

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

---

Scuola di Scienze

Corso di Laurea in Fisica

**Integrali sui Cammini**

e

**Ordinamento di Weyl**

Relatore:

Prof. Fiorenzo Bastianelli

Presentata da:

Simon Luca Villani

Sessione autunnale

Anno Accademico 2014/2015

*“L’individualità dell’espressione  
è principio e fine di ogni arte.”*

*Cit.*

## Sommario

In questa tesi viene affrontato lo studio degli integrali funzionali nella meccanica quantistica, sia come rielaborazione dell'operatore di evoluzione temporale che costruendo direttamente una somma sui cammini. Vengono inoltre messe in luce ambiguità dovute alla discretizzazione dell'azione corrispondenti ai problemi di ordinamento operatoriale della formulazione canonica. Si descrive inoltre come una possibile scelta della discretizzazione dell'integrale funzionale può essere ottenuta utilizzando l'ordinamento di Weyl dell'operatore Hamiltoniano, sfruttando la relazione tra Hamiltoniana Weyl ordinata e la prescrizione del punto di mezzo da usare nella discretizzazione dell'azione classica. Studieremo in particolare il caso di una particella non relativistica interagente con un potenziale scalare, un potenziale vettore (campo magnetico) ed un potenziale tensore (metrica).

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Sistemi Classici</b>	<b>3</b>
1.1 Particella in un Campo Scalare . . . . .	3
1.2 Particella in un Campo Magnetico . . . . .	5
1.3 Particella in un Campo Elettromagnetico . . . . .	8
1.4 Particella su Spazi Curvi . . . . .	10
<b>2 Integrale sui Cammini</b>	<b>13</b>
2.1 Ampiezza di Probabilità . . . . .	13
2.2 Derivazione . . . . .	15
2.3 Derivazione alternativa di Feynman . . . . .	20
<b>3 Ordinamento di Weyl</b>	<b>23</b>
3.1 Problemi di Ordinamento e Discretizzazione . . . . .	23
3.2 Weyl Ordering . . . . .	27
<b>4 Ampiezza di Transizione di Sistemi con Potenziali Non Scalari</b>	<b>34</b>
4.1 Caso di una Particella in un Campo Magnetico . . . . .	34
4.2 Caso di una Particella in uno Spazio Curvo . . . . .	43

Conclusioni	47
Bibliografia	49

# Introduzione

La meccanica quantistica, sviluppata prevalentemente nella prima metà del 1900, è stata descritta e affrontata in tre diversi modi al contempo equivalenti. I primi due sviluppati quasi in contemporaneo furono la formulazione ondulatoria di Schrödinger, e la formulazione operatoriale di Heisenberg. La terza, sviluppata quasi 25 anni dopo, fu pubblicata da Feynman nel 1948 ed è conosciuta come integrale sui cammini, integrale funzionale o path integral. Questa formulazione, inizialmente sviluppata in maniera più euristica e qualitativa, riprende il principio di azione che nelle precedenti due veniva accantonato, e lo rielabora utilizzandolo come fase dell'ampiezza di transizione per una particella quanto-meccanica. Come discuteremo più in dettaglio in seguito, ogni cammino possibile per una particella contribuisce, in media, ugualmente a tutti gli altri, ma la fase di ognuno è proporzionale all'azione del cammino stesso. Da questa visione i moti classici sono una conseguenza diretta dell'interferenza distruttiva di percorsi molto differenti da quello che minimizza l'azione. Questo approccio alla meccanica quantistica fu del tutto nuovo e permise di ragionare utilizzando l'idea classica di cammino di una particella seguendo traiettorie spazio-temporali ben definite, cosa che nelle precedenti formulazioni non era evidente.

Gli integrali funzionali risultano essere un utile strumento di calcolo permettendo ad esempio di studiare problemi di particelle fortemente interagenti con potenziali

esterni al sistema e in situazioni altresì difficilmente calcolabili. Inoltre questo approccio ha permesso una riformulazione molto utile della teoria quantistica dei campi, riuscendo a risolvere molti problemi fino ad allora irrisolti, la quantizzazione delle teorie di gauge non abeliane in primis.

In questo lavoro di tesi vengono inizialmente richiamate le proprietà dinamiche di alcuni sistemi classici, particella non relativistica in moto in presenza di potenziali scalare, vettore e tensore (la metrica), studiandone la formulazione in termini del principio d'azione, essenziale nella formulazione degli integrali sui cammini, ricavandone le equazioni del moto e mettendo in evidenza eventuali simmetrie. Successivamente viene ricavata l'espressione matematica degli integrali sui cammini sia come rielaborazione dell'operatore di evoluzione temporale della meccanica quantistica, che costruendo direttamente una "somma sui cammini", procedimento seguito dallo stesso Feynman.

Vengono poi sottolineate possibili ambiguità di ordinamento operatoriali che si hanno a seguito della quantizzazione canonica del sistema. Questo problema porta ad avere diversi sistemi quantistici con lo stesso limite classico, facendo sorgere la necessità di selezionare la teoria quantistica più adeguata per lo studio del problema, che spesso coincide con la formulazione che conserva le stesse simmetrie del sistema classico. Ambiguità equivalenti emergono nella formulazione tramite gli integrali sui cammini: un modo di fissarle consiste nel derivare una corretta definizione dell'integrale funzionale partendo dalla formulazione canonica scelta, operando un riordinamento dell'operatore Hamiltoniano per riscriverlo nella forma Weyl ordinata. Questo ordinamento permette una deduzione univoca dell'integrale funzionale definito tramite una discretizzazione ben precisa, la discretizzazione del punto intermedio, che ne permette l'uso senza ambiguità rimanenti.

# Capitolo 1

## Sistemi Classici

### 1.1 Particella in un Campo Scalare

Consideriamo una particella non relativistica di massa  $m$  sotto l'effetto di un potenziale scalare  $V(\mathbf{x})$  e indicizziamo le componenti lungo i tre assi cartesiani  $x, y, z$  rispettivamente come  $i = 1, 2, 3$  ed indichiamo con  $x^i$  le componenti del vettore posizione  $\mathbf{x}(t)$ . Lavorando in spazi piatti dove il tensore metrico è dato dall'identità, si ha equivalenza tra indici "alti" e "bassi", per cui  $x^i = x_i$ . La lagrangiana di tale sistema è

$$\mathcal{L}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}_i \dot{x}^i - V(\mathbf{x}) \quad (1.1)$$

tramite la quale possiamo scriverci l'azione del sistema come

$$S[\mathbf{x}(t)] = \int dt \mathcal{L}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}). \quad (1.2)$$

Possiamo da quest'ultima ricavarci le equazioni del moto tramite il principio di minima azione, per il quale si ha che il funzionale d'azione è minimizzato quando valgono le equazioni

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} \Rightarrow m \ddot{x}^i = -\frac{\partial V}{\partial x^i}. \quad (1.3)$$



La prima uguaglianza è chiamata equazione di Eulero-Lagrange, mentre la seconda ci dice che la forza agente su una particella è la variazione spaziale del potenziale e spinge la particella in regioni con potenziale minore di quello di partenza. Per affrontare la quantizzazione del sistema è utile riformulare la dinamica tramite il formalismo Hamiltoniano, che produce equazioni del moto del primo ordine nel tempo. Si definisce come variabile indipendente il momento coniugato  $\mathbf{p}$  dato da

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = m\dot{x}_i \quad (1.4)$$

mentre l'Hamiltoniana ricavata tramite la trasformata di Legendre della Lagrangiana è data da

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = p_i \dot{x}^i - \mathcal{L}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \frac{p_i p^i}{2m} + V(\mathbf{x}). \quad (1.5)$$

Possiamo scriverci le equazioni del moto in forma Hamiltoniana tramite le parentesi di Poisson, le quali vengono definite come

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x^i} \quad (1.6)$$

dove è stata usata la notazione di Einstein per la quale indici ripetuti vengono sommati. In questo modo otteniamo le equazioni di Hamilton

$$\dot{x}^i = \{x^i, H\} = \frac{p^i}{m} \quad (1.7)$$

$$\dot{p}^i = \{p^i, H\} = -\frac{\partial V}{\partial x^i}. \quad (1.8)$$

Si vede che in entrambi i formalismi si arriva alla stessa conclusione, ovvero, che il moto della particella è determinato dalla variazione spaziale del campo, la quale fa sì che il moto della particella sia un moto accelerato. Infatti emergono le stesse leggi del moto scritte nella forma equivalente  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}}$  e  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ . Il principio

d'azione può essere riformulato nello spazio delle fasi, e le equazioni di Hamilton possono essere riottenute minimizzando l'azione

$$S[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)] = \int dt \left( p_i \dot{x}^i - H(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \right). \quad (1.9)$$

Infatti, variando l'azione si ha

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dt \left( \delta p_i \dot{x}^i + p_i \delta \dot{x}^i - \delta H \right) \\ &= \int dt \left( \delta p_i \dot{x}^i + p_i \delta \dot{x}^i - \frac{\partial H}{\partial x^i} \delta x^i - \frac{\partial H}{\partial p^i} \delta p^i \right) \\ &= \int \left( \delta p_i dx^i - dp_i \delta x^i - \frac{\partial H}{\partial x^i} dt \delta x^i - \frac{\partial H}{\partial p^i} dt \delta p^i \right) - p_i \delta x^i \\ &= \int \delta p^i \left( dx_i - \frac{\partial H}{\partial p^i} dt \right) - \int \delta x^i \left( \frac{\partial H}{\partial x^i} dt + dp_i \right) = 0. \end{aligned}$$

Nella terza uguaglianza l'ultimo termine si annulla in quanto la variazione  $\delta x^i$  è nulla agli estremi. L'ultima uguaglianza è verificata se entrambi i membri dei due integrali si annullano indipendentemente essendo  $\delta x$  e  $\delta p$  tra loro indipendenti ed arbitrari. In questo modo abbiamo ottenuto le equazioni di Hamilton dal principio di minima azione

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p^i} \quad (1.10)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \quad (1.11)$$

che applicate all'Hamiltoniana (1.5) riproducono le equazioni (1.7) e (1.8).

## 1.2 Particella in un Campo Magnetico

Consideriamo una particella di massa  $m$  e carica  $q$  sotto l'effetto di un campo magnetico  $\mathbf{B}$ . Per tale studio è conveniente sfruttare la relazione che il campo magnetico ha con il potenziale vettore, ovvero  $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ . In notazione indiciale

assume la forma  $B^i = \varepsilon^{ijk} \partial_j A_k$ , dove  $\varepsilon^{ijk}$  è il tensore di Levi-Civita e  $\partial_j$  è la derivata lungo la coordinata  $x^j$ . Va notato che il campo  $\mathbf{B}$  è un invariante di Gauge, infatti può essere descritto da differenti potenziali che differiscono tra di loro al più per una derivata spaziale di una funzione generica  $\Lambda(\mathbf{x})$ . Questo fatto si può facilmente vedere prendendo il trasformato di Gauge di  $\mathbf{A}$ , che chiamiamo  $\mathbf{A}'$ , e il suo campo magnetico associato, che chiamiamo  $\mathbf{B}'$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda \quad (1.12)$$

allora avremo che

$$\mathbf{B}' = \nabla \wedge \mathbf{A}' = \nabla \wedge \mathbf{A} + \nabla \wedge (\nabla \cdot \Lambda) = \nabla \wedge \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (1.13)$$

dove il secondo termine della seconda uguaglianza si annulla in quanto è un prodotto vettoriale tra due vettori che giacciono sulla stessa retta.

Come possiamo notare il potenziale vettore non è univoco nella determinazione di  $\mathbf{B}$ . Vediamo come questa proprietà influenza le equazioni del moto.

Il potenziale di questo sistema è un potenziale generalizzato, per cui la lagrangiana assume la seguente forma

$$\mathcal{L}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}_i \dot{x}^i + q A_i(\mathbf{x}) \dot{x}^i \quad (1.14)$$

che tramite le equazioni di Eulero-Lagrange produce le equazioni del moto

$$m \ddot{x}_i = q (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \dot{x}^j. \quad (1.15)$$

Dalla relazione tra  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{A}$  data precedentemente la (1.15) si può scrivere come

$$m \ddot{x}_i = q \varepsilon_{ijk} \dot{x}^j B^k. \quad (1.16)$$

Da questa equazione si può notare che le equazioni del moto restano invariate per trasformazioni di Gauge, restando invariato il campo  $\mathbf{B}$  stesso. Inoltre la

forza agente sulla particella è correttamente data proprio dalla forza di Lorentz in assenza di campo elettrico  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ .

Nel formalismo Hamiltoniano la non unicità del potenziale vettore permette di introdurre una grandezza molto utile nella quantizzazione di tale sistema. Definiamo il momento coniugato come

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = m\dot{x}_i + qA_i(\mathbf{x}) \quad (1.17)$$

con cui ci ricaviamo l'Hamiltoniana tramite la trasformata di Legendre della Lagrangiana

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = p_i \dot{x}^i - \mathcal{L}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2m}(p_i - qA_i(\mathbf{x}))^2. \quad (1.18)$$

Si noti la comparsa della sostituzione minimale  $p_i \rightarrow p_i - qA_i(\mathbf{x})$  che applicata all'Hamiltoniana libera produce direttamente l'Hamiltoniana della particella in campo magnetico. Possiamo ora ricavarci le equazioni del moto come fatto per le equazioni (1.7), (1.8)

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\} = \frac{1}{m}(p_i - qA_i) \quad (1.19)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = \frac{q}{m}\partial_i A_j (p^j - qA^j). \quad (1.20)$$

A differenza della formulazione trovata con il formalismo Lagrangiano, l'invarianza di Gauge in questo caso è più difficile da notare. Si può ovviare a questo fatto introducendo il momento covariante  $\pi^i$  definito come

$$\pi_i = p_i - qA_i \quad (1.21)$$

che è un invariante di Gauge. Infatti se consideriamo il trasformato di Gauge del momento  $p_i$ , ottenuto considerando la (1.14) quando si sostituisce  $A_i$  con  $A_i + \partial_i \Lambda$ , si ha

$$p'_i = p_i + q\partial_i \Lambda \quad (1.22)$$

e quindi il trasformato di Gauge del momento covariante è

$$\pi'_i = p'_i - qA'_i = p_i + q\partial_i\Lambda - qA_i - q\partial_i\Lambda = p_i - qA_i = \pi_i. \quad (1.23)$$

Dalla (1.23) si ha che il momento covariante è un invariante di Gauge per cui possiamo scriverci le equazioni del moto in funzione di questa variabile.

L'Hamiltoniana in funzione di questa nuova grandezza diventa

$$H = \frac{\pi_i\pi^i}{2m} \quad (1.24)$$

dunque le equazioni del moto sono

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\} = \frac{\pi_i}{m} \quad (1.25)$$

$$\dot{\pi}_i = \{\pi_i, H\} = \frac{q\pi^j}{m}(\partial_j A_i - \partial_i A_j) = \frac{q\pi^j}{m}\varepsilon_{ijk}B^k \quad (1.26)$$

in questa forma l'invarianza delle equazioni del moto è ben visibile, ed è data dall'invarianza di  $\pi^i$  e  $B^i$ . Quantizzando canonicamente il sistema il momento covariante assume il ruolo di derivata covariante della funzione d'onda.

### 1.3 Particella in un Campo Elettromagnetico

Uniamo i risultati ottenuti nei paragrafi 1.1 e 1.2 descrivendo il moto di una particella in un campo elettromagnetico statico. In questo caso il potenziale studiato nel paragrafo 1.1 prende la forma  $V(\mathbf{x}) = q\phi(\mathbf{x})$  che è l'energia elettrostatica e  $\phi(\mathbf{x})$  è il potenziale elettrostatico, legato al campo elettrico da  $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x})$ . In questo sistema la Lagrangiana è la seguente

$$\mathcal{L}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}_i\dot{x}^i - q\phi(\mathbf{x}) + qA_i(\mathbf{x})\dot{x}^i \quad (1.27)$$

da cui le equazioni del moto ricavate tramite le equazioni di Eulero-Lagrange

$$m\ddot{x}^i = qE^i + q\varepsilon^{ijk}\dot{x}_j B_k. \quad (1.28)$$

Nel formalismo Hamiltoniano si ha che i momenti generalizzati sono

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = m\dot{x}_i + qA_i(\mathbf{x}). \quad (1.29)$$

Allora si ha che l'Hamiltoniana è

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = p_i \dot{x}^i - \mathcal{L}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2m}(p_i - qA_i(\mathbf{x}))^2 + q\phi(\mathbf{x}). \quad (1.30)$$

Il primo termine dell'Hamiltoniana è stato già incontrato nel paragrafo precedente, ed è stato espresso in termini del momento covariante  $\pi^i$  (1.21) per rendere più chiara l'invarianza delle equazioni del moto nel caso della sola presenza del campo magnetico. Adoperiamo questa sostituzione anche in questo caso ottenendo la seguente Hamiltoniana

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2m}\pi_i \pi^i + q\phi(\mathbf{x}). \quad (1.31)$$

In questo modo le equazioni del moto sono

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\} = \frac{\pi_i}{m} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_i &= \{\pi_i, H\} = \frac{q\pi^j}{m}(\partial_j A_i - \partial_i A_j) - q\partial_i \phi \\ &= \frac{q\pi^j}{m}\varepsilon_{ijk}B^k + qE_i. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Se esprimiamo  $\pi^i$  in termini di  $\dot{x}^i$  si ha che l'equazione (1.33) coincide con l'equazione (1.28), in questo modo è facile notare come entrambi i formalismi conducano alla forza di Lorentz  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$  come causa del moto della particella.

È facile vedere che anche per potenziali dipendenti dal tempo la lagrangiana (1.27) permette di ottenere le corrette equazioni del moto.

## 1.4 Particella su Spazi Curvi

Consideriamo una particella di massa  $m$  in moto in uno spazio curvo tridimensionale. Dotiamo tale spazio di una metrica che chiamiamo  $g_{ij}(P)$ , dove  $P$  è un punto della varietà. Su quest'ultima possiamo definire una carta ( $\phi$ ) che mappa i punti appartenenti alla varietà in  $\mathbb{R}^3$ , o in un suo sotto-insieme. Scelta una base in  $\mathbb{R}^3$ , ad esempio  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  rappresentanti rispettivamente i tre versori degli assi  $x, y, z$  possiamo trovarci le coordinate (non assolute) dei punti  $P$  appartenenti alla varietà che indichiamo con  $\phi(P) = x^i(P)$ , con  $i = 1, 2, 3$ . In questo modo possiamo anche esprimere la metrica in tale sistema di coordinate ottenendo  $g_{ij}(P) = g_{ij}(x^k(P))$ . La lagrangiana di una particella libera in questo spazio curvo è data dalla sola energia cinetica

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{m}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j. \quad (1.34)$$

Attraverso il principio di minima azione si possono ricavare le equazioni del moto della particella. Questo non è però l'unico modo possibile, infatti si può procedere anche con considerazioni prettamente geometriche, sfruttando la caratteristica che le equazioni del moto sono geodetiche dello spazio in cui essa è vincolata a muoversi, infatti una particella libera che si muove in  $\mathbb{R}^3$  segue una linea retta, che è appunto una geodetica di tale spazio. Su spazi curvi il concetto di geodetica estende il concetto di linea retta, che diventa la curva per cui, preso un vettore in un punto della varietà, il suo trasportato parallelo non varia lungo la curva integrale del vettore scelto. Matematicamente una geodetica è una curva  $\gamma$ , parametrizzata da  $t \in \mathbb{R}$  e definita sulla varietà tale per cui, indicando con  $\vec{V} = \frac{d\vec{x}}{dt}$  il vettore tangente alla curva, si ha che tale vettore è trasportato parallelamente lungo la curva

$$\nabla_{\vec{V}} \vec{V}|_P = 0 \quad (1.35)$$

dove  $\nabla_{\vec{V}}$  è la derivata covariante fatta lungo  $\vec{V}$ . Tale espressione può essere scritta nel sistema di coordinate scelto precedentemente ottenendo

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\vec{V}}\vec{V}\right)^k &= V^j \left(\frac{\partial V^k}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^k V^i\right) \\ &= \frac{dV^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k V^i V^j \\ &= \frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (1.36)$$

dove  $\Gamma_{ij}^k$  è la connessione affine (simboli di Christoffel) di tale spazio, legata alla metrica dalla relazione seguente

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij}). \quad (1.37)$$

È facile vedere che tali equazioni emergono anche dal principio variazionale di minima azione applicato alla (1.34). Precedentemente è stato scelto un sistema di coordinate non assoluto, questo perchè si può sempre fare una scelta differente di coordinate che non cambia i risultati ottenuti, dovendo essere la fisica descrivibile in ogni sistema di riferimento. Questa proprietà viene chiamata invarianza di *background*. Possiamo ad esempio vedere che la Lagrangiana non varia per cambi di coordinate. Se operiamo un cambio di coordinate per cui

$$x^i \rightarrow x'^i(x) = x^i \quad (1.38)$$

la metrica si trasforma, secondo le regole di trasformazioni tensoriali, come

$$g_{ij}(x) \rightarrow g'_{ij}(x') = g_{kl}(x) \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \quad (1.39)$$

allora possiamo vedere meglio questa invarianza se apportiamo una variazione infinitesima delle coordinate, ovvero imponiamo che i due sistemi di coordinate differiscano per un  $\varepsilon(x) > 0$  piccolo a piacere. In questo caso si ha un cambio di coordinate del tipo

$$x^i \rightarrow x'^i = x^i - \varepsilon^i(x) \quad (1.40)$$



mentre la metrica si trasforma come

$$\delta g_{ij} = g'_{ij}(x) - g_{ij}(x) = \varepsilon^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \varepsilon^k}{\partial x^i} g_{kj} + \frac{\partial \varepsilon^k}{\partial x^j} g_{ik}. \quad (1.41)$$

Sotto queste trasformazioni si ha che la Lagrangiana rimane invariata, infatti

$$\delta \mathcal{L}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}(x) \delta x^k \dot{x}^i \dot{x}^j + g_{ij}(x) \delta \dot{x}^i \dot{x}^j + \frac{1}{2} \delta g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j = 0 \quad (1.42)$$

dove  $\delta x(t) = x'(t) - x(t) = -\varepsilon$ . L'invarianza per cambio di coordinate è dovuta al fatto che la metrica si trasforma assieme alle coordinate lasciando invariato ciò che si sta descrivendo sulla varietà. Descriviamo infine il formalismo Hamiltoniano utile per affrontare la quantizzazione canonica del sistema. Nel formalismo Hamiltoniano si definiscono i momenti coniugati come

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = g_{ij} \dot{x}^j \quad (1.43)$$

mentre l'Hamiltoniana prende la forma

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = p_i \dot{x}^i - \mathcal{L}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j \quad (1.44)$$

per cui le equazioni del moto sono riscrivibili come

$$\dot{x}^i = \{x^i, H\} = g^{ij} p_j \quad (1.45)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{1}{2} (\partial_i g^{kl}) p_k p_l. \quad (1.46)$$

# Capitolo 2

## Integrale sui Cammini

### 2.1 Ampiezza di Probabilità

L'ampiezza di probabilità è una grandezza fondamentale nella descrizione di un sistema quantico, essendo il suo modulo quadro la probabilità che un determinato evento si verifichi. In particolare, l'ampiezza di probabilità di una particella che si trova in un punto dello spazio è il valore della sua funzione d'onda nel punto stesso.

Un esempio molto importante per capire questo concetto è la semplice propagazione di una particella libera da un punto  $S$  ad un punto  $O$ , che studiamo concettualmente con l'aiuto dell'esperimento delle due fenditure. La probabilità che una particella raggiunga un punto  $O$  sullo schermo non è solo la probabilità che la particella passi per una delle due fenditure, ma è il modulo quadro della somma delle relative ampiezze parziali di probabilità che tengono conto del passaggio in entrambe le fenditure. Quello che ci possiamo chiedere ora è, se aggiungiamo una terza fenditura, cosa succede? Con una terza fenditura si dovrà semplicemente tenere conto anche del possibile passaggio in essa. Iterando

il ragionamento continuando ad aggiungere fenditure si arriverà alla condizione che ogni punto del piano del reticolo contribuisce alla probabilità totale che la particella arrivi nel punto  $O$ , ma se si arriva a questo caso si può immaginare il sistema come se il reticolo non esistesse e si avrebbe una particella libera che inizia il suo moto da un punto  $S$  raggiungendo un punto  $O$  e nella descrizione del suo moto quantistico dovremmo considerare l'ampiezza che essa possa passare per ogni punto di un piano fissato, che è una condizione molto restringente, infatti, nessuno ci può dire da quali condizioni è fissato questo piano ma solo che è fisso, allora ci possiamo chiedere cosa accadrebbe se aggiungessimo un secondo reticolo. Tornando al caso di schermi a fenditure finite un secondo schermo comporterebbe, come nel caso precedente, di dover tenere conto del passaggio della particella in una fenditura del primo schermo, poi da qui considerare il passaggio attraverso le fenditure del secondo schermo, questo, in tutti i modi possibili. La stessa procedura va ripetuta per tutte le fenditure del primo schermo, in altre parole se si hanno due schermi, che chiameremo  $A$  il primo e  $B$  il secondo, entrambi dotati rispettivamente di  $n$  e  $m$  fenditure, l'ampiezza totale di probabilità  $\mathcal{A}$  che la particella vada da  $S$  a  $O$  è la somma dell'ampiezza di probabilità che la particella passi per la fenditura  $A_i$  e successivamente per una fenditura  $B_j$  in tutte le combinazioni possibili.

$$\sum_i \sum_j \mathcal{A}(S \rightarrow A_i \rightarrow B_j \rightarrow O) \quad (2.1)$$

Continuando ad aggiungere reticoli ognuno con un numero arbitrario di fenditure arriviamo al caso limite nel quale tutto lo spazio è coperto da reticoli, se ora mandiamo il numero di fenditure dei reticoli a infinito avremo che l'ampiezza di probabilità che la particella si propaghi da  $S$  ad  $O$  è data dalla somma delle ampiezze della particella di passare per ogni fenditura di ogni reticolo, ed essendo

questi infiniti, definiscono tutti i possibili cammini che la particella può seguire per raggiungere  $O$ . In altre parole se si vuole studiare la propagazione di una particella si dovrà tenere conto di tutti i possibili cammini che essa può seguire. Questo ragionamento sul moto di una particella non introduce fundamentalmente nulla di nuovo ai concetti già conosciuti della meccanica quantistica, ma fornisce un altro modo di vederla. In questa visione rimane da capire che ampiezza associare a ciascun possibile cammino. Feynman propose che questa ampiezza fosse una fase collegata al valore dell'azione valutata sul cammino,  $e^{\frac{i}{\hbar}S}$ , ottenendo quindi una espressione per l'ampiezza totale della forma

$$A = \int \mathcal{D}[x(t)] e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}. \quad (2.2)$$

Cercheremo di giustificare e di rendere concreta questa espressione formale nei prossimi paragrafi.

## 2.2 Derivazione

In meccanica quantistica lo stato di una particella, nella formulazione di Dirac, è definito da un vettore di uno spazio di Hilbert i cui elementi proiettati sullo spazio degli stati posizione rappresentano le funzioni d'onda, ovvero funzioni a quadrato sommabile (e quindi appartenenti allo spazio  $L^2$ ). Lo stato soddisfa l'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle. \quad (2.3)$$

Le soluzioni di questa equazione sono le funzioni dipendenti dal tempo  $|\psi(t)\rangle$  descriventi l'evoluzione temporale della particella, cosa che ora andremo a studiare considerando il moto di una particella non relativistica in una dimensione (scelta fatta per semplicità nella trattazione e per non appesantire la notazione),

l'estensione a più dimensioni è immediata.

La rappresentazione delle coordinate si ottiene considerando gli autostati  $|x\rangle$  che hanno come autovalore dell'operatore  $\hat{x}$  un numero reale  $x$ , e proiettando lo stato del sistema su questi autostati. Scegliendo una Hamiltoniana della forma  $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V(\hat{x})$ , e proiettando su  $|x\rangle$  si ha che l'equazione di Schrödinger (2.3) assume la seguente forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle x | \psi(t) \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x | \psi(t) \rangle + V(x) \langle x | \psi(t) \rangle \quad (2.4)$$

la cui soluzione formale valutata al tempo  $t_f$ , considerando  $|\psi_i\rangle$  la funzione descrivente lo stato iniziale ad un tempo  $t_i < t_f$ , è

$$\langle x | \psi(t_f) \rangle = \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_f - t_i)} | \psi(t_i) \rangle \quad (2.5)$$

nella quale possiamo inserire l'operatore identità tra l'esponenziale e il ket usando la proprietà degli autostati posizione:

$$\int_{\mathbb{R}} dx |x\rangle \langle x| = \mathbb{I} \quad (2.6)$$

ottenendo la seguente relazione

$$\begin{aligned} \langle x | \psi(t_f) \rangle &= \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_f - t_i)} \mathbb{I} | \psi(t_i) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx_i \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_f - t_i)} | x_i \rangle \langle x_i | \psi(t_i) \rangle \end{aligned} \quad (2.7)$$

dove il termine  $\langle x | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_f - t_i)} | x_i \rangle$  è il propagatore della particella, ed è il termine che andiamo a studiare essendo l'unico termine non conosciuto nell'espressione (2.7): rappresenta l'ampiezza di probabilità che la particella posta al punto  $x_i$  al tempo  $t_i$  si trovi nel punto  $x$  al tempo  $t_f$ .

Vediamo come manipolare tale espressione per derivare una forma dell'integrale sui cammini proposto da Feynman. Per prima cosa dividiamo l'intervallo temporale di propagazione  $t_f - t_i$  in  $N$  sotto intervalli e chiamiamo  $(t_f - t_i)/N = \delta t$ ,

allora possiamo scrivere che

$$\begin{aligned}\langle x | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f-t_i)} | x_i \rangle &= \langle x | \left( e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\frac{(t_f-t_i)}{N}} \right)^N | x_i \rangle = \\ &= \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\delta t} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\delta t} \dots e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\delta t} | x_i \rangle\end{aligned}\quad (2.8)$$

andiamo ora ad inserire l'operatore identità fra tutti i fattori esponenziali sfruttando di nuovo la proprietà (2.6)

$$\begin{aligned}\langle x | \mathbb{I} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\delta t} \mathbb{I} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\delta t} \mathbb{I} \dots \mathbb{I} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\delta t} \mathbb{I} | x_i \rangle &= \\ \left( \prod_{j=1}^{N-1} \int_{\mathbb{R}} dx_j \right) \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\delta t} | x_{N-1} \rangle \langle x_{N-1} | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\delta t} | x_{N-2} \rangle \dots \langle x_1 | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\delta t} | x_i \rangle.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Per semplicità continuiamo la trattazione focalizzandoci solamente su uno degli  $N$  termini dell'espressione precedente, ad esempio il termine nella forma  $\langle x_j | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\delta t} | x_{j-1} \rangle$ . Possiamo moltiplicare a sinistra dell'esponenziale per l'operatore identità come fatto precedentemente, ma questa volta utilizziamo la proprietà degli autostati dell'operatore impulso, per cui la risoluzione dell'identità assume la forma

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dp}{2\pi\hbar} |p\rangle \langle p| = \mathbb{I} \quad (2.10)$$

ed otteniamo così

$$\langle x_j | \mathbb{I} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\delta t} | x_{j-1} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \langle x_j | p_j \rangle \langle p_j | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\delta t} | x_{j-1} \rangle. \quad (2.11)$$

Rimane ora da valutare l'azione dell'operatore Hamiltoniano sugli autostati posizione e impulso. Ipotizzando che l'Hamiltoniana sia delle forma  $\hat{H}(\hat{p}, \hat{x}) = \hat{p}^2/2m + \hat{V}(\hat{x})$ , supponendo sia valido il teorema di *Trotter*, allora mandando  $N \rightarrow \infty$ , equivalente a dire che  $\delta t \rightarrow 0$ <sup>1</sup>, possiamo sviluppare secondo Taylor

<sup>1</sup>assumere la convergenza a zero degli intervalli temporali può essere visto come procedimento equivalente a mandare a infinito il numero di schermi di cui si parlava nel precedente paragrafo

l'esponenziale ottenendo

$$\begin{aligned}
\langle p_j | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \delta t} | x_{j-1} \rangle &= \langle p_j | \mathbb{I} - \frac{i \delta t}{\hbar} \hat{H}(\hat{p}, \hat{x}) + \dots | x_{j-1} \rangle = \\
&= \langle p_j | x_{j-1} \rangle \left( 1 - \frac{i \delta t}{\hbar} H(p_j, x_{j-1}) + \dots \right) = \langle p_j | x_{j-1} \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} H(p_j, x_{j-1}) \delta t}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Utilizziamo ora una proprietà derivante dalla normalizzazione dell'autofunzione impulso

$$\langle x | p \rangle = e^{\frac{i}{\hbar} p x}, \quad \langle p | x \rangle = \overline{\langle x | p \rangle} = e^{-\frac{i}{\hbar} p x} \tag{2.13}$$

Inserendo queste relazioni nell'equazione (2.10) e tenendo anche conto della (2.11) otteniamo

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \langle x_j | p_j \rangle \langle p_j | x_{j-1} \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} H(p, x) \delta t} = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i \delta t}{\hbar} \left( p_j \frac{x_j - x_{j-1}}{\delta t} - H(p_j, x_{j-1}) \right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

per cui possiamo infine scrivere l'espressione del propagatore di una particella quantistica

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \prod_{j=1}^{N-1} \int_{\mathbb{R}} dx_j \right) \left( \prod_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \right) \exp \left\{ \frac{i \delta t}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left( p_j \frac{x_j - x_{j-1}}{\delta t} - H(p_j, x_{j-1}) \right) \right\}. \tag{2.15}$$

Con quest'ultima formulazione siamo arrivati ad una forma senza la presenza di operatori, e quindi una forma più facilmente trattabile, l'unica complicazione si ha nel valutare gli infiniti integrali sugli impulsi e le coordinate, per i primi si può risolvere subito essendo integrali gaussiani, infatti, con l'hamiltoniana nella

forma  $H(p, x) = p^2/2m + V(x)$  si ha

$$\begin{aligned}
& \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \prod_{j=1}^{N-1} \int_{\mathbb{R}} dx_j \right) \left( \prod_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \right) \exp \left\{ \frac{i\delta t}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left( p_j \frac{x_j - x_{j-1}}{\delta t} - \frac{p_j^2}{2m} - V(x_{j-1}) \right) \right\} = \\
& \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \prod_{j=1}^{N-1} \int_{\mathbb{R}} dx_j \exp \left\{ -\frac{i\delta t}{\hbar} \sum_{j=1}^N V(x_{j-1}) \right\} \right) \times \\
& \times \left( \prod_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \right) \exp \left\{ \frac{i\delta t}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left( p_j \frac{x_j - x_{j-1}}{\delta t} - \frac{p_j^2}{2m} \right) \right\} = \\
& \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \prod_{j=1}^{N-1} \int_{\mathbb{R}} dx_j \right) \left( \frac{m}{2\pi\hbar i \delta t} \right)^{N/2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \delta t \left( \frac{m}{2} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{\delta t^2} - V(x_{j-1}) \right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

mentre per gli integrali posizionali, possiamo per ora fare solo delle considerazioni che ci permettono di comprendere meglio il loro significato fisico, per prima cosa l'argomento della sommatoria ha le dimensioni di un'azione e notiamo che ha proprio la forma di una somma Riemanniana (dove  $t_j = t_i - j\delta t$ ), allora possiamo dire che

$$\sum_{j=1}^N \delta t \mathcal{L}(t_j) \sim \int_{t_i}^{t_f} dt \mathcal{L}(t) \tag{2.17}$$

dove abbiamo espresso  $\mathcal{L}(t_j) = \left( \frac{m}{2} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{\delta t^2} - V(x_{j-1}) \right)$ , che riconosciamo essere proprio la discretizzazione della Lagrangiana del sistema classico, allora essendo l'integrale temporale della Lagrangiana l'azione del sistema  $S[x(t)]$ , possiamo esprimere l'argomento dell'esponenziale come  $i$ -volte il rapporto tra l'azione e  $\hbar$ . L'azione di una particella dipende principalmente dal cammino di essa allora, essendo questo l'unica variabile dell'argomento dell'integrale possiamo definire il prodotto degli infiniti integrali posizionali come un unico integrale su tutti i cammini possibili, ed avremo così il propagatore nella forma

$$K(x_f, x_i) = \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}[x(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]}. \tag{2.18}$$



Anche se la forma utile al calcolo rimane l'equazione (2.16), o una discretizzazione di quest'ultima trasformando l'integrale in una sommatoria e i cammini in curve spezzate in  $N$  segmenti, la forma (2.18) rimane molto utile per studiare qualitativamente un fenomeno.

## 2.3 Derivazione alternativa di Feynman

Feynman presentò anche una diversa derivazione, senza lo stesso rigore fisico-matematico di quello seguito sopra, dove il concetto di somma sui cammini possibili esce naturalmente da semplificazioni e considerazioni di origine puramente matematica partendo da concetti quantistici già ben sviluppati, ma ha come obiettivo primo ricavare l'ampiezza di una particella come somma sui cammini con considerazioni puramente fisiche, e da qui dedurre tutti i principi della fisica quantistica. Gli unici aspetti matematici nella sua formulazione seguirono dal parallelismo con il metodo adottato da Riemann per la sua formulazione di integrale.

La probabilità che una particella vada da un punto  $a$  ad un punto  $b$  è il modulo quadro di una grandezza dipendente solamente dal punto iniziale e finale,  $K(a, b)$ , chiamata ampiezza di probabilità, la quale a sua volta è definita dalla somma dei contributi di ogni cammino che chiameremo  $\phi[x(t)]$ . L'ampiezza parziale  $\phi[x(t)]$  è identificata da Feynman come un numero complesso di modulo fissato (tutti i cammini pesano allo stesso modo), ma con una fase dipendente dal valore dell'azione valutata sul cammino. Quindi l'assunzione fondamentale è che  $\phi[x(t)] \sim e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}$ . Questo porta ad una formula della forma

$$K(a, b) = \sum_{\text{cammini } x(t)} e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}, \quad P(a, b) = |K(a, b)|^2 \quad (2.19)$$

In questo modo tutti i cammini hanno lo stesso peso ma fasi differenti e saranno quelle a dare la corretta importanza al cammino e generare gli effetti di interferenza tipici della meccanica quantistica.

Per costruire la somma, prima dobbiamo costruire i cammini, e questo si può fare dividendo l'intervallo temporale di propagazione in  $N$  sottointervalli tutti di lunghezza  $\delta t$ . Per ogni  $t_i$  scegliamo un punto opportuno  $x_i$  connesso da un segmento al punto successivo  $x_{i+1}$  al tempo  $t_{i+1}$  così che, tenendo conto delle posizioni iniziali e finali abbiamo costruito un vero e proprio cammino. Strutturando i cammini in questo modo, ovvero come linee spezzate con intervalli temporali fissi, la somma sui cammini la si può definire come il prodotto degli integrali con variabili d'integrazione  $x_i$  con  $i$  che va da 1 a  $N - 1$ , escludendo i punti iniziali e finali che restano fissi durante l'evoluzione temporale della particella. La definizione risultante è

$$K(a, b) \sim \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_{N-1} \phi[\{x_i\}]. \quad (2.20)$$

dove  $\{x_i\}$  rappresenta il cammino discretizzato costruito sopra. Questa scrittura è equivalente alla formulazione iniziale dell'area sottesa ad un grafico secondo l'idea d'integrale proposta da Riemann, il quale disse che l'area sottesa ad un grafico è proporzionale alla somma delle ordinate su un insieme di coordinate finito. Il passo successivo sta nel mandare il numero di intervalli temporali a infinito (o equivalentemente  $\delta t \rightarrow 0$ ). In questo limite i cammini discretizzati  $\{x_i\}$  riproducono tutti i possibili cammini  $x(t)$ . Facendo semplicemente il limite per  $N \rightarrow \infty$  si ha la non esistenza del limite stesso, cosa che si verifica anche nella somma sulle ordinate nel caso di Riemann, che risolse semplicemente moltiplicando la sommatoria per la variabile della quale si sta facendo il limite. Possiamo applicare un metodo analogo al nostro caso, solo che qui non basta moltiplicare

per la variabile di cui si sta facendo il limite ma bisogna anche tenere conto che l'ampiezza deve essere normalizzata. Chiamiamo questo fattore  $A^{-N}$ .

Possiamo così scriverci l'espressione finale dell'ampiezza

$$K(a, b) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{A} \int \frac{dx_1}{A} \int \frac{dx_2}{A} \dots \int \frac{dx_{N-1}}{A} \phi[x(t)] \quad (2.21)$$

che ha un'espressione equivalente all'equazione (2.16) grazie alla quale si può capire che il termine  $A = \left(\frac{2\pi i \hbar \delta t}{m}\right)^{1/2}$ . Questo termine si può anche ricavare imponendo che la funzione d'onda scritta sia propagata correttamente nel tempo

$$\Psi(x_b, t_b) = \int_{\mathbb{R}} dx_a K(x_a, x_b) \Psi(x_a, t_a). \quad (2.22)$$

# Capitolo 3

## Ordinamento di Weyl

### 3.1 Problemi di Ordinamento e Discretizzazione

Un metodo per passare da un sistema classico alla sua controparte quantistica è la quantizzazione canonica di Dirac, la quale sfrutta una similitudine tra le parentesi di Poisson e il commutatore, imponendo che il commutatore di due grandezze fisiche sia  $i\hbar$ -volte la loro parentesi di Poisson, e considerare queste grandezze come operatori agenti su uno spazio vettoriale Hilbertiano. Con questa quantizzazione possono però sorgere ambiguità di ordinamento degli operatori con i quali si sta lavorando. Più precisamente le ambiguità di ordinamento riguardano gli operatori posizione  $\hat{x}$  e impulso  $\hat{p}$ , questo perchè in meccanica quantistica tutti gli operatori, specialmente l'operatore Hamiltoniano  $\hat{H}(\hat{p}, \hat{x})$ , dipendono da quest'ultimi. La legge di commutazione fondamentale richiesta dalla quantizzazione canonica è

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \tag{3.1}$$

Le ambiguità sorgono nel momento in cui si valutano operatori composti da combinazioni non lineari di  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$ . Ad esempio partendo da

$$(x + p)^2 = x^2 + p^2 + 2xp \quad (3.2)$$

si ha che

$$(\hat{x} + \hat{p})^2 \neq \hat{x}^2 + \hat{p}^2 + 2\hat{x}\hat{p}. \quad (3.3)$$

Nessuno garantisce che il termine misto sia proprio  $\hat{x}\hat{p}$  invece di  $\hat{p}\hat{x}$ , e le due scritture non sono equivalenti in quanto  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  non commutano, più precisamente  $\hat{x}\hat{p}$  e  $\hat{p}\hat{x}$  differiscono di  $i\hbar$ . L'unica cosa che possiamo dire è che entrambe le scritture sono ammissibili, ma danno origine a termini extra che descrivono teorie quantistiche diverse partendo dalla stessa teoria classica. Queste ambiguità suggeriscono come un sistema classico possa quindi essere descritto da più teorie quantistiche, le quali hanno tutte lo stesso limite classico. Una richiesta utile per selezionare teoria quantistica è la richiesta che simmetrie classiche siano presenti anche nella formulazione quantistica.

Ambiguità equivalenti sorgono quando si lavora con gli integrali sui cammini, e sono dovute alla scelta della discretizzazione dell'azione classica. Infatti diverse discretizzazioni possono dare origine a diverse ampiezze di transizione. Un esempio di questo problema è la discretizzazione dell'azione di una particella in un campo magnetico, per il quale l'unica discretizzazione che garantisce l'invarianza di Gauge è  $\frac{1}{2}(x_k + x_{k-1})$ , altre discretizzazioni rompono quest'invarianza la quale si potrebbe recuperare solamente introducendo dei contro-termini.

Questi problemi non si verificano sempre, ad esempio un sistema con un Hamiltoniana in cui si ha un termine cinetico e un termine potenziale scalare non ha nè problemi di ordinamento, in quanto un potenziale scalare non dipende dalla velocità e quindi non si vengono a creare termini misti di posizione ed impulso nel

passaggio dal formalismo Lagrangiano al formalismo Hamiltoniano, nè problemi di discretizzazione dell'azione. Per mostrare quest'ultima affermazione basta vedere che la (2.7), in cui l'Hamiltoniana ha un termine potenziale scalare, soddisfa l'equazione di Schrödinger indipendentemente dalla discretizzazione del potenziale. Per mostrare ciò consideriamo il moto unidimensionale di una particella sotto l'effetto di un potenziale  $V(x)$  in due istanti di tempo consecutivi, chiamando l'istante iniziale  $t_i = t$  e quello finale  $t_f = t + \varepsilon$  con  $\varepsilon > 0$  piccolo a piacere, in questo modo l'espressione (2.7) diventa

$$\Psi(x, t + \varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} dx_i \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \varepsilon} | x_i \rangle \Psi(x_i, t). \quad (3.4)$$

Esplicitiamo il termine  $\langle x | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \varepsilon} | x_i \rangle$

$$\begin{aligned} \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \varepsilon} | x_i \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dp}{2\pi\hbar} \langle x | p \rangle \langle p | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \varepsilon} | x_i \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dp}{2\pi\hbar} \langle x | p \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} H \varepsilon} \langle p | x_i \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left( (x - x_i)p - \frac{p^2}{2m} \varepsilon - V(x_i) \varepsilon \right) \right\} \\ &= \left( \frac{m}{2\pi\hbar i \varepsilon} \right) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \varepsilon \left( \frac{m}{2} \frac{(x - x_i)^2}{\varepsilon^2} - V(x_i) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

per cui l'espressione completa della (3.4) è

$$\Psi(x, t + \varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} dx_i \left( \frac{m}{2\pi\hbar i \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \frac{(x - x_i)^2}{\varepsilon} - \frac{i}{\hbar} \varepsilon V(x_i) \right\} \Psi(x_i, t) \quad (3.6)$$

Espandiamo  $\Psi(x, t + \varepsilon)$  secondo Taylor

$$\begin{aligned} \Psi(x, t + \varepsilon) &= \Psi(x, t) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) + o(\varepsilon^2) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx_i \left( \frac{m}{2\pi\hbar i \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \frac{(x - x_i)^2}{\varepsilon} \right\} \left( 1 - \frac{i}{\hbar} V(x_i) \varepsilon + \dots \right) \Psi(x_i, t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

se  $x$  è abbastanza differente da  $x_i$ , ovvero se il termine  $(x - x_i)^2$  non è confrontabile con  $\varepsilon$ , si ha che l'esponenziale oscilla molto rapidamente e a causa della

regolarità dei restanti membri dell'integrale, questo tenderà a 0, allora per avere una soluzione accettabile dobbiamo imporre che  $(x - x_i)^2 \sim \varepsilon$ . Adoperiamo la sostituzione  $x_i = x + \eta$ . Per cui abbiamo la (3.7) diventa

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} d\eta \left( \frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{ \frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon} \right\} \left( 1 - \frac{i}{\hbar} V(x + \eta)\varepsilon + \dots \right) \Psi(x + \eta, t) \\ &= \left( \frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} d\eta \exp\left\{ \frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon} \right\} \left( 1 - \frac{i}{\hbar} V(x)\varepsilon + \dots \right) \times \\ & \quad \times \left( \Psi(x, t) + \eta \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

da questa equazione si riconosce la non rilevanza della discretizzazione dell'azione per il potenziale  $V(x)$ , infatti nello sviluppo di Taylor del potenziale nella (3.8) i termini extra che avrebbero dato ampiezze differenti vengono trascurati in quanto di ordine superiore a  $\varepsilon$ . Infine dalla (3.8) ci si ricava direttamente l'equazione di Schrödinger unidimensionale risolvendo i seguenti integrali

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} d\eta \exp\left\{ \frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon} \right\} &= \sqrt{\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}} \\ \int_{\mathbb{R}} d\eta \eta \exp\left\{ \frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon} \right\} &= 0 \\ \int_{\mathbb{R}} d\eta \eta^2 \exp\left\{ \frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon} \right\} &= \left( \frac{i\hbar\varepsilon}{m} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

in questo modo otteniamo

$$\Psi(x, t) + \varepsilon \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} + \dots = \Psi(x, t) + \varepsilon \left( \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V(x) \right) \Psi(x, t) + \dots \quad (3.9)$$

i termini di ordine  $\varepsilon$  rappresentano proprio l'equazione di Schrödinger in una dimensione e questo prova che gli integrali sui cammini la soddisfano, dunque le funzioni espresse tramite tali integrali sono delle funzioni d'onda ben definite.

## 3.2 Weyl Ordering

Un metodo per risolvere i problemi di ordinamento descritti nel paragrafo precedente è l'ordinamento di Weyl. Per selezionare un'unico operatore hamiltoniano da una teoria classica, Weyl propose di ordinare gli operatori fondamentali  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  in tutti i modi possibili, facendone poi la media. Questo produce un ordinamento univoco. È una scelta utile, ma dignitosa in principio come ogni altra possibile scelta. Solo un'analisi del sistema quantistico può indicare quale sia la corretta Hamiltoniana quantistica del sistema sotto studio.

Viceversa si ha spesso a che fare con operatori quantistici già fissati da altre considerazioni, e ci si pone il problema di scriverli nella forma ordinata secondo Weyl. Questo, come vedremo permette di derivare e definire in modo univoco l'integrale sui cammini con una discretizzazione opportuna, la cosiddetta discretizzazione del punto intermedio.

Per descrivere come operare questa riscrittura mostriamo, attraverso degli esempi, che un operatore può sempre essere espresso in una maniera tale che la versione simmetrizzata sia esplicitata nel seguente modo

$$\hat{O}(\hat{x}, \hat{p}) = \hat{O}(\hat{x}, \hat{p})_S + \text{“altri termini”} \quad (3.10)$$

In questo modo l'operatore  $\hat{O}(\hat{x}, \hat{p})$  è iterativamente scritto in una maniera tale che  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  sono simmetrici, da qui l'utilità del suo ordinamento. Vediamone alcuni esempi. L'operatore  $\hat{x}\hat{p}$  può essere scritto in modo tale che  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  sono presenti tutti modi possibili, ovvero

$$\hat{x}\hat{p} = \frac{1}{2}\hat{x}\hat{p} + \frac{1}{2}\hat{x}\hat{p} + \frac{1}{2}\hat{p}\hat{x} - \frac{1}{2}\hat{p}\hat{x} \quad (3.11)$$

possiamo riordinare questa forma per mettere in evidenza la parte simmetrica

$$\hat{x}\hat{p} = \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}) + \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) \quad (3.12)$$



si nota facilmente che il primo termine è la parte simmetrica, infatti se invertiamo i ruoli di  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  il termine rimane invariato, mentre il secondo è la parte antisimmetrica che in questo caso coincide con il commutatore  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ . Possiamo scriverci allora l'operatore  $\hat{x}\hat{p}$  ordinato secondo Weyl,  $(\hat{x}\hat{p})_W$

$$(\hat{x}\hat{p})_W = \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}) + \frac{1}{2}i\hbar = \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p})_S + \frac{1}{2}i\hbar. \quad (3.13)$$

Quindi  $\hat{x}\hat{p} = (\hat{x}\hat{p})_W$ , ma il lato destro ci presenta l'operatore scritto in maniera Weyl ordinata. Se si vogliono ordinare operatori più complessi in cui  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  sono presenti sotto forma polinomiale o con esponenti arbitrari le cose si complicano un pò, in quanto non è sempre facile trovare la giusta scomposizione dell'operatore in modo tale che la parte simmetrica sia facilmente visibile. Un modo per risolvere questo problema è ad esempio scrivere prima l'operatore simmetrizzato in modo tale che  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  appaiano in ogni loro possibile combinazione e poi sottrarlo all'operatore non ordinato per trovarsi i cosiddetti "altri termini". Definiamo allora un operatore simmetrizzato  $\hat{S}(\hat{p}, \hat{x})$ , un operatore in cui le variabili  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  appaiono in ogni loro possibile combinazione con ugual peso, per aiutarci a fare questo facciamo uso di una formula per esprimere monomi in forma simmetrizzata, che proveremo mostrando degli esempi di operatori.

$$\prod_{i,j} (\hat{p}_i^{m_i} \hat{x}^j)^{n_j}_S = \frac{1}{N!} \prod_{i,j} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha^i} \right)^{m_i} \left( \frac{\partial}{\partial \beta_j} \right)^{n_j} (\alpha^i \hat{p}_i + \beta_j \hat{x}^j)^N \quad (3.14)$$

in cui

$$\sum m_i + \sum n_j = N.$$

Vediamo che se vogliamo simmetrizzare l'operatore utilizzato precedentemente  $(\hat{x}\hat{p})$ , con la formula (3.14), otteniamo lo stesso risultato, infatti si ha in questo

caso che  $m = 1$  e  $n = 1$ , per cui  $N = 2$ , allora abbiamo che

$$\begin{aligned}
(\hat{x}\hat{p})_S &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} (\alpha\hat{p} + \beta\hat{x})^2 \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} (\alpha^2\hat{p}^2 + \beta^2\hat{x}^2 + \alpha\beta\hat{x}\hat{p} + \alpha\beta\hat{p}\hat{x}) \\
&= \frac{1}{2} (\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})
\end{aligned} \tag{3.15}$$

che è lo stesso risultato ottenuto precedentemente. Possiamo così simmetrizzare anche operatori più complessi, vediamo ad esempio l'operatore  $\hat{x}^2\hat{p}$ , in cui abbiamo  $m = 1$  e  $n = 2$ , per cui  $N = 3$ , allora l'operatore simmetrizzato è

$$\begin{aligned}
(\hat{x}^2\hat{p})_S &= \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (\alpha\hat{p} + \beta\hat{x})^3 \\
&= \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (\alpha^3\hat{p}^3 + \alpha\beta^2\hat{p}\hat{x}^2 + \alpha^2\beta\hat{p}^2\hat{x} + \alpha^2\beta\hat{p}\hat{x}\hat{p} + \\
&\quad + \beta\alpha^2\hat{x}\hat{p}^2 + \beta^3\hat{x}^3 + \alpha\beta^2\hat{x}\hat{p}\hat{x} + \alpha\beta^2\hat{x}^2\hat{p}) \\
&= \frac{1}{3} (\hat{p}\hat{x}^2 + \hat{x}\hat{p}\hat{x} + \hat{x}^2\hat{p}).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Come possiamo notare l'espressione trovata è effettivamente simmetrica, ma si può rendere la simmetria ancora più evidente, e contemporaneamente semplificare l'espressione, sfruttando la relazione  $2\hat{x}\hat{p}\hat{x} = \hat{x}^2\hat{p} + \hat{p}\hat{x}^2$ , questa relazione vale in quanto

$$\begin{aligned}
2\hat{x}\hat{p}\hat{x} &= \hat{x}\hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p}\hat{x} \\
&= \hat{x}\hat{p}\hat{x} - \hat{x}^2\hat{p} + \hat{x}^2\hat{p} + \hat{x}\hat{p}\hat{x} - \hat{p}\hat{x}^2 + \hat{p}\hat{x}^2 \\
&= \hat{x}[\hat{p}, \hat{x}] + [\hat{x}, \hat{p}]\hat{x} + \hat{x}^2\hat{p} + \hat{p}\hat{x}^2 \\
&= \hat{x}^2\hat{p} + \hat{p}\hat{x}^2.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Allora la relazione (3.16) può essere scritta come

$$(\hat{x}^2\hat{p})_S = \frac{1}{2} (\hat{x}^2\hat{p} + \hat{p}\hat{x}^2). \tag{3.18}$$

Da questa relazione ci si ricava facilmente l'operatore ordinato secondo Weyl, in cui gli "altri termini" sono

$$\hat{x}^2\hat{p} - (\hat{x}^2\hat{p})_S = \frac{1}{2}(\hat{x}^2\hat{p} - \hat{p}\hat{x}^2) = \frac{1}{2}[\hat{x}^2, \hat{p}] = \frac{i}{2}\hbar\hat{x}. \quad (3.19)$$

La formula (3.14) non è l'unica espressione utile per esprimere un monomio simmetrizzato, infatti se ne può considerare una versione semplificata per monomi composti da sole due variabili, come nel caso dei nostri esempi. La formula ha però una particolarità, ovvero può essere espressa in due modi differenti in base a quale sia la via più conveniente nella semplificazione delle espressioni con le quali si sta lavorando. Prima di esprimere quest'espressione mostriamo con un esempio quali sono questi due modi. Consideriamo l'operatore  $\hat{x}^2\hat{p}^2$  e scriviamone la sua parte simmetrica sfruttando la formula (3.14), ed otteniamo

$$(\hat{x}^2\hat{p}^2)_S = \frac{1}{6}(\hat{x}^2\hat{p}^2 + \hat{p}^2\hat{x}^2 + \hat{x}\hat{p}^2\hat{x} + \hat{p}\hat{x}^2\hat{p} + \hat{x}\hat{p}\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}\hat{p}\hat{x}). \quad (3.20)$$

L'operatore  $\hat{x}\hat{p}\hat{x}\hat{p}$  può essere espresso come

$$\begin{aligned} 2\hat{x}\hat{p}\hat{x}\hat{p} &= \hat{x}\hat{p}\hat{x}\hat{p} + \hat{x}\hat{p}\hat{x}\hat{p} \\ &= \hat{x}\hat{p}\hat{x}\hat{p} - \hat{x}^2\hat{p}^2 + \hat{x}^2\hat{p}^2 + \hat{x}\hat{p}\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}^2\hat{p} + \hat{p}\hat{x}^2\hat{p} \\ &= \hat{x}[\hat{p}, \hat{x}]\hat{p} + \hat{x}^2\hat{p}^2 + [\hat{x}, \hat{p}]\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}^2\hat{p} \\ &= \hat{x}^2\hat{p}^2 + \hat{p}\hat{x}^2\hat{p} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Analogamente l'operatore  $\hat{p}\hat{x}\hat{p}\hat{x}$  può essere espresso, analogamente a quanto fatto per l'espressione (3.21), come  $2\hat{p}\hat{x}\hat{p}\hat{x} = \hat{p}^2\hat{x}^2 + \hat{x}\hat{p}^2\hat{x}$ . Sostituiamo nell'equazione (3.20) i due risultati appena ottenuti, ed abbiamo che

$$\begin{aligned} (\hat{x}^2\hat{p}^2)_S &= \frac{1}{6}\{\hat{x}^2\hat{p}^2 + \hat{p}^2\hat{x}^2 + \hat{x}\hat{p}^2\hat{x} + \hat{p}\hat{x}^2\hat{p} + \frac{1}{2}(\hat{x}^2\hat{p}^2 + \hat{p}^2\hat{x}^2 + \hat{x}\hat{p}^2\hat{x} + \hat{p}\hat{x}^2\hat{p})\} \\ &= \frac{1}{4}(\hat{x}^2\hat{p}^2 + \hat{p}^2\hat{x}^2 + \hat{x}\hat{p}^2\hat{x} + \hat{p}\hat{x}^2\hat{p}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Arrivati in questo punto si può procedere in due maniere differenti, o si sceglie di mantenere unite le  $\hat{x}$ , sommando e sottraendo  $\hat{p}\hat{x}^2\hat{p}$ , o di mantenere unite le  $\hat{p}$ , sommando e sottraendo  $\hat{x}\hat{p}^2\hat{x}$ . Ad esempio se volessimo tenere unite le  $\hat{p}$ , avremmo l'operatore espresso nel seguente modo

$$(\hat{x}^2\hat{p}^2)_S = \frac{1}{4}(\hat{x}^2\hat{p}^2 + \hat{p}^2\hat{x}^2 + 2\hat{x}\hat{p}^2\hat{x}) \quad (3.23)$$

in quanto sommando e sottraendo il termine  $\hat{x}\hat{p}^2\hat{x}$  nell'equazione (3.19) abbiamo che

$$\begin{aligned} \hat{p}\hat{x}^2\hat{p} - \hat{x}\hat{p}^2\hat{x} &= \hat{p}\hat{x}^2\hat{p} - \hat{x}^2\hat{p}^2 + \hat{x}^2\hat{p}^2 - \hat{x}\hat{p}^2\hat{x} + \hat{x}^2\hat{p}^2 - \hat{x}^2\hat{p}^2 \\ &= [\hat{p}, \hat{x}^2]\hat{p} + \hat{x}[\hat{x}, \hat{p}^2] = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

che mi elimina il termine  $\hat{p}\hat{x}^2\hat{p}$ . Si procede analogamente se si vogliono tenere unite le  $\hat{x}$ . Possiamo scrivere ora i due modi in cui esprimere un monomio simmetrizzato composto da due sole variabili canoniche

$$(\hat{x}^m\hat{p}^r)_S = \frac{1}{2^m} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \hat{x}^{m-l} \hat{p}^r \hat{x}^l \quad (3.25)$$

$$= \frac{1}{2^r} \sum_{l=0}^m \binom{r}{l} \hat{p}^{r-l} \hat{x}^m \hat{p}^l, \quad (3.26)$$

dove la prima espressione è la formulazione per tenere unite le  $\hat{p}$  mentre la seconda per tenere unite le  $\hat{x}$ , mentre il termine

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

è il coefficiente binomiale. La validità delle espressioni (3.25) e (3.26) può facilmente essere verificata ricavandosi nuovamente le espressioni degli operatori simmetrizzati discussi precedentemente. Grazie a quest'ultime due formule possiamo dimostrare un teorema molto importante per l'ordinamento degli operatori nello studio dell'ampiezza di transizione, questo teorema è chiamato *teorema di*

Berezin.

Il teorema di Berezin ci dice che, preso un elemento di matrice  $M = \langle x | \hat{O}(\hat{x}, \hat{p}) | y \rangle$  in cui  $\langle x |$  e  $| y \rangle$  sono autostati dell'operatore posizione  $\hat{x}$ , e definito un insieme completo di autostati momento tale per cui  $\int | p \rangle \langle p | d^n p = \mathbb{I}$  allora

$$M = \int d^n p \langle x | \hat{O} | p \rangle \langle p | y \rangle = \int d^n p \langle x | p \rangle O_W\left(\frac{1}{2}(x+y), p\right) \langle p | y \rangle. \quad (3.27)$$

L'operatore  $\hat{O}$  è equivalente a  $\hat{O}_W$  come già detto precedentemente, inoltre si può vedere che  $\hat{O}_W$  è composto da soli termini simmetrici più termini costanti, che non influiscono nell'azione degli operatori sugli autostati, possiamo far vedere questa proprietà con un esempio. Ricaviamoci gli “*altri termini*” dell'operatore  $\hat{x}^2 \hat{p}^2$  seguendo il ragionamento usato nell'espressione (3.19), in questo modo si ha

$$\begin{aligned} \hat{x}^2 \hat{p}^2 - (\hat{x}^2 \hat{p}^2)_S &= \frac{1}{4}(3\hat{x}^2 \hat{p}^2 - \hat{p}^2 \hat{x}^2 - 2\hat{x} \hat{p}^2 \hat{x}) \\ &= \frac{1}{4}(6\hat{x} \hat{p} \hat{x} \hat{p} - 3\hat{p} \hat{x}^2 \hat{p} - 2\hat{p} \hat{x} \hat{p} \hat{x} + \hat{p} \hat{x}^2 \hat{p} - 2\hat{p} \hat{x}^2 \hat{p}) \\ &= \frac{1}{4}(6\hat{x} \hat{p} \hat{x} \hat{p} - 2\hat{p} \hat{x} \hat{p} \hat{x} - 4\hat{p} \hat{x}^2 \hat{p}) \\ &= \hat{x} \hat{p} \hat{x} \hat{p} + \hat{x} \hat{p}^2 \hat{x} - \hat{p} \hat{x}^2 \hat{p} - \hat{p} \hat{x} \hat{p} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{x} \hat{p} \hat{x} \hat{p} - \frac{1}{2} \hat{x} \hat{p}^2 \hat{x} - \frac{1}{2} \hat{p} \hat{x}^2 \hat{p} + \frac{1}{2} \hat{p} \hat{x} \hat{p} \hat{x} \\ &= (\hat{x} \hat{p} - \hat{p} \hat{x})(\hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x}) + \frac{1}{2}(\hat{x} \hat{p} - \hat{p} \hat{x})(\hat{x} \hat{p} - \hat{p} \hat{x}) \\ &= 2i\hbar(\hat{x} \hat{p})_S - \frac{1}{2}\hbar^2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

che come si può notare è composto da un operatore simmetrico e un termine scalare. Quindi possiamo limitare la dimostrazione del teorema ad un operatore simmetrizzato qualsiasi. Prendiamo come operatore per dimostrare il teorema l'operatore  $(\hat{x}^m \hat{p}^r)_S$  e usiamo la forma (3.25) in cui si tengono unite le  $\hat{p}$ . Scriviamo

$M$  usando questo operatore

$$\begin{aligned}
 M &= \int d^n p \langle x | \frac{1}{2^m} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \hat{x}^{m-l} \hat{p}^l | p \rangle \langle p | \hat{x}^l | y \rangle \\
 &= \int d^n p \langle x | p \rangle \frac{1}{2^m} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} x^{m-l} p^l \langle p | y \rangle \\
 &= \int d^n p \langle x | p \rangle \left( \frac{x+y}{2} \right)^m p^r \langle p | y \rangle.
 \end{aligned}$$

Dove nel passaggio tra la secondo e terza uguaglianza si è usato il teorema di Newton. In questo modo abbiamo dimostrato il teorema e ci si è ricavata la prescrizione del punto intermedio che ci permette di valutare l'operatore nel punto intermedio delle  $x$  una volta ordinato secondo Weyl. Questa regola risulta molto utile per ricavarsi l'ampiezza di transizione ad esempio nel caso di una particella in un campo magnetico perchè, come vedremo successivamente, ci permetterà di mantenere l'invarianza di Gauge nella discretizzazione dell'azione di tale sistema.

## Capitolo 4

# Ampiezza di Transizione di Sistemi con Potenziali Non Scalari

### 4.1 Caso di una Particella in un Campo Magnetico

Come visto precedentemente lo studio di un sistema quantistico sotto l'effetto di un potenziale scalare non presenta problemi di alcun tipo, anzi si riesce a ricavare senza problemi l'equazione di Schrödinger sfruttando il propagatore (2.16), e si ha che l'Hamiltoniana di tale sistema è univoca per differenti discretizzazioni del potenziale. Questo non accade però nel caso di sistemi con potenziali generalizzati come nel caso del potenziale vettore  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ . Infatti, il primo problema si incontra nella quantizzazione canonica di un sistema composto da una particella di carica  $q$  e massa  $m$  in un campo magnetico  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ . Tale sistema ha l'Hamiltoniana

nella forma (1.18), che quantizzata canonicamente, ovvero in modo tale che le grandezze fisiche  $p_i$  e  $x^i$  diventino operatori  $\hat{p}_i$  e  $\hat{x}^i$  con la seguente regola di commutazione

$$[\hat{x}^i, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_k^i, \quad (4.1)$$

diventa

$$\hat{H}(\hat{p}, \hat{x}) = \frac{\hat{\pi}^2}{2m} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_i - q\hat{A}_i(\hat{x}))^2. \quad (4.2)$$

Se si sviluppa il termine quadratico di questa Hamiltoniana si vengono a creare dei problemi in quanto apparirebbe l'operatore  $\hat{p}\hat{A}$ ,  $\hat{A}\hat{p}$  o una loro combinazione, in base all'ordinamento che si sceglie nello sviluppo del quadrato. Il problema sta nel fatto che questi due operatori non sono uguali a causa della non commutatività di  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$ , quindi descrivono Hamiltoniane differenti e rappresentanti la versione quantizzata dello stesso sistema classico. Quello che ora ci prefissiamo come obiettivo è di trovare quale sia l'ordinamento più conveniente nello studio di tale sistema. Classicamente l'operatore  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})$  può essere riscritto come

$$p_i A^i(\mathbf{x}) = \alpha A^i(\mathbf{x}) p_i + (1 - \alpha) p_i A^i(\mathbf{x}), \quad (4.3)$$

dove  $\alpha$  può assumere qualsiasi valore. Le versioni operatoriali delle espressioni appena ottenute sono

$$\hat{p}_i \hat{A}^i \neq \alpha \hat{A}^i \hat{p}_i + (1 - \alpha) \hat{p}_i \hat{A}^i = \hat{p}_i \hat{A}^i + \alpha i\hbar \partial_i \hat{A}^i, \quad (4.4)$$

da qui si può facilmente vedere che diverse scelte di ordinamento producono diversi operatori. La scelta dell'ordinamento da usare può essere guidata da simmetrie presenti nel sistema, ad esempio nel nostro caso possiamo sfruttare la simmetria di Gauge, la quale è mantenuta solamente per il valore  $\alpha = 1/2$ , infatti per questo valore l'Hamiltoniana ha una forma Gauge covariante

$$\hat{H}(\hat{p}, \hat{x}) = \frac{1}{2m}(\hat{p}_i^2 + q^2 \hat{A}_i^2 - q\hat{p}_i \hat{A}^i - q\hat{A}^i \hat{p}_i) \quad (4.5)$$



riscrivibile come

$$\hat{H}(\hat{p}, \hat{x}) = \frac{\hat{\pi}_i \hat{\pi}^i}{2m}. \quad (4.6)$$

Vediamo ora come differenti discretizzazioni del potenziale vettore influenzano l'azione. Per prima cosa scriviamo l'azione discretizzata del nostro sistema

$$S(\mathbf{x}_k) = \delta t \sum_{k=1}^N \left( \frac{m (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1})^2}{2 \delta t^2} + q A_i(\mathbf{x}_{k-1}) \frac{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1})}{\delta t} \right). \quad (4.7)$$

Occorre però fare delle correzioni a questa forma, la prima sta nel fatto che diverse discretizzazioni del potenziale vettore danno soluzioni diverse per l'ampiezza di transizione, per cui rimane utile parametrizzare il potenziale vettore come  $A_i(\mathbf{x}_{k,\alpha})$ , dove  $\mathbf{x}_{k,\alpha}$  è un punto intermedio nell'intervallo  $[\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k]$  che possiamo definire come

$$\mathbf{x}_{k,\alpha} = \mathbf{x}_{k-1} + (1 - \alpha)\mathbf{x}_k, \quad (4.8)$$

per qualsiasi valore di  $\alpha$ , inoltre consideriamo il tempo euclideo che ci permette di avere un'azione euclidea, quindi eseguiamo la trasformazione  $\delta t \rightarrow -i\delta t$ . Con queste correzioni otteniamo la seguente azione

$$S(\mathbf{x}_k) = i\delta t \sum_{k=1}^N \left( \frac{m (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1})^2}{2 \delta t^2} - iq A_i(\mathbf{x}_{k,\alpha}) \frac{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1})}{\delta t} \right). \quad (4.9)$$

In questo modo abbiamo diverse azioni in base alla discretizzazione scelta, per cui diverse ampiezze di transizione corrispondenti a diverse Hamiltoniane, che denotiamo con  $\hat{H}_\alpha$ , a simboleggiare l'indiretta dipendenza da  $\alpha$ . Il propagatore di una particella tra due punti,  $\mathbf{x}_k$  e  $\mathbf{x}_{k-1}$ , in un intervallo temporale  $\delta t$  è, in base a quanto studiato nel secondo capitolo,

$$\langle \mathbf{x}_k | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_\alpha} | \mathbf{x}_{k-1} \rangle = \left( \frac{m}{2\pi\hbar\delta t} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{\delta t}{\hbar} \left( \frac{m (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1})^2}{2 \delta t^2} - iq A_i(\mathbf{x}_{k,\alpha}) \frac{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1})}{\delta t} \right) \right\} \quad (4.10)$$

Per cui la funzione d'onda evoluta per un tempo infinitesimo  $\varepsilon$ , con stato iniziale  $|\Psi(t)\rangle$ , e posizione iniziale  $\mathbf{x}_i$  è

$$\Psi(\mathbf{x}, t + \varepsilon) = \int d\mathbf{x}_i \langle \mathbf{x} | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_\alpha \varepsilon} | \mathbf{x}_i \rangle \Psi(\mathbf{x}_i, t). \quad (4.11)$$

Essendo  $\varepsilon$  infinitesimo possiamo sviluppare la funzione d'onda secondo Taylor, inoltre, analogamente a quanto descritto per l'equazione (3.8), se questa variazione temporale è infinitesima l'argomento dell'esponenziale,  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^2/\varepsilon$ , non presenta problemi solamente se  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^2 \sim \varepsilon$ , per cui adoperiamo il cambio di variabile  $\eta = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}$ . Questo cambio di variabile agisce sulla discretizzazione del potenziale vettore come

$$\mathbf{x}_\alpha = \alpha \mathbf{x}_i + (1 - \alpha) \mathbf{x} = \mathbf{x} + \alpha \eta \quad (4.12)$$

per cui possiamo sviluppare  $A_i(\mathbf{x}_\alpha) = A_i(\mathbf{x} + \alpha \eta)$  secondo Taylor, ottenendo,

$$A_i(\mathbf{x} + \alpha \eta) = A_i(\mathbf{x}) + \alpha \eta^j \partial_j A_i(\mathbf{x}) + \dots \quad (4.13)$$

Possiamo ora espandere la funzione d'onda (4.11) secondo Taylor, prima in un intorno di  $t$ , poi in un intorno di  $\mathbf{x}$ , ed otteniamo

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}, t + \varepsilon) &= \Psi(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t) + o(\varepsilon^2) \\ &= \left( \frac{m}{2\pi\hbar\delta t} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} d\eta \exp \left\{ -\frac{\delta t}{\hbar} \left( \frac{m}{2} \frac{\eta_i \eta^i}{\delta t^2} + iq A_i(\mathbf{x} + \alpha \eta) \frac{\eta^i}{\delta t} \right) \right\} \Psi(\eta + \mathbf{x}, t) \\ &= \left( \frac{m}{2\pi\hbar\delta t} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} d\eta \exp \left\{ -\frac{m}{2\hbar} \frac{\eta_i \eta^i}{\delta t} \right\} \exp \left\{ -i \frac{q}{\hbar} (A_i(\mathbf{x}) + \alpha \eta^j \partial_j A_i(\mathbf{x}) + \dots) \eta^i \right\} \times \\ &\quad \times (\Psi(\mathbf{x}, t) + \eta^i \partial_i \Psi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \eta^i \eta^j \partial_i \partial_j \Psi(\mathbf{x}, t)) \\ &= \left( \frac{m}{2\pi\hbar\delta t} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} d\eta \exp \left\{ -\frac{m}{2\hbar} \frac{\eta_i \eta^i}{\delta t} \right\} \left( 1 - i \frac{q}{\hbar} A_i(\mathbf{x}) \eta^i - \frac{1}{2} \frac{q^2}{\hbar^2} \eta_i \eta_j A^i A^j - \alpha \frac{q^2}{\hbar^2} \eta_i \eta_j \partial^i A^j \right) \times \\ &\quad \times (\Psi(\mathbf{x}, t) + \eta^i \partial_i \Psi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \eta^i \eta^j \partial_i \partial_j \Psi(\mathbf{x}, t)) \\ &= \Psi(\mathbf{x}, t) + \frac{\varepsilon \hbar}{2m} (\nabla^2 - q^2 \mathbf{A}^2 - 2iq \mathbf{A} \cdot \nabla - 2i\alpha q \nabla \cdot \mathbf{A}) \Psi(\mathbf{x}, t) + o(\varepsilon^2). \quad (4.14) \end{aligned}$$

Il procedimento seguito è analogo a quello svolto per mostrare la non dipendenza della discretizzazione nel caso di un potenziale scalare, equazione (3.8), inoltre gli integrali svolti sono tutti integrali Gaussiani nella forma

$$\int_{\mathbb{R}} dx x^n e^{-x^2}. \quad (4.15)$$

Dall'espressione (4.14) possiamo finalmente scriverci l'Hamiltoniana dipendente dal parametro  $\alpha$ ,

$$\hat{H}_\alpha = -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla - iq\mathbf{A})^2 - i\frac{q\hbar}{m}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\nabla \cdot \mathbf{A}, \quad (4.16)$$

come si può notare per  $\alpha = 1/2$  si recupera la forma covariante dell'Hamiltoniana, stesso valore trovato dalle ambiguità di ordinamento tra  $\hat{p}$  e  $\hat{A}(\hat{x})$ . Questo valore è ora venuto fuori dal problema della discretizzazione del potenziale vettore. Per  $\alpha = 1/2$  l'Hamiltoniana diventa

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla - iq\mathbf{A})^2 = \frac{\hat{\pi}_i \hat{\pi}^i}{2m} \quad (4.17)$$

in questo modo abbiamo trovato anche una formulazione per la derivata covariante di una funzione d'onda, ovvero

$$\hat{\pi} \rightarrow -i\hbar(\nabla - iq\mathbf{A}). \quad (4.18)$$

Nessuno impedisce di usare di usare Hamiltoniane che non mantengono la simmetria di Gauge, ma in tal caso andranno aggiunti termini extra per recuperarla, e questi termini sono proprio  $iq\hbar/m(\alpha - \frac{1}{2})\nabla \cdot \mathbf{A}$ . Rimane ora da ricavare l'ampiezza di transizione di questo sistema, per farlo, discretizziamo il potenziale vettore con la regola del punto intermedio che ci garantisce le simmetrie di Gauge, e ordiniamo l'Hamiltoniana con il metodo di Weyl, potendo così sfruttare il teorema di Berezin discusso nel Capitolo 3, che ci permette di valutare un elemento di

matrice come descritto dall'espressione (3.27). Per cui possiamo esprimere

$$\langle x_k | \left( \exp \left( -i \frac{\delta t}{\hbar} \hat{H}(\hat{p}, \hat{x}) \right) \right) | x_{k-1} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{dp}{2\pi\hbar} \langle x_k | p \rangle \left( \exp \left( -i \frac{\delta t}{\hbar} H \left( p, \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \right) \right) \right)_W \langle p | x_{k-1} \rangle \quad (4.19)$$

inoltre si verifica facilmente che al primo ordine in  $\delta t$  l'ordinato di Weyl dell'operatore esponenziale coincide con l'esponenziale dell'operatore riordinato secondo Weyl, infatti per un tempo infinitesimo  $\delta t$ , e un operatore generico  $\hat{O}$  si ha

$$\left( e^{\delta t \hat{O}} \right)_W = (\mathbb{I} + \delta t \hat{O} + o(\delta t^2))_W = \mathbb{I} + (\delta t \hat{O})_W + o(\delta t^2) = e^{\delta t \hat{O}_W} \quad (4.20)$$

per cui della sola cosa di cui si ha bisogno è l'Hamiltoniana riordinata secondo Weyl, e si ha che il propagatore assume la forma (2.15) con l'unica differenza che questa volta l'Hamiltoniana è riordinata secondo Weyl, inoltre possiamo richiedere il tempo euclideo così da avere anche un'azione euclidea. Dall'argomento dell'esponenziale della (2.15) ci possiamo scrivere l'azione discretizzata

$$\delta t \sum_{k=0}^N \left( -ip_k \frac{x_k - x_{k-1}}{\delta t} + H_W \left( \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k), p_k \right) \right) \quad (4.21)$$

che nel limite del continuo vale

$$S[x(t), p(t)] = \int_0^t dt' (-ip\dot{x} + H_W(p, x)). \quad (4.22)$$

Date queste definizioni possiamo ricavarci l'integrale sui cammini per evoluzioni temporali di tempo infinitesimo, quindi avremo un  $\beta > 0$  piccolo a piacere, e lavoreremo direttamente nel limite del continuo, proprio per sfruttare la formulazione dell'integrale sui cammini

$$\langle x_{fin} | e^{-\frac{\beta}{\hbar} \hat{H}(\hat{p}, \hat{x})} | x_{in} \rangle = \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \mathcal{D}[x(t)] e^{-\frac{1}{\hbar} S[x(t)]}. \quad (4.23)$$

L'utilità degli integrali sui cammini sta proprio nel fatto che possiamo lavorare direttamente con l'azione, e risolvere, come in questo caso, l'integrale attraverso

metodi perturbativi. Iniziamo la trattazione eseguendo il cambio di variabile  $\tau = t/\beta$ , scalando così il tempo in modo da avere l'intervallo di propagazione  $[0, 1]$  e imponiamo le condizioni al contorno  $x^i(0) = x^i$  e  $x^i(1) = y^i$ . Il cammino tra questi due punti può essere espresso come la geodetica classica di tale spazio, che essendo  $\mathbb{R}^3$  si tratta di una semplice retta, più una funzione che mi varia il cammino, che possiamo associare a fluttuazioni quantistiche, le quali vengono imposte nulle agli estremi, per cui possiamo esprimere un generico cammino tra questi due punti come

$$x^i(\tau) = x_{cl}^i(\tau) + q^i(\tau) \quad x_{cl}^i(\tau) = x^i + \eta^i \tau \quad (4.24)$$

dove  $\eta^i = y^i - x^i$ . In questo modo l'azione assume la forma

$$\begin{aligned} S[x(t)] &= \int_0^\beta dt \left( \frac{m}{2} \dot{x}_i \dot{x}^i - iq A_j \dot{x}^j \right) \\ &= \int_0^1 d\tau \left( \frac{m}{2\beta} \dot{x}_i \dot{x}^i - iq A_j \dot{x}^j \right) \\ &= \int_0^1 d\tau \left( \frac{m\eta_i \eta^i}{2\beta} + \frac{m}{2\beta} \dot{q}_i \dot{q}^i - iq((\eta^i + \dot{q}^i)(A_i + (\eta^j \tau + q^j) \partial_j A_i + \dots)) \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Dove si è sviluppato il potenziale vettore in quanto ha una dipendenza esplicita da  $x^i(t)$  che con i cambi di variabili fatti precedentemente assume la forma  $A_i(x^i + \eta^i \tau + q^i(t))$  per cui è stato espanso nell'intorno di  $x^i$ . L'azione in questa forma può essere divisa in due termini, il primo che rappresenta la particella libera, mentre il secondo la sua interazione con il campo magnetico, che tratteremo come perturbazione, così abbiamo

$$S[x(t)] = S_0[x(t)] + S_{int}[x(t)] \quad (4.26)$$

dove

$$S_0[x(t)] = \int_0^1 d\tau \left( \frac{m\eta_i \dot{\eta}^i}{2\beta} + \frac{m}{2\beta} \dot{q}_i \dot{q}^i \right) \quad (4.27)$$

$$S_{int}[x(t)] = - \int_0^1 d\tau i q (\eta^i + \dot{q}^i) (A_i + (\eta^j \tau + q^j) \partial_j A_i + \dots) \quad (4.28)$$

allora lo sviluppo perturbativo del propagatore, all'ordine di  $\beta$  è, il propagatore imperturbato moltiplicato per lo sviluppo della perturbazione, si ha quindi

$$\frac{1}{(2\pi\beta\hbar)^{3/2}} e^{-\frac{m}{2\beta\hbar}\eta^2} \langle e^{-\frac{1}{\hbar}S_{int}} \rangle \quad (4.29)$$

$$\frac{1}{(2\pi\beta\hbar)^{3/2}} e^{-\frac{m}{2\beta\hbar}\eta^2} \left( 1 - \frac{1}{\hbar} \langle S_{int} \rangle + \frac{1}{2\hbar^2} \langle S_{int} \rangle^2 + \dots \right) \quad (4.30)$$

dobbiamo solamente valutare il valore di aspettazione della perturbazione, che è

$$\langle S_{int} \rangle = -iq\eta^i A_i - \frac{i}{2} \eta^i \eta^j \partial_j A_i - iq \int_0^1 d\tau \langle \dot{q}^i(\tau) q^j(\tau) \rangle \partial_j A_i + \dots, \quad (4.31)$$

mentre il termine al secondo ordine perturbativo si deriva semplicemente elevando al quadrato l'equazione (4.31) trascurando i termini di ordine maggiore a  $\eta^2$  questo perchè si è richiesta una precisione di  $\beta$ , e come detto ripetutamente nei paragrafi precedenti  $\beta \sim \eta^2$ , per cui il secondo ordine perturbativo è

$$\langle S_{int} \rangle^2 = -\frac{1}{2} q^2 A_i A_j \eta^i \eta^j - \frac{1}{2} q^2 A_j A_i \int_0^1 \int_0^1 d\tau d\tau' \langle \dot{q}(\tau) \dot{q}(\tau') \rangle + \dots. \quad (4.32)$$

Il problema che sorge ora sta nel valutare gli integrali, in quanto gli integrandi sono funzioni generalizzate, e quindi difficilmente integrabili, inoltre sono funzioni non regolari essendo il valore di aspettazione di punti nello spazio descritti da delle delta di Dirac. E' importante adesso la scelta di uno schema di regolarizzazione per valutare queste funzioni, che scegliamo essere la prescrizione del punto intermedio, questo non è però l'unico modo di regolarizzare tali funzioni. In base agli scopi che si vogliono raggiungere si possono usare regolarizzazioni differenti.

Secondo questa regolarizzazione la funzione  $\langle q(\tau)q(\tau') \rangle$  può essere espressa nel seguente modo

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle q^i(\tau)q^j(\tau') \rangle = -\hbar\delta^{ij}\delta(\tau - \tau') \quad (4.33)$$

ora sfruttando la trasformata di Green dell'operatore  $\partial^2/\partial t^2$ , e le condizioni al contorno per le quali la funzione  $q(\tau)$  si annulla, abbiamo

$$\langle q^i(\tau)q^j(\tau') \rangle = -\hbar\beta\delta^{ij}[(\tau - 1)\tau'\theta(\tau - \tau') + (\tau' - 1)\tau\theta(\tau' - \tau)] \quad (4.34)$$

dove  $\theta(x)$  è la funzione di Heaviside, che vale 0 per  $x < 0$  e 1 per  $x > 0$ . Nel nostro caso serve però la derivata di questa funzione, che è

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle q^i(\tau)q^j(\tau') \rangle = \langle \dot{q}^i(\tau)q^j(\tau') \rangle = -\hbar\beta\delta^{ij}[\tau' - \theta(\tau' - \tau)] \quad (4.35)$$

per il primo integrale, mentre per il secondo dobbiamo derivare quest'espressione per  $\tau'$  ottenendo

$$\frac{\partial}{\partial \tau'} \langle \dot{q}^i(\tau)q^j(\tau') \rangle = \langle \dot{q}^i(\tau)\dot{q}^j(\tau') \rangle = -\hbar\beta\delta^{ij}[1 - \delta(\tau' - \tau)]. \quad (4.36)$$

Nello svolgimento di queste derivate si è usata la proprietà della funzione di Heaviside per la quale la sua derivata in senso distribuzionale è la delta di Dirac. Infine abbiamo che la funzione di Heaviside in 0 vale 1/2, per la prescrizione del punto intermedio. In questo modo gli integrali delle espressioni (4.31) e (4.32) sono facilmente calcolabili ed otteniamo finalmente il propagatore per una particella in un campo magnetico

$$K(x, x_i) = \frac{1}{(2\pi\hbar\beta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{m}{2\beta\hbar}\eta^2} (1 + iq\eta^i A_i + i\frac{q}{\hbar}\partial_j A_i \eta^j \eta^i - \frac{q^2}{2\hbar^2} A_i A_j \eta^i \eta^j + \dots) \quad (4.37)$$

che rappresenta il propagatore di una particella in uno spazio infinitesimo  $\eta$  per un tempo infinitesimo  $\beta$  sotto l'effetto di un campo magnetico che ne perturba il suo moto libero ricavato direttamente nel limite del continuo. Quanto appena ricavato è una soluzione non ambigua per l'ampiezza di transizione.

## 4.2 Caso di una Particella in uno Spazio Curvo

Per lo studio dell'ampiezza di transizione di una particella quantistica in uno spazio curvo, iniziamo quantizzando canonicamente il sistema. Per prima cosa scriviamoci l'Hamiltoniana, come ce la siamo ricavata nell'espressione (1.44) considerando anche la possibile presenza di un potenziale scalare che agisce sulla particella, per cui abbiamo

$$H(p, x) = \frac{1}{2m} g^{ij}(x) p_i p_j + V(x). \quad (4.38)$$

Come si può notare il termine  $g^{ij}(x) p_i p_j$  presenta problemi di ordinamento operatoriali nel momento che il sistema viene quantizzato, problema riconducibile all'ordinamento di operatori associati a funzioni del tipo  $f(x)p^2$ . Un problema simile è stato risolto nel paragrafo precedente richiedendo che l'Hamiltoniana soddisfacesse le simmetrie di Gauge, in quanto soddisfatte anche a livello classico, e fissando un'Hamiltoniana univoca nel caso quantistico. Negli spazi curvi potremo usufruire della simmetria data dall'invarianza per cambio di sistema di coordinate, chiamata precedentemente simmetria di *background*. In questo modo l'Hamiltoniana è fissata a meno di un termine proporzionale allo scalare di curvatura  $R(x)$ , definito come

$$R = g^{kl} \left( \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^j}{\partial x_l} + \Gamma_{kl}^i \Gamma_{ij}^j - \Gamma_{ki}^j \Gamma_{lj}^i \right) = -g^{ij} g^{kl} R_{ikjl} \quad (4.39)$$

dove  $R_{ikjl}$  è il tensore di Riemann, o tensore di curvatura. Possiamo scrivere l'operatore Hamiltoniano come

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} g^{-1/4} \hat{p}_i g^{1/2} g^{ij} \hat{p}_j g^{-1/4} + V(\hat{x}) + \alpha \hbar^2 R, \quad (4.40)$$

anche se noi la useremo con  $\alpha = 0$ . Infatti altre scelte di  $\alpha$  possono essere incorporate nel termine del potenziale scalare, quindi la scelta  $\alpha = 0$  non è stringente ai



nostri fini. Per verificare che l'operatore  $\hat{H}$  sopra definito è covariante per cambio di coordinate, occorre esplicitare le proprietà di ortogonalità e completezza degli autostati posizione in modo da avere il prodotto di due stati  $|\Psi_1\rangle$  e  $|\Psi_2\rangle$  nella forma

$$\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle = \int d^4x \sqrt{g} \Psi_1^* \Psi_2. \quad (4.41)$$

dove si è indicato con  $g = \det g_{ij}$ . Per mantenere questa forma gli autostati posizione devono soddisfare le seguenti proprietà

$$\langle x|y\rangle = \delta^4(x-y) g^{-\frac{1}{2}} \quad (4.42)$$

$$\int d^4x \sqrt{g} |x\rangle\langle x| = \mathbb{I}. \quad (4.43)$$

In questo modo l'operatore impulso, nella rappresentazione delle posizioni, diventa

$$\hat{p}_i = -i\hbar g^{-1/4} \frac{\partial}{\partial x^i} g^{1/4}. \quad (4.44)$$

Sostituito nella (4.40), con  $\alpha = 0$ , si ottiene l'Hamiltoniana come un operatore differenziale della forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} g^{-1/2} \partial_i g^{1/2} g^{ij} \partial_j + V(x) \quad (4.45)$$

che è una ben nota forma di un operatore scalare, cioè invariante per cambio di coordinate. Infatti è riscrivibile come

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \nabla^i \nabla_i + V(x) \quad (4.46)$$

quando agente su funzione scalari (qui  $\nabla_i$  rappresenta la derivata covariante).

Equivalentemente, in modo più formale, possiamo eseguire la trasformazione  $x^i \rightarrow x'^i = x^i + \eta^i$  sotto cui l'operatore impulso varia nel seguente modo

$$\hat{p}'_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \hat{p}_i - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}, \hat{p}_i \right], \quad (4.47)$$

in cui il commutatore è nella forma

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}, \hat{p}_i \right] &= i\hbar \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^k \partial x'^j} = i\hbar \frac{\partial}{\partial x'^j} \ln \left( \det \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \right) \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} \ln \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| \right). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Espicite queste grandezze possiamo calcolarci il termine  $(g')^{1/4} \hat{p}'_i (g')^{-1/4}$  utilizzando anche la relazione  $g'(x') = |\partial x / \partial x'|^2 g(x)$ , in questo modo abbiamo

$$\begin{aligned} (g')^{1/4} \hat{p}'_i (g')^{-1/4} &= g^{1/4} \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^{\frac{1}{2}} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \left( \hat{p}_j - \frac{1}{2} i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} \ln \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| \right) \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^{-\frac{1}{2}} g^{-1/4} \\ &= g^{1/4} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \hat{p}_j g^{-1/4} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} g^{1/4} \hat{p}_j g^{-1/4}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Il calcolo analogo va svolto per il termine  $(g')^{-1/4} \hat{p}'_i (g')^{1/4}$ , che in questo caso è  $(g')^{-1/4} \hat{p}'_i (g')^{1/4} = (\partial x^j / \partial x'^i) g^{-1/4} \hat{p}_j g^{1/4}$ . Possiamo ora mostrare l'invarianza dell'Hamiltoniana per cambio di coordinate, infatti

$$\hat{H}' = \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} g^{-1/4} \hat{p}_j g^{1/4} \right) \left( \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x'^j}{\partial x^n} g^{mn} \right) \left( \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} g^{1/4} \hat{p}_j g^{-1/4} \right) = \hat{H}. \quad (4.50)$$

Trovato il modello quantistico che preserva l'invarianza per cambio di coordinate, definito dall'Hamiltoniana (4.40) con  $\alpha = 0$ , ci poniamo ora il problema di definire correttamente l'integrale funzionale. Per sfruttare il teorema di Berezin, occorre riordinare l'Hamiltoniana per scriverla nella forma ordinata secondo Weyl, che risulta essere

$$\hat{H}_W = \frac{1}{2m} (g^{ij} \hat{p}_i \hat{p}_j)_S - \frac{\hbar^2}{8} (R - g^{ij} \Gamma_{il}^k \Gamma_{jk}^l) + V. \quad (4.51)$$

A questo punto l'azione euclidea discretizzata presente dell'argomento dell'ampiezza di transizione come definita nell'equazione (4.19) è

$$S[x_k, p_k] = \frac{\delta t}{\hbar} \sum_{k=1}^N \left( -ip_k \frac{x_k - x_{k-1}}{\delta t} + H_W \left( \frac{1}{2} (x_{k-1} + x_k), p_k \right) \right), \quad (4.52)$$

dove compare la funzione Hamiltoniana  $H_W$ , ottenuta dall'operatore Hamiltoniano scritto nella forma Weyl ordinata,

$$H_W = \frac{1}{2m} g^{ij} p_i p_j + V - \frac{\hbar^2}{8} (R - g^{ij} \Gamma_{il}^k \Gamma_{jk}^l), \quad (4.53)$$

valutato naturalmente con la prescrizione del punto intermedio. Il termine  $-\hbar^2/8(R - g^{ij} \Gamma_{il}^k \Gamma_{jk}^l)$ , gioca il ruolo di *contro termine* utile per recuperare l'invarianza per cambio di sistema di coordinate che si perderebbe regolarizzando l'ampiezza di transizione come fatto precedentemente.

Possiamo naturalmente eliminare i momenti e scrivere l'ampiezza di transizione nello spazio delle configurazioni, sia a livello discretizzato che prendendo il limite del continuo. In quest'ultimo caso l'azione assume la forma

$$S[x(\tau)] = \int d\tau \left( \frac{m}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + V - \frac{\hbar^2}{8} (R - g^{ij} \Gamma_{il}^k \Gamma_{jk}^l) \right), \quad (4.54)$$

per cui l'ampiezza di transizione nello spazio delle configurazioni diventa

$$K(x_f, x_i) = \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\frac{1}{\hbar} S[x(\tau)]} \quad (4.55)$$

dove la misura  $\mathcal{D}x(t)$  contiene la metrica ed assume la forma

$$\mathcal{D}x(\tau) = \prod_{0 < \tau < 1} \sqrt{\det g_{ij}(x(\tau))} d^4 x(\tau). \quad (4.56)$$

Naturalmente nel calcolo di quest'ultimo integrale direttamente nel limite del continuo, eventuali ambiguità sono risolte ritornando alla discretizzazione di punto intermedio.

# Conclusioni

In questo lavoro di tesi sono stati inizialmente studiati dei sistemi classici non relativistici di particelle interagenti con potenziali scalare, vettore e tensore (metrica) in termini del principio di azione, fondamentale nella trattazione degli integrali sui cammini, e mettendo in evidenza eventuali simmetrie presenti all'interno del sistema.

Dalla quantizzazione canonica di questi sistemi sono emersi problemi di ordinamento operatoriali che ci hanno costretto a selezionare la teoria quantistica più adeguata per lo studio del problema, spesso coincidente con quella che conserva le simmetrie del sistema. Nel momento in cui vengono studiati questi sistemi tramite la formulazione degli integrali sui cammini sorge un altro problema analogo al precedente, ma che riguarda in che modo l'azione viene discretizzata.

Questi problemi sono stati risolti partendo dalla formulazione canonica scelta, riordinando l'Hamiltoniana in forma Weyl ordinata e derivando l'ampiezza di transizione utilizzando il teorema di Berezin, che ci ha permesso di fissare una discretizzazione per l'Hamiltoniana secondo la prescrizione del punto intermedio. Come si è visto, nel caso dell'ampiezza di transizione di una particella interagente con un campo magnetico, questa è la prescrizione che preserva le simmetrie di Gauge. Viceversa, nel caso di spazio curvo abbiamo visto come questa discretizzazione non rispetti la covarianza per cambio di coordinate, ma il riordinamento di

Weyl ha prodotto termini extra non covarianti, non presenti nell'azione classica, il cui ruolo è di ristabilire la covarianza e produrre il corretto risultato finale.

Questo ci ha permesso di ricavare in modo univoco gli integrali funzionali e permettercene l'uso senza ambiguità.

# Bibliografia

- [1] R. P. Feynman e A. R. Hibbs, “Quantum Mechanics and Path Integral”, McGraw-Hill, New York, 1965
- [2] R. P. Feynman, *Reviews of Modern Physics* 20, (1948) 367
- [3] A. Zee, “Quantum Field Theory in a Nutshell”, Princeton University Press, New Jersey, 2010
- [4] F. Bastianelli e P. V. Nieuwenhuizen, “Path Integrals and Anomalies in Curved Space”, Cambridge University Press, New York, 2006