Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Corrispondenza ideali-varietà e criterio jacobiano per le singolarità

Tesi di laurea in Geometria proiettiva

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Alessandro Gimigliano

Presentata da:
Francesca Tombari

II Sessione
Anno Accademico 2014/2015

Indice

Introduzione

Dal XIX secolo l'algebra è divenuta uno strumento molto comodo per lo studio della geometria. Lo scopo della presente tesi è quello di descrivere una corrispondenza fra oggetti algebrici e geometrici e, in seguito, di avvalersi dei risultati trovati per studiare alcune proprietà locali delle varietà algebriche, ovvero gli oggetti geometrici in questione.

La tesi è composta da tre capitoli. Il primo capitolo è occupato da definizioni ed esempi dei soggetti della corrispondenza sopracitata; si parla dunque di ideali nell'anello dei polinomi $K[x_1, ..., x_n]$, per quanto riguarda l'aspetto algebrico, e di varietà affini in K^n, guardando alla parte geometrica. In particolare gli ideali di cui si parlerà più frequentemente sono quelli radicali.

Nel secondo capitolo trova spazio la corrispondenza fra ideali e varietà vera e propria: essa sarà governata da due applicazioni, **I** e **V**, che, sotto determinate ipotesi, rendono la corrispondenza in questione biunivoca. Alcune proprietà di **I** e **V** sono date dal Nullstellensatz, teorema di apertura del capitolo. In seguito sono descritte le modalità con cui la corrispondenza agisce nelle operazioni fra ideali e varietà, ed infine l'attenzione è rivolta alle varietà irriducibili, alla decomposizione di varietà qualsiasi e a cosa succede agli ideali corrispondenti.

Il terzo capitolo si discosta un po' dai precedenti. La prima parte di quest'ultimo è dedicata alla nozione di dimensione, di cui sono riportate tre defizioni: la prima che sfrutta l'esistenza dei cosiddetti punti di varietà analitica locale arbitrariamente vicini ad ogni punto della varietà algebrica, la seconda legata al grado di trascendenza dell'anello dei polinomi della varietà ed, infine, la terza, anch'essa di tipo algebrico, basata sulle catene di ideali primi, o equivalentemente, sulle catene di varietà irriducibili. La seconda parte del capitolo tratta un altro argomento fondamentale riguardante le varietà algebriche: lo studio delle singolarità. Si introduce il cosiddetto criterio jacobiano, che fa uso della matrice jacobiana, ottenuta tramite le derivate parziali dei polinomi che definiscono la varietà, e della dimensione.

Capitolo 1

Nozioni preliminari

In questo capitolo introdurremo i principali oggetti geometrici e algebrici che tratteremo nella tesi, e cioè varietà affini e ideali in anelli di polinomi, che saranno protagonisti della corrispondenza discussa nel secondo capitolo. Per una trattazione generale di questi argomenti, vedi ad esempio [CLO].

1.1 Varietà affini

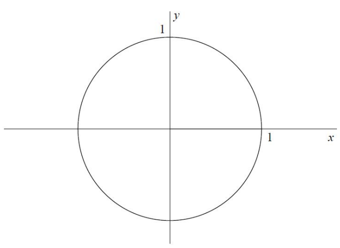
Definizione 1. *Sia K un campo e siano $f_1, ..., f_s$ polinomi in $K[x_1, ..., x_n]$. Allora definiamo*

$$\boldsymbol{V}(f_1, ..., f_s) = \{(a_1, ..., a_n) \in K^n |\, f_i(a_1, ..., a_n) = 0 \ \forall i, 1 \leq i \leq s\}.$$

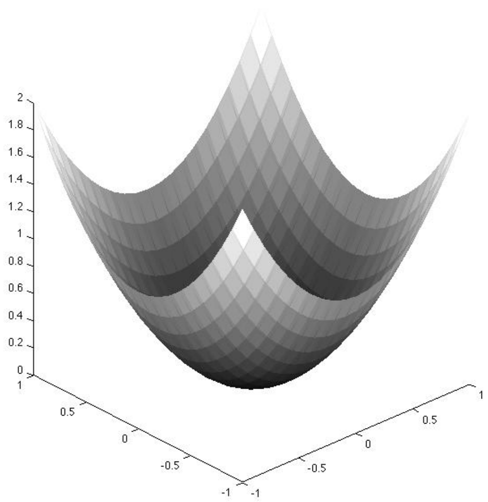
*Chiamiamo $\boldsymbol{V}(f_1, ..., f_s)$ la **varietà affine** definita da $f_1, ..., f_s$.*

Vediamo qualche esempio di varietà considerando $K = \mathbb{R}$ al fine di disegnarle.

Esempio 1. *In $\mathbb{R}^2$ consideriamo la varietà $\boldsymbol{V}(x^2 + y^2 - 1)$ che risulta essere la circonferenza centrata nell'origine degli assi e di raggio 1.*



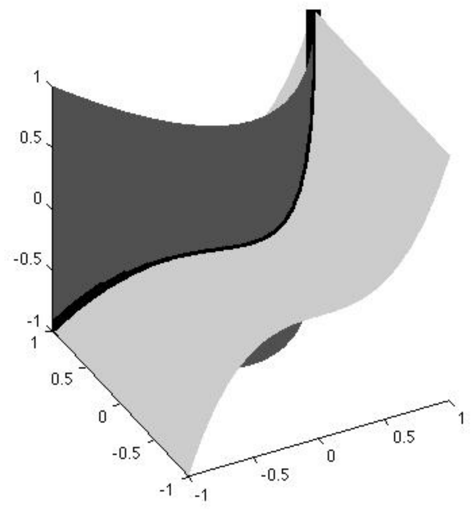
Esempio 2. *In $\mathbb{R}^3$ consideriamo $\boldsymbol{V}(z - x^2 - y^2)$ che è il paraboloide con z asse di rotazione.*



Più generalmente i grafici di funzioni polinomiali sono varietà affini, infatti il grafico di $y = f(x)$ è $\mathbf{V}(y - f(x))$.

Un esempio più interessante, che ci guiderà lungo tutta la trattazione, è quello della cubica gobba, una curva in $\mathbb{P}^3$.

Esempio 3. *In $\mathbb{R}^3$ consideriamo $\boldsymbol{V}(y - x^2, z - x^3)$. Il prossimo lemma mostra che l'intersezione di varietà è ancora una varietà, in particolare la cubica gobba si ottiene come intersezione delle varietà $\boldsymbol{V}(y - x^2)$ e $\boldsymbol{V}(z - x^3)$.*



Lemma 1. *Siano $V, W \subset K^n$ varietà affini, rispettivamente definite dai polinomi $f_1, ..., f_s$ e $g_1, ..., g_t$; allora anche $V \cup W$ e $V \cap W$ sono varietà*

affini e

$$V \cap W = \boldsymbol{V}(f_1, ..., f_s, g_1, ..., g_t),$$
$$V \cup W = \boldsymbol{V}(f_i g_j | 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t).$$

Dimostrazione. La prima uguaglianza è banale: in $V \cap W$ si annullano sia $f_1, .., f_s$ che $g_1, ..., g_t$, cioè abbiamo la varietà generata da $f_1, ..., f_s, g_1, ..., g_t$. Per la seconda uguaglianza, proviamo che $V \cup W \subset \mathbf{V}(f_i g_j)$: sia $(a_1, ..., a_n) \in V$, allora tutti i polinomi f_i si annullano in questo punto, quindi tutti i prodotti $f_i g_j$ si annullano in $(a_1, ..., a_n)$. Perciò $V \subset \mathbf{V}(f_i g_j)$; in modo simile segue che $W \subset \mathbf{V}(f_i g_j)$, cioè $V \cup W \subset \mathbf{V}(f_i g_j)$. Per l'altra inclusione, scegliamo $(a_1, ..., a_n) \in \mathbf{V}(f_i g_j)$. Se questo punto appartiene a V abbiamo finito, altrimenti significa che $\exists\ i_0$ per cui $f_{i_0}(a_1, ..., a_n) \neq 0$. Dato che $\forall j, f_{i_0} g_j$ si annulla in $(a_1, ..., a_n)$, allora tutti i g_j si annullano in questo punto, quindi $(a_1, ..., a_n) \in W$. Questo dimostra che $\mathbf{V}(f_i g_j) \subset V \cup W$. $\square$

Osserviamo che dal Lemma 1 si deduce facilmente che anche le unioni e intersezioni finite di varietà sono varietà.

1.2 Ideali

Diamo ora una serie di definizioni di oggetti algebrici che ci serviranno nel seguito.

Definizione 2. *Un sottoinsieme $I \subset K[x_1, ..., x_n]$ si dice un **ideale** se soddisfa:*

- $0 \in I$
- *se $f, g \in I$, allora $f + g \in I$*
- *se $f \in I$ e $h \in K[x_1, ..., x_n]$ allora $hf \in I$.*

Definizione 3. *Siano $f_1, ..., f_s \in K[x_1, ..., x_n]$. Poniamo*

$$\langle f_1, ..., f_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{s} h_i f_i \mid h_1, ..., h_s \in K[x_1, ..., x_n] \right\}.$$

*Si dimostra che $\langle f_1, ..., f_s \rangle$ è un ideale, detto **ideale generato** da $f_1, ..., f_s$, e chiameremo l'insieme di tali polinomi **base** dell'ideale.*

Definizione 4. *Un ideale I è **radicale** se, per ogni intero $m \geq 1$, $f^m \in I$ implica che $f \in I$.*

Definizione 5. *Sia $I \subset K[x_1, ...x_n]$ un ideale. Il **radicale** di I, denotato $\sqrt{I}$, è l'insieme*

$$\{f \mid f^m \in I \text{ per qualche intero } m \geq 1\}.$$

Lemma 2. *Se I è un ideale in $K[x_1, ..., x_n]$, allora $\sqrt{I}$ è un ideale in $K[x_1, ..., x_n]$ che contiene I. Inoltre, $\sqrt{I}$ è un ideale radicale. Infine, I è radicale se e solo se $I = \sqrt{I}$.*

Dimostrazione. Vediamo innanzitutto che $\sqrt{I}$ è un ideale. Supponiamo che $f, g \in \sqrt{I}$, allora esistono interi positivi m e l tali che $f^m, g^l \in I$. Nello sviluppo binomiale di $(f + g)^{m+l-1}$ ogni termine ha un fattore $f^i g^j$ con $i + j = m + l - 1$. Dato che o $i \geq m$ o $j \geq l$, allora f^i o g^j sta in I, perciò $f^i g^j \in I$ e ogni termine nello sviluppo binomiale appartiene a I. Quindi $(f + g)^{m+l-1} \in I$ e $f + g \in \sqrt{I}$. Poi supponiamo $f \in \sqrt{I}$ e $h \in K[x_1, ..., x_n]$; dato che I è un ideale abbiamo $(hf)^m = h^m f^m \in I$. Quindi $hf \in \sqrt{I}$.

Vogliamo dimostrare adesso che $I \subset \sqrt{I}$. Questo è immediato poiché $f \in I \Rightarrow f^1 \in I \Rightarrow f \in \sqrt{I}$.

È immediato vedere che $\sqrt{I}$ è un ideale radicale: $f^m \in \sqrt{I} \Rightarrow \exists n$ tale che $(f^m)^n = f^{mn} \in I \Rightarrow f \in \sqrt{I}$.

Per ultimo mostriamo che I è radicale $\Leftrightarrow I = \sqrt{I}$. L'implicazione sinistra è già dimostrata per il passo precedente, ci rimane l'altra. Sappiamo già che $I \subset \sqrt{I}$. Per l'altra inclusione consideriamo $f \in \sqrt{I}$, per definizione di radicale $f^m \in I$ per qualche m, ma I è radicale dunque $f \in I$, cioè $\sqrt{I} \subset I$. □

La prossima proposizione mostra come una varietà dipenda solo dall'ideale generato dalle equazioni che la definiscono.

Proposizione 1. *Se $f_1, ..., f_s$ e $g_1, ..., g_t$ sono basi dello stesso ideale in $K[x_1, ..., x_n]$, cioè $\langle f_1, ..., f_s\rangle = \langle g_1, ..., g_t\rangle$, allora $\boldsymbol{V}(f_1, ..., f_s) = \boldsymbol{V}(g_1, ..., g_t)$.*

Dimostrazione. Sia $(a_1, ..., a_n) \in \mathbf{V}(f_1, ..., f_s)$; allora $(a_1, ..., a_n)$ annulla f_i $\forall i$, $1 \leq i \leq s$, quindi annulla $h_1 f_1 + ... + h_s f_s$ con $h_1, ..., h_s \in K[x_1, ..., x_n]$. Per ipotesi ogni g_j si può scrivere come combinazione di f_i, quindi $(a_1, ..., a_n)$ annulla ogni g_j, cioè appartiene a $\mathbf{V}(g_1, ..., g_t)$. In definitiva $\mathbf{V}(f_1, ..., f_s) \subset \mathbf{V}(g_1, ..., g_t)$ e l'altra inclusione è analoga. □

Riprendiamo l'esempio 3 della cubica gobba, $V = \mathbf{V}(y - x^2, z - x^3)$; sappiamo che i polinomi che la definiscono si annullano sui punti di V, ma possiamo chiederci se esistono altri polinomi con tale proprietà. Per questo definiamo l'insieme di tutti i polinomi che si annullano su una generica varietà.

Definizione 6. *Sia $V \subset K^n$ una varietà affine allora poniamo*

$$\boldsymbol{I}(V) = \{f \in K[x_1, ..., x_n] \mid f(a_1, ..., a_n) = 0, \ \forall \ (a_1, ..., a_n) \in V\}.$$

Lemma 3. *Se $V \subset K^n$ è una varietà affine allora $\boldsymbol{I}(V) \subset K[x_1, ..., x_n]$ è un ideale radicale; chiamiamo $\boldsymbol{I}(V)$ l'**ideale di V**.*

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che $\mathbf{I}(V)$ è un ideale. È ovvio che $0 \in \mathbf{I}(V)$ dato che 0 si annulla su tutti i punti di K^n. Supponiamo poi che $f, g \in \mathbf{I}(V)$ e $h \in K[x_1, ..., x_n]$. Sia $(a_1, ..., a_n)$ un punto arbitrario di V, allora $f(a_1, ..., a_n) + g(a_1, ..., a_n) = 0 + 0 = 0$ e $h(a_1, ..., a_n)f(a_1, ..., a_n) = h(a_1, ..., a_n) \cdot 0 = 0$. Dunque $\mathbf{I}(V)$ è un ideale. Inoltre vediamo che è radicale. Sia $x \in V$, se $f^m \in \mathbf{I}(V)$, allora $(f(x))^m = 0$. Questo può succedere solo se $f(x) = 0$; ma, dato che $x \in V$ è arbitrario, $f \in \mathbf{I}(V)$. $\square$

Esempio 4. *Per un primo esempio di ideale di una varietà, consideriamo $\{(0,0)\}$ varietà di K^2. Vediamo che $\boldsymbol{I}(\{(0,0)\}) = \langle x, y\rangle$. L'inclusione $\langle x, y\rangle \subset \boldsymbol{I}(\{(0,0)\})$ è banale perché ogni polinomio della forma $A(x,y)x + B(x,y)y$ si annulla nell'origine.*

Per l'altra inclusione supponiamo che $f = \sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j$ si annulli nell'origine. Allora $a_{00} = f(0,0) = 0$ e, di conseguenza,

$$f = a_{00} + \sum_{i,j \neq 0,0} a_{ij}x^i y^j = 0 + \left(\sum_{\substack{i,j \\ i>0}} a_{ij}x^{i-1}y^j \right) x + \left(\sum_{j>0} a_{0j}y^{j-1} \right) y \in \langle x, y\rangle.$$

Così $\boldsymbol{I}(\{(0,0)\}) \subset \langle x, y\rangle$.

Esempio 5. *Consideriamo il caso $V = K^n$, allora $\boldsymbol{I}(K^n)$ è l'insieme di tutti i polinomi che si annullano dappertutto, cioè $\boldsymbol{I}(K^n) = 0$, se K è un campo infinito.*

Esempio 6. *Un esempio più interessante è quello dell'ideale di $V = \boldsymbol{V}(y - x^2, z - x^3) \subset \mathbb{R}^3$. Vediamo che $\boldsymbol{I}(V) = \langle y - x^2, z - x^3\rangle$. Per provare ciò, mostriamo prima che $f \in \mathbb{R}[x,y,z]$ può essere scritto nella forma*

$$f = h_1(y - x^2) + h_2(z - x^3) + r \tag{1.1}$$

dove $h_1, h_2 \in \mathbb{R}[x,y,z]$ e r è un polinomio nella sola variabile x. Consideriamo prima il caso di $f = x^\alpha y^\beta z^\gamma$: possiamo scriverlo

$$\begin{aligned} x^\alpha y^\beta z^\gamma = &\quad x^\alpha(x^2 + (y - x^2))^\beta (x^3 + (z - x^3))^\gamma \\ = &\quad x^\alpha(x^{2\beta} + termini \quad in \quad y - x^2)(x^{3\gamma} + termini \quad in \quad z - x^3) \\ = &\quad h_1(y - x^2) + h_2(z - x^3) + x^{\alpha + 2\beta + 3\gamma} \end{aligned}$$

Così, 1.1 è vera in questo caso e, in generale, preso $f \in \mathbb{R}[x,y,z]$, lo potremo scrivere come combinazione $\mathbb{R}$-lineare di monomi, da cui segue che 1.1 vale per ogni f. Ora possiamo effettivamente dimostrare che $\boldsymbol{I}(V) = \langle y - x^2, z - x^3\rangle$. Dalla definizione di cubica gobba abbiamo $y - x^2, z - x^3 \in \boldsymbol{I}(V)$ e, dato che $\boldsymbol{I}(V)$ è un ideale, $h_1(y - x^2) + h_2(z - x^3) \in \boldsymbol{I}(V)$. In questo modo rimane provata l'inclusione $\langle y - x^2, z - x^3\rangle \subset \boldsymbol{I}(V)$. Per provare l'inclusione opposta cosideriamo $f \in \boldsymbol{I}(V)$ che ammette la scrittura 1.1, il nostro scopo è provare *che $r = 0$. Per farlo useremo la parametrizzazione della cubica gobba data da (t, t^2, t^3); dato che f si annulla su V, si ha:*

$$0 = f(t, t^2, t^3) = 0 + 0 + r(t)$$

Per l'arbitrarietà di $t \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}[x]$ deve essere il polinomio nullo. Allora f ha la forma desiderata e questo dimostra $\boldsymbol{I}(V) \subset \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$.

In analogia con la definizione di ideale di una varietà, possiamo definire la varietà associata a un ideale. Questa è una generalizzazione della definizione iniziale di varietà affine.

Definizione 7. *Sia $I \subset K[x_1, ..., x_n]$ un ideale, definiamo l'insieme*

$$\boldsymbol{V}(I) = \{x \in K^n \mid f(x) = 0; \forall\ f \in I\}.$$

Il teorema della base di Hilbert ci permette di dimostrare che $\mathbf{V}(I)$ è una varietà affine.

Teorema 1 (della base di Hilbert). *Ogni ideale $I \subset K[x_1, ..., x_n]$ ammette un insieme finito di generatori. Cioè, $I = \langle g_1, ..., g_s \rangle$ per alcuni $g_1, ..., g_s \in I$.*

Non dimostriamo questo teorema; lo si può ad esempio trovare in [CLO].

Proposizione 2. *$\boldsymbol{V}(I)$ è una varietà affine; in particolare, se $I = \langle f_1, ..., f_s \rangle$, allora $\boldsymbol{V}(I) = \boldsymbol{V}(f_1, ..., f_s)$.*

Dimostrazione. Dal teorema della base di Hilbert, I è generato da un numero finito di polinomi. Vogliamo dimostrare che $\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(f_1, ..., f_s)$. Innanzitutto, dato che $f_i \in I$, se $f(a_1, ..., a_n) = 0\ \forall\ f \in I$ allora $f_i(a_1, ..., a_n) = 0$, così $\mathbf{V}(I) \subset \mathbf{V}(f_1, ..., f_s)$. D'altra parte sia $(a_1, ..., a_n) \in \mathbf{V}(f_1, ..., f_s)$ e sia $f \in I$; siccome $I = \langle f_1, ..., f_s \rangle$, possiamo scrivere $f = \sum_{i=1}^{s} h_i f_i$ per certi $h_i \in K[x_1, ..., x_n]$, ma allora

$$\begin{aligned} f(a_1, ..., a_n) &= \sum_{i=1}^{s} h_i(a_1, ..., a_n) f_i(a_1, ..., a_n) \\ &= \sum_{i=1}^{s} h_i(a_1, ..., a_n) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Dunque $\mathbf{V}(f_1, ..., f_s) \subset \mathbf{V}(I)$. □

Capitolo 2

Corrispondenza ideali-varietà

Lo scopo di questo capitolo è costruire un "dizionario" ideali-varietà, ovvero lo strumento che ci permetterà di tradurre operazioni su ideali nelle corrispondenti operazioni fra varietà, e viceversa.

Per ottenere ciò, ci serviremo di un teorema fondamentale di algebra commutativa, dimostrato per la prima volta da Hilbert: il Nullstellesatz; nella Sezione 1 vedremo tre sue varianti. Nella Sezione 2 vengono studiate in dettaglio le applicazioni $\mathbf{I}$ e $\mathbf{V}$, protagoniste della corrispondenza. Dalla Sezione 3 alla 8 vedremo come sono legate fra loro le operazioni tra ideali (somma, prodotto, intersezione, quoziente) e quelle tra varietà (intersezione, unione, differenza). L'ultima Sezione è occupata da una tabella riassuntiva.

2.1 Nullstellensatz

Nel primo capitolo abbiamo introdotto l'insieme dei polinomi che si annullano su una varietà $V \subset K^n$ e l'insieme dei punti che annullano i polinomi di un ideale $I \subset K[x_1, ..., x_n]$, rispettivamente:

$$\mathbf{I}(V) = \{f \in K[x_1, ..., x_n] \mid f(x) = 0 \ \forall \ x \in V\};$$

$$\mathbf{V}(I) = \{x \in K^n \mid f(x) = 0 \ \forall \ f \in I\}.$$

Gli insiemi definiti inducono due mappe che danno una prima idea della corrispondenza che studieremo durante il capitolo:

$$\begin{array}{ccc} \text{varietà affini} & \longrightarrow & \text{ideali} \\ V & \longrightarrow & \mathbf{I}(V) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \text{ideali} & \longrightarrow & \text{varietà affini} \\ I & \longrightarrow & \mathbf{V}(I) \end{array}.$$

Osserviamo innanzitutto che la corrispondenza non è biunivoca, infatti la mappa $\mathbf{V}$ non è iniettiva. Ad esempio gli ideali $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$ sono ideali diversi di $K[x]$ ma sono associati alla stessa varietà $\mathbf{V}(x) = \mathbf{V}(x^2) = \{0\}$.

Un problema dovuto alla mancanza di iniettività di $\mathbf{V}$ è la rappresentazione della varietà vuota in K^n, con K campo non algebricamente chiuso.

Ad esempio prendiamo gli ideali generati dai polinomi $1,\ 1+x^2,\ 1+x^2+x^4 \in \mathbb{R}[x]$. Questi polinomi non hanno radici reali e dunque corrispondono alla varietà vuota. Questo problema non sussiste considerando campi algebricamente chiusi, come vediamo con il seguente teorema.

Teorema 2 (Nullstellensatz debole). *Sia K un campo algebricamente chiuso e sia $I \subset K[x_1,...,x_n]$ un ideale tale che $\mathbf{V}(I) = \emptyset$. Allora $I = K[x_1,...,x_n]$.*

Dimostrazione. L'idea consiste nel provare che $1 \in I$; infatti questo implica la nostra tesi: se $1 \in I \Rightarrow f = f \cdot 1 \in I$,$\forall\ f \in K[x_1,...,x_n]$.

Lo proviamo per induzione su n, numero di variabili.

Se $n = 1$, sia $I \subset K[x]$ tale che $\mathbf{V}(I) = \emptyset$. Si può dimostrare che $K[x]$ è un dominio a ideali principali quindi $\exists\ f$ per cui $I = \langle f \rangle$. Allora $\mathbf{V}(I)$ è l'insieme delle radici di f, ovvero l'insieme degli $a \in K$ che verificano $f(a) = 0$. Ma, dato che K è algebricamente chiuso, ogni polinomio non costante ha radici. Dunque l'unico modo in cui si può avere $\mathbf{V}(I) = \emptyset$ è se f è una costante non nulla. In tal caso $1/f \in K$, allora $1 = (1/f) \cdot f \in I$.

Ora assumiamo di aver dimostrato il teorema per $n-1$ variabili e vediamolo per n. Consideriamo un ideale $I = \langle f_1,...,f_s \rangle \subset K[x_1,...,x_n]$ per cui $\mathbf{V}(I) = \emptyset$. Supponiamo che f_1 non sia costante, altrimenti non ci sarebbe niente da provare, e abbia grado $N \geq 1$. Operiamo un cambio di coordinate per portare f_1 in una forma particolare:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{x}_1, \\ x_2 &= \tilde{x_2} + a_2\tilde{x_1}, \\ &\vdots \\ x_n &= \tilde{x_n} + a_n\tilde{x_1}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

dove gli a_i sono costanti ancora da determinare in K. Sostituiamo gli $x_1,...,x_n$ con le nuove coordinate:

$$\begin{aligned} f_1(x_1,...,x_n) \quad &= f_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 + a_2\tilde{x_1},...,\tilde{x}_n + a_n\tilde{x_1}) \\ &= c(a_2,...a_n)\tilde{x}_1^N + \text{termini in cui } \tilde{x}_1 \text{ ha grado} < N. \end{aligned}$$

Si può dimostrare che $c(a_2,...,a_n)$ è un'espressione polinomiale non nulla in $a_2,...,a_n$.

Con il cambiamento di coordinate 2.1 ogni polinomio $f \in K[x_1,...,x_n]$ va in un polinomio $\tilde{f} \in K[\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n]$. È immediato dimostrare che l'insieme $\tilde{I} = \{\tilde{f} \mid f \in I\}$ è un ideale in $K[\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n]$. Notiamo che vale ancora $\mathbf{V}(\tilde{I}) = \emptyset$ dato che, se le equazioni trasformate avessero soluzione, allora le avrebbero anche quelle iniziali. Inoltre, se possiamo dimostrare che $1 \in \tilde{I}$, allora $1 \in I$, poiché le costanti non vengono modificate da 2.1.

Ricordiamo che abbiamo trasformato f_1 in

$$\tilde{f}_1(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n) = c(a_2, ...a_n)\tilde{x}_1^N + \text{termini in cui } \tilde{x}_1 \text{ ha grado} < N,$$

dove abbiamo scelto dei particolari $a_2, ..., a_n$ tali che $c(a_2, ..., a_n) \neq 0$.

Sia $\pi_1 : K^n \longrightarrow K^{n-1}$ la mappa di proiezione sulle ultime $n-1$ componenti. Poniamo $\tilde{I}_1 = \tilde{I} \cap K[\tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n]$, allora per un lemma che riportiamo in seguito, $\mathbf{V}(\tilde{I}_1) = \pi_1(\mathbf{V}(\tilde{I}))$. Questo implica che $\mathbf{V}(\tilde{I}_1) = \pi_1(\mathbf{V}(\tilde{I})) = \pi_1(\emptyset) = \emptyset$.

Dall'ipotesi induttiva segue che $\tilde{I}_1 = K[\tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n]$, questo implica che $1 \in \tilde{I}_1 \subset \tilde{I}$. □

Lemma 4. *Sia $V = \boldsymbol{V}(f_1, ..., f_s) \subset K^n$ e assumiamo che, per qualche i, f_i sia della forma*

$$f_i = cx_1^N + \textit{termini in cui } x_1 \textit{ ha grado} < N,$$

dove $c \in K - \{0\}$ e $N \geq 1$. Sia $I_1 = I \cap K[x_2, ..., x_n]$, allora, in K^{n-1}, $\pi_1(V) = \boldsymbol{V}(I_1)$, dove π_1 è la proiezione sulle ultime $n-1$ componenti.

Questo lemma è in realtà un corollario del Teorema di estensione geometrica, che esula dalla nostra trattazione e ne omettiamo la dimostrazione, ma può essere trovata in [CLO].

Il nostro scopo è rendere in qualche modo biunivoca la corrispondenza precedentemente definita dalle mappe **I** e **V**. Per riuscirci sarà fondamentale il Nullstellensatz forte, che è una diretta conseguenza del prossimo teorema, il Nullstellensatz di Hilbert. Esso afferma che se un polinomio f si annulla su tutti i punti di $\mathbf{V}(I)$, allora qualche potenza di f deve appartenere a I, cioè $f \in \sqrt{I}$.

Teorema 3 (**Nullstellensatz di Hilbert**). *Sia K un campo algebricamente chiuso e siano $f, f_1, ..., f_s \in K[x_1, ..., x_n]$. Se $f \in \boldsymbol{I}(\boldsymbol{V}(f_1, ..., f_s))$, allora esiste un intero $m \geq 1$ tale che $f^m \in \langle f_1, ..., f_s \rangle$.*

Dimostrazione. Dall'ipotesi $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1, ..., f_s))$, si ha che f si annulla su tutti gli zeri comuni dei polinomi $f_1, ..., f_s$. Dobbiamo provare che esiste un intero $m \geq 1$ e dei polinomi $A_1, ..., A_s$ tali che

$$f^m = \sum_{i=1}^{s} A_i f_i.$$

La prova più diretta consiste nel considerare l'ideale

$$\tilde{I} = \langle f_1, ..., f_s, 1 - yf \rangle \subset K[x_1, ..., x_n, y]$$

e provare che $\mathbf{V}(\tilde{I}) = \emptyset$.

Per vederlo, prendiamo $(a_1, ..., a_n, a_{n+1}) \in K^{n+1}$ e distinguiamo due casi:

- $(a_1, ..., a_n)$ è uno zero comune di $f_1, ..., f_s$,
- $(a_1, ..., a_n)$ non è uno zero comune di $f_1, ..., f_s$.

Nel primo caso segue dall'ipotesi che $f(a_1, ..., a_n) = 0$. Così, valutando il polinomio $1 - yf$ in $(a_1, ..., a_n, a_{n+1})$, si ha $1 - a_{n+1}f(a_1, ..., a_n) = 1 \neq 0$. In particolare, $(a_1, ..., a_n, a_{n+1}) \notin \mathbf{V}(\tilde{I})$.

Nel secondo caso, $\exists\ i,\ 1 \leq i \leq s$ tale che $f_i(a_1, ..., a_n) \neq 0$. Pensando f_i come una funzione in $n+1$ variabili che non dipende dall'ultima variabile, abbiamo $f_i(a_1, ..., a_n, a_{n+1}) \neq 0$. Possiamo concludere che $(a_1, ..., a_n, a_{n+1}) \notin \mathbf{V}(\tilde{I})$. Dunque, per l'arbitrarietà di $(a_1, ..., a_n, a_{n+1}) \in K^{n+1}$, $\mathbf{V}(\tilde{I}) = \emptyset$.

Dal Nullstellensatz debole segue che $\tilde{I} = K[x_1, ..., x_n, y]$, cioè $1 \in \tilde{I}$. Quindi possiamo scrivere 1 come

$$1 = \sum_{i=1}^{s} p_i(x_1, ..., x_n, y) f_i + q(x_1, ..., x_n, y)(1 - yf)$$

per opportuni polinomi $p_i, q \in K[x_1, ..., x_n, y]$. Ora, passando al campo dei quozienti, $K(x_1, ..., x_n, y)$, poniamo $y = 1/f(x_1, ..., x_n)$. Allora la relazione precedente diventa:

$$1 = \sum_{i=1}^{s} p_i(x_1, ..., x_n, 1/f) f_i.$$

Moltiplicando entrambi i membri per f^m, dove m è scelto abbastanza grande da far scomparire tutti i denominatori, si avrà in definitiva

$$f^m = \sum_{i=1}^{s} A_i f_i,$$

per alcuni polinomi $A_i \in K[x_1, ..., x_n]$, che è proprio la nostra tesi. $\square$

Ora possiamo dimostrare la seguente variante del Nullstellensatz.

Teorema 4 (Nullstellensatz forte). *Sia K un campo algebricamente chiuso. Se $I \subset K[x_1, ..., x_n]$ è un ideale, allora*

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{V}(I)) = \sqrt{I}.$$

Dimostrazione. $\sqrt{I} \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}(I))$, infatti $f \in \sqrt{I} \Rightarrow f^m \in I$ per qualche m. Quindi f^m si annulla in $\mathbf{V}(I)$, il che implica che anche f si annulla in $\mathbf{V}(I)$, cioè $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(I))$.

Viceversa, supponiamo che $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(I))$; allora per definizione f si annulla su $\mathbf{V}(I)$. Dal Nullstellensatz di Hilbert, esiste un intero $m \geq 1$ tale che $f^m \in I$. Ma questo significa che $f \in \sqrt{I}$. Per l'arbitrarietà di f, $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) \subset \sqrt{I}$. $\square$

2.2 Corrispondenza fra ideali e varietà

In questa sezione approfondiremo il ruolo delle funzioni $\mathbf{I}$ e $\mathbf{V}$ introdotte precedentemente. Abbiamo già accennato che queste due funzioni danno luogo a una corrispondenza fra ideali e varietà; in particolare, se si lavora su un campo algebricamente chiuso, la corrispondenza è una biezione fra varietà affini e ideali radicali.

Lemma 5. *Sia K un campo arbitrario. Le mappe*

$$\boldsymbol{I}: \quad \textit{varietà affini} \longrightarrow \textit{ideali}$$

e

$$\boldsymbol{V}: \quad \textit{ideali} \longrightarrow \textit{varietà affini}$$

invertono le inclusioni, cioè se $I_1 \subset I_2$ sono ideali, allora $\boldsymbol{V}(I_1) \supset \boldsymbol{V}(I_2)$ e, analogamente, se $V_1 \subset V_2$ sono varietà, allora $\boldsymbol{I}(V_1) \supset \boldsymbol{I}(V_2)$.

Dimostrazione. Siano I_1 e I_2 ideali tali che $I_1 \subset I_2$, vogliamo dimostrare che $\mathbf{V}(I_1) \supset \mathbf{V}(I_2)$. Sia $x \in \mathbf{V}(I_2)$, allora $\forall f \in I_2$, $f(x) = 0$; in particolare x è uno zero di ogni $f \in I_1 \subset I_2$. Quindi $x \in \mathbf{V}(I_1)$.

Consideriamo poi $V_1 \subset V_2$ varietà, vogliamo dimostrare $\mathbf{I}(V_1) \supset \mathbf{I}(V_2)$. Sia $f \in \mathbf{I}(V_2)$, allora $\forall x \in V_2$, $f(x) = 0$; in particolare f si annulla su tutti gli $x \in V_1 \subset V_2$. Quindi $f \in \mathbf{I}(V_1)$. □

Lemma 6. *Sia K un campo arbitrario. Per ogni varietà $V \subset K^n$, si ha*

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{I}(V)) = V,$$

cioè $\boldsymbol{I}$ è iniettiva.

Dimostrazione. Sappiamo che le varietà di K^n sono tutte della forma $V = \mathbf{V}(f_1, ..., f_s)$, per certi $f_1, .., f_s \in K[x_1, ..., x_n]$. Dato che ogni $f \in \mathbf{I}(V)$ si annulla su V, l'inclusione $V \subset \mathbf{V}(\mathbf{I}(V))$ è una diretta conseguenza della definizione di $\mathbf{V}$. Per l'altra inclusione, notiamo che $f_1, ..., f_s \in \mathbf{I}(V)$ e siccome $\mathbf{I}(V)$ è un ideale, $\langle f_1, ..., f_s \rangle \subset \mathbf{I}(V)$. Dato che $\mathbf{V}$ inverte le inclusioni, $\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) \subset \mathbf{V}(\langle f_1, ..., f_s \rangle) = V$. Dunque rimane dimostrata $\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V$; di conseguenza, dato che $\mathbf{I}$ ha inversa sinistra, è iniettiva. □

Teorema 5. *Sia K un campo algebricamente chiuso. Se ci restringiamo agli ideali radicali, allora le mappe*

$$\boldsymbol{I}: \quad \textit{varietà affini} \longrightarrow \textit{ideali radicali}$$

e

$$\boldsymbol{V}: \quad \textit{ideali radicali} \longrightarrow \textit{varietà affini}$$

sono biezioni che invertono le inclusioni, in particolare sono una l'inversa dell'altra.

Dimostrazione. Abbiamo provato nel Capitolo 1 che $\mathbf{I}(V)$ è radicale, quindi è giustificata la restrizione del codominio agli ideali radicali.

Dal lemma precedente sappiamo che $\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V$ per ogni varietà V, rimane da provare che $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$ per ogni ideale radicale I. Questa è un'immediata conseguenza del Nullstellensatz forte, che afferma $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I}$, ma essendo I radicale, $I = \sqrt{I}$. Quindi $\mathbf{V}$ e $\mathbf{I}$ sono una l'inversa dell'altra, in questo modo è definita la biezione tra ideali radicali e varietà affini. □

Come conseguenza di questo teorema, ogni affermazione sulle varietà affini può essere riformulata in termini algebrici come affermazione sugli ideali radicali, se si lavora su un campo algebricamente chiuso.

In seguito studieremo come si corrispondono le operazioni tra ideali e quelle tra varietà.

2.3 Somme di ideali

Definizione 8. *Se I e J sono ideali di $K[x_1, ..., x_n]$, allora la* ***somma*** *di I e J è l'insieme*
$$I + J = \{f + g \mid f \in I \, e \, g \in J\}.$$

Proposizione 3. *Se $I, J \subset K[x_1, ..., x_n]$ sono ideali, allora anche $I + J \subset K[x_1, ..., x_n]$ è un ideale; in particolare $I + J$ è il più piccolo ideale contenente I e J. Inoltre se $I = \langle f_1, ..., f_r \rangle$ e $J = \langle g_1, ..., g_s \rangle$ allora $I + J = \langle f_1, ..., f_r, g_1, ..., g_s \rangle$.*

Dimostrazione. Notiamo che $0 = 0 + 0 \in I + J$. Supponiamo che $h_1, h_2 \in I + J$, per definizione esistono $f_1, f_2 \in I$ e $g_1, g_2 \in J$ tali che $h_1 = f_1 + g_1$ e $h_2 = f_2 + g_2$. Allora $h_1 + h_2 = (f_1 + f_2) + (g_1 + g_2) \in I + J$, infatti $f_1 + f_2 \in I$ perché I è un ideale, analogamente $g_1 + g_2 \in J$. Verifichiamo la chiusura rispetto alla moltiplicazione: siano $h \in I + J$ e $l \in K[x_1, ..., x_n]$, allora si può scrivere $h = f + g$ con $f \in I$ e $g \in J$. Quindi $l \cdot h = l \cdot (f + g) = l \cdot f + l \cdot g$, ma $l \cdot f \in I$ e $l \cdot g \in J$, perciò $l \cdot h \in I + J$. Dunque $I + J$ è un ideale.

Sia H un ideale contenente I e J, allora H dovrà contenere tutti gli elementi del tipo $f + g$ dove $f \in I$ e $g \in J$, ovvero $H \supset I + J$. Quindi ogni ideale contenente I, J contiene anche $I + J$ e così $I + J$ è il più piccolo di tali ideali.

Infine se $I = \langle f_1, ..., f_r \rangle$ e $J = \langle g_1, ..., g_s \rangle$ allora $\langle f_1, ..., f_r, g_1, ..., g_s \rangle$ è un ideale contenente I e J, così, per quanto provato prima, $I + J \subset \langle f_1, ..., f_r, g_1, ..., g_s \rangle$. L'altra inclusione è ovvia, quindi si ha $I + J = \langle f_1, ..., f_r, g_1, ..., g_s \rangle$.

□

Un'immediata conseguenza di cui ci serviremo nel prossimo esempio è il seguente:

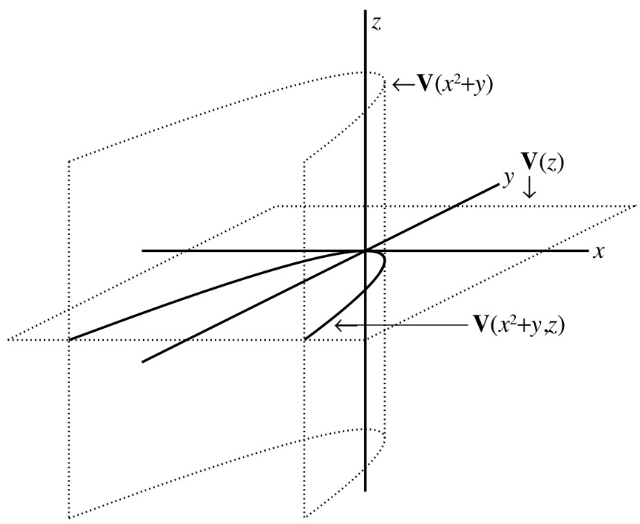
Corollario 1. *Se $f_1, ..., f_r \in K[x_1, ..., x_n]$ allora $\langle f_1, ..., f_r\rangle = \langle f_1\rangle + ... + \langle f_r\rangle$.*

Teorema 6. *Siano I e J ideali in $K[x_1, ..., x_n]$, allora $\boldsymbol{V}(I + J) = \boldsymbol{V}(I) \cap \boldsymbol{V}(J)$.*

Dimostrazione. Se $x \in \mathbf{V}(I + J)$, allora $x \in \mathbf{V}(I)$ perché $I \subset I + J$, analogamente $x \in \mathbf{V}(J)$. Quindi $x \in \mathbf{V}(I) \cap \mathbf{V}(J)$ e concludiamo $\mathbf{V}(I + J) \subset \mathbf{V}(I) \cap \mathbf{V}(J)$.

Per l'inclusione opposta, supponiamo $x \in \mathbf{V}(I) \cap \mathbf{V}(J)$. Sia h un polinomio in $I + J$, allora esistono $f \in I$ e $g \in J$ tali che $h = f + g$. Abbiamo $f(x) = 0$ perché $x \in \mathbf{V}(I)$ e $g(x) = 0$ perché $x \in \mathbf{V}(J)$, quindi $h(x) = 0$. Per l'arbitrarietà di h, $x \in \mathbf{V}(I + J)$, quindi $\mathbf{V}(I + J) \supset \mathbf{V}(I) \cap \mathbf{V}(J)$. □

Esempio 7. *Siamo $I = \langle x^2 + y\rangle$ e $J = \langle z\rangle$ ideali in $\mathbb{R}^3$ e per la Proposizione 3, $I + J = \langle x^2 + y, z\rangle$. Notiamo dalla figura che $\boldsymbol{V}(I)$ è il cilindro parabolico, $\boldsymbol{V}(J)$ è il piano e $\boldsymbol{V}(I + J)$ è la parabola in cui si intersecano le due superfici.*



Un altro esempio di varietà data dalla somma di due ideali è la cubica gobba dell'esempio 3.

2.4 Prodotto di ideali

Definizione 9. *Se I e J sono ideali in $K[x_1, ..., x_n]$, il loro* ***prodotto****, denotato $I \cdot J$, è definito come l'ideale generato da tutti i polinomi $f \cdot g$ dove $f \in I$ e $g \in J$.*

Proposizione 4. *Siano $I = \langle f_1, ..., f_r \rangle$ e $J = \langle g_1, ..., g_s \rangle$. Allora $I \cdot J$ è generato da tutti i prodotti dei generatori di I e J:*

$$I \cdot J = \langle f_i g_j \ : \ 1 \leq i \leq r, \ 1 \leq j \leq s \rangle.$$

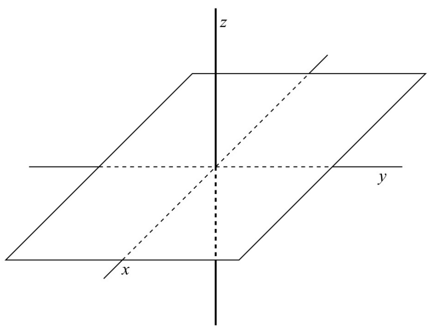
Dimostrazione. È chiaro che l'ideale generato dai prodotti dei generatori $f_i g_j$ è contenuto in $I \cdot J$. Per provare l'inclusione opposta, osserviamo che ogni polinomio di $I \cdot J$ è una somma di polinomi della forma fg con $f \in I$ e $g \in J$. Ma ognuno degli f e g si scrive come combinazione dei generatori degli ideali a cui appartengono, cioè $f = a_1 f_1 + ... + a_r f_r$, $g = b_1 g_1 + ... + b_s g_s$, per opportuni polinomi $a_1, ..., a_r, b_1, ..., b_s$. Così fg, e ogni somma di polinomi di questa forma, può essere scritto come $\sum c_{ij} f_i g_j$, con $c_{ij} \in K[x_1, ..., x_n]$. □

Teorema 7. *Se $I, J \subset K[x_1, ..., x_n]$ sono due ideali, allora $\boldsymbol{V}(I \cdot J) = \boldsymbol{V}(I) \cup \boldsymbol{V}(J)$.*

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbf{V}(I \cdot J)$, allora $g(x)h(x) = 0$ per ogni $g \in I$ e $h \in J$. Se $g(x) = 0$ per ogni $g \in I$ allora $x \in \mathbf{V}(I)$. Se $g(x) \neq 0$ per ogni $g \in I$, allora deve essere $h(x) = 0$ per ogni $h \in J$. In ogni caso $x \in \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$.

Viceversa, supponiamo $x \in \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$, allora $g(x) = 0$ per ogni $g \in I$ oppure $h(x) = 0$ per ogni $h \in J$. In questo modo $g(x)h(x) = 0$ per ogni $g \in I$ e $h \in J$. Così $f(x) = 0$ per ogni $f \in I \cdot J$, quindi $x \in \mathbf{V}(I \cdot J)$. □

Osserviamo che abbiamo già parlato di unione di varietà, in particolare nel Lemma 1 del Capitolo 1, avevamo visto la relazione $\mathbf{V}(f_1, ..., f_r) \cup \mathbf{V}(g_1, ..., g_s) = \mathbf{V}(f_i g_j | 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s)$.



Esempio 8. *La varietà $\boldsymbol{V}(xz, yz)$ corrispondente all'ideale generato dal prodotto dei generatori di $\langle x, y \rangle$ e $\langle z \rangle$, ideali di $\mathbb{R}[x, y, z]$, è l'unione di $\boldsymbol{V}(x, y)$, cioè l'asse z, e di $\boldsymbol{V}(z)$, cioè il piano xy.*

2.5 Intersezione di ideali

Proposizione 5. *Se I e J sono ideali in $K[x_1, ..., x_n]$, allora $\mathbf{I} \cap \mathbf{J}$ è ancora un ideale.*

Dimostrazione. Notiamo che $0 \in I \cap J$ poiché $0 \in I$ e $0 \in J$. Se $f, g \in I \cap J$, allora $f+g \in I$ poiché $f, g \in I$, analogamente $f+g \in J$ e quindi $f+g \in I \cap J$. Infine sia $f \in I \cap J$ e $h \in K[x_1, ..., x_n]$, dato che $f \in I$, abbiamo $h \cdot f \in I$, allo stesso modo $h \cdot f \in J$ e quindi $h \cdot f \in I \cap J$. □

Osserviamo che si ha sempre $I \cdot J \subset I \cap J$, dato che gli elementi di $I \cdot J$ sono somme di polinomi della forma fg con $f \in I$ e $g \in J$. Ma fg appartiene sia a I, poiché $f \in I$, sia a J, perché $g \in J$, che sono ideali. Non vale però l'inclusione contraria, infatti se consideriamo $I = J = \langle x, y \rangle$, allora $I \cdot J = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$ e $I \cap J = I = \langle x, y \rangle$ e il monomio $x \in I \cap J$ ma $x \notin I \cdot J$.

Un'altra proprietà dell'intersezione di due ideali a noi particolarmente utile è la seguente:

Proposizione 6. *Se I e J sono ideali in $K[x_1, ..., x_n]$, allora $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.*

Dimostrazione. Se $f \in \sqrt{I \cap J}$, allora $f^m \in I \cap J$ per qualche intero $m > 0$. Dato che $f^m \in I$, allora $f \in \sqrt{I}$. Ugualmente, $f \in \sqrt{J}$, di conseguenza $\sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

Per l'inclusione opposta supponiamo $f \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. Allora esistono interi $m, p > 0$ tali che $f^m \in I$ e $f^p \in J$. Quindi $f^m f^p = f^{m+p} \in I \cap J \Rightarrow f \in \sqrt{I \cap J}$. □

Teorema 8. *Se I e J sono ideali in $K[x_1, ..., x_n]$, allora $\boldsymbol{V}(I \cap J) = \boldsymbol{V}(I) \cup \boldsymbol{V}(J)$.*

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$, allora $x \in \mathbf{V}(I)$ oppure $x \in \mathbf{V}(J)$. Ciò significa che $f(x) = 0$, $\forall\ f \in I$, o $f(x) = 0$, $\forall\ f \in J$, cioè $f(x) = 0$, $\forall\ f \in I \cap J$. Quindi $x \in \mathbf{V}(I \cap J)$ e $\mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J) \subset \mathbf{V}(I \cap J)$.

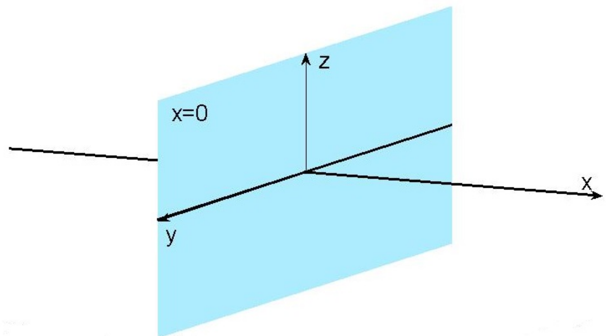
D'altro canto, sappiamo che $I \cdot J \subset I \cap J$ e abbiamo $\mathbf{V}(I \cdot J) \supset \mathbf{V}(I \cap J)$. Ma, per il Teorema 7, $\mathbf{V}(I \cdot J) = \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$, ovvero $\mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J) \supset \mathbf{V}(I \cap J)$. □

Dal teorema appena dimostrato si evince che l'intersezione di due ideali corrisponde alla medesima varietà associata al prodotto degli stessi ideali. Il calcolo dell'intersezione è in generale più complicato del calcolo del prodotto e una trattazione di questo argomento si può trovare in [CLO]; però è spesso più utile utilizzare la prima operazione, in quanto l'intersezione di ideali radicali è sempre radicale (vedi Proposizione 6), mentre non è detto che il prodotto di ideali radicali sia radicale (ad esempio $I \cdot J$, dove $I = J$).

Esempio 9. *Siano* $I = \langle xy, z\rangle$ *e* $J = \langle x\rangle$ *ideali in* $\mathbb{R}[x, y, z]$. *Proviamo che* $I \cap J = \langle xy, xz\rangle$. *Sia* $f \in I \cap J$, *allora* $f \in I \Rightarrow f = Axy + Bz$ *e* $f \in J \Rightarrow f = Cx$, *per* A, B, C *opportuni polinomi. Allora il polinomio* B *deve essere della forma* Dx, *quindi* $f = Axy + Dxz$, *cioè* $f \in \langle xy, xz\rangle$. *D'altra parte, se* $f \in \langle xy, xz\rangle$, $f = Axy+Bxz$, *per* A, B *opportuni polinomi. Allora* $f \in I$, *perché combinazione di* xy *e* z, *e* $f \in J$, *perché multiplo di* x.

Notiamo però che l'intersezione appena calcolata è diversa dal prodotto $I \cdot J$, *che risulta essere* $\langle x^2y, xz\rangle$.

La figura ci mostra che $\boldsymbol{V}(I)$ *è l'unione dell'asse* x *e dell'asse* y *e* $\boldsymbol{V}(J)$ *è il piano* $x = 0$. *Dal Teorema 8,* $\boldsymbol{V}(I \cap J) = \boldsymbol{V}(I) \cup \boldsymbol{V}(J)$, *ovvero l'unione del piano* $x = 0$ *e dell'asse* x. *Osserviamo che questa è proprio la varietà associata a* $\langle xy, xz\rangle$. *Notiamo poi che la varietà associata all'ideale prodotto coincide ancora con* $\boldsymbol{V}(I) \cup \boldsymbol{V}(J)$, *nonostante gli ideali* $I \cap J = \langle xy, xz\rangle$ *e* $I \cdot J = \langle x^2y, xz\rangle$ *siano diversi.*



2.6 Chiusura di Zariski e ideali quozienti

Le operazioni tra varietà viste finora danno luogo ad altre varietà (come unione e intersezione), ma esistono casi in cui ciò non accade, ad esempio la differenza di varietà.

Esempio 10. *Siano* $W = \boldsymbol{V}(K)$, *dove* $K = \langle xz, yz\rangle \subset \mathbb{R}[x, y, z]$, *e* $V = \boldsymbol{V}(I)$, *dove* $I = \langle z\rangle \subset \mathbb{R}[x, y, z]$. *Abbiamo già visto che* W *è l'unione del piano* xy *e dell'asse* z. *Dato che* V *è il piano* xy, $W - V$ *coincide con l'asse* z *privato dell'origine. Vediamo che non è una varietà: supponiamo per assurdo che* $W - V = \boldsymbol{V}(f_1, ..., f_s)$, *cioè che sia una varietà. Un polinomio che si annulla sui punti di* $W - V$ *può essere scritto come* $f(0, 0, z) = g(z) \in \mathbb{R}[z]$. g *è un polinomio in una variabile con infiniti zeri, quindi* $g \equiv 0$, *in particolare si annulla anche in* $z = 0$, *cioè* f *si annulla anche nell'origine, che non appartiene a* $W - V$, *in contraddizione con l'ipotesi.*

Vogliamo poter considerare la più piccola varietà contenente un sottoinsieme qualsiasi S di K^n, perciò definiremo la chiusura di Zariski di S. Avremo bisogno di alcune considerazioni preliminari.

Sia che $S \in K^n$ risulti o meno una varietà affine, l'insieme

$$\mathbf{I}(S) = \{f \in K[x_1, ..., x_n] \mid f(a) = 0, \ \forall \ a \in S\}$$

è un ideale radicale di $K[x_1, ..., x_n]$.

La dimostrazione ricalca quella del Lemma 3 del Capitolo 1.

Proposizione 7. *Se $S \subset K^n$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{I}(S))$ è una varietà, in particolare è la più piccola varietà affine contenente S.*

Dimostrazione. Dalla corrispondenza fra ideali e varietà $\mathbf{V}(\mathbf{I}(S))$ è una varietà. Vogliamo far vedere che se $W \subset K^n$ è una varietà contenente S, allora $\mathbf{V}(\mathbf{I}(S)) \subset W$. Si ha $W \supset S \Rightarrow \mathbf{I}(W) \subset \mathbf{I}(S)$, perché $\mathbf{I}$ ribalta le inclusioni. Ma allora $\mathbf{V}(\mathbf{I}(W)) \supset \mathbf{V}(\mathbf{I}(S))$, perché anche $\mathbf{V}$ ribalta le inclusioni. Infine W è una varietà, quindi $\mathbf{V}(\mathbf{I}(W)) = W$, il che implica la tesi. □

Definizione 10. *La **chiusura di Zariski** di un sottoinsieme dello spazio affine è la più piccola varietà affine contenente il sottoinsieme. Se $S \subset K^n$, la chiusura di Zariski di S si denota con $\overline{S}$ ed equivale a $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{I}(S))$.*

Osserviamo che il termine chiusura di Zariski deriva dal fatto che si può definire in K una topologia (detta topologia di Zariski) prendendo come chiusi le varietà algebriche. In questo caso $\overline{S}$ è il più piccolo chiuso contenente S nella topologia di Zariski. Un approfondimento sull'argomento si può trovare in [H].

Nell'esempio 10 la chiusura di Zariski di $W - V$ è tutto l'asse z.

Definizione 11. *Se $I, J \subset K[x_1, ..., x_n]$ sono ideali, allora $I : J$ è definito come l'insieme*

$$\{f \in K[x_1, ..., x_n] \mid fg \in I, \ \forall \ g \in J\}$$

*ed è detto **ideale quoziente** di I su J.*

Proposizione 8. *Se I, J sono ideali di $K[x_1, ..., x_n]$, allora $I : J$ è un ideale di $K[x_1, ..., x_n]$ e $I : J$ contiene I. Inoltre se I è radicale, allora $I : J$ è radicale.*

Dimostrazione. Per provare che $I : J \supset I$, notiamo che, siccome I è un ideale, se $f \in I$, allora $fg \in I$ per ogni $g \in K[x_1, ..., x_n]$ e quindi $fg \in I$ per ogni $g \in J$.

Vediamo ora che $I : J$ è un ideale, per prima cosa notiamo che $0 \in I : J$ perché $0 \in I$. Siano $f_1, f_2 \in I : J$, allora $f_1 g$ e $f_2 g$ stanno in I per ogni $g \in J$. Dato che I è un ideale $(f_1 + f_2)g = f_1 g + f_2 g \in I$ per ogni $g \in J$, cioè $f_1 + f_2 \in I : J$. Se $f \in I : J$ e $h \in K[x_1, ..., x_n]$, allora $fg \in I$ e, dato che I è un ideale, $hgf \in I$ per ogni $g \in J$, questo significa che $hf \in I : J$.

L'ultima parte del teorema è banale, infatti se $f^m \in I : J$, allora $f^m g \in I$ per ogni $g \in J$, ma, J è un ideale, allora $g^m \in J$ e $(f^m g)g^{m-1} \in I$ perché I è un ideale, quindi $f^m g^m \in I$ per ogni $g^m \in J$. Siccome I è radicale, $fg \in I$ per ogni $g \in J$, cioè $f \in I : J$. □

Per esempio, in $K[x, y, z]$, abbiamo:

$$\begin{aligned}\langle xz, yz\rangle : \langle z\rangle &= \{f \in K[x, y, z] \mid f \cdot z \in \langle xz, yz\rangle\}\\ &= \{f \in K[x, y, z] \mid f \cdot z = Axz + Byz\}\\ &= \{f \in K[x, y, z] \mid f = Ax + By\}\\ &= \langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

Teorema 9. *Siano $I, J \subset K[x_1, ..., x_n]$ ideali. Allora*

$$\boldsymbol{V}(I : J) \supset \overline{\boldsymbol{V}(I) - \boldsymbol{V}(J)}.$$

Se, inoltre, K è algebricamente chiuso e I è radicale, allora

$$\boldsymbol{V}(I : J) = \overline{\boldsymbol{V}(I) - \boldsymbol{V}(J)}.$$

Dimostrazione. Vediamo che $I : J \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}(I) - \mathbf{V}(J))$. Sia $f \in I : J$ e $x \in \mathbf{V}(I) - \mathbf{V}(J)$, allora $fg \in I$ per ogni $g \in J$. Dato che $x \in \mathbf{V}(I)$, abbiamo che $f(x)g(x) = 0$ per ogni $g \in J$; inoltre, siccome $x \notin \mathbf{V}(J)$, esiste un $g \in J$ tale che $g(x) \neq 0$, ma allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{V}(I) - \mathbf{V}(J)$. Dunque $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(I) - \mathbf{V}(J))$, il che prova l'inclusione. Sfruttando il fatto che $\mathbf{V}$ ribalta le inclusioni, $\mathbf{V}(I : J) \supset \mathbf{V}(\mathbf{I}(\mathbf{V}(I) - \mathbf{V}(J)))$, che conclude la dimostrazione della prima parte del teorema.

Supponiamo ora che K sia algebricamente chiuso e che $I = \sqrt{I}$. Sia $x \in \mathbf{V}(I : J)$, si ha, come nel ragionamento precedente, che se $hg \in I$ per ogni $g \in J$, allora $h(x) = 0$. Sia ora $h \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(I) - \mathbf{V}(J))$; se $g \in J$, allora hg si annulla su $\mathbf{V}$(I), perché h si annulla su $\mathbf{V}(I) - \mathbf{V}(J)$ e g su $\mathbf{V}(J)$. Così dal Nullstellensatz si ha $hg \in \sqrt{I}$, ma per ipotesi $I = \sqrt{I}$, quindi $hg \in I$ per ogni $g \in J$. Allora, come già osservato, $h(x) = 0$. In questo modo $x \in \mathbf{V}(\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)-\mathbf{V}(J)))$. Questo significa che $\mathbf{V}(I : J) \subset \mathbf{V}(\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)-\mathbf{V}(J)))$. □

Corollario 2. *Siano V e W varietà in K^n. Allora*

$$\boldsymbol{I}(V) : \boldsymbol{I}(W) = \boldsymbol{I}(V - W).$$

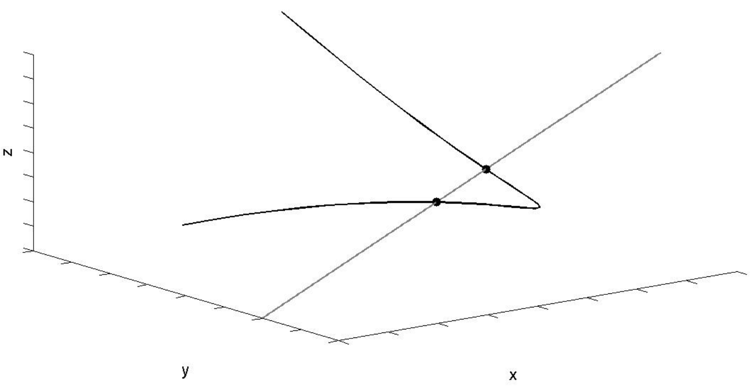
Dimostrazione. Nel teorema precedente, abbiamo mostrato che $I : J \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}(I) - \mathbf{V}(J))$. Se lo applichiamo a $I = \mathbf{I}(V)$ e $J = \mathbf{I}(W)$, si ottiene $\mathbf{I}(V) : \mathbf{I}(W) \subset \mathbf{I}(V - W)$. L'inclusione opposta si ottiene applicando la Proposizione 8, ovvero $\mathbf{I}(V) : \mathbf{I}(W) \supset \mathbf{I}(V)$, ma in modo ovvio $\mathbf{I}(V) \supset \mathbf{I}(V - W)$, concludiamo che $\mathbf{I}(V) : \mathbf{I}(W) \supset \mathbf{I}(V - W)$. □

Esempio 11. *Riprendiamo gli ideali dell'esempio 10, $I = \langle xz, yz\rangle$ e $J = \langle z\rangle$, e ne facciamo il quoziente, come abbiamo visto si ottiene $\langle x, y\rangle$. In termini di varietà, $\boldsymbol{V}(I)$ è il piano $z = 0$ unito all'asse z, e $\boldsymbol{V}(J)$ è ancora il piano $z = 0$. Allora, facendone la differenza e successivamente la chiusura di Zariski, la varietà ottenuta è l'asse z, che è proprio la varietà associata a $\langle x, y\rangle$.*

Esempio 12. *Prendiamo come esempio la cubica gobba $V = \boldsymbol{V}(y - x^2, z - x^3)$ e una retta $W = \boldsymbol{V}(z - x, y - 1)$. La differenza $V - W$ è la cubica gobba meno i due punti di intersezione tra la cubica e la retta, $P = (1, 1, 1)$ e $Q = (-1, 1, -1)$, quindi $V - W = V - \{P, Q\}$. La chiusura di Zariski di $V - W$ è la più piccola varietà che contiene $V - W$, quindi è esattamente la cubica gobba, V.*

Passando agli ideali, chiamiamo $I = \langle y - x^2, z - x^3\rangle$ l'ideale associato alla cubica gobba, e $J = \langle z - x, y - 1\rangle$ l'ideale associato alla retta. Vediamo che $I : J = I$, cioè il quoziente $I : J$ è l'ideale associato alla chiusura di Zariski della differenza delle due varietà, che è la cubica gobba.

Sappiamo $I : J = \{f \in K[x, y, z] \mid fg \in I;\ \forall\, g \in J\}$, e ogni $g \in J$ si può scrivere $g = A(z - x) + B(y - 1)$, con $A, B \in K[x, y, z]$. Quindi $I : J = \{f \in K[x, y, z] \mid f \cdot [A(z - x) + B(y - 1)] \in I\}$; usiamo la parametrizzazione della cubica gobba (t, t^2, t^3), e abbiamo $I : J = \{f \in K[t] \mid f(t, t^2, t^3) \cdot [A(t, t^2, t^3)(t^3 - t) + B(t, t^2, t^3)(t^2 - 1)] = 0,\ \forall\, t \in \mathbb{R}\}$. $A(t, t^2, t^3) \neq 0$ e $B(t, t^2, t^3) \neq 0$ poiché A e B sono polinomi arbitrari, quindi deve essere $f(t, t^2, t^3) = 0$, e $I : J = \{f \in K[t] \mid f(t, t^2, t^3) = 0, \forall\, t \in \mathbb{R}\} = I$.



2.7 Varietà irriducibili e ideali primi

Abbiamo già visto che l'unione di due varietà è ancora una varietà. Ad esempio, nell'esempio 9 della Sezione 2.5, abbiamo parlato di $\mathbf{V}(xy, xz)$ che è l'unione di un piano e una retta. Intuitivamente è naturale pensare a piani e rette come oggetti più semplici rispetto a $\mathbf{V}(xy, xz)$, nell'ambito delle varietà. L'intuizione ci dice anche che rette e piani sono in qualche modo non scomponibili in unioni finite di varietà più semplici. Andiamo a formalizzare questi concetti.

Definizione 12. *Una varietà affine $V \subset K^n$ si dice **irriducibile** se ogni volta che V compare nella forma $V = V_1 \cup V_2$, dove V_1, V_2 sono varietà affini, allora $V_1 = V$ o $V_2 = V$.*

Così $\mathbf{V}(xz, yz)$ non è una varietà irriducibile. Ancora non è completamente chiaro capire quando una varietà è o meno irriducibile; se la definizione corrispondesse effettivamente alla nostra intuizione geometrica, un punto, una linea e un piano dovrebbero essere irriducibili. Per lo stesso motivo la cubica gobba $\mathbf{V}(y - x^2, z - x^3)$ in $\mathbb{R}^3$ sembra essere irriducibile. Il problema che ci poniamo ora è quello di provare tali affermazioni. L'approccio che utilizzeremo è di tipo algebrico, infatti caratterizzeremo gli ideali corrispondenti alle varietà irriducibili.

Definizione 13. *Un ideale $I \subset K[x_1, ..., x_n]$ si dice **primo** se presi $f, g \in K[x_1, ..., x_n]$ tali che $fg \in I$, allora $f \in I$ o $g \in I$.*

Notiamo che un ideale primo I è radicale. Infatti, consideriamo $f^m \in I$, possiamo scrivere $f \cdot f^{m-1} \in I$, per definizione di ideale primo, $f \in I$ o $f^{m-1} \in I$. Il primo caso implica che I è radicale, nel secondo caso possiamo iterare il procedimento fino ad ottenere $f^2 \in I \Rightarrow f \in I$, riottenendo I radicale.

Proposizione 9. *Sia $V \subset K^n$ una varietà affine. Allora V è irriducibile se e solo se $\mathbf{I}(V)$ è un ideale primo.*

Dimostrazione. Innanzitutto, assumiamo che V sia irriducibile e siano $fg \in \mathbf{I}(V)$. Definiamo le varietà affini $V_1 = V \cap \mathbf{V}(f)$ e $V_2 = V \cap \mathbf{V}(g)$. Allora $fg \in \mathbf{I}(V)$ implica facilmente che $V = V_1 \cup V_2$, ma dal momento che V è irriducibile, abbiamo $V = V_1$ o $V = V_2$. Se è vera la prima uguaglianza, si ha $V = V \cap \mathbf{V}(f)$; ciò implica che f si annulla su V, ovvero $f \in \mathbf{I}(V)$. Così $\mathbf{I}(V)$ risulta primo.

Poi, assumiamo che $\mathbf{I}(V)$ sia primo e sia $V = V_1 \cup V_2$. Supponiamo che $V \neq V_1$, vogliamo allora dimostrare che $\mathbf{I}(V) = \mathbf{I}(V_2)$. Per provarlo, notiamo che $\mathbf{I}(V) \subset \mathbf{I}(V_2)$ poiché $V_2 \subset V$. Per l'inclusione opposta, osserviamo che $\mathbf{I}(V) \subsetneq \mathbf{I}(V_1)$, perché $V_1 \subsetneq V$. Allora possiamo prendere $f \in \mathbf{I}(V_1) - \mathbf{I}(V)$, consideriamo anche $g \in \mathbf{I}(V_2)$. Dato che $V = V_1 \cup V_2$, segue che fg si annulla su V, ovvero $fg \in \mathbf{I}(V)$. Ma $\mathbf{I}(V)$ è primo, così o f o g giace in $\mathbf{I}(V)$. Sappiamo che $f \notin \mathbf{I}(V)$, allora $g \in \mathbf{I}(V)$, questo prova $\mathbf{I}(V) = \mathbf{I}(V_2)$. Dall'iniettività di $\mathbf{I}$ segue che $V = V_2$. Dunque V è irriducibile. $\square$

Il prossimo corollario, la cui dimostrazione deriva immediatamente dalla precedente Proposizione, va ad arricchire la nostra conoscenza della corrispondenza ideali-varietà.

Corollario 3. *Se K è un campo algebricamente chiuso, le funzioni $\boldsymbol{I}$ e $\boldsymbol{V}$ inducono una corrispondenza iniettiva fra varietà irriducibili di K^n e ideali primi di $K[x_1, ..., x_n]$.*

Esempio 13. *Proviamo che l'ideale $\boldsymbol{I}(V)$ della cubica gobba è primo.*

Supponiamo che $fg \in \boldsymbol{I}(V)$. Sappiamo già che una parametrizzazione della curva in questione è data da (t, t^2, t^3), allora per ogni t risulta $f(t, t^2, t^3)g(t, t^2, t^3) = 0$. Questo implica che $f(t, t^2, t^3)$ o $g(t, t^2, t^3)$ è il polinomio nullo, in questo modo f o g si annulla su V. Quindi f o g sta in $\boldsymbol{I}(V)$, il che prova che $\boldsymbol{I}(V)$ è un ideale primo. Applicando la Proposizione 9, si ha che la cubica gobba è una varietà irriducibile di $\mathbb{R}^3$.

Allo stesso modo si può provare che ogni retta è irriducibile.

In realtà questo esempio è un caso particolare di un risultato più generale: ogni varietà affine di K^n (dove K è un campo infinito) che ammette una parametrizzazione polinomiale o razionale è irriducibile. Si può trovare una dimostrazione di ciò in [CLO].

Nella corrispondenza che stiamo studiando fra ideali e varietà, consideriamo come ideali primi quelli massimali e come varietà irriducibili i punti; vedremo che in un campo algebricamente chiuso esiste una corrispondenza biunivoca fra essi.

Definizione 14. *Un ideale $I \subset K[x_1, ..., x_n]$ è* ***massimale*** *se $I \neq K[x_1, ..., x_n]$ e ogni ideale J che contiene I è tale che $J = I$ o $J = K[x_1, ..., x_n]$.*

Proposizione 10. *Se K è un campo, un ideale $I \subset K[x_1, ..., x_n]$ della forma*

$$I = \langle x_1 - a_1, ..., x_n - a_n \rangle,$$

dove $a_1, ..., a_n \in K$, è massimale.

Dimostrazione. Supponiamo che $J \supsetneq I$ sia un ideale, allora deve esistere un $f \in J$, tale che $f \notin I$. Possiamo usare l'algoritmo di divisione per scrivere f come $A_1(x_1 - a_1) + \cdots + A_n(x_n - a_n) + b$, per un $b \in K$. Dato che $A_1(x_1 - a_1) + \cdots + A_n(x_n - a_n) \in I$ e $f \notin I$, abbiamo $b \neq 0$. Comunque, sapendo che $f \in J$ e $A_1(x_1 - a_1) + \cdots + A_n(x_n - a_n) \in I \subset J$, vale

$$b = f - (A_1(x_1 - a_1) + \cdots + A_n(x_n - a_n)) \in J.$$

e, poiché $b \neq 0$, esiste l'inverso di b e $(1/b) \cdot b = 1 \in J$. Quindi $J = K[x_1, ..., x_n]$. $\square$

Proposizione 11. *Se K è un campo, un ideale massimale in $K[x_1, ..., x_n]$ è primo.*

Dimostrazione. Supponiamo che I sia un ideale proprio ma non primo e sia $fg \in I$, dove $f \notin I$ e $g \notin I$. Consideriamo l'ideale $\langle f \rangle + I$, questo ideale contiene strettamente I perché $f \notin I$. Inoltre, se avessimo $\langle f \rangle + I = K[x_1, ..., x_n]$, allora $1 = cf + h$, per un polinomio c e un $h \in I$. Moltiplicando per g, avremmo $g = cfg + hg \in I$, che contraddice la nostra scelta di g. Quindi $\langle f \rangle + I$ è un ideale proprio che contiene I, questo implica che I non è massimale. Siamo così in contraddizione con l'ipotesi, allora I è primo. $\square$

Osserviamo che

$$\mathbf{V}(x_1 - a_1, ..., x_n - a_n) = \{(a_1, ...a_n)\}.$$

Inoltre,

$$\mathbf{I}(\{(a_1, ..., a_n)\}) = \langle x_1 - a_1, ..., x_n - a_n \rangle,$$

infatti se $f \in \mathbf{I}(\{(a_1, ..., a_n)\})$, allora $f(a_1, ..., a_n) = 0$, quindi possiamo fattorizzarlo come $f = f_1(x_1 - a_1) + \cdots + f_n(x_n - a_n)$, per opportuni polinomi $f_1, ..., f_n$. Dunque, $f \in \langle x_1 - a_1, ..., x_n - a_n \rangle$, ovvero $\mathbf{I}(\{(a_1, ..., a_n)\}) \subset \langle x_1 - a_1, ..., x_n - a_n \rangle$. Viceversa, se $f \in \langle x_1 - a_1, ..., x_n - a_n \rangle$, allora $f = f_1(x_1 - a_1) + \cdots + f_n(x_n - a_n)$; sostituendo $(a_1, ..., a_n)$ a $(x_1, ...x_n)$ si ottiene $f(a_1, ..., a_n) = 0$, perciò $f \in \mathbf{I}(\{(a_1, ..., a_n)\})$. Ne deduciamo che $\langle x_1 - a_1, ..., x_n - a_n \rangle \subset \mathbf{I}(\{(a_1, ..., a_n)\})$.

Quindi ogni punto $(a_1, ..., a_n) \in K^n$ corrisponde all'ideale massimale $\langle x_1 - a_1, ..., x_n - a_n \rangle$ di $K[x_1, ..., x_n]$. Il viceversa non vale se K non è algebricamente chiuso. Per esempio in $\mathbb{R}[x]$ è noto che l'ideale $\langle x^2 + 1 \rangle$ è massimale, però $\mathbf{V}(x^2 + 1) = \emptyset$, infatti non esiste alcun punto in $\mathbb{R}$ che annulla $x^2 + 1$.

Teorema 10. *Sia K un campo algebricamente chiuso, allora ogni ideale massimale di $K[x_1, ..., x_n]$ è della forma $\langle x_1 - a_1, ..., x_n - a_n \rangle$, per qualche $a_1, ..., a_n \in K$.*

Dimostrazione. Cosideriamo $I \subset K[x_1, ..., x_n]$ ideale massiamale. Poiché $I \neq K[x_1, ..., x_n]$, abbiamo $\mathbf{V}(I) \neq \emptyset$, per il Nullstellensatz debole. Quindi esiste almeno un punto $(a_1, ..., a_n) \in \mathbf{V}(I)$. Passando agli ideali si ha che $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) \subset \mathbf{I}(\{(a_1, ..., a_n)\})$. Ma, per il Nullstellensatz forte, $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I}$ e, poiché I è primo, $\sqrt{I} = I$. Quindi possiamo scrivere $I \subset \mathbf{I}(\{(a_1, ..., a_n)\})$. Abbiamo già osservato che $\mathbf{I}(\{(a_1, ..., a_n)\}) = \langle x_1 - a_1, ..., x_n - a_n \rangle$, perciò l'inclusione diventa $I \subset \langle x_1 - a_1, ..., x_n - a_n \rangle \subsetneq K[x_1, ..., x_n]$. Dato che I è massimale segue che $I = \langle x_1 - a_1, ..., x_n - a_n \rangle$. $\square$

Corollario 4. *Se K è un campo algebricamente chiuso, allora c'è una corrispondenza biettiva tra i punti di K^n e gli ideali massimali di $K[x_1, ..., x_n]$.*

2.8 Componenti irriducibili di una varietà

In questa sezione vedremo che ogni varietà può essere scritta come unione di varietà irriducibili, per dimostrarlo utilizzeremo la seguente proposizione di cui diamo solo l'enunciato (una dimostrazione completa si può trovare in [CLO]).

Proposizione 12 (**Condizione della catena discendente**). *Ogni catena discendente di varietà $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \cdots$ in K^n è stazionaria, ovvero esiste un intero positivo N tale che $V_N = V_{N+1} = \cdots$.*

Teorema 11. *Sia $V \subset K^n$ una varietà affine. Allora V può essere scritta come unione finita*
$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_m,$$
dove ogni V_i è una varietà irriducibile.

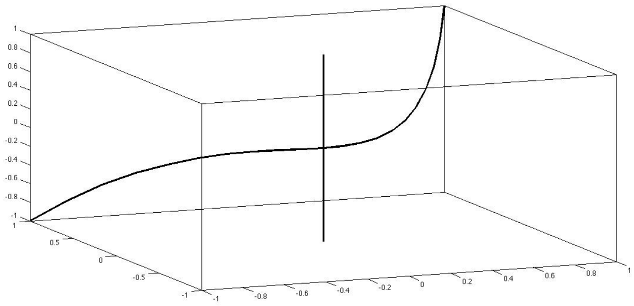
Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che V sia una varietà che non può essere scritta come unione finita di irriducibili. Allora V non è irriducibile, cioè $V = V_1 \cup V_1'$, con $V \neq V_1$ e $V \neq V_1'$. Inoltre almeno una fra V_1 e V_1' non può essere scritta come unione di irriducibili, altrimenti anche V lo sarebbe. Assumiamo che V_1 non sia unione di irriducibili. Ripetendo l'argomentazione già data per V, possiamo scrivere $V_1 = V_2 \cup V_2'$, con $V_1 \neq V_2$ e $V_1 \neq V_2'$ e V_2 che non è unione di irriducibili. Continuando in questo modo, si otterrà la successione infinita di varietà $V \supset V_1 \supset V_2 \supset \cdots$, dove $V \neq V_1 \neq V_2 \neq \cdots$, ma questo è un assurdo, per la Proposizione 12. □

Abbiamo visto nell'esempio 9 che la varietà $\mathbf{V}(xy, xz)$ è l'unione di una retta (l'asse x) e un piano ($x = 0$), che sono varietà irriducibili. Un esempio più significativo di decomposizione di una varietà in irriducibili è il seguente.

Esempio 14. *Sia $\mathbf{V}(xy - x^3, xz - x^4, y^2 - x^2y, yz - x^3y)$. Notiamo che $\langle xy - x^3, xz - x^4, y^2 - x^2y, yz - x^3y\rangle$ può essere scritto come prodotto degli ideali $\langle x, y\rangle$ e $\langle y - x^2, z - x^3\rangle$. Abbiamo già visto che sono ideali radicali, e corrispondono rispettivamente all'asse z e alla cubica gobba. Per il Teorema 7, alla varietà del prodotto corrisponde l'unione delle varietà, cioè $\mathbf{V}(xy - x^3, xz - x^4, y^2 - x^2y, yz - x^3y) = \mathbf{V}(x, y) \cup \mathbf{V}(y - x^2, z - x^3)$. Abbiamo così ottenuto che la varietà di partenza è unione di varietà irriducibili.*

Introduciamo un nuovo tipo di decomposizione, in modo da evitare casi in cui una componente irriducibile compare più di una volta, oppure in cui una è contenuta in un'altra.

Definizione 15. *Sia $V \subset K^n$ una varietà. Una decomposizione*
$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_m,$$
dove ogni V_i è una varietà irriducibile, si dice ***decomposizione minimale*** *se $V_i \not\subset V_j$ per $i \neq j$.*



Teorema 12. *Se $V \subset K^n$ è una varietà, allora V ammette una decomposizione minimale $V = V_1 \cup \cdots \cup V_m$. Inoltre, tale decomposizione è unica a meno dell'ordine delle componenti $V_1, ..., V_m$.*

Dimostrazione. Dal Teorema 11, si ha $V = V_1 \cup \cdots \cup V_m$ dove ogni V_i è irriducibile. Se $V_i \subset V_j$ per qualche $i \neq j$, possiamo evitare di scrivere V_i nella decomposizione, V risulterà essere l'unione delle restanti V_j. Ripetendo questo procedimento si arriva a una decomposizione minimale di V.

Per mostrare l'unicità, supponiamo che $V = V_1' \cup \cdots \cup V_l'$ sia un'altra decomposizione minimale. Allora, per ogni V_i nella prima decomposizione, si ha

$$V_i = V_i \cap V = V_i \cap (V_1' \cup \cdots \cup V_l') = (V_i \cap V_1') \cup \cdots \cup (V_i \cap V_l').$$

Dal momento che V_i è irriducibile, $V_i = V_i \cap V_j'$ per qualche j, cioè $V_i \subset V_j'$. Applicando la stessa argomentazione a V_j' (usando la prima decomposizione di V) si vede che $V_j' \subset V_k$ per qualche k. Si ottiene così $V_i \subset V_j' \subset V_k$. Per la minimalità, $i = k$ e segue che $V_i = V_j'$. Dunque ogni V_i compare in $V = V_1' \cup \cdots \cup V_l'$, il che implica che $m \leq l$. Analogamente si vede che $l \leq m$, quindi $m = l$. Abbiamo così provato che le componenti V_i' non sono altro che le V_i, eventualmente permutate. $\square$

I teoremi appena enunciati possono essere espressi in termini puramente algebrici, usando la corrispondenza tra ideali radicali e varietà.

Teorema 13. *Se K è un campo algebricamente chiuso, allora ogni ideale radicale in $K[x_1, ..., x_n]$ può essere scritto in modo unico come intersezione finita di ideali primi, $I = P_1 \cap \cdots \cap P_r$, dove $P_i \not\subset P_j$ per $i \neq j$. Chiamiamo tale rappresentazione dell'ideale radicale **decomposizione minimale**, come nel caso delle varietà.*

Dimostrazione. Questo teorema segue immediatamente dai teoremi precedenti e dal fatto che la corrispondenza inverte le inclusioni. $\square$

Teorema 14. *Se K è algebricamente chiuso e I è un ideale radicale proprio tale che*
$$I = \bigcap_{i=1}^{r} P_i$$
è la sua decomposizione minimale, allora i P_i sono precisamente gli ideali primi propri appartenenti all'insieme $\{I : \langle f \rangle \mid f \in K[x_1, ..., x_n]\}$.

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che, siccome I è un ideale proprio, anche ogni P_i è un ideale proprio (a causa della minimalità della decomposizione).

Per ogni $f \in K[x_1, ..., x_n]$, si ha
$$I : \langle f \rangle = \left(\bigcap_{i=1}^{r} P_i \right) : \langle f \rangle = \bigcap_{i=1}^{r} (P_i : \langle f \rangle), \tag{2.2}$$
dove la seconda uguaglianza segue dalla definizione di ideale quoziente.

Dimostriamo che se $P = \bigcap_{j=1}^{n} I_j$ e P è primo, allora $P = I_j$ per un certo j. Siano $f \in I_h$ e $g \in I_k$, allora $fg \in I_h \cap I_k \subset P$; siccome P è primo, $f \in P$ o $g \in P$, quindi $I_h \subset P$ o $I_k \subset P$, in particolare abbiamo dimostrato che esiste un j per cui $I_j \subset P$. D'altra parte, dato che $P \subset \bigcap_{j=1}^{n} I_j$, si ha $P \subset I_j$ per ogni j.

Supponiamo ora che $I : \langle f \rangle$ sia un ideale primo proprio. Se applichiamo quanto appena dimostrato a 2.2, allora si ottiene $I : \langle f \rangle = P_i : \langle f \rangle$, per qualche i.

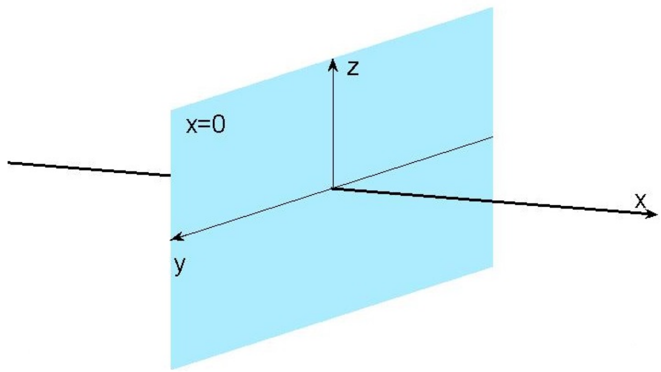
Notiamo poi che per ogni ideale primo P vale: se $f \in P \Rightarrow P : \langle f \rangle = \langle 1 \rangle$; se $f \notin P \Rightarrow P : \langle f \rangle = P$. Infatti,
$$\begin{aligned} P : \langle f \rangle &= \{h \in K[x_1, ..., x_n] \mid hg \in P, \ \forall\ g \in \langle f \rangle\} \\ &= \{h \in K[x_1, ..., x_n] \mid hlf \in P, \ \forall\ l \in K[x_1, ..., x_n]\} \\ &= \{q \in K[x_1, ..., x_n] \mid qf \in P\}. \end{aligned}$$
Se $f \in P$, $P : \langle f \rangle = K[x_1, ..., x_n]$. Se $f \notin P$, allora $q \in P$, perché P è primo, e quindi $P : \langle f \rangle = P$.

Quindi nel nostro caso, $P_i : \langle f \rangle = P_i$ o $\langle 1 \rangle$. Segue che $I : \langle f \rangle = P_i : \langle f \rangle = P_i$.

Per vedere che ogni P_i si presenta in questa forma, fissiamo i e prendiamo $f \in \left(\bigcap_{j \neq i} P_j \right) - P_i$; tale f esiste perché $\bigcap_{i=1}^{r} P_i$ è minimale. Allora $P_i : \langle f \rangle = P_i$ e $P_j : \langle f \rangle = \langle 1 \rangle$ per $j \neq i$. Se combiniamo questo con 2.2, risulta facilmente che $I : \langle f \rangle = P_i$. □

Diamo un esempio di cosa succede traducendo il teorema appena dimostrato in termini di varietà.

Esempio 15. *Sappiamo che l'intersezione di ideali primi corrisponde all'unione di varietà irriducibili, perciò consideriamo in* $\mathbb{R}^3$ *la varietà* $V = \boldsymbol{V}(xy, xz)$, *che sappiamo essere l'unione del piano* $V_1 = \boldsymbol{V}(x)$ *e la retta* $V_2 = \boldsymbol{V}(y, z)$. *Per un qualsiasi polinomio* f, *l'ideale della forma* $\langle xy, xz\rangle : \langle f\rangle$ *corrisponde alla varietà* $\overline{V - \boldsymbol{V}(f)}$. *Nel nostro caso* $V_1 = \overline{V - \boldsymbol{V}(f)}$ *con* $f = 0$ *equazione di un piano passante per* V_2; $V_2 = \overline{V - V_1}$.



2.9 Riepilogo

Riassumiamo in una tabella le relazioni fra oggetti algebrici, gli ideali radicali, e quelli geometrici, le varietà affini, studiate finora. Assumiamo che il campo su cui lavoriamo sia algebricamente chiuso e che gli ideali in questione siano radicali.

ALGEBRA		**GEOMETRIA**
ideali radicali		varietà affini
I	$\longrightarrow$	$\mathbf{V}(I)$
$\mathbf{I}(V)$	$\longleftarrow$	V
somma di ideali		intersezione di varietà
$I + J$	$\longrightarrow$	$\mathbf{V}(I) \cap \mathbf{V}(J)$
$\sqrt{\mathbf{I}(V) + \mathbf{I}(W)}$	$\longleftarrow$	$V \cap W$
prodotto di ideali		unione di varietà
$I \cdot J$	$\longrightarrow$	$\mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$
$\sqrt{\mathbf{I}(V) \cdot \mathbf{I}(W)}$	$\longleftarrow$	$V \cup W$
intersezione di ideali		unione di varietà
$I \cap J$	$\longrightarrow$	$\mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$
$\mathbf{I}(V) \cap \mathbf{I}(W)$	$\longleftarrow$	$V \cup W$
quoziente di ideali		differenza di varietà
$I : J$	$\longrightarrow$	$\overline{\mathbf{V}(I) - \mathbf{V}(J)}$
$\mathbf{I}(V) : \mathbf{I}(W)$	$\longleftarrow$	$\overline{V - W}$
ideali primi	$\longleftrightarrow$	varietà irriducibili
ideali massimali	$\longleftrightarrow$	punti dello spazio affine

Capitolo 3

Criterio jacobiano per le singolarità

3.1 Dimensione di una varietà

L'argomento centrale di questa sezione è la dimensione di una varietà algebrica. Tale nozione è facilmente intuibile: sappiamo che un'equazione in $\mathbb{R}^2$ dà una curva, cioè un oggetto di dimensione 1. Analogamente, in $\mathbb{R}^3$, un'equazione dà una superficie, che ha dimensione 2. In entrambi i casi la dimensione cala di 1 rispetto a quella dello spazio ambiente. Consideriamo ora la cubica gobba, $\mathbf{V}(y - x^2, z - x^3)$; essa è definita da due equazioni e così la dimensione cala di 2 rispetto allo spazio in cui è contenuta. Questo ragionamento lascia intuire che ogni equazione comporta un calo di dimensione di 1. Così immaginiamo che, partendo da $\mathbb{R}^4$, una varietà definita da due equazioni sia una superficie. Sfortunatamente la nozione di dimensione è più sottile di così. Per vedere ciò, consideriamo la varietà $\mathbf{V}(xz, yz)$; come visto nell'Esempio 8 del Capitolo 2, essa è l'unione del piano $z = 0$ e dell'asse z. Dunque tale varietà è formata da due pezzi di diverse dimensioni, secondo la definizione intuitiva usata finora. Qual è dunque la dimensione di $\mathbf{V}(xz, yz)$?

Per rispondere a questa domanda e per dare una definizione rigorosa di dimensione di una varietà sono necessari alcuni strumenti algebrici e geometrici non banali. In questa tesi la dimensione sarà vista da tre punti di vista differenti, che si dimostrano essere equivalenti, talvolta con l'ipotesi aggiuntiva di utilizzare varietà irriducibili.

Per comodità d'ora in avanti parleremo di varietà in $\mathbb{C}^n$. Assumiamo inoltre che $\mathbb{C}^n$ abbia dimensione n in ogni suo punto e così anche un aperto di $\mathbb{C}^n$, o un qualsiasi oggetto omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{C}^n$.

Sia $V \subset \mathbb{C}^n$ e sia P un punto di V. Denotiamo con $rg(J(V)_P)$ il numero di righe linearmente indipendenti della matrice Jacobiana dei polinomi di $\mathbf{I}(V)$ valutata in P, $(\partial p_\alpha/\partial X_1, ..., \partial p_\alpha/\partial X_n)_P$; il numero di righe della Jacobiana è infinito, poiché infinito è il numero dei polinomi di $\mathbf{I}(V) \subset \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$. Però è utile osservare che il rango citato è uguale al rango di ogni sottomatrice $(m \times n)$, dove $\{p_1, ..., p_m\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{I}(V)$.

La prima definizione di dimensione di una varietà è di tipo geometrico ed è basata sulla nozione di punto di varietà analitica locale. Diremo che un punto Q in V è un punto di varietà analitica locale se esiste un intorno di esso in cui V può essere rappresentata come il grafico di una funzione analitica.

Definizione 16. *Sia $V \subset \mathbb{C}^n$ una varietà non vuota. La **dimensione di** V **in un suo punto** P, $dim_P V$, è $max_Q(dim_Q V)$ (o, equivalentemente, $n - min_Q(rg(J(V)_Q))$), dove Q varia nell'insieme dei punti di varietà analitica locale di V arbitrariamente vicini a P, e dove $dim_Q V$ è la dimensione di un V-intorno di Q. La **dimensione** di V, $dim\ V$, è $max_{P \in V}(dim_P V)$. Per convenzione, $dim\ \emptyset = -1$.*

Teorema 15. *Sia $V \subset \mathbb{C}^n$ una varietà, allora ogni punto $P \in V$ ammette una dimensione, e così anche V.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che ci sono punti di varietà analitiche locali vicino (in modo arbitrario) ad ogni $P \in V$. Sia r il rango massimo di $J(V)_Q$, al variare di Q in un arbitrario insieme di punti vicini a P. Sia Q_0 un punto tale che $rg(J(V)_{Q_0}) = r$. Tale rango non può crescere se ci si sposta da Q_0 di poco; non può nemmeno decrescere, o meglio può decrescere ma solo in un chiuso contenuto nell'intorno aperto di Q_0 in questione. Dunque il rango rimane costante vicino a P. Questo per il teorema seguente dà la conclusione. □

Teorema 16. *Supponiamo:*

1. *$f_1, ..., f_q$ funzioni a valori complessi, analitiche in un intorno di P*
2. *$f_1(P) = ... = f_q(P) = 0$*
3. *la matrice Jacobiana $q \times n$*

$$J(f)_x = J(f_1, ..., f_q)_x = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_q/\partial x_1 & \cdots & \partial f_q/\partial x_n \end{pmatrix}$$

abbia rango costante r in un opportuno intorno aperto di P in $\mathbb{C}^n$.

Allora esistono sottospazi $\mathbb{C}^{n-r}$ e $\mathbb{C}^r$, con $\mathbb{C}^{n-r} \cap \mathbb{C}^r = \{P\}$, $U^{n-r} \subset \mathbb{C}^{n-r}$ e $U^r \subset \mathbb{C}^r$ intorni di P, e un'unica mappa analitica

$$\phi = (\phi_1, ..., \phi_r) : U^{n-r} \longrightarrow U^r$$

tale che, in $U^{n-r} \times U^r$, il grafico di ϕ coincide con l'insieme degli zeri di $\langle f_1, ..., f_q \rangle$.

Non è obiettivo di questa tesi la dimostrazione del precedente teorema, ma si può trovare una prova in [K].

A partire dalla definizione di dimensione di una varietà in $\mathbb{C}^n$, si può definire anche la dimensione di una varietà proiettiva.

Teorema 17. *Se V è una varietà irriducibile di $\mathbb{C}^n$, allora ogni punto di V ha la stessa dimensione.*

Dimostrazione. Sia $r = max_{P \in V}(rg(J(V)_P))$. Allora il teorema dice che l'insieme dei punti di V per i quali il rango è r è denso in V. Ora l'insieme dei punti P, per i quali $rg(J(V)_P) < r$, forma una sottovarietà propria di V, poiché tali punti costituiscono l'insieme degli zeri dei minori $(r \times r)$ della matrice infinita $J(V)$, e tali minori sono polinomi in $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$. Dunque è sufficiente mostrare che per ogni sottovarietà W di una varietà irriducibile V, $V \setminus W$ è denso in V; o, equivalentemente, se una sottovarietà V' di una varietà irriducibile V contiene un insieme aperto di V, allora $V = V'$, questo segue dal prossimo teorema. □

Prima è necessario introdurre alcune definizioni di carettere algebrico.

Definizione 17. *Sia I un ideale di $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ e sia $V = \boldsymbol{V}(I) \subset \mathbb{C}^n$. Allora $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/I$ è l'**anello delle coordinate di** V, spesso denotato con R_V.*

Definizione 18. *Sia F un campo, $S \subset F$ si dice algebricamente indipendente su F se non esiste alcun polinomio p, non nullo, tale che $p(s_1, ..., s_n) = 0$, per $(s_1, ..., s_n) \in S$.*

*Sia, poi, $F \subset K$ estensione di campi. Una **base di trascendenza** è un sottoinsieme T di K tale che T è algebricamente indipendente su K e K è algebrico su $F(T)$.*

*Si può dimostrare che ogni base di trascendenza ha la stessa cardinalità, essa è detta **grado di trascendenza di** K **su** F, denotato con $tr\ deg\ K$.*

Diremo anche che se R è un dominio di integrità contenente un campo K, allora il grado di trascendenza su K di R è il grado di trascendenza, definito sopra, su K del campo dei quozienti di R.

Teorema 18. *Siano V_1 e V_2 varietà irriducibili e sia U un aperto di $\mathbb{C}^n$. Se*

$$V_1 \cap U = V_2 \cap U \neq \emptyset,$$

allora $V_1 = V_2$.

Dimostrazione. È sufficiente provare che ogni polinomio che si annulla su un sottoinsieme aperto di V_1 si annulla su tutto V_1 e, dato che tale polinomio si annulla anche su V_2 per ipotesi, $V_2 \subset V_1$. In modo analogo $V_1 \subset V_2$, allora $V_1 = V_2$.

Sia p un elemento dell'anello delle coordinate di V_1, $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/\mathbf{I}(V_1) = \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$, che si annulla su un aperto di V_1, vogliamo provare che p si annulla su tutto V_1. Dal Teorema 15, ogni aperto di V_1 contiene un punto, P, di dimensione d tale che, eventualmente con un cambio di coordinate, un suo intorno U in V_1 è il grafico di una funzione analitica. Vogliamo mostrare che $p = p(x_1, ..., x_n)$ è il polinomio nullo.

Un punto $(a_1, ..., a_n)$ sta in V_1 se e solo se $(x_1, ..., x_n) \longrightarrow (a_1, ..., a_n)$ definisce un omomorfismo di $\mathbb{C}[x_1, ...x_n]$; per ipotesi, per ogni $(a_1, ..., a_n) \in V_1$ vicino a P, $p(a_1, ..., a_n) = 0$, cioè p è nel nucleo dell'applicazione sopra. Si può assumere $\{x_1, ..., x_d\}$ base di trascendenza di $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$. Se p non fosse identicamente nullo, soddisferebbe un'equazione minima

$$q_0 p^m + ... + q_m = 0,$$

dove $q_i \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_d]$, $\forall i$ e, per la minimalità, q_m non identicamente nullo.

Si ha: $p(a_1, ..., a_n) = 0 \implies q_m(a_1, ..., a_d) = 0$. Ma $\{x_1, ..., x_d\}$ è una base di trascendenza, quindi $(a_1, ..., a_d)$ può essere arbitrariamente scelto tra i punti dell'intorno aperto di P, allora q_m si annulla nell'intorno di P, cioè q_m è identicamente nullo. Siamo giunti ad una contraddizione, dunque p è il polinomio nullo in $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$. □

Particolarmente interessante risulta il seguente corollario, diretta conseguenza del Teorema 17.

Corollario 5. *Sia V una varietà di $\mathbb{C}^n$ e sia P un punto di V. Allora $dim_P\, V$ è la più grande fra le dimensioni delle componenti irriducibili di V che contengono P; $dim\, V$ è la più grande fra le dimensioni delle componenti irriducibili di V.*

Traduciamo ora il concetto di dimensione in termini puramente algebrici. La caratterizzazione data dal seguente teorema, rende possibile l'estensione della definizione di dimensione di una varietà su un campo qualsiasi (mentre la precedente era vincolata al campo dei complessi). La dimostrazione è omessa; può essere trovata ad esempio in [K].

Teorema 19. *Sia V una varietà irriducibile di $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ anello delle coordinate. Allora*

$$dim\ V = tr\ deg\ \mathbb{C}[x_1, ...x_n].$$

Passiamo adesso al terzo approccio sulla dimensione; esso fa uso della teoria degli anelli, in particolare è basato sulle catene di ideali primi.

Per ottenere la caratterizzazione della dimensione appena descritta abbiamo bisogno di alcuni risultati preliminari, come il Teorema 20 e il Teorema 21.

Teorema 20. *Se V è una varietà irriducibile di $\mathbb{C}^n$ e W una sua sottovarietà propria, allora $dim\ W < dim\ V$.*

Dimostrazione. Assumiamo che $W \neq \emptyset$ e, siccome $dim\ W$ è la dimensione massima fra le dimensioni delle sue componenti irriducibili, possiamo assumere W irriducibile. Siano $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ e $\mathbb{C}[y_1, ..., y_n]$ rispettivamente gli anelli delle coordinate di V e W. Vogliamo mostrare che il grado di trascendenza di $\mathbb{C}[y_1, ..., y_n]$ è strettamente minore di quello di $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$.

Se $W = \mathbf{V}(I)$, allora $\mathbb{C}[y_1, ..., y_n] = \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]/I$, dove I è un ideale proprio non nullo di $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$. Sia $\{x_1, ..., x_d\}$ una base di trascendenza di $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ su $\mathbb{C}$ ($d = dim\ V$); supponiamo che l'omomorfismo indotto da I mappi x_i in y_i, per ogni $i = 1, ..., n$. Dato che $x_{d+1}, ..., x_n$ soddisfano equazioni algebriche su $\mathbb{C}[x_1, ..., x_d]$, anche $y_{d+1}, ..., y_n$ devono essere algebrici su $\mathbb{C}[y_1, ..., y_d]$. Quindi il grado di trascendenza di $\mathbb{C}[y_1, ..., y_n]$ non può essere maggiore di quello di $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$. Vogliamo escludere anche il caso in cui i due gradi di trascendenza siano uguali, per farlo supponiamo per assurdo che $tr\ deg\ \mathbb{C}[x_1, ..., x_n] = tr\ deg\ \mathbb{C}[y_1, ..., y_n]$. Sia $\{y_1, ..., y_d\}$ una base di trascendenza di $\mathbb{C}[y_1, ..., y_n]$. Questo ci dice che $\mathbb{C}[x_1, ..., x_d]$ e $\mathbb{C}[y_1, ..., y_d]$ sono isomorfi. Così l'omomorfismo $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n] \longrightarrow \mathbb{C}[y_1, ..., y_n]$ si estende a $\mathbb{C}(x_1, ...x_d)[x_{d+1}, ..., x_n] \longrightarrow \mathbb{C}(y_1, ..., y_d)[y_{d+1}, ..., y_n]$, ma gli ultimi due anelli sono in particolare campi, allora il nucleo è formato solo dallo 0. Questo nucleo ovviamente contiene I, quindi $I = (0)$, ma per quanto visto sopra $I \neq (0)$, che dà proprio la contraddizione voluta. □

Osserviamo che per ogni varietà V esiste una sua sottovarietà di dimensione inferiore di 1 rispetto alla dimensione di V. Questo implica che si può costruire una catena di varietà a partire proprio da V e discendendo una dimensione alla volta fino ad arrivare ad una varietà zero-dimensionale. In questo modo è possibile sapere la dimensione di una varietà semplicemente contando le varietà presenti nella catena. Siccome la dimensione di una varietà è uguale alla dimensione massima delle sue componenti, possiamo assumere che tutte le varietà della catena discendente siano irriducibili.

Definizione 19. *Se V e le altre varietà della catena discendente sono tutte irriducibili, allora la catena si dice* ***massimale****, nel senso che non possono essere aggiunte alla catena altre sottovarietà di V non vuote, che non siano già presenti.*

Definizione 20. *Diciamo* ***lunghezza di una catena****, $V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \cdots \supsetneq V_l$,* ***di varietà irriducibili*** *il numero delle varietà presenti nella catena diminuito di* 1.

Teorema 21. *Sia $V \subset \mathbb{C}^n$ una varietà irriducibile non vuota di dimensione d e sia $V_{d_1} \supsetneq \cdots \supsetneq V_{d_2}$ una catena di sottovarietà irriducibili di V. Questa catena può essere estesa a una catena massimale di varietà irriducibili*

$$V = V'_0 \supsetneq V'_1 \supsetneq \cdots \supsetneq V'_d \qquad (V'_d \neq \emptyset),$$

dove ogni varietà nella catena originaria compare nella catena estesa.

Inoltre, due qualunque di queste catene hanno la stessa lunghezza.

Il teorema appena enunciato ci dice che possiamo definire la dimensione di una varietà irriducibile non vuota anche come la lunghezza di una qualsiasi catena massimale stretta di sottovarietà irriducibili non vuote di V. Per il teorema di corrispondenza di ideali e varietà, possiamo usare equivalentemente catene di ideali primi; se $R_V = \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ è l'anello delle coordinate di V, allora la dimensione di V è la lunghezza, l, di ogni catena massimale di ideali primi

$$0 = I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \cdots \subsetneq I_l \qquad (I_l \neq R_V).$$

(Notiamo che, avendo considerato come varietà solo quelle irriducibili e non vuote, gli ideali in questione sono tutti primi e diversi da R_V).

Dato che $R_V = \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/\mathbf{I}(V)$, questa lunghezza non è altro che la lunghezza di ogni catena massimale stretta ascendente di ideali primi in $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ che parte dall'ideale primo $\mathbf{I}(V)$.

Torniamo ora al caso generale, in cui le varietà non sono necessariamente irriducibili (e gli ideali non primi). Se scriviamo $\mathbf{I}(V) = P_1 \cap \cdots \cap P_r$, ovvero con la decomposizione minimale descritta nella Sezione 2.8, allora la dimensione di V è la massima fra le lunghezze delle catene ascendenti strette di ideali primi in $\mathbb{C}[X_1, ...X_n]$ che iniziano da uno qualsiasi fra $P_1, ..., P_r$. Per la minimalità, ogni ideale primo più piccolo di P_i interseca propriamente $\mathbf{I}(V)$, quindi la dimensione di V è la lunghezza della più lunga fra le catene ascendenti strette di ideali primi in $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ che contengono $\mathbf{I}(V)$. Per concludere, sappiamo che per ogni ideale $\alpha \subset \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$, $\sqrt{\alpha}$ è l'intersezione di tutti gli ideali primi che contengono α (quindi anche di quelli che compaiono nella decomposizione minimale); così si ha il seguente fatto:

Teorema 22. *Sia $\alpha \subset \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ ideale. Allora dim $\mathbf{V}(\alpha)$ è la lunghezza della più lunga catena stretta di ideali primi contenenti α o, equivalentemente, $\sqrt{\alpha}$.*

Ci apprestiamo ora a dimostrare il Teorema 21.

Dimostrazione. È sufficiente mostrare che se $W_1 \subset W_2$ sono sottovarietà irriducibili non vuote di V di dimensione rispettivamente d_1 e d_2, allora esiste una catena stretta di varietà irriducibili da W_2 a W_1 di lunghezza $d_2 - d_1$; o, equivalentemente, che esiste una catena stretta di ideali primi di lunghezza $d_2 - d_1$ nell'anello delle coordinate $R_{W_2} = \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$, che inizia da (0) e finisce in I, dove $R_{W_2}/I = \mathbb{C}[y_1, ..., y_n] = R_{W_1}$. (Questo ci assicura la massimalità, perché per ogni varietà irriducibile V, una qualsiasi catena stretta di varietà irriducibili di lunghezza $d = dim\ V$, che inizia con V e finisce in un punto, deve essere massimale; se così non fosse, per il Teorema 20, $dim\ V$ sarebbe maggiore di d).

Il grado di trascendenza di R_{W_2} è d_2 e quello di R_{W_1} è d_1; assumiamo senza ledere la generalità che $d_2 > d_1$, e che $\{x_1, ..., x_{d_2}\}$ e $\{y_1, ..., y_{d_1}\}$ basi di trascendenza di R_{W_2} e R_{W_1} rispettivamente. Possiamo assumere, poi, che gli elementi x_i e y_i siano numerati in modo che l'immagine dell'omomorfismo

$$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_{d_1+1}, x_{d_1+2}, \cdots, x_{d_2}] \longrightarrow \mathbb{C}[y_1, \cdots, y_{d_1+1}, x_{d_1+2}, \cdots, x_{d_2}] \quad (3.1)$$

abbia grado di trascendenza $d_2 - 1$ su $\mathbb{C}$. (Notiamo che y_{d_1+1} è algebrico su $\mathbb{C}[y_1, ..., y_{d_1}]$, quindi lo è anche su $\mathbb{C}[y_1, \cdots, y_{d_1+1}, x_{d_1+2}, \cdots, x_{d_2}]$). Ora, per $i = d_2 + 1, ..., n$, sia $q_i(x_1, ..., x_{d_2}, X_i)$ un polinomio minimale di x_i su $\mathbb{C}[x_1, ..., x_{d_2}]$; dato che $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n] \longrightarrow \mathbb{C}[y_1, ..., y_n]$ è un omomorfismo di anelli, $q_i(x_1, ..., x_{d_2}, X_i)$ ha grado positivo in X_i, quindi anche $q_i(y_1, ..., y_{d_1+1}, x_{d_1+2}, ..., x_{d_2}, X_i)$; quindi (3.1) si può estendere a un omomorfismo ϕ su $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$; il grado di trascendenza dell'anello immagine $R_{W_1'}$ di R_{W_1} è ancora $d_2 - 1$. Sia $\mathfrak{p}$ il nucleo di ϕ; sicuramente $\mathfrak{p} \neq (0)$. Abbiamo così completato il primo passo di un'argomentazione induttiva; in modo analogo ora costruiamo un omomorfismo ϕ' di $R_{W_1'}$, così l'immagine $\phi'(R_{W_1'})$ ha grado di trascendenza $d_2 - 2$ su $\mathbb{C}$; il nucleo di $\phi' \circ \phi$ è un ideale primo $\mathfrak{p}' \subset R_{W_1}$, con $\mathfrak{p}' \supsetneq \mathfrak{p}$. Iterando questo procedimento si ottiene la catena di ideali primi desiderata e, di conseguenza, la catena di sottovarietà ad essi associate. □

Definizione 21. *Si dice che una varietà di $\mathbb{C}^n$ ha **dimensione pura** se tale varietà ha la stessa dimensione in ogni suo punto.*

Definizione 22. *Una varietà è un'**ipersuperficie** in $\mathbb{C}^n$ se può essere definita da un solo polinomio non costante in $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$.*

Il prossimo teorema caratterizza le ipersuperfici mediante la dimensione, ed è utile anche come esempio.

Teorema 23. *Una varietà in $\mathbb{C}^n$ è un'ipersuperficie se e solo se ha dimensione pura $(n - 1)$.*

Dimostrazione. Supponiamo $V = \mathbf{V}(p) \subset \mathbb{C}^n$, dove $p \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ non costante. Assumiamo dapprima che p sia irriducibile. Allora $\mathbf{V}(p)$ ha dimensione pura, per il Teorema 17 e, per qualche i, $\partial p/\partial X_i$ non identicamente nullo; dunque $\partial p/\partial X_i$ non si annulla su V, perché altrimenti dovrebbe essere contenuto nell'ideale primo (p), ma $deg\ \partial p/\partial X_i < deg\ p$. Quindi il rango di $(\partial p/\partial X_1 \cdots \partial p/\partial X_n)$ in un punto raggiunge il massimo, 1, ovvero $dim\ V = n - 1$. Dato che un'ipersuperficie è unione di ipersuperfici irriducibili, la dimensione è pura.

Viceversa, supponiamo $V \subset \mathbb{C}^n$ abbia dimensione pura $n-1$; vogliamo mostrare che $V = \mathbf{V}(p)$, per qualche polinomio p. Se questo è vero per varietà irriducibili di dimensione $n-1$, allora è vero per varietà qualsiasi di dimensione pura $n-1$. Assumiamo dunque V irriducibile, sia $V = \mathbf{V}(p_1, ..., p_r)$, con p_i polinomi non costanti. Prendiamo ora p_1 con una sua fattorizzazione in irriducibili: $p_1 = p_{11} \cdot ... \cdot p_{1s}$, allora $\mathbf{V}(p_1) = \mathbf{V}(p_{11}) \cup \cdots \cup \mathbf{V}(p_{1s})$. Allora $V \subset \mathbf{V}(p_{1i})$, per qualche i. Dato che p_{1i} è irriducibile, anche $\mathbf{V}(p_{1i})$ è irriducibile, allora abbiamo $V = \mathbf{V}(p_{1i})$. Per finire, dato che p_{1i} è non costante, $V = \mathbf{V}(p_{1i})$ è un'ipersuperficie. □

Concludiamo la sezione con l'enunciato di un teorema riguardante la dimensione di varietà algebriche, per la dimostrazione rimandiamo al testo [K].

Teorema 24. *Siano V_1 e V_2 varietà irriducibili di $\mathbb{C}^n$ tali che $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Allora*

$$cod(V_1 \cap V_2) \leq cod\, V_1 + \, cod\, V_2$$

Per vedere quello che succede consideriamo in $\mathbb{R}^3$ due rette che si intersecano in un punto. Esse hanno codimensione 2, mentre la loro intersezione ha codimensione 3. Allora il teorema è verificato, in particolare vale il minore stretto, perché la somma delle codimensioni delle rette è 4 e la loro intersezione ha codimensione 3.

3.2 Varietà non singolari

Lo scopo di questa sezione è di dare una caratterizzazione delle singolarità di una varietà mediante un criterio, detto Jacobiano. Lo proveremo nell'ipotesi di usare varietà irriducibili, ma può essere esteso anche in generale.

Definizione 23. *Una varietà $V \subset \mathbb{C}^n$ si dice liscia in $P \in V$ se esiste un intorno di P (per un'opportuna scelta di coordinate) per il quale V è il grafico di una funzione liscia.*

Definizione 24. *Una varietà irriducibile $V \subset \mathbb{C}^n$ si dice **non singolare in** P se $rg(J(V)_P) = cod\, V$, si dice **singolare** in P altrimenti. V si dice non singolare se è non singolare in ogni suo punto.*

Teorema 25. *Sia $V \subset \mathbb{C}^n$ una varietà irriducibile.*

$$V \text{ è liscia in } P \in V \;\Leftrightarrow\; rg(J(V)_P) = cod\, V.$$

Dimostrazione. Assumiamo, senza ledere la generalità, che P sia l'origine, (0), di $\mathbb{C}^n$.

Supponiamo $rg(J(V)_{(0)}) = cod\, V$, allora ci sono $cod\, V$ righe in $J(V)$, calcolata in (0), linearmente indipendenti. Dal momento che $cod\, V$ è il più grande rango di $J(V)$ calcolata nei punti di V, il suo rango non è mai maggiore di *cod* V; inoltre, se prendiamo un intorno di (0) opportuno, il rango di $J(V)$ non è nemmeno più piccolo di *cod* V. Dunque risultano verificate le ipotesi del Teorema 16, che ci dà poi la tesi.

Per provare il viceversa, la strategia è questa: riduciamo il problema al caso in cui V sia un'ipersuperficie e utilizziamo una strategia opportuna. Se, invece, V non è una ipersuperficie, si può prendere come ipersuperficie la proiezione (chiusa) di V su un opportuno sottospazio di $\mathbb{C}^n$ di dimensione $dim\, V + 1$.

Denotiamo con r la codimensione di V e con s il rango di $J(V)_{(0)}$. Assumiamo per assurdo che $s < r$ (non possiamo mai avere $s > r$), e supponiamo che V sia liscia in (0), cioè, relativamente alle coordinate $(X, Y) = (X_1, \cdots, X_{n-r}, Y_1, \cdots, Y_r)$ e agli intorni $U_X \subset \mathbb{C}_X$ e $U_{Y_i} \subset \mathbb{C}_{Y_i}$ di (0), esistono funzioni lisce, $f_i : U_X \longrightarrow U_{Y_i}$, $i = (1, ..., r)$, tali che la parte di V vicino a (0) è l'insieme degli zeri di $F_1 = Y_1 - f_1, ..., F_r = Y_r - f_r$. Otterremo una contraddizione.

Innanzitutto, si può verificare che lo spazio tangente T a V in (0) è un sottospazio di $\mathbb{C}^n$, per T limite dei piani tangenti T_{Q_i} nei punti non singolari $Q_i \in V$, dove $Q_i \to (0)$. Inoltre, possiamo scegliere le coordinate (X, Y) in $\mathbb{C}^n$ in modo che $\mathbb{C}_X$ sia proprio T. Questo perché possiamo scrivere la matrice Jacobiana in (0), $2r \times 2n$, delle parti reali e immaginarie delle funzioni F_i rispetto ai $2n$ assi reali e immaginari delle coordinate X e Y, così le ultime $2r$ colonne sono le colonne relative a Y, che inoltre danno forma a una matrice identica $2r \times 2r$. Allora tali colonne sono linearmente indipendenti.

Notiamo che la derivata di $(F_1, ..., F_r)$ in (0) su un 1-sottospazio di $\mathbb{C}_Y$ è un vettore non nullo, mentre la derivata lungo un 1-sottospazio di T è il vettore nullo. Questo è vero perché ogni 1-sottospazio reale di T è il limite di rette secanti reali L_j passanti per 0 e per i punti $P_j \in V$, con $P_j \to (0)$, dove $F_i(P_j)$ hanno tutti valore costante nullo. Dunque, se g è una funzione differenziabile su $\mathbb{C}^n$ a valori complessi tale che l'insieme degli zeri di g contiene V, allora la derivata di g in (0) su un 1-sottospazio di T deve essere zero. Questo deve essere vero per ogni polinomio $p \in \mathbf{I}(V)$; quindi ogni vettore del tipo

$$\left(\frac{\partial p}{\partial X_1}, \cdots, \frac{\partial p}{\partial X_{n-r}}, \frac{\partial p}{\partial Y_1}, \cdots, \frac{\partial p}{\partial Y_r}\right)_{(0)}$$

sta in $\mathbb{C}_Y$. Ma, dato che $s < r$, è vero anche più di questo: per un'opportuna scelta di coordinate di $Y_1, ..., Y_r$ in $\mathbb{C}_Y$, tutti questi vettori possono essere presi in $\mathbb{C}_{Y_2, ..., Y_r}$. Quindi per ogni polinomio p che si annulla in V, si ha

$$\frac{\partial p}{\partial X_1} = \cdots = \frac{\partial p}{\partial X_{n-r}} = \frac{\partial p}{\partial Y_1} = 0.$$

Supponiamo ora che le nostre coordindate soddisfino le condizioni sopra; assumiamo in aggiunta che

$$\mathbb{P}^{r-1}(\mathbb{C}) \cap V = (0), \tag{3.2}$$

dove $\mathbb{P}^{r-1}(\mathbb{C})$ denota il completamento proiettivo di $\mathbb{C}_{Y_2,\dots,Y_r}$ in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Rispetto a queste coordinate, sia $\bar{\pi}(V)$ la chiusura proiettiva di V in $\mathbb{C}_X \times \mathbb{C}_{Y_1}$ (così $\bar{\pi}(V)$ è una ipersuperficie di $\mathbb{C}_X \times \mathbb{C}_{Y_1}$). Dato che V è rappresentata vicino a (0) come il grafico di $Y_1 - f_1, ..., Y_r - f_r$, per un intorno sufficientemente piccolo, U, di (0) in $\mathbb{C}_X \times \mathbb{C}_{Y_1}$, $Y_1 - f_1$ descrive $\bar{\pi}(V) \cap U$, questo ci è assicurato dalla condizione (3.2) sulle nostre coordinate; ciò significa che non esiste una parte di V in $U \times \mathbb{C}_{Y_2,\dots,Y_r}$ che non sia data dal grafico di $Y_1 - f_1, ..., Y_r - f_r$, così la proiezione di V in U consiste esattamente nel grafico di $Y_1 - f_1$.

Dato che $\bar{\pi}(V)$ è un'ipersuperficie in $\mathbb{C}_X \times \mathbb{C}_{Y_1}$, sarà della forma $\bar{\pi}(V) = \mathbf{V}(q)$, per qualche $q \in \mathbb{C}[X, Y_1]$. Possiamo assumere che q non abbia fattori ripetuti non costanti. Ora, da una parte si ha che l'ipersuperficie $\mathbf{V}(q)$ è localmente il grafico di una funzione; dall'altra parte,

$$\frac{\partial q}{\partial X_1} = \cdots = \frac{\partial q}{\partial X_{n-r}} = \frac{\partial q}{\partial Y_1} = 0.$$

Queste ultime derivate nulle ci informano che q ha grado ≥ 2 in (0), ovvero (0) è un punto singolare, il che contraddice l'ipotesi. $\square$

I seguenti esempi sono illustrati da figure che rappresentano le varietà su $\mathbb{R}$.

Esempio 16. *Riprendiamo in considerazione la cubica gobba, $V = \mathbf{V}(y - x^2, z - x^3) \subset \mathbb{C}^3$. Vogliamo mostrare che essa è liscia in ogni punto usando il criterio jacobiano.*

$$J(V) = \begin{pmatrix} -2x & 1 & 0 \\ -3x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è la matrice jacobiana associata alla curva; notiamo che in ogni punto di V, rimane invariato il minore

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

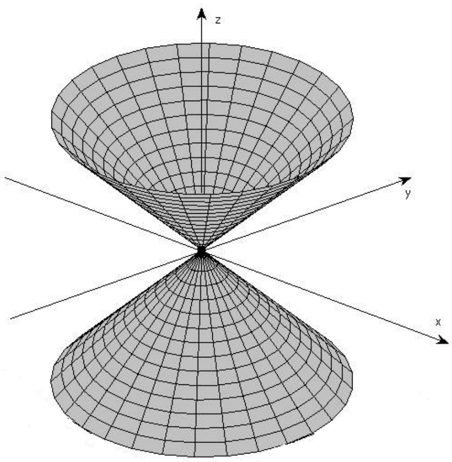
quindi $J(V)$ ha rango 2 in ogni punto.

D'altra parte, a partire da V si può costruire una catena massimale del tipo $V \supset \{punto\}$, che ha lunghezza 1, quindi la dimensione di V è 1 e, di conseguenza, cod $V = 2 = rgJ(V)$, il che implica che V è liscia per il Teorema 25.

Esempio 17. *Prendiamo ora il cono (varietà irriducibile) in* $\mathbb{C}^3$, V= $\boldsymbol{V}(x^2+y^2-z^2)$, *di matrice jacobiana:*

$$J(V) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \end{pmatrix}.$$

L'unico punto in cui il rango di $J(V)$ *è nullo è* $(0,0,0)$; *in esso però la codimensione di* V *è* 1, *cioè cod* $V > rg(J(V)_{(0)})$, *dunque* $(0,0,0)$ *è una singolarità del cono considerato.*



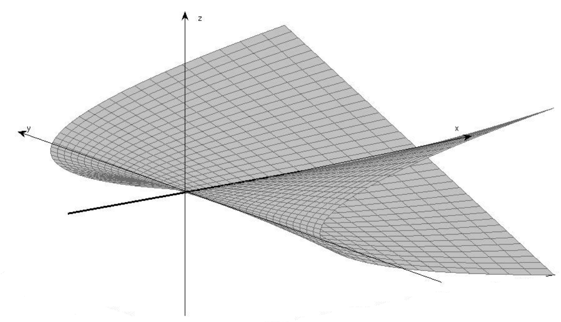
Esempio 18. *Come ultimo esempio consideriamo la varietà irriducibile* $V = \boldsymbol{V}(xy^2 - z^2)$, *nota con il nome di ombrello di Whitney. La sua matrice jacobiana è*

$$J(V) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy & -z \end{pmatrix}$$

La matrice ha rango nullo nei punti del tipo $P = (a,0,0)$, *con* $a \in \mathbb{R}$; *questo significa che* $rg(J(V)_P) = 0$ *se* P *è un punto della retta*

$$\begin{cases} x = a \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ma nei punti della retta si ha cod $V = 1$, *ovvero la codimensione è strettamente maggiore del rango della Jacobiana nei punti in esame, quindi la retta è costituita da punti singolari per la varietà.*


z
y
x

Bibliografia

[H] Robin Hartshorne, “Algebraic Geometry”, Springer-Verlag, 1977

[CLO] David Cox, John Little, Donald O’Shea, “Ideals, varieties, and algorithms”, Springer, 1996

[K] Keith Kendig, “Elementary Algebraic Geometry”, Dover, 1977