

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Corso di Laurea in Fisica

# TEORIE DELLA GRAVITAZIONE $f(R)$

Relatore:  
Dott. Roberto Casadio

Presentata da:  
Paolo Pettinari

Sessione 25 / 09 / 2015  
Anno Accademico 2014/2015

## Sommario

Tra tutti i fenomeni naturali osservabili, ne era presente uno particolarmente interessante e con il quale si aveva diretto contatto quotidianamente: la gravità.

Dopo le innumerevoli osservazioni astronomiche effettuate da Galileo, fu Newton nel diciassettesimo secolo a capire che il moto dei pianeti era governato dalle medesime leggi che descrivono la caduta dei gravi sulla Terra e fu quindi lui che ci fornì una prima teoria della gravità con la quale si spiegarono le orbite dei pianeti con ottima precisione.

Grazie al contributo di Einstein, la teoria si rinnovò e si arricchì, ma rimase pur sempre lontana dall'essere completa, tant'è che ancora oggi sono presenti molte domande a cui non siamo in grado di rispondere. In questo articolo ci occuperemo di tali quesiti, provando a formulare una teoria che sia in accordo con le attuali evidenze sperimentali. Nella prima parte, tratteremo le ragioni che hanno spinto i ricercatori ad introdurre le nuove teorie della gravità  $f(R)$ ; in particolare vedremo la peculiarità delle curve di rotazione delle galassie e perché ci sia il bisogno di tirare in ballo la materia oscura. Discuteremo anche alcuni problemi derivanti dall'evoluzione cosmica e altre incongruenze riguardanti la stabilità delle stelle di neutroni.

In seguito mostreremo come ricavare l'equazione di Einstein partendo dai principi variazionali di Hamilton, e estenderemo tale ragionamento con lo scopo di ottenere un'equazione corrispondente ad una gravità modificata.

Infine, verranno introdotte le teorie della gravità  $f(R)$ , per mezzo delle quali cercheremo di discutere alcune possibili spiegazioni alle problematiche mosse nella parte introduttiva.

# Indice

<b>1</b>	<b>INTRODUZIONE E MOTIVAZIONI</b>	<b>2</b>
1.1	INSTABILITÀ IDROSTATICA DI STELLE DI NEUTRONI . . . . .	2
1.2	CURVE DI ROTAZIONE . . . . .	5
1.3	EVOLUZIONE COSMICA . . . . .	9
<b>2</b>	<b>PRINCIPI VARIAZIONALI E GRAVITÀ</b>	<b>10</b>
2.1	PRINCIPIO DI MINIMA AZIONE . . . . .	10
2.2	NOZIONI DI RELATIVITÀ GENERALE . . . . .	13
2.3	EQUAZIONI DI EINSTEIN . . . . .	16
<b>3</b>	<b>TEORIE <math>f(R)</math></b>	<b>19</b>
3.1	FORMALISMO METRICO . . . . .	20
3.2	FORMALISMO DI PALATINI . . . . .	21
3.3	EQUIVALENZA CON LA TEORIA DI BRANS-DICKE . . . . .	22
<b>4</b>	<b>APPLICAZIONI</b>	<b>25</b>
4.1	INSTABILITÀ IDROSTATICA DI STELLE DI NEUTRONI . . . . .	25
4.2	CURVE DI ROTAZIONE . . . . .	27
4.3	EVOLUZIONE COSMICA . . . . .	28
<b>5</b>	<b>CONCLUSIONI</b>	<b>31</b>

# Capitolo 1

## INTRODUZIONE E MOTIVAZIONI

Osservando l' universo con strumenti che negli anni si sono evoluti considerevolmente, gli astronomi hanno avuto la possibilità di effettuare misure prima infattibili, capaci di fornire molte conferme sperimentali alle teorie sviluppate, prima tra tutte la relatività generale. Tale proliferazione di dati ha però fatto emergere anche una grande quantità di problemi, i quali sono l' evidenza di probabili limiti presenti nella teoria di Einstein. In questa parte quindi, analizzeremo alcune delle discrepanze presenti tra risultati teorici e sperimentali per motivare l' introduzione di una teoria della gravità modificata, le teorie  $f(R)$ . Per far ciò, seguiremo un preciso ordine che ci porterà a discutere dal più piccolo problema a quello su scala di grandezza maggiore. Infatti partiremo dall' instabilità idrostatica stellare e passando attraverso problematiche galattiche, giungeremo a studiare le incongruenze derivanti dall' espansione dell' universo.

### 1.1 INSTABILITÀ IDROSTATICA DI STELLE DI NEUTRONI

Il bisogno di studiare nuove teorie di gravità modificata non nasce solo da incongruenze a livello galattico o addirittura cosmico, bensì anche da osservazioni riguardanti le stelle e più precisamente le stelle di neutroni. Grazie alla teoria di cui siamo disposti, si può stimare un valore di massa oltre il quale la stella di neutroni non sarebbe più stabile e collasserebbe, così da formare un buco nero.

Anche in questo caso però, le osservazioni astronomiche non ci rendono la vita facile, infatti sono state scoperte numerose stelle di neutroni con masse considerevolmente maggiori di quelle previste.

Denotando la pressione e densità della stella con  $p$  e  $\rho$  rispettivamente e il potenziale gravitazionale con  $\phi$ , con  $r$  la distanza dal centro della stella, le condizioni di equilibrio

idrostatico per una stella sono dettate dall' equazione

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{d\phi}{dr}\rho \quad (1.1)$$

insieme all' equazione di Poisson

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 4\pi G\rho. \quad (1.2)$$

Assumiamo inoltre valida l' equazione di stato che collega  $p$  e  $\rho$  nel seguente modo:

$$p = k\rho^\gamma \quad (1.3)$$

dove  $k$  e  $\gamma$  risultano essere delle costanti.

Ora inseriamo l' equazione di stato (1.3) nella (1.1), così da ottenere

$$\frac{d\phi}{dr} = -\gamma k\rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr}. \quad (1.4)$$

È facile notare che quest' ultima equazione può essere integrata per  $\gamma \neq 1$

$$\frac{\gamma k}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} = -\phi \quad (1.5)$$

ovvero

$$\rho = \left[ \frac{\gamma - 1}{\gamma k} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} (-\phi)^{\frac{1}{\gamma-1}} \equiv A_n (-\phi)^n \quad (1.6)$$

dove la posizione iniziale d' integrazione è stata presa nella superficie, così da avere  $\rho(r = R) = 0$  e  $\phi(r = R) = 0$ . Da notare che  $n$  è stato definito come  $n \equiv \frac{1}{\gamma-1}$  e che  $A_n \equiv \left[ \frac{\gamma-1}{\gamma k} \right]^n$ .

A questo punto, inserendo quest' ultima equazione (1.6) nella (1.2) si arriva a

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = 4\pi G A_n (-\phi)^n. \quad (1.7)$$

Ormai siamo giunti al traguardo, infatti è necessario introdurre delle variabili adimensionali definite nel modo seguente

$$z = r \sqrt{\frac{k^2 A_n (-\phi_c)^{n-1}}{2}} \quad (1.8)$$

$$w = \frac{\phi}{\phi_c} = \left( \frac{\rho}{\rho_c} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (1.9)$$

per arrivare all' equazione standard di Lane-Emden per l' equilibrio idrostatico di strutture stellari, secondo la teoria Newtoniana

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dw}{dz} + w^n = 0 \quad (1.10)$$

Nella ridefinizione di variabili,  $k^2 = 8\pi G$ , inoltre il pedice  $c$  indica che le grandezze su cui è applicato, sono valutate nel centro della stella. Al centro della stella ( $r = 0$ ) si ha infatti che  $z = 0$ ,  $\phi = \phi_c$ ,  $\rho = \rho_c$  e quindi  $w = 1$ .

L' equazione (1.10) impone dei vincoli sulla stabilità delle stelle di neutroni, ma purtroppo non esistono soluzioni compatibili con una certa classe di stelle. Le stelle di neutroni sono infatti dotate di densità molto elevate, a causa della loro grande massa e piccola dimensione; secondo l' equazione (1.10), tali valori sembrano portare a dei corpi celesti instabili che quindi non dovrebbero esistere nell' universo. Tuttavia questi corpi sono stati più volte osservati, perciò nasce l' esigenza di trovare una possibile spiegazione al problema.



Figura 1.1: stella di neutroni

## 1.2 CURVE DI ROTAZIONE

Le prime evidenze dell' esistenza della materia oscura risalgono agli anni '30, quando Zwicky e Smith approfondirono lo studio degli ammassi di galassie. Fritz Zwicky stimò la massa di un ammasso di galassie dalla luminosità di ciascuna di esse, così da ottenere un valore indicativo. Tale risultato lo confrontò con una seconda stima di massa, fatta utilizzando il teorema del viriale.

Ciò che egli ottenne, fu una grandissima discrepanza che sembrava suggerire l' esistenza di una grande quantità di materia osservabile esclusivamente tramite effetti gravitazionali e che quindi non potesse interagire elettromagneticamente.

Tali studi furono ripresi con maggior interesse intorno agli anni '70, infatti grazie a tecniche di osservazione sempre più raffinate, si rese possibile la ricostruzione delle curve di rotazione di alcune galassie. Anche in questo caso, si ottennero dei risultati molto differenti da quelli previsti dalla teoria di Keplero, risultati spiegabili ammettendo l' esistenza di una grande quantità di massa non visibile.

Inizialmente si ipotizzò che tale massa fosse costituita da materia ordinaria che essendosi raffreddata avrebbe smesso di emettere energia (stelle morte). Tuttavia tale spiegazione richiederebbe un numero enorme di nane brune o stelle mancate (Giove) che nel nostro universo non è presente, perciò l' ipotesi di materia barionica risulta alquanto improbabile.



Figura 1.2: Ammasso di galassie

Per discutere con maggior precisione ciò che è stato accennato in precedenza, dobbiamo essere in grado di stimare la massa di una galassia e la velocità con cui ruotano

le stelle che la compongono. Un metodo diffuso per misurare la massa di un sistema gravitazionale confinato e in equilibrio, è l' utilizzo del teorema del viriale:

$$2\bar{T} + \bar{U} = 0 \quad (1.11)$$

dove  $\bar{T}$  e  $\bar{U}$  sono rispettivamente energia cinetica e gravitazionale mediate nel tempo. Una generica galassia a spirale è sicuramente un sistema confinato e in equilibrio, infatti essa è stabile e non collassa poiché la gravità è contrastata dalla sua elevata velocità di rotazione. Dalla formula (1.11) si ricava

$$M\bar{v}^2 = \frac{\kappa M^2 G}{R} \quad (1.12)$$

in cui  $M$  rappresenta la massa totale della galassia,  $\kappa$  è una costante che dipende dalla geometria,  $G$  è la costante gravitazionale,  $R$  è il raggio e  $\bar{v}^2$  è la media del quadrato della velocità. La relazione (1.12) risulterebbe utile se si avesse un metodo per misurare la velocità di rotazione di una galassia a spirale.

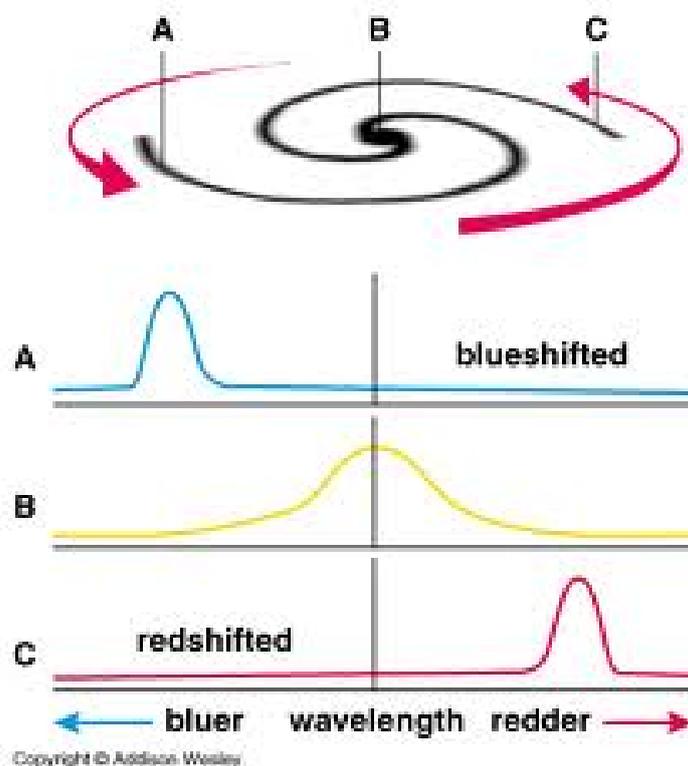


Figura 1.3: Spostamento della riga in emissione per effetto Doppler

Una tecnica molto utilizzata dagli astronomi si basa sulla spettroscopia combinata con

l'effetto Doppler che, nel caso di un oggetto in rotazione, si traduce nell' allargamento della riga in emissione.

La formula per l' effetto Doppler non relativistico è la seguente:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{v}{c} \quad (1.13)$$

dove  $\lambda$  è la lunghezza d' onda del fotone emesso e  $\Delta\lambda$  è la differenza tra lunghezza d' onda emessa e quella osservata. Nel momento in cui otteniamo un determinato spettro, riusciamo a riconoscere di quale elemento si tratta anche se la riga è leggermente spostata a causa del movimento della fonte di emissione. In tal modo, riusciamo a stimare il  $\Delta\lambda$  così da sapere la velocità del corpo celeste. Fatte le dovute premesse sui metodi più elementari di misurazione, siamo ora in grado di costruirci le curve di rotazione delle galassie.

Una curva di rotazione rappresenta banalmente la velocità con cui si muove la materia in funzione della distanza dal centro della galassia.

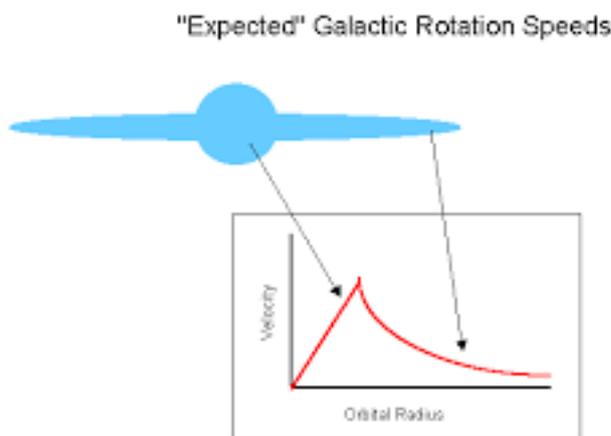


Figura 1.4: curva di rotazione teorica

Ragionando in termini Newtoniani, a causa della stabilità della galassia, un oggetto situato in essa sarà soggetto alla gravità, bilanciata però dalla forza centrifuga:

$$\frac{v_c^2}{r} = \frac{GM(r)}{r^2} \quad (1.14)$$

da cui si ricava la velocità di rotazione  $v_c$  come:

$$v_c = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \quad (1.15)$$

Schematizzando la materia presente come una distribuzione sferica uniforme di raggio  $R$ , si ha che:

$$M(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi\rho r^3, & \text{se } r < R \\ M_{\text{TOT}}, & \text{se } r \geq R \end{cases} \quad (1.16)$$

Sostituendo quindi l' espressione di  $M(r)$  nella (1.15), si ottiene che:

$$v_c \propto \begin{cases} r, & \text{se } r < R \\ \frac{1}{\sqrt{r}}, & \text{se } r \geq R \end{cases} \quad (1.17)$$

Da tali risultati ci aspetteremmo di trovare una curva che quindi cresce linearmente con  $r$  fino al raggio stimato  $R$  della galassia, e che cala in seguito.

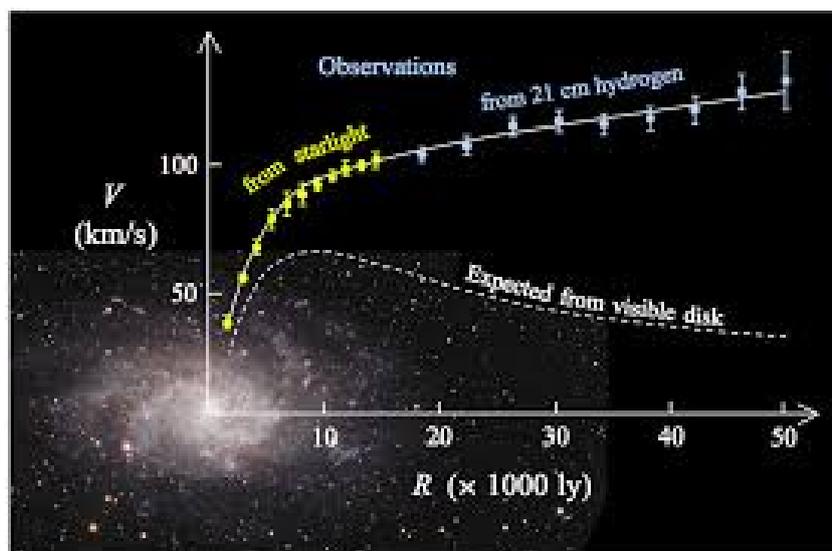


Figura 1.5: curva di rotazione teorica e sperimentale

Dalla figura 1.5, si può notare come la curva ottenuta dalle misurazioni sia in forte disaccordo con quella prevista dalla teoria, soprattutto nella regione esterna della galassia. Tale evidenza rappresenta il punto iniziale del nostro percorso, che avrà lo scopo di fornire una possibile spiegazione al problema. Nei prossimi paragrafi abbandoneremo tali questioni, che verranno poi riprese solo quando avremo sviluppato una teoria che possa spiegarle.

### 1.3 EVOLUZIONE COSMICA

Un' altra motivazione a favore delle teorie  $f(R)$  risiede nelle dinamiche cosmiche del nostro universo. Infatti, ipotizzando che il Bing Bang abbia fornito una grande quantità di energia e che abbia messo in espansione l' universo, noi dovremmo essere certi che il cosmo possa evolvere in soli due modi. Tale conclusione è dovuta al fatto che l' unica forza dominante su scala cosmica è quella gravitazionale che risulta essere solo attrattiva, perciò sulla base della materia presente, l' universo potrebbe espandersi ma decelerando, oppure fermarsi per poi tornare a comprimersi sotto l' effetto della gravità.

Quel che è importante però, è che la teoria classica di universo non prevede alcuna forza a favore dell' espansione e quindi l' universo dovrebbe sicuramente subire una decelerazione nel tempo.

Il problema nasce quando intorno all' anno 1998, il telescopio spaziale Hubble fece delle osservazioni di supernovae molto lontane da noi, le quali ci mostrarono che un tempo l' espansione dell' universo risultava essere più lenta di quanto lo è oggi. Ciò è completamente contrastante con quanto asserito in precedenza, infatti non possiamo certo ignorare le misure fatte ma piuttosto dovremmo fare in modo che la teoria si adatti quanto meglio alle evidenze sperimentali.

Una possibile soluzione al problema consiste nell' affermare l' esistenza di un' energia oscura capace di portare a delle dinamiche cosmiche in accordo con quanto osservato. Tale ipotesi risulterebbe però essere la sorgente di nuove domande: che cos' è questa presunta energia? E da dove proviene? Al momento non esistono risposte soddisfacenti ed è per questo che un' alternativa all' energia oscura viene data dalle teorie  $f(R)$ .

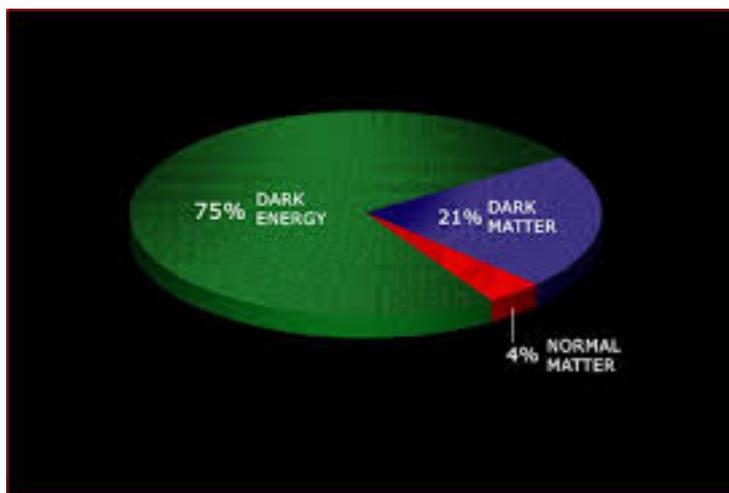


Figura 1.6: la figura mostra le percentuali di materia ed energia oscura che dovrebbero essere presenti per giustificare le osservazioni.

## Capitolo 2

# PRINCIPI VARIAZIONALI E GRAVITÀ

Lo scopo di questo capitolo sarà quello di arrivare all'equazioni di campo di Einstein attraverso il principio di minima azione. Perciò inizialmente forniremo alcune nozioni matematiche riguardanti tale principio così da rendere la trattazione maggiormente chiara e in seguito discuteremo velocemente le parti più significative della teoria della relatività generale. Nella parte finale si applicherà la teoria discussa precedentemente allo scopo di ricavare l'equazioni di Einstein.

### 2.1 PRINCIPIO DI MINIMA AZIONE

Il principio di minima azione è una formulazione più generale della legge del moto di sistemi meccanici. Tale principio si basa sul fatto che ad ogni sistema meccanico appartiene una funzione  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$  che lo caratterizza e che permette la descrizione della sua evoluzione temporale.

Immaginiamo di studiare un qualsiasi sistema meccanico in cui conosciamo però  $q_i(t_1)$  e  $q_i(t_2)$ , cioè la sua posizione nello spazio delle configurazioni al tempo iniziale e finale.

Il principio di minima azione afferma che tale sistema descriverà la traiettoria, tra i due punti fissati, che rende minimo il funzionale d'azione. La quantità chiamata azione viene definita come:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2.1)$$

dove  $L$  rappresenta la funzione di Lagrange,  $q$  e  $\dot{q}$  rappresentano rispettivamente le coordinate e velocità generalizzate del sistema. Minimizzando l'azione otteniamo

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0 \quad (2.2)$$

Integriamo per parti il secondo termine dell' integrale tenendo presente che  $\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta\dot{q} dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt \quad (2.3)$$

dove l' ultima uguaglianza è conseguenza del fatto che gli estremi sono fissi e che quindi  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ .

Mettendo insieme dunque le equazioni (2.2) e (2.3) otteniamo:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0 \quad (2.4)$$

che dovendo essere valida per variazioni arbitrarie  $\delta q$ , implica:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (2.5)$$

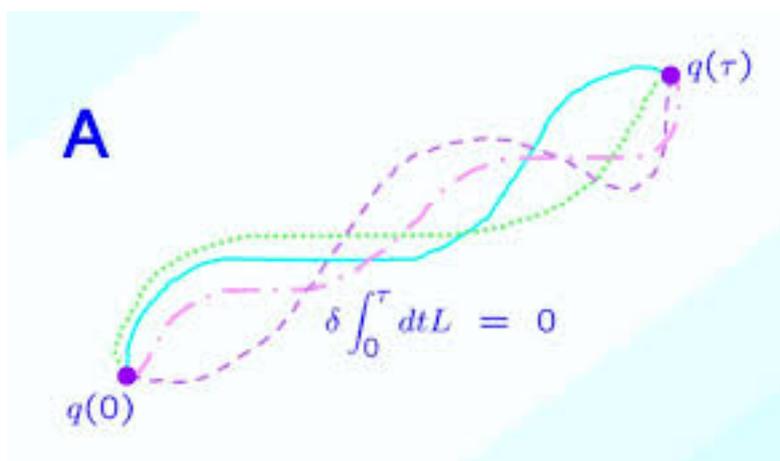


Figura 2.1: variazione della traiettoria ad estremi fissi

In questa trattazione abbiamo preso in considerazione, per semplicità, un sistema meccanico unidimensionale ma la sostanza non cambia, infatti per un sistema a  $N$  gradi di libertà si ha:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.6)$$

dove  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Le  $N$  equazioni differenziali sono chiamate equazioni di Lagrange poiché, avendo la funzione di Lagrange  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$  e risolvendo tali equazioni, posso conoscere lo stato del

sistema in ogni istante di tempo.

Per fare un esempio pratico, consideriamo un punto materiale soggetto ad un potenziale  $U(x)$  con un solo grado di libertà. Le  $q(t)$  e  $\dot{q}(t)$  corrisponderanno rispettivamente alla posizione  $x(t)$  e velocità  $v_x(t)$  e la Lagrangiana sarà nella forma  $L = T - U$  con  $T$  che rappresenta l'energia cinetica.

Utilizzando l'equazione (2.5), si ottiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_x} - \frac{\partial L}{\partial x} = \dot{p}_x + \frac{\partial U(x)}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

che risulta essere l'equazione del moto nel formalismo Newtoniano.

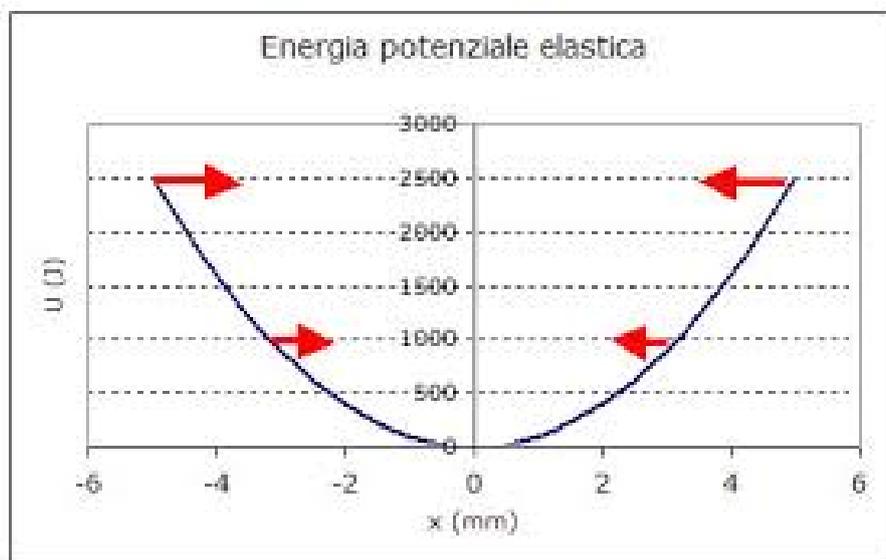


Figura 2.2: esempio di potenziale con cui verificare la (2.7)

## 2.2 NOZIONI DI RELATIVITÀ GENERALE

La relatività generale è una teoria che lega la presenza di materia alla curvatura dello spazio-tempo. Informazione sicuramente più chiara e precisa è contenuta nella famosa equazione del campo di Einstein, dalla quale si fonda l'intera teoria.

Il concetto fondamentale che permette il passaggio dall'idea al linguaggio matematico utilizzato, è il fatto di considerare lo spazio-tempo come una varietà 4-dimensionale differenziabile, dotata di una metrica che fornisca un metodo per valutare distanze spaziali e temporali.

Ciò può sembrare una banalità in quanto la relatività ristretta era già dotata di una metrica (metrica di Minkowski), che però era costante e si riferiva ad una varietà piatta sulla quale era possibile definire delle coordinate valide globalmente.

La vera novità di tale visione è data dal fatto che in presenza di campo gravitazionale la varietà diventa curva e di conseguenza esiste la possibilità, tramite un'opportuna scelta di coordinate, di trasformare la metrica in quella di Minkowski solo localmente.

In altre parole, esiste una scelta di coordinate che renda lo spazio-tempo piatto solamente in un intorno molto piccolo del punto preso in esame.

Questa costruzione ci permette di dire che la gravità non è più considerata una forza al pari delle altre, bensì manifesta i suoi effetti modificando la geometria (metrica) dello spazio-tempo; perciò ogni qualvolta si considererà un oggetto sottoposto alla sola interazione gravitazionale, si dirà che esso è in caduta libera e che non è soggetto ad alcuna forza. Fatte le giuste considerazioni, si può ora dire che gli oggetti in caduta libera seguono le geodetiche dello spazio-tempo.

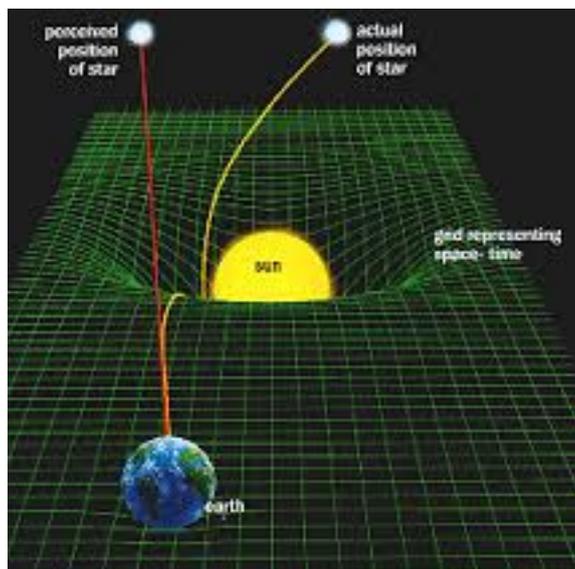


Figura 2.3: geodetiche dello spazio tempo

Per avere quantità indipendenti dal sistema di riferimento dobbiamo utilizzare la nozione di derivata covariante che per un tensore è definita come:

$$\nabla_{\beta} v^{\alpha} \equiv v^{\alpha}{}_{;\beta} = v^{\alpha}{}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} v^{\mu} \equiv \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} v^{\mu} \quad (2.8)$$

dove si è introdotta la notazione del punto e virgola per la derivata covariante e della virgola per la semplice derivata parziale.

Ora vorremmo trovare un modo per calcolare i coefficienti di Christoffel  $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}$ , partendo dalla seguente formula valida per la metrica:

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = 0 \quad (2.9)$$

Applicando la regola di Leibniz per la derivata covariante, si ha che

$$T_{\mu\nu;\beta} = T_{\mu\nu,\beta} - T_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} - T_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta} \quad (2.10)$$

e quindi

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \mu} = \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu} g_{\nu\beta} + \Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu} g_{\alpha\nu} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial \beta} = \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta} g_{\nu\mu} + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} \quad (2.12)$$

$$-\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial \alpha} = -\Gamma^{\nu}{}_{\beta\alpha} g_{\nu\mu} - \Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha} g_{\beta\nu} \quad (2.13)$$

dove abbiamo scritto la stessa relazione con differenti permutazioni di indici. Tenendo conto della simmetria della metrica ( $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ ) e dell' assenza di torsioni ( $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}$ ), sommando le tre relazioni si ottiene

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \quad (2.14)$$

Come già accennato, la caratteristica peculiare dello spazio-tempo è quella di essere una varietà curva in presenza di massa, perciò dovrà essere di fondamentale importanza la determinazione di un metodo matematico che sia strettamente legato al concetto di curvatura.

Per questo scopo ci viene in soccorso la nozione di derivata covariante di un primo vettore rispetto ad un secondo, la quale risulta nulla nel caso in cui il primo sia trasportato parallelamente lungo la direzione del secondo. Infatti, in spazi non piatti, il trasporto parallelo di un vettore lungo un circuito chiuso risulta essere diverso da quello di partenza e questo viene usato per definire il tensore di curvatura o di Riemann.

Il tensore di curvatura di Riemann è definito nel seguente modo:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\mu} \quad (2.15)$$

e la sua caratteristica principale è quella di annullarsi se e solo se lo spazio è piatto. Con questi brevi accenni di relatività generale, siamo ora in grado di ricavare l'equazione di campo di Einstein utilizzando i principi variazionali discussi nella precedente sezione.

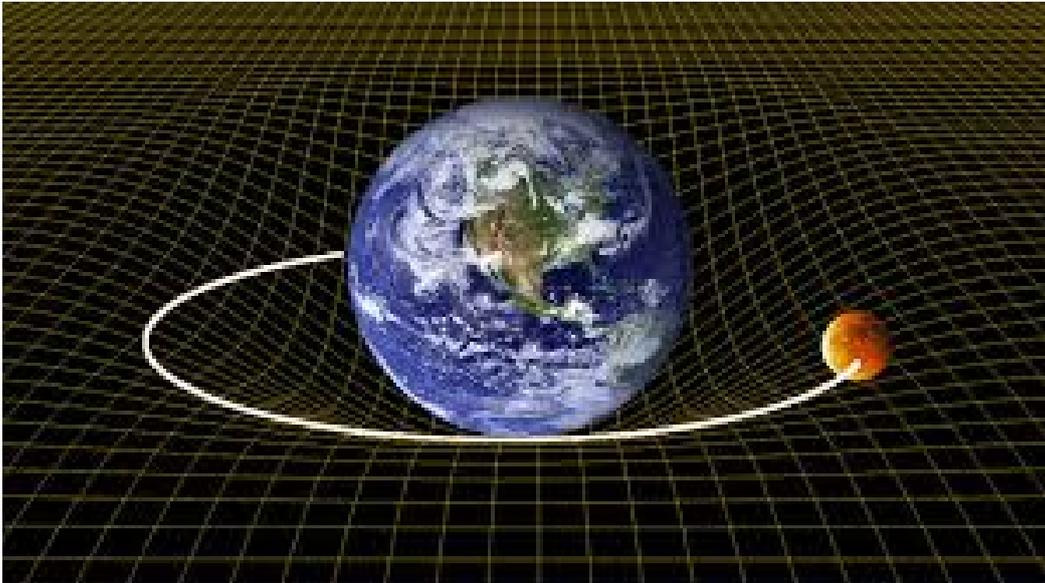


Figura 2.4: curvatura dello spazio-tempo per effetto della Terra

## 2.3 EQUAZIONI DI EINSTEIN

L'equazione tensoriale di Einstein è la relazione cardine della relatività generale che collega la distribuzione di materia con la curvatura spazio-temporale. Le sue possibili soluzioni possono fornire risposte ad una vasta gamma di situazioni fisiche, dall'approssimazione di campo debole in cui viene riproposta la fisica Newtoniana, a condizioni di forte campo gravitazionale in cui le corrette previsioni sono alquanto lontane da quelle precedenti.

Esiste un modo analogo a quello utilizzato per le equazioni del moto della meccanica per derivare la famosa relazione.

Partendo da una densità di Lagrangiana, si definisce l'azione che dovrà in seguito essere minimizzata. Precedentemente lo scopo era trovare la traiettoria che rendeva stazionario l'integrale d'azione, perciò la variazione a cui eravamo interessati era rispetto alle possibili traiettorie.

In quest'ultimo caso invece, lo scopo è quello di trovare la metrica che tra tutte le possibili, rende minimo il funzionale d'azione.

L'azione totale è definita nel seguente modo:

$$S = \int_M \sqrt{-g} R d^4x + \int_{\partial M} k \sqrt{-k} d^3x + \int_M L_M(g_{\mu\nu}, \psi_M) d^4x \quad (2.16)$$

dove il primo integrale è chiamato azione di Hilbert e dipende da  $g$  (determinante della metrica) e da  $R$  (scalare di curvatura), il secondo termine è un integrale di bordo e il terzo è il termine che contiene la distribuzione di massa, infatti  $\psi_M$  è una funzione che dipende dalla densità di materia.

Inizialmente faremo qualche conto esplicito variando soltanto il primo termine, giustificando in seguito la presenza degli altri due integrali.

Tenendo presente che lo scalare di curvatura  $R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$ , che il tensore di Ricci  $R_{\alpha\beta} = R^\mu{}_{\alpha\mu\beta}$  e che  $g$  è il determinante di  $g_{\alpha\beta}$ , variare l'azione di Hilbert significa questo:

$$\delta S = \int_M \left( \sqrt{-g} (\delta R_{\alpha\beta}) g^{\alpha\beta} + \sqrt{-g} R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} + R \delta(\sqrt{-g}) \right) d^4x \quad (2.17)$$

Notiamo subito che uno dei tre termini è già differenziato rispetto a  $g^{\alpha\beta}$ , mentre per i restanti sarà necessario un po' di lavoro matematico.

Dall'equazione (2.15), possiamo contrarre il primo e il terzo indice così da ottenere un'espressione per il tensore di Ricci.

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^\mu{}_{\alpha\mu\beta} = \Gamma^l{}_{\beta\alpha,l} - \Gamma^l{}_{l\alpha,\beta} + \Gamma^l{}_{l\nu} \Gamma^\nu{}_{\beta\alpha} - \Gamma^l{}_{\beta\nu} \Gamma^\nu{}_{l\alpha} \quad (2.18)$$

A questo punto, si dovrebbe andare a sostituire ogni simbolo di Christoffel con

l' espressione (2.14) per poi differenziare il tensore di Ricci rispetto alla metrica  $g^{\alpha\beta}$ . Questo conto risulta alquanto lungo, perciò lo discuteremo dopo aver calcolato correttamente anche il termine  $R\delta(\sqrt{-g})$ .

Tenendo a mente la seguente formula di Jacobi per differenziare un determinante

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (2.19)$$

è semplice trovare

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.20)$$

l' espressione di cui abbiamo bisogno.

Arrivati a questo punto, dobbiamo analizzare il termine in cui viene differenziato il tensore di Ricci.

Come già detto però, tale conto risulta molto lungo e porta al seguente risultato:

$$g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} = \nabla^\alpha v_\alpha \quad (2.21)$$

dove

$$v_\alpha = \nabla^\beta (\delta g_{\alpha\beta}) - g^{\mu\nu} \nabla_\alpha (\delta g_{\mu\nu}) \quad (2.22)$$

Notiamo che quest' ultimo termine è una divergenza esattamente come il termine di bordo dell'azione (2.16) se gli si applicasse il teorema della divergenza. Entrambi si elidono, così da apportare un' ulteriore semplificazione al risultato finale.

Ipotizzando di essere nello spazio vuoto, possiamo trascurare il terzo termine dell' azione cioè quello dovuto alla materia, così da ottenere finalmente l' equazione di campo di Einstein nel vuoto.

Con tali considerazioni otteniamo il seguente risultato:

$$\delta S = \int_M \left( R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} \right) \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} d^4x = 0 \quad (2.23)$$

Poiché tale uguaglianza deve valere per qualsiasi variazione infinitesima, si ottiene il seguente risultato finale

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} \quad (2.24)$$

Variando  $S$  rispetto alla metrica  $g^{\alpha\beta}$  in cui è presente il termine di materia si ottiene l'equazione generale di Einstein.

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} \quad (2.25)$$

$T_{\alpha\beta}$  rappresenta il tensore di energia-stress che dipende dalla distribuzione di massa e densità e la cui espressione analitica è :

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\alpha\beta}} \quad (2.26)$$

dove  $S_M$  rappresenta il terzo integrale d' azione dovuto alla presenza di massa.

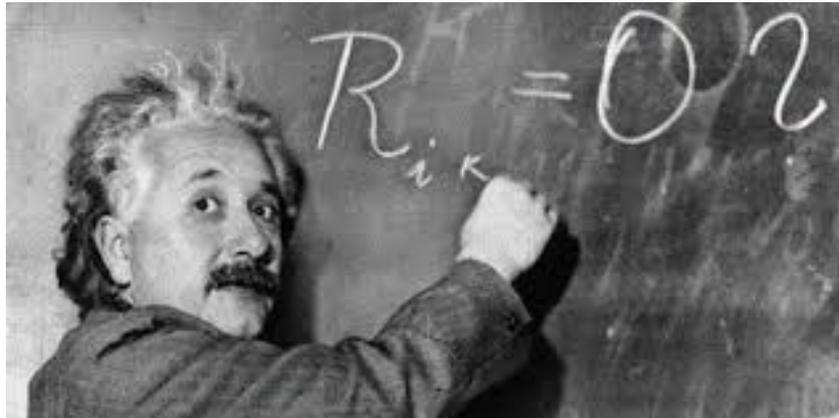


Figura 2.5: Albert Einstein

## Capitolo 3

# TEORIE $f(R)$

La nuova teoria della gravità sviluppata da Einstein permise una profonda comprensione delle proprietà geometriche dello spazio-tempo ma allo stesso tempo pose le radici per la nascita di nuove controversie, le quali erano frutto di alcuni scostamenti tra previsioni teoriche e misurazioni sperimentali sulla dinamica dell' universo.

La materia oscura, di cui abbiamo già discusso nella prima parte, è uno dei misteri più affascinanti da svelare, infatti essa non è giustificabile dalla relatività generale e non ha tuttora una spiegazione scientifica.

Come abbiamo già visto però, il bisogno di superare la teoria di Einstein non proviene solo da essa; infatti non pochi problemi emergono dallo studio dell' evoluzione dell' universo, che sembra aver seguito un percorso alquanto diverso da quello che si potesse immaginare. Da qui il bisogno di tirare in ballo un nuovo componente dell' universo, l' energia oscura, che sembra essere indispensabile per comprendere la forte accelerazione a cui è soggetto l' universo.

Ma è possibile che tutti questi nuovi pezzi da aggiungere al puzzle siano frutto di una trattazione non adeguatamente precisa? Può essere che la nostra modellizzazione della forza dominante nell' universo sia corretta a dimensioni vicine alle nostre e errata su scala maggiore? Non scordiamoci che la prima teoria della gravità fu proprio sviluppata osservando la caduta dei gravi e i moti dei pianeti del sistema solare e poi fu adattata per l' universo.

Anche se tale visione possa sembrare alquanto strana, si tenga a mente che in fisica nulla è bizzarro fino a prova contraria, infatti una vicenda paragonabile è già accaduta. Osservando l' orbita di Mercurio si vide che essa era soggetta ad una precessione non spiegabile dalla gravità di Newton e si ipotizzò la presenza di un pianeta nelle sue vicinanze che ne perturbasse il moto. Tale pianeta non fu mai osservato e la soluzione del problema si ottenne con lo sviluppo della relatività generale.

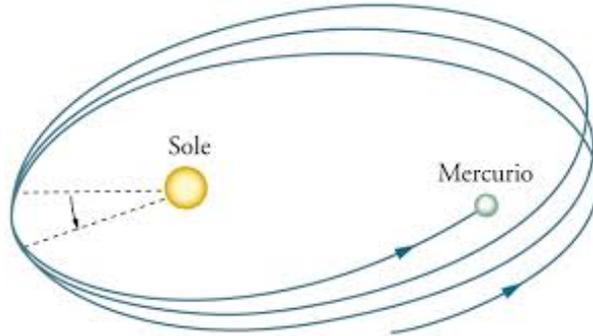


Figura 3.1: precessione dell' orbita di mercurio

### 3.1 FORMALISMO METRICO

Detto ciò, siamo pronti allo sviluppo delle teorie  $f(R)$  seguendo il percorso fatto per la relatività generale, utilizzando cioè i principi variazionali. Dal nome si può intuire che queste nuove teorie nascono dalla generalizzazione della Lagrangiana nell' azione di Einstein-Hilbert ( $\sqrt{-g}R$ )  $\rightarrow$  ( $\sqrt{-g}f(R)$ ). Esistono però due modi differenti di ragionare: è possibile sviluppare la teoria pensando che la metrica e il simbolo di Christoffel siano legati tra loro (formalismo metrico) oppure ipotizzare che le due quantità siano indipendenti (formalismo di Palatini).

La trattazione seguente adotterà il formalismo metrico, perciò sarà necessario variare l' azione solamente rispetto alla metrica.

$$S = \int_M \sqrt{-g}f(R) d^4x + \int_{\partial M} k\sqrt{-k} d^3x + \int_M L_M(g_{\mu\nu}, \psi_M) d^4x \quad (3.1)$$

Una domanda che potrebbe sorgere spontanea è la seguente: perchè la modifica all' azione classica coinvolge proprio lo scalare di Ricci?

La risposta è meno interessante di quanto si possa pensare, infatti la questione riguarda la pura praticità poiché una teoria di gravità in cui  $R$  diventa una funzione qualsiasi di sè stesso ( $f(R)$ ), risulta essere non troppo complessa da sviluppare e allo stesso tempo abbastanza generale da apportare modifiche a diversi ordini.

In generale, si possono sviluppare diverse teorie in cui la modifica abbia la seguente forma:

$$f(R) = \dots + \frac{\alpha_2}{R^2} + \frac{\alpha_1}{R} + R + \frac{R^2}{\beta_2} + \frac{R^3}{\beta_3} + \dots \quad (3.2)$$

Ripetendo gli stessi passaggi fatti in precedenza è possibile ottenere la variazione rispetto alla metrica così da avere l' equazione di campo per una gravità  $f(R)$ .

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square]f(R) = k^2 T_{\mu\nu} \quad (3.3)$$

dove  $k^2 = 8\pi G$  e  $\square = \nabla^\mu \nabla_\mu$ .

La traccia dell' equazione (3.3) è:

$$3\square f'(R) + f'(R)R - 2f(R) = k^2 T \quad (3.4)$$

L' equazione (3.3) può anche essere scritta in un modo più familiare a noi, in analogia all' equazione di campo della relatività generale:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = k^2(T_{\mu\nu}^{(m)} + T_{\mu\nu}^{(d)}) \quad (3.5)$$

$T_{\mu\nu}^{(d)}$  viene detto tensore momento-energia effettivo e si va a sommare al contributo reale di materia.

È necessario eseguire dei semplici passaggi algebrici per verificare la sua espressione:

$$k^2 T_{\mu\nu}^{(d)} \equiv g_{\mu\nu} \frac{(f(R) - R)}{2} + \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R) + (1 - f'(R))R_{\mu\nu} \quad (3.6)$$

L' identificazione di tale quantità con un tensore momento-energia effettivo, rende l' equazione di campo più facile da ricordare e anche da interpretare. Questo stratagemma ha però anche una motivazione fisica di esistere, infatti il termine effettivo rispetta l' equazione di continuità proprio come il tensore corrispondente alla reale materia.

Per verificarlo basta utilizzare l' identità di Bianchi insieme all' equazione di continuità, infatti da queste due relazioni:

$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$  e  $\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(m)} = 0$  si arriva immediatamente al risultato

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(d)} = 0 \quad (3.7)$$

## 3.2 FORMALISMO DI PALATINI

Al contrario di quanto fatto con il formalismo metrico, il formalismo di Palatini impone che la metrica  $g_{\mu\nu}$  e il simbolo di Christoffel  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  siano due variabili indipendenti, perciò è necessario variare l' azione (3.1) rispetto ad entrambe le quantità.

Variando l' azione (3.1) rispetto alla metrica  $g_{\mu\nu}$  si ottiene:

$$f'(R)R_{\mu\nu}(\Gamma) - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} = k^2 T_{\mu\nu}^{(m)} \quad (3.8)$$

in cui si deve tener conto che  $R_{\mu\nu}(\Gamma)$  è il tensore di Ricci corrispondente alla connessione  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  e che in generale è differente dal tensore di Ricci  $R_{\mu\nu}(g)$  corrispondente alla connessione metrica.

La traccia dell' equazione (3.8) risulta essere:

$$f'(R)R - 2f(R) = k^2T \quad (3.9)$$

Come detto in precedenza, l' azione corrispondente alle teorie  $f(R)$  deve essere anche variata rispetto a  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  e ciò porta alla seguente equazione

$$R_{\mu\nu}(g) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R(g) = \frac{k^2T_{\mu\nu}}{f'(R)} - \frac{f'(R)R(T) - f(R)}{2f'(R)}g_{\mu\nu} + \frac{1}{f'(R)}(\nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu}\square f'(R)) - \frac{3}{2[f'(R)]^2}[\partial_\mu f'(R)\partial_\nu f'(R) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla f'(R))^2] \quad (3.10)$$

Osserviamo che nella gravità di Einstein ( $f(R) = R$  e  $f'(R) = 1$ ), le due equazioni di campo (3.9) e (3.10) sono identiche alle (3.4) e (3.3) ricavate con il formalismo metrico. La differenza nasce quando si considera uno specifico modello  $f(R)$  che include dei termini non lineari in  $R$ .

### 3.3 EQUIVALENZA CON LA TEORIA DI BRANS-DICKE

Nei vari campi della fisica, e soprattutto nella cosmologia, esistono un' infinità di diverse teorie che hanno lo scopo di spiegare qualsiasi genere di fenomeno ed evoluzione non ancora profondamente comprese. Per quel che riguarda i nostri interessi, abbiamo visto una delle tante idee sviluppate per spiegare l' evoluzione del cosmo che si basa su una sostanziale modifica dell' equazione di campo gravitazionale.

Come conseguenza degli innumerevoli diversi approcci usati, nasce un problema di classificazione delle teorie sviluppate.

Infatti, due teorie che a primo impatto danno l' impressione di essere completamente sconnesse possono realmente esserlo oppure possono risultare due diverse rappresentazioni della stessa teoria. In quest' ultimo caso, si dovrebbe poter notare come attraverso la ridefinizione dei campi utilizzati si arrivi alla medesima equazione di campo, mostrando perciò l' equivalenza tra le due teorie.

Focalizzandoci sul nostro problema, mostreremo come le teorie  $f(R)$  discusse in precedenza sono in realtà equivalenti ad una teoria sviluppata intorno agli anni '60 da Brans

e Dicke.

La teoria di Brans-Dicke è una teoria geometrica esattamente come la relatività generale in cui lo spazio è dotato di un tensore metrico ed un tensore di curvatura di Riemann. La differenza sta nel fatto che nella nuova teoria esiste un nuovo campo scalare  $\phi$  che contribuisce alla modifica delle proprietà dello spazio assieme al tensore momento-energia. Per mostrare l'equivalenza tra le due teorie, riscriviamo l'azione che porta alle teorie f(R)

$$S = \int_M \sqrt{-g} f(R) d^4x + \int_{\partial M} k\sqrt{-k} d^3x + \int_M L_M(g_{\mu\nu}, \psi_M) d^4x \quad (3.11)$$

e introduciamo un nuovo campo scalare  $\chi$  e una nuova azione:

$$S = \int_M \sqrt{-g} [f(\chi) + f'(\chi)(R - \chi)] d^4x + \int_{\partial M} k\sqrt{-k} d^3x + \int_M L_M(g_{\mu\nu}, \psi_M) d^4x \quad (3.12)$$

Variando quest'ultima azione rispetto al nuovo campo  $\chi$  introdotto, si ottiene l'equazione:

$$f''(\chi)(R - \chi) = 0 \quad (3.13)$$

Imponendo le seguenti condizioni come soluzione della equazione (3.13)

$$\chi = R \quad \wedge \quad f''(\chi) \neq 0 \quad (3.14)$$

si nota immediatamente l'uguaglianza tra l'azione (3.11) e la (3.12).

Definendo ora:

$$\phi = f'(\chi) \quad (3.15)$$

e

$$V(\phi) = \chi(\phi)\phi - f(\chi(\phi)) \quad (3.16)$$

la (3.12) diventa

$$S = \int_M \sqrt{-g} [\phi R - V(\phi)] d^4x + \int_{\partial M} k\sqrt{-k} d^3x + \int_M L_M(g_{\mu\nu}, \psi_M) d^4x \quad (3.17)$$

Con lo stesso procedimento fatto più volte, possiamo ottenere l'equazione di campo variando l'azione (3.17) relativa alla teoria di Brans-Dicke, ottenendo così:

$$G_{\mu\nu} = \frac{k}{\phi} T_{\mu\nu} - \frac{1}{2\phi} g_{\mu\nu} V(\phi) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) \quad (3.18)$$

da cui si può scrivere anche la traccia di tale equazione:

$$3\square\phi + 2V(\phi) - \phi \frac{dV}{d\phi} = kT \quad (3.19)$$

Dall' equivalenza studiata tra la teoria di Brans-Dicke e le teorie  $f(R)$  con formalismo metrico, si può notare come quest' ultime abbiano un solo grado di libertà in più rispetto alla relatività generale di Einstein. Tale grado di libertà è rappresentato da  $\phi$  che come si può notare dall' equazione (3.19), risulta dinamicamente correlato alla distribuzione di materia.

Quel che noi abbiamo fatto, è stato trattare il caso particolare delle teorie  $f(R)$  con formalismo metrico e vedere sotto quali condizioni poteva nascere un' equivalenza con la teoria di Brans-Dicke. In realtà però il quadro è più vasto, in quanto abbiamo visto esistere un altro formalismo per le teorie  $f(R)$  (formalismo di Palatini) ed esistono anche diverse versioni della teoria di Brans-Dicke. Il legame esistente tra le diverse teorie è mostrato nella figura 3.2 e come si può notare, nel lato destro son presenti gli argomenti da noi trattati con maggior dettaglio.

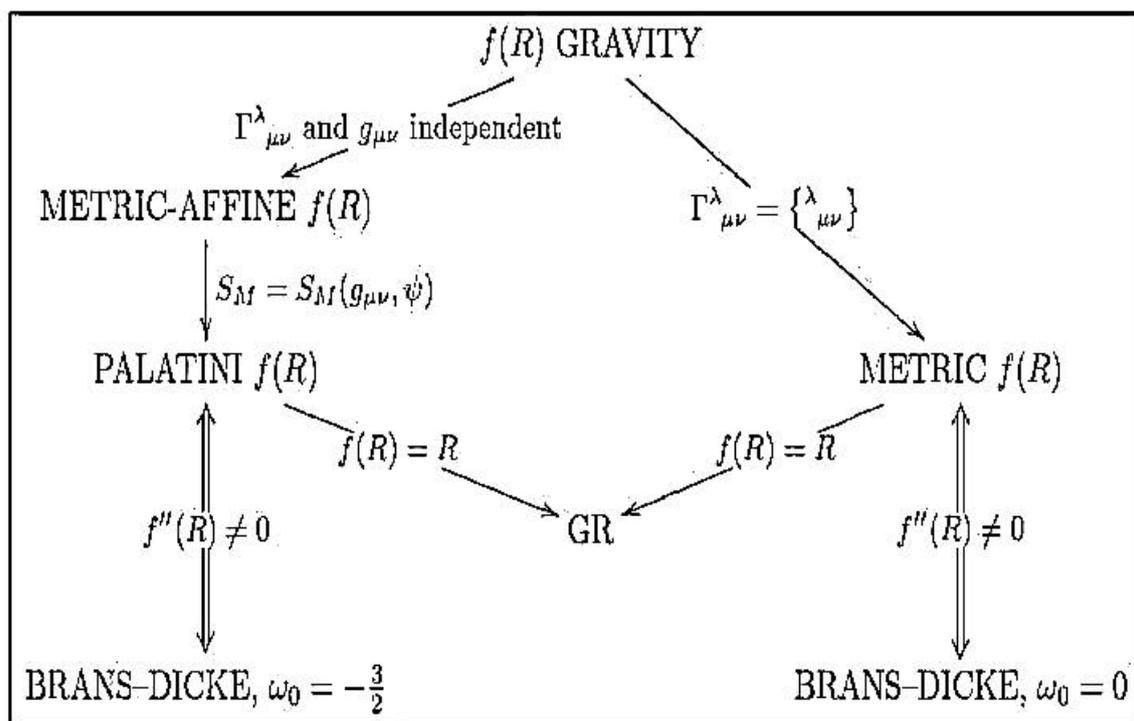


Figura 3.2: legame tra le varie teorie della gravitazione

# Capitolo 4

## APPLICAZIONI

Nel capitolo d' introduzione abbiamo esposto alcuni problemi tuttora irrisolti, soffermandoci principalmente sulle curve di rotazione galattiche, stabilità idrostatica di stelle di neutroni ed evoluzione cosmica. Questi tre aspetti ci hanno fatto capire perché sia stato necessario lo sviluppo di nuovi approcci verso la gravità, in particolare le teorie  $f(R)$ . La cosa che manca a questo punto e che forse rappresenta la parte più curiosa della trattazione, è verificare se realmente questa nuova teoria sia in grado di colmare le incomprensioni che permeano il nostro universo. Perciò in quest' ultimo capitolo cercheremo, seppur in maniera alquanto superficiale, di applicare ciò che abbiamo sviluppato per fornire delle possibili giustificazioni alle osservazioni.

### 4.1 INSTABILITÀ IDROSTATICA DI STELLE DI NEUTRONI

Consideriamo ora il cambiamento a cui è soggetto l' equilibrio idrostatico se esteso alle teorie  $f(R)$ .

In questo caso non rifaremo tutti i conti per arrivare al risultato, poichè essi sono analoghi a quelli trattati nel capitolo d' introduzione. L' unica differenza sostanziale risiede nelle equazioni di campo che in questo caso risultano essere le seguenti

$$f'R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}fg_{\mu\nu} - [\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square]f' = k^2T_{\mu\nu} \quad (4.1)$$

$$3\square f' + f'R - 2f = k^2T \quad (4.2)$$

Effettuando dei cambi di variabile analoghi a quelli della parte introduttiva

$$z = \frac{r}{\epsilon_0} \quad (4.3)$$

$$w = \frac{\phi}{\phi_c} \quad (4.4)$$

$$\epsilon_0 = \sqrt{\frac{3}{2k^2 A_n (-\phi_c)^{n-1}}} \quad (4.5)$$

è possibile finalmente scrivere l'equazione di Lanè-Emden modificata

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dw}{dz} + w^n = \frac{m\epsilon_0}{8z} \int_0^{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} z' [e^{m\epsilon_0|z-z'|} - e^{-m\epsilon_0|z+z'|}] w^n(z') dz' \quad (4.6)$$

con  $\epsilon$  che rappresenta il raggio stellare.

Le soluzioni di questa nuova equazione saranno in generale diverse da quelle della teoria Newtoniana e alcune di esse rispecchieranno proprio quelle stelle di neutroni che non eravamo riusciti a giustificare precedentemente.

La nuova equazione di Lanè-Emden conterrà quindi al suo interno delle condizioni fisiche, per l'equilibrio, diverse da quelle contenute nella vecchia equazione (1.10); condizioni che spiegano pienamente l'equilibrio di certe stelle di neutroni i cui parametri di massa e densità sembravano essere talmente elevati da non permettere la stabilità. Come si può intuire, non è per niente semplice trovare delle soluzioni analitiche dell'equazione (4.6), infatti il modo migliore di agire è per via numerica.



Figura 4.1: stella di neutroni a confronto con Manhattan

## 4.2 CURVE DI ROTAZIONE

Il problema delle curve di rotazione è stato trattato a fondo nell' introduzione, per rinfrescare la memoria, esso consiste nel fatto che la materia lontana dal centro della galassia sembra ruotare con una velocità superiore rispetto a quella prevista. La soluzione più immediata sembra quella di affermare l' esistenza di materia non visibile, che interagendo gravitazionalmente giustificerebbe le osservazioni. Quindi c'è più materia di quella che vediamo? E soprattutto che cos'è questa materia oscura? Come ormai si è capito, in questa parte cercheremo di fornire una possibile spiegazione al problema senza l' utilizzo di alcuna materia oscura, ma esclusivamente per mezzo delle teorie  $f(R)$ .

Utilizzando la teoria nella forma  $f(R) = R^n$ , è possibile dimostrare l' espressione del potenziale gravitazionale

$$\phi_{R^n}(r) = -\frac{GM}{r} \left[ 1 + \frac{\left(\frac{r}{r_c}\right)^\beta - 1}{2} \right] \quad (4.7)$$

in cui  $r_c$  rappresenta una lunghezza e  $\beta$  è un parametro adimensionale. Senza entrare troppo nel dettaglio, possiamo fare alcune considerazioni di carattere fisico riguardanti la forma di questo potenziale.

Innanzitutto, affinché esso sia davvero un potenziale gravitazionale, deve soddisfare la seguente condizione:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi_{R^n}(r) = 0 \quad (4.8)$$

che porta il parametro  $\beta$  a cadere entro un certo range

$$0 \leq \beta < 1 \quad (4.9)$$

Se si osserva l' espressione (4.7) si può notare come a distanze molto elevate dalla sorgente, il termine correttivo tende a zero molto lentamente e si mantiene su valori negativi (potenziale attrattivo). Questa osservazione è molto importante in quanto la spiegazione delle curve di rotazione discende direttamente da questo fatto.

Perciò la materia ai margini della galassia viaggerebbe a velocità più elevate del previsto, non per causa di altra materia non visibile, bensì grazie al termine correttivo del potenziale che, in condizioni di equilibrio, causerebbe un aumento della forza centripeta e quindi un aumento di velocità rotazionale a parità di distanza dal centro.

### 4.3 EVOLUZIONE COSMICA

Dalle misure effettuate dagli astronomi, risulta che l' universo si stia espandendo più velocemente di quanto previsto dall' attuale teoria. Ciò ha portato alla definizione di un' energia oscura, analoga alla materia oscura, che fungesse da motore per l' espansione controbilanciandosi all' energia gravitazionale.

Nessuno sa che cosa sia questa energia oscura, perciò il nostro intento sarà quello di fornire l' accelerazione mancante esclusivamente per mezzo delle teorie  $f(R)$ .

Assumendo lo spazio isotropo e l' universo riempito da un fluido perfetto, possiamo identificare l' universo con la metrica di Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (4.10)$$

in cui  $k$  è un parametro che può assumere tre possibili valori ( $k = 0, 1, -1$ ) che corrispondono ad un universo piatto, chiuso o aperto rispettivamente e  $a(t)$  è un fattore di scala che varia nel tempo.

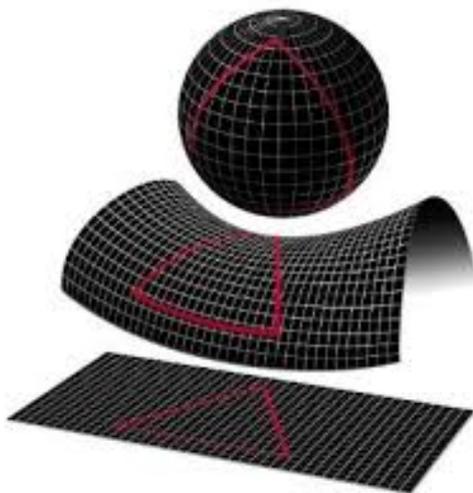


Figura 4.2: possibili modelli di universo, partendo dall' alto si può notare l' universo chiuso, poi aperto e infine piatto

Il tensore energia-momento per un fluido perfetto ha la seguente forma:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu} \quad (4.11)$$

dove  $u^\mu$  denota la quadri-velocità di un osservatore solidale al fluido e  $\rho$  e  $P$  sono la densità di energia e pressione rispettivamente.

In prima approssimazione, la metrica FLRW può essere estesa anche per un universo che obbedisce alle leggi delle teorie  $f(R)$  con un' azione nella forma:

$$S = \int_M \sqrt{-g} [R + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}] d^4x + S_M \quad (4.12)$$

Ora, inserendo la metrica FLRW nell' equazione di campo (3.3) per le teorie  $f(R)$ , ottenuta tramite il formalismo metrico e tenendo conto della forma del tensore energia-momento come da equazione (4.11), si arriva alle due equazioni che ci servono per determinare l' evoluzione dell' universo:

$$H^2 = \frac{k}{3f'} \left[ \rho + \frac{Rf' - f}{2} - 3H\dot{R}f'' \right] \quad (4.13)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{k}{f'} \left[ P + (\dot{R})^2 f''' + 2H\dot{R}f'' + \ddot{R}f'' + \frac{1}{2}(f - Rf') \right] \quad (4.14)$$

dove  $H$  è la costante di Hubble ed è definita come  $H \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ .

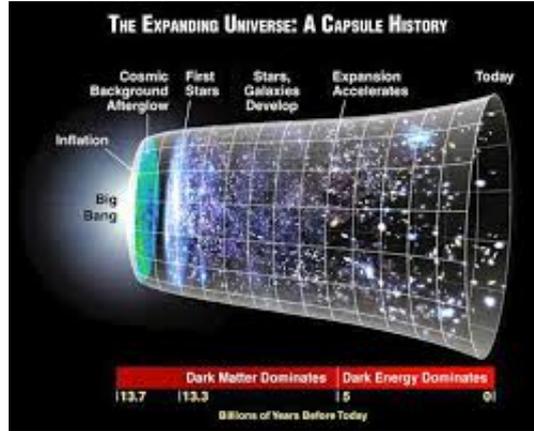


Figura 4.3: La figura mostra la storia del nostro universo dal big bang fino a ora. Da notare l' accelerazione negli ultimi anni attribuita all' energia oscura.

Un semplice metodo per vedere come tali equazioni, ottenute dalle teorie  $f(R)$ , possono sostituire la presenza di un' energia oscura per giustificare l' elevata espansione dell' universo, è quello di definire due quantità: una  $\rho_{eff}$  e una  $P_{eff}$  nel seguente modo:

$$\rho_{eff} = \frac{Rf' - f}{2f'} - \frac{3H\dot{R}f''}{f'} \quad (4.15)$$

$$P_{eff} = \frac{\dot{R}^2 f''' + 2H\dot{R}f'' + \ddot{R}f'' + \frac{1}{2}(f - Rf')}{f'} \quad (4.16)$$

dove  $\rho_{eff}$  deve essere non negativo, come si può vedere dalla (4.13) nel limite  $\rho \rightarrow 0$ . Nel vuoto, le equazioni (4.13) e (4.14), sono molto simili alle equazioni standard di Friedmann in cui non è presente alcuna modifica alla gravità:

$$H^2 = \frac{k}{3}\rho_{eff} \quad (4.17)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{k}{6}[\rho_{eff} + 3P_{eff}]. \quad (4.18)$$

Perciò, si può notare come nel vuoto, il termine di correzione apportato per mezzo delle teorie f(R) funge da fluido efficace. Ciò ci mostra come sia possibile ottenere dei risultati osservati senza chiamare in ballo l' energia oscura.



Figura 4.4: galassie in allontanamento per l' espansione dell' universo

## Capitolo 5

# CONCLUSIONI

Da non troppo tempo l' uomo ha iniziato a scrutare ciò che lo circonda e con l' avanzare della tecnologia, i confini entro cui sarà limitato verranno probabilmente ampliati; e chissà che non sarà quello il giorno in cui ci renderemo conto del nostro ruolo in questo spazio immenso. Intanto possiamo soltanto fare supposizioni, ipotesi, per cercare di colmare questo senso di curiosità che ci tiene vivi e che ci rende unici. Riportandoci coi piedi per terra, possiamo renderci conto del fatto che le teorie  $f(R)$  sono solo una piccola parte tra la vasta fauna di argomenti con i quali si sono imbattuti i cosmologi, eppure abbiamo mostrato per quanto possibile, come esse siano in grado di superare alcuni ostacoli osservabili.

Questo approccio, pur sembrando puramente matematico, riesce a fare delle corrette previsioni e quindi non può essere sicuramente rigettato prima di un dovuto approfondimento. D' altronde, approfondimenti verranno sicuramente effettuati su molti dei vari fronti che hanno il nostro stesso obiettivo, in quanto tali dibattiti risultano attuali e ancora molto aperti.



Figura 5.1: La figura mostra l' acceleratore di particelle di Ginevra.

L' esempio più lampante riguarda la materia oscura, infatti numerosi sono i progetti che hanno lo scopo di trovarla. Dal cern di Ginevra, al Gran Sasso d' Abruzzo si tenta di scovare qualche segnale di particelle wimps, che secondo una teoria sarebbero i costituenti della materia oscura. Tali particelle wimps (weakly interacting massive particles) sarebbero dotate di massa ma non di carica elettrica e tantomeno di carica di colore, perciò sarebbero soggette esclusivamente ad interagire gravitazionalmente e debolmente. Non essendo mai state osservate, la comunità scientifica si divide in due: chi pensa che queste particelle non esistano e che quindi la materia oscura vada spiegata in qualche altro modo, oppure c'è chi pensa che la loro debolezza d' interazione porti ad una enorme fatica nel rivelarle.

Tuttavia anche ammettendo l' esistenza della dark matter sotto forma di particelle wimps, rimarrebbero inspiegati i fenomeni inerenti all' energia oscura e perfino la stabilità delle stelle più massicce resterebbe un mistero.

Quel che è certo, è che abbiamo ancora molto da scoprire sul nostro universo e chissà se la strada da noi intrapresa con le teorie  $f(R)$ , si rivelerà quella giusta. Nel frattempo, continueremo ad alzare gli occhi al cielo con quel senso di ammirazione e rispetto che ci ha contraddistinti in questi migliaia di anni di civiltà.



# Bibliografia

- [1] dispense del docente della facoltà di fisica di Bologna Roberto Casadio, “*Elements of relativity*”, 2014
- [2] Robert Wald, “*General relativity*”, Chicago: Univ. of Chicago, 1984. ISBN 0-226-87033-2
- [3] Lev Davidovic Landau, “*Fisica teorica 1. Meccanica*”, Editori Riuniti, 2003. ISBN 88-359-5358-8
- [4] Bernard F. Schutz, “*A first Course in General Relativity*”, Cambridge University Press, 1985. ISBN 0-521-27703-5
- [5] Arturo Stabile e Salvatore Capozziello, “*Self-gravitating systems in extended gravity*”, arXiv:1411.3143v1 [gr-qc], 2014
- [6] Antonio De Felice e Shinji Tsujikawa, “*f(R) theories*”, arXiv:1002.4928v2 [gr-qc], 2010
- [7] Thomas Sotiriou e Valerio Faraoni, “*f(R) theories of gravity*”, arXiv:0805.1726v4 [gr-qc], 2010
- [8] Eugeny Babichev e David Langlois, “*Relativistic stars in f(R) and scalar-tensor theories*”, arXiv:0911.1297v3 [gr-qc], 2010
- [9] Dispense del corso di astrofisica dell’ università di Bologna tenuto da Gabriele Giovannini, 2015