$ è armonica in D;
- se ristretta a ∂D coincide con Φ.

Quindi, per ogni $x\in D\left(0,R\right)$, $x\neq 0$, la funzione di Green in $D\left(0,R\right)$ vale:

$$G\left(x,y\right)=\Phi\left(x-y\right)-\Phi\left(\left(\bar{x}-y\right)\frac{|x|}{R}\right) \quad , y\in D\left(0,R\right).$$

□

Proposizione 1.4.4. *Il nucleo di Poisson per $D\left(0,R\right)$ è:*

$$K\left(x,y\right)=\frac{1}{n\,\omega_n\,R}\left(\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}\right) \quad , x\in D,\, y\in\partial D. \tag{1.16}$$

Di conseguenza, traslando le variabili x e y, il nucleo di Poisson per $D\left(\alpha,R\right)$ è:

$$K\left(x,y\right)=\frac{1}{n\,\omega_n\,R}\left(\frac{R^2-|x-\alpha|^2}{|x-y|^n}\right) \quad , x\in D,\, y\in\partial D. \tag{1.17}$$

Dimostrazione.

$$K\left(x,y\right)=-\frac{\partial G\left(x,y\right)}{\partial\nu}=-\left\langle D_yG\left(x,y\right),\nu\right\rangle \quad , x\in D,\, y\in\partial D.$$

Prendiamo $\nu = \frac{y}{R}$.

Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
D_y G(x,y) &= D_y\left(\Phi(x-y) - \Phi\left((\bar{x}-y)\frac{|x|}{R}\right)\right) = \\
&= D_y\left(\frac{1}{n(n-2)\omega_n}|x-y|^{2-n} - \frac{1}{n(n-2)\omega_n}\left|(\bar{x}-y)\frac{|x|}{R}\right|^{2-n}\right) = \\
&= -\frac{1}{n\,\omega_n}\left(|x-y|^{1-n}\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)(-1) - \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-n}|\bar{x}-y|^{1-n}\left(\frac{\bar{x}-y}{|\bar{x}-y|}\right)(-1)\right) = \\
&= \frac{1}{n\,\omega_n|x-y|^n}\left(x-y-\left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-n}\left(\frac{|x-y|}{|\bar{x}-y|}\right)^n(\bar{x}-y)\right) = \\
&= \frac{1}{n\,\omega_n|x-y|^n}\left(x-y-\left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-n}\left(\frac{|x|}{R}\right)^n(\bar{x}-y)\right) = \\
&= \frac{1}{n\,\omega_n|x-y|^n}\left(x-y-x+\left(\frac{|x|}{R}\right)^2 y\right) = \\
&= \frac{1}{n\,\omega_n|x-y|^n}\left(\frac{y}{R^2}\right)\left(|x|^2-R^2\right).
\end{aligned}$$

Moltiplicando il risultato appena ottenuto per la normale esterna al disco otteniamo:

$$\begin{aligned}
-\left\langle D_y G(x,y), \frac{y}{R}\right\rangle &= \frac{1}{n\,\omega_n|x-y|^n}\frac{1}{R}\left(R^2-|x|^2\right)\left\langle\frac{y}{R},\frac{y}{R}\right\rangle \\
&= \frac{1}{n\,\omega_n R}\left(\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}\right).
\end{aligned}$$

□

Capitolo 2

Le formule di media

2.1 Formule di media di superficie

Teorema 2.1.1 (**Formule di media di superficie per l'equazione di Laplace**).
Sia Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^n$ *e sia* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$*, armonica in* Ω*.*
Allora, per ogni disco $D(x_0, r) \subset\subset \Omega$*, vale:*

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial D(x_0, r)|} \int_{\partial D(x_0, r)} u(x) \, d\sigma(x) . \tag{2.1}$$

Questo asserisce che la funzione u *valutata nel centro del disco è uguale alla media integrale di* u *sul bordo del disco.*

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza quasi immediata della seconda formula di rappresentazione di Green. Infatti, per (1.11) abbiamo:

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial D(x_0, r)|} \int_{\partial D(x_0, r)} u \, d\sigma - \int_{D(x_0, r)} (\Phi(x - x_0) - \Phi(r)) \, \Delta u(x) \, dx.$$

Siccome u è armonica in Ω, allora $\Delta u = 0$ in $D(x_0, r)$, così:

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial D(x_0, r)|} \int_{\partial D(x_0, r)} u(x) \, d\sigma(x) .$$

□

Estendiamo ora tale teorema nel caso in cui la funzione u sia subarmonica o superarmonica in Ω.

Teorema 2.1.2 (**Formule di sotto(sopra)-media di superficie**).
Sia Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^n$ *e sia* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$*, subarmonica (superarmonica) in* Ω*.*

Allora, per ogni disco $D(x_0, r) \subset\subset \Omega$, valgono le formule di sotto(sopra)-media di superficie:

$$u(x_0) \leq (\geq) \frac{1}{|\partial D(x_0, r)|} \int_{\partial D(x_0,r)} u(x)\, d\sigma(x). \tag{2.2}$$

Dimostrazione. Consideriamo un disco $D = D(x_0, r_0) \subset \Omega$ su cui definire la funzione

$$\varphi(r) := \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial D(x_0,r)} u(x)\, d\sigma(x) \quad , \forall r < r_0.$$

Attraverso il cambio di variabili $x = x_0 + rz$ ed assumendo come normale esterna a $D(x_0, r)$ in x_0 il vettore $\nu = \frac{x-x_0}{r}$, possiamo dire che:

$$\varphi(r) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial D(0,1)} u(x_0 + rz)\, d\sigma(z).$$

Allora:

$$\begin{aligned}\varphi'(r) &= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial D(0,1)} Du(x_0 + rz) \cdot z\, d\sigma(z) = \\ &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial D(x_0,r)} Du(x) \cdot \frac{x - x_0}{r}\, d\sigma(x) = \\ &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial D(x_0,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma(x).\end{aligned}$$

Sfruttando la (1.5) otteniamo:

$$\varphi'(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{D(x_0,r)} \Delta u(x)\, dx \quad \geq (\leq)\, 0.$$

Allora φ è crescente (decrescente) per ogni $r \in (0, r_0)$, pertanto vale:

$$\varphi(r) \geq (\leq) \lim_{r\to 0} \varphi(r) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial D(0,1)} u(x_0 + rz)\, d\sigma(z) = u(x_0).$$

Così, per u subarmonica in Ω:

$$u(x_0) \leq \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial D(x_0,r)} u(x)\, d\sigma(x).$$

Per u superarmonica in Ω:

$$u(x_0) \geq \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial D(x_0,r)} u(x)\, d\sigma(x).$$

□

2.2 Formule di media di volume

Teorema 2.2.1 (**Formule di media di volume per l'equazione di Laplace**).
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$, armonica in Ω.
Allora, per ogni disco $D(x_0, r) \subset\subset \Omega$, vale:

$$u(x_0) = \frac{1}{|D(x_0, r)|} \int_{D(x_0,r)} u(x)\, dx. \tag{2.3}$$

Questo asserisce che la funzione u valutata nel centro del disco è uguale alla media integrale di u sul disco.

Dimostrazione. Sappiamo da (2.1) che vale:

$$u(x_0) = \frac{1}{n\omega_n \rho^{n-1}} \int_{\partial D(x_0,\rho)} u(x)\, d\sigma(x) \quad , \forall \rho \in (0, r).$$

Allora, moltiplicando ambo i membri per ρ^{n-1} e integrando poi rispetto a ρ su $(0, r]$ otteniamo:

$$\int_0^r \rho^{n-1} u(x_0)\, d\rho = \frac{1}{n\omega_n} \int_0^r \left(\int_{\partial D(x_0,\rho)} u(x)\, d\sigma(x) \right) d\rho,$$

da cui segue che:

$$u(x_0) \frac{r^n}{n} = \frac{1}{n\omega_n} \int_{D(x_0,r)} u\, dx.$$

Allora:

$$u(x_0) = \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{D(x_0,r)} u\, dx = \frac{1}{|D(x_0, r)|} \int_{D(x_0,r)} u\, dx.$$

□

Teorema 2.2.2 (**Formule di sotto(sopra)-media di volume**).
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$, subarmonica (superarmonica) in Ω.
Allora, per ogni disco $D(x_0, r) \subset\subset \Omega$, valgono le formule di sotto(sopra)-media di volume:

$$u(x_0) \le (\ge) \frac{1}{|D(x_0, r)|} \int_{D(x_0,r)} u(x)\, d\sigma(x). \tag{2.4}$$

Dimostrazione. Sfruttando la proprietà di monotonia dell'integrale, la dimostrazione è analoga alla precedente partendo dal fatto che vale (2.2) invece che (2.1). □

Proposizione 2.2.3. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$.*
Allora, u verifica le formule di media di superficie se e solo se u verifica le formule di media di volume.

Dimostrazione. Una implicazione è stata già dimostrata. Viceversa, supponiamo che:

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{D(x_0,r)} u(x)\, dx \qquad , \forall D(x_0, r) \subset\subset \Omega.$$

Quindi $\forall \rho \in (0, r]$ possiamo scrivere:

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_0^r \left(\int_{|x-x_0|=\rho} u\, d\sigma \right) d\rho.$$

Moltichiamo ambo i membri per $\omega_n r^n$ e deriviamo rispetto ad r (applichiamo per il secondo membro il teorema fondamentale del calcolo integrale):

$$n\omega_n r^{n-1} u(x_0) = \int_{|x-x_0|=r} u\, d\sigma - \int_{|x-x_0|=0} u\, d\sigma = \int_{\partial D(x_0,r)} u\, d\sigma.$$

Dunque:

$$u(x_0) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial D(x_0,r)} u\, d\sigma \qquad , \forall D(x_0, r) \subset\subset \Omega.$$

□

Osservazione 2.1. Tali teoremi, noti come *teoremi di media*, non rappresentano altro che il corrispettivo principio della media delle funzioni olomorfe in analisi complessa . Esso asserisce che:
dati un aperto $A \subset \mathbb{C}$, un punto $z_0 \in A$, una funzione f olomorfa su A ed un disco $D(z_0, r) \subset\subset A$, allora:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta.$$

Ossia, purché $\overline{D(z_0, r)} \subseteq A$, la funzione olomorfa f valutata al centro del disco è uguale al valore medio della funzione stessa sulla circonferenza di raggio r e centro z_0.
Dimostreremo in seguito che le formule di media caratterizzano le funzioni armoniche e proprio come per le funzioni olomorfe, saranno validi il principio del massimo debole, il principio del massimo forte ed il teorema di Liouville.

Teorema 2.2.4. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$.*
Se u soddisfa le formule di media, ossia:

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial D(x_0, r)|} \int_{\partial D(x_0,r)} u\, d\sigma \qquad , \forall D(x_0, r) \subset\subset \Omega,$$

allora u è armonica in Ω.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un punto $x_0 \in \Omega$ tale che $\Delta u(x_0) \neq 0$, allora, per il teorema di permanenza del segno, possiamo dire che esiste un disco $D = D(x_0, r_0) \subset \Omega$ tale che $\Delta u > 0$ in D.
Definiamo come nel Teorema 2.1.2 la funzione:

$$\varphi(r) := \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial D(x_0,r)} u(x)\, d\sigma(x) \quad , \forall r < r_0,$$

che per ipotesi sappiamo essere uguale a $u(x_0)$. Abbiamo allora già visto che:

$$0 = \varphi'(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{D(x_0,r)} \Delta u(x)\, dx > 0,$$

il che è assurdo, pertanto u è armonica in Ω. □

Corollario 2.2.5. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$.*
Se u soddisfa le formule di sotto-media, ossia:

$$u(x_0) \leq \frac{1}{|\partial D(x_0, r)|} \int_{\partial D(x_0,r)} u\, d\sigma \qquad , \forall D(x_0, r) \subset\subset \Omega,$$

allora u è subarmonica in Ω.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un punto $x_0 \in \Omega$ tale che $\Delta u(x_0) < 0$, allora, per il teorema di permanenza del segno, possiamo dire che esiste un disco $D = D(x_0, r_0) \subset \Omega$ tale che $\Delta u < 0$ in D.
Definiamo come nel Teorema 2.1.2 la funzione:

$$\varphi(r) := \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial D} u(x)\, d\sigma(x) \quad , \forall r < r_0.$$

Per ipotesi abbiamo che $u(x_0) \leq \varphi(r)$, $\forall r < r_0$.
Abbiamo già visto che:

$$\varphi'(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_D \Delta u(x)\, dx < 0,$$

ma allora $\varphi(r)$ è strettamente decrescente per ogni $r \in (0, r_0)$. Questo ci dice che:

$$\varphi(r) \leq \lim_{r \to 0} \varphi(r) = u(x_0) \ , \forall r \in (0, r_0).$$

Allora abbiamo che $\varphi(r) = u(x_0)$, $\forall r < r_0$, pertanto applicando il Teorema 2.2.4 possiamo dire che u è armonica in D, ma questo è assurdo in quanto avevamo posto $\Delta u < 0$ in D. □

Corollario 2.2.6. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$.*
Se u soddisfa le formule di sopra-media, ossia:

$$u(x_0) \leq \frac{1}{|\partial D(x_0, r)|} \int_{\partial D(x_0,r)} u\, d\sigma \qquad , \forall D(x_0, r) \subset\subset \Omega,$$

allora u è superarmonica in Ω.

Dimostrazione. Il procedimento è analogo al precedente Corollario. □

Corollario 2.2.7.
Sia Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^n$ *e sia* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$.
Allora u *è soluzione dell'equazione di Laplace* $\Delta u = 0$ *in* Ω

$$\Longleftrightarrow \forall r > 0 \text{ tale che } D(x_0, r) \subset\subset \Omega \text{ vale:}$$
$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial D(x_0, r)|} \int_{\partial D(x_0,r)} u(x)\; d\sigma(x).$$

$$\Longleftrightarrow \forall r > 0 \text{ tale che } D(x_0, r) \subset\subset \Omega \text{ vale:}$$
$$u(x_0) = \frac{1}{|D(x_0, r)|} \int_{D(x_0,r)} u(x)\; d\sigma(x).$$

Dimostrazione. La prova consiste in un'immediata applicazione dei teoremi $2.1.1, 2.2.1, 2.2.4$ e dalla Proposizione 2.2.3. □

2.3 Applicazioni delle formule di media

Presentiamo in questa sezione una sequenza di interessanti deduzioni sulle funzioni armoniche, tutte basate sulle formule di media.

2.3.1 La disuguaglianza di Harnack

Teorema 2.3.1 (**Disuguaglianza di Harnack sui dischi**).
Sia Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^n$ *e sia* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$, *non negativa e armonica in* Ω.
Sia $x_0 \in \Omega$ *e sia* $r \in \mathbb{R}_+$ *tale che* $D(x_0, 4r) \subseteq \Omega$.
Allora esiste una costante c, *dipendente solo da* n, *tale per cui vale:*

$$\sup_{D(x_0,r)} u \leq c(n) \inf_{D(x_0,r)} u \qquad , c(n) = 3^n. \tag{2.5}$$

Dimostrazione. Siano $x_1,\, x_2 \in D(x_0, r)$, allora abbiamo:

$$u(x_1) = \frac{1}{|D(x_1, r)|} \int_{D(x_1,r)} u\, dx \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{D(x_0,2r)} u\, dx.$$

Infatti, in generale se $x \in D(x_1, r)$, allora $x \in D(x_0, 2r)$, in quanto:

$$|x - x_0| \leq |x - x_1| + |x_1 - x_0| < r + r = 2r.$$

Inoltre, se $x \in D(x_0, 2r)$, allora $x \in D(x_2, 3r)$, poiché:

$$|x - x_2| \leq |x - x_0| + |x_0 - x_2| < 2r + r = 3r,$$

così:

$$u(x_2) = \frac{1}{\omega_n (3r)^n} \int_{D(x_2,3r)} u\, dx \geq \frac{1}{\omega_n (3r)^n} \int_{D(x_0,2r)} u\, dx =$$
$$= \frac{1}{3^n} \left(\frac{1}{\omega_n r^n} \int_{D(x_0,2r)} u\, dx \right) \geq \frac{1}{3^n} u(x_1).$$

Dunque abbiamo dimostrato che:

$$3^n u(x_2) \geq u(x_1) \quad , x_1, x_2 \in D(x_0, r).$$

Siccome x_1, x_2 sono arbitrari, allora vale anche:

$$3^n \sup_{D(x_0,r)} u \leq \inf_{D(x_0,r)} u.$$

□

La disuguaglianza di Harnack implica il seguente

Teorema 2.3.2 (Teorema di Liouville).
Sia $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, armonica e inferiormente limitata.
Allora u è costante.

Dimostrazione. Definiamo $m := \inf_{\mathbb{R}^n} u$ e $v := u - m$.
Allora v risulta essere armonica in $\mathbb{R}^n$, non negativa e $\inf_{\mathbb{R}^n} v = 0$.
Sono perciò soddisfatte tutte le ipotesi del Teorema 2.3.1 e scegliendo $x_0 = 0$ otteniamo:

$$\sup_{D(0,r)} v \leq 3^n \inf_{D(0,r)} v \qquad , \forall r > 0.$$

Passando ora al limite per $r \to +\infty$ risulta:

$$0 \leq \sup_{\mathbb{R}^n} v \leq 3^n \inf_{\mathbb{R}^n} v,$$

da cui:

$$\inf_{\mathbb{R}^n} v = \sup_{\mathbb{R}^n} v = 0.$$

Pertanto $v \equiv 0$, ossia: $u \equiv m$. □

2.3.2 Il principio del massimo

Illustriamo in questa sezione il principio del massimo debole e del massimo forte. Il primo non necessita dell'uso delle formule di media, tuttavia risulterà fondamentale per dimostrare l'unicità della soluzione del Problema di Dirichlet. Il principio del massimo forte, invece, usufruisce delle formule di media provando che nel caso di funzioni armoniche, ma anche subarmoniche, non sono ammessi punti di massimo interni al dominio a meno che la funzione in questione non sia costante.

Teorema 2.3.3 (Principio del massimo debole).
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato.
Sia $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ subarmonica in Ω.
Allora:

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u. \tag{2.6}$$

Dimostrazione. Notiamo che le ipotesi del teorema sono ben poste, infatti Ω è un aperto limitato, dunque $\overline{\Omega}$ è compatta e poiché u è continua su $\overline{\Omega}$, allora u ha massimo. Il teorema si prefigge pertanto di illustrare che tale massimo appartiene al bordo di Ω.
Per definizione di funzione subarmonica in Ω, la funzione u risulta essere soluzione di $\Delta u \geq 0$.
Supponiamo inizialmente che $\Delta u > 0$ in Ω.
Sia allora $x_0 \in \Omega$ un punto di massimo relativo, dunque:

$$D^2 u(x_0) \leq 0,$$

pertanto la traccia della matrice Hessiana in x_0 sarà necessariamente negativa o nulla, ossia:

$$\Delta u(x_0) = \operatorname{tr}\left(D^2 u(x_0)\right) \leq 0,$$

ma questo contraddice l'ipotesi iniziale $\Delta u > 0$ in Ω.
Supponiamo ora che $\Delta u \geq 0$ in Ω.
Prendiamo la funzione:

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^y \quad , y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Allora, $\forall \varepsilon > 0$, la funzione u_ε è ancora subarmonica in Ω ed essendo $\varepsilon e^y > 0$ abbiamo che $\Delta u_\varepsilon > 0$, perciò:

$$\sup_{\Omega} u_\varepsilon \leq \sup_{\partial\Omega} u_\varepsilon.$$

Abbiamo dunque provato che:

$$\sup_{\Omega}\left(u(x) + \varepsilon e^y\right) \leq \sup_{\partial\Omega}\left(u(x) + \varepsilon e^y\right) \quad , \forall \varepsilon > 0.$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0$ risulta:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sup_{\Omega} \left(u\left(x\right) + \varepsilon e^{y} \right) \right) = \sup_{\Omega} u\left(x\right),$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sup_{\partial\Omega} \left(u\left(x\right) + \varepsilon e^{y} \right) \right) = \sup_{\partial\Omega} u\left(x\right).$$

Da cui:

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u.$$

□

In modo analogo abbiamo:

Teorema 2.3.4 (**Principio del minimo debole**).
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato.
Sia $u \in \mathcal{C}^2\left(\Omega\right) \cap \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ superarmonica in Ω.
Allora:

$$\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u. \tag{2.7}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è identica alla precedente sostituendo u con $-u$. □

Osservazione 2.2. Se prendiamo $u \in \mathcal{C}^2\left(\Omega\right) \cap \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ armonica in Ω, dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, allora sono validi contemporaneamente il principio del massimo e minimo debole.

Teorema 2.3.5 (**Principio del massimo forte**).
Sia Ω un dominio di $\mathbb{R}^n$ e sia $u \in \mathcal{C}^2\left(\Omega, \mathbb{R}\right)$ subarmonica in Ω.
Supponiamo che esista un punto $x_0 \in \Omega$ tale che $u\left(x_0\right) \geq u\left(x\right)$, $\forall x \in \Omega$.
Allora u è costante in Ω.

Dimostrazione. Sia

$$M := \{y \in \Omega : u\left(y\right) = u\left(x_0\right)\}.$$

Vogliamo dimostrare che M è aperto e chiuso in Ω.
Sicuramente M è chiuso in Ω poichè controimmagine continua di $\{0\}$ che è chiuso. Mostriamo ora che M è aperto:
per ogni fissato $y_0 \in M$ chiamiamo $v := u - u\left(y_0\right)$, allora v siffatta risulta essere subarmonica in Ω e $v \leq 0$.
Applicando le formule di sotto-media di volume abbiamo che:

$$0 = v\left(y_0\right) \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{D(y_0,r)} v\left(x\right)\, dx \quad, \forall D\left(y_0, r\right) \subset\subset \Omega.$$

Siccome $v \leq 0$, deve essere necessariamente che $v = 0$ quasi dappertutto in $D(y_0, r)$ e poiché u è continua in Ω, allora $v = 0$ in $D(y_0, r)$, cioè:

$$u(x) = u(y_0) = u(x_0) \quad , \forall x \in D(y_0, r) .$$

Quindi $D(y_0, r) \subseteq M$, da cui segue che M è aperto in Ω.
Siccome gli unici sottoinsiemi aperti e chiusi in un connesso sono il vuoto e l'insieme stesso, risulta che: $\Omega \equiv M$, essendo $x_0 \in M$. □

Teorema 2.3.6 (**Principio del minimo forte**).
Sia Ω *un dominio di* $\mathbb{R}^n$ *e sia* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ *superarmonica in* Ω.
Supponiamo che esista un punto $x_0 \in \Omega$ *tale che* $u(x_0) \leq u(x)$, $\forall x \in \Omega$.
Allora u *è costante in* Ω.

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 2.3.5 alla funzione $-u$. □

Osservazione 2.3. Se prendiamo $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ armonica in Ω, dove Ω è un dominio di $\mathbb{R}^n$, allora sono validi contemporaneamente il principio del massimo e minimo forte. Questo risultato asserisce che una funzione armonica non ammette punti di massimo o minimo interni al dominio a meno che non sia costante.

Dalla dimostrazione del principio del massimo forte ricaviamo questo interessante

Corollario 2.3.7.
Sia Ω *un dominio di* $\mathbb{R}^n$ *e sia* $u \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ *tale che* u *soddisfi le formule di sotto-media.*
Supponiamo che esista un punto $x_0 \in \Omega$ *tale che* $u(x_0) \geq u(x)$, $\forall x \in \Omega$.
Allora u *è costante in* Ω.

Dimostrazione. Basta seguire lo stesso procedimento adottato dal Teorema 2.3.5 con un unico accorgimento: non possiamo dire molto sulla regolarità della funzione $v := u - u(y_0)$ in Ω, tuttavia per essa vale:

$$\begin{aligned} 0 = v(y_0) \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{D(y_0,r)} u(x)\, dx \; - \; \frac{u(y_0)}{\omega_n r^n} \int_{D(y_0,r)} dx = \\ = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{D(y_0,r)} v(x)\, dx \quad , \forall D(y_0, r) \subset\subset \Omega. \end{aligned}$$

Sicché, con questo passaggio possiamo nuovamente proseguire la dimostrazione come nel Teorema 2.3.5 e la tesi è provata. □

Corollario 2.3.8. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato.*
Sia $u \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ tale che u soddisfi le formule di sotto(sopra)-media.
Allora:

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad \left(\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u\right). \tag{2.8}$$

Di conseguenza, se u soddisfa le formule di media vale:

$$\inf_{\partial\Omega} u \ \leq u\left(x\right) \leq \ \sup_{\partial\Omega} u \quad , \forall x \in \Omega. \tag{2.9}$$

Dimostrazione. Segue dall'applicazione diretta del Corollario precedente. □

Corollario 2.3.9. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato.*
Siano $u, v \in \mathcal{C}^2\left(\Omega\right) \cap \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ tali per cui $\Delta u = \Delta v$ in Ω e $u = v$ su $\partial\Omega$.
Allora $u = v$ in Ω.

Dimostrazione. Sia $w = u - v$.
Allora $\Delta w = 0$ in Ω e $w = 0$ su $\partial\Omega$. Pertanto segue dal Corollario 2.3.8 e in particolare da (2.9) che $w = 0$ in Ω. □

Osservazione 2.4. Se nel Corollario 2.3.9 prendiamo u e v armoniche, allora abbiamo effettivamente dimostrato l'unicità della soluzione del Problema di Dirichlet per il Laplaciano su domini limitati di $\mathbb{R}^n$.

Osservazione 2.5. Notiamo inoltre che se u e v sono funzioni in Ω (dominio limitato di $\mathbb{R}^n$) rispettivamente armoniche e subarmoniche, coincidenti su $\partial\Omega$, allora $v \leq u$ in Ω, da cui il termine subarmonica. Per verificarlo, basta considerare la funzione differenza $w = v - u$ e sfruttare il Corollario 2.3.8, infatti, siccome per costruzione $\Delta w \geq 0$, valgono le formule di sotto-media, pertanto:

$$w\left(x\right) \leq \ \sup_{\Omega} w = \sup_{\partial\Omega} w = 0 \quad , \forall x \in \Omega.$$

Da cui $v \leq u$ in Ω.
Un'analoga osservazione è valida per le funzioni superarmoniche.

Nel Capitolo 3 utilizzeremo questa proprietà di funzioni di classe $\mathcal{C}^2$ subarmoniche e superarmoniche per estendere la loro definizione a una più ampia classe di funzioni.

2.4 Integrale di Poisson

Riprendiamo in questa sezione alcuni argomenti del Capitolo 1 per completarli e adattarli insieme ai teoremi delle formule di media.

Abbiamo visto che il nucleo di Poisson per il disco $D = D(0, R)$ è espresso da:

$$K(x, y) = \frac{1}{n\omega_n R}\left(\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n}\right) \quad , x \in D,\ y \in \partial D.$$

Per cui, se prendiamo una funzione $u \in \mathcal{C}^2(D) \cap \mathcal{C}^1\left(\overline{D}\right)$ armonica in D e vi applichiamo la seconda formula di rappresentazione di Green (1.13), otteniamo:

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R}\int_{\partial D}\frac{u(y)}{|x-y|^n}\,d\sigma(y) \quad , \forall x \in D. \tag{2.10}$$

Tale identità è chiamata **formula integrale di Poisson** ed il secondo membro è detto **integrale di Poisson** di u.

Osservazione 2.6. Notiamo che prendendo $x = 0$ otteniamo:

$$u(0) = \frac{R^2}{n\omega_n R}\int_{\partial D}\frac{u(y)}{R^n}\,d\sigma(y) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}}\int_{\partial D} u(y)\,d\sigma(y),$$

ritrovando così le formule di media.

Teorema 2.4.1. *Sia $D = D(0, R)$ e sia φ una funzione continua su ∂D. Allora la funzione u definita da:*

$$u(x) = \begin{cases} \frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R}\int_{\partial D}\frac{\varphi(y)}{|x-y|^n}\,d\sigma(y) & , \text{per } x \in D \\ \varphi(x) & , \text{per } x \in \partial D \end{cases} \tag{2.11}$$

appartiene a $\mathcal{C}^2(D) \cap \mathcal{C}\left(\overline{D}\right)$ e soddisfa $\Delta u = 0$ in D.

Dimostrazione. Il fatto che u sia armonica in D è evidente dal fatto che la funzione di Green G, quindi $\frac{\partial G}{\partial \nu}$, è armonica in D.
Per dimostrare la continuità di u su ∂D usiamo la formula integrale di Poisson (2.10) nel caso in cui $u = 1$ ed abbiamo:

$$\int_{\partial D} K(x, y)\,d\sigma(y) = 1 \quad , \forall x \in D,$$

dove K è il nucleo di Poisson:

$$K(x,y) = \frac{1}{n\omega_n R}\left(\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n}\right) \quad , x \in D,\ y \in \partial D.$$

Sia ora $x_0 \in \partial D$ e sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Prendiamo $\delta > 0$ tale per cui $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$ per $|x - x_0| < \delta$ e sia $|\varphi| \leq M$ su ∂D.
Allora, se $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$, otteniamo:

$$\begin{aligned} |u(x) - u(x_0)| &= \left| \int_{\partial D} K(x,y)(\varphi(y) - \varphi(x_0))\, d\sigma(y) \right| \leq \\ &\leq \int_{|y-x_0|\leq\delta} K(x,y)\,|\varphi(y) - \varphi(x_0)|\, d\sigma(y) + \\ &+ \int_{|y-x_0|>\delta} K(x,y)\,|\varphi(y) - \varphi(x_0)|\, d\sigma(y) \leq \\ &\leq \varepsilon + \int_{|y-x_0|>\delta} K(x,y)\,|\varphi(y) - \varphi(x_0)|\, d\sigma(y). \end{aligned}$$

Stimiamo a parte il secondo addendo:

$$\int_{|y-x_0|>\delta} \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R\,|x-y|^n}\,|\varphi(y) - \varphi(x_0)|\, d\sigma(y).$$

Innanzitutto notiamo che:

$$|x-y| = |y-x| = |y - x_0 + x_0 - x| \geq |y - x_0| - |x_0 - x| > \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2},$$

dunque:

$$\frac{1}{|x-y|^n} < \frac{1}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^n}.$$

Siccome inoltre la funzione φ è limitata su ∂D otteniamo:

$$\begin{aligned} &\int_{|y-x_0|>\delta} K(x,y)\,|\varphi(y) - \varphi(x_0)|\, d\sigma(y) \leq \frac{2M\left(R^2 - |x|^2\right)}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^n n\omega_n R} \int_{|y-x_0|>\delta} 1\, d\sigma(y) \leq \\ &\leq \frac{2M\left(R^2 - |x|^2\right)}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^n n\omega_n R} \int_{\partial D} d\sigma(y) = \frac{2M\left(R^2 - |x|^2\right)|\partial D|}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^n n\omega_n R} = \\ &= \frac{2M\left(R^2 - |x|^2\right) n\omega_n R^{n-1}}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^n n\omega_n R} = \frac{2M\left(R^2 - |x|^2\right) R^{n-2}}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^n}. \end{aligned}$$

Ora, se prendiamo x sufficientemente vicino ad x_0, risulta chiaro che, fissato un arbitario $\varepsilon > 0$ si abbia: $R^2 - |x|^2 < \varepsilon$, da cui in generale:

$$|u(x) - u(x_0)| < 2\varepsilon.$$

Essendo x_0 un generico punto di ∂D risulta provata la continuità di u sulla chiusura del disco. □

2.5 Teoremi di convergenza

Analizziamo ora alcune importanti conseguenze della formula integrale di Poisson.

Teorema 2.5.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$.*
Una funzione $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ è armonica in Ω, se e solo se, $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ e, per ogni disco $D(x_0, r) \subset\subset \Omega$, u soddisfa le formule di media:

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial D(x_0, r)|} \int_{\partial D(x_0,r)} u(x)\ d\sigma(x).$$

Dimostrazione. Una implicazione è stata già ampiamente dimostrata.
Viceversa, dal Teorema 2.4.1 abbiamo che per ogni disco
$D = D(x_0, r) \subset\subset \Omega$ esiste una funzione armonica h in D tale per cui $h = u$ su ∂D.
Se consideriamo la funzione differenza $w = u - h$, allora questa soddisfa ancora le formule di media $\forall D \subset\subset \Omega$, in quanto h è armonica in D e u soddisfa le formule di media per ipotesi.
Perciò:

$$w(x_0) = \frac{1}{|\partial D|} \int_{\partial D} w(x)\ d\sigma(x) = 0.$$

Dunque, applicando il Corollario 2.3.7 per funzioni che soddisfano le formule di media, possiamo dire che $w = 0$ in D, perciò u è armonica in Ω. □

Osservazione 2.7. Questo teorema illustra come le formule di media caratterizzino le funzioni armoniche. Inoltre, le ipotesi sulla funzione u sono più deboli rispetto a quanto visto nel Corollario 2.2.7: basta infatti che u sia continua su Ω e non di classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$.

Come immediata conseguenza del precedente teorema abbiamo:

Teorema 2.5.2. *Il limite di una successione di funzioni armoniche convergente uniformemente è una funzione armonica.*

Dimostrazione. Sia $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni armoniche in un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ convergente uniformemente ad una funzione u. Per la convergenza uniforme, sappiamo che $u \in \mathcal{C}(\Omega)$.
Fissato un arbitrario disco $D = D(x_0, r) \subset\subset \Omega$ abbiamo che:

$$u_m(x_0) = \frac{1}{|\partial D|} \int_{\partial D} u_m\, dx \quad, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Passando ora al limite per $m \to +\infty$, al primo membro otteniamo $u(x_0)$ per ipotesi, mentre al secondo membro, data la convergenza uniforme della successione $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, possiamo direttamente passare al limite sotto al segno di integrale ed ottenere pertanto:

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial D|}\int_{\partial D} u\, dx.$$

Dal Teorema 2.5.1, siccome u è continua e soddisfa le formule di media, abbiamo che u è armonica in Ω. □

Inoltre vale anche il seguente

Teorema 2.5.3. *Sia $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione monotona crescente di funzioni armoniche in un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che esista un punto $y \in \Omega$ tale per cui la successione $(u_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ sia limitata. Allora la successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in ogni disco $D \subset\subset \Omega$ ad una funzione armonica.*

Dimostrazione. La successione $(u_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente, pertanto fissato un arbitrario $\varepsilon > 0$ esiste un numero $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $0 \leq u_m(y) - u_n(y) < \varepsilon$ per ogni $m \geq n > n_0$.
Allora, applicando la Disuguaglianza di Harnack sui dischi (Teorema 2.3.1) abbiamo che:

$$\sup_D |u_m(x) - u_n(x)| < C\varepsilon,$$

dove C è una costante dipendente solo da D e da Ω.
Abbiamo perciò dimostrato che la successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in D e per il Teorema 2.5.2 possiamo dire che il limite di tale successione è una funzione armonica. □

2.6 Stime locali

Da una diretta derivazione dell'integrale di Poisson è possibile ottenere stime locali per le derivate di funzioni armoniche.
In alternativa, tali stime seguono dai teoremi di media e sarà questa la strada che intraprenderemo.

Consideriamo allora una funzione u armonica in un dominio Ω di $\mathbb{R}^n$ e sia $D = D(x_0, r) \subset\subset \Omega$. Siccome anche il gradiente Du è armonico in Ω, segue dalle formule di media e dal teorema di integrazione per parti che:

$$Du(x_0) = \frac{1}{\omega_n r^n}\int_D Du\, dx = \frac{1}{\omega_n r^n}\int_{\partial D} u\,\nu\, d\sigma,$$

$$|Du(x_0)| \leq \frac{n}{r}\sup_{\partial D}|u|.$$

Da cui:

$$|Du\,(x_0)| \leq \frac{n}{d_{x_0}} \sup_{\Omega} |u|\,, \tag{2.12}$$

dove $d_{x_0} = \mathrm{dist}\,(x_0, \partial\Omega)$. Da successive applicazioni della stima (2.12) otteniamo il seguente

Teorema 2.6.1. *Sia u una funzione armonica in un dominio Ω di $\mathbb{R}^n$ e sia Ω' un sottodominio compatto di Ω. Allora per ogni multi-indice α abbiamo:*

$$\sup_{\Omega'} |D^{\alpha}u| \leq \left(\frac{n}{d}\right)^{|\alpha|} \sup_{\Omega} |u|\,, \tag{2.13}$$

dove $d = dist\,(\Omega', \partial\Omega)$.

Un' importante conseguenza delle stime (2.12) e (2.13) consta nel seguente

Teorema 2.6.2. *Ogni successione limitata di funzioni armoniche in un dominio Ω di $\mathbb{R}^n$ contiene una sottosuccessione convergente sui sottodomini compatti di Ω ad una funzione armonica.*

Dimostrazione. La prova risulta pressoché immediata in quanto il punto (2.12) asserisce l'equicontinuità sui sottodomini compatti di una qualunque successione limitata di funzioni armoniche. Applicando perciò il Teorema di Ascoli-Arzelà e il Teorema 2.5.2 otteniamo la tesi. □

Capitolo 3

Un approccio al Problema di Dirichlet

Siamo ora in una posizione tale da poter fornire una soluzione al classico Problema di Dirichlet per il Laplaciano in un arbitrario dominio limitato. L'approccio che utilizzeremo sarà basato su un metodo noto come *metodo di Perron delle funzioni subarmoniche*.

3.1 Funzioni subarmoniche

Le definizioni di funzioni di classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$ subarmoniche e superarmoniche, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, possono essere generalizzate nel seguente modo:

Definizione 3.1. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Una funzione $u \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ si definisce **subarmonica** (**superarmonica**) **continua** in Ω se, per ogni disco $D = D(x, r) \subset\subset \Omega$, valgono le formule di sotto(sopra)-media:

$$u(x) \leq (\geq) \frac{1}{|\partial D|} \int_{\partial D} u \, d\sigma. \tag{3.1}$$

Definizione 3.2. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Una funzione $u \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ si definisce **subarmonica** (**superarmonica**) in Ω se, per ogni disco $D = D(x, r) \subset\subset \Omega$ e per ogni h armonica in D, vale:

$$u \leq (\geq) \; h \quad \text{su } \partial D \Longrightarrow u \leq (\geq) \; h \quad \text{in } D. \tag{3.2}$$

Osservazione 3.1. Verifichiamo che tali definizioni sono equivalenti:

- Sia $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ tale per cui valgano le formule di sotto-media, ossia:

$$u(x) \leq \frac{1}{|\partial D|} \int_{\partial D} u \, d\sigma \quad , \forall D = D(x, r) \subset\subset \Omega.$$

Consideriamo dunque una funzione h armonica in D tale per cui $u \leq h$ su ∂D.
Allora si ha che:

$$u(x) \leq \frac{1}{|\partial D|} \int_{\partial D} u \, d\sigma \leq \frac{1}{|\partial D|} \int_{\partial D} h \, d\sigma = h(x),$$

ossia, $u \leq h$ in D.

- Sia $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ tale che per ogni $D = D(x,r) \subset\subset \Omega$ e per ogni h armonica in D, valga (3.2).

  Fissato dunque un disco $D \subset\subset \Omega$, possiamo dire che $u \in \mathcal{C}(\partial D)$. Consideriamo allora come funzione armonica h in D la funzione definita nel Teorema 2.4.1 avente dato al bordo u.
  Per ipotesi abbiamo che $u \leq h$ sull'intero disco D, pertanto:

$$u \leq h = \frac{1}{|\partial D|} \int_{\partial D} h \, d\sigma = \frac{1}{|\partial D|} \int_{\partial D} u \, d\sigma,$$

  ossia u verifica le formule di sotto-media.

Proposizione 3.1.1. *Per funzioni subarmoniche in un dominio Ω di $\mathbb{R}^n$ definite secondo la Definizione* 3.2*, valgono le seguenti proprietà:*

i) *principio del massimo debole:*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u;$$

ii) *principio del massimo forte:*

se Ω è un dominio limitato e v è superarmonica in Ω e consideriamo u subarmonica in Ω tale che $v \geq u$ su $\partial\Omega$, allora $v > u$ in Ω, oppure $v = u$;

iii) *se le funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sono subarmoniche in Ω, allora $u(x) = \max\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ è subarmonica in Ω.*

Dimostrazione. La prova della proprietà *i)* si ottiene come conseguenza dell'equivalenza delle Definizioni 3.1 e 3.2 e del Corollario 2.3.7. Anche per il punto *ii)* potremmo agire in maniera analoga, tuttavia forniamo una dimostrazione più rigorosa: supponiamo per assurdo che esista un punto $x_0 \in \Omega$ tale per cui:

$$(u - v)(x_0) = \sup_{\Omega}(u - v) = M \geq 0.$$

Siccome per ipotesi $v \geq u$ su $\partial\Omega$, possiamo assumere che esista un disco $D = D(x_0, r) \subset\subset \Omega$ tale che:

$$(u - v)(x) \neq M \quad , \forall x \in \partial D.$$

Siano $\bar{u}$, $\bar{v}$ le funzioni armoniche definite dal Teorema 2.4.1, uguali rispettivamente a u e a v su ∂D.
Allora, sfruttando la proprietà i), si vede che:

$$M \geq 0 \geq \sup_{\partial D} (\bar{u} - \bar{v}) \geq (\bar{u} - \bar{v})(x_0) \geq (u - v)(x_0) = M.$$

Dal principio del massimo forte per le funzioni armoniche (Teorema 2.3.5) segue allora che $(\bar{u} - \bar{v}) \equiv M$ in D e, per come sono state definite $\bar{u}$ e $\bar{v}$, vale:

$$(u - v)(x) = M \quad , \forall x \in \partial D,$$

ma questo è assurdo poiché si contraddice la scelta di D.
La prova di iii) risulta immediata dalla definizione. □

Definizione 3.3. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia u subarmonica in Ω.
Dato un disco $D \subset \Omega$ e considerata $\bar{u}$ la funzione armonica in D data dalla formula integrale di Poisson (Teorema 2.4.1) avente $\bar{u} = u$ su ∂D, definiamo in Ω il **sollevamento armonico** di u (in D) la funzione:

$$U(x) = \begin{cases} \bar{u}(x) & , x \in D \\ u(x) & , x \in \Omega \setminus D. \end{cases} \tag{3.3}$$

Proposizione 3.1.2. *La funzione U definita in* (3.3) *è subarmonica in* Ω.

Dimostrazione. Sia D' un arbitrario disco di $\mathbb{R}^n$ tale che $D' \subset\subset \Omega$ e sia h armonica in D' tale che $U \leq h$ su $\partial D'$. Vogliamo dimostrare che $U \leq h$ in D'.
Possiamo scrivere D' in questo modo:

$$D' = \left(D \cap D'\right) \cup \left((\Omega \setminus D) \cap D'\right) = \left(D \cap D'\right) \cup \left(D' \setminus D\right).$$

Di conseguenza:

- Se $x \in D' \setminus D$: $u(x) = U(x)$ e siccome u è subarmonica in Ω risulta:

$$U(x) = u(x) \leq h(x) \quad \text{in } D' \setminus D.$$

- Se $x \in D \cap D'$, chiamando $B = D \cap D'$ possiamo scrivere

$$\partial B = (\partial D' \cap D) \cup \left(D' \cap \partial D\right),$$

così:

- se $x \in \partial D' \cap D$: $U(x) \leq h(x)$ per ipotesi;
- se $x \in \partial D \cap D'$: $U(x) = u(x) \leq h(x)$, in quanto u subarmonica.

Pertanto abbiamo che $U(x) \leq h(x)$, $\forall x \in \partial B$ e poiché U è armonica in $D \cap D'$, per il principio del massimo debole per le funzioni armoniche (Teorema 2.3.3) risulta $U(x) \leq h(x)$, $\forall x \in B$.

Allora: $U(x) \leq h(x)$, $\forall x \in D'$. □

Osservazione 3.2. Corrispondenti risultati valgono anche per funzioni superarmoniche: basta sostituire u con $-u$ nelle Proposizioni 3.1.1 e 3.1.2 e nella Definizione 3.3.

3.2 Il metodo di Perron

Definizione 3.4. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato e sia φ una funzione limitata su $\partial\Omega$. Una funzione $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ subarmonica si definisce **subfunzione** relativa a φ se soddisfa $u \leq \varphi$ su $\partial\Omega$. Analogamente, una funzione $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ superarmonica si definisce **superfunzione** relativa a φ se soddisfa $u \geq \varphi$ su $\partial\Omega$.

Osservazione 3.3. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato e sia φ una funzione limitata su $\partial\Omega$; allora ogni subfunzione relativa a φ è minore o uguale ad ogni superfunzione relativa a φ.

Dimostrazione. Siano u e v generiche subfunzioni e superfunzioni relative a φ. La funzione $w = u - v$ è allora una subfunzione relativa a 0 e, essendo w subarmonica, per il principio del massimo debole (punto i) della Propozione 3.1.1) otteniamo:

$$\sup_{\Omega} w \leq \sup_{\partial\Omega} w \leq 0,$$

ossia, $u \leq v$ in Ω. □

Nelle stesse ipotesi della Definizione 3.4 denotiamo con S_φ l'insieme delle subfunzioni relative a φ.

Osservazione 3.4. L'insieme S_φ gode delle seguenti proprietà:

1. $S_\varphi \neq \emptyset$;
2. $\sup_{v \in S_\varphi} v(x) < +\infty \quad , \forall x \in \Omega$;

Dimostrazione. La prova del primo punto è immediata, infatti, siccome φ è limitata su $\partial\Omega$, posto $m = \inf_{\partial\Omega} \varphi$, allora $m \in S_{\varphi}$.
Dimostriamo la seconda proprietà.
Sia $M = \sup_{\partial\Omega} \varphi$, poiché φ è limitata su $\partial\Omega$ sappiamo che $M < +\infty$. Sia $v \in S_{\varphi}$, allora: $v - M \leq \varphi - M \leq 0$ su $\partial\Omega$. Così, applicando il principio del massimo debole (punto i) della Proposizione 3.1.1) abbiamo che $v \leq M$ in Ω, pertanto

$$\sup_{v \in S_{\varphi}} v(x) \leq M < +\infty \quad , \forall x \in \Omega.$$

□

Il metodo di Perron consiste nel seguente

Teorema 3.2.1. *La funzione*

$$u(x) = \sup_{v \in S_{\varphi}} v(x) \tag{3.4}$$

è armonica in Ω.

Dimostrazione. Dal principio del massimo debole, ogni funzione $v \in S_{\varphi}$ soddisfa $v \leq \sup \varphi$, sicché u è ben definita.
Sia $x \in \Omega$ e consideriamo un disco $D = D(x, r)$ tale che $D(x, r) \subset\subset \Omega$. Proviamo che u è armonica in D.
Dalla definizione di u, esiste una successione $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S_{\varphi}$ tale che $u_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} u(x)$.

Non è restrittivo supporre $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. monotona crescente;
2. u_n armonica in D, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Infatti:

1. Consideriamo $v_n = \max\{u_1, \ldots, u_n\}$, allora:
   - La successione $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona crescente per costruzione;
   - $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S_{\varphi}$ per il punto iii) della Proposizione 3.1.1;
   - $u_n \leq v_n \quad , \forall n \in \mathbb{N}$;

   pertanto:

   $$u(x) = \lim_{n \to +\infty} u_n(x) \leq \lim_{n \to +\infty} v_n(x) \leq u(x),$$

   allora $v_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} u(x)$.

2. Una volta considerata $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita come nel punto 1., prendiamo il sollevamento armonico V_n di v_n in D, in questo modo:

   - la funzione V_n è armonica in D, $\forall n \in \mathbb{N}$;
   - $v_n \leq V_n \leq u$ in D, $\forall n \in \mathbb{N}$, perciò anche $V_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(x)$;

Sia allora $u_n := V_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dal Teorema 2.5.3 sappiamo che la successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in ogni $D(x,\rho)$, $\rho < r$, ad una funzione g armonica in D. Ovviamente, $g(x) = u(x)$. Inoltre, $g \leq u$ in D. Vogliamo dimostrare che $g = u$ in D.
Supponiamo che esista un punto $y \in D$, $y \neq x$, tale che $g(y) < u(y)$. Come prima, possiamo dire che esiste una successione $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S_\varphi$ tale che $w_n(y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(y)$.
Non è restrittivo supporre $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. monotona crescente;
2. w_n armonica in D, $\forall n \in \mathbb{N}$;
3. $w_n \geq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Infatti, i punti 1. e 2. seguono dalla costruzione precedente, mentre per dimostrare il punto 3. definiamo la funzione $w'_n = \max\{u_n, w_n\}$, così
$w'_n \geq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $w'_n(y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(y)$.
Sia allora $w_n := w'_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sempre dal Teorema 2.5.3, sappiamo che la successione $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in ogni $D(y,\rho)$, $\rho < r$, ad una funzione w armonica in D. Ovviamente, $w(y) = u(y)$. Siccome $w_n \geq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, passando al limite per $n \to +\infty$, risulta $w \geq g$ in D.
Di conseguenza:

$$u(x) = g(x) \leq w(x) \leq u(x),$$

perciò $g(x) = w(x)$ e dal principio del massimo forte per le funzioni armoniche (Teorema 2.3.5) abbiamo che $g = w$ in D, per cui $g(y) = w(y) = u(y)$, ma questo è assurdo in quanto avevamo posto $g(y) < u(y)$. Ricaviamo dunque che $g = u$ in D, ossia u è armonica in D. $\square$

Il precedente risultato esibisce una funzione armonica che è una candidata soluzione (chiamata *soluzione di Perron*) del classico Problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} \quad \Omega \\ u = \varphi & \text{su} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Anzi, dimostreremo che se il Problema di Dirichlet è risolubile, la sua soluzione coincide con la soluzione di Perron.
Nel metodo di Perron lo studio del comportamento al bordo della soluzione

è essenzialmente separato dal problema dell'esistenza di quest'ultima. L'assunzione di continuità dei valori al bordo è legata alle proprietà geometriche del bordo attraverso il concetto di *funzione barriera*:

Definizione 3.5. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato e sia ξ un punto di $\partial\Omega$. Una funzione $w = w(\xi) \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ è chiamata **barriera** in ξ relativa a Ω se:

i) w è superarmonica in Ω;

ii) $w > 0$ in $\overline{\Omega} \setminus \{\xi\}$, $w(\xi) = 0$.

Una caratteristica importante del concetto di funzione barriera consiste nel fatto di essere una proprietà locale di $\partial\Omega$, infatti:

Definizione 3.6. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato e sia ξ un punto di $\partial\Omega$. Una funzione $w = w(\xi) \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ è chiamata **barriera locale** in ξ se esiste un intorno V di ξ tale che la funzione w soddisfi la Definizione 3.5 in $\Omega \cap V$.

Osservazione 3.5. A partire dalla Definizione 3.6, una barriera in ξ relativa a Ω può essere definita come segue:
Dato un disco $D \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $\xi \in D \subset\subset V$ e, posto

$$m = \inf_{V \setminus D} w > 0,$$

allora la funzione

$$\bar{w}(x) = \begin{cases} \min(m, w(x)) & , x \in \overline{\Omega} \cap D \\ m & , x \in \overline{\Omega} \setminus D \end{cases} \tag{3.5}$$

è una barriera in ξ relativa a Ω.

Dimostrazione. La continuità di $\bar{w}$ su $\overline{\Omega}$ e la proprietà *ii*) di funzione barriera sono immediate. Il fatto che $\bar{w}$ sia superarmonica in Ω deriva dalla proprietà *iii*) della Proprosizione 3.1.1 applicata alle funzioni superarmoniche. □

Definizione 3.7. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato, un punto $\xi \in \partial\Omega$ si dice **regolare** se esiste una barriera in quel punto.

Un primo legame che unisce il concetto di barriera al comportamento al bordo della soluzione del classico problema di Dirichlet per il Laplaciano è contenuto nel seguente

Lemma 3.2.2. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato, sia φ una funzione limitata su $\partial\Omega$ e sia u la funzione armonica in Ω definita dal metodo di Perron (Teorema* (3.2.1)*). Se $\xi \in \partial\Omega$ è un punto regolare e φ è continua in ξ, allora $u(x) \longrightarrow \varphi(\xi)$ per $x \to \xi$.*

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e chiamiamo $M = \sup \varphi$. Siccome ξ è regolare, esiste una barriera in ξ relativa a Ω, sia w. Inoltre, per la continuità di φ in ξ, esistono delle costanti k e δ tali che: $|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon$ se $|x - \xi| < \delta$ e $kw(x) \geq 2M$ se $|x - \xi| \geq \delta$.
Le funzioni $\varphi(\xi) + \varepsilon + kw$, $\varphi(\xi) - \varepsilon - kw$ sono rispettivamente superfunzioni e subfunzioni relative a φ. Pertanto, ricordando che ogni superfunzione domina ogni subfunzione (Osservazione 3.3) e dalla definizione di u, abbiamo che:

$$\varphi(\xi) - \varepsilon - kw(x) \leq u(x) \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + kw(x),$$

oppure:

$$|u(x) - \varphi(\xi)| \leq \varepsilon + kw(x).$$

Poiché $w(x) \longrightarrow 0$ per $x \to \xi$, otteniamo $u(x) \longrightarrow \varphi(\xi)$ per $x \to \xi$. □

Questo lemma porta ad una condizione necessaria e sufficiente per la risoluzione del classico Problema di Dirichlet per il Laplaciano in un arbitrario dominio limitato:

Teorema 3.2.3. *Il classico Problema di Dirichlet per il Laplaciano in un dominio limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è risolubile per qualunque funzione continua sul bordo di Ω se e solo se tutti i punti del bordo di Ω sono regolari.*

Dimostrazione. Se i punti del bordo di Ω sono regolari, allora, fissata $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, il precedente lemma stabilisce che la funzione armonica u fornita dal metodo di Perron risolve il Problema di Dirichlet avente come dato al bordo la funzione φ.
Viceversa, supponiamo che il classico Problema di Dirichlet sia risolubile per ogni funzione continua sul bordo di Ω. Sia $\xi \in \partial\Omega$, allora la funzione $\varphi(x) = |x - \xi|$ è continua su $\partial\Omega$ e la funzione armonica soluzione del Problema di Dirichlet con corrispondente dato al bordo φ risulta facilmente essere una barriera in ξ. Pertanto, ξ è regolare, così come tutti i punti di $\partial\Omega$. □

Bibliografia

[1] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer- Verlag Berlin Heidelberg New York, 1977.

[2] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol 19, 1998.

[3] B. Abbondanza, *Formule di media e funzioni armoniche*, Tesi di Laurea specialistica in Analisi Matematica, II sessione a.a. 2009/2010, Università di Bologna.

Ringraziamenti

Questo momento per me è di una gioia stratosferica. Ringrazio il babbo e la mamma perché mi sono stati e mi sono vicini sempre, mi scuso anche con loro, temo di averli fatto passare le pene dell'inferno in tutte le 32 prove da me sostenute in questi tre anni. Per non parlare della discussione della tesi, con questa siamo a 33 con bonus. Ringrazio Michele perché mi fa rimanere con i piedi per terra e perché ogni momento è buono per ridere di qualcosa che spesso solo io e lui notiamo. Ringrazio la Chemy, la persona più simpatica e più piena di vita che conosco, la quale mi rammenta sempre come un'amicizia così bella possa cancellare ogni distanza spazio temporale. La Freccia e la Giuly, perché con loro mi sento accolta, ascoltata e capita, le ringrazio anche perché tutte le volte che ho parlato loro di matematica mi hanno sempre ascoltato con il sorriso. Sante! Ringrazio un sacco le vecchie querce: Fede, per le chiamate nei momenti meno opportuni e per l'intesa acquisita, Ingrid, per l'ironia con la quale anima ogni situazione, Ila, perché con lei è sempre il momento di parlare della passione più grande: la pallavolo, e Chiara, per la risata più bella che esista. Su questi saggi alberi potrò sempre fare affidamento, in gruppo e singolarmente e con i quali mi sono anche sfogata di più. Ringrazio tantissimo la Mary per essermi stata vicino nei momenti di sconforto e per avermi incoraggiata e dato fiducia incondizionatamente. Ringrazio inoltre la sacrosanta e intoccabile pallavolo, a mio avviso un vero alter ego della matematica, insieme a tutte le mie compagne di squadra, in particolare Federica, che considero una sorella maggiore.
Ringrazio la Professoressa Montanari per la serenità e disponibilità con le quali ha seguito il mio lavoro, specialmente nelle ultime settimane.
Infine, ringrazio con un affetto non numerabile i miei (non solo) amici matematici Debora, Andrea, Chiara e Giulio. Buoni, altruisti e super simpatici, grazie a loro e con loro non vedo l'ora di ricominciare.