

**ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITA' DI BOLOGNA**

SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA
- Sede di Forlì -

CORSO DI LAUREA
IN INGEGNERIA MECCANICA
Classe: L-9

ELABORATO FINALE DI LAUREA

In Controlli Automatici

**Controllo di un impianto ad aria
compressa per limitare gli avviamenti
del compressore mediante regolatore
misto retroazione-azione in avanti**

CANDIDATO
Emanuele Pesaresi

RELATORE
Prof. Ing. Matteo Zanzi

Anno Accademico 2014/2015
Sessione II

Indice

| | |
|---|-------------|
| 1) Sommario e Obiettivi | pag.4 |
| 2) Introduzione | pag.5 |
| 2.1 Diagramma $P - V$ del compressore | pag.6-9 |
| 2.2 Grandezze note e grandezze calcolabili | pag.10 |
| 3) Dimensionamento serbatoio di accumulo | pag.11-12 |
| 4) Progetto del sistema di controllo | |
| 4.1 Regolazione dello spazio nocivo | pag.13-25 |
| 4.2 Schema a blocchi dell' impianto senza sistema di controllo di modifica del volume nocivo | pag.26-27 |
| 4.3 Schema a blocchi dell' impianto con sistema di controllo di modifica del volume nocivo | pag.28 |
| 4.3.1 Introduzione ai blocchi: scelta dei parametri | pag.29-31 |
| 4.3.2 Blocco del serbatoio di accumulo | pag.32-33 |
| 4.3.3 Blocco del servo di posizione | pag.34-37 |
| 4.3.4 Blocco del compressore | pag.38-39 |
| 4.3.5 Blocco del regolatore | pag.40-41 |
| 4.3.6 Blocco del flussimetro e del manometro | pag.42 |
| 4.3.7 Blocco dell'utenza | pag.43-44 |
| 4.4 Simulazione dell' impianto senza sistema di controllo di modifica del volume nocivo | pag.45-47 |
| 4.5 Simulazione dell' impianto con sistema di controllo di modifica del volume nocivo | pag.48-50 |
| 4.6 Perfezionamento dell' impianto con sistema di controllo di modifica del volume nocivo | pag.51-60 |
| 5) Risparmio economico | |
| 5.1 Scelta del motore elettrico del compressore | pag.61-89 |
| 5.2 Scelta del motorino elettrico per la variazione del volume nocivo e di altre componenti del sistema | pag.90-116 |
| 5.3 Analisi del risparmio economico | pag.117-132 |
| 6) Soluzione alternativa per il sistema di controllo del volume nocivo | pag.133-134 |
| 7)Conclusioni | pag.135-137 |
| 8)Bibliografia | pag.139 |

1) Sommario e Obiettivi

In questo lavoro di tesi verrà presentato il progetto di un sistema di controllo della pressione dell'aria compressa in un serbatoio. In particolare, dopo aver introdotto gli impianti ad aria compressa e mostrato i vari parametri di tali impianti, si vedrà un modo di progettare un sistema di controllo che permetta di inviare all'utenza una portata di aria che consenta di mantenere costante la pressione nel serbatoio di accumulo, dal quale l'utenza preleva la portata. Il sistema permetterà di variare all'occorrenza lo spazio nocivo (o volume nocivo) del compressore volumetrico dell'impianto, in base a quanto volume d'aria viene richiesto ad ogni ciclo di mandata dall'utenza (volume d'aria per ciclo o portata d'aria); in generale i compressori di questo tipo di impianti possono essere o volumetrici o rotativi, ma in questo lavoro di tesi ci si concentrerà su compressori volumetrici.

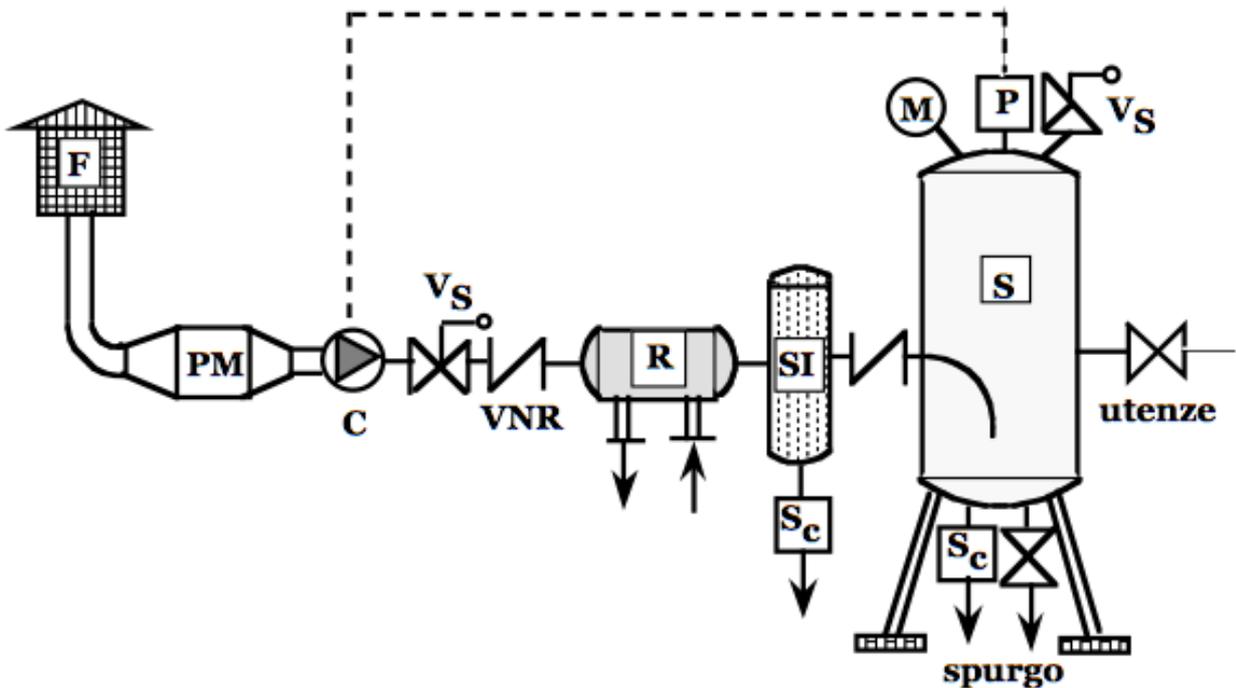
Il sistema servirà a fare in modo come detto di mantenere la pressione nel serbatoio costante, per evitare dannose sovrappressioni al suo interno (o al contrario pressioni troppo basse), che con l'ausilio di pressostati inducono lo spegnimento del compressore (pressioni troppo basse al contrario ne inducono l'accensione se spento), con successivo riavviamento. Quindi il sistema aiuterà a limitare il più possibile il numero di avviamenti, riducendo il consumo energetico dovuto alle correnti di spunto ed evitando di danneggiare il compressore.

Per verificare il corretto funzionamento del sistema si utilizzerà un modello simulato del sistema di controllo della pressione nel serbatoio realizzato in ambiente software Simulink.

Verrà infine anche quantificato il risparmio economico che si ottiene con l'introduzione del sistema.

2) INTRODUZIONE

Un impianto ad aria compressa può essere così schematizzato:

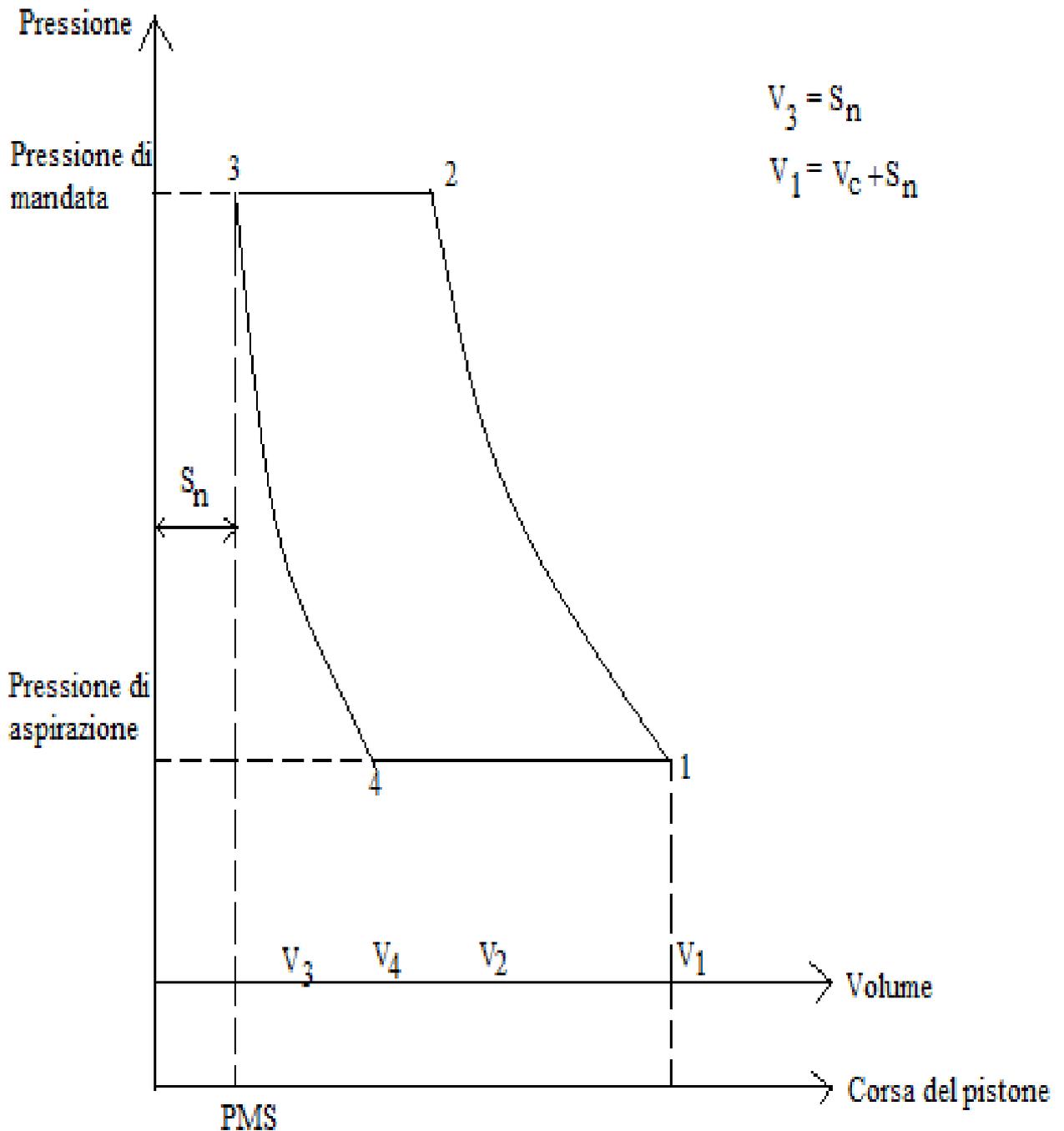


L'aria viene prelevata dall' ambiente e filtrata (F). E' poi presente un polmone smorzatore (PM) che permette di evitare fenomeni di risonanza, il compressore (C), che in generale può essere o volumetrico (per piccole portate, alti rapporti di compressione) o rotativo (per grandi portate, bassi rapporti di compressione), ma come detto nel paragrafo 1 in questo lavoro di tesi si considereranno compressori volumetrici; a valle del compressore è posizionata una valvola di sicurezza (VS), una valvola di non ritorno (VNR) per evitare flussi di ritorno, un refrigeratore (R) che permette di raffreddare l'aria e riportarla a temperatura ambiente dato che all'uscita dal compressore può raggiungere temperature anche elevate, uno scaricatore di condensa (SI), una valvola di non ritorno ed infine il serbatoio di accumulo, da cui l'utenza preleva l'aria.

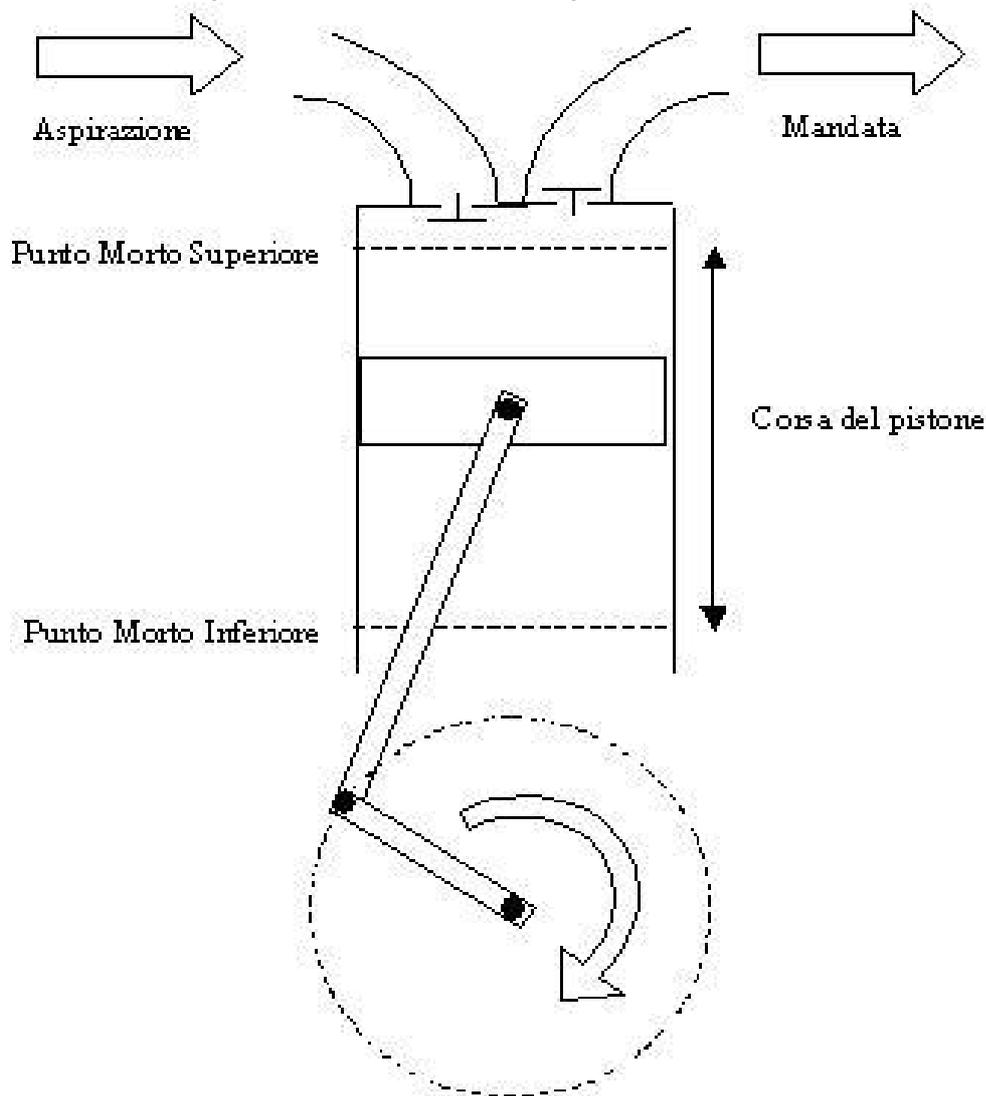
Il serbatoio a sua volta è munito di: manometro, pressostato, valvola di sicurezza e valvole atte allo spurgo di polveri involute presenti nell'aria. Il pressostato comanda il compressore: qualora avvenga che la pressione nel serbatoio superi o sia inferiore ad una certa soglia, il compressore viene spento (in caso di sovrappressione) e in seguito riavviato quando la pressione ritorna in un range desiderato (in caso di pressione troppo bassa invece, il pressostato comanda l' accensione del compressore o, qualora già acceso, il compressore rimane acceso). Col progetto del sistema di controllo si cercherà di minimizzare il numero di avviamenti.

2.1) Diagramma $P - V$ del compressore

Ciascun ciclo di aspirazione e mandata del compressore può essere rappresentato nel seguente diagramma *Pressione/Volume* (condizioni termodinamiche dell'aria presente nel cilindro del compressore) in cui il significato dei simboli è chiarito nel seguito:



mentre il compressore volumetrico può essere schematizzato come segue:



Nel diagramma $P - V$ l'aspirazione parte dal punto 4 e termina al punto 1. Essa inizia dal punto 4 poiché, essendo presente uno spazio nocivo (o volume nocivo) S_n , all' aspirazione l'aria che nel ciclo precedente era rimasta "intrappolata" nel volume nocivo si espande, seguendo la legge della politropica $PV^n = cost$, con n esponente che tiene conto del rendimento del compressore, non essendo la compressione e l'espansione adiabatiche. Per questo motivo il compressore aspira l'aria dal punto 4 fino al punto 1, alla pressione di aspirazione P_0 .

Dal punto 1 al punto 2 avviene la compressione, che segue una legge analoga alla espansione: $PV^n = cost$.

Raggiunta la pressione di mandata P_1 , inizia ad aprirsi la valvola di scarico, che permette di mandare il volume ΔV verso il serbatoio di accumulo, previa

refrigerazione e scarico di condensa. L'espulsione del volume ΔV termina al punto 3. Da 3 a 4 il volume contenuto nello spazio nocivo si espande come detto precedentemente e può così iniziare il ciclo successivo.

Chiamata V_c la cilindrata del compressore, che è data dalla superficie S del pistone per la corsa $2r$ (la corsa è il doppio del raggio di manovella r) $V_c = S \cdot 2r$, sussistono le seguenti relazioni fra volume V_1 , V_3 , spazio nocivo S_n e cilindrata:

$$V_1 = V_c + S_n$$

$$V_3 = S_n$$

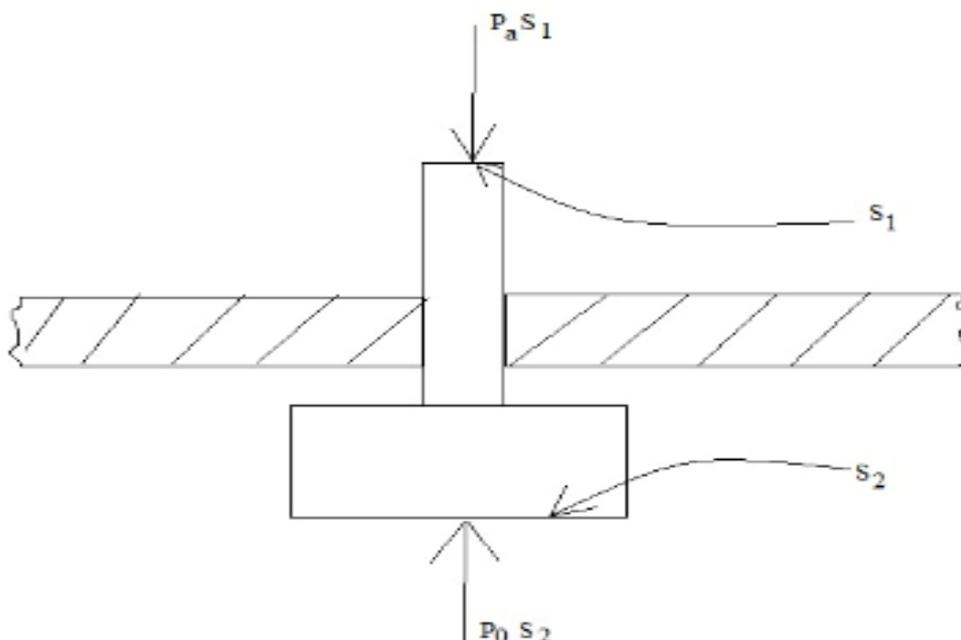
Queste relazioni sono state anche evidenziate nel diagramma $P - V$ del compressore, in quanto verranno utilizzate in seguito nel dimensionamento del serbatoio di accumulo e nei paragrafi successivi.

Le fasi di aspirazione e di mandata, sono regolate da due valvole, una di aspirazione e una di mandata.

La valvola di aspirazione mette in comunicazione il condotto di aspirazione ed il cilindro e si apre quando la pressione nel condotto di aspirazione è superiore a quella del cilindro, mentre si chiude nel caso contrario.

La valvola di mandata è una valvola che mette in comunicazione il cilindro e il condotto di mandata e si apre automaticamente quando la pressione nel cilindro è superiore a quella nel condotto di mandata, posta pari ad una pressione di riferimento P_{rif} .

L'architettura delle due valvole è molto semplice. La schematizzazione può essere la seguente:



In figura è rappresentata una valvola di aspirazione.

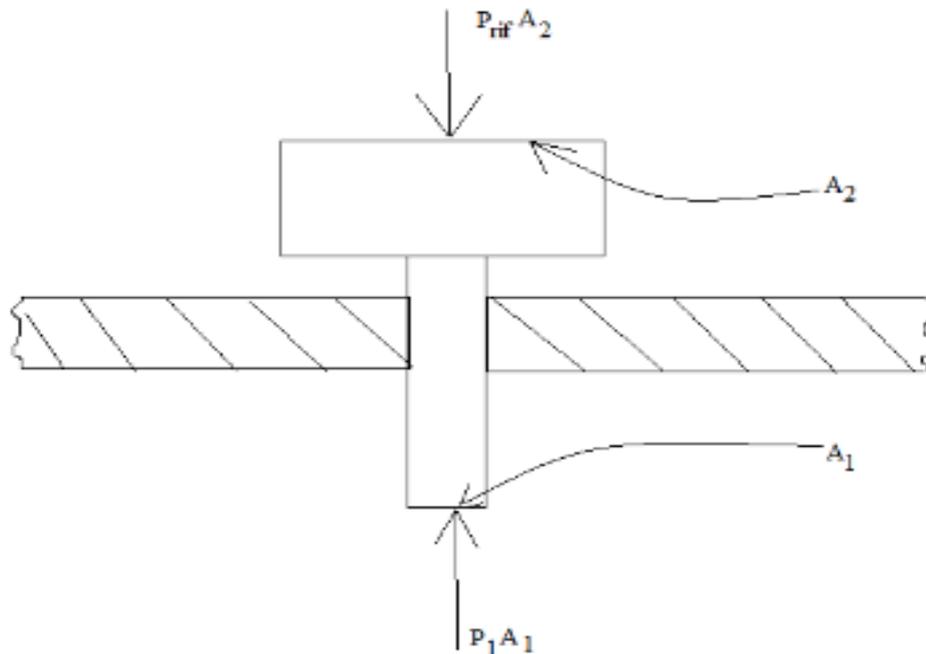
La valvola si apre quando la pressione all' interno del cilindro, diminuendo, raggiunge la pressione di aspirazione P_0 .

L' equazione di taratura della valvola è quindi: $P_0 S_2 = P_a S_1$, dove P_a è la pressione che si ha nel condotto di aspirazione, in pratica pari a quella ambiente.

Il segno di uguaglianza è in realtà una approssimazione dato che per aprirsi la valvola, la forza $P_a S_1$ dovrà essere leggermente superiore alla forza $P_0 S_2$.

Dall' equazione comunque, note P_0 e P_a , fissata una delle due superfici S_1, S_2 , si ricava l' altra superficie.

Un discorso analogo vale per la valvola di mandata:



P_{rif} è la pressione di riferimento che si ha nel condotto di mandata.

La taratura della valvola anche in questo caso può essere fatta ponendo:

$$P_{rif} A_2 = P_1 A_1$$

2.2) Grandezze note e grandezze calcolabili

Le grandezze note sono: la pressione di aspirazione P_0 , la pressione di mandata P_1 , la lunghezza di biella l , il raggio di manovella r , la corsa del pistone $s = 2r$, la velocità angolare della manovella ω , il volume nocivo S_n , il rendimento idraulico del compressore η_{ic} , la superficie di base del pistone S , la cilindrata $V_c = S \cdot 2r$ del compressore e la pressione iniziale nel serbatoio di accumulo P_{s0} , in pratica coincidente con quella ambiente.

Viene poi fissata la sovrappressione massima ad ogni ciclo di mandata ΔP , che permetterà di calcolare il volume del serbatoio di accumulo.

Gli aumenti di pressione nel serbatoio sono dovuti al volume ΔV inviato dal compressore ad ogni ciclo (o portata $Q_c(t)$), mentre le diminuzioni di pressione sono dovute al volume $V_u(t)$ che richiede l'utenza ad ogni ciclo (o portata $Q_u(t)$); qualora l'utenza richieda un volume troppo basso, col passare dei cicli si può raggiungere la sovrappressione massima fissata, facendo intervenire così il pressostato che spegne il compressore.

A partire dalle grandezze note è possibile calcolare il volume del serbatoio di accumulo V , come si vedrà nel paragrafo 3 e l'esponente della politropica n . In tutti i calcoli, l'aria verrà considerata non solo un gas perfetto, cioè un gas che segue la legge dei gas $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$ ($n =$ numero di moli del gas, $R =$ costante universale dei gas perfetti, $T =$ temperatura, $V =$ volume occupato dal gas, $P =$ pressione del gas), ma anche un gas ideale, cioè un gas avente calori specifici a pressione costante c_p e volume costante c_v entrambi costanti.

Per il calcolo di n :

$$\eta_{ic} = \frac{\text{lavoro ideale del compr.}}{\text{lavoro reale del compr.}} = \frac{c_p(T_{2id} - T_1)}{c_p(T_2 - T_1)} = \frac{\frac{T_{2id}}{T_1} - 1}{\frac{T_2}{T_1} - 1} = \frac{\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1}$$

$$k = \frac{c_p}{c_v}$$

k è noto perché sono noti i calori specifici dell'aria; l'unica incognita dell'equazione sopra è n , esprimibile in funzione di parametri noti con semplici passaggi.

Si ricava:

$$n = \frac{1}{\frac{\ln\left(1 + \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right) - 1}{\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)}}$$

3) Dimensionamento serbatoio di accumulo

Dimensionare il serbatoio significa determinarne il volume. Si propone nel seguito un metodo analitico di dimensionamento fissando la massima sovrappressione consentita ad ogni ciclo di mandata.

Alla mandata del compressore, esce il volume ΔV , che per il dimensionamento si riterrà lo stesso ad ogni ciclo, supposte costanti la velocità angolare di manovella ω e il volume nocivo. Progettando il sistema di controllo poi, ΔV non sarà in generale costante, perché il sistema permetterà di variare il volume nocivo, e conseguentemente il volume inviato al serbatoio ad ogni ciclo.

Il dimensionamento quindi dovrà servire a dare una dimensione di massima del serbatoio.

Il volume ΔV si troverà alla pressione di mandata P_1 all'arrivo al serbatoio (si trascurano le cadute di pressione che si hanno fra l'uscita dal compressore e l'arrivo al serbatoio, poiché non sono rilevanti per la progettazione del sistema e possono essere aggiunte a posteriori), e quando arriverà al serbatoio causerà un aumento di pressione, ipotizzando che l'utenza rimanga chiusa. Si può porre tale aumento di pressione pari alla sovrappressione massima ΔP . Quindi si può scrivere, supposto che l'espansione dell'aria nel serbatoio si possa considerare isoterma:

$$P_1 \cdot \Delta V = \Delta P \cdot V \text{ e quindi } V = \frac{P_1}{\Delta P} \Delta V.$$

Rimane da esprimere il volume ΔV in funzione di grandezze note.

Consideriamo le equazioni relative all'espansione e alla compressione dell'aria (trasformazioni politropiche 1 – 2 e 3 – 4).

$$\begin{cases} V_1 P_0^{\frac{1}{n}} = V_2 P_1^{\frac{1}{n}} \\ V_4 P_0^{\frac{1}{n}} = V_3 P_1^{\frac{1}{n}} \end{cases}$$

Sottraendo la seconda equazione alla prima si perviene a:

$$(V_1 - V_4) P_0^{\frac{1}{n}} = (V_2 - V_3) P_1^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{Ma } V_1 = V_c + S_n \text{ e } V_2 - V_3 = \Delta V$$

$$\text{Quindi } \Delta V = \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1}{n}} (V_c + S_n - V_4)$$

Resta ancora indeterminato V_4 .

V_4 si può ricavare a partire dall'equazione di espansione dal punto 3 al punto

$$4: V_4 P_0^{\frac{1}{n}} = V_3 P_1^{\frac{1}{n}} \rightarrow V_4 = \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} S_n \text{ dato che } V_3 = S_n.$$

Quindi il volume che il compressore invia al serbatoio sarà:

$$\Delta V = \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1}{n}} (V_c + S_n - V_4) = \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1}{n}} [V_c + S_n - \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} S_n]$$

Da cui il volume del serbatoio di accumulo:

$$V = \frac{P_1}{\Delta P} \Delta V = \frac{P_1}{\Delta P} \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1}{n}} [V_c + S_n - \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} S_n]$$

L'equazione che esprime il volume ΔV :

$$\Delta V = \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1}{n}} [V_c + S_n - \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} S_n]$$

verrà utilizzata nella progettazione del sistema di controllo, come si vedrà nei successivi paragrafi.

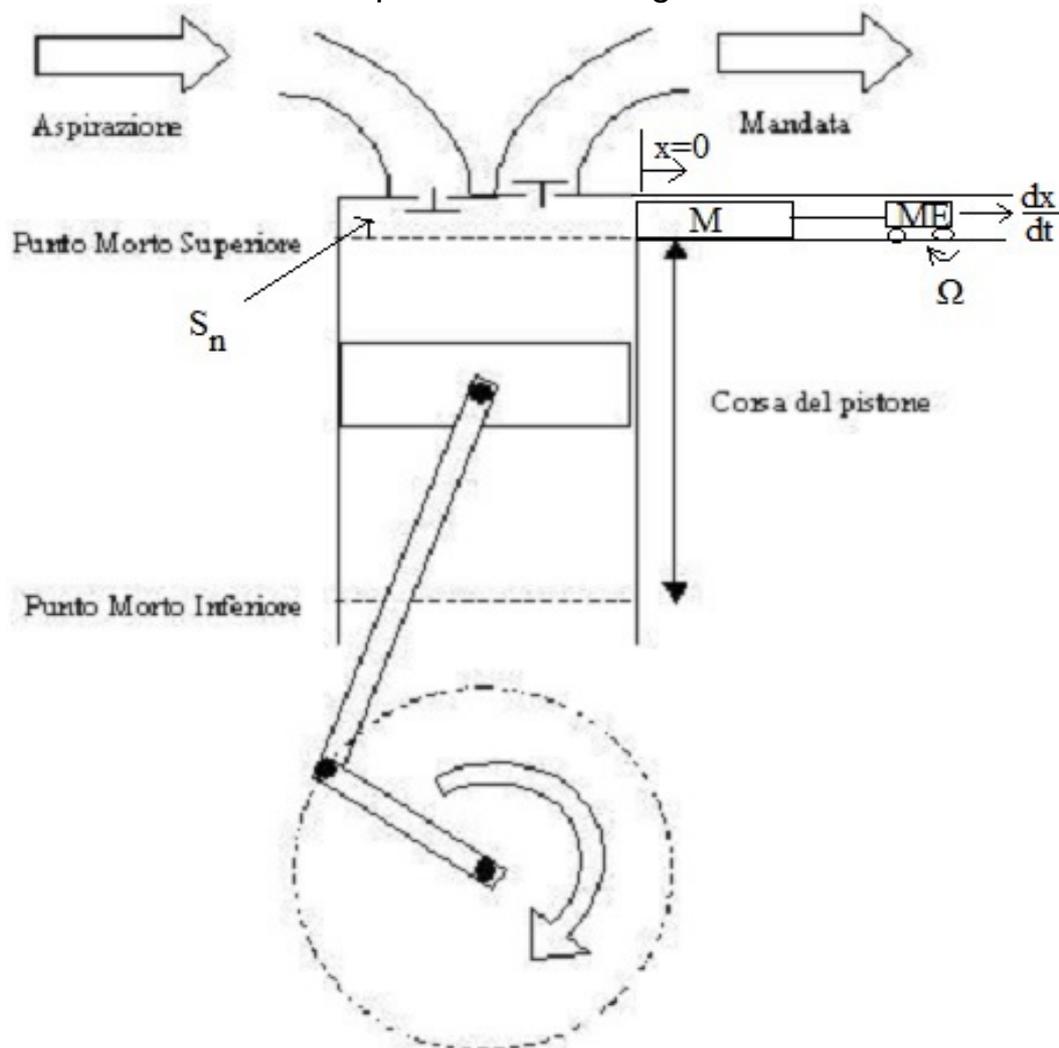
4) Progetto del sistema di controllo

4.1) Regolazione dello spazio nocivo

Per soddisfare le richieste dell'utenza senza il rischio di incorrere in elevate sovrappressioni, che come già messo in luce precedentemente causano stacchi e successivi riattacchi del compressore, si può realizzare un sistema di controllo che permetta di variare il volume nocivo del compressore alternativo, per poter variare se necessario il volume ΔV inviato al serbatoio per ciascun ciclo (o portata volumetrica $Q_c(t)$).

Per la regolazione dello spazio nocivo, una soluzione possibile (nel paragrafo 6 si vedrà una soluzione alternativa), è quella di inserire un motorino elettrico dotato di 4 ruote, che può trascinare un blocco di forma parallelepipedica di massa M .

Una schematizzazione può essere la seguente:



Rispetto alla schematizzazione del compressore vista precedentemente, sono state apportate le seguenti modifiche:

si è aggiunto un motorino elettrico (ME), che può traslare lungo una guida orizzontale essendo accoppiato a 4 ruote di raggio R . Ad esso è incastrata l'estremità di un' asta, che a sua volta ha l'altra estremità incastrata ad un blocchetto di massa M .

Con lo spostamento del motorino elettrico lungo la guida, è possibile variare lo spazio nocivo, e quindi il volume d' aria inviato al serbatoio per ciclo.

Il motorino elettrico conviene farglielo in modo tale che esso si muova durante la fase di aspirazione, da quando inizia la discesa del pistone fino all' arrivo al punto morto inferiore, quando termina l' aspirazione e sta per iniziare la fase di compressione; il corretto fasamento di ME è di estrema importanza perché in tal modo il motorino elettrico non deve compiere ulteriore lavoro per vincere la spinta dovuta alla pressione dell' aria durante la fase di compressione.

Questo consente di poter sottodimensionare il motorino elettrico, il quale necessiterà di un potenza nominale minore. Si vedrà più avanti, nel paragrafo 5.2, come scegliere il motorino elettrico in base alla potenza elettrica richiesta.

Anche la massa del blocchetto M ed il coefficiente di attrito tra guida e blocchetto, dovranno essere scelti opportunamente per fare in modo che la forza di attrito statico che la guida esercita sul blocchetto, più come si vedrà nel paragrafo 5.2 la forza dovuta alla coppia di spunto che eroga il motorino, eguagliano la spinta dell' aria durante la fase di compressione, dato che durante tale fase il volume nocivo deve rimanere costante e quindi il blocchetto non deve spostarsi per la spinta dovuta all' aria; come operare tale scelta verrà mostrato nel paragrafo 5.2.

E' necessario inoltre aggiungere che il motorino elettrico ME , da solo non è sufficiente per la corretta modifica dello spazio nocivo; le ruote del motorino infatti, in generale possono dover variare il loro senso di rotazione per diminuire o aumentare lo spazio nocivo, mentre il motorino elettrico ha un solo senso di rotazione. Per questo motivo, si può dotare il motorino di un cambio a due ingranaggi, uno con rapporto di trasmissione positivo, mentre l' altro negativo. Qualora l' albero del motorino ruoti alla stessa velocità dell' albero delle ruote ad esso accoppiate, i rapporti di trasmissione risulterebbero +1 e -1. Dato che gli spostamenti del motorino devono essere molto rapidi (la regolazione infatti avviene da fine compressione a fine aspirazione), è lecito considerare le due velocità uguali in valore assoluto (e quindi rapporti di trasmissione +1 e -1).

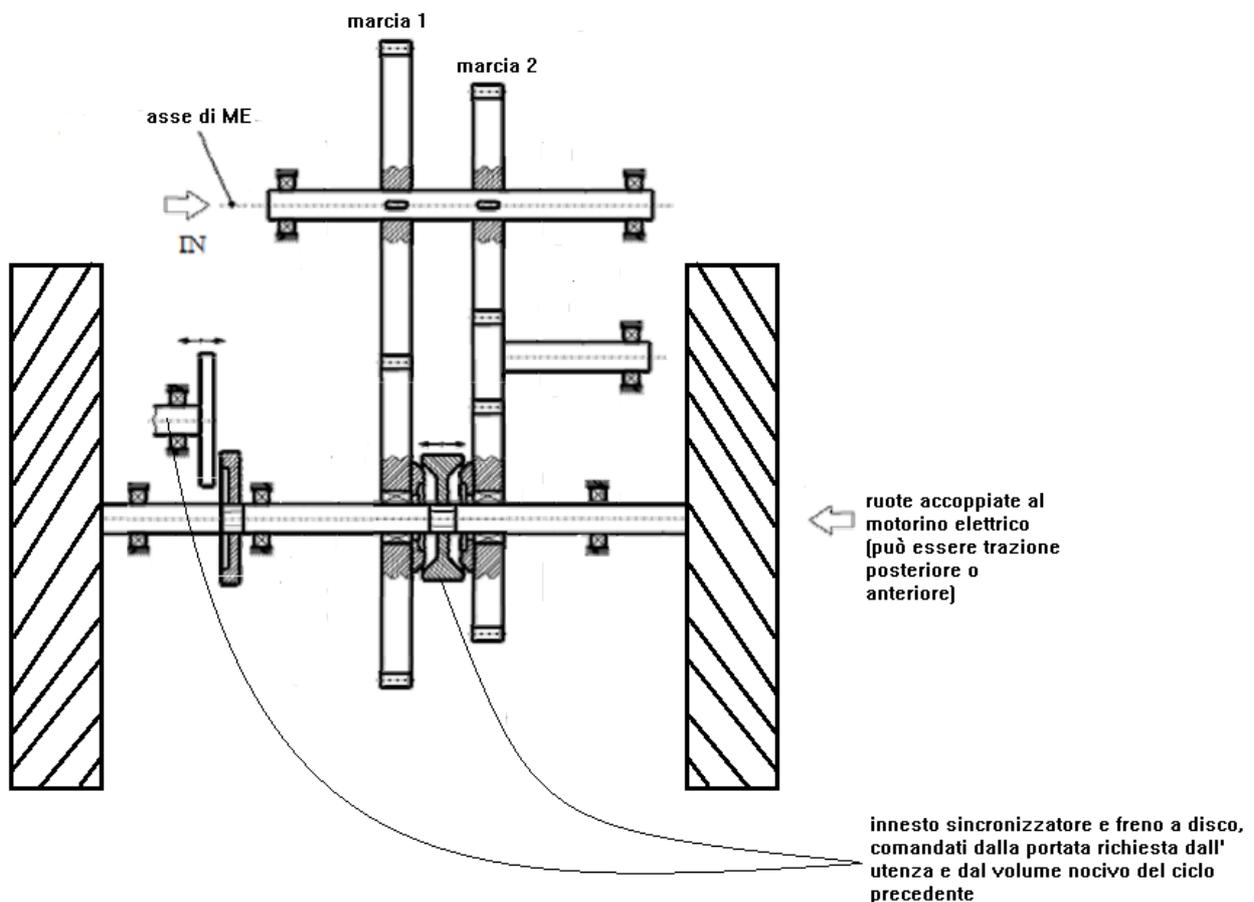
Il cambio è ad azionamento automatico, azionamento che dipende dal volume nocivo che si ha in quel momento (quello del ciclo precedente) e dal volume nocivo che si vuole ottenere (quello del ciclo successivo), il quale a

sua volta dipende dalle richieste di portata dell' utenza, con una relazione biunivoca che verrà ricavata nel paragrafo 4.3.3.

Se il volume nocivo che si vuole ottenere, è minore del volume nocivo modificato al ciclo precedente, le ruote dovranno ruotare in un verso, viceversa dovranno ruotare nel verso opposto.

E' necessario infine frenare le ruote accoppiate al motorino elettrico una volta in moto con un freno, il quale deve agire in modo da fermare le ruote del motorino una volta disinserito il cambio, nella posizione in cui si abbia il volume nocivo desiderato.

All' interno di *ME* nell' ultima figura mostrata, è contenuto quindi il cambio a due ingranaggi e il freno. Un disegno che illustra in maniera semplificata come devono essere fatti freno e cambio, può essere il seguente:



L' asse del motorino elettrico *ME*, riportato in alto nella figura, ha due ruote dentate su di esso calettate, le quali ingranando con le altre ruote formano le marce 1 e 2.

La marcia 1 è quella che inverte il senso di rotazione, poiché ingrana direttamente con la ruota dentata accoppiata all' albero delle ruote (albero secondario).

La marcia 2 è quella che mantiene lo stesso verso di rotazione, poiché non ingrana direttamente con una ruota dentata dell' albero secondario, ma

ingrana prima con una ruota oziosa, la quale poi trasmette il moto alla ruota dentata dell' albero secondario.

Dato che si considerano rapporti di trasmissione unitari (positivi per mantenere il senso di rotazione o negativi per invertirlo), le ruote dentate accoppiate ai due alberi devono avere la stessa dimensione (stesso raggio), mentre la dimensione della ruota oziosa è ininfluente.

Le ruote dentate accoppiate all' albero secondario sono montate a folle sull' albero, e non calettate, perché è l' innesto che le rende solidali all' albero al momento opportuno, decidendo cosa fare in base al segnale di retroazione.

Nella prima figura di questo paragrafo si è indicata con x la posizione del motorino elettrico; alla posizione $x = 0$, corrisponde il volume nocivo nominale S_n .

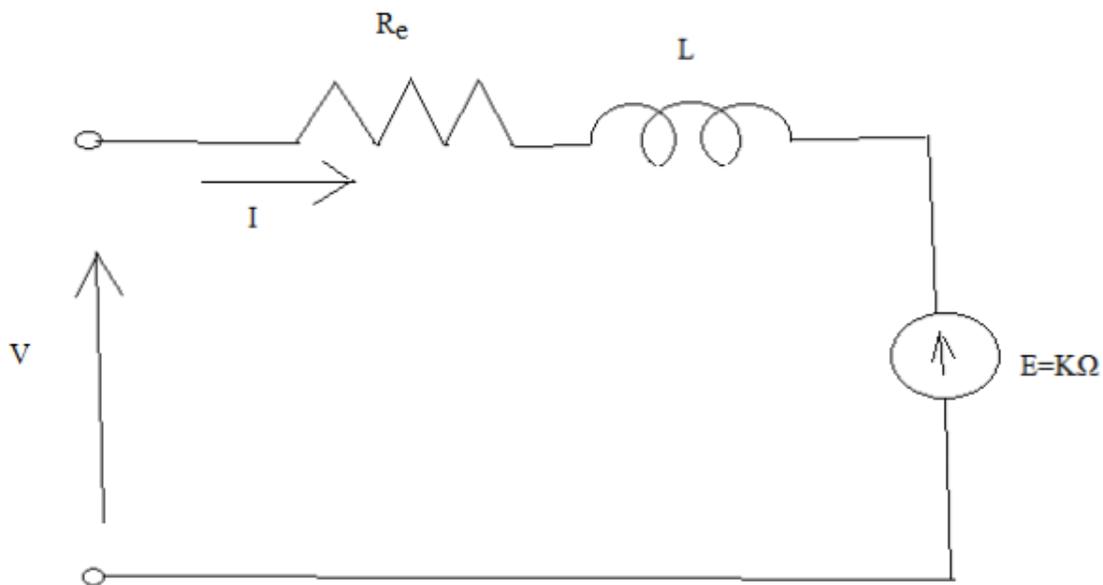
Ω è invece la velocità angolare delle ruote accoppiate al motorino elettrico (che in valore assoluto è pari a quella del motorino ME), mentre $\frac{dx}{dt}$ è la velocità di traslazione lungo la guida orizzontale.

Detto R il raggio delle ruote del motorino, fra Ω e $\frac{dx}{dt}$ vale la relazione $\frac{dx}{dt} = \Omega R$;

Quando il motorino elettrico viene alimentato da una tensione V (in pratica quando è acceso), l'energia elettrica viene convertita in energia meccanica di rotazione dell' albero del motorino ME , che assume velocità angolare (variabile nel tempo, fino al raggiungimento di un valore di regime) Ω_m ; qualora il cambio ad ingranaggi sia inserito, le ruote del motorino potranno avere velocità a seconda dei due casi: $\Omega = +\Omega_m$ o $\Omega = -\Omega_m$. Nel seguito si ragionerà a cambio inserito.

Si può determinare una funzione di trasferimento del motorino elettrico (ME), che a un certo ingresso (tensione) V fa corrispondere un volume nocivo modificato S_n' .

Per determinarla occorre prima analizzare lo schema di un motore elettrico (caso di un motore a corrente continua a eccitazione indipendente):



Il motore è caratterizzato da una resistenza di armatura R_e e un' induttanza L . Quando viene alimentato dalla tensione V , nasce una corrente elettrica I e una forza controelettromotrice E , proporzionale alla velocità angolare del motorino, che è pari a quella delle ruote Ω per le considerazioni fatte: $E = K \Omega$ (Ω presa con segno positivo).

La forza controelettromotrice E , è dimensionalmente una tensione, la quale si oppone alla rotazione delle ruote.

I parametri R_e , L e il rendimento di conversione dell' energia elettrica in energia meccanica η_e , sono noti una volta scelto il motorino elettrico ME .

Si possono scrivere due equazioni riferite allo schema del motorino ME : una è data dall'applicazione della legge delle maglie, e l' altra dal principio di conservazione dell' energia. Nella seconda equazione si trascurerà in un primo momento l'attrito sul blocchetto di massa M , che verrà aggiunto successivamente.

Le equazioni sono:
$$\begin{cases} V(t) - R_e \cdot I(t) - L \cdot \frac{dI(t)}{dt} - K\Omega(t) = 0 \\ E(t) \cdot I(t) \cdot \eta_e = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \cdot (m + m_{ME} + M) \cdot \Omega(t)^2 \cdot R^2 \right] \end{cases}$$

La seconda equazione dice che la potenza elettrica, si trasforma, a meno delle perdite di conversione elettro-meccanica di cui si tiene conto con il rendimento elettrico η_e , in energia cinetica dell'insieme *ruote del motorino + motorino + blocchetto*. Si è trascurata la potenza resistente dovuta all'attrito fra blocchetto e guida orizzontale e l'attrito volvente fra ruote del motorino elettrico e guida orizzontale. Si vedrà più avanti come tenerne conto. La pressione dell'aria, dato che la modifica avviene durante l'aspirazione, genera delle forze che tenderebbero a risucchiare all'interno del cilindro il blocchetto di massa M insieme al motorino elettrico, ma dato che la pressione di aspirazione è molto vicina al valore della pressione ambiente P_a che si ha nel condotto di aspirazione, tali forze possono essere trascurate, per cui essa non verrà considerata.

Con m si è indicata la massa di tutte e quattro le ruote del motorino e con m_{ME} la massa del *motorino + cambio ad ingranaggi + freno* (in pratica tutte le masse contenute all'interno della 'scatola' denominata ME nella prima figura mostrata in questo paragrafo, massa della 'scatola' compresa).

Dalla seconda equazione, tenuto conto che: $E(t) = K\Omega(t)$, sviluppando si trova:

$$I(t) = \frac{(m+m_{ME}+M)R^2}{\eta_e K} \frac{d\Omega(t)}{dt}, \text{ e sostituendo nella prima equazione:}$$

$$V(t) - R_e \cdot \frac{(m+m_{ME}+M)R^2}{\eta_e K} \frac{d\Omega(t)}{dt} - L \cdot \frac{(m+m_{ME}+M)R^2}{\eta_e K} \frac{d^2\Omega(t)}{dt^2} - K\Omega(t) = 0$$

Ora si pongono le seguenti sostituzioni:

$$a_1 = \frac{(m+m_{ME}+M)R^2 R_e}{\eta_e K} \text{ e } a_2 = \frac{(m+m_{ME}+M)R^2 L}{\eta_e K}$$

e quindi si può scrivere:

$$V(t) - a_1 \frac{d\Omega(t)}{dt} - a_2 \frac{d^2\Omega(t)}{dt^2} - K\Omega(t) = 0$$

Passando alle trasformate di Laplace l'equazione diventa:

$$V(s) - a_1 s\Omega(s) - a_2 s^2\Omega(s) - K\Omega(s) = 0$$

da cui:

$$\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + K}$$

Essa rappresenta la funzione di trasferimento del motore.

Ricordando che: $\frac{dx(t)}{dt} = \Omega(t)R \rightarrow s \cdot x(s) = \Omega(s)R$,

si può ricavare anche la funzione di trasferimento tra la tensione $V(s)$ e la posizione del motorino elettrico rispetto alla guida orizzontale $x(s)$:

$$\frac{x(s)}{V(s)} = \frac{R}{(a_2 s^2 + a_1 s + K)s}$$

La funzione di trasferimento tra posizione $x(t)$ del blocchetto di massa M e spazio nocivo modificato S_n' , è ricavabile dalla seguente equazione:

$$S_n'(t) = S_n'(t - T) + A_b \cdot x(t)$$

dove con A_b si è indicata l' area di base del blocchetto di massa M di forma parallelepipedica e $T = \frac{2\pi}{\omega}$ è il tempo di ciclo, quindi $S_n'(t - T)$ rappresenta lo spazio nocivo modificato del ciclo precedente. Considerando una relazione infinitesima si ha anche:

$$dS_n'(t) = A_b \cdot dx(t)$$

e quindi

$$\frac{dS_n'(t)}{dt} = A_b \cdot \frac{dx(t)}{dt}$$

per cui, trasformando secondo Laplace:

$$s \cdot S_n'(s) = A_b \cdot s \cdot x(s) \rightarrow S_n'(s) = A_b \cdot x(s) \rightarrow \frac{S_n'(s)}{V(s)} = \frac{RA_b}{(a_2 s^2 + a_1 s + K)s}$$

Una semplificazione considerata è stata, come già specificato, l' attrito fra blocchetto e guida orizzontale e l'attrito volvente fra ruote del motorino elettrico e guida orizzontale.

Per quanto riguarda la spinta dell' aria, la pressione in generale è funzione del tempo perché varia ciclicamente, ma nella modellazione matematica non deve essere introdotta grazie al fatto che, come detto, la modifica dello spazio nocivo avviene durante tutta la fase di aspirazione per fare in modo

che il motorino elettrico non debba effettuare sforzi eccessivi, potendo trascurare il contributo della spinta dell' aria.

Per tenere conto degli attriti volvente e radente bisogna riformulare la seconda equazione utilizzata per la costruzione del modello matematico del motorino elettrico. L'equazione è stata scritta nel seguente modo:

$$E(t) \cdot I(t) \cdot \eta_e = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \cdot (m + m_{ME} + M) \cdot \Omega(t)^2 \cdot R^2 \right]$$

E' necessario aggiungere una potenza resistente P_r generata dagli attriti. L'equazione generale della conservazione dell' energia va scritta infatti nella seguente forma:

$$P_m(t) - P_r(t) = \frac{dT(t)}{dt}$$

dove con $P_m(t)$ si è indicata la potenza motrice agente sul sistema, che è dovuta alla potenza elettrica del motorino a meno del rendimento di conversione in energia meccanica ($P_m(t) = E(t) \cdot I(t) \cdot \eta_e$), mentre con $T(t)$ l'energia cinetica del sistema, che altro non è che l'energia cinetica dell' insieme *motorino ME + ruote + cambio + freno + blocchetto*:

$$T(t) = \frac{1}{2} \cdot (m_{ME} + m + M) \cdot \Omega(t)^2 \cdot R^2$$

Per il calcolo della potenza resistente $P_r(t)$, è sufficiente considerare la definizione di potenza, supposto di considerare un sistema discreto:

$$P_r(t) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

dove \vec{F}_i è l' i - esimo vettore forza agente sul sistema che provoca un moto con velocità \vec{v}_i dell' i - esimo componente del sistema.

Definiti f_v e f_s rispettivamente il coefficiente di attrito volvente e il coefficiente di attrito di strisciamento, la potenza resistente si può esprimere come:

$$P_r(t) = f_s M g \cdot \Omega(t) R + f_v (m_{ME} + m) g \cdot \Omega(t) R$$

dove con m_{ME} si è indicata la massa del motorino elettrico ME più quella di freno e cambio.

f_s non è in realtà costante, infatti può assumere due valori: è pari al coefficiente di attrito statico quando le ruote sono ancora in aderenza alla guida orizzontale ($\Omega(t) = 0$), mentre è pari al coefficiente di attrito dinamico quando c'è strisciamento.

L'equazione generale allora diventa:

$$E(t) \cdot I(t) \cdot \eta_e - f_s M g \cdot \Omega(t) R - f_v (m_{ME} + m) g \cdot \Omega(t) R = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \cdot (m + m_{ME} + M) \cdot \Omega(t)^2 \cdot R^2 \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow K \Omega(t) \cdot I(t) \cdot \eta_e - f_s M g \cdot \Omega(t) R - f_v (m_{ME} + m) g \cdot \Omega(t) R = (m_{ME} + m + M) \Omega(t) R^2 \frac{d\Omega(t)}{dt}$$

da cui si può semplificare $\Omega(t)$:

$$K \cdot I(t) \cdot \eta_e - f_s M g R - f_v (m_{ME} + m) g R = (m_{ME} + m + M) R^2 \frac{d\Omega(t)}{dt} \rightarrow$$

$$\rightarrow I(t) - \frac{f_s M g R}{\eta_e K} - \frac{f_v (m_{ME} + m) g R}{\eta_e K} = \frac{(m_{ME} + m + M) R^2}{\eta_e K} \frac{d\Omega(t)}{dt}$$

Ora si può porre: $\overline{I(t)} = I(t) - \frac{f_s M g R}{\eta_e K} - \frac{f_v (m_{ME} + m) g R}{\eta_e K}$

Quindi si ricava una equazione formalmente analoga all' equazione scritta senza considerare l'attrito: $\overline{I(t)} = \frac{(m_{ME} + m + M) R^2}{\eta_e K} \frac{d\Omega(t)}{dt}$

Anche la prima equazione del modello matematico del motorino elettrico, la quale rimane valida anche nel caso con attrito, può essere riscritta in una forma analoga all' ultima equazione ricavata. Infatti, l'equazione era stata scritta nel seguente modo:

$$V(t) - R_e \cdot I(t) - L \cdot \frac{dI(t)}{dt} - K \Omega(t) = 0$$

Dato che $\overline{I(t)}$ e $I(t)$ differiscono per una costante si può sostituire a $\frac{dI(t)}{dt}$ il termine $\frac{d\overline{I(t)}}{dt}$.

Si può poi sommare e sottrarre il seguente termine:

$$+ R_e \frac{f_s M g R}{\eta_e K} + R_e \frac{f_v (m_{ME} + m) g R}{\eta_e K}$$

E quindi riscrivere:

$$V(t) - R_e \frac{f_s M g R}{\eta_e K} - R_e \frac{f_v (m_{ME} + m) g R}{\eta_e K} - R_e \cdot \overline{I(t)} - L \cdot \frac{d\overline{I(t)}}{dt} - K\Omega(t) = 0$$

Ponendo:

$$\overline{V(t)} = V(t) - R_e \frac{f_s M g R}{\eta_e K} - R_e \frac{f_v (m_{ME} + m) g R}{\eta_e K}$$

si ricava:

$$\overline{V(t)} - R \cdot \overline{I(t)} - L \cdot \frac{d\overline{I(t)}}{dt} - K\Omega(t) = 0$$

Quindi tenendo conto dell'attrito le equazioni del motorino elettrico diventano:

$$\begin{cases} \overline{V(t)} - R_e \cdot \overline{I(t)} - L \cdot \frac{d\overline{I(t)}}{dt} - K\Omega(t) = 0 \\ \overline{I(t)} = \frac{(m_{ME} + m + M)R^2}{\eta_e K} \frac{d\Omega(t)}{dt} \end{cases}$$

le quali hanno la stessa forma del modello matematico senza attrito:

$$\begin{cases} V(t) - R_e \cdot I(t) - L \cdot \frac{dI(t)}{dt} - K\Omega(t) = 0 \\ I(t) = \frac{(m_{ME} + m + M)R^2}{\eta_e K} \frac{d\Omega(t)}{dt} \end{cases}$$

Per cui per considerare anche l'attrito basta sostituire al posto di $V(t)$ la funzione $\overline{V(t)}$ e al posto di $I(t)$ la funzione $\overline{I(t)}$.

Ne consegue che anche lo schema a blocchi mantiene la stessa forma e quindi anche le funzioni di trasferimento in modo analogo.

La funzione di trasferimento nel caso con attrito è la seguente:

$$\frac{\overline{x(s)}}{\overline{V(s)}} = \frac{R}{(a_2 s^2 + a_1 s + K)s}$$

Dato che:

$$\overline{V(t)} = V(t) - R_e \frac{f_s M g R}{\eta_e K} - R_e \frac{f_v (m_{ME} + m) g R}{\eta_e K}$$

posto:

$$a_3 = R_e \frac{f_s M g R}{\eta_e K} + R_e \frac{f_v (m_{ME} + m) g R}{\eta_e K}$$

si può scrivere:

$$\overline{V(t)} = V(t) - a_3$$

quindi:

$$\overline{V(s)} = V(s) - \frac{a_3}{s}$$

e sostituendo nella equazione:

$$\frac{x(s)}{\overline{V(s)}} = \frac{R}{(a_2 s^2 + a_1 s + K)s}$$

si ottiene:

$$x(s) = \frac{R}{(a_2 s^2 + a_1 s + K)s} V(s) - \frac{R \cdot a_3}{(a_2 s^2 + a_1 s + K)s^2}$$

Rispetto al caso senza attrito si è aggiunta la funzione:

$$\frac{R \cdot a_3}{(a_2 s^2 + a_1 s + K)s^2}$$

di cui bisogna notare il polo di molteplicità 2 nell' origine. Poli di molteplicità > 1 sull' asse immaginario causano instabilità in un sistema perché tornando nel dominio nel tempo con l'antitrasformata di Laplace si vede che a regime la risposta tende all'infinito. Si ha infatti nel caso in questione (non considerando per il momento il termine: $\frac{R}{(a_2 s^2 + a_1 s + K)s} V(s)$):

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty$$

Ciò avviene perché, se si esprime la funzione in fratti semplici, si ha:

$$\frac{R \cdot a_3}{(a_2 s^2 + a_1 s + K)s^2} = \frac{k_1}{s^2} + \frac{k_2}{s} + \frac{k_3}{s - P_1} + \frac{k_4}{s - P_2}$$

con k_1, k_2, k_3, k_4 residui della funzione determinabili analiticamente, P_1 e P_2 poli della funzione e zeri del polinomio $a_2 s^2 + a_1 s + K$; per tornare nel dominio nel tempo si antitrasforma secondo Laplace:

$$x(t) = -\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k_1}{s^2} + \frac{k_2}{s} + \frac{k_3}{s - P_1} + \frac{k_4}{s - P_2} \right] = -u(t)(k_1 t + k_2 + k_3 e^{P_1 t} + k_4 e^{P_2 t})$$

Come si vede, per $t \rightarrow +\infty$ il contributo della rampa manda la risposta a divergere all' infinito.

A seconda del segno della parte reale dei poli P_1 e P_2 , anche gli esponenziali $k_3 e^{P_1 t}$, $k_4 e^{P_2 t}$ potrebbero divergere, ma nel caso in questione convergono perché i coefficienti a_2, a_1, K del polinomio $a_2 s^2 + a_1 s + K$ sono tutti positivi, che implica che i suoi zeri, P_1 e P_2 debbono conseguentemente avere parte reale negativa per il criterio di Routh.

Ciò che è evidente, è che per 'colpa' dell' attrito bisognerà agire in modo da rendere il sistema stabile, scegliendo per esempio una tensione di alimentazione del tipo: $V(t) = a_3 + V^*(t)$, in modo da annullare gli effetti dell' attrito, infatti in tal caso si avrebbe:

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{R}{(a_2 s^2 + a_1 s + K)s} V(s) - \frac{R \cdot a_3}{(a_2 s^2 + a_1 s + K)s^2} = \\ &= \frac{R}{(a_2 s^2 + a_1 s + K)s} \left(\frac{a_3}{s} + V^*(s) \right) - \frac{R \cdot a_3}{(a_2 s^2 + a_1 s + K)s^2} = \\ &= \frac{R}{(a_2 s^2 + a_1 s + K)s} V^*(s) \end{aligned}$$

che equivale a:

$$\frac{S'_n(s)}{V^*(s)} = \frac{RA_b}{(a_2 s^2 + a_1 s + K)s}$$

quindi non si avrebbe più l' instabilità legata all' attrito e il sistema, rappresentato dalla funzione di trasferimento $\frac{RA_b}{(a_2 s^2 + a_1 s + K)s}$ risulta stabile.

Le relazioni utilizzate per ricavare la funzione di trasferimento: $\frac{S'_n(s)}{V^*(s)} =$

$\frac{RA_b}{(a_2 s^2 + a_1 s + K)s}$ si riferiscono al caso di un motore a corrente continua a

eccitazione indipendente (l' equazione delle maglie di Kirchhoff, mentre l'

equazione dell' energia è generale). In generale comunque, vale una relazione simile tra spazio nocivo e tensione di alimentazione del motorino, del tipo:

$$\frac{S'_n(s)}{V^*(s)} = G(s)$$

dove la funzione $G(s)$ svolge un ruolo più generale della funzione

$$\frac{RA_b}{(a_2s^2+a_1s+K)s}$$

Nello schema a blocchi tuttavia, non verrà utilizzata la funzione di trasferimento vista sopra per il motore, perché la tensione di alimentazione $V(t)$ non è modificabile nel modello introdotto, ma come si vedrà si utilizzerà una funzione più semplice (si vedrà nel paragrafo 4.3.3).

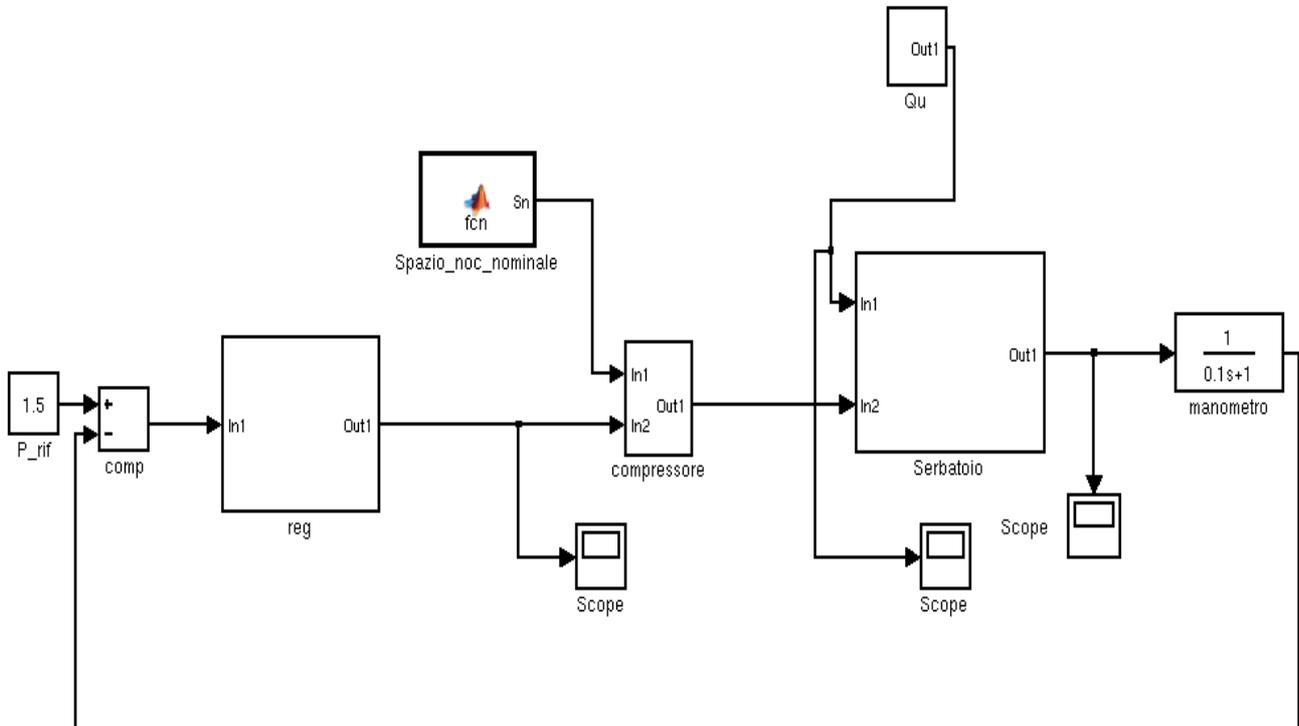
Inoltre, negli schemi di controllo che verranno riportati, non saranno considerati i seguenti aspetti: le valvole di non ritorno e di sicurezza, il refrigeratore e lo scaricatore di condensa, in quanto non necessari per il corretto funzionamento del sistema.

Si è inoltre supposto che l'aria, all' uscita dal compressore, si mantenga alla pressione di mandata P_1 fino all' arrivo nel serbatoio di accumulo.

Ovviamente, si hanno delle perdite di carico nel condotto che implicano delle cadute di pressione; di tali perdite se ne può tenere conto nota la geometria e scabrezza delle condotte, oltre alla velocità dell'aria, ma non tenerne conto non altera l' implementazione del sistema; si possono aggiungere a posteriori senza problemi di alcun tipo.

4.2 Schema a blocchi dell' impianto senza il sistema di controllo di modifica del volume nocivo

L' impianto visto nell' introduzione, è stato così schematizzato con Simulink:



Il contenuto dei vari blocchi verrà approfondito nel successivo paragrafo; trattandoli come scatole nere per il momento, si può vedere come al blocco denominato come '*reg*' entri un input (*In1*), che scaturisce dalla differenza tra la pressione di riferimento che si vorrebbe avere nel serbatoio (P_{rif}) e la pressione che si ha effettivamente nel serbatoio (P_s), misurata con manometro.

Ciò che esce è un output (*Out1*), il quale altro non è che la velocità angolare ω del compressore, che può assumere valore nullo oppure essere pari al valore di progetto. Quindi la differenza di pressione comanda l'accesso o spento del compressore e il blocco '*reg*' rappresenta il motore elettrico del compressore.

I blocchi denominati come '*Scope*' servono esclusivamente per graficare gli andamenti delle grandezze appartenenti ai rami a cui tali blocchi sono collegati.

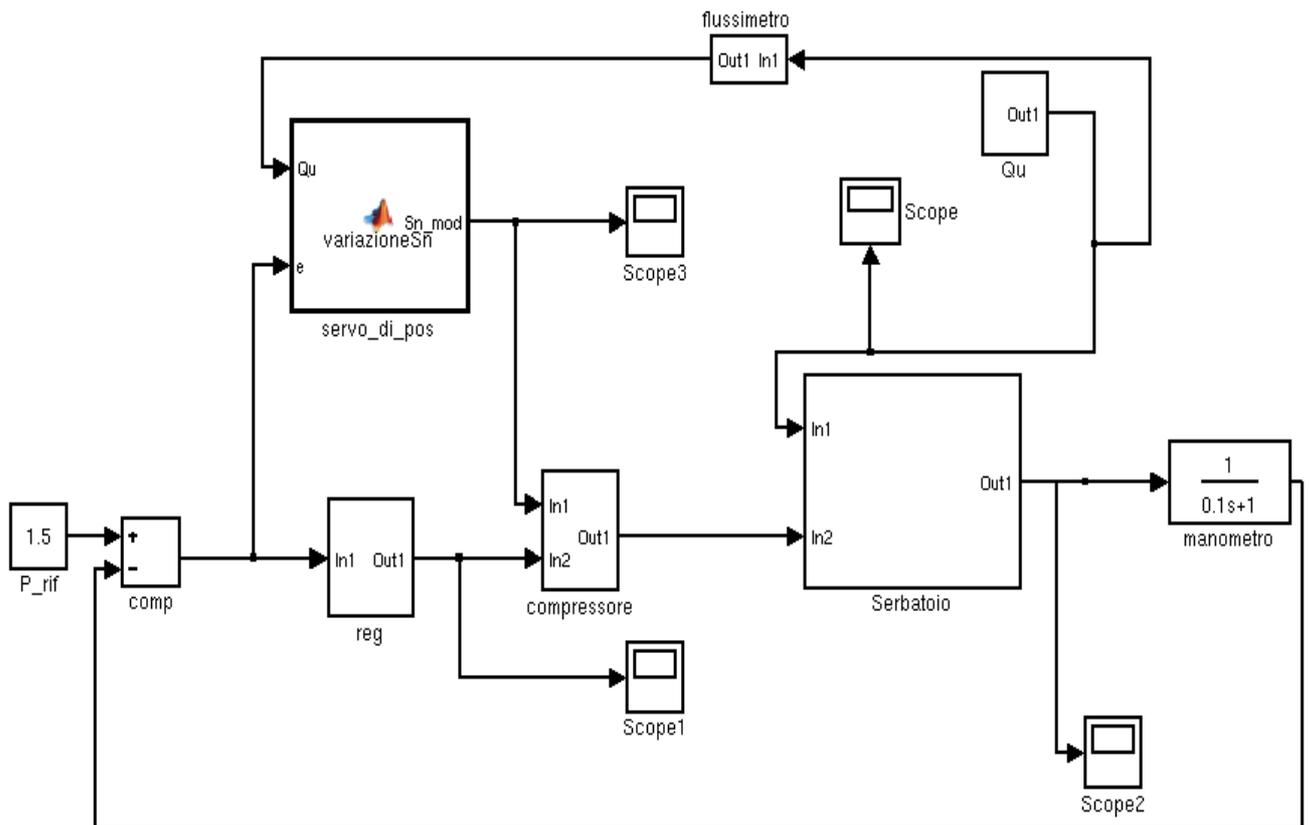
La velocità angolare ω uscente dal regolatore 'reg' comanda il compressore insieme al blocco *spazio_noc_nominale*, che rappresenta lo spazio nocivo (che in questo caso è fisso, posto uguale a 0.12 m^3 . La scelta dei numeri utilizzati per i vari parametri verrà motivata nel paragrafo 4.3.1). All' uscita dal compressore esce la portata volumetrica Q_c riferita alla pressione di mandata P_1 , che a sua volta comanda il serbatoio, assieme alla portata richiesta dall' utenza Q_u , riferita alla pressione dell' utenza, che è ragionevolmente pari alla pressione iniziale nel serbatoio P_{s0} .

Ciò che esce dal serbatoio è la pressione P_s che giungerà poi al comparatore, il quale la paragonerà alla pressione di riferimento P_{rif} e rinizierà così un nuovo ciclo.

Fra un ciclo e il successivo passa il tempo $\frac{2\pi}{\omega}$, mentre il tempo che passa tra un controllo e il successivo al comparatore è pari al tempo di simulazione (scelto pari a 0.01 s).

4.3 Schema a blocchi dell' impianto con il sistema di controllo di modifica del volume nocivo

Allo schema del paragrafo precedente, viene aggiunta una ulteriore retroazione. Se ne riporta lo schema:



L' input numero 1 del compressore ($In1$), che rappresenta lo spazio nocivo, questa volta non è fisso, ma esce dal blocco denominato '*servo_di_pos*' che è un servo di posizione. Il servo di posizione ha due input: uno è la portata che richiede l'utenza Q_u e l'altro è dato dalla differenza tra P_{rif} e P_s , che viene chiamata ' e ' e sta per errore: $e = P_{rif} - P_s$.

La portata Q_u quindi non solo entra come input nel serbatoio, ma viene anche retrazionata per entrare come input nel servo di posizione.

Prima di entrare nel servo di posizione, la Q_u viene misurata con un flussimetro, che serve per convertire il segnale misurato in un segnale in tensione.

Si analizzeranno ora in dettaglio i blocchi presenti nello schema, previa introduzione sulla scelta dei valori numerici dei parametri.

4.3.1 Introduzione ai blocchi: scelta dei parametri

La scelta dei valori numerici dei parametri da utilizzare nel modello Simulink è ovviamente non univoca e non influenza il corretto funzionamento del sistema.

Tuttavia, è necessario avere dei numeri di riferimento per poter avviare le simulazioni e testare il sistema. Si mostrerà quindi una delle infinite scelte possibili.

La pressione di aspirazione del compressore P_0 è stata posta: $P_0 = 0.5 \text{ bar}$, scelta basata sul fatto che la pressione deve essere inferiore a quella ambiente (1 bar).

Il valore scelto per la pressione di mandata P_1 è stato $P_1 = 10 \text{ bar}$, valore molto alto per un solo stadio di compressione e di fatto irrealizzabile, però può essere utile per la simulazione perché sottopone il sistema a condizioni critiche, per cui, qualora il sistema si comporti bene in condizioni critiche, a maggior ragione si comporterà bene anche per valori più bassi di P_1 .

La pressione iniziale del serbatoio di accumulo P_{s0} è stata posta pari alla pressione ambiente: $P_{s0} = 1 \text{ bar}$. Essa è anche la pressione a cui l'utenza richiede la portata Q_u .

Si è scelta poi la superficie del pistone del compressore $S_{pistone}$ pari a 2 m^2 , che è un valore grande, ma che permette di valutare meglio gli incrementi di pressione nel serbatoio, sottoponendo il sistema a condizioni critiche, come nel caso di P_1 .

La corsa s è stata presa pari a 1 m e conseguentemente il raggio di manovella risulterà pari a 50 cm .

Quindi la cilindrata V_c sarà pari a 2 m^3 .

La velocità angolare della manovella e quindi del compressore è stata considerata pari a 25 rad/s , cioè *circa* 239 rpm , che è un valore di velocità né troppo alto né troppo basso.

E' necessario inoltre aggiungere che la pressione di riferimento P_{rif} , la quale viene paragonata al comparatore alla pressione effettiva nel serbatoio P_s , è stata scelta pari a 1.5 bar , che è un valore basso. Infatti per il fatto che l'aria viene compressa a una pressione di 10 bar , sarebbe stato sufficiente scegliere un compressore con una pressione di mandata più bassa (minimizzando i costi) dato che si desidera mantenere il serbatoio ad una pressione massima pari a circa 1.5 bar . Tuttavia, questo è un modo per

testare il sistema in condizioni più critiche, e quindi qualora funzioni bene in tali condizioni, funzionerebbe bene a maggior ragione in condizioni meno limitanti, scegliendo un valore di P_{rif} superiore.

E' stato poi considerato un rendimento isoentropico η_{ic} del compressore pari all' 85%, la costante k dell'aria pari a 1.4, uno spazio nocivo minimo S_{nmin} , che per costruzione non è riducibile oltre a circa il 4% della cilindrata ed è quindi pari a 0.08 m^3 , uno spazio nocivo nominale S_n pari a 0.12 m^3 e un esponente della compressione reale n pari a circa 1.466, calcolabile come visto nel paragrafo 2.2.

Esiste anche uno spazio nocivo massimo S_{nmax} , dovuto al fatto che il volume inviato per ciclo dal compressore, come visto pari a:

$$\Delta V = \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1}{n}} [V_c + S_n - \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} S_n], \text{ deve risultare sempre } \geq 0.$$

Ponendo $\Delta V = 0$ si può ricavare S_{nmax} :

$$V_c + S_{nmax} - \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} S_{nmax} = 0 \rightarrow S_{nmax} = \frac{V_c}{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}$$

Calcolandolo, risulta pari a circa 0.30 m^3 .

Infine, rimane da calcolare il volume del serbatoio, che come visto nel paragrafo 3 si può calcolare con la formula:

$$V = \frac{P_1}{\Delta P} \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1}{n}} [V_c + S_n - \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} S_n]$$

considerando lo spazio nocivo fisso, pari al valore nominale e un aumento di pressione nel serbatoio pari a ΔP (si considerano inoltre, come già detto, le utenze chiuse, ossia $Q_u = 0 \text{ m}^3/\text{s}$). Scegliendo ΔP pari a 0.2 bar , risulta $V = 7.7 \text{ m}^3$.

In definitiva, i parametri scelti sono qui indicati:

$$P_0 = 0.5 \text{ bar}$$

$$P_1 = 10 \text{ bar}$$

$$P_{s0} = 1 \text{ bar}$$

$$S_{pistone} = 2 \text{ m}^2$$

$$r = 50 \text{ cm} \rightarrow s = 2r = 1 \text{ m}$$

$$V_c = S_{pistone} \cdot 2r = 2 \text{ m}^3$$

$$\omega = 239 \text{ rpm} = 25 \text{ rad/s}$$

$$P_{rif} = 1.5 \text{ bar}$$

$$\eta_{ic} = 85\%$$

$$k = \frac{c_p}{c_v} = 1.4$$

$$S_{nmin} = 4\% V_c = 0.08 \text{ m}^3$$

$$S_n = 0.12 \text{ m}^3$$

$$n = \frac{1}{\frac{\ln\left(1 + \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right) - 1}{1 - \frac{\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)}{\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)}}} = 1.466$$

$$S_{nmax} = \frac{V_c}{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1} \cong 0.30 \text{ m}^3$$

$$V = \frac{P_1}{\Delta P} \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1}{n}} \left[V_c + S_n - \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} S_n \right] = 7.7 \text{ m}^3$$

4.3.2 Blocco del serbatoio di accumulo

Per costruire il blocco del serbatoio di accumulo, è necessario ricavarsi un modello matematico che metta in relazione tra loro le grandezze:

$$P_s(t), Q_u(t), Q_c(t).$$

E' possibile ricavare una relazione del tipo: $\frac{dP_s(t)}{dt} = f(Q_u(t), Q_c(t))$.

Si può ragionare nel seguente modo: la pressione nel serbatoio $P_s(t)$ al tempo t , sarà uguale a quella del ciclo precedente ($P_s(t - T)$, con T tempo arbitrario tale che $0 < T \leq \frac{2\pi}{\omega}$), più un aumento ($\Delta P(t)$) dovuto al volume ($\Delta V(t)$) che arriva dal compressore in tal ciclo, più una diminuzione ($\Delta P_u(t)$) dovuta al volume ($V_u(t)$) che va verso l'utenza in tal ciclo.

Quindi si può scrivere:

$$P_s(t) = P_s(t - T) + \Delta P(t) - \Delta P_u(t)$$

E' noto che: $\Delta P(t) \cdot V = P_1 \cdot \Delta V(t)$, considerando l'espansione dell'aria nel serbatoio isoterma e trascurando come già più volte menzionato le perdite di carico fra l'uscita dal compressore e l'entrata nel serbatoio di accumulo, le quali porterebbero a diminuire P_1 .

Analogamente:

$$\Delta P_u(t) \cdot V = P_{s0} \cdot V_u(t)$$

Quindi si ha:

$$\Delta P(t) = \frac{P_1}{V} \Delta V(t)$$

$$\Delta P_u(t) = \frac{P_{s0}}{V} V_u(t)$$

le quali implicano:

$$P_s(t) = P_s(t - T) + \frac{P_1}{V} \Delta V(t) - \frac{P_{s0}}{V} V_u(t)$$

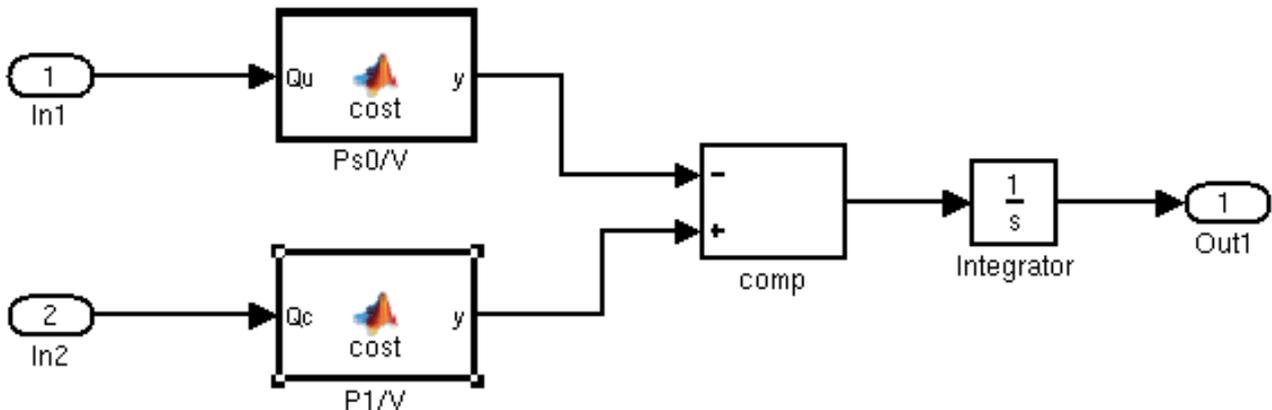
Si può riscrivere, dividendo per T e portando il primo termine del secondo membro a primo membro:

$$\frac{P_s(t) - P_s(t - T)}{T} = \frac{P_1}{V} \frac{\Delta V(t)}{T} - \frac{P_{s0}}{V} \frac{V_u(t)}{T}$$

Data l'arbitrarietà di T nell'intervallo $\left]0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$, si può far tendere T a zero e si ottiene così:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{P_s(t) - P_s(t - T)}{T} = \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{P_1 \Delta V(t)}{V T} - \frac{P_{s0} V_u(t)}{V T} \right) \rightarrow \frac{dP_s(t)}{dt} = \frac{P_1}{V} Q_c(t) - \frac{P_{s0}}{V} Q_u(t)$$

Questo modello è stato implementato in Simulink nel blocco del serbatoio. All'interno del serbatoio infatti, è presente il seguente sottosistema:



All' input 1 ($In1$) arriva la portata Q_u , che viene moltiplicata per $\frac{P_{s0}}{V}$ nel blocco denominato ' $Ps0/V$ '.

All' input 2 ($In2$) arriva la portata Q_c , che viene moltiplicata per $\frac{P_1}{V}$ nel blocco denominato ' $P1/V$ '.

Il comparatore poi esegue la differenza tra $\frac{P_1}{V} Q_c$ e $\frac{P_{s0}}{V} Q_u$, la quale viene integrata al blocco ' $Integrator$ ' e come output ($Out1$) esce la pressione nel serbatoio $P_s(t)$.

4.3.3 Blocco del servo di posizione

Si è già visto come il motorino elettrico ME che modifica lo spazio nocivo può essere rappresentato con una funzione di trasferimento tra la tensione di alimentazione del motore $V(s)$ e lo spazio nocivo modificato $S'_n(t)$ che tenga conto dei parametri caratteristici del motorino e degli attriti. Le equazioni viste valgono nel caso in cui il cambio a due ingranaggi sia inserito; l' inserimento del cambio dipende, come detto, dalla misura della portata richiesta dall' utenza $Q_u(t)$ (retroazionata e misurata con un flussimetro), la quale come si vedrà tra poco decide quale deve essere il nuovo volume nocivo (volume nocivo desiderato, quello del ciclo successivo), il quale a sua volta comanda il cambio; inoltre l' inserimento del cambio dipende anche dal volume nocivo attuale (cioè quello del ciclo precedente), poiché paragonando volume nocivo attuale a quello desiderato, il rapporto di trasmissione del cambio potrà essere $o + 1$ o $o - 1$ a seconda del verso di rotazione che devono avere le ruote accoppiate al motorino. Il freno deve agire successivamente, a partire da un certo istante dall' inserimento del cambio, in modo tale da fermare le ruote del motorino elettrico nella posizione che corrisponde al volume nocivo desiderato (il freno verrà abbondantemente analizzato nel paragrafo 5.2).

Tuttavia, la funzione di trasferimento trovata: $\frac{S'_n(s)}{V^*(s)} = \frac{RA_b}{(a_2s^2+a_1s+K)s}$ non è utilizzabile nello schema a blocchi poiché la tensione di alimentazione è indipendente dalla retroazione, serve solo per tenere acceso il motorino elettrico ME .

Si può però implementare in Simulink il blocco che costituisce l' insieme: *motorino + cambio + freno*, chiamato servo di posizione, in modo più semplice, il quale deriva dalla considerazione di un altro modello matematico.

Il sistema di controllo da implementare, ha il compito di fare in modo che la pressione nel serbatoio non vari tenendo conto della misura della portata richiesta dall' utenza, in modo da limitare o addirittura evitare gli spegnimenti e successivi riavviamenti del compressore; quindi tale sistema è costituito da un' azione in avanti (controllo di pressione) e una retroazione classica (misura della portata).

Si vuole quindi che:

$$\frac{dP_s(t)}{dt} = 0$$

Ricordando che:

$$\frac{dP_s(t)}{dt} = \frac{P_1}{V} Q_c(t) - \frac{P_{so}}{V} Q_u(t)$$

si vuole:

$$P_1 \cdot Q_c(t) - P_{so} \cdot Q_u(t) = 0$$

Si può esprimere $Q_c(t)$ in funzione dello spazio nocivo. Infatti, dato che si ha:

$$\begin{cases} \Delta V(t) = \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1}{n}} \left\{ V_c - S_n'(t) \left[\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] \right\} \\ Q_c(t) = \frac{\Delta V(t)}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{2\pi} \Delta V(t) \end{cases}$$

si ricava:

$$Q_c(t) = \frac{\omega}{2\pi} \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1}{n}} \left\{ V_c - S_n'(t) \left[\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] \right\}$$

e sostituendo in

$$P_1 \cdot Q_c(t) - P_{so} \cdot Q_u(t) = 0$$

si ottiene:

$$P_1 \frac{\omega}{2\pi} \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1}{n}} \left\{ V_c - S_n'(t) \left[\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] \right\} - P_{so} \cdot Q_u(t) = 0$$

Risolvendo per $S_n'(t)$ si ricava:

$$S_n'(t) = \frac{V_c}{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1} - \frac{\frac{P_{so} 2\pi \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}}}{P_1 \omega}}{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1} \cdot Q_u(t)$$

che esprime la relazione tra portata richiesta dall'utenza e volume nocivo desiderato; quindi, come detto in precedenza, la portata richiesta dall'utenza viene retroazionata calcolando il volume nocivo che si vuole ottenere al ciclo successivo con tale formula, il quale a sua volta viene comparato al volume nocivo del ciclo precedente ed in base al segno del risultato si potrà avere rapporto di trasmissione $+1$ o -1 , ottenuto tramite l'inserimento dell'innesto.

Si può notare che, se $Q_u(t)$ è pari al suo valore minimo cioè zero, si ottiene il valore massimo di $S'_n(t)$, ovviamente uguale all'espressione già vista:

$$S'_n(t) = \frac{V_c}{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}-1}} \quad (\cong 0.30 \text{ m}^3)$$

mentre $Q_u(t)$ è limitata superiormente dal valore minimo che può assumere $S'_n(t)$, pari a $0.04 \cdot V_c$. Si ricava una $Q_{umax}(t)$ pari a:

$$Q_{umax}(t) = \left[\frac{V_c}{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}-1}} - 0.04 \cdot V_c \right] \frac{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{P_{s0}}{P_1} \frac{2\pi}{\omega} \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

che considerando i valori dei parametri scelti risulta $Q_{umax}(t) \cong 7.5 \text{ m}^3$. E quindi la $Q_{cmax}(t)$, dato che si è nella condizione $P_1 \cdot Q_c(t) - P_{s0} \cdot Q_u(t) = 0$ vale $Q_{cmax}(t) = \frac{P_{s0}}{P_1} Q_{umax}(t) \cong 0.75 \text{ m}^3$, che è la portata massima che il compressore può inviare al serbatoio per i valori scelti.

Quindi bisogna fare in modo che la portata che richiede l'utenza non superi $\cong 7.5 \text{ m}^3$. Si vedrà come fare nel blocco utenza. Tornando al blocco del servo di posizione bisogna quindi implementare la funzione:

$$S'_n(t) = \frac{V_c}{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}-1}} - \frac{\frac{P_{s0} 2\pi \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}}}{P_1 \omega}}{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}-1}} \cdot Q_u(t)$$

Ciò è stato fatto usando la seguente funzione Matlab:

```
File Edit Text Debug Tools Window Help
x [Icons]
1 function Sn_mod = variazioneSn(Qu,e)
2
3 - P0=0.5;
4 - P1=10;
5 - Ps0=1;
6 - n=1.466;
7 - Vc=2;
8 - Sn=0.12;
9 - omega=25;
10 %Sn_min=0.04*Vc;
11 %Sn_max=Vc/((P1/P0)^(1/n)-1);
12
13 - if e <= 0.1
14 -     Sn_mod = (Vc-(Ps0/P1)*(2*pi/omega)*(P1/P0)^(1/n)*Qu)/((P1/P0)^(1/n)-1);
15
16 else
17 -     Sn_mod = Sn;
18 end
19
20
21
```

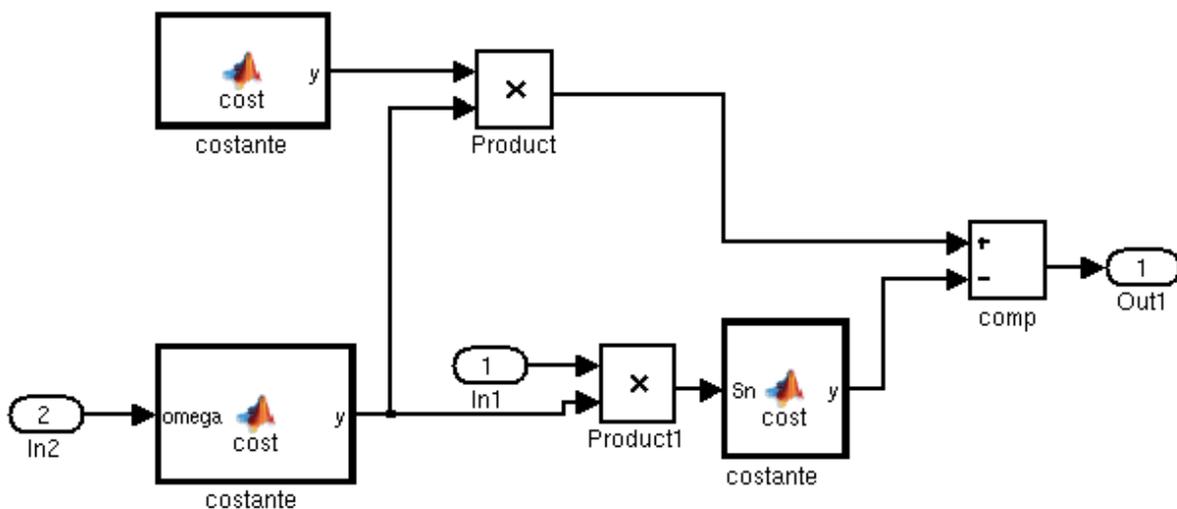
Come si nota, la funzione ha in ingresso la portata $Q_u(t)$ e l'errore e , dovuto allo scostamento della pressione del serbatoio da quella di riferimento. Dato che la pressione iniziale nel serbatoio di accumulo è 1 bar, all'inizio $e = 0.5$; qualora si modificasse subito il volume nocivo, la pressione rimarrebbe sempre pari al valore di 1 bar, diversa dal valore di riferimento. Invece, facendo passare un paio di cicli, la pressione nel serbatoio inizia ad aumentare e quindi e cala, e quando $e \leq 0.1$ si modifica il volume nocivo per tenere costante da lì in avanti la pressione nel serbatoio. Ciò si vedrà meglio dai risultati delle simulazioni mostrati più avanti.

4.3.4 Blocco del compressore

Il blocco del compressore è stato implementato conoscendo la relazione tra la portata inviata dal compressore al serbatoio di accumulo Q_c , lo spazio nocivo S_n' e la velocità angolare del compressore ω . Si è infatti già ricavato che:

$$Q_c(t) = \frac{\omega}{2\pi} \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1}{n}} \left\{ V_c - S_n'(t) \left[\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] \right\}$$

All'interno il blocco è costituito dai seguenti sotto-blocchi:



I blocchi denominati come *'costante'* moltiplicano semplicemente ciò che entra per una costante: l'input 2 (*In2*, che rappresenta la velocità angolare ω) viene moltiplicato per $\frac{1}{2\pi}$, ottenendo così $\frac{\omega}{2\pi}$. $\frac{\omega}{2\pi}$ entra a sua volta in due blocchi, denominati come *'product'* e *'product1'*; in *'product'* viene

moltiplicato per $\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1}{n}} V_c$, mentre in *'product1'* viene moltiplicato per $S_n'(t)$.

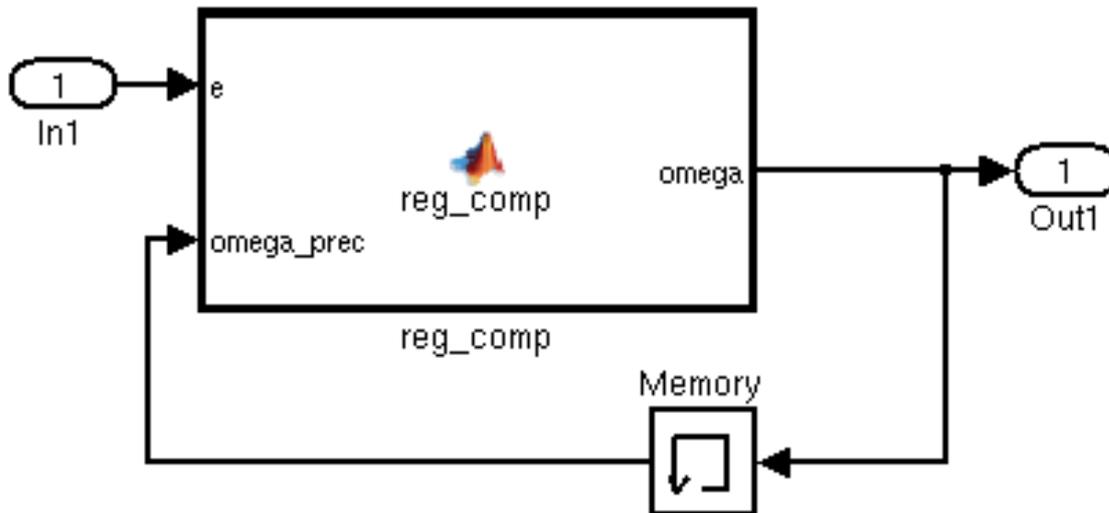
All'uscita da *'product1'* si ha quindi $\frac{\omega}{2\pi} S_n'(t)$, che viene in seguito moltiplicato per la costante $\left[\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1}{n}}$. Al comparatore, denominato come *'comp'* si fa la differenza fra ciò che si è ottenuto ai blocchi precedenti:

$$\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1}{n}} V_c \frac{\omega}{2\pi} - \left[\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\omega}{2\pi} S_n'(t)$$

e si ottiene così l'output (Out1), che altro non è che la portata $Q_c(t)$.

4.3.5 Blocco del regolatore

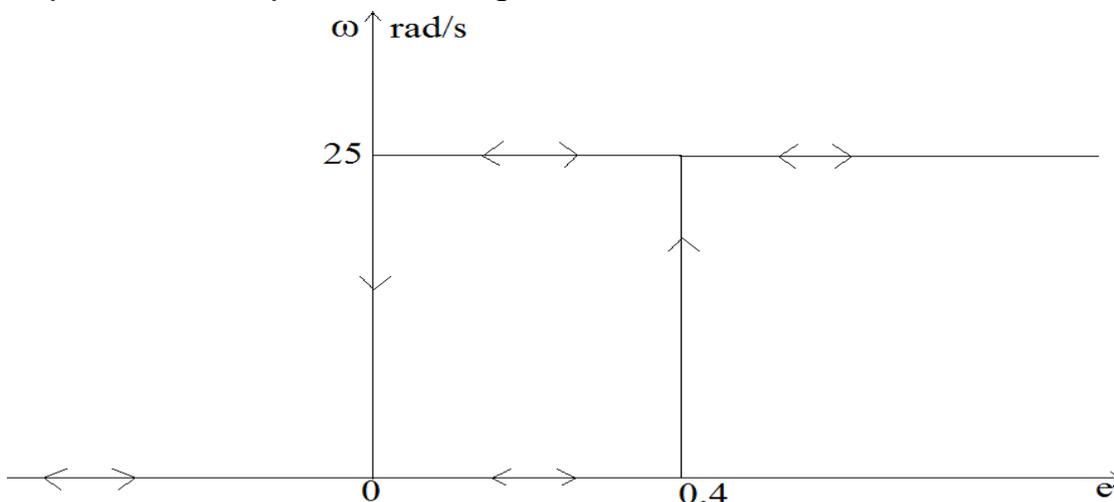
Il regolatore del compressore, denominato come 'reg', all' interno è fatto nel seguente modo:



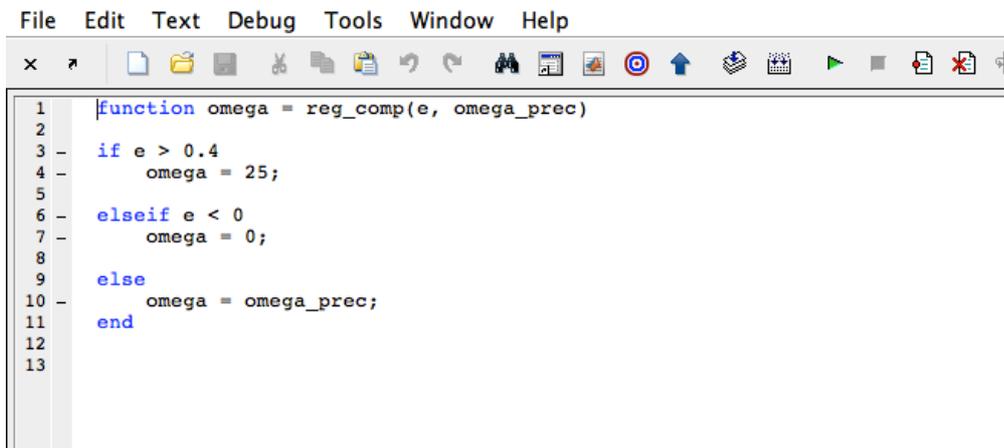
L'input 1 (*In1*), che come già specificato rappresenta l'errore e dato dalla differenza tra pressione di riferimento e pressione nel serbatoio, entra nel blocco denominato come '*reg_comp*', insieme a un secondo input che rappresenta la velocità angolare del ciclo precedente (*omega_prec*).

Se $e > 0.4$, cioè $P_s < 1.1 \text{ bar}$ il blocco fa in modo che $\omega = 25 \text{ rad/s}$, se invece $e < 0$, cioè $P_s > 1.5 \text{ bar}$ ω viene settata al valore nullo. In tutti gli altri casi ω viene fatta coincidere con il valore precedente (*omega_prec*).

In pratica il compressore è regolato con una isteresi:



All' interno di 'reg_comp' è presente infatti un programma Matlab che non fa altro di applicare quanto sopra specificato:

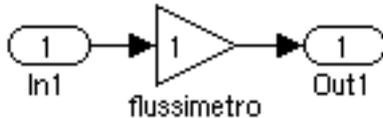


```
File Edit Text Debug Tools Window Help
x ↗ [Icons]
1 function omega = reg_comp(e, omega_prec)
2
3 - if e > 0.4
4 -     omega = 25;
5
6 - elseif e < 0
7 -     omega = 0;
8
9 else
10 -     omega = omega_prec;
11 end
12
13
```

Sul ramo di retroazione della velocità angolare, è presente il blocco 'Memory', il quale è necessario per evitare che la simulazione dia degli avvertimenti, perché in tal caso si avrebbero degli 'open loop', dovuti al fatto che all' inizio della simulazione la retroazione non può avvenire in quanto 'omega_prec' non ha ancora un valore. 'Memory' permette di attribuire un valore iniziale a 'omega_prec'.

4.3.6 Blocco del flussimetro e del manometro

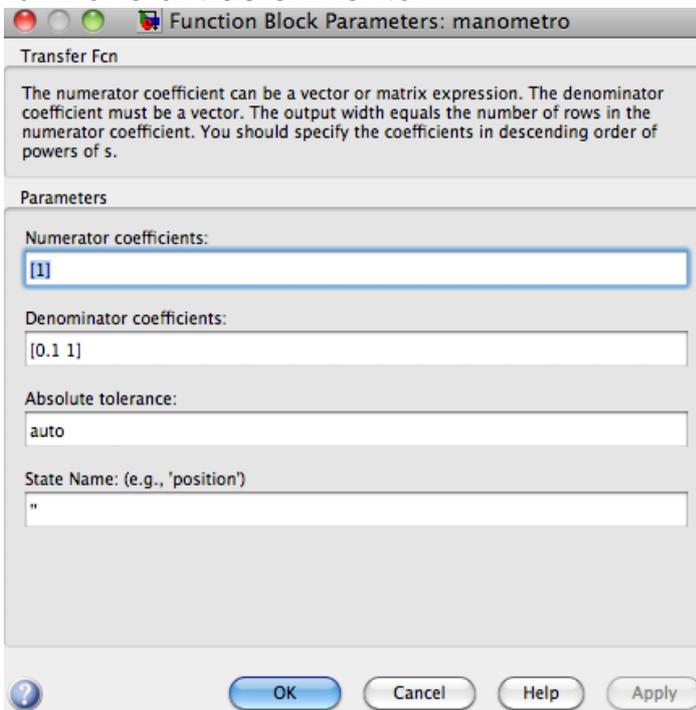
I blocchi di flussimetro e manometro sono quelli più semplici. Il flussimetro ha semplicemente lo scopo di trasdurre il segnale di portata in volume in tensione elettrica, e può essere schematizzato con un blocco moltiplicatore (chiamato 'gain') di costante unitaria. Al suo interno il flussimetro risulta quindi:



L' input 1 (*In1*) è la portata richiesta dall' utenza Q_u , e l' output 1 (*Out1*) è la stessa portata ma trasdotta in tensione.

Anche il manometro in linea di principio potrebbe essere schematizzato nello stesso modo del flussimetro, ma per rendere il blocco un po' più verosimile, è stata considerata una funzione di trasferimento del primo ordine: $\frac{1}{0.1s+1}$, per tenere conto del fatto che le misurazioni non sono perfette, introducendo un ritardo.

All'interno del blocco basta semplicemente inserire i coefficienti della funzione di trasferimento:

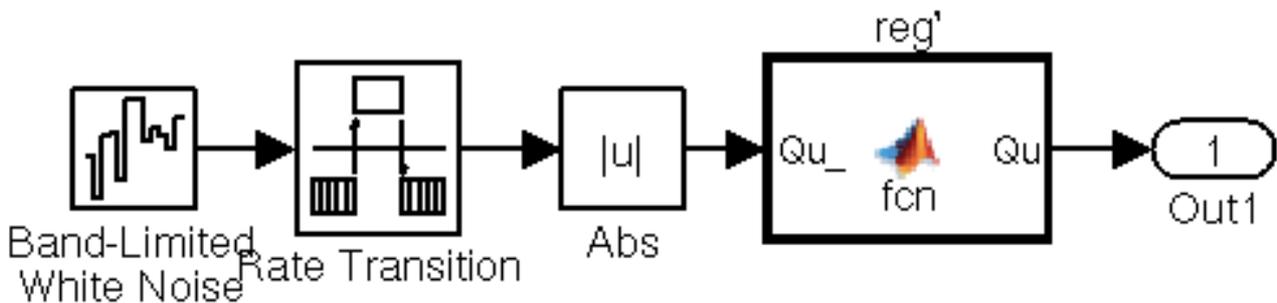


4.3.7 Blocco dell'utenza

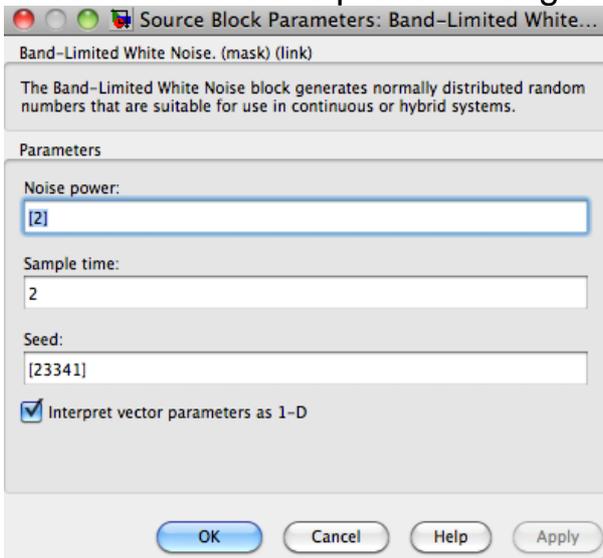
L'ultimo blocco che rimane da considerare prima di mostrare i risultati delle simulazioni, è il blocco utenza.

Dato che l'utenza può richiedere un qualsiasi valore di portata Q_u fra 0 e Q_{umax} , non si può a priori conoscere l'andamento della Q_u nel tempo. Quello che si può fare è cercare di studiare il sistema in condizioni critiche, in modo che qualora funzioni bene in tali condizioni, si potrà concludere che si comporterà bene anche in condizioni meno stringenti.

Si è preso un andamento ad onda quadra di Q_u , con il valore dell'onda variabile ogni 2 secondi. Al suo interno il blocco si presenta come segue:



Il blocco '*Band – Limited White Noise*' genera l'andamento ad onda quadra. Al suo interno sono presenti i seguenti parametri:



'Noise power' regola la ampiezza dell'onda mentre 'Sample time' regola l'ampiezza dell'intervallo in cui non si hanno variazioni dell'onda.

Il blocco '*Rate – Transition*' serve a coordinare tra loro due diverse velocità: una è la velocità di variazione dell'onda quadra e l'altra è la velocità della simulazione (velocità di campionamento); dato che l'onda quadra varia ogni

2 secondi e il tempo di campionamento viene preso pari a 0.01 secondi, Simulink genererebbe un errore se si facesse partire la simulazione senza il blocco 'Rate – Transition'. Quindi è necessario inserirlo.

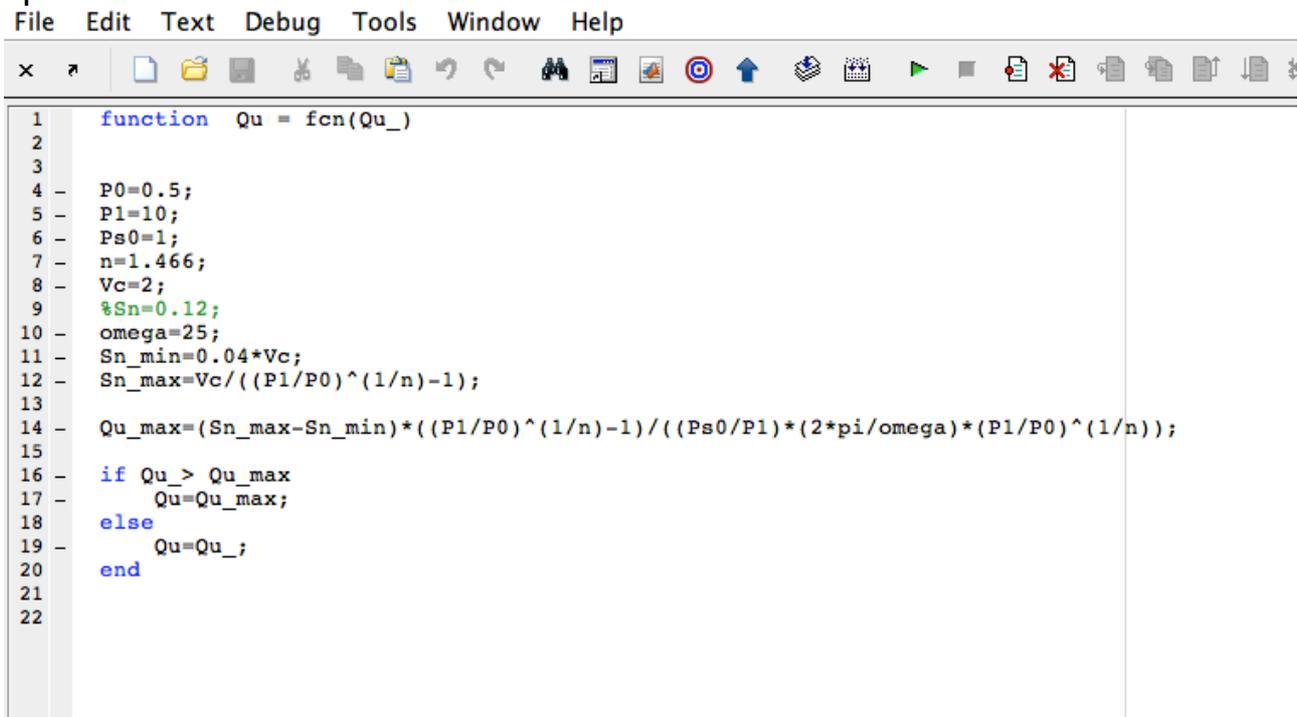
Il blocco 'Abs' invece, non fa altro che prendere il valore assoluto della portata, dato che l'onda generata dal blocco 'Band – Limited White Noise' potrebbe anche essere negativa, valore ovviamente non possibile.

Infine è presente il blocco reg' , il quale serve a limitare il valore superiore che può assumere la portata Q_u . E' già stata ricavata in precedenza, la portata massima Q_{umax} che può richiedere l'utenza:

$$Q_{umax}(t) = \left[\frac{V_c}{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1} - 0.04 \cdot V_c \right] \frac{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{P_{s0}}{P_1} \frac{2\pi}{\omega} \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

Il blocco fa in modo che se la portata che esce dal blocco 'Band – Limited White Noise' e da 'abs' è $> Q_{umax}$, la portata Q_u viene settata pari a Q_{umax} , altrimenti viene lasciata così com'è.

All' interno di reg' è presente un programma Matlab che realizza quanto specificato:

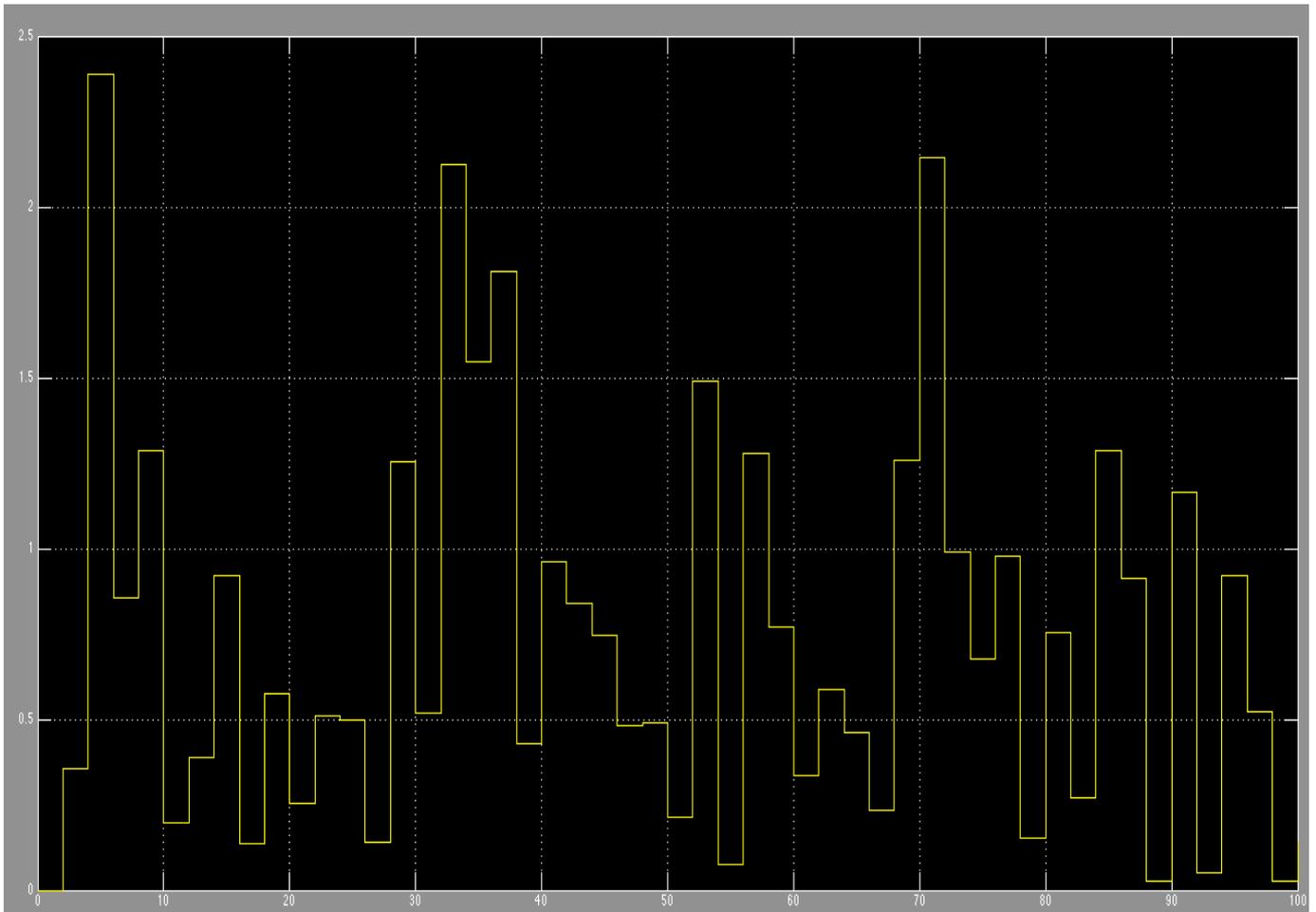


```

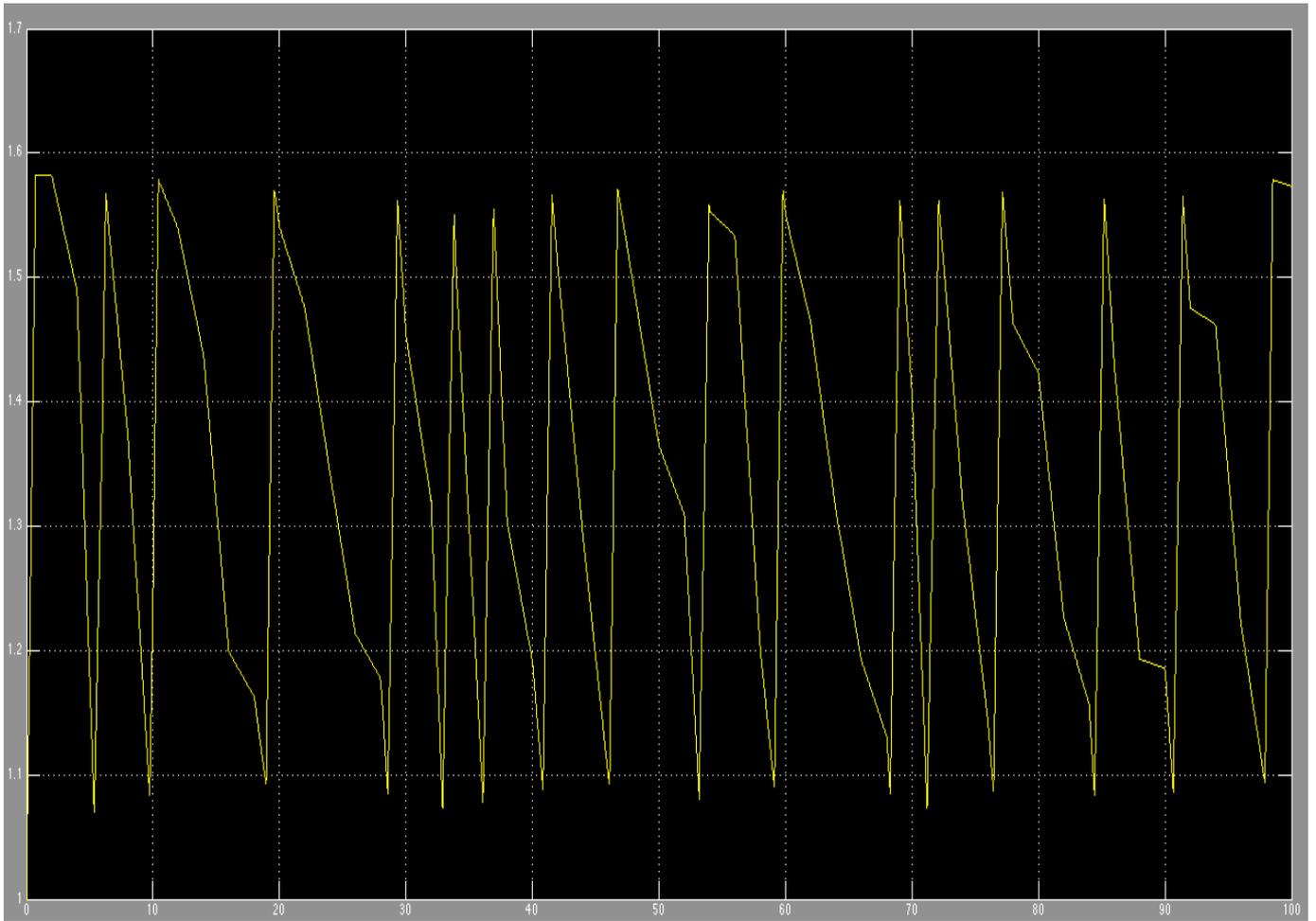
File Edit Text Debug Tools Window Help
x [Icons]
1 function Qu = fcn(Qu_)
2
3
4 P0=0.5;
5 P1=10;
6 Ps0=1;
7 n=1.466;
8 Vc=2;
9 %Sn=0.12;
10 omega=25;
11 Sn_min=0.04*Vc;
12 Sn_max=Vc/((P1/P0)^(1/n)-1);
13
14 Qu_max=(Sn_max-Sn_min)*((P1/P0)^(1/n)-1)/((Ps0/P1)*(2*pi/omega)*(P1/P0)^(1/n));
15
16 if Qu_ > Qu_max
17     Qu=Qu_max;
18 else
19     Qu=Qu_;
20 end
21
22
  
```

4.4 Simulazione dell' impianto senza sistema di controllo di modifica del volume nocivo

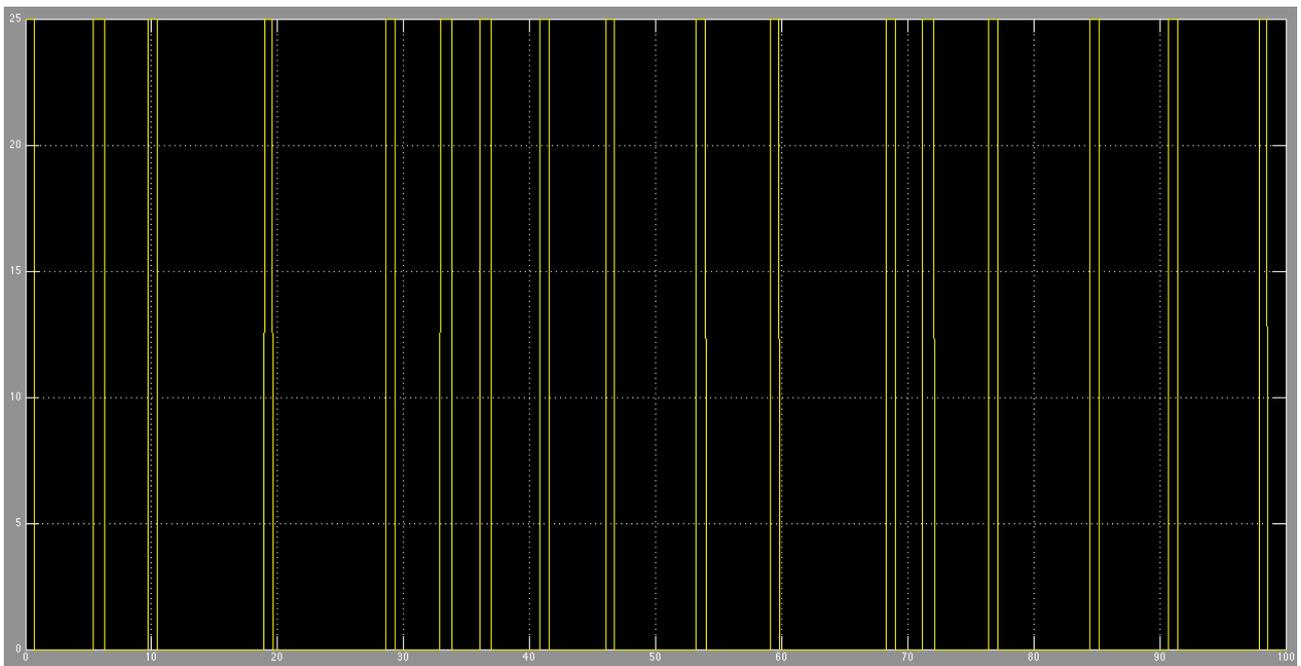
Non resta ora che mostrare i risultati delle simulazioni dei sistemi implementati. Partendo dall' impianto senza il sistema di controllo, vengono nel seguito riportati gli andamenti rispettivamente delle grandezze Q_u , P_s , ω , con tempo di simulazione pari a 100 *secondi*.



andamento di Q_u nel tempo



andamento di P_s nel tempo



andamento di ω nel tempo

Le caratteristiche dei grafici più importanti da notare sono: il numero elevato di avviamenti del compressore (17), e l'oscillazione della pressione P_s fra circa 1.6 *bar* e 1.1 *bar*.

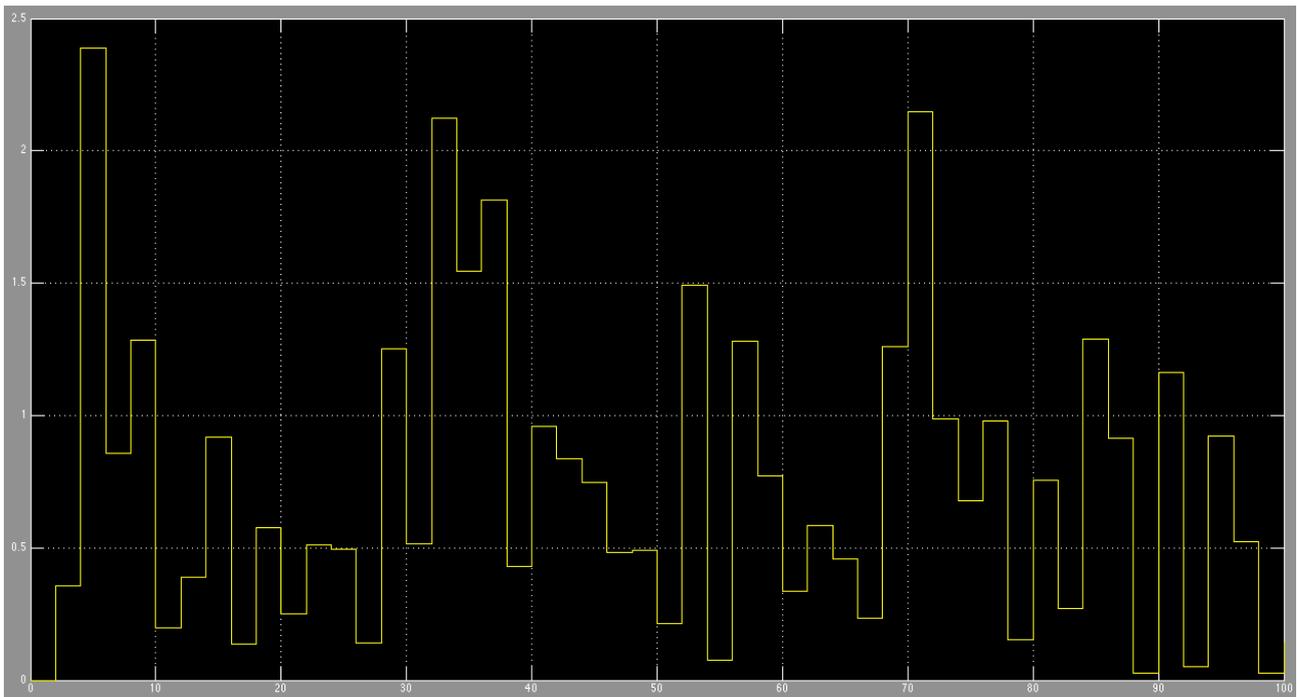
Tale numero di avviamenti aumenta i costi energetici del compressore e rischia inoltre di danneggiarlo.

L'oscillazione della pressione invece rischia di portare alla rottura il serbatoio qualora la pulsazione della pressione sia pari alla pulsazione di risonanza del serbatoio stesso.

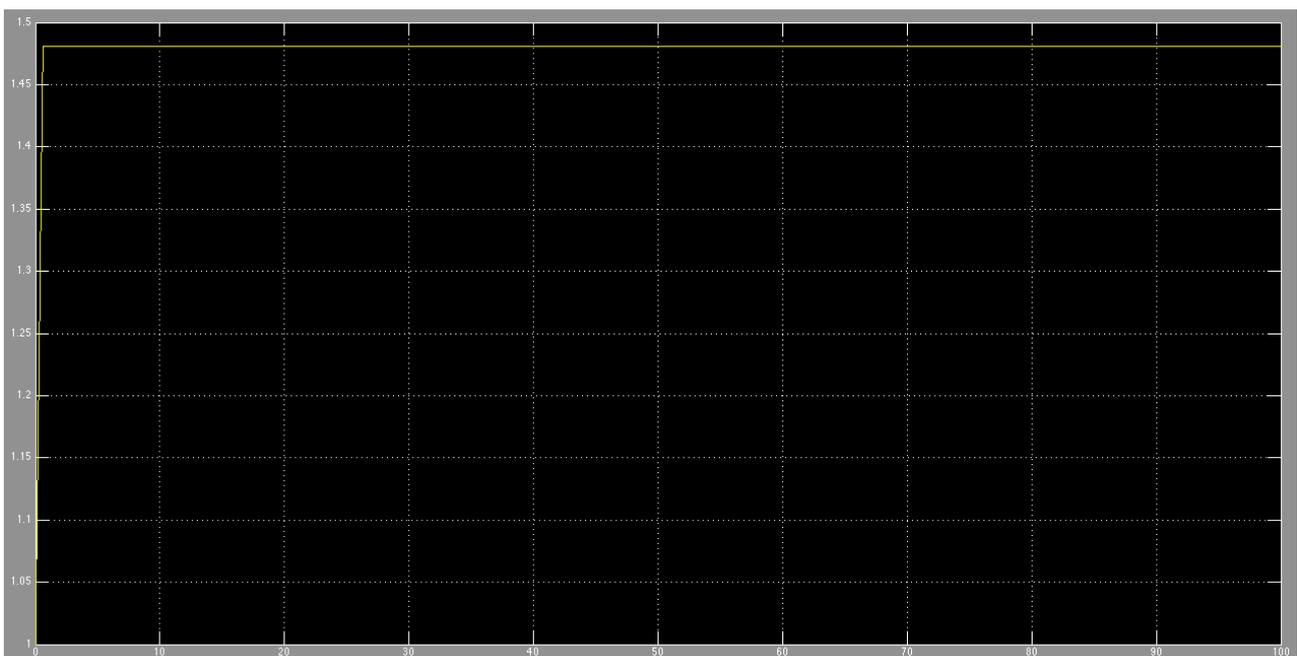
E' necessario inoltre rivedenziare che la pressione di riferimento P_{rif} , la quale viene paragonata al comparatore alla pressione effettiva nel serbatoio P_s , è stata scelta pari a 1.5 *bar*, che è un valore basso come già menzionato nel paragrafo 4.3.1. Tuttavia, questo è un modo per testare il sistema in condizioni più critiche, e quindi qualora funzioni bene in tali condizioni, funzionerebbe bene a maggior ragione in condizioni meno limitanti, scegliendo un valore di P_{rif} superiore. Come già detto, sono stati scelti anche dei valori 'critici' per la superficie di base del pistone S e per la pressione di mandata P_1 .

4.5 Simulazione dell' impianto con sistema di controllo di modifica del volume nocivo

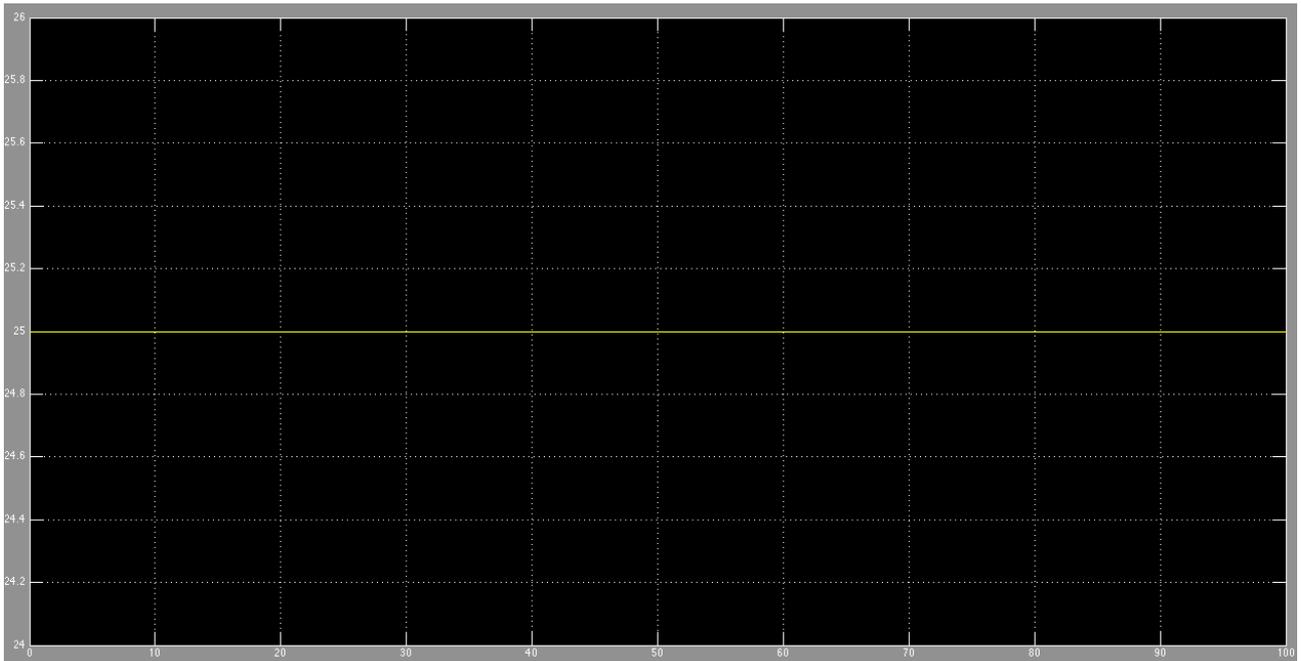
Per l' impianto dotato di sistema di controllo, vengono nel seguito riportati gli andamenti rispettivamente delle grandezze Q_u , P_s , ω , S_n' con tempo di simulazione sempre pari a 100 *secondi*.



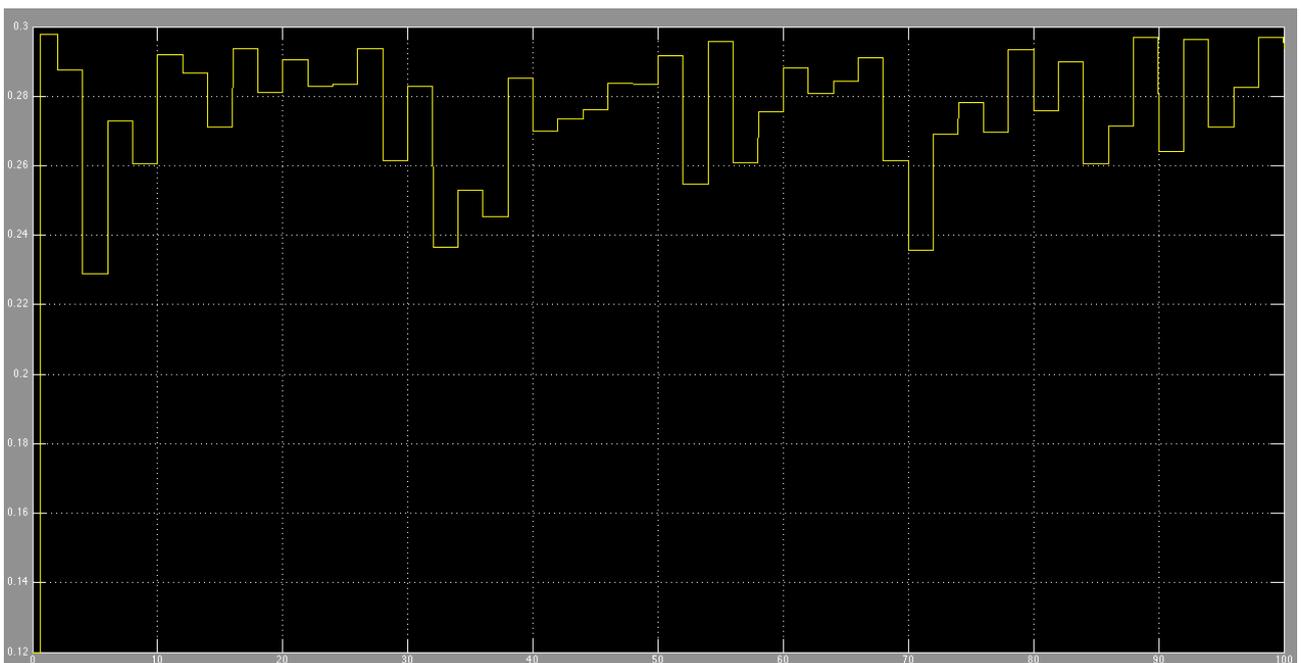
andamento di Q_u nel tempo (stesso andamento della Q_u dell' impianto senza il sistema di controllo)



andamento di P_s nel tempo



andamento di ω nel tempo



andamento di S_n' nel tempo

Dai risultati si vede che a differenza dell' impianto non dotato di sistema di controllo, il compressore ha un solo avviamento perché ω rimane costante, con notevole risparmio energetico e prevenendo possibili guasti e surriscaldamenti del compressore.

La P_s invece tende a crescere solo inizialmente, da 1 *bar* raggiunge un valore vicino a 1.5 *bar* e da quell' istante in poi rimane costante, evitando così l'instaurarsi di sovrappressioni o variazioni cicliche di pressione, che come

già menzionato possono far scaturire fenomeni di risonanza, dannosi per il serbatoio di accumulo.

L' unica grandezza che varia notevolmente è lo spazio nocivo S_n' , la cui variazione è dovuta alla variazione della portata richiesta dall' utenza Q_u , che varia ogni 2 secondi; quindi anche S_n' varia ogni 2 secondi.

A differenza del motore elettrico del compressore, non si hanno avviamenti del motorino elettrico ME , il quale come noto permette la variazione del volume nocivo S_n' , poiché esso rimane sempre acceso essendo alimentato con una certa tensione $V(t)$; ciò che permette di muovere e successivamente fermare le ruote accoppiate al motorino è, come già evidenziato in precedenza, l' insieme *cambio a due ingranaggi + freno*. E' infatti l' inserimento o disinserimento del cambio che ne permette il moto; successivamente all' inserimento del cambio il freno ferma le ruote, pensando di sincronizzarlo con un certo tempo di ritardo rispetto al cambio (verrà mostrato nel paragrafo 5.2 come calcolare tale tempo di ritardo).

Si vedrà inoltre nel paragrafo 5.3 come valutare il risparmio economico che si ha con l' introduzione del sistema di controllo.

4.6 Perfezionamento dell' impianto con sistema di controllo di modifica del volume nocivo

Prima di valutare l' economia del sistema di controllo, si vedrà in questo paragrafo come poter rendere ancora più realistico il sistema di controllo introdotto a partire dal paragrafo 4.3.

Si è già accennato al fatto che nello schema Simulink non sono stati considerati i seguenti aspetti: le valvole di non ritorno e di sicurezza presenti nell' impianto ad aria compressa, il refrigeratore e lo scaricatore di condensa, in quanto non necessari per il corretto funzionamento del sistema; si sono inoltre trascurate le cadute di pressione che si hanno nel tratto che va dall' uscita dal compressore fino all' arrivo nel serbatoio di accumulo, per lo stesso motivo.

Proprio per la non necessità di dover considerare tali aspetti, essi non verranno aggiunti neanche in questo paragrafo.

Ciò che è necessario aggiungere sono invece due aspetti importanti: il transitorio del compressore, il quale, per accendersi o spegnersi impiega del tempo, e il transitorio del servo di posizione, il quale modifica lo spazio nocivo durante la fase di aspirazione del compressore.

Per aggiungere i transienti, sono stati utilizzati dei blocchi rispettivamente a valle di compressore ed a valle di servo di posizione che ritardano le uscite. I blocchi sono costituiti da una funzione di trasferimento, scelta del primo ordine, del tipo:

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

come quella usata per il manometro, la quale, per la presenza del parametro τ ritarda l' uscita.

Essendo noto dalla teoria dei Controlli Automatici, che la risposta $y(t)$ ad ingressi costanti k di tale funzione di trasferimento è del tipo:

$$y(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

si definisce tempo di assestamento T_a il tempo che impiega l' uscita $y(t)$ a raggiungere il 95% del suo valore a regime y_r , sapendo che:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_r = k$$

Quindi si può scrivere:

$$k - y(T_a) = 0.05k$$

da cui:

$$k - k \left(1 - e^{-\frac{T_a}{\tau}} \right) = 0.05k \rightarrow -\frac{T_a}{\tau} = \ln(0.05) \approx -3 \rightarrow \tau \approx \frac{T_a}{3}$$

Fissando per il compressore, un transitorio di 1s, si ottiene: $\tau \approx \frac{1}{3} \approx 0.33$ s, quindi una funzione di trasferimento, per l'aggiunta del ritardo in Simulink pari a:

$$G_{compressore}(s) = \frac{1}{0.33s + 1}$$

Per il transitorio del servo di posizione invece, sapendo che il volume nocivo viene modificato durante l'aspirazione, quando la pressione nel cilindro è pari a P_0 , il tempo di assestamento deve essere al massimo uguale a circa $\frac{\pi}{\omega}$, che è appunto il tempo di aspirazione.

L'aspirazione in realtà, avviene in un tempo leggermente minore di $\frac{\pi}{\omega}$ perché la valvola di aspirazione non si apre subito a punto morto superiore ma, riferendosi al diagramma $P - V$ di compressore visto nel paragrafo 2.1, si apre a partire dal punto 4 e rimane aperta fino al punto 1; tuttavia, dato che l'angolo di manovella (angolo α nella prima figura del paragrafo 5.1) quando viene aperta la valvola non è molto lontano dai 180° (risulta circa $150^\circ - 160^\circ$), si commette un errore trascurabile approssimando il tempo di aspirazione a $\frac{\pi}{\omega}$.

Volendo il tempo esatto, esso si potrebbe esprimere come: $\frac{\pi - \alpha_a}{\omega}$, dove con α_a si è indicato l'angolo di apertura della valvola di aspirazione; tale angolo, come si vedrà nel paragrafo 5.1, è esprimibile analiticamente in funzione di grandezze note; tuttavia nel seguito si considererà il tempo di aspirazione pari a $\frac{\pi}{\omega}$.

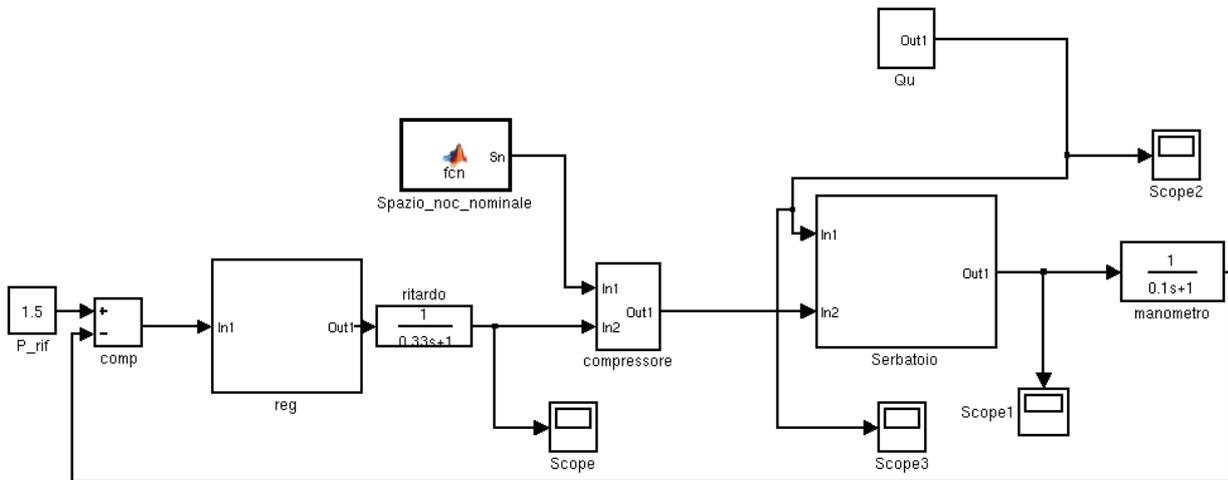
Essendo $\omega = 25$ rad/s come da simulazione, ponendo il tempo di assestamento pari al tempo di aspirazione $\frac{\pi}{\omega}$, si ottiene il parametro τ della funzione di trasferimento che ritarda il servo di posizione:

$$\tau \approx \frac{T_a}{3} = \frac{\pi}{3\omega} \approx 0.04$$
 s

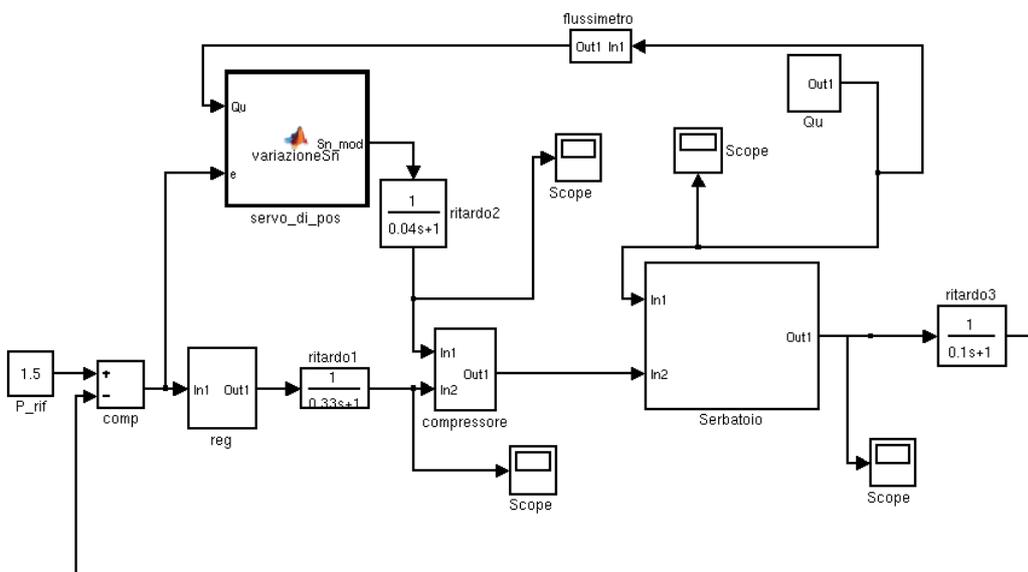
e quindi:

$$G_{servo_di_posizione}(s) = \frac{1}{0.04s + 1}$$

L'aggiunta di queste funzioni è stata fatta sia per l'impianto senza sistema di controllo che per quello con sistema di controllo:



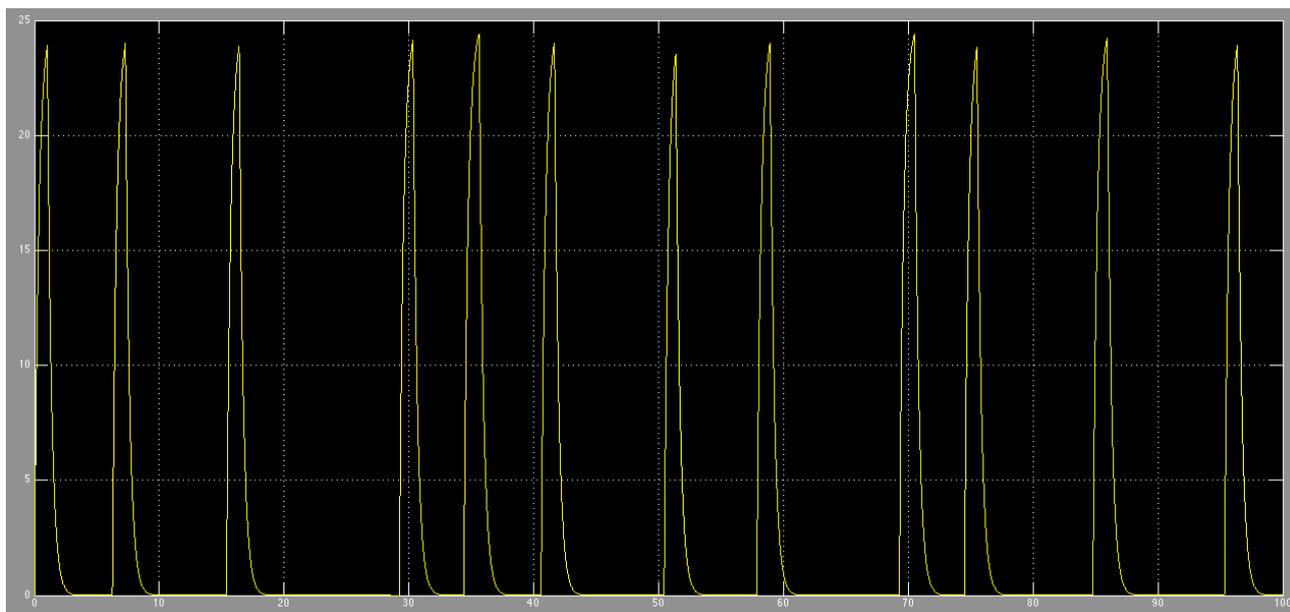
impianto senza sistema di controllo



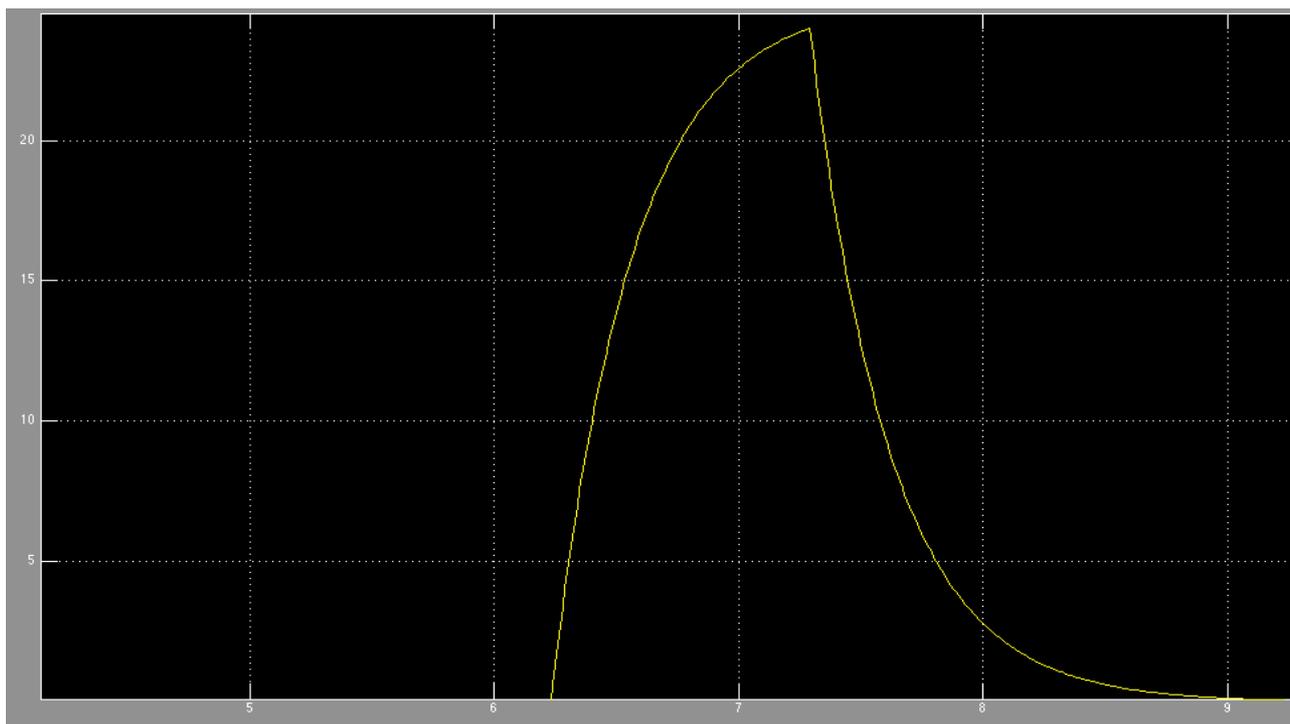
impianto con sistema di controllo

I risultati della simulazione sono leggermente diversi rispetto a quelli visti, qui di seguito si riportano gli andamenti più importanti, che sono quelli di pressione nel serbatoio e velocità angolare del compressore.

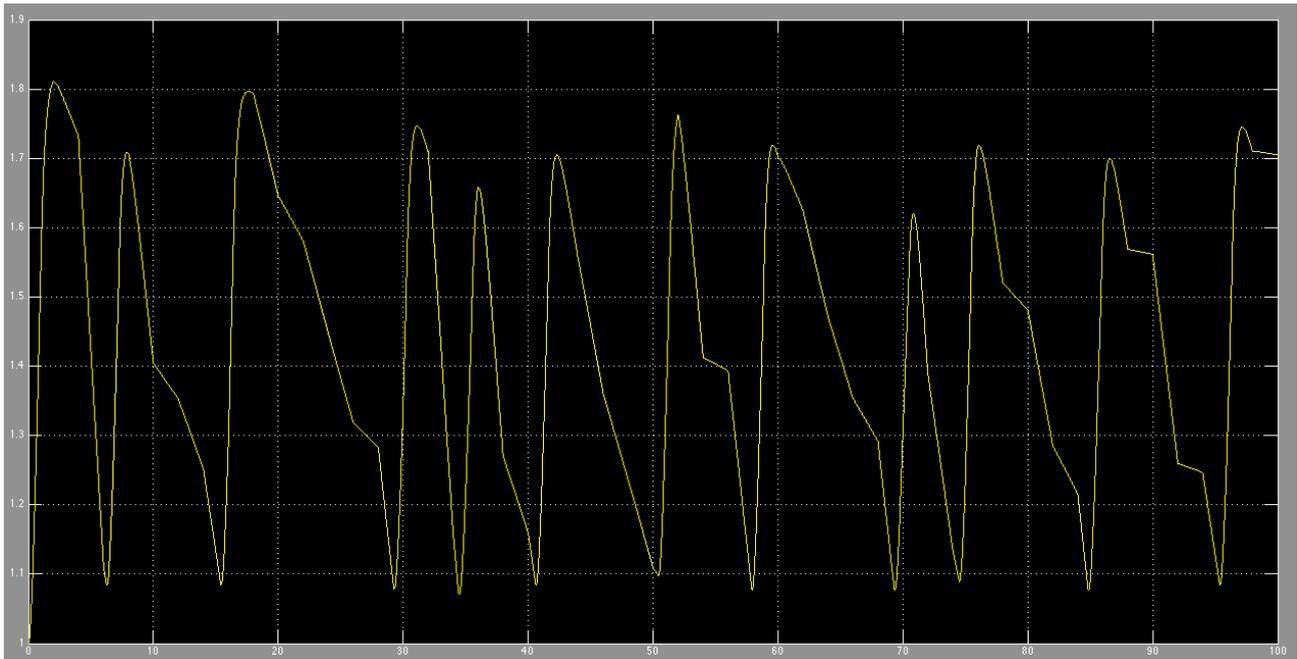
Partendo dall' impianto senza sistema di controllo:



velocità angolare con introduzione del ritardo del compressore

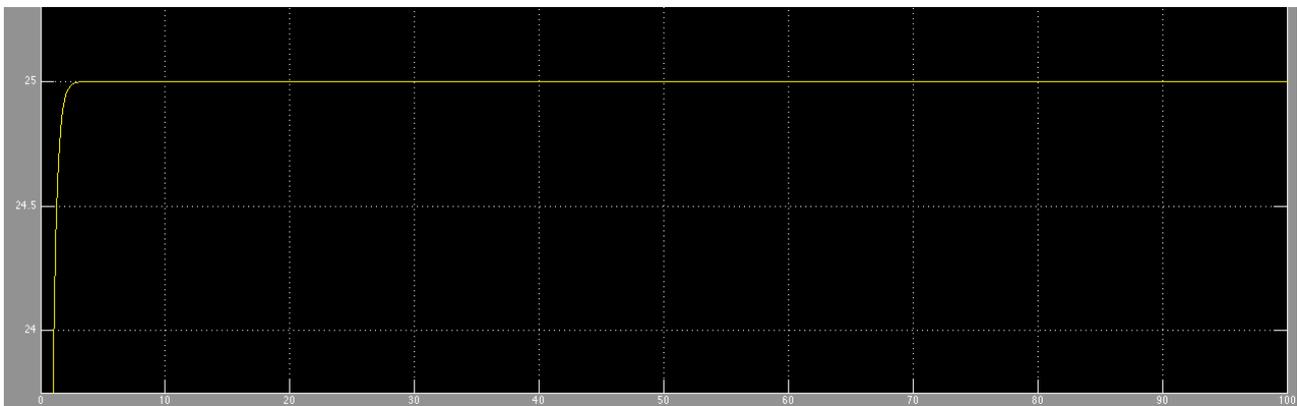


velocità angolare: ingrandimento per mostrare il ritardo

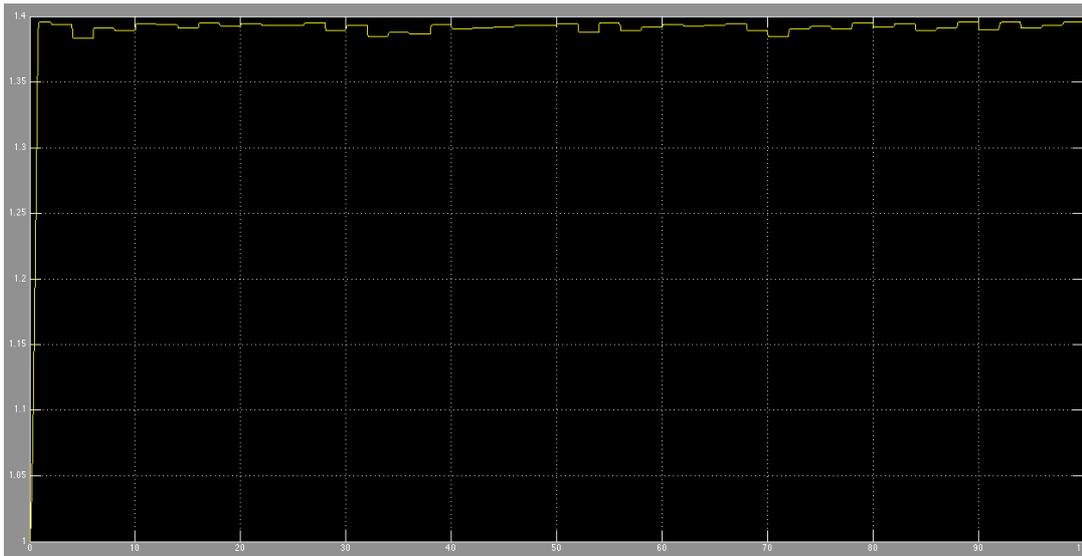


pressione con introduzione del ritardo del compressore

Impianto con sistema di controllo:



velocità angolare con introduzione del ritardo del compressore e del servo di posizione



andamento pressione con introduzione del ritardo del compressore e del servo di posizione

Come si vede dai grafici, le cose non cambiano molto rispetto a quanto visto nei paragrafi 4.4 e 4.5: si ha infatti sempre un solo avviamento per l' impianto con sistema di controllo, mentre 12 avviamenti per l' impianto senza sistema di controllo (leggermente inferiori ai 17 visti nel paragrafo 4.4).

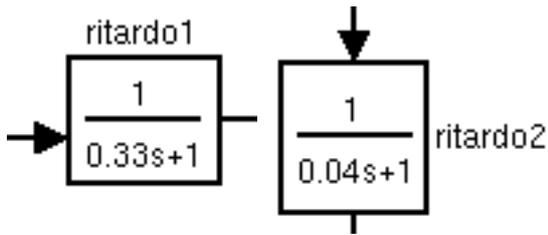
Cambia leggermente di più la curva di pressione del serbatoio per l' impianto con sistema di controllo: si hanno infatti un po' più di oscillazioni dovute al ritardo, che rendono difficile il mantenimento della pressione ad un valore costante; tuttavia esse sono molto contenute guardando l' ampiezza di oscillazione dal grafico.

Si è dovuto modificare leggermente la funzione del servo di posizione: in particolare la condizione sull' ingresso e , il quale è dovuto allo scostamento della pressione del serbatoio da quella di riferimento.

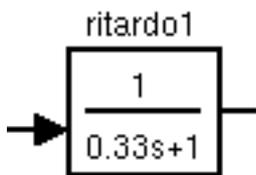
Come visto nel paragrafo 4.3.3, dato che la pressione iniziale nel serbatoio di accumulo è 1 *bar*, all'inizio $e = 0.5$; qualora si modificasse subito il volume nocivo, la pressione rimarrebbe sempre pari al valore di 1 *bar*, diversa dal valore di riferimento. Invece, facendo passare un paio di cicli, la pressione nel serbatoio inizia ad aumentare e quindi e cala, e nel paragrafo 4.3.3 si è iniziato a modificare il volume nocivo a partire dal raggiungimento della condizione $e \leq 0.1$ (cioè quando la pressione nel serbatoio raggiungeva circa 1.4 *bar*) per tenere costante da lì in avanti la pressione nel serbatoio.

Tuttavia, dato che in questo caso ci sono dei ritardi, conviene modificare il volume nocivo prima che la pressione nel serbatoio raggiunga 1.4 *bar*, poiché i ritardi fanno in modo che nel frattempo la pressione aumenti ulteriormente, con rischio di spegnimento e riavviamento del compressore. E' stato scelto allora di modificare la condizione $e \leq 0.1$ in $e \leq 0.2$, per migliorare la prontezza del sistema.

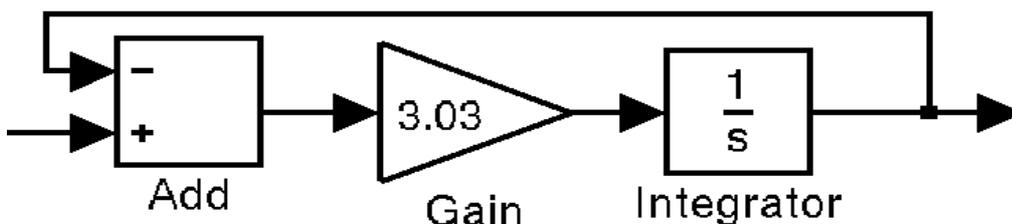
Bisogna poi dire che i due blocchi utilizzati per introdurre i ritardi:



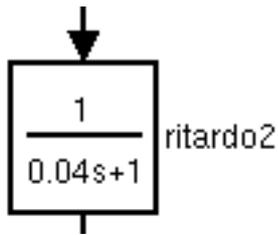
hanno come condizioni iniziali valori nulli, sia per lo spazio nocivo al tempo iniziale che per la velocità angolare al tempo iniziale; ciò è dovuto al modo in cui sono pre-impostate le funzioni Simulink. Per la velocità angolare la condizione è giusta, ma non per lo spazio nocivo, poiché all' inizio è in realtà pari al suo valore nominale (0.12 m^3) (anche il manometro avrebbe questo problema, non specificato nel paragrafo 4.3.6, poiché la sua condizione iniziale, cioè la pressione nel serbatoio, sarebbe 1 bar , mentre la funzione di trasferimento $\frac{1}{0.1s+1}$ utilizza la condizione iniziale di 0 bar). La simulazione va ritenuta corretta quindi, a partire da qualche istante dopo quello iniziale. Si potrebbero modificare le condizioni iniziali costruendo i blocchi di ritardo in altro modo; ad esempio, il blocco:



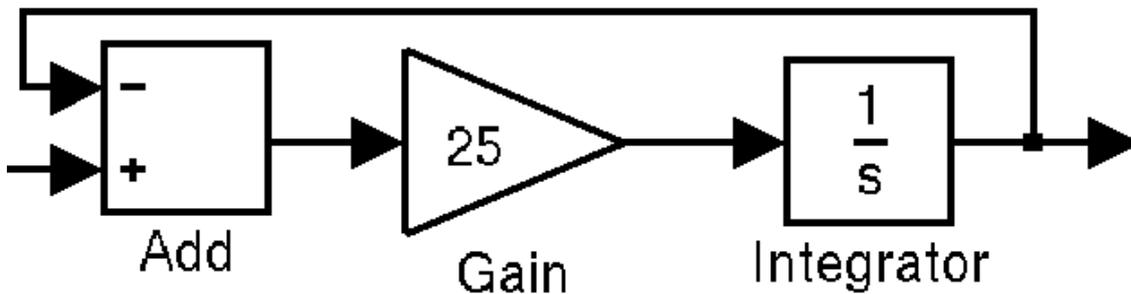
si può anche realizzare:



Si può dimostrare con qualche semplice passaggio (vedi sotto), che i due blocchi hanno la stessa funzione di trasferimento, quindi sono equivalenti; nell' ultimo blocco introdotto tuttavia, si può modificare la condizione iniziale inserendola nell' integratore, mentre in quello appena sopra, come già evidenziato, non è possibile, perché è settata al valore nullo. Allo stesso modo, anche il blocco:



ha il suo analogo:

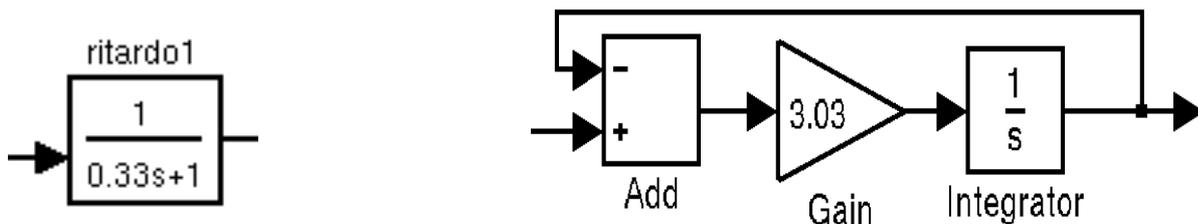


All' interno del 'Gain' si è inserito un numero che è pari al reciproco del parametro τ .

Chiamando $y(s)$ l' uscita e $x(s)$ l' ingresso, dall' ultimo blocco si ricava:

$$(x(s) - y(s)) \frac{25}{s} = y(s) \rightarrow \frac{y(s)}{x(s)} = G_{trasferimento_blocco}(s) = \frac{25}{s + 25} = \frac{1}{0.04s + 1}$$

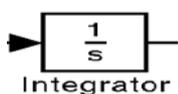
Quindi si vede che le funzioni di trasferimento coincidono. Analogamente si dimostra l' uguaglianza fra i blocchi:



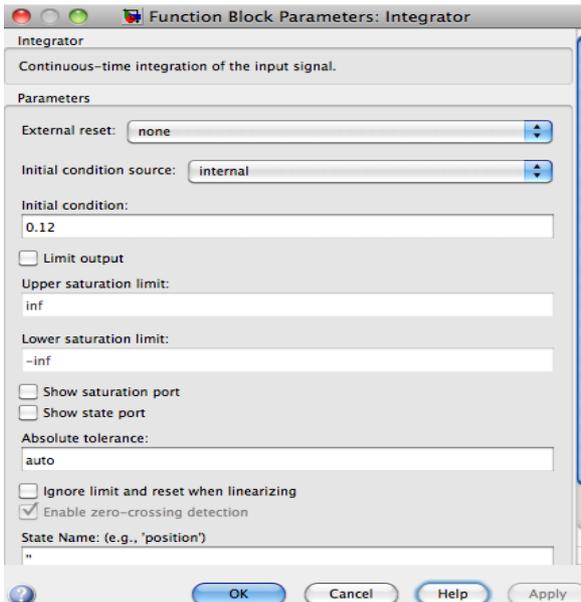
Infatti, chiamando sempre $y(s)$ l' uscita e $x(s)$ l' ingresso, dal blocco a destra si ricava:

$$(x(s) - y(s)) \frac{3.03}{s} = y(s) \rightarrow \frac{y(s)}{x(s)} = G_{trasferimento_blocco}(s) = \frac{3.03}{s + 3.03} = \frac{1}{0.33s + 1}$$

Per modificare la condizione iniziale, si apre il blocco dell' integratore:



e si modifica la voce 'initial condition':



la quale, per il blocco di ritardo del servo di posizione, è stata posta pari a 0.12, che rappresenta il valore iniziale dello spazio nocivo.

Inoltre, si accenna al fatto che i blocchi di ritardo possono essere anche costruiti con una funzione di trasferimento del secondo ordine invece che del primo, la quale, dalla teoria dei Controlli si può scrivere nella seguente forma:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

con δ coefficiente di smorzamento e ω_n pulsazione naturale.

Per ricavare δ e ω_n , quello che si fa di solito è fissare una sovraelongazione massima desiderata s (rapporto tra la differenza fra il valore massimo e il valore a regime della risposta e il valore a regime), in funzione della quale è possibile esprimere il coefficiente di smorzamento:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\ln(s)}\right)^2}}$$

Si può dimostrare (vedi ad esempio Dispense di 'Controlli Automatici' del Prof. Ing. Matteo Zanzi o qualsiasi testo sui Controlli Automatici) che il tempo di assestamento, per questo tipo di sistemi vale:

$$T_a \approx \frac{3}{\delta \omega_n}$$

Quindi, fissato il tempo di assestamento, si ricava conseguentemente:

$$\omega_n = \frac{3}{\delta T_a}$$

e si ottiene così sia δ che ω_n , da sostituire nella formula:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Per l'impianto ad aria compressa, il tempo di assestamento del compressore si era scelto pari ad 1 *secondo*, mentre quello del servo $\frac{\pi}{\omega} \approx 0.1257$ *secondi*.

Fissata una sovranelongazione s pari al 20% ($s = 0.2$), si ha:

ritardo servo di posizione

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\ln(0.2)}\right)^2}} \approx 0.4559$$

$$\omega_n = \frac{3}{\delta T_a} \approx \frac{3}{0.4559 \cdot 0.1257} \approx 52.35 \text{ rad/s}$$

ritardo compressore

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\ln(0.2)}\right)^2}} \approx 0.4559$$

$$\omega_n = \frac{3}{\delta T_a} \approx \frac{3}{0.4559 \cdot 1} \approx 6.58 \text{ rad/s}$$

da cui si ricavano le funzioni di trasferimento. Non se ne riportano i grafici poiché, seppur con qualche differenza, i risultati sono i medesimi.

Infine, è bene evidenziare che il volume nocivo, come visto in precedenza, viene modificato una sola volta per ciclo, durante la fase di aspirazione; quindi affinché il sistema funzioni in modo ottimale, la portata richiesta è bene che abbia un periodo maggiore di $\frac{2\pi}{\omega}$. Nella simulazione si è preso, come mostrato nel paragrafo 4.3.7, un periodo di 2 *secondi*, che è maggiore di $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{25} \approx 0.25$ *secondi*, quindi la condizione viene rispettata.

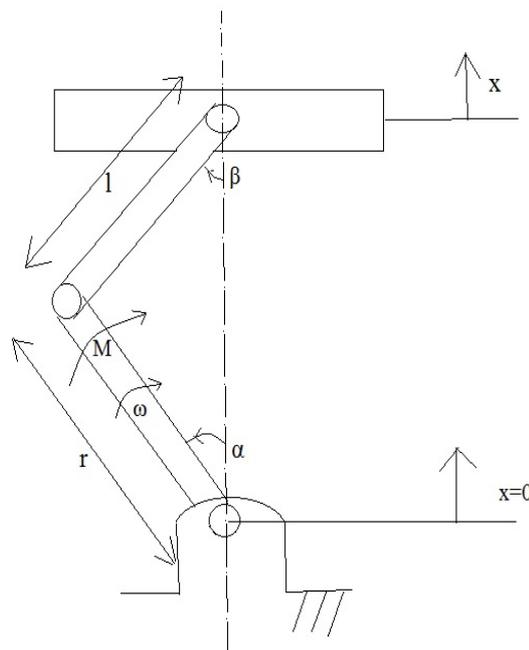
5) Risparmio economico

5.1 Scelta del motore elettrico del compressore

Prima di cercare di quantificare i costi, è necessario conoscere la potenza nominale dei motori elettrici di compressore e motorino elettrico ME , dato che da questa essi dipendono.

Partendo dal compressore, per determinarne la potenza elettrica necessaria al suo funzionamento bisogna studiare l'equilibrio dinamico delle forze e dei momenti nel manovellismo di spinta.

Si considera lo schema seguente:



Siano:

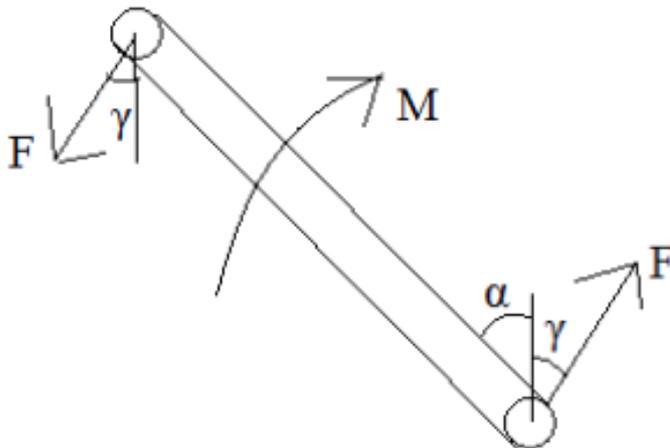
r raggio di manovella, l lunghezza di biella, x posizione del pistone, α angolo di manovella rispetto alla verticale, β angolo di biella rispetto alla verticale, ω velocità angolare della manovella, M coppia agente sulla manovella.

N.B: non confondere la posizione x del pistone con la posizione x del blocchetto di massa M .

L'obbiettivo dello studio dell'equilibrio sarà quello di determinare l'andamento (nel tempo) di $M(t)$, da cui si potrà risalire alla potenza elettrica che dovrà essere in grado di erogare il motore.

Si studiano qui nel seguito, l'equilibrio dinamico della manovella e l'equilibrio dinamico di *biella + pistone*. Si trascureranno gli attriti nelle coppie rotoidali.

Equilibrio di manovella:



Sulla manovella agisce una forza F (vettore \vec{F}) che scaturisce dal contatto con la biella, la quale in generale è inclinata di un angolo γ rispetto alla verticale (incognito). La coppia rotoidale che accoppia la manovella al telaio reagisce con una forza avente stessa direzione e verso opposto ad F (supponendo di trascurare per il momento la forza centrifuga agente sulla manovella e la forza peso della manovella), e le due forze sono tale che valga l'equilibrio dei momenti:

$$M(t) = F(t) \cdot \sin(\alpha(t) + \gamma(t)) \cdot r$$

Si può considerare l'equilibrio dei momenti per la manovella in quanto la velocità angolare la si suppone costante (e quindi accelerazione angolare nulla), e vale la seguente relazione:

$$\omega = -\dot{\alpha}(t)$$

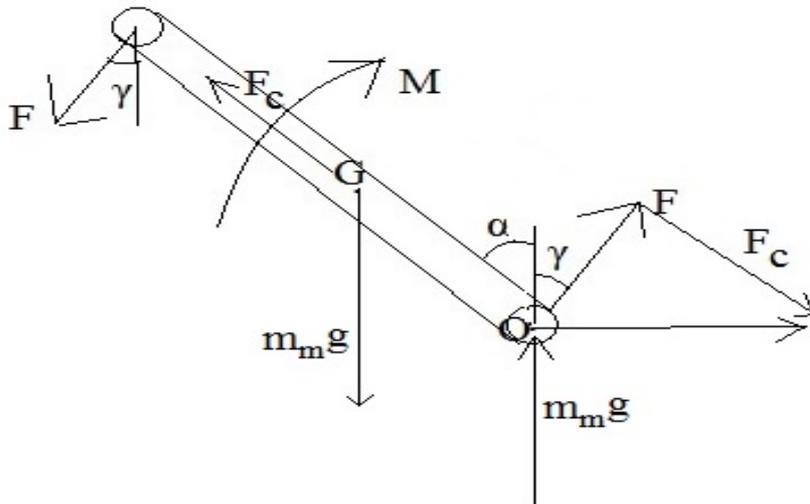
la quale integrata:

$$\int_0^t \omega dt = \int_0^t -\dot{\alpha}(t) dt$$

fornisce:

$$\alpha(t) = \alpha_0 - \omega t$$

Qualora la forza centrifuga e la forza peso agente sulla manovella non fosse trascurabile, il disegno si modificherebbe nel seguente modo:



La forza centrifuga può essere applicata nel baricentro (G), infatti per un punto P qualsiasi appartenente alla manovella (considerata come corpo rigido) si può scrivere:

$\overline{v_p(t)} = \overline{\omega} \wedge \overline{OP(t)}$, cioè la velocità del punto P è uguale al prodotto vettoriale tra la velocità angolare e il vettore \overline{OP} , con O centro di istantanea rotazione (poiché è solidale al telaio).

Derivando tale relazione rispetto al tempo, ricordando che $\overline{\omega}$ è costante si ottiene l'accelerazione del punto P : $\overline{a_p(t)} = \overline{\omega} \wedge \overline{v_p(t)}$.

La forza centrifuga è:

$$\overline{F_c(t)} = \iiint_{m_m} -\overline{a_p(t)} dm$$

cioè l'integrale di tutte le forze centrifughe agenti sui punti generici P di masse infinitesime dm . L'integrale va calcolato su tutti i punti appartenenti alla manovella di massa m_m .

Il calcolo di tale integrale può essere svolto in maniera semplice:

$$\begin{aligned} \overline{F_c(t)} &= \iiint_{m_m} -\overline{a_p(t)} dm = -\iiint_{m_m} \overline{\omega} \wedge \overline{v_p(t)} dm = -\overline{\omega} \wedge \iiint_{m_m} \overline{v_p(t)} dm = \\ &= -\overline{\omega} \wedge \overline{v_G(t)} m_m = -\overline{\omega} \wedge (\overline{\omega} \wedge \overline{OG(t)}) m_m = \omega^2 \overline{OG(t)} m_m \end{aligned}$$

Come si vede dal calcolo, l'integrale di tutte le forze agenti sulle masse infinitesime equivale ad un'unica forza agente nel baricentro della manovella pari a: $\overline{F_c(t)} = \omega^2 \overline{OG(t)} m_m$.

Tale forza agisce in direzione radiale come messo in evidenza nel disegno.

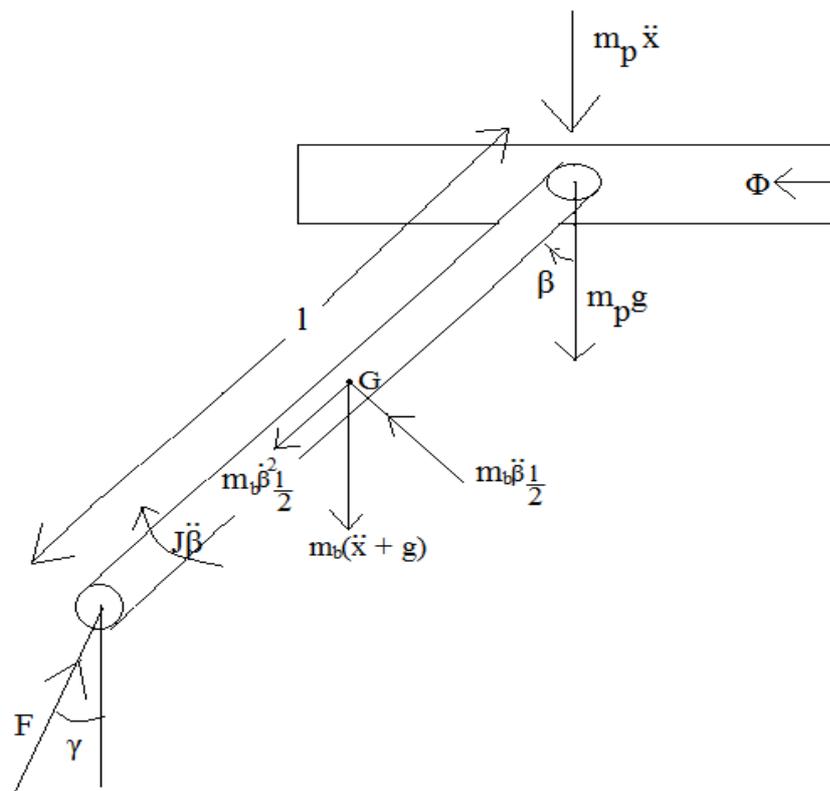
La reazione vincolare in O non sarà quindi data non più solamente dalla forza F , ma dalla composizione vettoriale: $-\overrightarrow{F}(t) - \overrightarrow{F_c}(t)$ ed inoltre va aggiunta anche una forza uguale e contraria alla forza peso agente nel baricentro $m_m \vec{g}$, con m_m massa della manovella.

L'equazione che verrà considerata nel modello, è soltanto quella dell'equilibrio dei momenti, la quale in questo caso diventa:

$$M(t) = F(t) \cdot \sin(\alpha(t) + \gamma(t)) \cdot r + m_m g \frac{l}{2} \sin(\alpha(t))$$

alla quale rispetto al caso senza forze dovute all'inerzia della manovella si aggiunge il termine $m_m g \frac{l}{2} \sin(\alpha(t))$, con $\frac{l}{2} \sin(\alpha(t))$ braccio della forza, supposto che il baricentro si trovi a metà della lunghezza della manovella.

Analizzando ora l'equilibrio dinamico dell'insieme *biella + pistone*, si può analizzare il seguente disegno:



Sul pistone agisce la forza peso $m_p g$ (con m_p si è indicata la massa del pistone) applicata nel baricentro e la forza di inerzia $m_p \ddot{x}(t)$ sempre applicata nel baricentro. Agirebbe inoltre anche la forza (diretta come $m_p \ddot{x}(t)$ e $m_p g$ e

avente anche stesso verso) dovuta alla spinta dell' aria che il pistone comprime durante la salita, ma se ne terrà conto più avanti. Infine, agisce la reazione vincolare Φ che il cilindro esercita sul pistone, dovuta alla spinta del pistone sul cilindro (il contatto viene considerato puntiforme). Viene trascurata la forza di attrito che il cilindro esercita sul pistone, riducibile comunque grazie ad una opportuna lubrificazione e lavorazione delle superfici.

Sulla biella invece agisce la forza F uguale e contraria a quella che agiva sulla manovella, la coppia di inerzia $J\ddot{\beta}(t)$ (J rappresenta il momento di inerzia della biella rispetto al suo baricentro), a differenza della manovella, per la quale non vi erano coppie di inerzia data la costanza della velocità angolare $\omega = -\dot{\alpha}(t)$. Agiscono, inoltre, nel baricentro G , oltre alla forza peso della biella $m_b g$ (m_b massa della biella), delle forze di inerzia. Nel caso della manovella come si è visto si era ricavata una forza centrifuga; in questo caso si possono ricavare le forze di inerzia con un ragionamento analogo. Indicando con B il punto della biella solidale (per mezzo della coppia rotoidale) al pistone, con G il baricentro della biella, con $\overrightarrow{\omega_b}$ la velocità angolare della biella e con l la lunghezza della biella, si può scrivere un'equazione che lega la velocità del baricentro $\overrightarrow{v_G}(t)$ a quella del punto B $\overrightarrow{v_B}(t)$:

$$\overrightarrow{v_G}(t) = \overrightarrow{v_B}(t) + \overrightarrow{\omega_b}(t) \wedge \overrightarrow{BG}(t)$$

e derivando rispetto al tempo, passando così alle accelerazioni:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a_G}(t) &= \overrightarrow{a_B}(t) + \dot{\overrightarrow{\omega_b}}(t) \wedge \overrightarrow{BG}(t) + \overrightarrow{\omega_b}(t) \wedge \dot{\overrightarrow{BG}}(t) = \\ &= \overrightarrow{a_B}(t) + \dot{\overrightarrow{\omega_b}}(t) \wedge \overrightarrow{BG}(t) + \overrightarrow{\omega_b}(t) \wedge (\overrightarrow{\omega_b}(t) \wedge \overrightarrow{BG}(t)) \end{aligned}$$

Sapendo che la forza di inerzia risultante da applicare nel baricentro è data da:

$$\overrightarrow{F_{in}}(t) = -m_b \overrightarrow{a_G}(t)$$

ci sono tre forze che, applicate nel baricentro, compongono vettorialmente la forza di inerzia $\overrightarrow{F_{in}}(t)$. Esse sono:

$$-m_b \overrightarrow{a_B}(t), \quad -m_b \dot{\overrightarrow{\omega_b}}(t) \wedge \overrightarrow{BG}(t), \quad -m_b \overrightarrow{\omega_b}(t) \wedge (\overrightarrow{\omega_b}(t) \wedge \overrightarrow{BG}(t))$$

Considerando i moduli di tali forze si ha:

$$\begin{aligned}\| -m_b \overrightarrow{a_B(t)} \| &= m_b \ddot{x}(t) \\ \| -m_b \overrightarrow{\omega_b(t)} \wedge \overrightarrow{BG(t)} \| &= m_b \ddot{\beta}(t) \frac{l}{2} \\ \| -m_b \overrightarrow{\omega_b(t)} \wedge (\overrightarrow{\omega_b(t)} \wedge \overrightarrow{BG(t)}) \| &= m_b \dot{\beta}(t)^2 \frac{l}{2}\end{aligned}$$

Con la regola della mano destra si ricavano i versi di tali forze, i quali sono stati indicati nell' ultima figura mostrata.

Le equazioni di equilibrio dinamico dell' insieme sono allora:

$$\begin{cases} F(t) \sin(\gamma(t)) = \Phi(t) + m_b \ddot{\beta}(t) \frac{l}{2} \cos(\beta(t)) + m_b \dot{\beta}(t)^2 \frac{l}{2} \sin(\beta(t)) \\ F(t) \cos(\gamma(t)) = (m_p + m_b)(g + \ddot{x}(t)) + m_b \dot{\beta}(t)^2 \frac{l}{2} \cos(\beta(t)) - m_b \ddot{\beta}(t) \frac{l}{2} \sin(\beta(t)) \end{cases}$$

EQUILIBRIO DELLE FORZE

$$F(t)l \sin(\beta(t) - \gamma(t)) + J\ddot{\beta}(t) + m_b \ddot{\beta}(t) \left(\frac{l}{2}\right)^2 - m_b(g + \ddot{x}(t)) \frac{l}{2} \sin(\beta(t)) = 0$$

EQUILIBRIO DEI MOMENTI RISPETTO AL PUNTO B

In aggiunta alle equazioni ricavate studiando l' equilibrio del manovellismo, si hanno altre due equazioni di tipo geometrico: una esprime la relazione fra gli angoli $\alpha(t)$ e $\beta(t)$, l' altra relazione lo spostamento $x(t)$ agli angoli $\alpha(t)$ e $\beta(t)$. Le equazioni sono:

$$\begin{cases} r \sin(\alpha(t)) = l \sin(\beta(t)) \\ x(t) = r \cos(\alpha(t)) + l \cos(\beta(t)) \end{cases}$$

Complessivamente, le equazioni risultano quindi:

$$\begin{cases} r \sin(\alpha(t)) = l \sin(\beta(t)) & (1) \\ x(t) = r \cos(\alpha(t)) + l \cos(\beta(t)) & (2) \\ M(t) = F(t) \cdot \sin(\alpha(t) + \gamma(t)) \cdot r + m_m g \frac{l}{2} \sin(\alpha(t)) & (3) \\ F(t) \sin(\gamma(t)) = \Phi(t) + m_b \ddot{\beta}(t) \frac{l}{2} \cos(\beta(t)) + m_b \dot{\beta}(t)^2 \frac{l}{2} \sin(\beta(t)) & (4) \\ F(t) \cos(\gamma(t)) = (m_p + m_b)(g + \ddot{x}(t)) + m_b \dot{\beta}(t)^2 \frac{l}{2} \cos(\beta(t)) - m_b \ddot{\beta}(t) \frac{l}{2} \sin(\beta(t)) & (5) \\ F(t) l \sin(\beta(t) - \gamma(t)) + J \ddot{\beta}(t) + m_b \ddot{\beta}(t) \left(\frac{l}{2}\right)^2 - m_b (g + \ddot{x}(t)) \frac{l}{2} \sin(\beta(t)) = 0 & (6) \end{cases}$$

Le incognite sono: $F(t)$, $\gamma(t)$, $\beta(t)$, $x(t)$, $\Phi(t)$, $M(t)$.

Si hanno quindi 6 incognite e 6 equazioni, per cui il sistema è risolubile.

Apparentemente, data la presenza di derivate rispetto al tempo, il sistema sembrerebbe un sistema di equazioni differenziali; effettivamente è così, tuttavia dato che si conosce $\alpha(t)$ ad ogni istante, il sistema si può risolvere in modo abbastanza rapido.

Qui nel seguito, si mostra come ricavare l'espressione di $M(t)$, ciò che di fatto si vuole ricavare dal sistema, esprimendolo in funzione di grandezze note e successivamente si implementerà un programma Matlab che ne grafichi l'andamento. Verrà inoltre graficata anche la potenza elettrica che il motore deve fornire.

Mettendo insieme l'equazione (5) e l'equazione (6) si può ricavare:

$$\begin{aligned} & \frac{(m_p + m_b)(g + \ddot{x}(t)) + m_b \dot{\beta}(t)^2 \frac{l}{2} \cos(\beta(t)) - m_b \ddot{\beta}(t) \frac{l}{2} \sin(\beta(t))}{\cos(\gamma(t))} l \sin(\beta(t) - \gamma(t)) + J \ddot{\beta}(t) + \\ & + m_b \ddot{\beta}(t) \left(\frac{l}{2}\right)^2 - m_b (g + \ddot{x}(t)) \frac{l}{2} \sin(\beta(t)) = 0 \rightarrow \\ & l \left[(m_p + m_b)(g + \ddot{x}(t)) + m_b \dot{\beta}(t)^2 \frac{l}{2} \cos(\beta(t)) - m_b \ddot{\beta}(t) \frac{l}{2} \sin(\beta(t)) \right] \sin(\beta(t) - \\ & \gamma(t)) + \left[J \ddot{\beta}(t) + m_b \ddot{\beta}(t) \left(\frac{l}{2}\right)^2 - m_b (g + \ddot{x}(t)) \frac{l}{2} \sin(\beta(t)) \right] \cos(\gamma(t)) = 0 \end{aligned}$$

L'ultima equazione può essere riscritta come:

$$\begin{aligned} & l \left[(m_p + m_b)(g + \ddot{x}(t)) + m_b \dot{\beta}(t)^2 \frac{l}{2} \cos(\beta(t)) - m_b \ddot{\beta}(t) \frac{l}{2} \sin(\beta(t)) \right] [\sin(\beta(t)) \cos(\gamma(t)) - \cos(\beta(t)) \sin(\gamma(t))] + \\ & + \left[J \ddot{\beta}(t) + m_b \ddot{\beta}(t) \left(\frac{l}{2}\right)^2 - m_b (g + \ddot{x}(t)) \frac{l}{2} \sin(\beta(t)) \right] \cos(\gamma(t)) = 0 \end{aligned}$$

e riordinandone i termini:

$$\begin{aligned} & \left\{ l \left[(m_p + m_b)(g + x\ddot{t}) + m_b \dot{\beta}(t)^2 \frac{l}{2} \cos(\beta(t)) - m_b \ddot{\beta}(t) \frac{l}{2} \sin(\beta(t)) \right] \sin(\beta(t)) \right. \\ & \quad \left. + \left[J\ddot{\beta}(t) + m_b \ddot{\beta}(t) \left(\frac{l}{2} \right)^2 - m_b (g + x\ddot{t}) \frac{l}{2} \sin(\beta(t)) \right] \right\} \cos(\gamma(t)) + \\ & - \left[\left((m_p + m_b)(g + x\ddot{t}) + m_b \dot{\beta}(t)^2 \frac{l}{2} \cos(\beta(t)) - m_b \ddot{\beta}(t) \frac{l}{2} \sin(\beta(t)) \right) l \cos(\beta(t)) \right] \sin(\gamma(t)) = 0 \end{aligned}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \tan(\gamma(t)) = \\ = \frac{l \left[(m_p + m_b)(g + x\ddot{t}) + m_b \dot{\beta}(t)^2 \frac{l}{2} \cos(\beta(t)) - m_b \ddot{\beta}(t) \frac{l}{2} \sin(\beta(t)) \right] \sin(\beta(t)) + \left[J\ddot{\beta}(t) + m_b \ddot{\beta}(t) \left(\frac{l}{2} \right)^2 - m_b (g + x\ddot{t}) \frac{l}{2} \sin(\beta(t)) \right]}{\left[(m_p + m_b)(g + x\ddot{t}) + m_b \dot{\beta}(t)^2 \frac{l}{2} \cos(\beta(t)) - m_b \ddot{\beta}(t) \frac{l}{2} \sin(\beta(t)) \right] l \cos(\beta(t))} \end{aligned}$$

L' espressione di $\tan(\gamma(t))$ contiene tutti termini calcolabili; si mostrerà ora come calcolare $x\ddot{t}$, $\beta\ddot{t}$, $\beta\dot{t}$, $\beta(t)$.

Tenendo conto che $\beta(t) \in] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$, l' equazione (1) è invertibile e si può scrivere: $\beta(t) = \arcsin\left(\frac{r}{l} \sin(\alpha(t))\right)$.

Derivando rispetto al tempo:

$$\beta\dot{t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin(\alpha(t))^2}} \frac{r}{l} \alpha\dot{t} \cos(\alpha(t))$$

Derivando un' altra volta:

$$\beta\ddot{t} = \frac{-\frac{r}{l} \omega^2 \sin(\alpha(t))}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin(\alpha(t))^2}} + \frac{\omega^2 \left(\frac{r}{l}\right)^3 \sin(\alpha(t)) \cos(\alpha(t))^2}{\left(1 - \frac{r^2}{l^2} \sin(\alpha(t))^2\right)^{3/2}}$$

Scritta in questo modo, le espressioni di $\beta(t)$, $\beta\dot{t}$, $\beta\ddot{t}$ sono valutabili poiché scritte in funzione di $\alpha(t)$, la quale è nota.

Per calcolare $x\ddot{t}$, si parte dall' espressione di $x(t)$ e la si deriva due volte, ottenendo:

$$\begin{aligned} x\dot{t} &= -r \alpha\dot{t} \sin(\alpha(t)) - l \beta\dot{t} \sin(\beta(t)) \\ x\ddot{t} &= -r \omega^2 \cos(\alpha(t)) - r \sin(\alpha(t)) \beta\ddot{t} - l \beta\dot{t}^2 \cos(\beta(t)) \end{aligned}$$

Quindi l' espressione di $\tan(\gamma(t))$ è valutabile. Questa espressione permette di calcolare $M(t)$; infatti, dalle equazioni (3) e (5) si ricava:

$$M(t) = \frac{(m_p + m_b)(g + \ddot{x}(t)) + m_b \dot{\beta}(t)^2 \frac{l}{2} \cos(\beta(t)) - m_b \ddot{\beta}(t) \frac{l}{2} \sin(\beta(t))}{\cos(\gamma(t))} \cdot \sin(\alpha(t) + \gamma(t)) \cdot r + m_m g \frac{l}{2} \sin(\alpha(t))$$

e sviluppando $\sin(\alpha(t) + \gamma(t))$ risulta pari a:

$$M(t) = \left[(m_p + m_b)(g + \ddot{x}(t)) + m_b \dot{\beta}(t)^2 \frac{l}{2} \cos(\beta(t)) - m_b \ddot{\beta}(t) \frac{l}{2} \sin(\beta(t)) \right] [\sin(\alpha(t)) + \cos(\alpha(t)) \tan(\gamma(t))] + m_m g \frac{l}{2} \sin(\alpha(t))$$

la quale mostra che $M(t)$ è ora valutabile dato che si conosce interamente il secondo membro dell' equazione.

Prima di implementare il programma Matlab che mostri il grafico della coppia e della potenza, è necessario attribuire dei valori numerici a dei parametri. In particolare, bisogna fissare il momento di inerzia della biella J rispetto al baricentro, la massa della biella m_b , la massa della manovella m_m e la massa del pistone m_p ; inoltre si calcolerà anche il momento di inerzia rispetto al punto B , il quale verrà utilizzato nel paragrafo 5.3.

Per fissare J :

si ipotizza di modellare la biella con un parallelepipedo rettangolo omogeneo di dimensioni $(l - \Delta l) \times a \times b$, dove $(l - \Delta l)$ rappresenta la lunghezza fittizia della biella, per tenere conto del fatto che la massa è concentrata soprattutto nella zona centrale, a è lo spessore, b è la larghezza.

Il momento di inerzia J_B rispetto al punto B , come noto dal teorema di Huygens-Steiner, si può scrivere:

$$J_B = J + \frac{(l - \Delta l)^2}{4} m_b$$

dove come già noto con m_b si è indicata la massa della biella e J il momento di inerzia rispetto all' asse di rotazione passante per il baricentro.

Per un parallelepipedo rettangolo di dimensioni come quelle indicate J vale:

$$J = \left(\frac{(l - \Delta l)^2}{12} + \frac{b^2}{12} \right) m_b$$

e quindi:

$$J_B = \left(\frac{(l - \Delta l)^2}{12} + \frac{b^2}{12} + \frac{(l - \Delta l)^2}{4} \right) m_b = \left(\frac{(l - \Delta l)^2}{3} + \frac{b^2}{12} \right) \rho (l - \Delta l) a b$$

dove con ρ si è indicata la densità della biella.

Nel programma Matlab verrà presa la densità di un Alluminio sia per la manovella che per la biella:

$$\rho = 2700 \frac{kg}{m^3}, \Delta l \text{ verrà fissato a } 0.2 l, a = 5 \text{ mm e } b = 1.5 \text{ cm}$$

Anche lo spessore e la larghezza della manovella si considereranno pari ad a e b , con la massa approssimativamente pari a:

$$m_m = \rho r a b$$

Per fissare m_p :

banalmente si può scrivere che $m_p = \rho S s$, dove ρ è la densità del pistone, che verrà presa sempre pari a $2700 \frac{kg}{m^3}$, s è lo spessore del pistone, il quale verrà preso pari a 1 mm , S è la superficie di base del pistone, la quale verrà presa pari a 0.1 m^3 , diversamente da quanto era stata considerata durante la simulazione del sistema di controllo (2 m^3), per ottenere dei valori non eccessivamente elevati della potenza elettrica richiesta al motore; ciò consente di porsi in una condizione conservativa per quanto riguarda la valutazione economica che verrà effettuata nel paragrafo 5.3, poiché diminuendo la potenza nominale del compressore, diminuisce anche il risparmio potenziale che si può ottenere introducendo il sistema di controllo e conseguentemente, qualora risultasse vantaggioso dal punto di vista economico introdurre il sistema in tali condizioni, a maggior ragione risulterebbe proficuo con un motore elettrico del compressore più potente.

Si considererà inoltre una velocità angolare ω pari a 12 rad/s , diversamente dalla simulazione Simulink (25 rad/s), per gli stessi motivi della superficie base del pistone, una lunghezza di manovella $r = 0.1 \text{ m}$ (minore dei 0.5 m della simulazione per gli stessi motivi della superficie del pistone e della velocità angolare), lunghezza di biella $l = 0.8 \text{ m}$, pressione di aspirazione $P_0 = 0.5 \text{ bar}$, pressione di mandata $P_1 = 3 \text{ bar}$ (minore dei 10 bar della simulazione per gli stessi motivi della superficie del pistone, della velocità angolare e della lunghezza di manovella), rendimento di conversione del motore elettrico $\eta_{el} = 0.95$.

La pressione $P(t)$, che varia nell' intervallo $[P_0, P_1]$, non è ancora stata considerata nel modello fino ad ora analizzato. Per inserirla, basta semplicemente modificare l' equazione (5) (solo tale equazione va modificata); infatti, in aggiunta alle forze $m_p \ddot{x}(t)$ e $m_p g$ che agiscono sul pistone, si ha la forza: $(P(t) - P_a)S$, con P_a pressione ambiente. Quindi si ha al posto dell' equazione (5):

$$F(t) \cos(\gamma(t)) = (m_p + m_b)(g + \ddot{x}(t)) + m_b \dot{\beta}(t)^2 \frac{l}{2} \cos(\beta(t)) - m_b \ddot{\beta}(t) \frac{l}{2} \sin(\beta(t)) + (P(t) - P_a)S$$

Per far sì che l' equazione (5) mantenga la stessa forma nei due casi (nel funzionamento a vuoto o in pressione), si può porre per tale equazione ad esempio:

$$g'(t) = g + \frac{(P(t) - P_a)S}{m_p + m_b}$$

Dunque, per passare da un modello all' altro, basta sostituire $g'(t)$ con g o viceversa per l' equazione (5). Questo è quello che verrà fatto con Matlab.

Il rendimento di conversione elettro-meccanico η_{el} serve per passare dalla coppia meccanica alla potenza elettrica (o viceversa). Infatti la potenza P_{el} che eroga il motore viene convertita con rendimento η_{el} per dare in uscita il prodotto $M(t)\omega$. Si può scrivere quindi:

$$P_{el} = \frac{M(t)\omega}{\eta_{el}}$$

Infine, l' ultimo passo rimasto da fare prima di vedere i risultati di Matlab, è la determinazione dell' andamento della pressione $P(t)$ dell' aria. Si è visto infatti come trattare il problema per tenere conto di $P(t)$, tuttavia è necessario averne una espressione analitica per fare in modo che Matlab possa fornire dei risultati.

Si suppone che l' angolo iniziale di manovella sia pari a π , ossia punto morto inferiore, quando il volume d' aria è pari a V_1 e sta per iniziare la compressione (quindi si è fissato anche l' istante iniziale $t = 0$).

Da V_1 fino a V_2 , la pressione $P(t)$ varia secondo la legge già mostrata in precedenza: $P(t)(V(t) + S_n)^n = P_0 V_1 = P_0 (V_c + S_n)$, la quale, dato che $V(t) = \left[x\left(\frac{\pi}{\omega}\right) - x(t) \right] S$, porta a esprimere $P(t)$ come:

$$P(t) = P_0 \left\{ \frac{[x(\frac{\pi}{\omega}) - x(0)]S + S_n}{[x(\frac{\pi}{\omega}) - x(t)]S + S_n} \right\}^n$$

funzione di grandezze note.

L' espressione rimane vera fintanto che $P(t) \leq P_1$, ossia $V(t) \geq V_2$, oppure anche per $t \leq \frac{\pi - \alpha_e}{\omega}$, dove α_e è l' angolo di manovella che corrisponde all' apertura della valvola di mandata.

Nell' implementazione Matlab si è usata quest' ultima condizione; per ricavare α_e si può utilizzare l' equazione di compressione dal punto 1 al punto 2:

$$V_1 P_0^{\frac{1}{n}} = V_2 P_1^{\frac{1}{n}}$$

dove $V_1 = S_n + V_c$ e il volume generico d'aria contenuto nel compressore si può esprimere come noto:

$$V(\alpha) = S \left[r + l - r \cos \alpha - l \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} (\sin \alpha)^2} \right] + S_n$$

Quindi dall'equazione:

$$V_1 P_0^{\frac{1}{n}} = V_2 P_1^{\frac{1}{n}}$$

si ricava:

$$\left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{S_n + V_c}{S_n + V(\alpha_e)} = \frac{S_n + V_c}{S_n + S \left[r + l - r \cos \alpha_e - l \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} (\sin \alpha_e)^2} \right]}$$

da cui si può ricavare l'angolo α_e del volume V_2 con qualche passaggio algebrico.

Si perviene a:

$$\alpha_e = \arccos \left(\frac{r^2 - l^2 + \left\{ r + l - 2r \left[-\frac{S_n}{V_c} + \frac{1 + \frac{S_n}{V_c}}{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}}}\right]}{2r \left\{ r + l - 2r \left[-\frac{S_n}{V_c} + \frac{1 + \frac{S_n}{V_c}}{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}}}\right]} \right\}^2 \right)$$

Successivamente, dal tempo $t \geq \frac{\pi - \alpha_e}{\omega}$ fino al tempo $t = \frac{\pi}{\omega}$, la pressione rimane costante pari alla pressione di mandata: $P(t) = P_1$.

Poi, per $t \in \left[\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi + \alpha_a}{\omega} \right]$, cioè da V_3 fino a V_4 , la pressione $P(t)$ varia secondo la legge: $P_1 V_3 = P_1 S_n = P(t) V(t)^n$, la quale, dato che $V(t) = \left[x \left(\frac{\pi}{\omega} \right) - x(t) \right] S$, porta a esprimere $P(t)$ come:

$$P(t) = P_1 \left\{ \frac{S_n}{\left[x \left(\frac{\pi}{\omega} \right) - x(t) \right] S + S_n} \right\}^n$$

Con α_a si è indicato l'angolo di apertura della valvola di aspirazione; analogamente a quanto visto per l'angolo di espulsione α_e è possibile calcolare α_a con un procedimento simile; si può utilizzare l'equazione di espansione dal punto 3 al punto 4:

$$V_4 P_0^{\frac{1}{n}} = V_3 P_1^{\frac{1}{n}}$$

dove $V_3 = S_n$ e il volume d'aria V_4 contenuto nel compressore si può esprimere come noto:

$$V_4 = V(\alpha_a) = S \left[r + l - r \cos \alpha_a - l \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} (\sin \alpha_a)^2} \right] + S_n$$

Quindi dall'equazione:

$$V_4 P_0^{\frac{1}{n}} = V_3 P_1^{\frac{1}{n}}$$

si ricava:

$$\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{S \left[r + l - r \cos \alpha_a - l \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} (\sin \alpha_a)^2} \right] + S_n}{S_n}$$

da cui si può ricavare l'angolo α_a del volume V_4 con qualche passaggio algebrico.

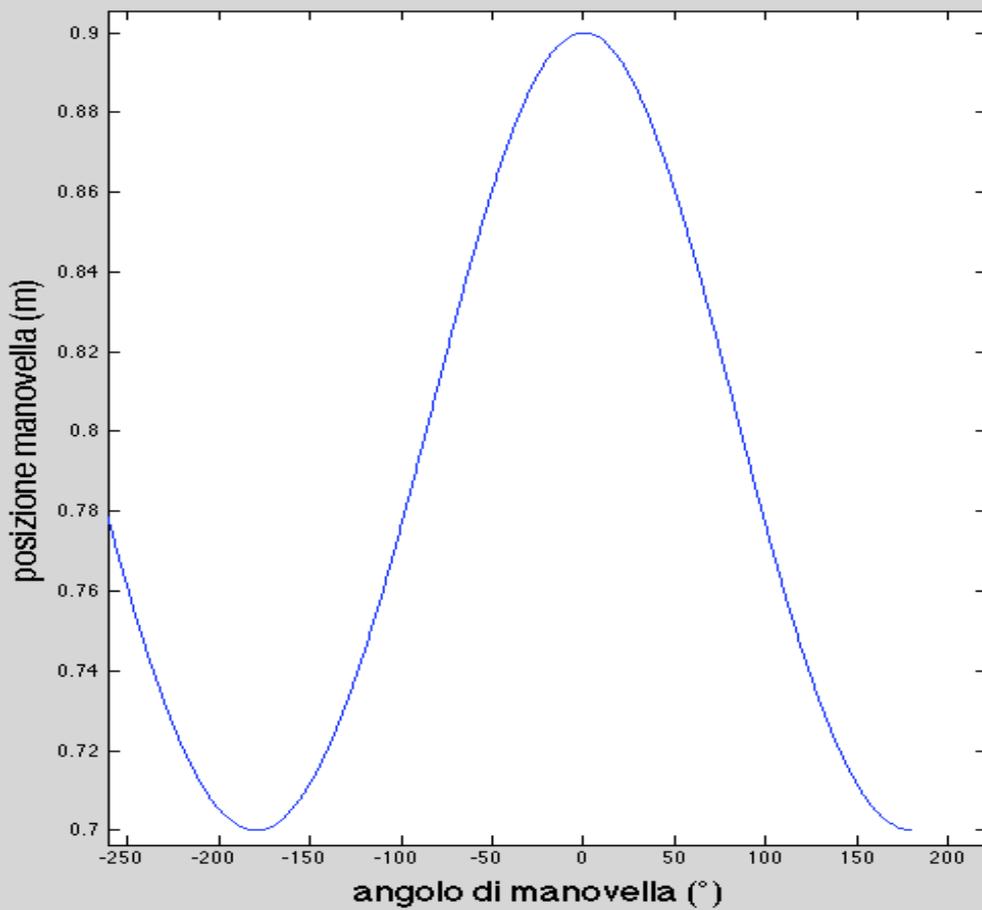
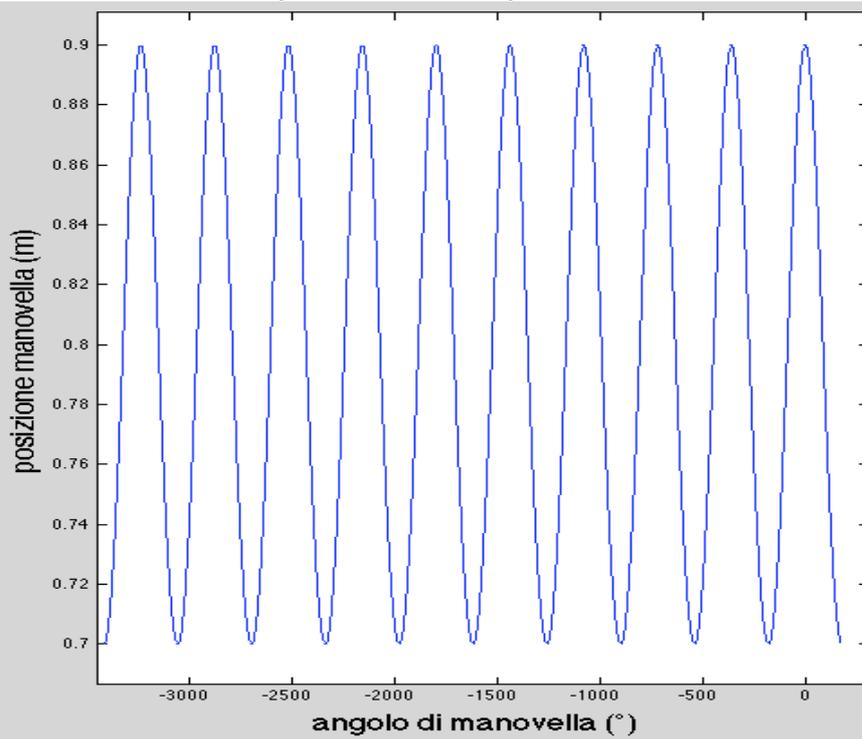
Si perviene a:

$$\alpha_a = \arccos \left(\frac{r^2 - l^2 + \left\{ r + l - 2r \frac{S_n}{V_c} \left[\left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] \right\}^2}{2r \left\{ r + l - 2r \frac{S_n}{V_c} \left[\left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] \right\}} \right)$$

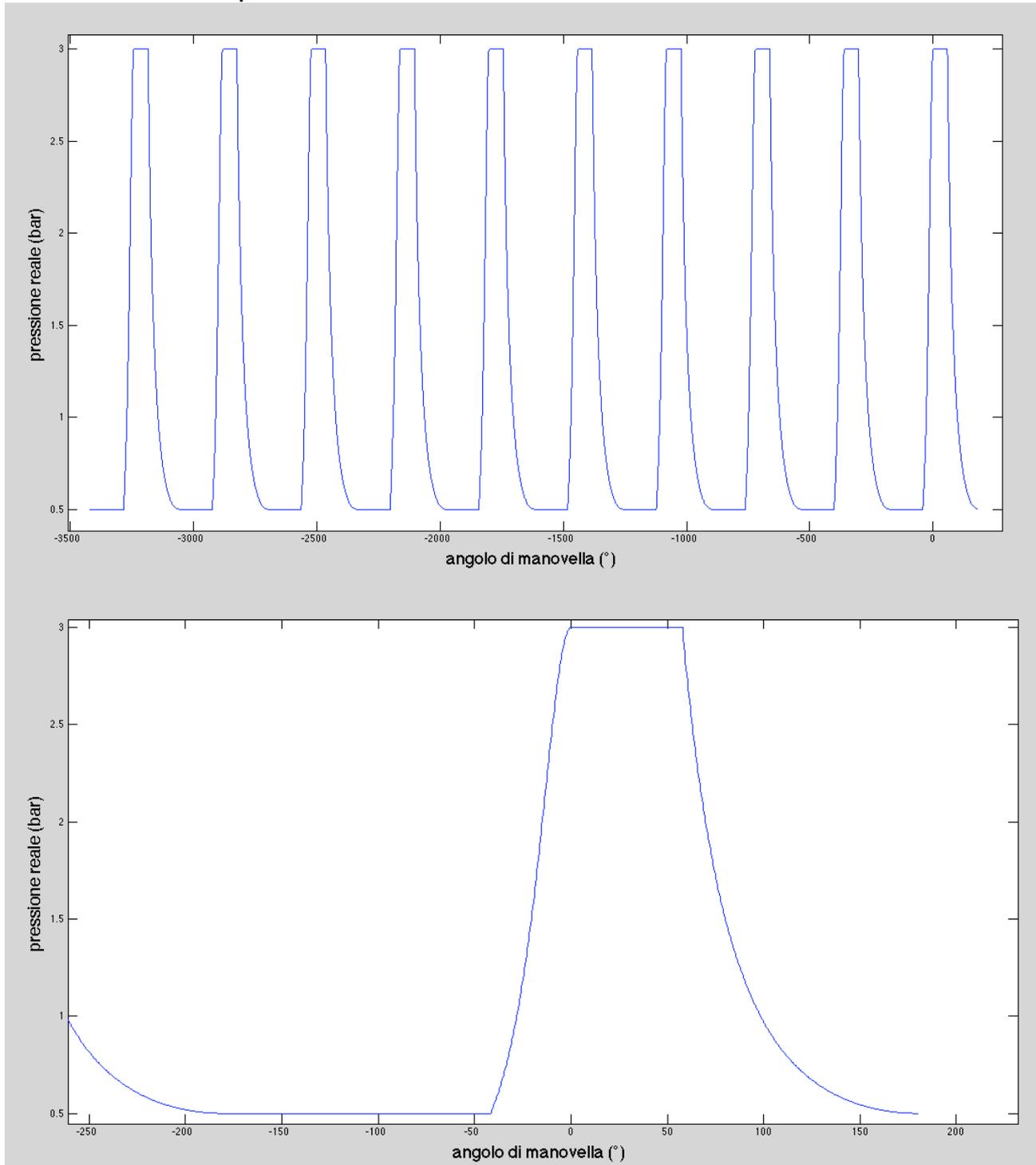
Infine, per $t \in \left[\frac{\pi + \alpha_a}{\omega}, \frac{2\pi}{\omega} \right]$, cioè da V_4 fino a V_1 , la pressione $P(t)$ rimane costante pari al valore P_0 fino all' inizio del nuovo ciclo.

Sono dunque state viste le equazioni; ora si vedranno i grafici con l' ausilio di Matlab che scaturiscono dall' implementazione algoritmica di quanto detto. Verranno plottati i grafici per un numero di cicli pari a 10, cioè 10 rotazioni complete di manovella.

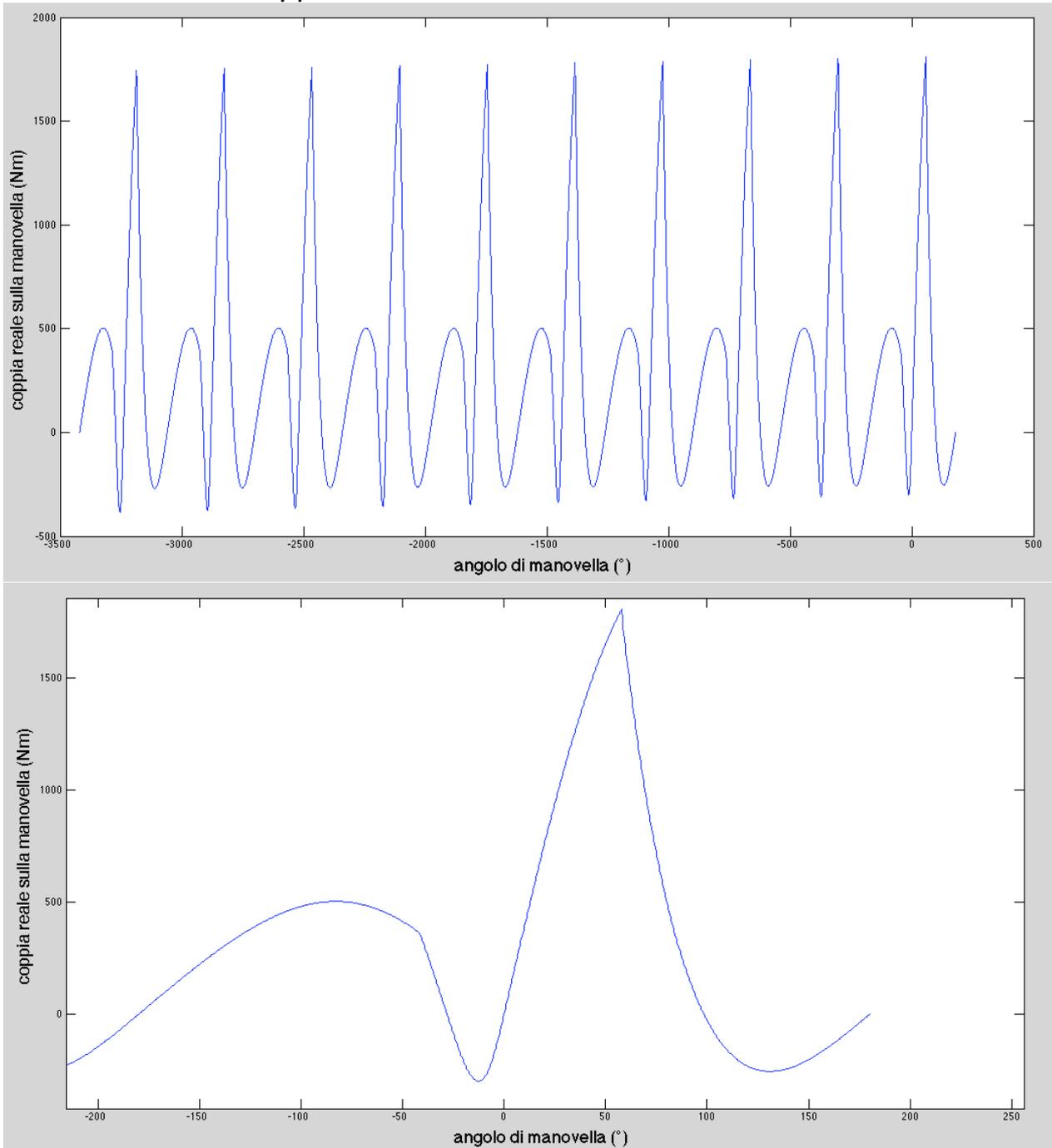
Andamento della posizione del pistone:



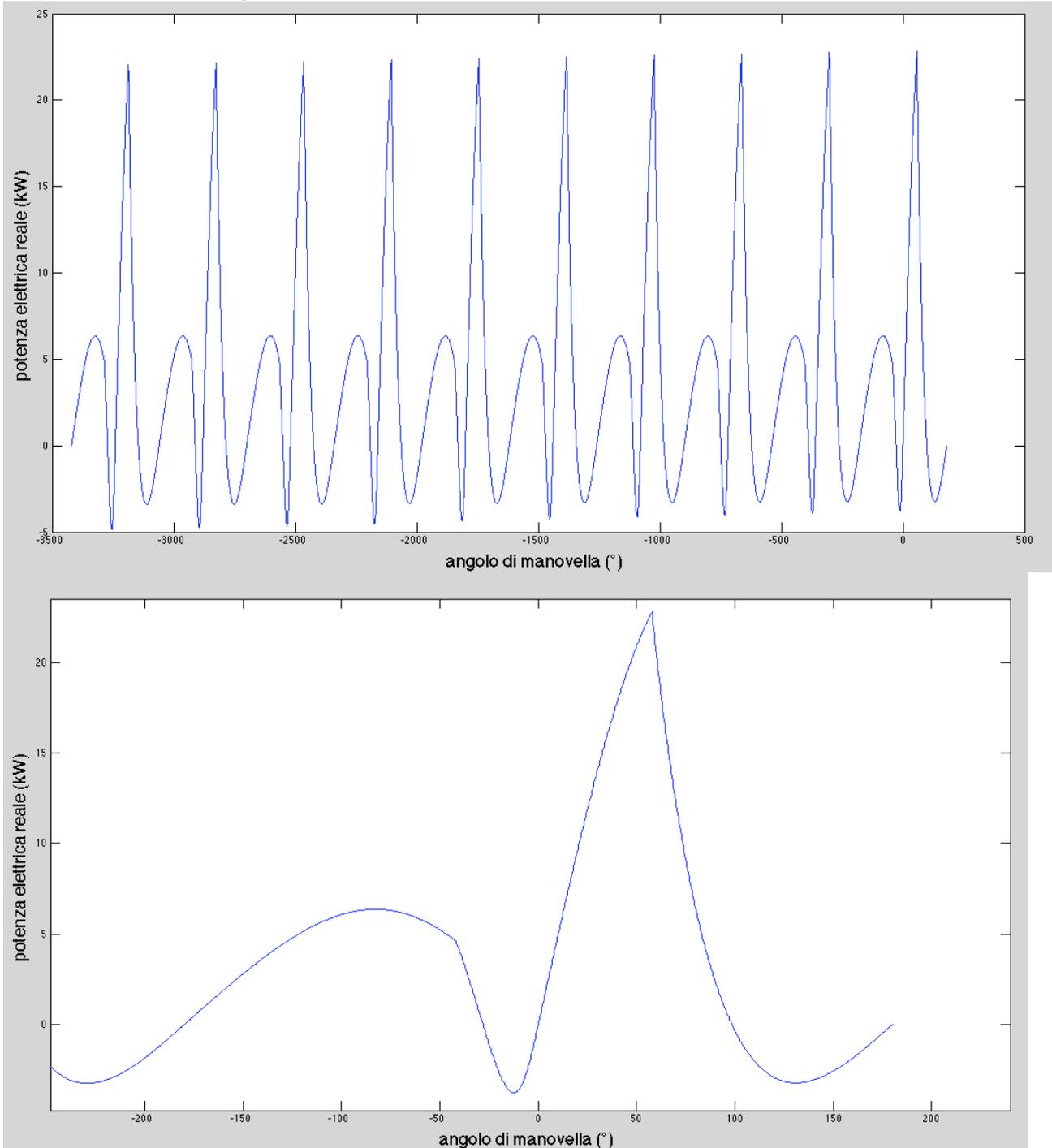
Andamento della pressione nel cilindro:



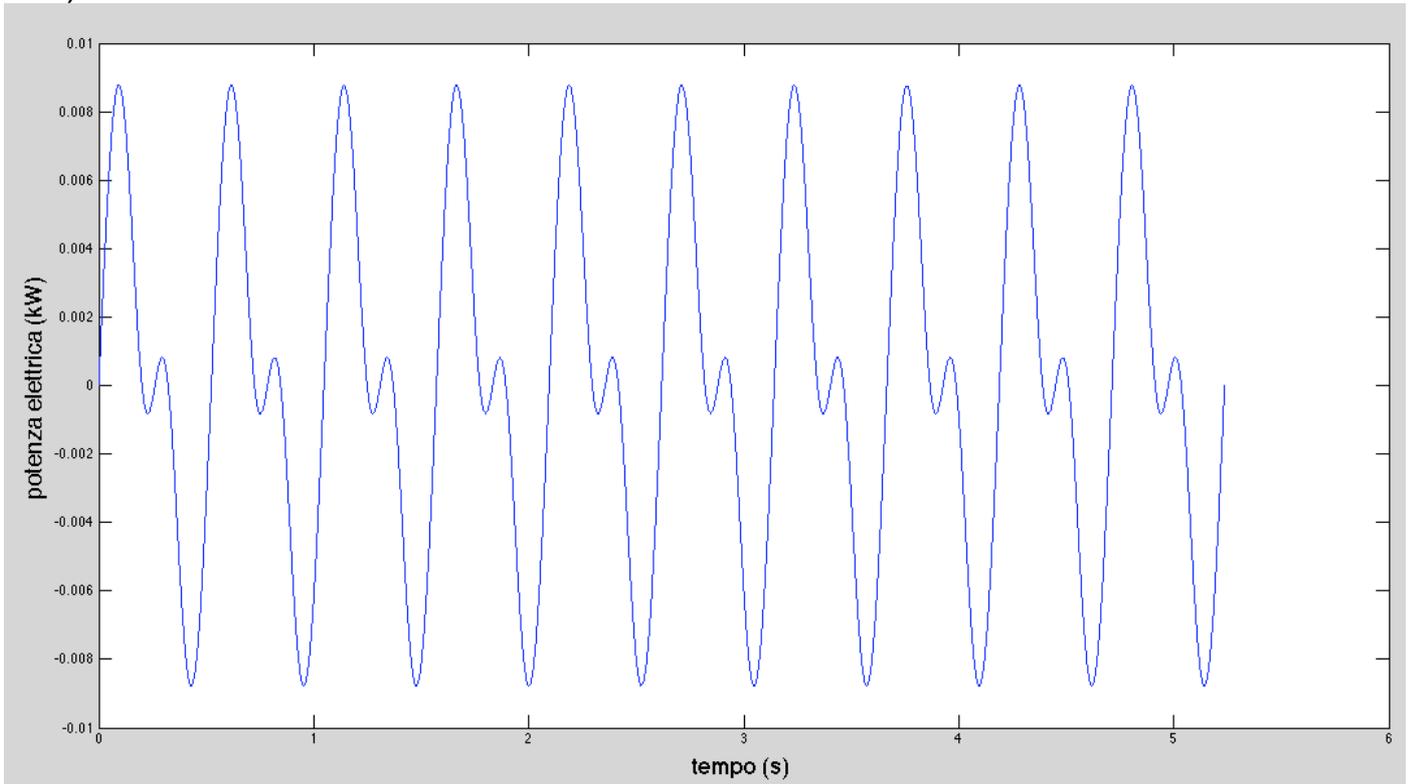
Andamento della coppia motrice:



Andamento della potenza richiesta al motore:



Andamento della potenza a vuoto (senza considerare la compressione dell'aria):



Andamento della coppia a vuoto:

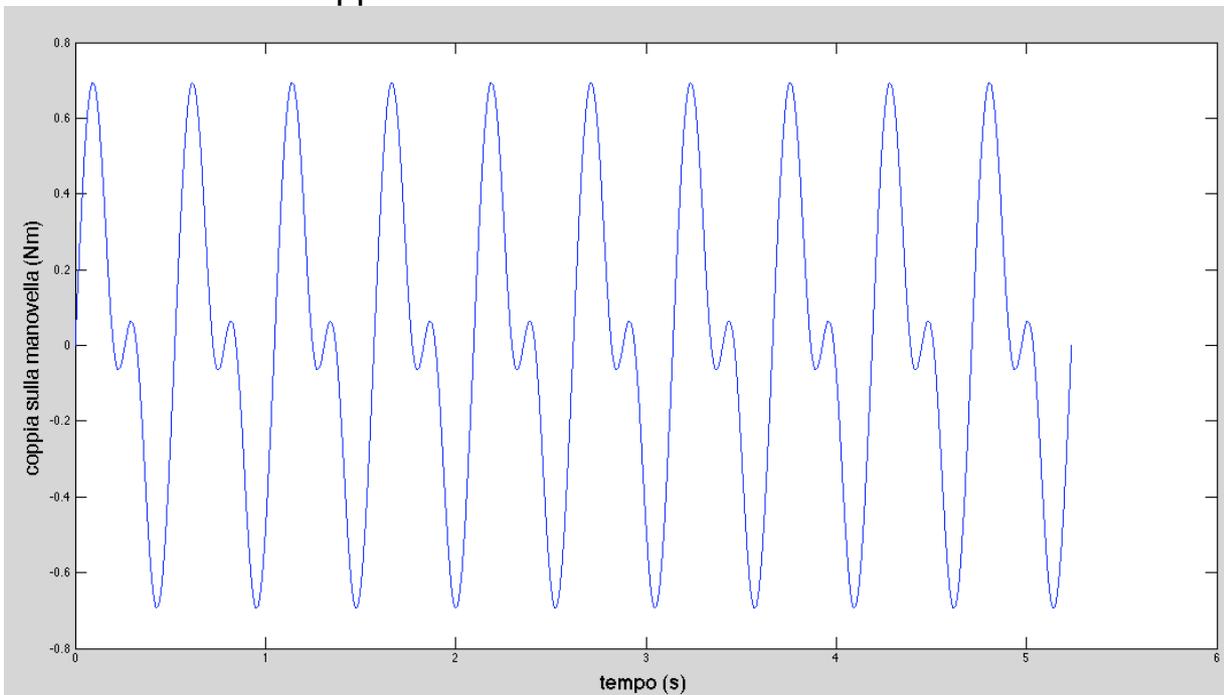
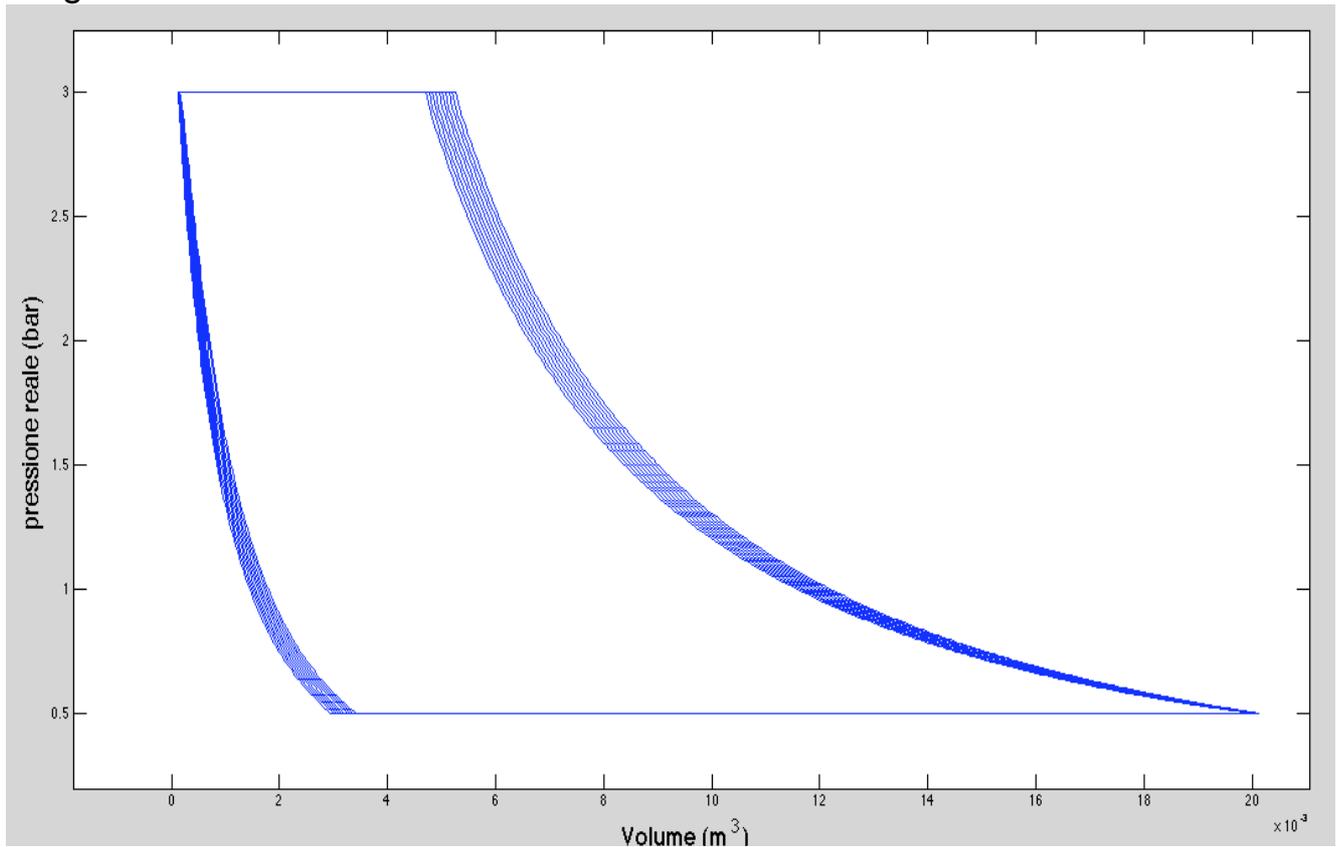
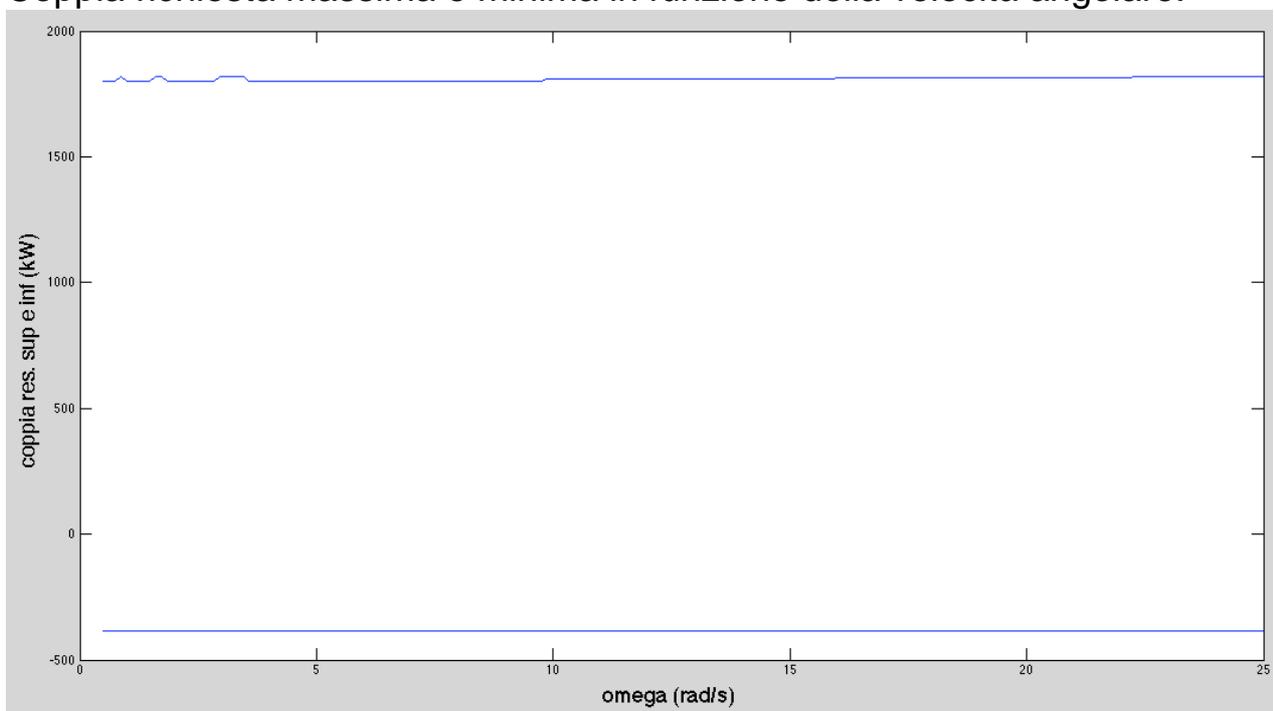


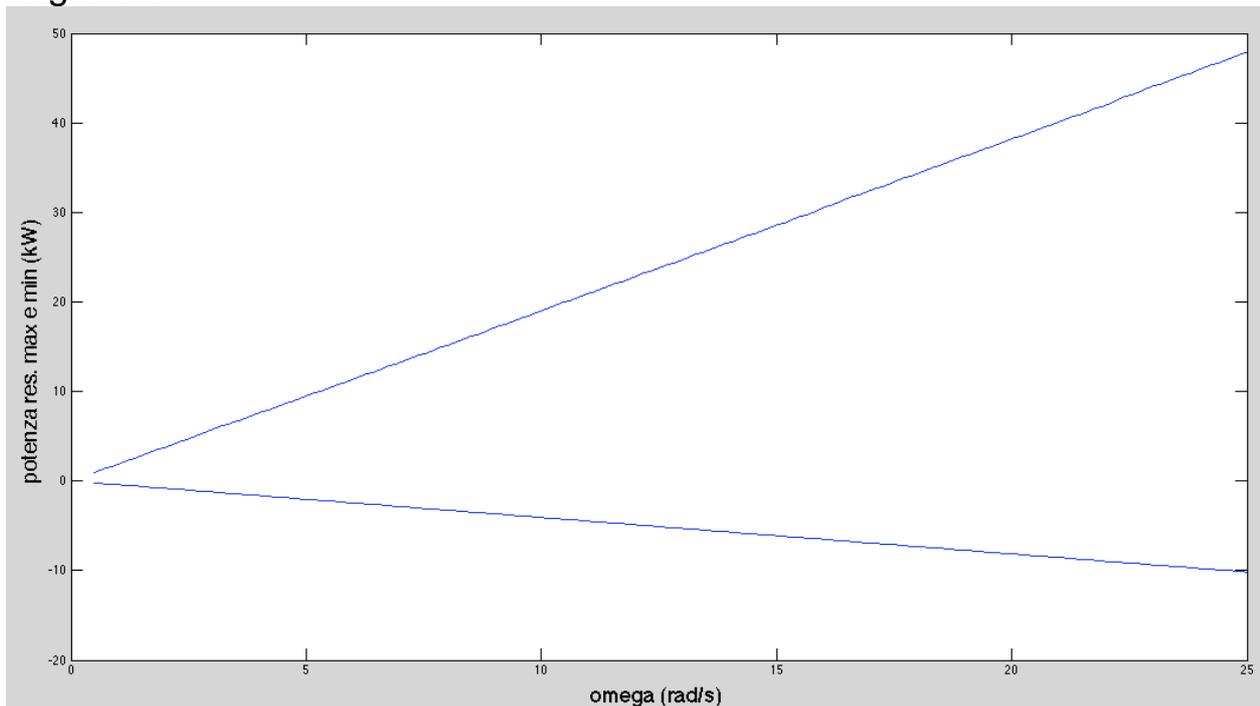
Diagramma $P - V$:



Coppia richiesta massima e minima in funzione della velocità angolare:



Potenza elettrica richiesta massima e minima in funzione della velocità angolare:



Come si può notare dai grafici, gli andamenti delle grandezze: potenza, coppia, pressione, posizione del pistone sono periodiche, con periodo pari al ciclo di manovella $\frac{2\pi}{\omega}$.

Il diagramma $P - V$ conferma ovviamente quanto detto nei primi paragrafi.

La potenza richiesta al motore raggiunge un valore massimo pari a circa 23 kW e un valore minimo di circa -5 kW (in base al valore numerico scelto come visto precedentemente per i vari parametri).

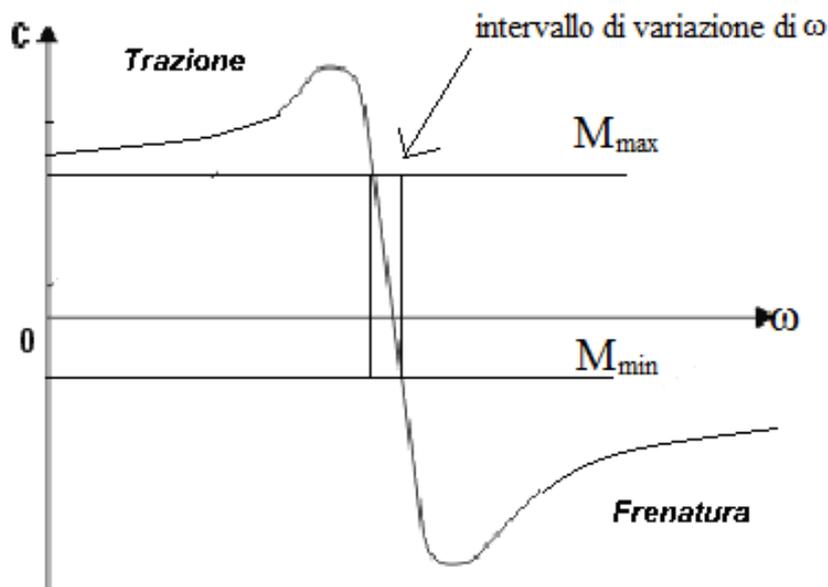
Il segno meno è dovuto al fatto che in certi istanti di tempo, e quindi in certe posizioni angolari di manovella, la coppia si oppone in verso alla velocità angolare; ciò è necessario per mantenere la velocità angolare costante, altrimenti ci sarebbero delle accelerazioni.

Per cui servirà sicuramente un motore elettrico con potenza nominale uguale o superiore a 23 kW .

La caratteristica meccanica della coppia richiesta (grafico $M(t) - \omega$), mostra che la coppia può oscillare nel tempo tra un valore massimo (circa 1850 Nm) e un valore minimo (circa -395 Nm), per qualsiasi valore della velocità angolare di manovella.

Poiché all' albero di manovella deve valere che la coppia richiesta dal manovellismo, riferita però alla velocità di rotazione dell' albero motore, sia uguale alla coppia erogata dal motore per mantenere la velocità angolare costante, serve un motore elettrico con una curva caratteristica il più possibile

verticale, in modo che al variare nel tempo della coppia richiesta $M(t)$, il motore risponda con una coppia uguale, con velocità angolare che rimane in un range molto limitato (in generale non rimarrà esattamente costante, ma la sua variazione deve risultare molto limitata). Ovviamente, tra albero motore e albero di manovella deve essere presente un riduttore di velocità, che permetta il trasferimento di potenza tra il primo ed il secondo. La curva caratteristica di un motore asincrono trifase ha un andamento che soddisfa i requisiti richiesti:



In figura è rappresentata la curva caratteristica di un motore asincrono trifase e la coppia massima e minima richiesta dal manovellismo. Si vede che le intersezioni fra le curve di coppia comportano delle variazioni di velocità angolare del motore ω che sono limitate.

In conclusione, in questo paragrafo è stata quindi ricavata la potenza elettrica nominale che deve avere il motore elettrico, che per i valori numerici dei parametri scelti risulta pari (almeno) a 23 kW . Questo dato verrà utilizzato in seguito per la valutazione di convenienza economica.

Si riportano nel seguito gli script di Matlab utilizzati, per completezza:

```
close all
clear
clc

%N.B: parametro alpha_zero non modificabile (pari a pi greco) per come
%E' stato implementato l'algoritmo

omega=12;      %velocità angolare manovella
eta_el=0.95;   %rendimento di conversione motore elettrico
P0=0.5;       %pressione di aspirazione
P1=3;         %pressione di mandata
r=0.1;        %lunghezza di manovella
l=0.8;        %lunghezza di biella
S=0.1;        %superficie pistone
s=0.001;     %spessore pistone
ro=2700;      %densità alluminio
a=0.005;     %larghezza di biella
b=0.015;     %spessore di biella
delta_l=0.2;
mb=ro*a*b*(1-delta_l); %massa biella (di lunghezza fittizia l-delta_l)

[M,t,alpha,x,P,m,~] = momento_man(r,l,S,s,ro,omega,pi,a,b,P0, P1,9.81);

figure(1)
plot(t,M)
w=xlabel('tempo (s)');
set(w,'FontSize',18)
y=ylabel('coppia sulla manovella (Nm)');
set(y,'FontSize',18)

figure(2)
plot(t,M*omega/eta_el/1000)
w=xlabel('tempo (s)');
set(w,'FontSize',18)
y=ylabel('potenza elettrica (kW)');
set(y,'FontSize',18)

figure(3)
plot(alpha*180/pi,M*omega/eta_el/1000)
w=xlabel('angolo di manovella ( ° )');
set(w,'FontSize',18)
y=ylabel('potenza elettrica (kW)');
set(y,'FontSize',18)

figure(4)
subplot(1,2,1)
plot(alpha*180/pi,x)
w=xlabel('angolo di manovella ( ° )');
set(w,'FontSize',18)
y=ylabel('posizione manovella (m)');
set(y,'FontSize',18)
```

```

subplot(1,2,2)
plot(t,x)
w=xlabel('tempo (s)');
set(w,'FontSize',18)
y=ylabel('posizione manovella (m)');
set(y,'FontSize',18)

%E' interessante notare il comportamento della curva di coppia/potenza
%al variare di omega. Al di sotto di una certa velocità (3.5 rad/s),
%la curva perde una sinusoide; ciò è dovuto alla diminuzione di momento
%angolare (o impulso angolare) del sistema

%aggiunta della pressione dell'aria al modello

figure(5)
plot(alpha*180/pi,P)
w=xlabel('angolo di manovella ( ° )');
set(w,'FontSize',18)
y=ylabel('pressione linearizzata (bar)');
set(y,'FontSize',18)

figure(6)
plot(t,P)
w=xlabel('tempo (s)');
set(w,'FontSize',18)
y=ylabel('pressione linearizzata (bar)');
set(y,'FontSize',18)

Pa=1; %pressione ambiente
g=9.81+(P-Pa)*S/(m+mb)*10^5;

[M,t,alpha,x,~,m,P_re] = momento_man(r,l,S,s,ro,omega,pi,a,b,P0, P1,g);

figure(7)
plot(t,M)
w=xlabel('tempo (s)');
set(w,'FontSize',18)
y=ylabel('coppia totale sulla manovella (Nm)');
set(y,'FontSize',18)

figure(8)
plot(t,M*omega/eta_el/1000)
w=xlabel('tempo (s)');
set(w,'FontSize',18)
y=ylabel('potenza elettrica totale (kW)');
set(y,'FontSize',18)

figure(9)
plot(alpha*180/pi,M*omega/eta_el/1000)
w=xlabel('angolo di manovella ( ° )');
set(w,'FontSize',18)
y=ylabel('potenza elettrica totale (kW)');
set(y,'FontSize',18)

figure(10)

```

```

subplot(1,2,1)
plot(alpha*180/pi,x)
w=xlabel('angolo di manovella ( ° )');
set(w,'FontSize',18)
y=ylabel('posizione manovella totale (m)');
set(y,'FontSize',18)
subplot(1,2,2)
plot(t,x)
w=xlabel('tempo (s)');
set(w,'FontSize',18)
y=ylabel('posizione manovella totale (m)');
set(y,'FontSize',18)

%calcolo pressione non linearizzata

figure(11)
plot(alpha*180/pi,P_re)
w=xlabel('angolo di manovella ( ° )');
set(w,'FontSize',18)
y=ylabel('pressione reale (bar)');
set(y,'FontSize',18)

%potenza elettrica reale (considerando la pressione vera dell'aria)

g=9.81+(P_re-Pa)*S/(m+mb)*10^5;

[M,~,alpha,x,~,~,P_re] = momento_man(r,l,S,s,ro,omega,pi,a,b,P0, P1,g);

figure(12)
plot(alpha*180/pi,M*omega/eta_el/1000)
w=xlabel('angolo di manovella ( ° )');
set(w,'FontSize',18)
y=ylabel('potenza elettrica reale (kW)');
set(y,'FontSize',18)

figure(13)
plot(alpha*180/pi,M)
w=xlabel('angolo di manovella ( ° )');
set(w,'FontSize',18)
y=ylabel('coppia reale sulla manovella (Nm)');
set(y,'FontSize',18)

Sn=0.06*S*2*r;

figure(14)
plot((max(x)-x+Sn)*S,P_re)
w=xlabel('Volume (m^3)');
set(w,'FontSize',18)
y=ylabel('pressione reale (bar)');
set(y,'FontSize',18)

%caratteristica resistente

omega_max=25;
omega_min=0.5;

```

```

Pmax=linspace(omega_min,omega_max,200);
Pmin=linspace(omega_min,omega_max,200);
Mmax=linspace(omega_min,omega_max,200);
Mmin=linspace(omega_min,omega_max,200);
omega=linspace(omega_min,omega_max,200);
omega_single=omega_min;
[~,~,~,~,~,~,P_re] = momento_man(r,l,S,s,ro,omega_min,pi,a,b,P0,P1,g);

i=1;
while omega_single <= omega_max

    g=9.81+(P_re-Pa)*S/(m+mb)*10^5;
    [M,t,alpha,x,P,m,P_re] =
momento_man(r,l,S,s,ro,omega_single,pi,a,b,P0,P1,g);

    Pmax(i)=max(M*omega_single/eta_el/1000);
    Pmin(i)=min(M*omega_single/eta_el/1000);

    Mmax(i)=max(M);
    Mmin(i)=min(M);

    omega(i)=omega_single;

    i=i+1;
    omega_single=omega_single+(omega_max-omega_min)/(length(Pmax)-1);

end

figure(15)
plot(omega,Pmax)
w=xlabel('omega (rad/s)');
set(w,'FontSize',18)
y=ylabel('potenza res. max e min (kW)');
set(y,'FontSize',18)
hold on
plot(omega,Pmin)

figure(16)
plot(omega,Mmax)
w=xlabel('omega (rad/s)');
set(w,'FontSize',18)
y=ylabel('coppia res. sup e inf (kW)');
set(y,'FontSize',18)
hold on
plot(omega,Mmin)

```

Function utilizzata nello script sopra riportato:

```
%N.B:parametro alpha_zero non modificabile (pari a pi greco) per come
%è stato implementato l' algoritmo

function [M,t,alpha,x,P,m,P_re] =
momento_man(r,l,S,s,ro,omega,alpha_zero,a,b,P0,P1,g)

t=linspace(0,2*pi/omega*10,10000);
alpha=alpha_zero-omega*t;

m=ro*S*s; %massa pistone
delta_l=0.2*l;
mb=ro*a*b*(1-delta_l);
J=((1-delta_l)^2/12+b^2/12)*mb;
mm=ro*a*b*r; %massa manovella

beta=asin((r/l)*sin(alpha));

beta_punto=-((r/l)*omega*cos(alpha))./(1-(r/l)^2*sin(alpha).^2).^^(1/2);

beta_duepunti=-((r/l)*omega^2*sin(alpha))./(1-
(r/l)^2*sin(alpha).^2).^^(1/2)+(omega^2*(r/l)^3*sin(alpha).*cos(alpha).^2)./(1-
(r/l)^2*sin(alpha).^2).^^(3/2);

x_duepunti=- (r*omega^2*cos(alpha)+r*sin(alpha).*beta_duepunti
+1*cos(beta).^^(1/2).*beta_punto.^2);

a1=(m+mb)*(x_duepunti+g)+mb*beta_punto.^2*(1/2).*cos(beta)-
mb*beta_duepunti*(1/2).*sin(beta);

a2=J*beta_duepunti+mb*beta_duepunti*(1/2)^2-
mb*(x_duepunti+9.81)*(1/2).*sin(beta);

tan_gamma=(1*a1.*sin(beta)+a2)./(a1.*cos(beta)*1);

M=a1.*(sin(alpha)+cos(alpha).*tan_gamma)*r+mm*9.81*(1/2)*sin(alpha);

x=r*cos(alpha)+1*cos(beta);

%aggiunta della pressione dell'aria al modello

t_primo=ones(1,length(t));
P=ones(1,length(t));
k=1;

for i=1:length(t)
    if t(i) <= pi/omega
        t_primo(i) = t(i);
        P(i)=P0+t_primo(i)/(pi/omega)*(P1-P0);
        a=i;
    else
        t_primo(i) = t_primo(k);
        if k<=a
            P(i)=P1-t_primo(i)/(pi/omega)*(P1-P0);
```

```

        end
        k=k+1;
    end
end

s=1;

for i=1:length(t)
    if P(i)==1
        P(i)=P(s);
        s=s+1;
    end
end

%pressione reale

P_re=ones(1,length(t));

k=1.4;
eta_ic=0.85;

n=1/(1-log(1+((P1/P0)^((k-1)/k)-1)/eta_ic)/log(P1/P0));

s_=0.06;

Sn=0.06*S*2*r;

if (g==9.81)

    fprintf('lo spazio nocivo nominale è: %f m^3 \n',Sn)

end

ae=acos(((r^2-l^2+(r+l-2*r*(-s_+(1+s_)/(P1/P0)^(1/n)))^2)/(2*r*(r+l-2*r*(-s_+(1+s_)/(P1/P0)^(1/n))))));

z=find(t>=(pi-ae)/omega-0.00001 & t<=(pi-ae)/omega+0.00001);

i=0.001;

if numel(z)==0
    while numel(z)==0
        z=find(t>=(pi-ae)/omega-0.00001-i & t<=(pi-ae)/omega+0.00001+i);
        i=i*2;
    end
end

for i=1:z(1)

    P_re(i)=P0*((max(x)-x(1)+Sn/S)/(max(x)-x(i)+Sn/S))^n);
end

d=find(alpha>=-0.001 & alpha<=+0.001);

for i=z(1)+1:d(1)

    P_re(i)=P1;

```

```

end

aa=acos((r^2-1^2+(r+1-2*r*s_*((P1/P0)^(1/n)-1))^2)/(2*r*(r+1-
2*r*s_*((P1/P0)^(1/n)-1))));

e=find(t>=(pi+aa)/omega-0.001 & t<=(pi+aa)/omega+0.001);

i=0.001;

if numel(e)==0
    while numel(e)==0
        e=find(t>=(pi+aa)/omega-0.001-i & t<=(pi+aa)/omega+0.001+i);
        i=i*2;
    end
end

i=d(1)+1;

while i<=e(1) %P1*((Sn/S)/(max(x)-x(i)+Sn/S))^n >= P0
    P_re(i)=P1*((Sn/S)/(max(x)-x(i)+Sn/S))^n;
    i=i+1;
end

h=i;

f=find(x>=min(x)-0.000001 & x<=min(x)+0.000001);

for i=h:f(2)

    P_re(i)=P0;
end

k=1;
for i=f(2)+1:length(t)

    P_re(i)=P_re(k);
    k=k+1;

end

end

```

5.2 Scelta del motorino elettrico per la variazione del volume nocivo e di altre componenti del sistema

Serve ora valutare la potenza nominale che deve avere il motorino elettrico (ME). In particolare, in questo paragrafo verrà ricavata la coppia di spunto minima che deve avere il motorino, dalla quale poi nel paragrafo 5.3 si ricaverà la potenza nominale da catalogo.

Ricordando quanto visto nel paragrafo 4.1, si erano ricavate le seguenti equazioni per il modello matematico di ME , relative alla applicazione della legge delle maglie di Kirchhoff e del principio di conservazione dell' energia:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{V(t)} - R_e \cdot \overline{I(t)} - L \cdot \frac{d\overline{I(t)}}{dt} - K\Omega(t) = 0 \\ \overline{I(t)} = \frac{(m_{ME} + m + M)R^2}{\eta_e K} \frac{d\Omega(t)}{dt} \\ \overline{I(t)} = I(t) - \frac{f_s M g R}{\eta_e K} - \frac{f_v (m_{ME} + m) g R}{\eta_e K} \\ \overline{V(t)} = V(t) - R_e \frac{f_s M g R}{\eta_e K} - R_e \frac{f_v (m_{ME} + m) g R}{\eta_e K} \end{array} \right.$$

le quali riscritte eliminando $\overline{I(t)}$ e $\overline{V(t)}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} V(t) - R_e \cdot I(t) - L \cdot \frac{dI(t)}{dt} - K\Omega(t) = 0 \\ I(t) = \frac{(m_{ME} + m + M)R^2}{\eta_e K} \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{f_s M g R}{\eta_e K} + \frac{f_v (m_{ME} + m) g R}{\eta_e K} \end{array} \right.$$

La prima di tali equazioni, corrispondente alla legge delle maglie, come già accennato nel paragrafo 4.1, vale per un motore a corrente continua ad eccitazione indipendente, mentre la seconda equazione, quella delle potenze, è generale; le relazioni che si otterranno in questo paragrafo saranno generali, poiché faranno uso di quest' ultima.

Per valutare la potenza a regime e conseguentemente la potenza minima nominale che deve avere il motorino ME , nelle espressioni non si considerano i transitori (ce ne sono due: dovuti uno all' azionamento del freno, mentre l' altro all' inserimento dell' innesto), i quali come si vedrà in seguito sempre in questo paragrafo, sono molto brevi. Per non considerarli si

azzerano le derivate rispetto al tempo e si ottiene quindi, ponendo $\frac{d\Omega(t)}{dt} = 0$ e $\frac{dI(t)}{dt} = 0$:

$$\begin{cases} V - R_e \cdot I - K\Omega = 0 \\ I = \frac{f_s M g R}{\eta_e K} + \frac{f_v (m_{ME} + m) g R}{\eta_e K} \end{cases}$$

Si trascura inoltre l' attrito volvente rispetto a quello radente, per ottenere:

$$\begin{cases} V - R_e \cdot I - K\Omega = 0 \\ I = \frac{f_s M g R}{\eta_e K} \end{cases}$$

Si sa poi che: $\Omega = \frac{1}{R} \frac{dx(t)}{dt}$, la quale a regime si può scrivere ($x(t)$ è lineare nel tempo a regime poiché Ω è costante): $\Omega = \frac{1}{R} \frac{x(t_r) - x(0)}{t_r}$, con t_r tempo di regime e 0 istante in cui inizia il regime.

E' noto inoltre che: $[x(t_r) - x(0)]A_b = S'_n(t_r) - S'_n(0)$, dove con A_b si è indicata l' area di base del blocchetto di massa M trascinato dal motorino elettrico ME .

Per cui:

$$E = K\Omega = \frac{K}{A_b R} \frac{S'_n(t_r) - S'_n(0)}{t_r}$$

La potenza elettrica P_r richiesta al motorino a regime si può quindi esprimere indifferentemente nei tre modi seguenti:

$$1) P_r = Ei = \frac{K}{A_b R} \frac{S'_n(t_r) - S'_n(0)}{t_r} \frac{f_s M g R}{\eta_e K} = \frac{f_s M g [S'_n(t_r) - S'_n(0)]}{\eta_e A_b t_r}$$

$$2) P_r = \frac{f_s M g [x(t_r) - x(0)]}{\eta_e t_r}$$

$$3) P_r = \frac{f_s M g R \Omega}{\eta_e}$$

Tali modi, rappresentano la relazione intuitiva che ci deve essere tra potenza motrice (elettrica) e potenza resistente (dovuta all' attrito radente), valida non solo per motori a corrente continua ad eccitazione indipendente, ma come detto in generale, per qualsiasi tipo di motore.

La potenza elettrica nominale P_n del motorino dovrà essere superiore a quella di regime P_r :

$$P_n \geq P_r = \frac{f_s M g [S'_n(t_r) - S'_n(0)]}{\eta_e A_b t_r} = \frac{f_s M g [S'_n(t_{rmax}) - S'_n(0)]}{\eta_e A_b t_{rmax}} = \frac{f_s M g \Delta S'_{nmax}}{\eta_e A_b \frac{\pi}{\omega}}$$

dove t_r , essendo il tempo di regime, rappresenta l' intervallo di tempo in cui il blocchetto si sposta esclusi i transitori; nell' ultima relazione ($P_r = \frac{f_s M g \Delta S'_{nmax}}{\eta_e A_b \frac{\pi}{\omega}}$) invece si considera il fatto che, la variazione massima di volume nocivo $\Delta S'_{nmax}$ deve avvenire in un tempo t_r al massimo pari a $t_{rmax} = \frac{\pi}{\omega}$ (si potrebbe scegliere in linea di principio $t_{rmax} < \frac{\pi}{\omega}$, ma per minimizzare la potenza richiesta a regime conviene porsi nella condizione $t_{rmax} = \frac{\pi}{\omega}$); infatti t_r deve essere tale che il volume nocivo venga modificato in un tempo minore o uguale al tempo che passa tra l' inizio della aspirazione e l' inizio della compressione: $\frac{\pi}{\omega}$ (la durata della fase di aspirazione è in realtà pari a: $\frac{\pi - \alpha_a}{\omega}$, con α_a angolo visto nel paragrafo 5.1; tuttavia, dato che è di solito un angolo piccolo lo si trascura per non complicare i calcoli).

Quindi si può prendere $t_{rmax} = \frac{\pi}{\omega}$ nel caso di spostamento massimo, ricordando che il volume nocivo viene modificato soltanto nell' intervallo che va dall' inizio della aspirazione fino all' inizio della compressione, mentre non viene modificato durante la compressione. Quindi, implicitamente, si considera il tempo di regime t_r variabile, in funzione della variazione di spazio nocivo che si vuole avere in quel ciclo. Successivamente in questo paragrafo si vedrà come calcolare in generale tale tempo t_r .

L' unica incognita della relazione che esprime la potenza a regime è la massa del blocchetto M , la quale si può calcolare considerando che deve valere l' equilibrio delle forze sullo stesso blocchetto in fase di compressione, poiché il volume nocivo non deve essere modificato in tale fase, per evitare di dover sovradimensionare il motorino elettrico ME .

Si suppone che, durante la compressione, l' albero del motore elettrico sia collegato tramite l' innesto all' albero delle ruote, in modo da generare una forza (e coppia) resistente che si oppone, insieme alla forza di attrito statico, alla spinta della pressione. Come detto, il volume nocivo in tale fase non deve variare, quindi l' albero del motorino e quello delle ruote devono rimanere in quiete. In tale condizione il motorino elettrico genera la coppia di spunto M_s . Si possono scrivere due equazioni: una relativa all' equilibrio delle forze o dei momenti che si deve avere in compressione, in funzione della coppia di spunto M_s e della massa M , l' altra relativa al transitorio di

avviamento, anche essa funzione di M , M_s ed inoltre della potenza a regime P_r ; aggiungendo a queste due equazioni quella che esprime P_r in funzione di M ricavata in precedenza è possibile ricavare la massa del blocchetto, la coppia di spunto minima che deve avere il motorino, la quale è un parametro noto da catalogo, e la potenza a regime.

Partendo dal transitorio di avviamento, si può scrivere, a partire dalle equazioni viste nel paragrafo 4.1 e riprese all' inizio di questo paragrafo:

$$P_e(t) = E(t)i(t) = K\Omega(t) \left[\frac{(m_{ME} + m + M)R^2}{\eta_e K} \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{f_s M g R}{\eta_e K} + \frac{f_v (m_{ME} + m) g R}{\eta_e K} \right] \approx \frac{(m_{ME} + m + M)R^2 \Omega(t)}{\eta_e} \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{f_s M g R \Omega(t)}{\eta_e}$$

Nell' equazione si è trascurato l' attrito volvente; inoltre, integrandola sul tempo di avviamento t_{avv} si ha:

$$\int_0^{t_{avv}} P_e(t) dt = \int_0^{\Omega} \frac{(m_{ME} + m + M)R^2 \Omega}{\eta_e} d\Omega + \int_0^{t_{avv}} \frac{f_s M g R \Omega(t)}{\eta_e} dt$$

Dato che si vuole un tempo di avviamento piccolo, si può imporre: $t_{avv} = 0.05$ s; così facendo, nell' intervallo $[0, t_{avv}]$, si possono linearizzare le funzioni variabili nel tempo $\Omega(t)$ ed $M(t)$; con Ω si indica il valore a regime di $\Omega(t)$, mentre con $M(t)$ la coppia erogata dal motore sapendo che deve valere:

$$P_e(t) = M(t)\Omega(t)$$

$M(t)$ varia tra il suo valore iniziale, pari alla coppia di spunto M_s al tempo zero, e il suo valore a regime $M_r = \frac{P_r}{\Omega}$ al tempo t_{avv} , quindi si può scrivere:

$$M(t) = M_s - (M_s - M_r) \frac{t}{t_{avv}} \quad 0 \leq t \leq t_{avv}$$

$\Omega(t)$ varia dal valore iniziale nullo fino a raggiungere il suo valore di regime Ω al tempo t_{avv} , quindi si può scrivere:

$$\Omega(t) = \Omega \frac{t}{t_{avv}} \quad 0 \leq t \leq t_{avv}$$

Gli integrali ora si possono calcolare:

$$\int_0^{t_{avv}} P_e(t) dt = \int_0^{t_{avv}} M(t)\Omega(t) dt = \int_0^{t_{avv}} \left[M_s - (M_s - M_r) \frac{t}{t_{avv}} \right] \Omega \frac{t}{t_{avv}} dt =$$

$$= \int_0^{t_{avv}} \left[M_s \Omega \frac{t}{t_{avv}} - (M_s - M_r) \Omega \left(\frac{t}{t_{avv}} \right)^2 \right] dt = M_s \Omega \frac{t_{avv}}{2} - \left(M_s - \frac{P_r}{\Omega} \right) \Omega \frac{t_{avv}}{3}$$

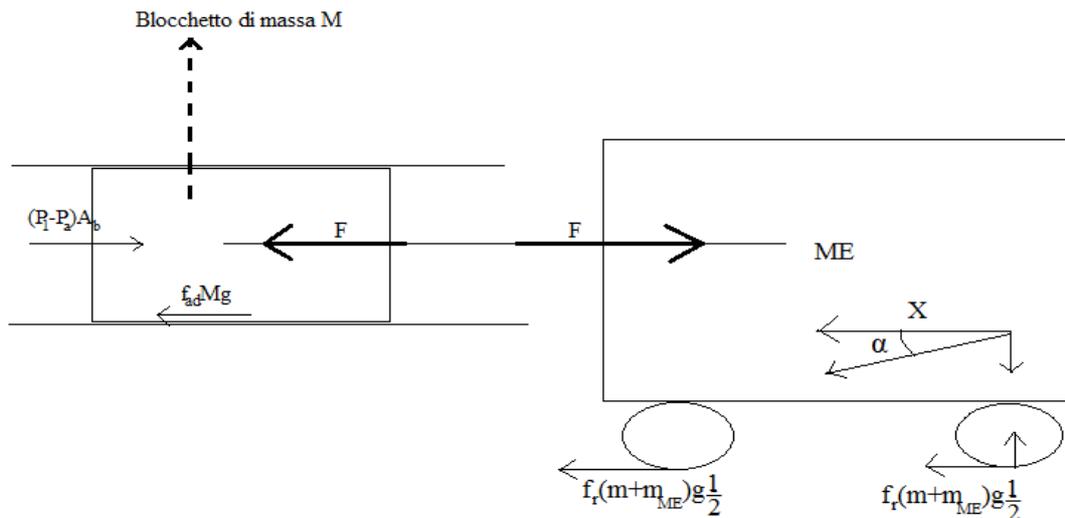
$$\int_0^{\Omega} \frac{(m_{ME} + m + M)R^2 \Omega}{\eta_e} d\Omega + \int_0^{t_{avv}} \frac{f_s M g R \Omega(t)}{\eta_e} dt =$$

$$= \frac{(m_{ME} + m + M)R^2 \Omega^2}{2\eta_e} + \frac{f_s M g R \Omega t_{avv}}{2\eta_e}$$

quindi complessivamente si ottiene:

$$M_s \Omega \frac{t_{avv}}{2} - \left(M_s - \frac{P_r}{\Omega} \right) \Omega \frac{t_{avv}}{3} \approx \frac{(m_{ME} + m + M)R^2 \Omega^2}{2\eta_e} + \frac{f_s M g R \Omega t_{avv}}{2\eta_e}$$

Per quanto riguarda l'equilibrio delle forze in fase di compressione sul sistema *blocchetto + motorino ME*, il problema sarebbe tridimensionale ma per simmetria si può considerare il sistema piano; tale simmetria in generale non sarà perfetta dato che le rette d'azione delle forze che agiscono sui denti delle ruote dentate dovrebbero essere esattamente sulla mezzeria del blocchetto, cosa che non è possibile perché ci sono due ingranaggi montati a folle sull'albero secondario, quindi solo uno dei due potrebbe, in linea di principio, avere la retta d'azione sulla mezzeria. Rese il più possibile trascurabili con un opportuno montaggio tali asimmetrie si può quindi schematizzare il sistema con il seguente disegno sul piano:



N.B: le forze peso sul blocchetto e sul motorino non sono state disegnate in figura

Sul blocchetto di massa M , in direzione orizzontale, agiscono la forza dovuta alla pressione dell'aria: $(P_1 - P_2)A_b$ e l'attrito statico fra guida orizzontale e blocchetto): $f_{ad}Mg$ (si suppone di essere in condizione di attrito statico massimo, per necessitare di una minore coppia di spunto per tenere fermo il blocchetto e quindi per poter sottodimensionare il motorino). In generale queste due forze non saranno equilibrate, poiché prevale la spinta dell'aria, quindi per equilibrare il blocchetto deve nascere una forza F in direzione opposta alla spinta dell'aria. Tale forza, per il terzo principio della dinamica, agirà con stesso modulo e direzione, ma verso opposto, sul motorino ME . Sul motorino poi agiscono: una forza dovuta al contatto tra le ruote dentate dell'albero del motorino e quello secondario delle ruote, che forma un angolo α con la direzione orizzontale, chiamato angolo di pressione; la componente di tale forza lungo la direzione orizzontale è indicata con X nel disegno, mentre la componente verticale si scarica sul vincolo, il quale è dato dalla pavimentazione a contatto con le ruote del motorino. Tale pavimentazione non è detto che debba per forza essere quella della guida orizzontale; infatti, il motorino ME potrebbe essere pensato anche esterno ad essa. Un'altra forza che si scarica sui vincoli è la forza peso del motorino, non disegnata in figura poiché non sarà rilevante nel seguito; stesse considerazioni per la forza peso agente nel baricentro del blocchetto di massa M .

L'ultima forza da considerare agente sul motorino, è quella di attrito statico fra ruote e pavimentazione; essa agirebbe su tutte e quattro le ruote, ma come detto, per simmetria si considera il problema piano, quindi in tal caso è come se agisse solo su due ruote. Complessivamente, la risultante di tale forza è: $f_r(m + m_{ME})g$, con f_r coefficiente di attrito statico tra ruote e

pavimentazione, ma essendoci, come detto, simmetria agisce su ciascuna ruota con intensità pari alla metà della risultante: $f_r(m + m_{ME})g \frac{1}{2}$ ed ha direzione e verso mostrate in figura.

Considerando l'equilibrio dei momenti, per quanto riguarda il blocchetto di massa M , le forze mostrate nel disegno generano un momento che viene equilibrato dal momento delle reazioni vincolari a loro volta generate dalla guida orizzontale; per quanto riguarda il motorino, le forze che generano momento sono la forza F , la forza di attrito $f_r(m + m_{ME})g$ e la forza X . Chiamando b la distanza della forza F dal centro della ruota motrice del motorino (quella appartenente all'albero secondario su cui sono montate a folle le ruote dentate con rapporti di trasmissione $+0-1$; in figura è la ruota che reagisce alla componente verticale della forza dovuta al contatto tra le ruote dentate dell'albero del motorino e quello secondario delle ruote) e a la distanza della forza X dal centro della stessa ruota, si può scrivere l'equilibrio dei momenti rispetto al centro della ruota:

$$aX = Rf_r(m + m_{ME})g + bF$$

Ma dato che aX è la coppia dovuta al motore in condizioni di velocità angolare nulla, tale coppia è uguale a quella di spunto. Quindi:

$$M_s = aX$$

e dunque:

$$M_s = Rf_r(m + m_{ME})g + bF$$

Si sono così ricavate le due equazioni:

$$\begin{cases} M_s \Omega \frac{t_{avv}}{2} - \left(M_s - \frac{P_r}{\Omega} \right) \Omega \frac{t_{avv}}{3} \approx \frac{(m_{ME} + m + M)R^2 \Omega^2}{2\eta_e} + \frac{f_s M g R \Omega t_{avv}}{2\eta_e} \\ M_s = Rf_r(m + m_{ME})g + bF \end{cases}$$

La forza F , per l'equilibrio delle forze in direzione orizzontale sul blocchetto deve valere:

$$F = (P_1 - P_a)A_b - f_{ad}Mg$$

quindi le due equazioni diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_s \Omega \frac{t_{avv}}{2} - \left(M_s - \frac{P_r}{\Omega} \right) \Omega \frac{t_{avv}}{3} \approx \frac{(m_{ME} + m + M)R^2 \Omega^2}{2\eta_e} + \frac{f_s M g R \Omega t_{avv}}{2\eta_e} \\ M_s = R f_r (m + m_{ME}) g + b[(P_1 - P_a)A_b - f_{ad} M g] \end{array} \right.$$

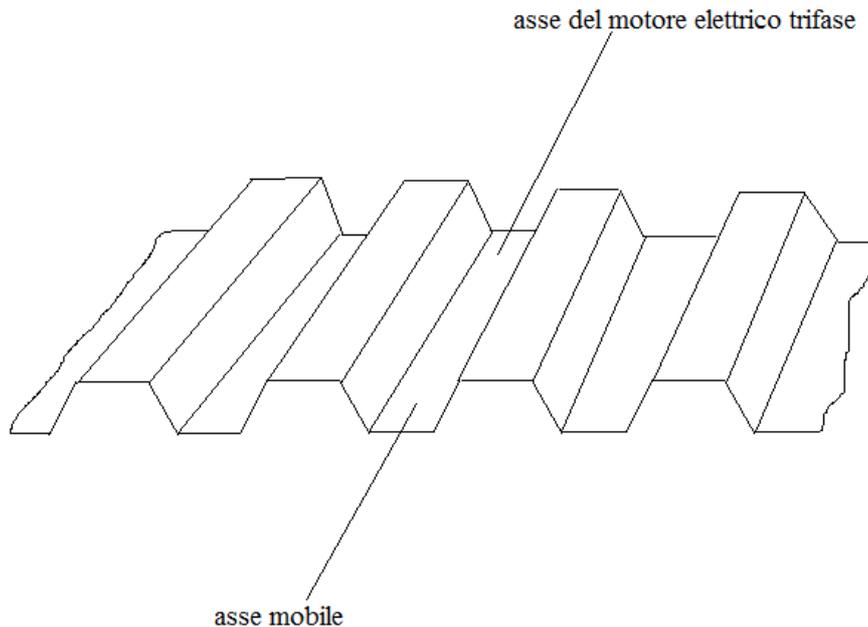
ed aggiungendo l' equazione della potenza P_r si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_s \Omega \frac{t_{avv}}{2} - \left(M_s - \frac{P_r}{\Omega} \right) \Omega \frac{t_{avv}}{3} \approx \frac{(m_{ME} + m + M)R^2 \Omega^2}{2\eta_e} + \frac{f_s M g R \Omega t_{avv}}{2\eta_e} \\ M_s = R f_r (m + m_{ME}) g + b[(P_1 - P_a)A_b - f_{ad} M g] \\ P_r = \frac{f_s M g R \Omega}{\eta_e} \end{array} \right.$$

Fissando i parametri: m_{ME} , m , R , Ω , f_{ad} , f_s , f_r , η_e , b , A_b , P_1 , P_a , g si possono ricavare le tre incognite: M_s , M e P_r (t_{avv} si è già fissato pari a 0.05 s). Dato però che la massa M è meglio averla quanto più piccola possibile per ridurre la coppia di spunto e la potenza a regime, conviene fissare M e prendere come altra incognita il braccio b , il quale dipende semplicemente dal montaggio dell' asta che collega il blocchetto al motorino ME . Quindi le incognite sono: M_s , b e P_r .

La pressione P_1 è nota da paragrafo 5.1, pari a 3 bar, P_a è la pressione ambiente (1 bar), mentre g è l' accelerazione di gravità (9.81 m/s^2). Per fissare i valori delle masse m_{ME} e m , come per il caso di M , conviene che siano più piccole possibili, per minimizzare la coppia di spunto. m è la massa delle ruote del motorino, la quale, dato che come si vedrà più avanti in questo paragrafo il raggio delle ruote verrà fissato pari a 5.1 cm, rendendole di dimensione abbastanza ridotta, può essere presa piccola, per esempio pari a 0.05 kg. La massa m_{ME} invece, dato che contiene il freno, l' innesto e il motorino elettrico, soprattutto per quest' ultimo dovrebbe essere abbastanza maggiore; tuttavia, si può pensare che il motorino elettrico sia fisso ed esterno al blocco denominato ME nella prima figura del paragrafo 4.1, per esempio facendo ingranare l' albero del motore elettrico con una cremagliera, la quale a sua volta ingrana con l' albero (mobile) da inserire nel blocco denominato ME , che infine ingrana con l' albero secondario delle ruote.

Quindi si può schematizzare quanto detto nel seguente modo:



In figura viene specificato che il motorino elettrico è trifase perchè insieme a quello del compressore, nel paragrafo 5.3 verrà scelto da catalogo appunto come motore trifase.

L'asse mobile in figura, come detto, poi viene posizionato nel blocco ME , ed è lo stesso asse (chiamato 'asse di ME ') che si vede nella seconda figura del paragrafo 4.1. Il vantaggio che si ha quindi collocando il motorino esternamente è che la massa m_{ME} cala notevolmente, poiché non è più presente l'inerzia del motorino trifase all'interno di ME e quindi non deve più essere spostata, necessitando di coppie di spunto notevolmente maggiori e quindi un sovradimensionamento del motorino.

L'asse mobile è quindi solidale ad ME e si sposta con esso mentre l'asse del motorino trifase, il quale è fisso, ingrana con la cremagliera.

Riducendo opportunamente le dimensioni degli alberi e degli ingranaggi contenuti in ME , si supporrà in seguito che sia possibile ottenere ad esempio un valore per la massa m_{ME} pari ad 0.05 kg (massa comprensiva dell'albero mobile, della cremagliera, degli ingranaggi e del freno; tali elementi devono essere resi più leggeri possibile e sufficientemente resistenti).

Anche la massa M la si prenderà pari a 0.05 kg .

Per la superficie A_b , dato che dipende dalla lunghezza del pistone in direzione parallela alla guida orizzontale e dal volume nocivo, si può considerare la relazione: $A_b \approx \frac{S_n}{\sqrt{S}}$, la quale risulta approssimata ed è comunque una scelta per capire l'ordine di grandezza di A_b .

Con i parametri visti al paragrafo 5.1 e prendendo il volume nocivo nominale pari al 6% della cilindrata: $S_n = 0.06V_c = 0.06 \cdot 2r \cdot S = 0.06 \cdot 2 \cdot 0.1 \cdot 0.1 = 0.0012 \text{ m}^3$ e $S = 0.1 \text{ m}^2$, risulta: $A_b \approx \frac{0.0012}{\sqrt{0.1}} = 0.0038 \text{ m}^2$.

Dato che il motorino elettrico trifase che verrà scelto avrà due coppie di poli, la sua velocità di sincronismo alle frequenze di rete sarà pari a 1500 rpm; la velocità a regime Ω sarà compresa tra 1400 e 1500 rpm siccome la potenza richiesta a regime, come si vedrà, sarà abbastanza minore della potenza nominale che necessita il motore. Quindi nel diagramma di *coppia – velocità angolare* ci si troverà nella zona vicina al sincronismo. Per i calcoli si considererà un valore intermedio di Ω , pari a 1450 rpm.

Per quanto riguarda i coefficienti di attrito: f_{ad}, f_s, f_r , per fissarli bisogna scegliere i materiali o le superfici della guida orizzontale lungo cui può traslare il blocchetto, della pavimentazione a contatto con le ruote e della massa M .

Conviene avere delle superfici quanto più lisce/lubrificate possibili, per ridurre la coppia di spunto e la potenza nominale. Si prenderanno dei valori pari a: $f_{ad} = 0.2, f_s = 0.1$.

Per il coefficiente di attrito tra ruote e pavimentazione f_r , senza specificare i materiali, si prenderà un valore di 1, maggiore dei precedenti perché bisogna garantire una ottima aderenza delle ruote sulla pavimentazione.

Infine, per il rendimento η_e di conversione elettromeccanica del motorino, si prenderà un valore pari al 95%.

Ricapitolando i valori scelti per i parametri si ha:

$$m_{ME} = 0.05 \text{ kg}$$

$$m = 0.05 \text{ kg}$$

$$M = 0.05 \text{ kg}$$

$$R = 5.1 \text{ cm}$$

$$\Omega = 1450 \text{ rpm}$$

$$f_s = 0.2$$

$$f_{ad} = 0.1$$

$$f_r = 1$$

$$\eta_e = 0.95$$

$$A_b = 0.0038 \text{ m}^2$$

$$P_1 = 3 \text{ bar}$$

$$P_a = 1 \text{ bar}$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

Risolvendo ora il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_s \Omega \frac{t_{avv}}{2} - \left(M_s - \frac{P_r}{\Omega} \right) \Omega \frac{t_{avv}}{3} \approx \frac{(m_{ME} + m + M)R^2 \Omega^2}{2\eta_e} + \frac{f_s M g R \Omega t_{avv}}{2\eta_e} \\ M_s = R f_r (m + m_{ME}) g + b [(P_1 - P_a) A_b - f_{ad} M g] \\ P_r = \frac{f_s M g R \Omega}{\eta_e} \end{array} \right.$$

si ricava:

$$M_s \approx 3.8 \text{ Nm}$$

$$b \approx 0.50 \text{ cm}$$

$$P_r \approx 0.40 \text{ W}$$

Se si volesse calcolare la potenza a regime che deve avere il motorino con la formula vista in precedenza: $P_r = \frac{f_s M g \Delta S'_{nmax}}{\eta_e A_b \frac{\pi}{\omega}}$, si otterrebbe lo stesso risultato,

infatti:

$$P_r = \frac{f_s M g \Delta S'_{nmax}}{\eta_e A_b \frac{\pi}{\omega}} = \frac{f_s M g \left[\frac{V_c}{\left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1}{n}} - 1} - 0.04 V_c \right]}{\eta_e A_b \frac{\pi}{\omega}} = \frac{0.1 \cdot 0.05 \cdot 9.81 \left[\frac{2 \cdot 0.1 \cdot 0.1}{\left(\frac{3}{0.5} \right)^{\frac{1}{1.4789}} - 1} - 0.04 \cdot 2 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \right]}{0.95 \cdot 0.0038 \cdot \frac{\pi}{12}} =$$

$$= 0.40 \text{ W}$$

Dato che si ha una coppia di spunto non estremamente bassa, si vedrà nel paragrafo 5.3 che sarà necessario scegliere una potenza nominale maggiore di tale potenza a regime.

Per quanto riguarda il braccio b della forza F , è positivo che risulti pari ad un valore piccolo (0.5 cm), poiché consente di limitare le dimensioni e quindi la massa degli ingranaggi, dato che b è pari al raggio della circonferenza primitiva dell'ingranaggio montato a folle sull'albero secondario.

Il materiale del blocchetto lo si può scegliere sapendo che deve valere all'incirca: $M \approx \rho_{\text{blocchetto}} A_b \sqrt{S}$, perché il blocchetto deve poter spaziare il volume nocivo lungo la direzione orizzontale del pistone pari a circa \sqrt{S} , che quindi deve essere dello stesso ordine di grandezza della lunghezza del blocchetto. Così si può quindi determinare l'ordine di grandezza della densità del blocchetto: $\rho_{\text{blocchetto}} \approx \frac{M}{A_b \sqrt{S}}$.

La densità del blocchetto deve essere quindi, uguale o minore a:

$$\rho_{\text{blocchetto}} = \frac{M}{\sqrt{S}A_b} = \frac{0.05}{\sqrt{0.1} \cdot 0.0038} \approx 41.6 \text{ kg/m}^3$$

Tale densità è però troppo bassa per i materiali comunemente utilizzati. Si può pensare allora di risolvere il problema utilizzando un blocchetto delle stesse dimensioni però cavo all' interno, asportando una certa quantità di volume V , potendo così scegliere un materiale di densità maggiore.

Un materiale con ottime proprietà meccaniche e con bassa densità è l' alluminio, quindi scelto l' alluminio per il blocchetto si ha: $\rho_{\text{Alluminio}} = 2700 \text{ kg/m}^3$.

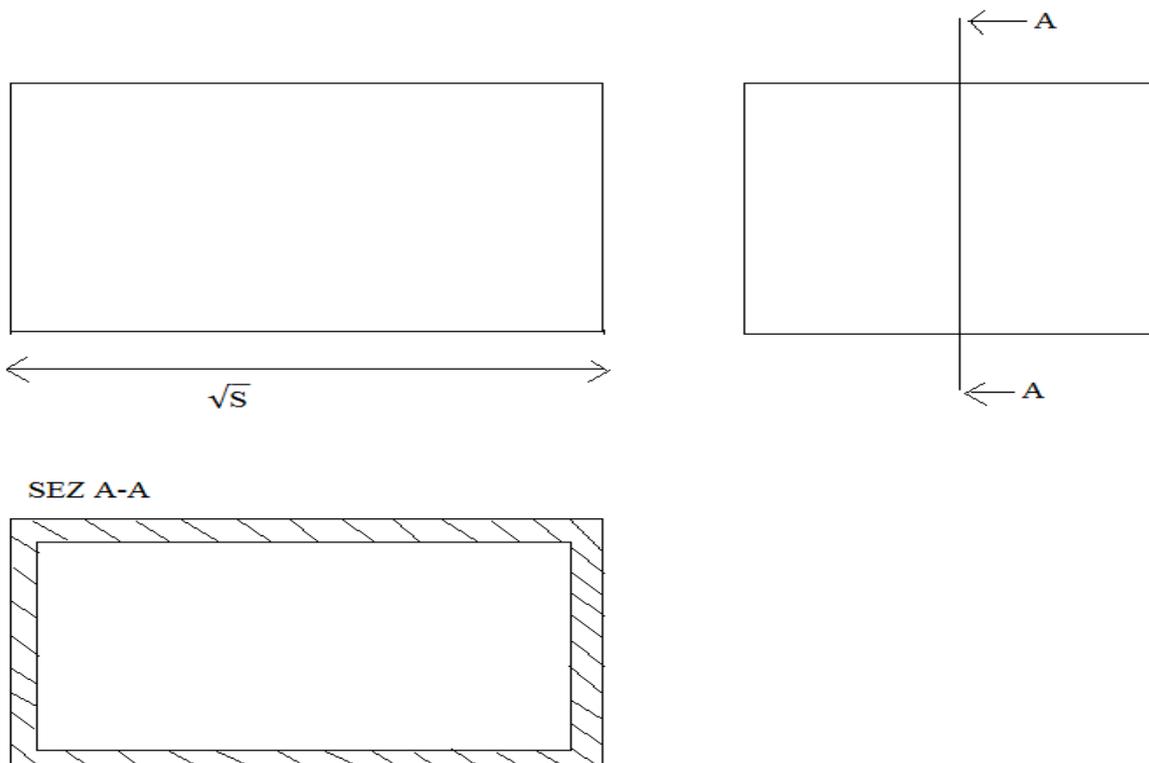
Si può ricavare allora il volume da asportare dal blocchetto eguagliando la massa nel caso in cui si abbia un blocchetto pieno, di lunghezza \sqrt{S} , area di base A_b e densità pari a $\rho_{\text{blocchetto}}$, alla massa nel caso in cui si abbia un blocchetto cavo di alluminio:

$$M = \rho_{\text{blocchetto}}\sqrt{S}A_b = \rho_{\text{Alluminio}}(\sqrt{S}A_b - V)$$

Risolvendo per V si ottiene:

$$V = \frac{\rho_{\text{Alluminio}} - \rho_{\text{blocchetto}}}{\rho_{\text{Alluminio}}}\sqrt{S}A_b \approx \frac{2700 - 63}{2700}\sqrt{0.1} \cdot 0.0038 \approx 11.8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

Per cui, il blocchetto dovrà essere del tipo:



Per lavorarne la parte interna si può pensare di asportare materiale da due metà separatamente e poi saldarle ad esempio.

Per i valori numerici ottenuti si riportano anche gli script di matlab per il calcolo della potenza a regime P_r , per il braccio b e per la coppia di spunto M_s , anche se non strettamente necessari in quanto i conti non contengono alcuna difficoltà.

```
%calcolo di Ms, Pr, b

clear
clc

R=0.051;
etae=0.95;
Ab=0.0038;
mME=0.05;
m=0.05;
tavv=0.05;
fad=0.2; %superfici lubrificate
fs=0.1;
g=9.81;
P1=3;
Pa=1;
omega=152; %1450 rpm
roAl=2700;

fr=1; %attrito ruota-pavimentazione
M=0.05;

%risoluzione del sistema lineare

A=[0,omega*tavv/6,tavv/3;fad*M*g-(P1-Pa)*Ab*10^5,1,0;0,0,1];
b=[(fad*M*g*R*omega+(m+mME+M)*R^2*omega^2)/(2*etae);R*fr*(m+mME)*g;fs*M*g*R*omega/etae];
x=A\b;

b=x(1);
Ms=x(2);
Pr=x(3);

fprintf('il braccio b è: %f m\n',b)
fprintf('la coppia di spunto Ms è: %f Nm\n',Ms)
fprintf('la potenza a regime Pr è: %f W\n',Pr)

S=0.1;
ro=M/(Ab*sqrt(S));
V=(roAl-ro)*Ab*sqrt(S)/roAl;

fprintf('la densità che dovrebbe avere il blocchetto pieno sarebbe: %f kg/m^3\n',ro)
fprintf('il volume da asportare per poter scegliere l alluminio è: %f m^3\n',V)
```

Qualora si desideri che il motorino elettrico non intervenga durante la fase di compressione, cioè che non eroghi la coppia di spunto, per poterlo sottodimensionare, ciò non si riuscirebbe a fare. Questo perché in tal caso la forza di attrito statico che la guida orizzontale esercita sul blocchetto da sola deve vincere la massima spinta dovuta alla pressione, cioè quando appunto la pressione è pari a quella di mandata.

Deve valere quindi: $f_{ad}Mg \geq (P_1 - P_a)A_b$. Conviene prendere il segno di uguale per minimizzare la massa del blocchetto, cioè porsi nelle condizioni di attrito statico massimo; in tale condizione si ottiene:

$$M = \frac{(P_1 - P_a)A_b}{f_{ad}g}$$

I valori dei parametri ora sono noti e si può calcolare M :

$$M = \frac{(3 - 1) \cdot 10^5 \cdot 0.0038}{0.2 \cdot 9.81} \approx 387 \text{ kg}$$

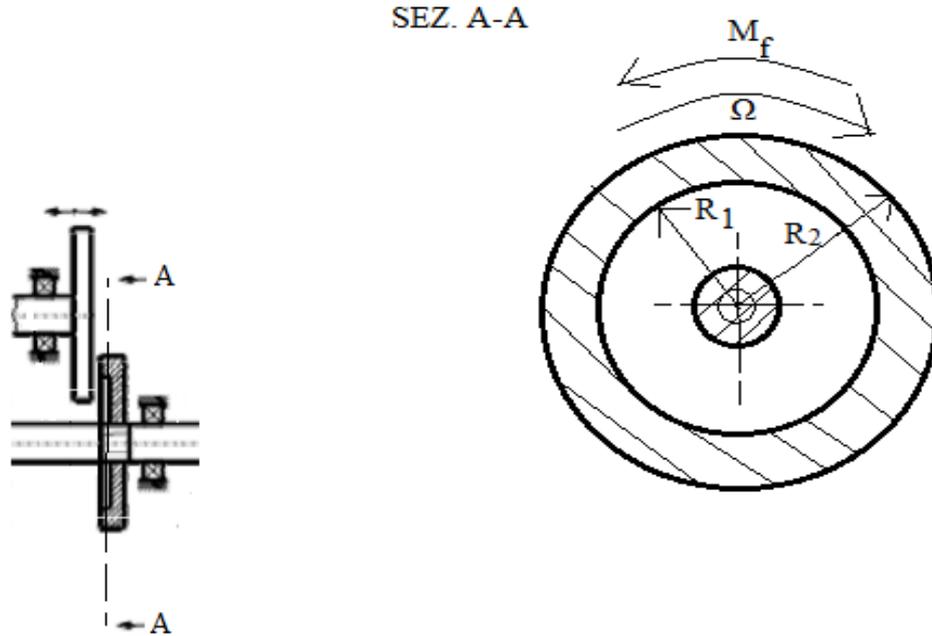
Come si può vedere, la massa M dovrebbe essere eccessiva e il sistema avrebbe inoltre grossi problemi dovuti all'inerzia del blocchetto. Pertanto, il motorino elettrico deve intervenire nella fase di compressione e l'innesto deve essere inserito.

Per quanto riguarda il freno automatico invece, la scelta deve essere basata su due parametri importanti: uno è il momento frenante M_f che il freno deve essere in grado di generare (lo si considererà costante), l'altro è la forza assiale F che deve essere applicata al freno per mantenerlo a contatto con la ghiera cilindrica collegata tramite filettatura all'albero delle ruote, accoppiate al motorino elettrico ME .

Per il calcolo di M_f , si può applicare l'equazione dell'energia come vista nel paragrafo 4.1:

$$P_m(t) - P_r(t) = \frac{dT(t)}{dt}$$

L'equazione verrà applicata alla ghiera a contatto con il freno; la rappresentazione grafica della ghiera è la seguente:



Quando interviene il freno, l'innesto viene disinserito, per cui non agisce più la potenza motrice del motorino elettrico sull'albero secondario, e quindi l'equazione dell'energia si può scrivere:

$$P_m(t) - P_r(t) = 0 - P_r(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int V_P^2 dm \right)$$

L'integrale è valutato sulla massa m_g della ghiera e V_P è la velocità di un punto P qualsiasi della ghiera.

La velocità $\Omega(t)$ dell'albero durante la frenatura, parte dal valore Ω raggiunto dopo l'inserimento dell'innesto e raggiunge il valore 0 alla fine della frenatura.

La massa m_g della ghiera vale:

$$m_g = \rho_g \pi (R_2^2 - R_1^2) b$$

con ρ_g densità della ghiera e b il suo spessore.

Sviluppando l'equazione dell'energia si ha:

$$\begin{aligned} -P_r(t) &= -M_f \Omega(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int V_P^2 dm \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int (\Omega(t) \cdot r)^2 dm \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int \Omega(t)^2 \cdot r^2 \rho_g b \cdot r d\vartheta dr \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \Omega(t)^2 \cdot r^3 \rho_g b d\vartheta dr \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{R_1}^{R_2} \Omega(t)^2 \cdot r^3 dr \rho_g b \cdot 2\pi = \Omega(t) \dot{\Omega}(t) \frac{R_2^3 - R_1^3}{3} \rho_g b \cdot 2\pi$$

quindi:

$$M_f = -\dot{\Omega}(t) \frac{R_2^3 - R_1^3}{3} \rho_g b \cdot 2\pi = -\dot{\Omega}(t) \frac{2 R_2^3 - R_1^3}{3 R_2^2 - R_1^2} m_g$$

Dato che M_f è costante, $\dot{\Omega}(t)$ è a sua volta costante per cui:

$$\dot{\Omega}(t) = cost \rightarrow \int_{\Omega}^0 \dot{\Omega}(t) dt = cost \int_0^{t_f} dt \rightarrow cost = \frac{-\Omega}{t_f} = \dot{\Omega}(t)$$

con t_f tempo di frenatura.

M_f vale quindi:

$$M_f = \frac{\Omega}{t_f} \frac{2 R_2^3 - R_1^3}{3 R_2^2 - R_1^2} m_g$$

Una volta fissato il tempo di frenatura che si vuole avere, le dimensioni e i materiali della ghiera, si ricava il momento frenante che il freno deve erogare (più avanti nel paragrafo, si sceglieranno tali parametri per il calcolo di M_f).

Come già detto, la modifica dello spazio nocivo avviene durante la discesa del pistone dopo la compressione, fino all' inizio della successiva compressione. Per prima cosa si ha l' innesto del cambio a due ingranaggi; poi in un tempo molto breve, pari al massimo a $t_{avv} = 0.05 s$ per il valore scelto della coppia di spunto del motorino e degli altri parametri, la velocità delle ruote accoppiate al motorino raggiunge il valore di regime (in pratica istantaneamente), dato che il motorino alla modifica del volume nocivo parte da fermo, essendo il suo albero fermo nella fase di compressione per opporsi come visto, assieme all' attrito tra guida orizzontale e blocchetto, alla spinta dell' aria per mantenere fermo il blocchetto. Dopodiché, del tempo di discesa, pari a $\frac{\pi}{\omega}$, una prima frazione viene utilizzata per spostare il blocchetto di massa M a velocità costante, ed un' altra frazione viene usata per frenarlo (più avanti si vedrà come calcolare tali frazioni).

Nota il momento frenante M_f , è immediato risalire alla forza assiale F che deve essere applicata al freno per mantenerlo a contatto con la ghiera cilindrica. E' possibile dimostrare infatti, utilizzando l' *'ipotesi del Reye'* (vedi

Funaioli, Maggiore, Meneghetti 'Lezioni di Meccanica Applicata alle Macchine Prima parte: Fondamenti di Meccanica delle Macchine', pag. 73-75, Prima Edizione, oppure vedi Dispense di 'Meccanica degli Azionamenti' del Prof. Ing. Marco Troncosi, capitolo sui freni), che il legame fra F ed M_f è il seguente:

$$M_f = fF \frac{R_1 + R_2}{2}$$

da cui:

$$F = \frac{2M_f}{(R_1 + R_2)f} = \frac{2}{(R_1 + R_2)f} \frac{\Omega}{t_f} \frac{2R_2^3 - R_1^3}{3R_2^2 - R_1^2} m_g$$

dove f è il coefficiente di attrito tra ghiera e freno.

Il freno quindi deve avere le caratteristiche appena viste: deve poter erogare la coppia M_f e la forza F per fermare il blocchetto in un tempo t_f ; inoltre, come già detto, deve essere comandato elettronicamente, in modo da venire azionato al tempo opportuno (come già accennato, si vedrà nel seguito come valutare tale tempo opportuno), durante la discesa del pistone.

Dato che il cambio automatico ad ingranaggi, il quale rende solidali l' albero del motorino elettrico all' albero delle ruote ad esso accoppiate, ha rapporti di trasmissione $+1$ o -1 , la velocità Ω (Ω è da intendersi positiva) delle ruote coincide con quella dell' albero del motorino elettrico in valore assoluto (il segno $-$ indica la variazione del senso di rotazione), la quale risulta fissata; bisogna fissare però anche: il raggio delle ruote R (precedentemente si era utilizzato un valore pari a 5.1 cm , il quale verrà giustificato nelle pagine seguenti), il tempo t_r misurato a partire da punto morto superiore (cioè a partire dall' inserimento dell' innesto) a cui si deve attivare il freno (e contemporaneamente disinserire l' innesto), e il tempo di frenatura t_f . Dato che il momento frenante lo si considera costante, la decelerazione angolare delle ruote è a sua volta costante e quindi anche il tempo di frenatura t_f deve essere costante, come visto pari a:

$$\frac{-\Omega}{t_f} = \dot{\Omega} \rightarrow t_f = \frac{-\Omega}{\dot{\Omega}} = \text{cost}$$

Per poter raggiungere, a partire da un certo spazio nocivo iniziale S_{no} (che può essere un valore qualsiasi fra quelli ammissibili), un qualsiasi spazio nocivo desiderato S_{ndes} (sempre ovviamente fra i valori ammissibili), è necessario variare, come si vedrà tra poco, il tempo t_r in funzione di S_{ndes} e

S_{no} . Si supponrà nel seguito che, a partire dall' inserimento dell' innesto, le ruote raggiungano istantaneamente il loro valore di regime Ω . Quindi si trascura il primo transitorio (il quale comunque è piccolo poiché come visto è di durata pari a $t_{avv} = 0.05$ s), ma verrà invece considerato il transitorio di frenatura.

Come si vedrà dai calcoli inoltre, nel caso di spostamento massimo del blocchetto pari a:

$$|S_{ndes} - S_{no}|_{max} = \Delta S_{nmax}$$

t_f sarà trascurabile rispetto a t_r , essendo in tal caso $t_r \gg t_f$.

Per vedere in un grafico i tempi t_f , t_r e gli spazi nocivi, durante il passaggio da uno spazio nocivo precedente ad uno spazio nocivo successivo, si sà che in un primo tratto nel tempo t_r la velocità delle ruote è quella di regime Ω , potendo quindi scrivere:

$$\dot{S}_n(t) = \text{sgn}(S_{ndes} - S_{no})A_b R \Omega \quad t \in [0, t_r]$$

mentre in un secondo tratto, a partire dal tempo t_r , fino al tempo $t_r + t_f$, si ha una decelerazione angolare costante, quindi una velocità che decresce linearmente dal valore Ω fino a 0, potendo quindi scrivere:

$$\dot{S}_n(t) = \text{sgn}(S_{ndes} - S_{no})A_b R \Omega \left(\frac{t_r + t_f - t}{t_f} \right) \quad t \in [t_r, t_r + t_f]$$

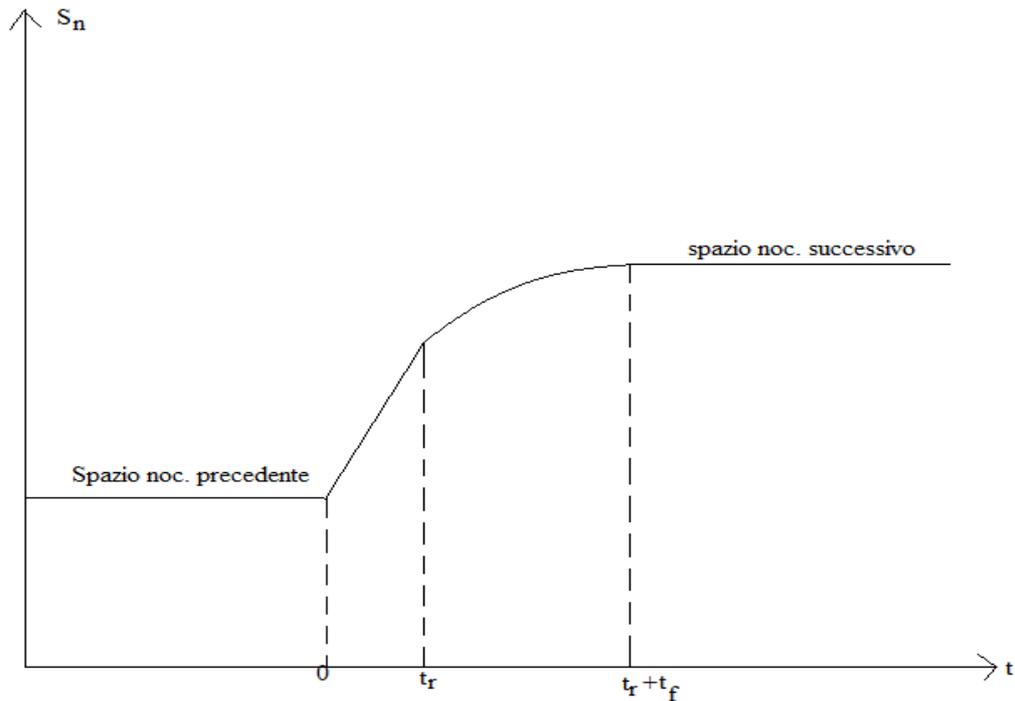
Integrando le relazioni:

$$\begin{cases} \dot{S}_n(t) = \text{sgn}(S_{ndes} - S_{no})A_b R \Omega & t \in [0, t_r] \\ \dot{S}_n(t) = \text{sgn}(S_{ndes} - S_{no})A_b R \Omega \left(\frac{t_r + t_f - t}{t_f} \right) & t \in [t_r, t_r + t_f] \end{cases}$$

fra il tempo 0 e t_r , si perviene a:

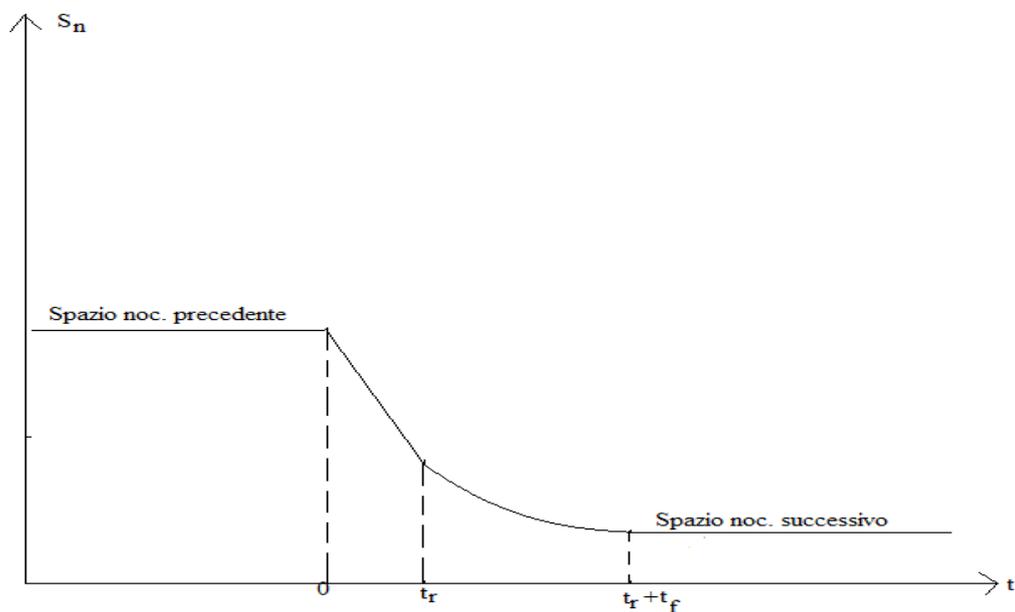
$$\begin{cases} S_n(t_r) - S_{no} = \text{sgn}(S_{ndes} - S_{no})A_b R \Omega t_r & t \in [0, t_r] \\ S_{ndes} - S_n(t_r) = \text{sgn}(S_{ndes} - S_{no})A_b R \Omega \frac{t_f}{2} & t \in [t_r, t_r + t_f] \end{cases}$$

Un grafico possibile, nel caso $S_{ndes} > S_{no}$ può essere allora il seguente:

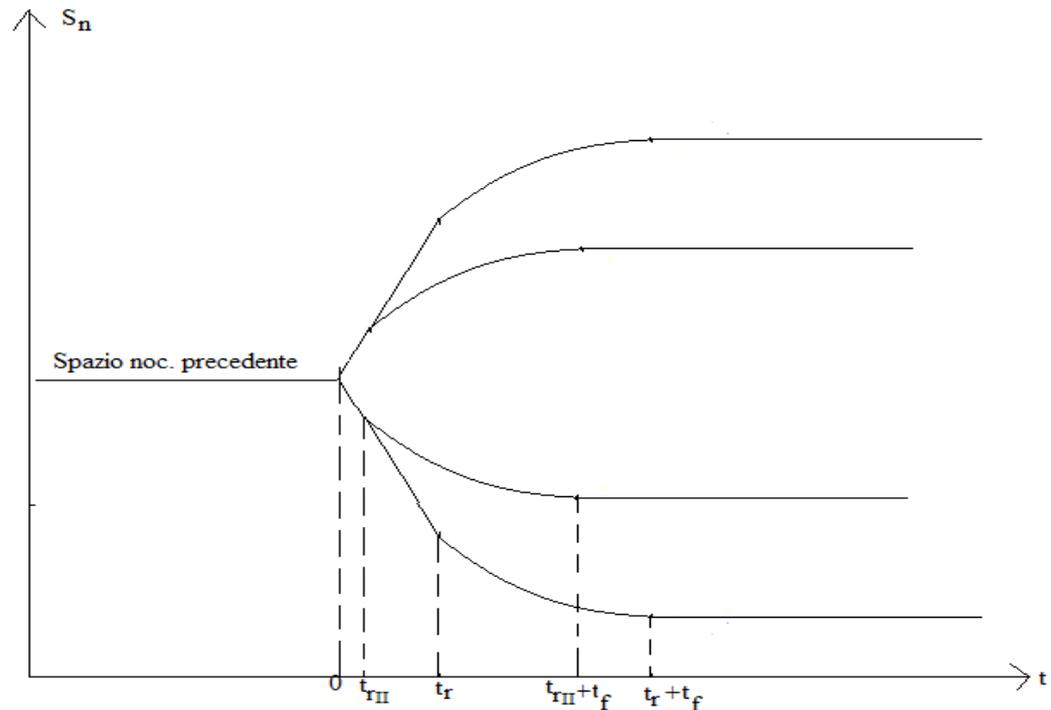


Il primo tratto di salita è lineare poiché $\dot{S}_n(t)$ era costante, mentre il secondo è parabolico poiché $\dot{S}_n(t)$ era lineare.

Qualora invece si abbia $S_{ndes} < S_{n0}$:



La variabile nel problema è t_r , poiché t_f è costante e quindi non modificabile; variando t_r , quindi variando il tempo di permanenza a regime, si può ottenere un qualsiasi spazio nocivo a partire da un altro:



Dal grafico sopra si vede che, ad esempio diminuendo il tempo t_r dal valore t_r al valore t_{rII} , diminuisce (in valore assoluto) la differenza $S_{ndes} - S_{n0}$ fra il valore desiderato (o successivo) del volume nocivo e il valore iniziale (o precedente). Quindi variando t_r si possono ottenere tutte le configurazioni per i valori del volume nocivo, o per meglio dire quasi tutte.

In realtà infatti, qualora vengano richieste variazioni molto piccole dello spazio nocivo, si commette un errore costante che è tanto più piccolo quanto è più piccolo il tempo di frenatura. Tale errore è costante poiché è dato dalla differenza degli estremi dell' arco di parabola (S_{ndes} e $S_n(t_r)$), la quale è indipendente da t_r ma dipendente solo da t_f :

$$S_{ndes} - S_n(t_r) = \text{sgn}(S_{ndes} - S_{n0}) A_b R \Omega \frac{t_f}{2} \rightarrow |S_{ndes} - S_n(t_r)| = A_b R \Omega \frac{t_f}{2}$$

L' errore in valore assoluto è dato da $|S_{ndes} - S_n(t_r)|$; dato che per i parametri scelti nel paragrafo 5.1, lo spazio nocivo minimo risulta circa 0.0008 m^3 , e quello massimo 0.0081 m^3 , un errore trascurabile potrebbe essere scelto pari a 0.0001 m^3 . Quindi si ha:

$$0.0001 \text{ m}^3 = A_b R \Omega \frac{t_f}{2}$$

equazione che mette in relazione due incognite: il raggio delle ruote R e il tempo di frenatura. Servono altre due equazioni per poter ricavare le tre incognite complessive: R, t_f, t_r .

Un'altra equazione la si può ricavare sapendo che il tempo complessivo ($t_f + t_r$) che occorre per variare lo spazio nocivo non deve essere superiore al tempo di aspirazione $\frac{\pi}{\omega}$:

$$t_f + t_r \leq \frac{\pi}{\omega}$$

Dato che t_r è variabile, si può porre:

$$t_f + t_{rmax} = \frac{\pi}{\omega}$$

ricavando così un'altra equazione che deve essere soddisfatta.

L'ultima equazione la si ricava dal sistema:

$$\begin{cases} S_n(t_r) - S_{n0} = \operatorname{sgn}(S_{ndes} - S_{no})A_b R \Omega t_r & t \in [0, t_r] \\ S_{ndes} - S_n(t_r) = \operatorname{sgn}(S_{ndes} - S_{no})A_b R \Omega \frac{t_f}{2} & t \in [t_r, t_r + t_f] \end{cases}$$

Infatti, eliminando $S_n(t_r)$, si ricava:

$$S_{ndes} - S_{n0} = \operatorname{sgn}(S_{ndes} - S_{no})A_b R \Omega \left(\frac{t_f}{2} + t_r \right)$$

che si può scrivere anche:

$$|S_{ndes} - S_{n0}| = A_b R \Omega \left(\frac{t_f}{2} + t_r \right)$$

da cui:

$$|S_{ndes} - S_{n0}|_{max} = \Delta S_{nmax} = A_b R \Omega \left(\frac{t_f}{2} + t_{rmax} \right)$$

Quindi il sistema da risolvere è:

$$\begin{cases} 0.0001 \text{ m}^3 = A_b R \Omega \frac{t_f}{2} \\ t_f + t_{rmax} = \frac{\pi}{\omega} \\ \Delta S_{nmax} = A_b R \Omega \left(\frac{t_f}{2} + t_{rmax} \right) \end{cases}$$

Le uniche incognite sono: t_f , t_{rmax} , R .

Si sostituiscono i seguenti valori numerici, noti dal paragrafo 5.1 ma riportati qui per maggiore chiarezza:

$$A_b \approx \frac{S_n}{\sqrt{S}} = \frac{0.06V_c}{\sqrt{S}} = \frac{0.06 \cdot S \cdot 2r}{\sqrt{S}} = \frac{0.06 \cdot 0.1 \cdot 2 \cdot 0.1}{\sqrt{0.1}} \approx 0.0038 \text{ m}^2$$

$$\Delta S'_{nmax} = S'_{max} - S'_{min} = \frac{V_c}{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1} - 0.04V_c = \frac{2 \cdot 0.1 \cdot 0.1}{\left(\frac{3}{0.5}\right)^{\frac{1}{1.4789}} - 1} - 0.04(2 \cdot 0.1 \cdot 0.1) = 0.0077 \text{ m}^3$$

$$\omega = 12 \text{ rad/s}$$

Come detto, per il fatto che il motorino elettrico è un motore trifase a due coppie di poli, la velocità di sincronismo del motore sarà pari a 1500 *rpm*, per cui la velocità a regime non potrà essere troppo diversa da 1500 *rpm*. Per i calcoli verrà preso un valore di Ω pari a 1450 *rpm*.

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{aligned} R &\approx 5.1 \text{ cm} \\ t_f &\approx 0.0067 \text{ s} \\ t_{rmax} &\approx 0.25 \text{ s} \end{aligned}$$

Lo script di Matlab utilizzato per risolvere il sistema è il seguente:

```
%calcolo di 1/R, tf, trmax

clear
clc

format long

OMEGA=152; %1450 rpm
omega=12;
Ab=0.0038;
deltaSnmax=0.0077;
```

```
%risoluzione con sistema lineare
```

```
A=[0.0001,-Ab*OMEGA/2,0; 0,1,1; deltaSnmax,-Ab*OMEGA/2,-Ab*OMEGA];
b=[0; pi/omega; 0];
x=A\b;
```

```
R=1/x(1)
tf=x(2)
trmax=x(3)
```

Nota t_{rmax} , t_r quindi dovrà variare tra 0 *secondi* e t_{rmax} *secondi*. La sua espressione generale si ricava da:

$$|S_{ndes} - S_{no}| = A_b R \Omega \left(\frac{t_f}{2} + t_r \right)$$

da cui:

$$t_r = \frac{|S_{ndes} - S_{no}|}{A_b R \Omega} - \frac{t_f}{2}$$

Ecco quindi la dipendenza del tempo di permanenza a regime t_r dal tempo di frenatura t_f (costante), dal raggio R delle ruote (costante), dall' area di base A_b del blocchetto di massa M e dalla velocità Ω del motorino elettrico ME (entrambe costanti) ed in particolare dalla differenza tra spazio nocivo desiderato S_{ndes} e spazio nocivo di partenza S_{no} , variabile, poiché possono variare sia S_{ndes} che S_{no} .

Quindi il freno viene attivato dopo tale tempo t_r , variabile in generale ad ogni ciclo, misurato a partire dall' inserimento dell' innesto sincronizzatore.

L' innesto invece viene attivato in base al segno della differenza tra spazio nocivo desiderato S_{ndes} e spazio nocivo di partenza S_{no} : $sgn(S_{ndes} - S_{no})$, per sapere se il rapporto di trasmissione desiderato è +1 oppure - 1.

E' possibile fare in modo che, qualora $sgn(S_{ndes} - S_{no}) = +1$, cioè $S_{ndes} - S_{no} > 0$, si abbia corrispondenza con il valore +1 del rapporto di trasmissione, e , qualora $sgn(S_{ndes} - S_{no}) = -1$, cioè $S_{ndes} - S_{no} < 0$, si abbia corrispondenza con il valore -1 del rapporto di trasmissione, ma si potrebbe anche fare il viceversa, ossia: qualora $sgn(S_{ndes} - S_{no}) = +1$, cioè $S_{ndes} - S_{no} > 0$, si abbia corrispondenza con il valore -1 del rapporto di trasmissione, e , qualora $sgn(S_{ndes} - S_{no}) = -1$, cioè $S_{ndes} - S_{no} < 0$, si abbia corrispondenza con il valore +1 del rapporto di trasmissione; tutto ciò dipende dal verso di rotazione del motorino elettrico ME : qualora ruoti in senso orario (il senso di rotazione è da intendere riferito ad un osservatore che vede il sistema *compressore + blocchetto + motorino* come nella prima

figura del paragrafo 4.1) ci si ritroverebbe nella prima situazione, viceversa nella seconda.

Ora che si è ricavato il tempo di frenatura t_f , è possibile calcolare il momento frenante M_f visto precedentemente:

$$\begin{cases} M_f = \frac{\Omega}{t_f} \frac{2R_2^3 - R_1^3}{3R_2^2 - R_1^2} m_g \\ m_g = \rho_g \pi (R_2^2 - R_1^2) b \end{cases}$$

Preso l'acciaio per il materiale della ghiera si ha: $\rho_g = 8000 \text{ kg/m}^3$.

Presi inoltre: raggio esterno della ghiera $R_2 = 3 \text{ cm}$, raggio interno $R_1 = 2 \text{ cm}$, spessore della ghiera $b_g = 3 \text{ cm}$, svolgendo i calcoli si ottiene:

$$M_f = \frac{\Omega}{t_f} \frac{2R_2^3 - R_1^3}{3R_2^2 - R_1^2} m_g = \frac{\Omega}{t_f} \frac{2}{3} (R_2^3 - R_1^3) \rho_g \pi b_g = \frac{\frac{2\pi \cdot 1450}{60} \cdot 2}{0.0067} \frac{2}{3} (0.03^3 - 0.02^3) 8000 \cdot \pi \cdot 0.03 \approx 216 \text{ Nm}$$

Dall'espressione del momento frenante M_f , si vede che esso risulta inversamente proporzionale al tempo di frenatura t_f ; per questo motivo non si è potuto trascurare t_f considerandolo pari a zero, poiché altrimenti sarebbe servito un momento frenante illimitato. Inoltre, seppur t_f sia piccolo, M_f non risulta elevato poiché la differenza fra i raggi della ghiera elevati alla terza potenza $R_2^3 - R_1^3$ e lo spessore b_g della ghiera sono altrettanto piccoli, tanto da abbassare notevolmente M_f .

Il tempo di frenatura lo si può trascurare come detto nel caso di spostamento massimo; questo perché il tempo complessivo in cui si sposta il motorino è pari a $t_r + t_f$, ed essendo nel caso di spostamento massimo $|S_{ndes} -$

$S_{n0}|_{max} = \Delta S_{nmax}$ il tempo t_r pari al suo valore massimo $t_{rmax} \approx 0.25 \text{ s} \approx \frac{\pi}{\omega}$ e $t_f \approx 0.0067 \text{ s}$, t_f è trascurabile rispetto a t_{rmax} e il moto si può considerare solamente composto dal tratto lineare a velocità costante.

Per cui, l'espressione della potenza nominale, come visto in questo paragrafo pari a:

$$P_n = \frac{f_s M g \Delta S_{nmax}}{\eta_e A_b \frac{\pi}{\omega}}$$

è praticamente esatta, nonostante un'espressione più precisa sarebbe:

$$P_n = \frac{f_s M g \Delta S_{nmax}}{\eta_e A_b \left(\frac{\pi}{\omega} - t_f \right)}$$

poiché vale $t_{rmax} = \frac{\pi}{\omega} - t_f$ e non $t_{rmax} = \frac{\pi}{\omega}$, ma dato il piccolo valore che assume t_f rispetto a t_{rmax} , le due relazioni in pratica coincidono; un' altra approssimazione è data dall' aver trascurato il transitorio iniziale dopo l' inserimento dell' innesto, dovuto all' avviamento del motorino durante la fase di aspirazione, ma come detto anche tale tempo è molto breve (0.05 s).

Un' ulteriore stima del raggio delle ruote R , può essere fatta considerando l' espressione della velocità del motorino utilizzata verso l' inizio di questo paragrafo:

$$\Omega \approx \frac{1}{R} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{1}{A_b R} \frac{\Delta S'_{nmax}}{\Delta t}$$

da cui:

$$R \approx \frac{1}{A_b \Omega} \frac{\Delta S'_{nmax}}{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{1}{A_b \Omega} \frac{\frac{2rS}{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1} - 0.04(2rS)}{\frac{\pi}{\omega}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{0.06(2 \cdot 0.1 \cdot 0.1)}{\sqrt{0.1}} \cdot \frac{2\pi \cdot 1450}{60}} \frac{\frac{2 \cdot 0.1 \cdot 0.1}{\left(\frac{3}{0.5}\right)^{1.4789} - 1} - 0.04(2 \cdot 0.1 \cdot 0.1)}{\frac{\pi}{12}} \approx 0.0507 \text{ m} = 5.07 \text{ cm}$$

Il valore trovato (5.07 cm) è praticamente uguale a quello ricavato considerando anche il transitorio di frenata (5.1 cm), a conferma della bontà dei risultati ottenuti.

E' da notare che, qualora il cambio automatico si fosse comportato da riduttore (rapporti di trasmissione minori di 1), la velocità Ω delle ruote sarebbe stata minore e di conseguenza, il raggio R sarebbe stato maggiore, con maggiore ingombro. Per esempio, con una velocità delle ruote di 300 rpm, si sarebbe ottenuto un raggio:

$$R = \frac{1}{\frac{0.06(2 \cdot 0.1 \cdot 0.1)}{\sqrt{0.1}} \cdot \frac{2\pi \cdot 300}{60}} \cdot \frac{\frac{2 \cdot 0.1 \cdot 0.1}{1} - 0.04(2 \cdot 0.1 \cdot 0.1)}{\left(\frac{3}{0.5}\right)^{1.4789} - 1} \cdot \frac{\pi}{12} \approx 0.25 \text{ m} = 25 \text{ cm}$$

Ricapitolando, in questo paragrafo si è dimensionato così il motorino elettrico scegliendo la potenza a regime che deve avere e la sua coppia di spunto; si è dimensionato poi il blocchetto, si sono scelti i materiali del blocchetto e determinato il raggio delle ruote accoppiate al motorino.

Inoltre si è dimensionato il freno, scegliendo il momento frenante, il tempo di frenatura e il tempo, misurato a partire dall' inserimento dell' innesto, a cui bisogna attivare il freno stesso (e contemporaneamente disinserire l' innesto).

Infine, per quanto concerne l' innesto e l' albero delle ruote (albero secondario), essi devono essere scelti in modo tale da minimizzare il transitorio in cui si ha strisciamento fra l' innesto e la ruota dentata montata a folle sull' albero secondario, all' inizio della fase di compressione; infatti, in tale fase viene inserito l' innesto, il quale agisce da freno perché deve decelerare l' albero del motore elettrico fino al valore nullo di velocità di rotazione, dato che il blocchetto non deve spostarsi e il motorino deve generare la coppia di spunto M_s . Il transitorio sarà tanto più breve quanto maggiore sarà la coppia frenante M_i prodotta dall' innesto, che viene trasmessa al motorino per mezzo della ruota dentata calettata sull' albero motore, e quanto minore sarà la coppia resistente M_m generata dal motorino per opporsi al trascinarsi, poiché come noto deve valere la relazione (seconda equazione cardinale della dinamica applicata al motorino dopo l' inserimento dell' innesto all' inizio della fase di compressione):

$$M_i - M_m = J\dot{\Omega}$$

con J momento di inerzia del motorino rispetto all' asse di rotazione.

Quindi, più M_i è grande e M_m piccola, ed anche quanto più piccolo il momento di inerzia J del motorino rispetto al proprio asse di rotazione, maggiore sarà la variazione di velocità $\dot{\Omega}$, e quindi la condizione di aderenza verrà raggiunta più velocemente, poiché la velocità parte dal valore Ω di regime quando il motorino è in rotazione e, dopo l' azionamento, inizia a diminuire, tendendo a raggiungere la velocità nulla dell' albero secondario, tanto più velocemente quanto maggiore è la decelerazione $\dot{\Omega}$.

Quindi anche l' innesto può essere scelto in base al momento frenante (M_i) come è stato fatto per il freno, calcolabile come visto per quest' ultimo, una volta imposto un tempo di frenatura e le dimensioni dell' innesto.

Quando l' innesto invece viene inserito durante la fase di aspirazione, sia l' albero motore che quello secondario partono da una condizione di quiete, quindi non si hanno transitori in tale fase.

Completati i dimensionamenti del motore elettrico del compressore e del motorino *ME*, avendo valutato la potenza minima nominale che deve avere il motore elettrico del compressore e la coppia di spunto che deve avere il motorino, si vedrà nel prossimo paragrafo come queste influiranno sui costi ed in particolare si valuterà il risparmio che si ottiene aggiungendo il sistema di controllo del volume nocivo; si considereranno motori elettrici asincroni trifase sia per il motore del compressore che per il motorino che varia il volume nocivo.

5.3 Analisi del risparmio economico

Per fare una valutazione del risparmio economico che si ha con l'introduzione del sistema di controllo è necessario essere in grado di trattare le variazioni dei costi e ricavi nel tempo.

In generale, qualora si voglia realizzare un impianto (nel caso in esame impianto per l'aria compressa), viene richiesto un prestito alla banca. Il danaro preso a prestito dovrà essere restituito (in n periodi rateali, solitamente anni) come quota capitale con un piano di ammortamento, in più va aggiunta anche una quota interessi, il cui tasso di interesse i viene fissato dal creditore, cioè la banca.

Sia I_o l'investimento iniziale, capitale preso a prestito dalla banca. Per la maturazione di interessi i , dopo un periodo rateale il danaro da restituire sarà: $I_o + iI_o = I_o(1 + i)$, dopo due periodi rateali: $I_o(1 + i) + iI_o(1 + i) = I_o(1 + i)^2$, dopo n periodi: $I_o(1 + i)^n$. Per cui, si può dire che 1 unità di moneta al periodo 0 non avrà più un valore pari a 1 al periodo n , ma pari a $\frac{1}{(1+i)^n}$;

La rata di ammortamento di restituzione del capitale: $T = tI_o$ (con t quota di ammortamento) supposta costante, come nella maggioranza dei casi, e riferita al periodo 0, è tale che, tenendo conto della diminuzione del valore del danaro al passare del tempo: al primo periodo rateale viene restituita la quota $\frac{tI_o}{(1+i)}$, al secondo periodo $\frac{tI_o}{(1+i)^2}$, al periodo n $\frac{tI_o}{(1+i)^n}$.

Deve quindi valere la relazione:

$$\sum_{j=1}^n \frac{tI_o}{(1+i)^j} = I_o$$

per restituire il capitale con aggiunta degli interessi.

Con t , come detto, si definisce la quota di ammortamento:

$$t = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{(1+i)^j}} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Per fare una valutazione economica nel tempo in generale, siano:

U_{kj} il k –esimo utile del j –esimo periodo rateale

C_{kj} il k –esimo costo del j –esimo periodo rateale

Sia q il numero di utili, m il numero di costi (supposti costanti al variare di j) e I_0 l'investimento iniziale, l'utile netto U_n complessivo all' n –esimo periodo si può calcolare nel seguente modo:

$$U_n = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^q \frac{U_{kj}}{(1+i)^j} - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{C_{kj}}{(1+i)^j} - I_0$$

Inoltre, U_{kj} e C_{kj} sono esprimibili in funzione di U_{k0} e C_{k0} , cioè gli utili e i costi al periodo 0. Infatti, tenendo conto di un indice h (medio) di variazione dei prezzi (h_{uk} indice del k –esimo utile, h_{ck} indice del k –esimo costo), si può scrivere:

$$\begin{aligned} U_{kj} &= U_{kj-1}(1+h_{uk}) = U_{kj-2}(1+h_{uk})^2 = \dots = U_{k0}(1+h_{uk})^j \\ C_{kj} &= C_{kj-1}(1+h_{ck}) = C_{kj-2}(1+h_{ck})^2 = \dots = C_{k0}(1+h_{ck})^j \end{aligned}$$

e quindi l' utile netto:

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^q \frac{U_{k0}(1+h_{uk})^j}{(1+i)^j} - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{C_{k0}(1+h_{ck})^j}{(1+i)^j} - I_0 \\ &= \sum_{k=1}^q U_{k0} \sum_{j=1}^n \frac{(1+h_{uk})^j}{(1+i)^j} - \sum_{k=1}^m C_{k0} \sum_{j=1}^n \frac{(1+h_{ck})^j}{(1+i)^j} - I_0 \end{aligned}$$

L' interesse i tiene conto sia della variazione dei prezzi (inflazione o deflazione), che dell' interesse reale.

Si può scrivere:

$$(1+i) = (1+h_{uk})(1+e_{uk}) = (1+h_{ck})(1+e_{ck})$$

dove e_{uk}, e_{ck} rappresentano rispettivamente l' interesse reale sull' utile k –esimo ($\forall k = 1, \dots, q$) e l' interesse reale sul costo k –esimo ($\forall k = 1, \dots, m$).

Le ultime relazioni possono essere giustificate considerando il seguente esempio:

sia B_s il valore monetario di un bene al periodo s –esimo che deve essere restituito al creditore con tasso di interesse pari a i .

B_s sarà uguale a: $B_s = B_0(1 + i)^s$.

Ragionando in termini di incremento di valore monetario dovuto all'interesse reale, il valore B_0 al periodo s –esimo ($B_{s_interesse_reale}$) sarà aumentato, e sarà pari a:

$B_{s_interesse_reale} = B_0(1 + e_{bk})^s$.

L'incremento di valore monetario dovuto all'inflazione va calcolato su $B_{s_interesse_reale}$ e vale quindi:

$B_s = B_{s_interesse_reale}(1 + h_{bk})^s = B_0(1 + e_{bk})^s(1 + h_{bk})^s$, ottenendo così l'uguaglianza: $(1 + i) = (1 + h_{bk})(1 + e_{bk})$.

Per cui, l'utile netto si può anche esprimere come:

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=1}^q U_{k0} \sum_{j=1}^n \frac{(1 + h_{uk})^j}{(1 + i)^j} - \sum_{k=1}^m C_{k0} \sum_{j=1}^n \frac{(1 + h_{ck})^j}{(1 + i)^j} - I_0 \\ &= \sum_{k=1}^q U_{k0} \sum_{j=1}^n \frac{1}{(1 + e_{uk})^j} - \sum_{k=1}^m C_{k0} \sum_{j=1}^n \frac{1}{(1 + e_{ck})^j} - I_0 \end{aligned}$$

Dall'ultima espressione si può notare come i termini

$\sum_{j=1}^n \frac{1}{(1 + e_{uk})^j}$ e $\sum_{j=1}^n \frac{1}{(1 + e_{ck})^j}$ assomiglino al reciproco della quota di ammortamento $t = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{(1 + i)^j}}$.

Vengono quindi definite come tassi di ammortamento effettivi, le espressioni:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{1}{(1 + e_{uk})^j} &= \frac{1}{t_{euk}} \\ \sum_{j=1}^n \frac{1}{(1 + e_{ck})^j} &= \frac{1}{t_{eck}} \end{aligned}$$

La serie storica degli indici h_{ck} , h_{uk} , è ricavabile dall'*Istituto Nazionale di Statistica (ISTAT)*, da cui si possono prevedere i valori futuri e, noto il tasso di interesse i , è possibile ricavare e_{ck} , e_{uk} e quindi i tassi di ammortamento effettivi $\frac{1}{t_{ecj}}$ e $\frac{1}{t_{euj}}$.

La formula:

$$U_n = \sum_{k=1}^q \frac{U_{k0}}{t_{euk}} - \sum_{k=1}^m \frac{C_{k0}}{t_{eck}} - I_0$$

verrà ora utilizzata nell' analisi della convenienza economica dell' impianto dotato di sistema di controllo visto nel paragrafo 4.

L' utile netto U_n per l' impianto ad aria compressa con sistema di controllo per la variazione del volume nocivo, è dato dal risparmio sugli avviamenti del motore del compressore meno il costo di investimento per il motorino elettrico, meno il costo di investimento per il cambio automatico a due ingranaggi, meno il costo di investimento per il freno, meno i costi di esercizio del motorino elettrico (gli ultimi sono costi variabili nel tempo, perché vanno sostenuti ogni anno, mentre i costi di investimento vengono sostenuti al periodo iniziale, per cui non gravano interessi su di essi).

Gli oneri relativi a cremagliera, guida orizzontale e blocchetto si considereranno compresi nei costi di investimento per il freno e/o per l' innesto per semplicità.

Bisogna aggiungere che anche il motorino elettrico ME è soggetto ad avviamenti, poiché durante la compressione eroga la coppia di spunto alla velocità angolare nulla come visto e in aspirazione gira alla velocità di regime, ma data la sua piccola taglia rispetto a quella del motore elettrico del compressore, come si vedrà non si dovranno considerare oneri aggiuntivi dovuti a tali avviamenti.

Il risparmio sugli avviamenti del compressore U_c , sarà ragionevolmente uguale al costo del compressore I_c moltiplicato per il rapporto tra il numero di avviamenti orari effettivi nel caso di impianto senza sistema di controllo n_{ac} e tra il numero di avviamenti orari massimi indicati a catalogo n_{acmax} , cioè:

$$U_c = \frac{n_{ac}}{n_{acmax}} I_c .$$

Per una verifica qualitativa di tale formula, qualora avvenga che $n_{ac} > n_{acmax}$, il risparmio U_c risulterebbe maggiore del costo del motore I_c ; infatti, se $n_{ac} > n_{acmax}$ di motore ne serve più di uno, poiché uno solo non sarebbe in grado di reggere un numero superiore a n_{acmax} di avviamenti orari, mentre se $n_{ac} < n_{acmax}$ di motore ne basta uno, infatti U_c risulta minore del costo del motore I_c in tal caso.

Il costo totale del motore I_c può essere espresso approssimativamente come un costo c_{kW} al kW di potenza elettrica, moltiplicato per la potenza elettrica P_c nominale espressa in kW del motore: $I_c = c_{kW} P_c$.

L' approssimazione risulta utile per poter poter stimare l' utile netto in modo semplice, linearizzando la dipendenza del costo del motore dalla potenza nominale; qualora tuttavia si abbia a disposizione il listino prezzi dell' azienda venditrice, è noto direttamente il costo I_c .

L' onere dovuto al costo totale del motorino elettrico ME , pari a I_{ME} , si può esprimere analogamente al caso del motore elettrico del compressore come: $I_{ME} = c_{kW} P_{ME}$, con P_{ME} potenza elettrica espressa in kW del motorino.

I costi di esercizio del motorino elettrico C_{eME} possono essere posti uguali ai costi al kWh di funzionamento c_{kWh} moltiplicati per i kWh dati dal prodotto della potenza elettrica P_{ME} con il tempo di funzionamento a periodo rateale T (tempo di funzionamento in un anno):

$$C_{eME} = c_{kWh} P_{ME} T$$

Infine, si hanno i costi di investimento $I_{cambio+freno}$ dell' insieme *cambio + freno* (in cui sono inclusi come detto, gli oneri relativi alla cremagliera, alla guida orizzontale, al blocchetto e in generale tutti gli eventuali costi aggiuntivi).

L' utile netto allora si può esprimere, tenendo conto anche dei tassi di ammortamento effettivi:

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=1}^q \frac{U_{k0}}{t_{euk}} - \sum_{k=1}^m \frac{C_{k0}}{t_{eck}} - I_0 = U_c - \frac{C_{eME}}{t_{eME}} - I_{ME} - I_{cambio+freno} = \\ &= \frac{n_{ac}}{n_{acmax}} c_{kW} P_c - \frac{c_{kWh} P_{ME} T}{t_{eME}} - c_{kW} P_{ME} - I_{cambio+freno} \end{aligned}$$

Tale formula può essere usata per stimare l' utile netto, il quale, qualora risultasse positivo rappresenterebbe effettivamente un utile o guadagno, mentre qualora risultasse negativo rappresenterebbe in realtà una perdita. Ciò che si desidera è che ovviamente l' utile netto sia positivo.

Il risultato dipende inoltre da n , cioè dal numero di periodi rateali (anni) su cui si esegue la valutazione economica, poiché il tasso di ammortamento effettivo t_{eME} è una funzione di n .

In generale, al crescere di n il tasso di ammortamento diminuisce; ciò può essere visto dalla sua espressione generale:

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{(1+e_k)^j} = \frac{1}{t_{ek}}$$

Infatti, per n crescenti $\frac{1}{t_{ek}}$ aumenta perché si sommano tra loro tutti termini positivi e al limite per $n \rightarrow \infty$, si ottiene l'espressione di una serie geometrica: $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1+e_k)^j}$, poiché la somma ha ragione minore di uno, quindi converge ad un valore massimo asintotico.

Quindi se $\frac{1}{t_{ek}}$ aumenta il tasso di ammortamento t_{ek} diminuisce e conseguentemente l'utile netto in questo caso diminuisce (poiché il costo di esercizio $\frac{c_{kWh} P_{ME} T}{t_{eME}}$ dovuto al funzionamento del motorino elettrico aumenta).

Inoltre, per semplificare il conto, nel seguito verrà considerato un indice di variazione del costo dell'energia pari a zero, quindi:

$$t_{eME} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{(1+e_k)^j}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{(1+h_k)^j}{(1+i)^j}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{(1+0)^j}{(1+i)^j}} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = t$$

Come costo al kWh (c_{kWh}), si può prendere un valore di $0.10 \frac{\text{€}}{kWh}$, che in generale varierà in base alle tariffe del fornitore, ma è un valore comunque ragionevole.

Per quanto riguarda i costi del motore elettrico del compressore $I_c = c_{kW} P_c$ e del motorino elettrico ME $I_{ME} = c_{kW} P_{ME}$, si considererà un costo medio al kW c_{kW} dei motori elettrici pari a 70 €/kW .

Il tasso di interesse i verrà considerato pari al 10 %, mentre bisogna calcolare il numero di avviamenti orari massimi del motore elettrico del compressore: n_{acmax} . Per eseguire tale calcolo, si può utilizzare una formula empirica (vedi

Funaioli, Maggiore, Meneghetti 'Lezioni di Meccanica Applicata alle Macchine Seconda parte: Elementi di Meccanica degli Azionamenti', pag. 171, Prima Edizione, ristampa del 2014):

$$n_{amax} = z_0 \frac{1 - \frac{M_r}{M_{maxv}}}{1 + \frac{J_{est}}{J_0}}$$

dove z_0 è il numero di avviamenti orari massimi a vuoto, M_r la coppia resistente riferita all' albero motore, M_{mavv} la coppia media di avviamento, che viene presa di solito pari a circa $0.85 M_s$, con M_s coppia di spunto, fornita dal catalogo (è stata calcolata quella minima necessaria nel caso del motorino ME), J_{est} il momento di inerzia del carico riferito all' albero motore, J_0 il momento di inerzia del motore elettrico noto da catalogo. Ci si riferirà in seguito ad un catalogo preso dall' azienda *Rossi – Motoriduttori*, riportato qui di seguito:

MOTORI ASINCRONI TRIFASE A 4 POLI

| P _N 2) kW | Motore Motor 3) | n _n min ⁻¹ | M _N N m | I _N A | cos φ | η | | M _s M _N | M _{max} M _N | I _s I _N | J ₀ kg m ² | Freno Brake 5) | M f N m | z ₀ avv./h starts/h | Massa Mass kg | |
|----------------------------|-----------------------|-------------------------------------|-----------------------|---------------------|-------|-----------|--------------------|----------------------------------|------------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|----------------------|------------|--------------------------------------|---------------------|-----|
| | | | | | | 100% % | 75% | | | | | | | | | |
| 0,12 | 63 A | 4 | 1 370 | 0,84 | 0,54 | 0,51 | 63 | - | 2,9 | 2,9 | 2,7 | 0,0002 | BC 02 | 1,75 | 12 500 | 5,7 |
| 0,18 | 63 B | 4 | 1 360 | 1,26 | 0,74 | 0,61 | 68 | - | 2,8 | 2,8 | 2,8 | 0,0003 | BC 02 | 3,5 | 12 500 | 5,8 |
| 0,25* | 63 C | 4 | 1 340 | 1,78 | 1 | 0,64 | 59 | - | 2,6 | 2,6 | 2,7 | 0,0003 | BC 02 | 3,5 | 10 000 | 5,9 |
| 0,25 | 71 A | 4 | 1 390 | 1,72 | 0,82 | 0,63 | 70 | - | 2,6 | 2,6 | 3,5 | 0,0005 | BC 03 | 5 | 10 000 | 7,9 |
| 0,37 | 71 B | 4 | 1 380 | 2,56 | 1,2 | 0,61 | 73 | - | 2,5 | 2,7 | 3,6 | 0,0007 | BC 03 | 5 | 10 000 | 8,8 |
| 0,55* | 71 C | 4 | 1 350 | 3,89 | 1,65 | 0,65 | 74 | - | 2,4 | 2,4 | 3,4 | 0,0008 | BC 03 | 7,5 | 8 000 | 9,4 |
| 0,55 | 80 A | 4 | 1 420 | 3,7 | 1,52 | 0,68 | 75,3 ²⁾ | 74,3 | 2,6 | 2,6 | 4,3 | 0,0015 | BC 04 | 11 | 8 000 | 12 |
| 0,75 | 80 B | 4 | 1 415 | 5,1 | 2,01 | 0,71 | 74,9 ²⁾ | 74,1 | 2,9 | 3 | 4,6 | 0,0019 | BC 04 | 11 | 7 100 | 13 |
| 1,1* | 80 C | 4 | 1 415 | 7,4 | 2,95 | 0,7 | 77,9 | 77,1 | 3 | 3 | 5 | 0,0025 | BC 04 | 16 | 5 000 | 15 |
| 1,1 | 90 S | 4 | 1 415 | 7,4 | 2,95 | 0,7 | 77,9 | 77,1 | 3 | 3 | 5 | 0,0025 | BC 04 | 16 | 5 000 | 15 |
| 1,5 | 90 L | 4 | 1 425 | 10,1 | 3,65 | 0,75 | 79,4 | 79,6 | 2,7 | 2,9 | 4,9 | 0,0041 | BC 05 | 27 | 4 000 | 20 |
| 1,85* | 90 LB | 4 | 1 415 | 12,5 | 4,7 | 0,72 | 80,4 ²⁾ | 80,8 | 2,7 | 2,7 | 5,5 | 0,0044 | BC 05 | 27 | 4 000 | 21 |
| 2,2* | 90 LC | 4 | 1 420 | 14,9 | 5,5 | 0,72 | 80,1 | - | 2,8 | 2,8 | 5,6 | 0,0048 | BC 05 | 27 | 3 150 | 23 |
| 2,2 | 100 LA | 4 | 1 425 | 14,8 | 5,15 | 0,75 | 81,8 | 81,8 | 2,6 | 3 | 5 | 0,0051 | BC 15 | 40 | 3 150 | 26 |
| 3 | 100 LB | 4 | 1 430 | 20 | 6,6 | 0,78 | 83,2 | 83,4 | 2,9 | 3,1 | 5,8 | 0,0069 | BC 15 | 40 | 3 150 | 30 |
| 4 | 112 M | 4 | 1 440 | 26,5 | 9 | 0,76 | 85,5 | 85,8 | 3,1 | 3,3 | 6,1 | 0,0097 | BC 06 | 75 | 2 500 | 38 |
| 5,5* | 112 MC | 4 | 1 425 | 36,8 | 12,2 | 0,76 | 85,6 | - | 3,1 | 3,4 | 6,1 | 0,0115 | BC 06 | 75 | 1 800 | 45 |
| 5,5 | 132 S | 4 | 1 445 | 36,6 | 11,1 | 0,83 | 86,3 | 86,5 | 3 | 3,4 | 7,5 | 0,0216 | BC 16 | 75 | 1 800 | 60 |
| 7,5 | 132 M | 4 | 1 450 | 49,4 | 14,9 | 0,84 | 87,1 | 87 | 3,2 | 3,6 | 8,1 | 0,0323 | BC 07 | 100 | 1 250 | 72 |
| 9,2* | 132 MB | 4 | 1 450 | 61 | 17,9 | 0,85 | 88 ²⁾ | 87,8 | 3,6 | 3,7 | 8,8 | 0,0391 | BC 07 | 150 | 1 060 | 76 |
| 11* | 132 MC | 4 | 1 445 | 73 | 22 | 0,83 | 88 | - | 3,4 | 3,6 | 8,3 | 0,0424 | BC 07 | 150 | 900 | 79 |
| 11 | 160 SC | 4 | 1 445 | 73 | 22 | 0,83 | 88 | - | 3,4 | 3,6 | 8,3 | 0,0424 | BC 07 | 150 | 900 | 88 |
| 15 | 160 M | 4 | 1 460 | 72 | 22,5 | 0,8 | 88,6 | 88,7 | 2 | 2,1 | 5,2 | 0,072 | BC 08 | 170 | 900 | 103 |
| 15 | 160 L | 4 | 1 460 | 98 | 30 | 0,8 | 89,8 | 89,9 | 2,3 | 2,4 | 5,9 | 0,084 | BC 08 | 250 | 800 | 114 |
| 18,5 | 180 M | 4 | 1 465 | 120 | 37 | 0,8 | 90,2 | 90,3 | 2,3 | 2,5 | 6,2 | 0,099 | BC 08 | 250 | 630 | 124 |
| 22 | 180 L | 4 | 1 465 | 143 | 42 | 0,83 | 90,8 | 91 | 2,4 | 2,5 | 6,3 | 0,13 | BC 09 | 300 | 500 | 158 |
| 30 | 200 L | 4 | 1 465 | 195 | 58 | 0,82 | 91,6 | 91,7 | 2,4 | 2,8 | 6,6 | 0,2 | BC 09 | 400 | 400 | 182 |

Per calcolare quindi il numero di avviamenti orari massimi del motore elettrico del compressore n_{acmax} , bisogna prima scegliere il motore; risulta, dato che la potenza nominale deve essere almeno $23 kW$, che la scelta debba ricadere sul motore $200L4$, con potenza nominale di $30 kW$.

La coppia media di avviamento, come detto viene calcolata: $M_{mavv} = 0.85 M_s$, con M_s da catalogo pari a $2.4M_n$, con M_n coppia nominale, e risulta:

$$M_{mavv} = 0.85 M_s = M_{mavv} = 0.85 \cdot 2.4M_n = 0.85 \cdot 2.4 \cdot 195 Nm \approx 397.8 Nm.$$

La coppia resistente, come visto, riferita alla velocità angolare di manovella, oscilla periodicamente tra i valori $+1850 Nm$ e $-395 Nm$. Considerato che la coppia è variabile nel tempo, per effettuare delle valutazioni semplici, conviene porsi in condizioni critiche, ossia considerare una coppia costante pari a $+1850 Nm$.

Per la velocità a regime del motore del compressore si può prendere un valore di circa 1450 rpm poiché non si è lontani dalla velocità di sincronismo nel diagramma $M - \omega$, come nel caso del motorino elettrico. Quindi la coppia resistente M_r riferita all' albero motore è:

$$M_r = 1850 Nm \frac{12 \text{ rad/s}}{1450 \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s}} \approx 146.2 Nm$$

J_0 da catalogo è pari a 0.2 kgm^2 e z_0 a 400 avv/h mentre J_{est} si può ricavare considerando l' energia cinetica complessiva del sistema (*manovella + biella + pistone + riduttore*) e ridurla poi all'albero motore (in generale J_{est} risulterà variabile nel tempo, per cui si prenderà il valore massimo del caso critico):

$$T_{sistema}(t) = \frac{1}{2} J_{est}(t) \Omega_m^2$$

dove Ω_m è la velocità angolare dell' albero motore.

Per calcolare $T_{sistema}(t)$:

$$\begin{aligned} T_{sistema}(t) &= T_{manovella} + T_{biella}(t) + T_{pistone}(t) + T_{riduttore} = \\ &= \frac{1}{2} m_m \omega^2 + T_{biella}(t) + \frac{1}{2} m_p \dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2} J_{rid} \Omega_m^2 \end{aligned}$$

Per l' energia cinetica della biella $T_{biella}(t)$ serve fare qualche calcolo in più; indicando con m_b la massa della biella, con B il punto della biella solidale (per mezzo della coppia rotoidale) al pistone, con P un punto generico della biella e con $\vec{\omega}_b$ la velocità angolare della biella, si può scrivere:

$$\begin{aligned} T_{biella}(t) &= \int \frac{1}{2} v_P(t)^2 dm = \int \frac{1}{2} (\vec{v}_B(t) + \vec{\omega}_b(t) \wedge \overline{BP}(t))^2 dm = \\ &= \int \frac{1}{2} (\vec{v}_B(t) + \vec{\omega}_b(t) \wedge \overline{BP}(t)) \cdot (\vec{v}_B(t) + \vec{\omega}_b(t) \wedge \overline{BP}(t)) dm = \\ &= \int \frac{1}{2} (v_B(t)^2 + |\vec{\omega}_b(t) \wedge \overline{BP}(t)|^2 + 2\vec{v}_B(t) \cdot \vec{\omega}_b(t) \wedge \overline{BP}(t)) dm = \\ &= \frac{1}{2} m_b \dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2} \int \dot{\beta}(t)^2 BP(t)^2 dm + \vec{v}_B(t) \cdot \vec{\omega}_b(t) \wedge \int \overline{BP}(t) dm = \\ &= \frac{1}{2} m_b \dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2} \int \dot{\beta}(t)^2 BP(t)^2 dm + \vec{v}_B(t) \cdot \vec{\omega}_b(t) \wedge \overline{BG}(t) m_b \\ &= \frac{1}{2} m_b \dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2} \dot{\beta}(t)^2 \int BP(t)^2 dm + m_b |\dot{x}(t)| |\dot{\beta}(t)| |\overline{BG}(t)| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta(t)\right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} m_b \dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2} \dot{\beta}(t)^2 J_B - m_b |\dot{x}(t)| |\dot{\beta}(t)| \frac{l}{2} \sin(\beta(t))$$

I parametri: m_b , $\dot{x}(t)$, $\dot{\beta}(t)$, J_B , l , $\beta(t)$ sono tutti noti dal paragrafo 5.1

Si ha quindi:

$$T_{sistema}(t) = \frac{1}{2} m_m \omega^2 + \frac{1}{2} (m_b + m_p) \dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2} \dot{\beta}(t)^2 J_B - m_b |\dot{x}(t)| |\dot{\beta}(t)| \frac{l}{2} \sin(\beta(t)) + \frac{1}{2} J_{rid} \Omega_m^2$$

Tale formula deve essere anche uguale a:

$$T_{sistema}(t) = \frac{1}{2} J_{est}(t) \Omega_m^2$$

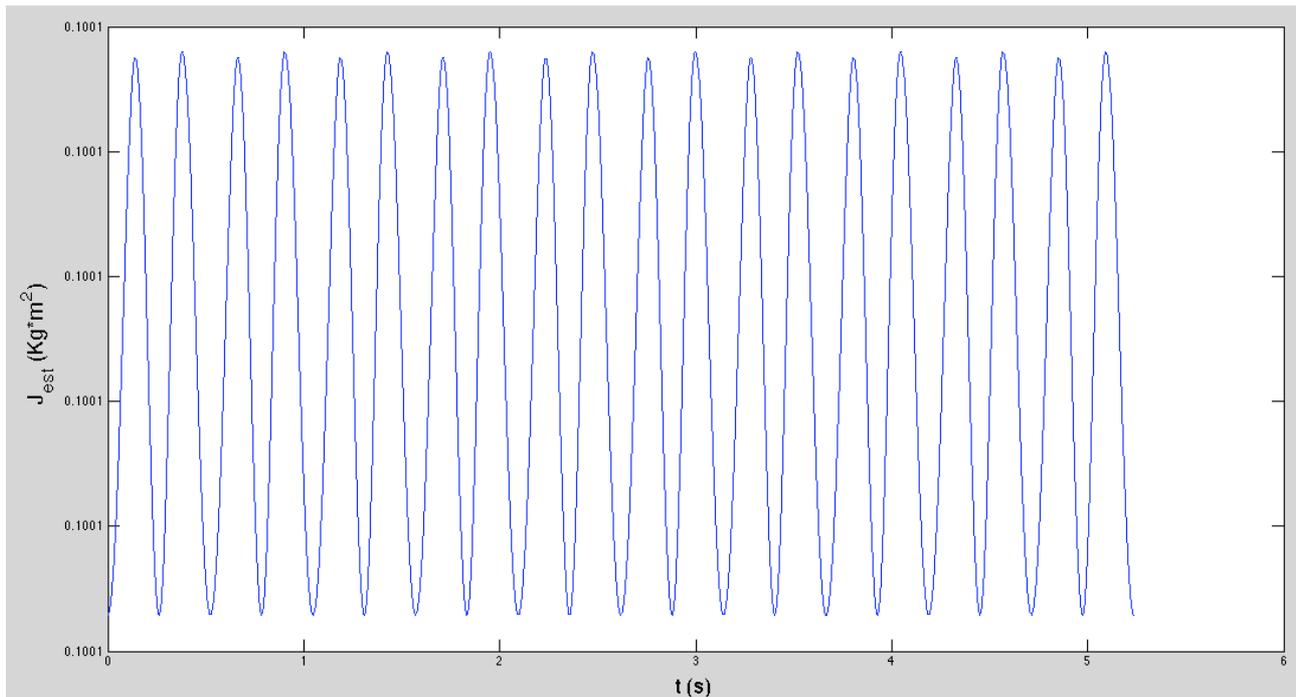
per riferire l' energia cinetica all' albero del motore elettrico del compressore.

Quindi:

$$J_{est}(t) = m_m \frac{\omega^2}{\Omega_m^2} + (m_b + m_p) \frac{\dot{x}(t)^2}{\Omega_m^2} + \frac{\dot{\beta}(t)^2}{\Omega_m^2} J - 2m_b \frac{|\dot{x}(t)| |\dot{\beta}(t)| l}{\Omega_m^2} \frac{1}{2} \sin(\beta(t)) + J_{rid}$$

Per il momento di inerzia del riduttore, si può prendere un valore dello stesso ordine di grandezza del momento di inerzia del motore, ma inferiore, per esempio pari a 0.1 kgm^2 ; anche qui la scelta andrebbe fatta da catalogo per conti più precisi, ma dato che l' obiettivo è la valutazione economica dell' aggiunta del sistema di controllo, sarebbe eccessivo considerare anche di scegliere il riduttore del motore elettrico del compressore.

Calcolandolo con Matlab, $J_{est}(t)$ risulta:



con valore massimo con ottima approssimazione pari a 0.1 kgm^2 , dato che, come si vede dalla figura, le oscillazioni sono molto piccole ed in pratica coincidente con il valore scelto per J_{rid} .

Allo script di matlab della 'function' utilizzata nel paragrafo 5.1 è bastato aggiungere un paio di semplici righe di codice:

```
%calcolo momento di inerzia J_est

if(g == 9.81)    %questo if permette di eseguire una sola volta le istruzioni
                %successive, infatti g=9.81 solo alla prima chiamata della
                %funzione

omega_=12;
omega_mot=156; %1490 rpm
%mb=r0*l*a*b;
x_punto=r*omega_*sin(alpha)-l*beta_punto.*sin(beta);
J_rid=0.1;
Jb=((1-delta_l)^2/3+b^2/12)*mb;

J_est=mm*(omega_/omega_mot)^2+(m+mb)*x_punto.^2/omega_mot^2+beta_punto.^2/omega_
mot^2*Jb-2*mb*abs(x_punto).*abs(beta_punto)/omega_mot^2*(1/2).*sin(beta)+J_rid;

figure(17)
plot(t,J_est)
w=xlabel('t (s)');
set(w,'FontSize',18)
y=ylabel('J_e_s_t (Kg*m^2)');
set(y,'FontSize',18)
```

```
fprintf('J_est medio è: %f kg*m^2', mean(J_est))
end
```

Ora si hanno tutti i dati per stimare il numero di avviamenti massimi del motore elettrico del compressore:

$$n_{acmax} = z_0 \frac{1 - \frac{M_r}{M_{mavv}}}{1 + \frac{J_{est}}{J_0}} = 400 \frac{1 - \frac{146.2}{397.8}}{1 + \frac{0.1}{0.2}} \approx 168 \text{ avv/h}$$

Il risultato, 168 *avviamenti all'ora*, è inferiore rispetto alla frequenza di stacchi e riattacchi nel sistema senza sistema di controllo, la quale risultava pari a 17 *avviamenti ogni 100 secondi* (612 *avv/h*) con i parametri utilizzati per la simulazione (paragrafo 4.4); tuttavia dal paragrafo 5.1 sono stati introdotti altri parametri, perciò la simulazione necessita di essere rieseguita con tali parametri. Qui di seguito si riportano le modifiche effettuate (si tiene conto anche dei ritardi introdotti nel paragrafo 4.6).

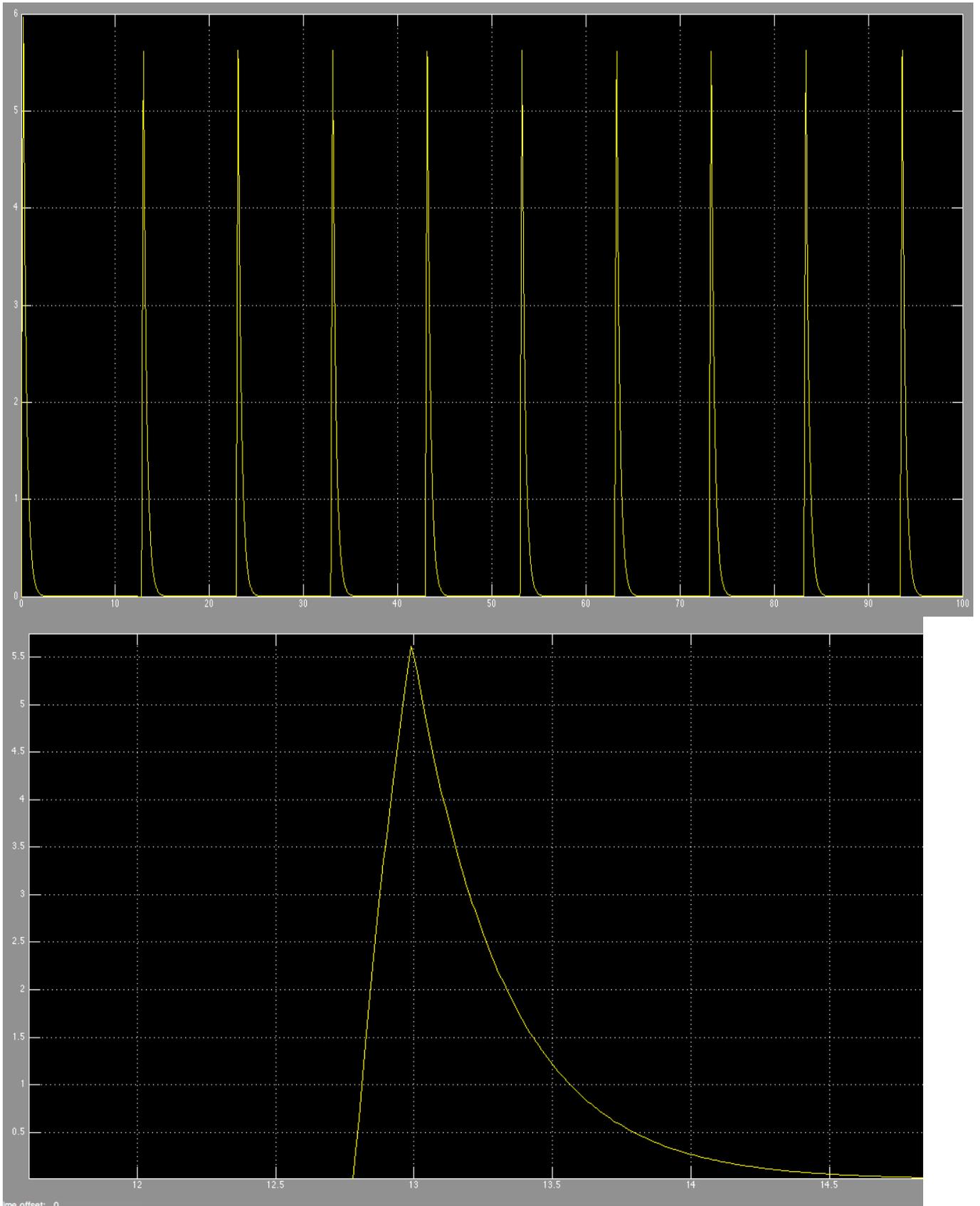
Si sono modificati quindi i parametri della simulazione e si sono posti uguali a quelli introdotti nel paragrafo 5.1. Si è mantenuta anche la stessa pressione di riferimento al comparatore $P_{rif} = 1.5 \text{ bar}$ mentre il volume del serbatoio di accumulo deve essere ricalcolato con la formula vista nel paragrafo 3:

$$V = \frac{P_1}{\Delta P} \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{1}{n}} [V_c + S_n - \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1}{n}} S_n]$$

considerando lo spazio nocivo fisso, pari al valore nominale e un aumento di pressione nel serbatoio pari a ΔP (si considerano, come già detto, le utenze chiuse, ossia $Q_u = 0 \text{ m}^3/\text{s}$). Scegliendo ΔP pari a 0.2 *bar*, risulta:

$$V = \frac{3}{0.2} \left(\frac{0.5}{3} \right)^{\frac{1}{1.4789}} \left[0.02 + 0.0012 - \left(\frac{3}{0.5} \right)^{\frac{1}{1.4789}} 0.0012 \right] = 0.077 \text{ m}^3$$

La velocità angolare con i parametri modificati, con un tempo di simulazione pari a 100 s risulta la seguente:



Dalla figura si nota che la velocità non fa nemmeno in tempo a raggiungere il suo valore di regime (12 rad/s) che il pressostato dice al compressore di

spegnersi quando è a circa 5.5 rad/s ed il numero di avviamenti effettivi n_{ac} è pari a 10 in 100 secondi :

$$n_{ac} = \frac{10 \text{ avv}}{100 \text{ s}} = \frac{10 \text{ avv}}{100 \frac{h}{3600}} \approx 360 \text{ avv/h}$$

Le ultime incognite rimaste da fissare per la valutazione dell' utile netto con la formula:

$$U_n = \frac{n_{ac}}{n_{acmax}} c_{kW} P_c - \frac{c_{kWh} P_{ME} T}{t} - c_{kW} P_{ME} - I_{cambio+freno}$$

sono il costo di investimento $I_{cambio+freno}$ per il freno e per il cambio a due ingranaggi, il tempo di funzionamento annuo del compressore T , e la potenza nominale del motorino elettrico ME .

Per il tempo di funzionamento annuo, si può considerare un numero pari a circa 238 *giorni lavorativi all'anno* e 8 *ore di funzionamento giornaliere*. Quindi:

$$T = 238 \cdot 8 \frac{\text{ore}}{\text{anno}} = 1904 \frac{\text{ore}}{\text{anno}}$$

Per la scelta del motorino elettrico ME , si sa che la potenza nominale P_{ME} deve essere maggiore di circa 0.4 W e che la coppia di spunto deve essere almeno uguale a 3.8 Nm ; quindi, dal catalogo dei motori visto sopra, la scelta può ricadere sul motore 63C4, con potenza nominale di 0.25 kW , a cui corrisponde una coppia di spunto circa pari a 4.6 Nm .

Dato che tale motorino è soggetto a basse coppie e potenze resistenti, il suo numero di avviamenti massimi sarà circa pari al numero di avviamenti a vuoto, noti da catalogo: $10000 \frac{\text{avv}}{h} \approx 2.77 \frac{\text{avv}}{s}$. Il numero di avviamenti effettivi è pari ad 1 *avviamento ogni* $\frac{2\pi}{\omega}$ *secondi* ($\omega = 12 \text{ rad/s}$), quindi circa 2 *avviamenti al secondo*. Pertanto, il motorino è in grado di operare in tali condizioni.

Per quanto riguarda $I_{cambio+freno}$, è di difficile stima in quanto i costi possono variare per una miriade di fattori, fra i quali: materiali utilizzati, tipo di freno, rendimento degli ingranaggi, fornitori, ecc. Allora, è utile rigirare l' equazione:

$$U_n = \frac{n_{ac}}{n_{acmax}} c_{kW} P_c - \frac{c_{kWh} P_{ME} T}{t} - c_{kW} P_{ME} - I_{cambio+freno}$$

ponendo $U_n > 0$, dato che è ciò che si vuole, trovando una condizione su $I_{cambio+freno}$, che ne limita il valore massimo.
Si ha infatti:

$$\frac{n_{ac}}{n_{acmax}} c_{kW} P_c - \frac{c_{kWh} P_{ME} T}{t} - c_{kW} P_{ME} - I_{cambio+freno} > 0$$

e cioè:

$$I_{cambio+freno} < \frac{n_{ac}}{n_{acmax}} c_{kW} P_c - \frac{c_{kWh} P_{ME} T}{t} - c_{kW} P_{ME} = I_{cfmax}$$

Conviene quindi plottare un grafico di I_{cfmax} al variare del numero di anni n (si ricorda che n rappresenta il numero di periodi rateali, da cui dipende la quota di ammortamento t); tutti i punti di ordinata positiva che soggiacciono alla curva I_{cfmax} , sono punti in cui $U_n > 0$ e viceversa per punti soprastanti alla curva I_{cfmax} .

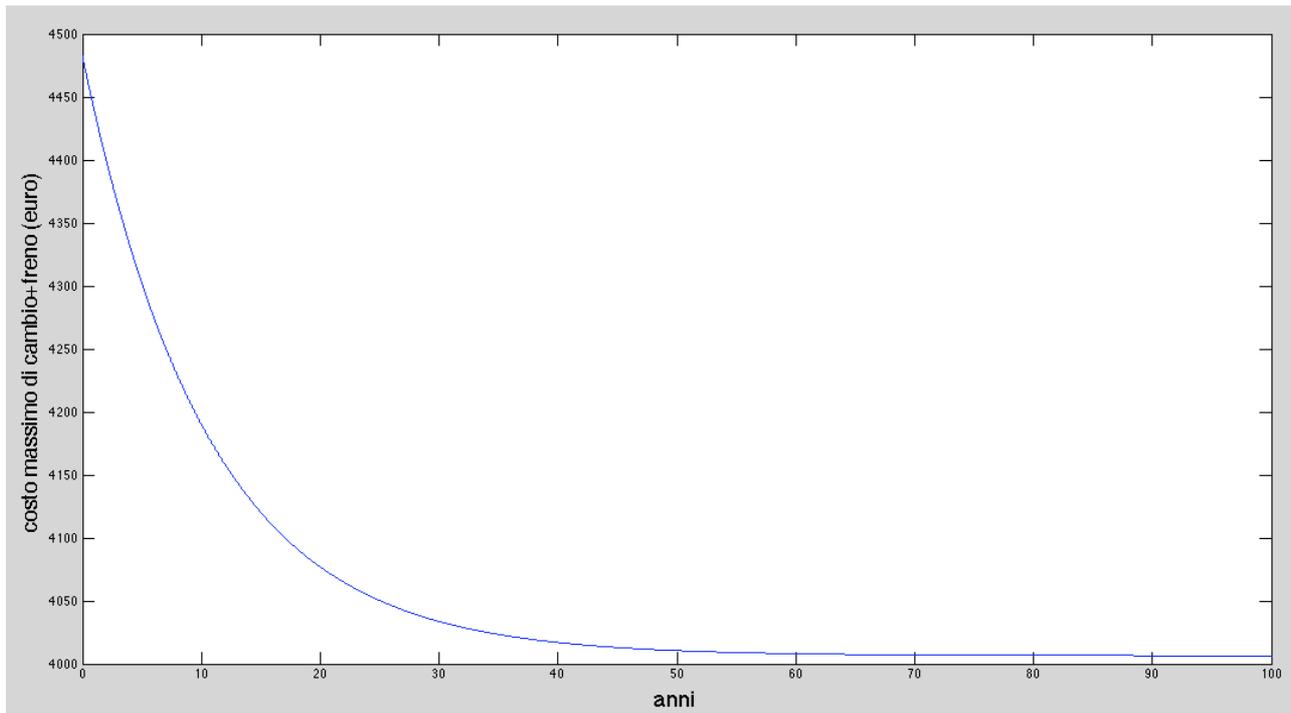
Per cui, si vuole avere $I_{cambio+freno}$ minore della curva I_{cfmax} : una volta noto dai fornitori quanto viene a costare il sistema *cambio automatico ad ingranaggi + freno* si può valutare dal diagramma la convenienza economica.

Si graficherà ora con Matlab l' andamento della curva limite al variare di n :

$$I_{cfmax} = \frac{n_{ac}}{n_{acmax}} c_{kW} P_c - c_{kWh} P_{ME} T \cdot \frac{1}{t} - c_{kW} P_{ME} =$$

$$= \frac{360 \frac{avv}{h}}{168 \frac{avv}{h}} \cdot 70 \frac{\text{€}}{kW} \cdot 30kW - 0.10 \frac{\text{€}}{kWh} \cdot 0.25 kW \cdot 1904 \frac{h}{\text{anno}} \cdot \left[\frac{(1 + 0.1)^n - 1}{(1 + 0.1)^n \cdot 0.1} \right] \cdot \text{anno} - 70 \frac{\text{€}}{kW} \cdot 0.25kW$$

Il plot di tale funzione risulta:



Si nota che la curva limite varia da un massimo, per $n = 0$ (quando $t = 0$), pari a 4482 €, ad un minimo, che viene effettivamente raggiunto quando $n \rightarrow \infty$, cioè $\lim_{n \rightarrow \infty} t(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+0.1)^n \cdot 0.1}{(1+0.1)^n - 1} = 0.1$, e sostituendo nella formula:

$$I_{cfmax} = \frac{360 \text{ avv/h}}{168 \text{ avv/h}} \cdot 70 \frac{\text{€}}{\text{kW}} \cdot 30 \text{kW} - 0.10 \frac{\text{€}}{\text{kWh}} \cdot 0.25 \text{kW} \cdot 1904 \frac{\text{h}}{\text{anno}} \cdot \frac{1}{0.1} \cdot \text{anno} - 70 \frac{\text{€}}{\text{kW}} \cdot 0.25 \text{kW}$$

si ottiene circa $I_{cfmax} = 4006\text{€}$. Quindi, non si ha un calo particolarmente elevato di utile netto.

Dunque, ciò significa che per risparmiare qualsiasi sia il numero di anni, l'insieme *cambio + freni* deve venire a costare meno di 4006€, mentre per risparmiare nei primi 5 anni deve costare meno di 4302€ e nei primi 10 4190€, costi che, qualsiasi sia il tipo di freno e cambio, sono difficili da raggiungere.

Per cui, con i parametri utilizzati dal paragrafo 5.1 in poi, nonostante l'approssimazione delle formule utilizzate nel paragrafo 5.3, le quali comunque sono state utilizzate ponendosi nei casi più critici, si evince che è più che probabile la convenienza di investire per l'aggiunta del sistema di controllo.

Script utilizzato per il plot di I_{cfmax} :

```
%risparmio energetico

close all
clear
clc

n_ac=360;    %avviamenti effettivi del motore elettrico del compressore
n_ac_max=168;%avviamenti massimi del motore elettrico del compressore
c_kW=70;    %costo al kW
Pc=30;     %potenza motore elettrico compressore [kW]
c_kWh=0.10; %costo al kWh
P_ME=0.25; %potenza motorino elettrico ME [kW]
T=1904;    %ore/anno di funzionamento del motorino elettrico
i=0.1;     %tasso di interesse per l' ammortamento

n=linspace(0,100,10000);
Ic=c_kW*Pc;
I_ME=c_kW*P_ME;

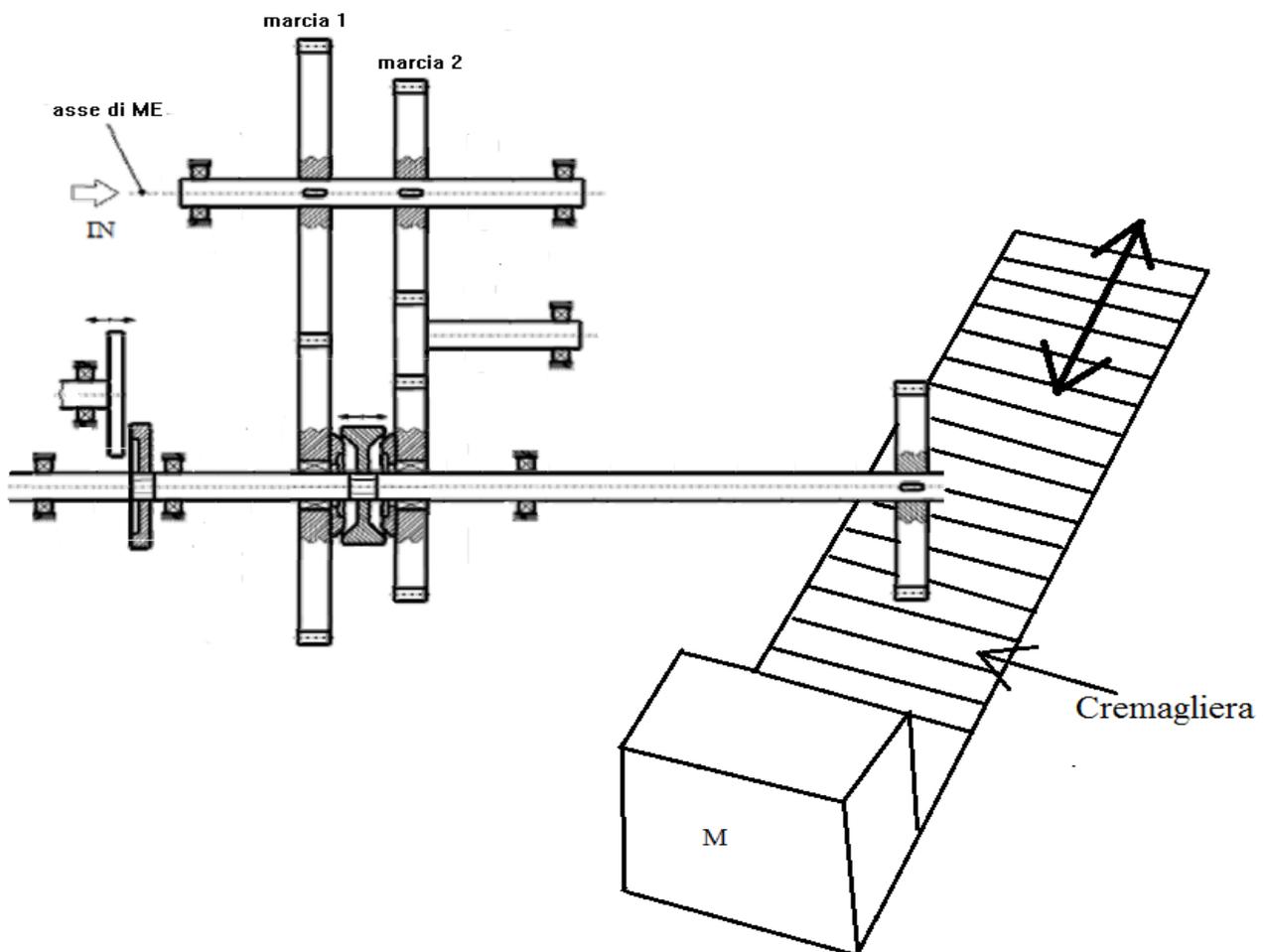
Icfmax=n_ac/n_ac_max*Ic-c_kWh*P_ME*T.*((1+i).^n-1)./((1+i).^n*i)-I_ME;

plot(n, Icfmax)
w=xlabel('anni');
set(w,'FontSize',18)
y=ylabel('costo massimo di cambio+freno (euro)');
set(y,'FontSize',18)
```

6) Soluzione alternativa per il sistema di controllo del volume nocivo

Si mostra brevemente in questo paragrafo, un' altra possibile scelta del sistema di controllo atto alla variazione del volume nocivo. Finora si è descritto, dimensionato nelle sue componenti principali e valutato il vantaggio economico, del sistema di controllo introdotto a partire dal paragrafo 4.1. Come si è visto, nella fase di compressione il motorino doveva erogare una coppia di spunto per mantenere in equilibrio il blocco di massa M , essendo in tale fase l' albero del motorino in quiete. In aspirazione invece il motorino girava alla sua velocità di regime (esclusi i transitori di frenatura) permettendo lo spostamento del blocchetto di massa M . Queste variazioni di velocità angolare del motorino non sono vantaggiose poiché sono di fatto degli avviamenti; dato però che il motorino è di piccola taglia e non soggetto a sforzi eccessivi, tali avviamenti non gravano come quelli del motore elettrico del compressore.

Un ulteriore modo di progettare il sistema di controllo può essere il seguente:



L' albero del motore elettrico ME , trasmette potenza all' albero secondario qualora venga inserito l' innesto, il quale è schematizzato insieme al freno ed al cambio a due ingranaggi come nello schema di controllo precedente, quindi con due marce con rapporto di trasmissione $+1$ o -1 . Le ruote dentate che costituiscono gli ingranaggi delle due marce, come nello schema precedente, sono calettate sull' albero motore mentre sono montate a folle sull' albero secondario.

Questa volta però, l' albero secondario non è collegato alle ruote del motorino, ma ingrana a sua volta con una cremagliera, sulla quale è fissato il blocchetto di massa M . Per 'fissato' si può intendere 'saldato' o montato per ostacolo, l' importante è che il blocchetto sia solidale alla cremagliera.

Tale blocchetto poi dovrà modificare il volume nocivo del cilindro del compressore, pensando che possa traslare lungo una guida chiusa in contatto con il cilindro (come nello schema precedente). In pratica si ottiene così un sistema di controllo che svolge lo stesso compito di quello precedente (la variazione del volume nocivo) con annesse analogie: infatti, il motore ha velocità angolare pari a quella di regime (esclusi i transitori di frenatura) durante la fase di aspirazione poiché è in tale fase che si modifica il volume nocivo e velocità angolare nulla durante la fase di compressione, poiché il blocchetto solidale alla cremagliera necessita della coppia di spunto del motorino per vincere la spinta dell' aria, dato che le forze dovute alla spinta dell' aria causerebbero una traslazione della cremagliera e quindi comporterebbero una modifica non voluta dello spazio nocivo.

Conviene quindi sempre pensare che il sistema di controllo modifichi il volume nocivo durante l' aspirazione, per poter sottodimensionare il motorino e che il freno e l' innesto svolgano esattamente gli stessi compiti del sistema precedente, quindi il loro dimensionamento si esegue nello stesso modo visto nel paragrafo 5.2.

Essendo vantaggioso dal punto di vista economico il sistema precedente, risulterà vantaggioso anche il sistema introdotto in questo paragrafo.

Inoltre, i risultati Simulink visti per il sistema di controllo precedente, rimangono ovviamente gli stessi per il sistema di controllo introdotti in questo paragrafo, essendo i due sistemi equivalenti dal punto di vista funzionale.

7) Conclusioni

In questo lavoro di tesi è stato presentato un generale impianto ad aria compressa ed è stato proposto un miglioramento del suo funzionamento modificando lo spazio nocivo del compressore volumetrico alternativo. Come evidenziato nella parte introduttiva, i compressori di questo genere di impianti possono essere rotativi o volumetrici, i quali a loro volta si suddividono in varie sottocategorie: i compressori volumetrici possono essere infatti alternativi, a palette, a lobi, a vite, ecc, mentre i compressori rotativi possono essere centrifughi, assiali, ecc. Nella presente tesi si sono considerati compressori volumetrici alternativi, i quali tuttavia non rappresentano un caso particolare dato che sono fra i più diffusi.

La modifica dello spazio nocivo del compressore, è stata resa possibile installando una guida orizzontale, posta a contatto con lo spazio nocivo nominale del compressore, lungo la quale aveva la possibilità di traslare un blocchetto di massa M trascinato da motorino elettrico accoppiato a 4 ruote tramite un cambio a due ingranaggi e dotato di un freno.

Il motorino elettrico rimaneva sempre acceso, ma mentre nella fase di compressione erogava la coppia di spunto a velocità angolare nulla per fare in modo che il blocchetto rimanesse fermo, durante la fase di aspirazione trasmetteva il moto alle ruote qualora l'innesto del cambio a due ingranaggi era inserito e le ruote potevano ruotare in un verso o nell'altro a seconda del segnale di retroazione.

Il segnale di retroazione proveniva dalla misura della portata richiesta dall'utenza, la quale, imponeva univocamente il nuovo volume nocivo, da ottenere per mezzo del moto del blocchetto di massa M accoppiato al motorino elettrico ME .

Il moto del blocchetto dipendeva, come visto, non solamente dal volume nocivo che si voleva ottenere al ciclo successivo (imposto come detto dalla misura della portata richiesta dall'utenza, utilizzando la relazione vista nel paragrafo 4.3.3), ma anche dal volume nocivo di quel momento; in base al segno della differenza fra i due volumi nocivi, l'innesto veniva inserito sulla prima o sulla seconda marcia, le quali imponevano il rapporto di trasmissione degli ingranaggi ad un valore $+1$ o -1 , permettendo la rotazione delle ruote accoppiate al motorino in un verso o nell'altro.

Infine agiva il freno, in modo da fermare le ruote accoppiate al motorino e quindi il blocchetto di massa M nella posizione che corrispondeva al volume nocivo desiderato.

Il sistema atto a modificare lo spazio nocivo, è stato fatto in modo tale che la modifica avvenisse durante la fase di aspirazione del compressore, così da

poter sottodimensionare il motorino elettrico ME , perché in tale fase esso non deve compiere ulteriore lavoro per vincere le forze dovute alla pressione dell'aria, la quale raggiunge i suoi valori massimi in compressione e non in aspirazione; durante la compressione, come detto, il motorino eroga la coppia di spunto avendo il suo albero velocità nulla, in modo che il blocchetto rimanga fermo, altrimenti, qualora non intervenisse il motorino la massa del blocchetto dovrebbe essere eccessiva come visto nel paragrafo 5.2 e ciò comporterebbe di dover sovradimensionare eccessivamente il motorino per mantenere piccoli i transitori.

Il sistema di controllo è stato testato con Simulink, insieme all' impianto senza sistema di controllo, fissando i valori numerici dei parametri.

Si è visto che la pressione nel serbatoio rimaneva costante con sistema di controllo, mentre oscillava nell' impianto senza tale sistema, con annessi svantaggi.

Il numero di avviamenti del motore elettrico del compressore senza sistema di controllo risultava elevato, mentre il sistema di controllo permetteva di abbassarlo notevolmente (rimaneva infatti il solo avviamento iniziale, mentre per il resto della simulazione il compressore rimaneva sempre in funzione).

Infine, è stato valutato il risparmio economico con l' introduzione del sistema di modifica dello spazio nocivo: *motorino elettrico + cambio a due ingranaggi + freno*. Prima di calcolarlo però, sono stati dimensionati i motori elettrici del motorino e del compressore, valutando la potenza nominale minima che essi dovevano avere per garantire il funzionamento del sistema, la quale è stata poi utilizzata per la valutazione economica.

Inoltre sono state dimensionate anche le ruote del motorino, il blocchetto di massa M , scelti i materiali di blocchetto, pistone, biella, manovella e scelto il freno (in particolare si è calcolata la coppia richiesta e il tempo t_r , misurato a partire dall' inserimento dell' innesto, al quale doveva essere attivato il freno; tale tempo risultava dipendente dallo spazio nocivo del ciclo precedente e successivo, quindi in generale variabile ad ogni ciclo).

Per valutare il risparmio economico, sono stati considerati i vari termini che lo

componevano: è stato visto infatti che l' utile netto U_n per l' impianto ad aria compressa con sistema di controllo per la variazione del volume nocivo, era dato dal risparmio sugli avviamenti del motore del compressore meno il costo di investimento per il motorino elettrico, meno il costo di investimento per il cambio automatico a due ingranaggi, meno il costo di investimento per il freno, meno i costi di esercizio del motorino elettrico.

Gli oneri relativi a cremagliera e guida orizzontale sono stati considerati compresi nei costi di investimento per il freno e/o per l' innesto per semplicità. Anche il motorino elettrico ME era soggetto ad avviamenti, poiché durante la

compressione erogava la coppia di spunto alla velocità angolare nulla come visto e in aspirazione girava alla velocità di regime, ma data la sua piccola taglia rispetto a quella del motore elettrico del compressore, non si sono dovuti considerare oneri aggiuntivi dovuti a tali avviamenti.

Sono stati valutati tutti i termini per mezzo di espressioni ricavate nel paragrafo 5.3, e si è visto che si aveva effettivamente un risparmio qualora il costo dell'insieme *cambio + freno* fosse risultato inferiore a circa 4302€ nei primi 5 anni, 4190€ nei primi 10, e 4006€ per un qualsiasi numero di anni. Per cui in conclusione, con buona probabilità, si risparmia con l'aggiunta del sistema di controllo, dato che i costi di cambio e freno difficilmente raggiungono tali valori.

Infine, nel paragrafo 6 si è visto un modo alternativo di progettare il sistema di controllo descritto dal paragrafo 4.1 in poi; tale modo alternativo dal punto di vista funzionale svolgeva esattamente lo stesso compito del sistema visto in precedenza.

8) Bibliografia

Dispense di 'Controlli Automatici' del Prof. Ing. Matteo Zanzi

Marco Gentilini – Impianti Meccanici-Pitagora Editrice Bologna-edizione 1999

Funaioli, Maggiore, Meneghetti-Lezioni di Meccanica Applicata alle Macchine Seconda parte: Elementi di Meccanica degli Azionamenti-Pàtron Editore-edizione 2009

Funaioli, Maggiore, Meneghetti-Lezioni di Meccanica Applicata alle Macchine Prima parte: Fondamenti di Meccanica delle Macchine-Pàtron Editore-edizione 2008

https://it.wikipedia.org/wiki/File:Schema_compressore.jpg

Catalogo Rossi – Motoriduttori, estratto dalle dispense di 'Meccanica degli Azionamenti' del Prof. Ing. Marco Troncossi

Dispense di 'Meccanica degli Azionamenti' del Prof. Ing. Marco Troncossi