

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

Misura dell'angolo γ a LHCb

Relatore:
Prof. Angelo Carbone

Presentata da:
Luca Pagani

Correlatore:
Dott. Umberto Marconi

Sessione II
Anno Accademico 2014/2015

*“Fatti non foste a viver come bruti,
ma per seguir virtute e canoscenza.”*

*Dante Alighieri(1265-1321),
La Divina Commedia, Inferno: C. XXVI, v. 119-120.*

Indice

1	Introduzione teorica	7
1.1	Simmetrie.	7
1.2	Classificazione delle simmetrie.	12
1.3	Simmetrie discrete.	13
1.3.1	Operatore parità.	13
1.3.2	Operatore coniugazione di carica.	15
1.3.3	Violazione della parità e della coniugazione di carica nelle interazioni deboli.	16
1.3.4	Simmetria di coniugazione di carica e parità.	17
1.3.5	Simmetria CPT.	19
1.4	Fenomenologia della violazione di CP.	19
2	Trattazione quantistica di un sistema di mesoni neutri	24
2.1	Approssimazione di Weisskopf-Wigner.	24
2.2	Autofunzioni ed autovalori di H_{eff}	29
2.3	Violazione di CP.	32
3	Il flavour nel Modello Standard	36
3.1	Proprietà delle interazioni deboli.	39
3.1.1	Processi puramente leptonici.	40
3.1.2	Processi semileptonici.	41
3.1.3	Processi non leptonici.	42
3.2	Universalità dei leptoni.	43
3.3	Matrice CKM e triangoli unitari.	44
3.3.1	Parametrizzazione di Wolfenstein e triangoli unitari.	49
4	Misurazione dell'angolo γ	53
4.1	Metodi di misura dell'angolo γ	53
4.1.1	Metodo Atwood-Dunietz-Soni.	54
4.1.2	Metodo Gronau-London-Wyler.	59
4.1.3	Metodo Giri-Grossman-Soffer-Zupan.	61

4.2 Risultati delle misure.	63
5 Appendice	65

Introduzione

L'esperimento LHCb al CERN di Ginevra è stato appositamente progettato per effettuare misure di precisione nel settore della fisica del sapore, per verificare la validità delle previsioni del Modello Standard.

Il Modello Standard descrive le trasformazioni dello stato di flavour dei quark secondo lo schema di *mixing* compendiato nella matrice unitaria di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. La verifica dell'unitarietà della matrice di mixing è dunque uno dei campi d'indagine più importanti nella fisica delle particelle. I modelli teorici che estendono il Modello Standard prevedono infatti meccanismi alternativi a quello CKM per la trasformazione del flavour che implicherebbero una violazione della unitarietà.

Allo scopo di studiare la dinamica del flavour l'esperimento LHCb realizza misure della violazione della simmetria di coniugazione di carica e parità CP . Le misure di violazione della simmetria CP permettono di determinare i valori dei parametri complessi della matrice CKM (modulo e fase). Esse si basano sulla misura delle asimmetrie di decadimento di stati coniugati di carica di mesoni costituiti da quark *charm* (mesoni D) e *beauty* (mesoni B) in stati finali costituiti da particelle scelte opportunamente.

Di particolare importanza in questo programma di ricerca è la misura della fase del termine V_{ub} della matrice CKM, denominata γ .

Scopo della tesi è lo studio dei metodi di misura della fase γ . La tesi è organizzata in quattro capitoli. Nei primi tre capitoli sono state poste le basi teoriche per la comprensione della fenomenologia delle interazioni deboli e della sua descrizione nel Modello Standard. È stata discussa in dettaglio la dinamica del sistema dei mesoni neutri e la violazione della simmetria CP dovuta sia al decadimento sia alla oscillazione.

Dopo l'inquadramento teorico, nel quarto e ultimo capitolo, sono stati presentati i tre modelli teorici generalmente utilizzati per la misura della fase γ e impiegati dagli esperimenti dedicati alla fisica del flavour. I metodi proposti sono quelli più importanti, che fino ad oggi hanno consentito di misurare γ .

Al momento LHCb ha ottenuto la migliore misura di γ , con un errore relativo del 13%, combinando le tre metodologie di analisi. Si prevede che l'esperimento LHCb possa migliorare significativamente la precisione di misura raccogliendo nel prossimo futuro un campione di eventi di dimensione un'ordine di grandezza maggiore dell'attuale.

Capitolo 1

Introduzione teorica

1.1 Simmetrie.

Le simmetrie sono proprietà di invarianza dei sistemi fisici. Essendo correlate a leggi di conservazione esse permettono di prevedere le possibili evoluzioni di un sistema, senza dover necessariamente risolvere le equazioni del moto.

Una simmetria può essere definita come: *operazione di trasformazione che lascia invariate le equazioni del moto*. Un esempio di simmetria in meccanica classica è relativo al moto di una particella di massa m , quando osservata da due sistemi di riferimento inerziali differenti. Il primo osservatore impiega la terna di coordinate $\mathbf{x}(t) = (x, y, z)$, il secondo la terna di coordinate $\mathbf{x}'(t) = (x', y', z')$. Poiché i due sistemi sono in moto relativo rettilineo e uniforme, è possibile passare dalla descrizione del moto dell'uno, alla descrizione dell'altro, mediante una trasformazione: $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}(t) \pm vt$ (trasformazioni di Galileo). Nel caso libero, le equazioni del moto della particella nel primo sistema di riferimento sono $\ddot{\mathbf{x}}(t) = 0$, nel secondo sistema di riferimento $\ddot{\mathbf{x}}'(t) = 0$. La descrizione del moto della particella nei due sistemi di riferimento è per questo del tutto equivalente. Più in generale, in meccanica relativistica, possono essere studiate le proprietà di simmetria sotto l'azione delle trasformazioni del gruppo di Lorentz e Poincaré.

La presenza di una simmetria determina in generale la conservazione di corrispondenti quantità fisiche. La connessione tra simmetrie continue (dipendenti cioè con continuità da parametri) e quantità conservate, è resa esplicita dal teorema di Noether: *un sistema fisico che ammetta un gruppo di diffeomorfismi ad un parametro presenta un integrale primo del moto*. È possibile stabilire quale siano le grandezze conservate richiedendo l'invarianza della densità di lagrangiana per trasformazione di simmetria:

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_\alpha \pm \epsilon\gamma_\alpha, \dot{q}_\alpha \pm \epsilon\dot{\gamma}_\alpha, t) - \mathcal{L}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t), \quad \delta\mathcal{L} = 0 \quad (1.1)$$

La variazione della lagrangiana è fatta dipendere per comodità da un parametro reale infinitesimo indicato con ϵ . Considerando lo sviluppo al primo ordine nel parametro ϵ

otteniamo:

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^3 \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{\alpha}} \epsilon\gamma_{\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \epsilon\dot{\gamma}_{\alpha} \right] = 0 \quad (1.2)$$

in funzione della derivata totale rispetto al tempo può essere riscritta:

$$\epsilon \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \gamma_{\alpha} \right) = 0 \quad (1.3)$$

La grandezza conservata è pertanto:

$$\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \gamma_{\alpha} = \text{const.} \quad (1.4)$$

La presenza di una simmetria implica quindi la validità di una legge di conservazione, utile in generale a semplificare la descrizione del moto del sistema. In meccanica quantistica, così come nelle teorie di campo, le leggi di conservazione associate a simmetrie continue hanno il carattere di conservazione locale, assumono cioè la forma di un'equazione di continuità, esprimibile con il formalismo covariante in un'espressione del tipo:

$$\partial_{\mu} J^{\mu} = \partial_0 J^0 + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.5)$$

La grandezza conservata è quindi:

$$Q = \int d^3x J_0 \quad (1.6)$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio. La sua variazione temporale è nulla:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int d^3x J_0 = \int d^3x \partial_0 J_0 = - \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.7)$$

Questo risultato oltreché dipendere dall'equazione di continuità si basa sull'ipotesi che la corrente \mathbf{J} tenda a zero all'infinito in modo sufficientemente rapido. Ad esempio, un'equazione di continuità, fondamentale per l'interpretazione della meccanica quantistica, è derivabile a partire dall'equazione di Schrödinger per la funzione d'onda $\psi(\mathbf{x}, t)$:

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t) + U(x)\psi(\mathbf{x}, t) \quad (1.8)$$

Moltiplicando ambo i membri dell'equazione (1.8) per la funzione d'onda complessa coniugata $\psi^*(\mathbf{x}, t)$ si ottiene:

$$i\hbar \psi^*(\mathbf{x}, t) \frac{d\psi}{dt}(\mathbf{x}, t) = -\psi^*(\mathbf{x}, t) \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t) + \psi^*(\mathbf{x}, t) U(x) \psi(\mathbf{x}, t) \quad (1.9)$$

L'espressione dell'equazione di Schrödinger complessa coniugata, moltiplicata per la funzione d'onda $\psi(\mathbf{x}, t)$ analogamente è:

$$-i\hbar\psi(\mathbf{x}, t)\frac{d\psi^*}{dt}(\mathbf{x}, t) = -\psi(\mathbf{x}, t)\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^*(\mathbf{x}, t) + \psi(\mathbf{x}, t)U(x)\psi^*(\mathbf{x}, t) \quad (1.10)$$

Sottraendo le equazioni (1.9) e (1.10) membro a membro si ottiene:

$$\begin{aligned} i\hbar\left(\psi^*(\mathbf{x}, t)\frac{d\psi}{dt}(\mathbf{x}, t) + \psi(\mathbf{x}, t)\frac{d\psi^*}{dt}(\mathbf{x}, t)\right) \\ = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi^*(\mathbf{x}, t)\nabla^2\psi(\mathbf{x}, t) - \psi(\mathbf{x}, t)\nabla^2\psi^*(\mathbf{x}, t)\right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Il membro di sinistra di questa equazione è esprimibile come:

$$i\hbar\left(\psi^*(\mathbf{x}, t)\frac{d\psi}{dt}(\mathbf{x}, t) + \psi(\mathbf{x}, t)\frac{d\psi^*}{dt}(\mathbf{x}, t)\right) = i\hbar\frac{d}{dt}\left(\psi(\mathbf{x}, t)\psi^*(\mathbf{x}, t)\right) \quad (1.12)$$

mentre il membro destro come:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi^*(\mathbf{x}, t)\nabla^2\psi(\mathbf{x}, t) - \psi(\mathbf{x}, t)\nabla^2\psi^*(\mathbf{x}, t)\right) \\ = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla \cdot \left(\psi^*(\mathbf{x}, t)\nabla\psi(\mathbf{x}, t) - \psi(\mathbf{x}, t)\nabla\psi^*(\mathbf{x}, t)\right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Dalle equazioni (1.12) e (1.13) si ottiene infine:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\left(\psi(\mathbf{x}, t)\psi^*(\mathbf{x}, t)\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla \cdot \left(\psi^*(\mathbf{x}, t)\nabla\psi(\mathbf{x}, t) - \psi(\mathbf{x}, t)\nabla\psi^*(\mathbf{x}, t)\right) \quad (1.14)$$

Definiamo a questo punto le due grandezze:

$$\rho(\mathbf{x}, t) \equiv \psi(\mathbf{x}, t)\psi^*(\mathbf{x}, t) = |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 \quad (1.15a)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \equiv -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*(\mathbf{x}, t)\nabla\psi(\mathbf{x}, t) - \psi(\mathbf{x}, t)\nabla\psi^*(\mathbf{x}, t)\right) \quad (1.15b)$$

La grandezza $\rho(\mathbf{x}, t)$ è evidentemente il modulo quadro della funzione d'onda $\psi(\mathbf{x}, t)$. Essa rappresenta perciò la densità di probabilità di localizzare la particella nel punto di coordinate (\mathbf{x}, t) . La grandezza $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ rappresenta invece la corrente di densità di probabilità. L'equazione di continuità descrive quindi la conservazione della probabilità di localizzazione dello stato descritto dalla funzione d'onda. Sulla base delle definizioni indicate l'equazione (1.14) assume effettivamente la forma di un'equazione di continuità:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.16)$$

Per stabilire quale sia la simmetria corrispondente alla equazione di continuità, consideriamo la densità di lagrangiana seguente, a partire dalla quale si ottiene l'equazione di Schrödinger:

$$\mathcal{L} = \psi^*(\mathbf{x}, t) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \hbar^2 \frac{\nabla^2}{2m} - V(\mathbf{x}) \right) \psi(\mathbf{x}, t) \quad (1.17)$$

La funzione d'onda è un caso di campo complesso, per il quale cioè $\psi^*(\mathbf{x}, t) \neq \psi(\mathbf{x}, t)$. Richiediamo l'invarianza della densità di Lagrangiana per effetto della trasformazione di fase globale:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &\rightarrow \psi'(\mathbf{x}, t) = e^{i\alpha} \psi(\mathbf{x}, t) \\ \psi^*(\mathbf{x}, t) &\rightarrow \psi'^*(\mathbf{x}, t) = e^{-i\alpha} \psi^*(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (1.18)$$

dove α è un numero reale arbitrario. Il sistema in esame è invariante per la trasformazione (1.18) se la densità di lagrangiana soddisfa la condizione:

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, \psi^*, \partial_\mu \psi^*) = \mathcal{L}(\psi', \partial_\mu \psi', \psi'^*, \partial_\mu \psi'^*) \quad (1.19)$$

La variazione di \mathcal{L} si può scrivere come:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi} \delta\psi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu \psi} \delta\partial_\mu \psi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi^*} \delta\psi^* + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu \psi^*} \delta\partial_\mu \psi^* = 0 \quad (1.20)$$

Usando l'equazione del moto:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi} = \partial_\mu \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu \psi} \right) \quad (1.21)$$

e l'analoga espressione per la funzione complessa coniugata, possiamo scrivere la variazione della densità di Lagrangiana come divergenza totale:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu \psi} \delta\psi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu \psi^*} \delta\psi^* \right] \quad (1.22)$$

Poiché al primo ordine in α abbiamo $\delta\psi = i\alpha\psi$ e $\delta\psi^* = -i\alpha\psi^*$, otteniamo:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left[i \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu \psi} \psi - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu \psi^*} \psi^* \right) \alpha \right] \quad (1.23)$$

Dal momento che α è arbitrario, perchè $\delta\mathcal{L}$ sia identicamente nullo si deve avere che il quadrivettore:

$$j^\mu = i \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu \psi} \psi - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu \psi^*} \psi^* \right) \quad (1.24)$$

è localmente conservato:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \leftrightarrow \quad \delta\mathcal{L} = 0 \quad (1.25)$$

Considerata l'espressione (1.17) di \mathcal{L} , palesemente invariante per la trasformazione di fase globale, otteniamo per il quadrivettore j^μ l'espressione:

$$j^\mu = i(\partial^\mu \psi^* \psi - \psi^* \partial^\mu \psi) \quad (1.26)$$

Pertanto, analogamente a quanto stabilito in precedenza, concludiamo che la presenza di una simmetria continua implica l'esistenza di una corrente conservata localmente. La carica conservata è:

$$Q = \int d\mathbf{x} j^0(\mathbf{x}, t) \quad (1.27)$$

Consideriamo ora il caso dell'elettromagnetismo. Il campo elettrico (\mathbf{E}) e il campo d'induzione magnetica (\mathbf{B}) si possono esprimere in funzione del potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ e di quello scalare $V(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.28a)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.28b)$$

Tuttavia, fissati \mathbf{E} ed \mathbf{B} , i potenziali vettore e scalare non risultano unicamente definiti. Se introduciamo un campo scalare $\Lambda(\mathbf{x}, t)$ arbitrario ed eseguiamo la trasformazione dei campi seguente:

$$V' = V + \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (1.29a)$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \Lambda \quad (1.29b)$$

le equazioni (1.28) espresse nei nuovi potenziali risultano invariate. La trasformazione dei potenziali è nota con il nome di *trasformazione di gauge*, mentre la proprietà di invarianza delle equazioni di Maxwell è detta *invarianza di gauge*. Il campo $\Lambda(\mathbf{x}, t)$ prende il nome di campo di gauge. L'equazione di evoluzione della funzione d'onda di una particella carica nel campo elettromagnetico può essere ricondotta alla simmetria di gauge. In questo caso l'invarianza di gauge è espressa dalla richiesta che il sistema rimanga inalterato per una trasformazione di fase locale della funzione d'onda funzione delle coordinate spazio-temporali. Consideriamo due diverse Hamiltoniane, per il campo elettromagnetico e per il campo elettromagnetico sottoposto a una trasformazione di gauge:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e \Phi, \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad (1.30)$$

mentre l'altra è

$$H_\Lambda = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{e}{c} \nabla \Lambda \right)^2 + e \Phi - \frac{e}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad i\hbar \frac{\partial \psi_\Lambda}{\partial t} = H_\Lambda \psi_\Lambda \quad (1.31)$$

I due problemi sono equivalenti, descrivono cioè lo stesso sistema fisico, se si trova una trasformazione unitaria fra gli spazi di Hilbert \mathcal{H} e \mathcal{H}_Λ dei due sistemi, in modo tale da generare la stessa dinamica, ovvero la seconda Hamiltoniana dev'essere ottenuta come trasformazione opportuna della prima. Consideriamo uno stato di H rappresentato da una funzione d'onda $\psi(\mathbf{x}, t)$ e consideriamo la funzione:

$$\phi_\Lambda(\mathbf{x}, t) \equiv \exp\left(i\frac{e}{\hbar c}\Lambda(\mathbf{x}, t)\right)\phi(\mathbf{x}, t) \quad (1.32)$$

Si ha immediatamente:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{e}{c} \nabla \Lambda \right)^2 \phi_\Lambda = e^{i\frac{e\Lambda}{\hbar c}} \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{e}{c} \right)^2 \psi = e^{i\frac{e\Lambda}{\hbar c}} H \psi \quad (1.33)$$

ed anche

$$i\hbar \frac{\partial \phi_\Lambda}{\partial t} = e^{i\frac{e\Lambda}{\hbar c}} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{e}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \psi \quad (1.34)$$

Quindi ϕ_Λ soddisfa l'equazione:

$$i\hbar \frac{\partial \phi_\Lambda}{\partial t} = H_\Lambda \phi_\Lambda \quad (1.35)$$

Viceversa data una soluzione ψ_Λ dell'equazione (1.31), la funzione $\phi = \exp(-ie\Lambda)\psi_\Lambda$ soddisfa alla relazione (1.30). C'è quindi una corrispondenza biunivoca fra le soluzioni delle due equazioni. In sintesi, per ottenere un'equazione invariante per trasformazioni di gauge dei campi si deve richiedere una trasformazione di fase locale della funzione d'onda.

1.2 Classificazione delle simmetrie.

Le simmetrie si distinguono in: *continue* o *discrete*. Possono essere *esatte* o *approssimate*. Le simmetrie continue possono essere ricondotte con continuità alla trasformazione identica per valore nullo dei parametri. Esse si distinguono ulteriormente in simmetrie *globali* oppure *locali*, a seconda che i parametri siano costanti oppure a loro volta dipendenti dal quadrivettore posizione. Le simmetrie discrete al contrario non possono essere costruite a partire da trasformazioni infinitesime.

In meccanica quantistica si verifica l'esistenza sia di simmetrie esatte sia di simmetrie approssimate. Un esempio di simmetria approssimata è la simmetria di isospin forte (algebricamente simile alla simmetria che genera la conservazione del momento angolare), associata al gruppo SU(2), che ruota i campi dei quark *up-like* e *down-like*, lasciando approssimativamente invariata la parte dell'hamiltoniana che descrive le interazioni forti. Questa simmetria è rotta dalle interazioni elettromagnetiche e deboli e quindi è pure una simmetria approssimata. Un esempio di simmetria sia esatta che approssimata è verificabile nella trattazione dei fermioni liberi, considerati come quanti associati ai campi

d'onda che soddisfano l'equazione di Dirac. Ai fermioni è associabile un numero quantico di *sapore*, conservato nelle interazioni forti, a causa della presenza di simmetrie di fase del gruppo $U(1)$.

Le interazioni elettro-deboli conservano soltanto alcune combinazioni di questi numeri quantici: carica elettrica, numero barionico; altre combinazioni sono conservate solo approssimativamente: numero leptonico, sapore.

1.3 Simmetrie discrete.

Come è già stato accennato, le trasformazioni di simmetria discrete sono trasformazioni che non possono essere costruite a partire da trasformazioni infinitesime (in uno spazio che presenti un numero dispari di dimensioni). Le simmetrie P, C nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 , ad esempio, sono di questo tipo. Se combinate tra loro, esse danno origine a simmetrie importanti ai fini dell'argomento trattato: le simmetrie CP e CPT . Quest'ultima in particolare è ritenuta l'unica simmetria discreta esatta presente in natura.

1.3.1 Operatore parità.

L'operatore parità agisce su di un sistema fisico provocando un'inversione degli assi coordinati:

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = -\mathbf{x} \quad (1.36)$$

Facendo agire due volte l'operatore P si riporta il sistema nel suo stato iniziale, secondo la relazione $P^2 = 1$. Risulta pertanto valida la proprietà:

$$P^2 = I = PP^{-1} = P^{-1}P \quad (1.37)$$

Da queste si deduce che gli unici autovalori dell'operatore sono $P = \pm 1$. Inoltre, essendo P un operatore autoaggiunto ($P = P^+$), esso deve conseguentemente soddisfare alla relazione:

$$P = P^+ = P^{-1} \quad (1.38)$$

In fisica esistono grandezze che hanno diverso comportamento per effetto della trasformazione di parità. Consideriamo il caso dell'operatore momento angolare. Esso rimane invariato sotto l'azione della parità. Infatti, invertendo il segno degli assi coordinati, il segno dell'operatore posizione e della quantità di moto cambiano, lasciando tuttavia immutato il loro prodotto vettoriale. Il medesimo risultato si ottiene anche in ambito quantistico.

Definito lo stato di un sistema, risulta possibile attribuirgli uno stato di parità definita soltanto se esso è un autostato dell'operatore P . Lo stato di vuoto per definizione

è considerato un autostato dell'operatore parità con autovalore positivo. Nel caso di un sistema costituito da due particelle aventi parità definita P_1 e P_2 , risulta possibile definire la parità complessiva del sistema. Discutiamo il problema ponendoci per semplicità nel sistema di riferimento del centro di massa delle due particelle. Identificati con \mathbf{p} il momento lineare e con θ, ϕ gli angoli che definiscono la posizione di una delle due particelle, $-\mathbf{p}$ rappresenta il momento lineare dell'altra. Lo stato complessivo del sistema è rappresentato dal ket $|p, \theta, \phi\rangle$ o equivalentemente dallo stato $|\mathbf{p}, -\mathbf{p}\rangle$. Indicato con $|p, l, m\rangle$ lo stato di momento angolare complessivo l , con terza componente m , risulta allora possibile scrivere la relazione fra le due rappresentazioni come:

$$|p, l, m\rangle = \sum_{\theta, \phi} |p, \theta, \phi\rangle \langle p, \theta, \phi | p, l, m\rangle = \sum_{\theta, \phi} Y_l^{*m}(\theta, \phi) |\mathbf{p}, -\mathbf{p}\rangle \quad (1.39)$$

L'inversione degli assi, espressa in coordinate polari, comporta la trasformazione:

$$r \rightarrow r, \quad \theta \rightarrow \pi - \theta, \quad \phi \rightarrow \pi + \phi \quad (1.40)$$

Le armoniche sferiche si trasformano in corrispondenza secondo la relazione:

$$Y_l^{*m}(\theta, \phi) \rightarrow Y_l^{*m}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^l Y_l^{*m}(\theta, \phi) \quad (1.41)$$

Questo significa che l'operatore parità agisce sul sistema composto da due particelle nel modo seguente:

$$\begin{aligned} P|p, l, m\rangle &= P_1 P_2 \sum_{\theta, \phi} Y_l^{*m}(\pi - \theta, \pi + \phi) |\mathbf{-p}, \mathbf{p}\rangle \\ &= P_1 P_2 (-1)^l \sum_{\theta, \phi} Y_l^{*m}(\theta, \phi) |\mathbf{p}, -\mathbf{p}\rangle \\ &= P_1 P_2 (-1)^l |p, l, m\rangle \end{aligned} \quad (1.42)$$

Concludiamo quindi che la parità di un sistema composto da due particelle con momento angolare orbitale l è pari a:

$$P = (-1)^l P_1 P_2 \quad (1.43)$$

La teoria quantistica dei campi richiede che le particelle con spin intero (*bosoni*) e le loro antiparticelle si trovino nello stesso autostato di parità, mentre le particelle a spin semintero (*fermioni*) devono trovarsi nell'autostato di parità opposta a quello delle loro antiparticelle. Alcune particelle si trovano quindi in un ben determinato autostato di parità, si dice allora che esse possiedono parità intrinseca definita. Questa caratteristica risulta rilevante quando si considerano transizioni fra stati di particella differenti. La parità intrinseca può essere determinata in modo univoco solo nel caso in cui il sistema studiato sia soggetto a forze che rispettino tale simmetria. Com'è noto conservano la

parità le interazioni elettromagnetiche e forti, mentre non conservano la parità le interazioni deboli. La parità di uno stato può essere nota oppure scelta convenzionalmente. Una volta assegnata può essere utilizzata per determinare la parità intrinseca di altre particelle. Si supponga per esempio di conoscere la parità intrinseca di due particelle A e B. Nel processo $A + B \rightarrow A + B + C$ è possibile determinare l'autovalore dell'operatore P dello stato della particella C. Un discorso di questo genere non può essere esteso a particelle cariche o ai fermioni. Nel caso in cui si tratti un sistema soggetto soltanto all'interazione forte, la validità della conservazione della parità permette di distinguere gli adroni in gruppi di particelle caratterizzate non solo da uguale autovalore dell'operatore P , ma anche da uguale momento angolare di spin. Infatti, i bosoni sono raggruppati in tre categorie: bosoni *pseudoscalare*, bosoni *vettore* e bosoni *vettore assiale*. I primi sono quelli che hanno parità negativa e spin zero. Sono bosoni *pseudoscalare* i mesoni π^+, π^- e π^0 ed anche K^+, K^-, K^0, \bar{K}^0 . I bosoni *vettore* sono caratterizzati da parità negativa e spin 1. A questa classe appartengono tutti i *bosoni di gauge*, cioè gli intermediari delle interazioni note: fotone, bosoni W^\pm, Z^0 e gluoni. Infine, i bosoni *vettore assiale* sono particelle con autovalore dell'operatore parità positivo e con spin 1; appartengono a questo ultimo gruppo ad esempio i mesoni $h_1(1170), b_1(1235), a_1(1260)$.

1.3.2 Operatore coniugazione di carica.

L'operatore coniugazione di carica C agisce su una particella trasformandola nella rispettiva antiparticella, lasciando invariate le coordinate spaziali, temporali e lo spin. Questo operatore modifica quindi i numeri quantici di sapore, di carica elettrica, il numero barionico e il numero leptonic. L'azione dell'operatore C su di un sistema di momento lineare \mathbf{p} , spin \mathbf{s} e carica Q si scrive:

$$C|\mathbf{p}, \mathbf{s}, Q\rangle = C|\mathbf{p}, \mathbf{s}, -Q\rangle \quad (1.44)$$

Per l'operatore coniugazione di carica valgono le medesime proprietà dell'operatore parità in quanto a idempotenza e autoaggiunzione. I suoi autovalori sono pertanto $C = \pm 1$. Si noti che una particella neutra, composta da particelle elementari, non necessariamente rappresenta un autostato dell'operatore C . Ad esempio, il neutrone, essendo composto da quark, ha una antiparticella corrispondente, l'antineutrone, che appunto non coincide con la sua particella. Il pione neutro (π^0) considerata la sua peculiare struttura a quark, coincide invece con la sua antiparticella, e costituisce quindi un autostato di C . Il fotone (γ) allo stesso modo coincidendo con la sua antiparticella e rappresenta un autostato di C . Un sistema costituito da una particella e dalla sua corrispondente antiparticella è un autostato dell'operatore C . Osserviamo che solamente i bosoni realmente neutri (neutri cioè nella loro composizione, o struttura, a quark) costituiscono autostati dell'operatore di coniugazione di carica. Consideriamo ora il caso di un sistema di due particelle,

costituito da un mesone e dalla rispettiva antiparticella (anti-mesone). Indichiamo le due particelle come m^+ e m^- . Supponiamo le due particelle siano entrambe di spin nullo (si pensi al caso dei pioni carichi π^+ e π^-). Evidentemente l'azione dell'operatore di coniugazione di carica sul sistema è equivalente allo scambio delle due particelle, dunque equivale all'azione dell'operatore di parità P , per cui:

$$C|m^+, m^-\rangle = (-1)^l|m^+, m^-\rangle \quad (1.45)$$

Nel caso in cui mesone e anti-mesone abbiano spin non nullo (indichiamo in tal caso le due particelle come M^+ e M^-), l'effetto dell'operatore coniugazione di carica è ancora quello di scambiare i due mesoni ma, questa volta, l'azione della coniugazione di carica non corrisponde alla semplice trasformazione di parità, poiché l'effetto dell'operatore C coinvolge anche la parte di spin della funzione d'onda del sistema. La funzione d'onda del sistema complessivamente può essere simmetrica oppure antisimmetrica per lo scambio delle particelle. Consideriamo il caso in cui le due particelle abbiano spin intero uguale a 1. Lo spin totale può assumere il valore totale $S = 0, 1, 2$. Gli stati con $S = 0, 2$ sono simmetrici per lo scambio delle due particelle, quello con $S = 1$ è invece antisimmetrico. Dunque la funzione d'onda che rappresenta lo stato di spin introduce di un fattore moltiplicativo $(-1)^s$ per scambio delle particelle, per cui in totale l'azione dell'operatore di coniugazione è:

$$C|M^+, M^-\rangle = (-1)^{s+l}|M^+, M^-\rangle \quad (1.46)$$

Il risultato ottenuto è estendibile anche al caso in cui le due particelle costituenti il sistema siano un fermione e un antifermione di spin $1/2$. Lo stato delle due particelle di spin $s = 1/2$ corrisponde ad uno stato di spin totale $s = 0$ oppure $s = 1$ (in unità \hbar). Lo stato simmetrico è quello corrispondente a spin 1, mentre quello con spin nullo risulta antisimmetrico. Ciò significa che il fattore moltiplicativo dovuto allo scambio delle particelle in questo caso è dato da $(-1)^{s+1}$. L'azione dell'operatore di coniugazione di carica su un tale sistema è dunque:

$$C|f, f\rangle = (-1)^l(-1)^{s+1}(-1)^{-1}|f, f\rangle = (-1)^{l+s}|f, f\rangle \quad (1.47)$$

Risultato del tutto identico a quello del caso di due mesoni. Come nel caso della parità, anche la coniugazione di carica è conservata solamente se il sistema in esame è soggetto alle interazioni elettromagnetiche e forti.

1.3.3 Violazione della parità e della coniugazione di carica nelle interazione deboli.

Nel 1956 i fisici teorici C. N. Yang e T. D. Lee avanzarono per primi l'idea che l'interazione debole potesse non rispettare la simmetria di parità. La conferma di questa ipotesi

giunse nel 1957, grazie ai risultati di un celebre esperimento, condotto da C. S. Wu. e collaboratori. L'esperimento consiste nello studio della dipendenza angolare della sezione d'urto differenziale di disintegrazione di nuclei polarizzati di ^{60}Co :



Il momento angolare orbitale dell'elettrone e dell'antineutrino ($\bar{\nu}$) nel processo di decadimento sono nulli. Il momento angolare totale delle due particelle prodotte nel decadimento beta nucleare è dato dalla somma dei rispettivi momenti angolari di spin. Entrambe le particelle hanno $s = 1/2$ e sono prodotte con spin paralleli (i due nuclei hanno momento angolare che differisce di una unità). Analizzando il decadimento nel sistema di riferimento in cui il cui il nucleo di Cobalto è a riposo, trascurando il rinculo del nucleo di Nickel prodotto nel decadimento, possiamo stabilire che il processo di decadimento per conservazione dell'impulso produce, un elettrone ed un antineutrino costretti a muoversi in direzione uguale e verso opposto. Per studiare la dipendenza del processo di decadimento dalle variabili angolari e controllare possibili violazioni della simmetria di parità l'esperimento fu condotto utilizzando nuclei di Cobalto polarizzati (raffreddati e immersi in un campo magnetico) in modo da allineare gli spin. A priori si potrebbe supporre che i nuclei di Cobalto decadano beta emettendo nella metà dei casi un elettrone con spin parallelo all'impulso (e un antineutrino con spin antiparallelo all'impulso) e nell'altra metà dei casi con polarizzazioni contrarie. Gli esperimenti mostrano che il nucleo di Cobalto decade favorendo la produzione di elettroni con spin antiparallelo all'impulso e antineutrini con spin parallelo al proprio impulso. Stimando il rapporto tra le ampiezze di decadimento dei due casi fu possibile misurare il grado di violazione non nullo della simmetria di parità.

Da questo risultato si conclude che le interazioni deboli tendono a produrre particelle con spin antiparallelo al loro impulso (sinistrorse) e antiparticelle il cui spin tende ad essere parallelo al loro impulso (destrorse). Si può osservare che apparentemente la trasformazione combinata di coniugazione di carica e parità ripristina esattamente la simmetria, in quanto un generico fermione sinistrorso per trasformazione CP muta nel rispettivo antifermione destrorso. Come si vedrà a breve la simmetria combinata CP è invece comunque violata.

1.3.4 Simmetria di coniugazione di carica e parità.

La trasformazione combinata CP scambia le particelle del sistema con le corrispettive antiparticelle e inverte il verso degli assi coordinati. Le interazioni elettromagnetiche e le interazioni forti sono simmetriche per trasformazioni di parità P e di coniugazione di carica C , quindi rispettano anche la simmetria CP . Le interazioni deboli al contrario non rispettano nè la simmetria di parità, nè la simmetria di coniugazione di carica.

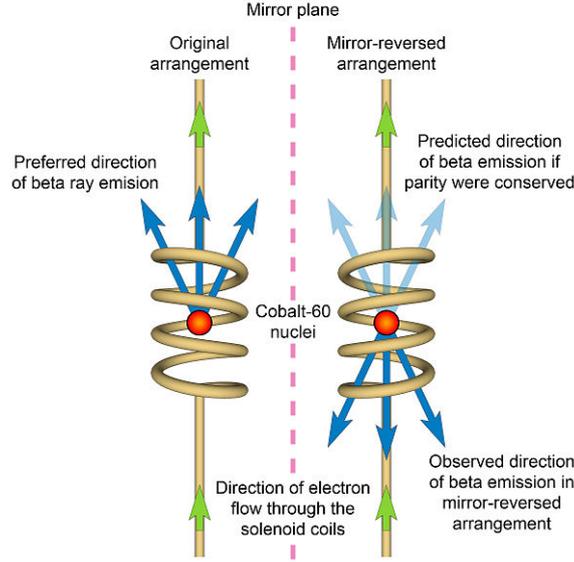


Figura 1.1: Principio di funzionamento dell'esperimento di Wu e collaboratori, per rivelare la violazione della parità nel decadimento beta del nucleo ^{60}Co .

L'esperimento di Wu prova la violazione delle simmetrie C e P , e tuttavia soddisfa la simmetria combinata CP . Per molto tempo la simmetria CP è stata considerata una simmetria esatta della natura, ma la sua violazione è stata riscontrata nei processi di decadimento del kaone neutro nel 1964 da J. Cronin e V. Fitch. Questo mesone, costituito dai quark *down* e *strange* può decadere ad esempio nei due modi seguenti:

$$K^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0 \quad (1.49a)$$

$$K^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0 \quad (1.49b)$$

Nel primo caso, l'autovalore della parità dello stato finale è dato da

$$P(\pi^0, \pi^0) = (-1)^L P(\pi^0) P(\pi^0) \quad (1.50)$$

dove l'autovalore dell'operatore P delle particelle π^0 vale $P = -1$, inoltre per la conservazione del momento angolare durante il processo di decadimento $L = 0$. Si conclude quindi

$$P(\pi^0, \pi^0) = +1 \quad (1.51)$$

Applicando l'operatore C al sistema si ottiene

$$C(\pi^0, \pi^0) = C(\pi^0) C(\pi^0) = (+1)(+1) = +1 \quad (1.52)$$

in quanto, come già enunciato sopra, questo mesone rappresenta un autostato dell'operatore coniugazione di carica.

Quindi si ricava

$$CP(\pi^0, \pi^0) = C(\pi^0, \pi^0)P(\pi^0, \pi^0) = +1 \quad (1.53)$$

Nel caso del decadimento in tre pioni si ha invece, per quanto riguarda la parità

$$P(\pi^0, \pi^0, \pi^0) = (-1)^{L_1}(-1)^{L_2}P(\pi^0)P(\pi^0)P(\pi^0) \quad (1.54)$$

dove L_1 e L_2 sono rispettivamente i momenti angolari di due π^0 tra loro e del terzo mesone rispetto la distanza media degli altri due. Poiché per la conservazione del momento angolare deve valere $L_1 \oplus L_2 = 0$, si ottiene

$$P(\pi^0, \pi^0, \pi^0) = -1 \quad (1.55)$$

invece nel caso dell'operatore coniugazione di carica si ha semplicemente

$$C(\pi^0, \pi^0, \pi^0) = +1 \quad (1.56)$$

si ottiene quindi che l'autostato dell'operatore coniugazione di carica e parità è definito in questo caso dall'autovalore

$$CP(\pi^0, \pi^0, \pi^0) = C(\pi^0, \pi^0, \pi^0)P(\pi^0, \pi^0, \pi^0) = -1 \quad (1.57)$$

Osserviamo che apparentemente la stessa particella appare decadere in due stati finali che presentano autovalori di CP differenti, quale che fosse l'autovalore dello stato iniziale, e pertanto in uno dei due decadimenti dev'esserci stata violazione della simmetria CP .

1.3.5 Simmetria CPT.

Un teorema stabilisce che tutti i sistemi sono invarianti sotto l'azione della trasformazione combinata CPT e che tale risultato è indipendente dall'ordine in cui sono state effettuate le trasformazioni. Una prima conseguenza di questo risultato è che ogni antiparticella ha massa e vita media uguale a quello della rispettiva particella. Al CERN di Ginevra sono stati ideati e condotti esperimenti estremamente sofisticati (Hori *et al.* 2003) per dimostrare con la massima precisione questo risultato. In particolare è stata misurata la differenza in massa tra protone ed antiprotone e stabilito il limite di validità dell'uguaglianza:

$$|m_p - m_{\bar{p}}|/m_p \leq 10^{-8} \quad (1.58)$$

1.4 Fenomenologia della violazione di CP.

Consideriamo il caso dei kaoni neutri K^0 e \bar{K}^0 . Il kaone neutro e la sua antiparticella sono distinte per il numero quantico chiamato *stranezza*. Il mesone K^0 , contenente i quark

$d\bar{s}$, per convenzione ha stranezza $S = +1$, mentre la sua antiparticella composta da $\bar{d}s$ ha $S = -1$. Le interazioni deboli oltre a produrre il decadimento delle due particelle possono trasformarle l'una nell'altra, ad esempio per mezzo di transizioni del tipo:

$$K^0 \leftrightarrow 2\pi \leftrightarrow \bar{K}^0 \quad (1.59a)$$

$$\bar{K}^0 \leftrightarrow 3\pi \leftrightarrow K^0 \quad (1.59b)$$

Applicando la trasformazione CP al kaone neutro ed alla sua antiparticella si ottengono le relazioni seguenti:

$$CP |K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle, \quad CP |\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle \quad (1.60)$$

Si vede che la trasformazione CP scambia le particelle K^0 e \bar{K}^0 e dunque gli autostati di CP sono una sovrapposizione quantistica di K^0 e \bar{K}^0 :

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \quad CP = +1 \quad (1.61a)$$

$$|K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \quad CP = -1 \quad (1.61b)$$

Gli autovalori di CP degli stadi di più pioni che compaiono nelle reazioni (1.59b) sono stati determinati nella sezione precedente. Le equazioni (1.53) e (1.57) indicano che l'autovalore di CP associato allo stato composto da due pioni neutri è $CP(2\pi^0) = +1$, mentre quello associato a tre pioni vale $CP(3\pi^0) = -1$. Se la simmetria CP fosse esatta gli autostati K_1^0 e K_2^0 sarebbero anche gli autostati dell'operatore di evoluzione temporale. Dal momento che le interazioni deboli provocano la violazione della simmetria CP gli stati di propagazione libera *k-short* (K_S^0) e *k-long* (K_L^0) non sono autostati di CP . Lo stato che decade prevalentemente in due pioni corrisponde al K_S , quello che decade prevalentemente in tre pioni è da identificarsi con il K_L . I due stati presentano vite medie notevolmente differenti. Il K_S ha una vita media $\tau_S = (89.54 \pm 0.04)$ ps [34], mentre il K_L ha una vita media $\tau_L = (51.16 \pm 0.21)$ ns [35]. Un fascio di kaoni neutri (K^0), il quale contiene inizialmente sia K_S che K_L , varia con la composizione con la distanza dal punto di generazione. A causa delle diverse vite medie di K_S^0 e K_L^0 esse percorreranno anche differenti lunghezze spaziali prima di decadere: $c\tau_S = 2.69$ cm, mentre $c\tau_L = 15.5$ m. La composizione del fascio dipende anche dall'impulso, secondo la relazione che lega vita media e lunghezza di volo: $l = \beta\gamma c\tau$.

Per comprendere il fenomeno dell'oscillazione supponiamo che CP sia conservato, in modo che K^0 e \bar{K}^0 si possano esprimere come combinazioni lineari dei due autostati K_1^0 e K_2^0 , si possano cioè identificare con essi K_S e K_L .

$$|K^0\rangle = \frac{|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\bar{K}^0\rangle = \frac{|K_1^0\rangle - |K_2^0\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.62)$$

L'evoluzione temporale della funzione d'onda nella base degli autostati è:

$$\psi_0(t) = \frac{1}{2}[(K^0 + \bar{K}^0)e^{(-im_S - \frac{\Gamma_S}{2})t} + (K^0 - \bar{K}^0)e^{(-im_L - \frac{\Gamma_L}{2})t}] \quad (1.63)$$

Ipotizzando in un primo momento, per semplicità, che i due autostati siano stabili e che quindi $\Gamma_S = \Gamma_L = 0$, allora l'equazione precedente si riduce a

$$\psi_0(t) = \frac{1}{2}[e^{-im_S t} + e^{-im_L t}]K^0 + \frac{1}{2}[e^{-im_S t} - e^{-im_L t}]\bar{K}^0 \quad (1.64)$$

dunque la probabilità di trovare un kaone neutro nel fascio al tempo t è

$$|\langle K^0 | \psi_0(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4}|e^{-im_S t} + e^{-im_L t}|^2 = \frac{1}{2}[1 + \cos(\delta m \cdot t)] = \cos^2\left(\frac{\Delta m}{2}t\right) \quad (1.65)$$

analogamente la probabilità di trovare un anti-kaone sarà

$$|\langle \bar{K}^0 | \psi_0(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4}|e^{-im_S t} - e^{-im_L t}|^2 = \frac{1}{2}[1 - \cos(\delta m \cdot t)] = \sin^2\left(\frac{\Delta m}{2}t\right) \quad (1.66)$$

Questo significa che al tempo $t = 0$ si ha la certezza di osservare un kaone neutro nel fascio, mentre la probabilità di trovare un anti-kaone è nulla. Con lo scorrere del tempo la probabilità di rivelare un kaone cala e al contrario quella dell'anti-kaone cresce. Al tempo $t = T/2$, con $T = 2\pi/|\Delta m| \approx 1.19$ ns periodo di una oscillazione, la situazione iniziale risulta ribaltata. Per stabilire se la particella è un kaone neutro oppure la sua antiparticella si deve ricorrere alla legge sperimentale secondo cui:

$$\Delta S = \Delta Q \quad (1.67)$$

secondo la quale la *differenza tra i numeri quantico di stranezza dello stato iniziale e finale eguaglia la differenza in carica elettrica dei due stati*. Sperimentalmente si osservano infatti i seguenti decadimenti semileptonici:

$$K^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l \quad (1.68a)$$

$$\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ l^- \bar{\nu}_l \quad (1.68b)$$

quindi la carica del leptone prodotto indica il contenuto di stranezza del mesone K . La probabilità di osservare un leptone positivo oppure negativo al tempo generico t è data da:

$$P^+ = |\langle K^0 | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4}[e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} + 2e^{-\frac{\Gamma_S + \Gamma_L}{2}t} \cos(\Delta m \cdot t)] \quad (1.69a)$$

$$P^- = |\langle \bar{K}^0 | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4}[e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} - 2e^{-\frac{\Gamma_S + \Gamma_L}{2}t} \cos(\Delta m \cdot t)] \quad (1.69b)$$

Entrambe le equazioni sono composte da una somma di due termini esponenziali decrescenti ed un termine di oscillazione smorzato. Quest'ultimo è dominato dal tempo di vita minore $\tau_S \approx 90\text{ps}$. Ciò significa che il fenomeno di oscillazione è osservabile solamente all'interno di pochi τ_S . L'andamento temporale delle due probabilità è riportato in figura Figura 1.2.

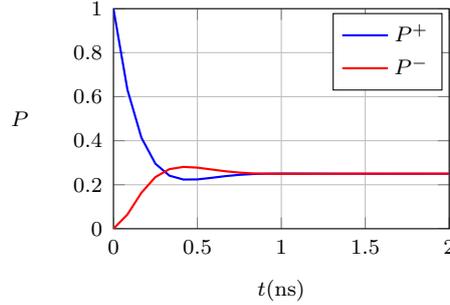


Figura 1.2: Probabilità di osservare K^0 (blu) e \bar{K}^0 (rosso).

Sperimentalmente siamo in grado di misurare la differenza tra le due probabilità espresse dall'equazione (1.69)

$$\delta(t) \equiv P^+(t) - P^-(t) = e^{-\frac{\Gamma_S}{2}t} \cos(\Delta m \cdot t) \quad (1.70)$$

I dati sperimentali indicano che ad ogni istante di tempo $t \gg \tau_S$, quando dovrebbe rimanere la sola componente del kaone con una vita media maggiore, la differenza tra le due probabilità $\delta(t \gg \tau_S)$ non va a zero come indica l'equazione (1.70), ma si assesta attorno ad un valore positivo prossimo allo zero. Questo implica che lo stato che vive più a lungo non è esattamente un autostato di CP . Dunque l'equazione d'onda espressa dalla (1.63) è in realtà imprecisa. Lo stato con vita media minore allo stesso modo non è composto dal solo K_1^0 , ma in esso c'è una componente K_2^0 . Analogamente lo stato che vive più a lungo è in realtà una sovrapposizione quantistica dei due autostati di CP . Gli autostati di CP K_1^0 e K_2^0 , non sono dunque gli autostati di massa e tempo di vita medio, per i quali si deve avere:

$$|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}} (|K_1^0\rangle + \varepsilon|K_2^0\rangle) \quad (1.71a)$$

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}} (\varepsilon|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle) \quad (1.71b)$$

Il parametro complesso ε indica la presenza della violazione di CP dovuta alla oscillazione dei due stati K^0 e \bar{K}^0 . I fisici statunitensi V. Fitch e J. Cronin idearono un esperimento molto sensibile al valore assoluto del parametro ε e misurarono il suo valore come:

$$|\varepsilon| = (2.284 \pm 0.014) \times 10^{-3} \quad (1.72)$$

Lo stato K_L non essendo un autostato di CP può decadere sia producendo un leptone positivo ($K_L \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l$) sia in uno negativo ($K_L \rightarrow \pi^+ l^- \bar{\nu}_l$). La stima del parametro δ per ($t \gg \tau_s$) può essere fatta attraverso il conteggio dei modi di decadere proprio di questa particella

$$\delta(t \gg \tau_s) \equiv \frac{N(K_L \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l) - N(K_L \rightarrow \pi^+ l^- \bar{\nu}_l)}{N(K_L \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l) + N(K_L \rightarrow \pi^+ l^- \bar{\nu}_l)} = (3.27 \pm 0.12) \times 10^{-3} \quad (1.73)$$

attraverso questa misura è possibile determinare la parte reale del parametro ε e dunque la sua fase. Approssimando l'espressione di $|K_L\rangle$

$$\begin{aligned} |K_L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}} (\varepsilon |K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle) \simeq \varepsilon |K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1+\varepsilon) |K^0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} (1-\varepsilon) |\bar{K}^0\rangle \end{aligned} \quad (1.74)$$

dall'equazione (1.73)

$$\delta(t \gg \tau_s) = \frac{|1+\varepsilon|^2 - |1-\varepsilon|^2}{|1+\varepsilon|^2 + |1-\varepsilon|^2} = 2 \frac{Re\varepsilon}{1+|\varepsilon|^2} \simeq 2Re\varepsilon \quad (1.75)$$

il cui valore è (Yao *et al.* 2006)

$$Re\varepsilon = (1.657 \pm 0.021) \times 10^{-3} \quad (1.76)$$

Dunque conoscendo la parte reale di ε e il suo modulo dall'equazione (1.72), è possibile determinare la sua fase:

$$\phi = (43.4 \pm 0.7)^\circ \quad (1.77)$$

La violazione della simmetria CP non è dovuta solo all'oscillazione ma può essere osservata anche nel processo di decadimento. La violazione nel decadimento si osserva se esistono differenze fra le larghezze di decadimento dei mesoni M in uno stato finale f , rispetto ai processi CP coniugati di decadimento dello stato \bar{M} nello stato \bar{f} . Infine si osserva violazione di CP anche nell'interferenza prodotta dalle oscillazioni e decadimenti. La presenza della violazione di CP è riscontrabile anche nei decadimenti dei mesoni B^0 e D^0 . La violazione della simmetria CP nel Modello Standard è dovuta alla presenza di una fase complessa nella matrice di mixing dei quark (matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa o CKM). La fenomenologia dell'interazione elettro-debole, indica che nelle leggi della natura esiste, seppur piccola, un'asimmetria tra materia e antimateria.

Capitolo 2

Trattazione quantistica di un sistema di mesoni neutri

In questa sezione si tratteranno in maniera quantitativa i fenomeni descritti in precedenza, definendo l'Hamiltoniana efficace del sistema di mesoni neutri e risolvendone il problema agli autovalori. Si studieranno le oscillazioni tra gli stati e i decadimenti verso stati non legati. Infine si definirà il parametro η che dà una misura dell'entità della violazione di CP del sistema. Il procedimento illustrato, che venne applicato per la prima volta al sistema K^0 - \bar{K}^0 , è generalizzabile sistemi di mesoni neutri più pesanti, cioè $D^0 - \bar{D}^0$, $B^0 - \bar{B}^0$ e $B_s - \bar{B}_s$. Per mantenere il ragionamento il più generale possibile, ed impiegando una notazione ampiamente usata nella letteratura sull'argomento, si indicheranno gli autostati di sapore con i simboli P^0 e \bar{P}^0 , dove P^0 può indicare uno qualsiasi dei mesoni K^0 , D^0 , B^0 e B_s .

2.1 Approssimazione di Weisskopf-Wigner.

Per descrivere l'evoluzione temporale di un sistema P^0 - \bar{P}^0 si considera l'Hamiltoniana:

$$H = H_s + H_{em} + H_w \quad (2.1)$$

dove con H_s si indica il contributo dell'interazione forte, con H_{em} quello dell'interazione elettromagnetica e con H_w quello dell'interazione debole. Valgono le seguenti regole di commutazione:

$$[CP, H_s] = [CP, H_{em}] = 0 \quad (2.2)$$

Cioè viene assunta valida l'invarianza per CP delle interazioni forte ed elettromagnetica. In questo modo, $|P^0\rangle$ e $|\bar{P}^0\rangle$ sono autostati discreti di H_s ed H_{em} mentre il termine H_w è responsabile della transizione di questi verso stati non legati $|k\rangle$ e, di conseguenza, anche della transizione di $|P^0\rangle$ e $|\bar{P}^0\rangle$ l'uno nell'altro. L'equazione di Schrödinger associata al

sistema è quindi:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t)\rangle = (H_s + H_{em} + H_w)|\Psi(t)\rangle \quad (2.3)$$

Per rimuovere la parte banale della dipendenza temporale della funzione d'onda si introduce la funzione d'onda trasformata:

$$|\psi(t)\rangle = e^{i(H_s+H_{em})t}|\Psi(t)\rangle \quad (2.4)$$

in questo modo l'equazione (2.3) diventa:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = e^{i(H_s+H_{em})t}H_w e^{-i(H_s+H_{em})t}|\psi(t)\rangle = H_w|\psi(t)\rangle \quad (2.5)$$

E' stato quindi isolato il contributo di H_w all'evoluzione nel tempo del sistema. Si introducono ora le notazioni:

$$\langle P^0|\psi(t)\rangle = a(t) \quad (2.6a)$$

$$\langle \bar{K}^0|\psi(t)\rangle = \bar{a}(t) \quad (2.6b)$$

$$\langle k|\psi(t)\rangle = c_k(t) \quad (2.6c)$$

L'evoluzione del sistema è completamente definita dalle equazioni differenziali:

$$i\frac{d}{dt}a(t) = \langle P^0|H_w|P^0\rangle a(t) + \langle P^0|H_w|\bar{P}^0\rangle \bar{a}(t) + \sum_k \langle P^0|H_w|k\rangle c_k(t) \quad (2.7a)$$

$$i\frac{d}{dt}\bar{a}(t) = \langle \bar{P}^0|H_w|P^0\rangle a(t) + \langle \bar{P}^0|H_w|\bar{P}^0\rangle \bar{a}(t) + \sum_k \langle \bar{P}^0|H_w|k\rangle c_k(t) \quad (2.7b)$$

$$i\frac{d}{dt}c_k(t) = \langle k|H_w|P^0\rangle a(t) + \langle k|H_w|\bar{P}^0\rangle \bar{a}(t) + \sum_{k'} \langle k|H_w|k'\rangle c_{k'}(t) \quad (2.7c)$$

In questa forma, le equazioni (2.7a), (2.7b) e (2.7c) descrivono il sistema in maniera esatta. Per renderne possibile una soluzione analitica, si considera piccolo il contributo della serie che compare nella (2.7c) rispetto a $\langle k|H_w|P^0\rangle a(t)$ e $\langle k|H_w|\bar{P}^0\rangle \bar{a}(t)$ (ciò equivale, dal punto di vista fisico, a trascurare le interazioni deboli tra i prodotti di decadimento finali), il che permette di riscrivere le equazioni nella forma seguente:

$$i\frac{d}{dt}\phi(t) = h_w\phi(t) + \sum_k C_k^* e^{-iw_k t} c_k(t) \quad (2.8a)$$

$$i\frac{d}{dt}c_k(t) = C_k^T \phi(t) e^{iw_k t} \quad (2.8b)$$

Dove sono state usate le notazioni:

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ \bar{a}(t) \end{pmatrix} \quad (2.9a)$$

$$w_k = E_k - m_k \quad (2.9b)$$

$$C_k = \begin{pmatrix} \langle k|H_w|P^0\rangle \\ \langle k|H_w|\bar{P}^0\rangle \end{pmatrix} \quad (2.9c)$$

C_k^* e C_k^T sono rispettivamente il vettore ottenuto eseguendo la complessa coniugazione degli elementi di C_k ed il trasposto di C_k , mentre h_w rappresenta la restrizione di H_w al sottospazio generato da P^0 e \bar{P}^0 .

Nella risoluzione delle equazioni (2.8a) e (2.8b) si impongono le seguenti condizioni iniziali:

$$\phi(0) = \phi_0 \quad (2.10a)$$

$$c_k(0) = 0 \quad (2.10b)$$

dove la (2.10a) specifica le concentrazioni iniziali di P^0 e \bar{P}^0 , che dipendono dall'apparato sperimentale impiegato per la produzione del fascio, mentre con la (2.10b) si ipotizza che all'istante iniziale siano nulle le concentrazioni di tutti i possibili prodotti del decadimento dei mesoni. La 2.8b può essere risolta esplicitamente:

$$c_k(t) = -iC_k^T \int_0^t \phi(0)e^{iw_k\tau} d\tau \quad (2.11)$$

e sostituita nella 2.8a, in modo tale da eliminarne la dipendenza dai coefficienti $c_k(t)$:

$$\frac{d}{dt}\phi(t) + ih_w\phi(t) = -\sum_k D_k \int_0^t \phi(\tau)e^{iw_k(t-\tau)} d\tau \quad (2.12)$$

dove D_k indica la matrice 2×2 definita dal prodotto tensoriale tra C_k^* e C_k^T :

$$D_k = C_k^* \otimes C_k^T \quad (2.13)$$

La (2.12) può essere risolta utilizzando le trasformate di Laplace. Si definisce la trasformata di ϕ come:

$$\tilde{\phi}(s) = \int_0^\infty \phi(t)e^{-ts} dt \quad (2.14)$$

La trasformata del lato sinistro della (2.12) è:

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{d}{dt}\phi(t) dt + ih_w\tilde{\phi}(s) = ih_w\tilde{\phi}(s) + \phi(t)e^{-st} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st}\phi(t) dt = \quad (2.15)$$

$$= s\tilde{\phi}(s) + ih\tilde{\phi}(s) - \phi_0 \quad (2.16)$$

Mentre per il lato destro si ottiene:

$$\int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t \phi(\tau) e^{iw_k(t-\tau)} d\tau \right) dt = \int_0^\infty d\tau e^{iw_k\tau} \phi(\tau) \int_\tau^\infty e^{-(s+iw_k)t} dt = \quad (2.17)$$

$$= \frac{\tilde{\phi}(s)}{s + iw_k} \quad (2.18)$$

Quindi si ottiene:

$$s\tilde{\phi}(s) + ih_w\tilde{\phi}(s) - \phi_0 = - \sum_k D_k \frac{\tilde{\phi}(s)}{s + iw_k} \quad (2.19)$$

Che ha come soluzione:

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{\phi_0}{s + iW(s)} \quad (2.20)$$

dove si è definita la matrice $W(s)$ come:

$$W(s) = h_w - \sum_k \frac{D_k}{w_k - is} \quad (2.21)$$

Applicando la formula di inversione per le trasformate di Laplace a destra ed a sinistra nella (2.20) si ottiene:

$$\phi(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{\phi_0 e^{st}}{s + iW(s)} ds \quad (2.22)$$

Dove il termine $+\epsilon$ negli estremi sta ad indicare che il percorso di integrazione si trova immediatamente a destra dell'asse immaginario. Si riesprime l'integrale (2.22) in funzione di una nuova variabile reale y , definita attraverso la relazione $s = iy + \epsilon$:

$$\phi(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_0 e^{i(y+\epsilon)t}}{iy + \epsilon + iW(iy + \epsilon)} dy \quad (2.23)$$

E' immediato notare che il maggior contributo all'integrale (2.23) si ha per $y \approx 0$, cioè per valori piccoli dell'energia. Si osserva inoltre che, se si eccettua il contributo (costante) di h , W è del secondo ordine in H_w . Infatti essa dipende linearmente dalle matrici D_k che, per come sono state definite, risultano del secondo ordine nelle C_k , a loro volta lineari in H_w . Rappresenta dunque un'approssimazione ragionevole sostituire W con il suo valore nell'origine:

$$W \approx W_0 = W(0) = h - P \left(\sum_k \frac{D_k}{w_k} \right) - i\pi \sum_k \delta(w_k) D_k \quad (2.24)$$

Dove si è utilizzata la *formula di Sokhotski-Plemelj*. In questo modo si ottiene una soluzione esplicita:

$$\phi = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi_0 e^{iyt}}{y + W_0} dy = e^{-iW_0 t} \phi_0 \quad (2.25)$$

che può essere riespressa in forma differenziale nel modo seguente:

$$i \frac{d}{dt} \phi = W_0 \phi \quad (2.26)$$

Ritornando alla funzione d'onda del sistema P^0 - \bar{P}^0 tramite la relazione $\Phi = e^{-i(H_s + H_e m)t} \phi$ si ottiene finalmente l'Hamiltoniana efficace del sistema, solitamente espressa nella forma seguente:

$$i \frac{d}{dt} \Phi = \left(M - \frac{i}{2} \Gamma \right) \Phi \quad (2.27)$$

Dove si sono impiegate le notazioni:

$$M = m_k I + h_w - P \sum_k \frac{D_k}{w_k} \quad (2.28)$$

$$\Gamma = 2\pi \sum_k D_k \delta(w_k) \quad (2.29)$$

Dove con I si è indicata la matrice identità. Si osserva che entrambe le matrici M e Γ sono Hermitiane, mentre $(M - \frac{i}{2}\Gamma)$ non lo è. Infatti:

$$\left(M - \frac{i}{2} \Gamma \right)^\dagger = \left(M + \frac{i}{2} \Gamma \right) \neq \left(M - \frac{i}{2} \Gamma \right) \quad (2.30)$$

Ricordando le sostituzioni 2.9b, 2.9c e la definizione di h_w è possibile esplicitare gli elementi di M e Γ :

$$M_{\mu\nu} = m_k \delta_{\mu\nu} + \langle \mu | H_w | \nu \rangle - P \sum_k \frac{\langle \mu | H_w | k \rangle \langle k | H_w | \nu \rangle}{E_k - m_k} \quad (2.31)$$

$$\Gamma_{\mu\nu} = 2\pi \sum_k \langle \mu | H_w | k \rangle \langle k | H_w | \nu \rangle \delta(E_k - m_k) \quad (2.32)$$

dove gli indici μ e ν indicano rispettivamente gli stati P^0 e \bar{P}^0 . Si ottiene dunque un'Hamiltoniana efficace:

$$H_{eff} = M - \frac{i}{2} \Gamma = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

dove M è la *matrice di massa*, i cui elementi diagonali M_{11} e M_{22} sono le masse dei due stati P^0 e \bar{P}^0 mentre gli elementi M_{12} e M_{21} regolano le oscillazioni tra gli stati. Invece Γ

è la *matrice di decadimento*, i cui termini diagonali Γ_{11} e Γ_{22} regolano le disintegrazioni dei due stati mentre gli elementi Γ_{12} e Γ_{21} le loro oscillazioni l'uno nell'altro. Come conseguenza diretta del Teorema CPT si ha $M_{11} = M_{22}$ e $\Gamma_{11} = \Gamma_{22}$. Si verifica inoltre, dall'espressione (2.32), $M_{12} = M_{21}^*$ e $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}^*$. Per giungere a questo risultato sono state fatte alcune ipotesi che hanno permesso una notevole semplificazione e che ora vengono brevemente riassunte:

1. All'istante iniziale il sistema è composto esclusivamente dai mesoni P^0 e \bar{P}^0 ($c_k(0) = 0$);
2. Si trascurano le interazioni deboli tra i prodotti di decadimento dei mesoni neutri ($\sum_{k'} \langle k | H_w | k' \rangle c_{k'}(t) \approx 0$ nella (2.7c);
3. Viene studiata soltanto la dipendenza temporale di $a(t)$ e $\bar{a}(t)$, trascurando quella dei $c_k(t)$;
4. La scala dei tempi per la quale si osserva il sistema è grande rispetto ai tempi caratteristici delle interazioni forti ed elettromagnetiche ($y \approx 0$ nell'integrale (2.23)).

Queste condizioni costituiscono quella che viene chiamata *approssimazione di Weisskopf-Wigner*.

2.2 Autofunzioni ed autovalori di H_{eff} .

In questa sezione si studierà l'Hamiltoniana efficace del sistema $P^0 - \bar{P}^0$ e se ne valuteranno le autofunzioni e gli autovalori, per arrivare quindi ad una descrizione quantitativa dell'evoluzione temporale del sistema che si dimostrerà consistere in una combinazione di decadimento verso stati non legati e di oscillazioni tra gli stati $|P^0\rangle$ e $|\bar{P}^0\rangle$.

Si è già evidenziato il fatto che H_{eff} non è una matrice Hermitiana. Per questo motivo gli autostati dell'energia non saranno necessariamente ortogonali e, in generale, l'Hamiltoniana non sarà diagonalizzabile attraverso matrici ortogonali. Per semplicità di notazione si definiscono i parametri α , β_1 e β_2 :

$$\begin{pmatrix} M_{11} - \frac{i}{2}\Gamma_{11} & M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12} \\ M_{21} - \frac{i}{2}\Gamma_{21} & M_{22} - \frac{i}{2}\Gamma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta_1 \\ \beta_2 & \alpha \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Gli autostati di massa sono gli autostati dell'Hamiltoniana efficace. Il problema agli autovalori per H_{eff} ha come soluzione:

$$|P_L\rangle = p|P^0\rangle + q|\bar{P}^0\rangle \quad (2.35)$$

(con autovalore $\mu_L = \alpha + \sqrt{\beta_1\beta_2}$)

$$|P_S\rangle = p|P^0\rangle - q|\bar{P}^0\rangle \quad (2.36)$$

(con autovalore $\mu_S = \alpha - \sqrt{\beta_1\beta_2}$) Affinché gli autostati siano normalizzati, i coefficienti p e q devono soddisfare la relazione $|p|^2 + |q|^2 = 1$. Si dimostra che essi valgono rispettivamente:

$$p = \sqrt{\frac{\beta_1}{|\beta_1| + |\beta_2|}} \quad (2.37a)$$

$$q = \sqrt{\frac{\beta_2}{|\beta_1| + |\beta_2|}} \quad (2.37b)$$

Contrariamente a quanto accade per gli stati P^0 e \bar{P}^0 , che sono vincolati ad avere la stessa massa a causa del Teorema *CPT*, le masse di $|P_L\rangle$ e $|P_S\rangle$ non hanno restrizioni, infatti risultano (sperimentalmente) tra loro differenti. Un'altra questione sulla quale è importante soffermarsi è il fatto che gli autovalori μ_L e μ_S , essendo H_{eff} non Hermitiana, non sono necessariamente quantità reali, ma complesse. A questo punto si cerca una forma diagonale per H_{eff} :

$$V^{-1}H_{eff}V = \begin{pmatrix} \mu_L & 0 \\ 0 & \mu_S \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

La matrice diagonalizzante V è definita da:

$$V = (|P_L\rangle^T, |P_S\rangle^T) = \begin{pmatrix} p & p \\ q & -q \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{|\beta_1| + |\beta_2|}} \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_1} & \sqrt{\beta_1} \\ \sqrt{\beta_2} & -\sqrt{\beta_2} \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

(si osserva che, come ulteriore conseguenza della non Hermitianità di H_{eff} , V non è unitaria). Ora, ricordando l'equazione di Schrödinger associata al sistema:

$$i\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a(t) \\ \bar{a}(t) \end{pmatrix} = H_{eff} \begin{pmatrix} a(t) \\ \bar{a}(t) \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

si ha:

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a(t) \\ \bar{a}(t) \end{pmatrix} &= V[V^{-1}H_{eff}V]V^{-1} \begin{pmatrix} a(t) \\ \bar{a}(t) \end{pmatrix} \\ i\frac{d}{dt} [V^{-1} \begin{pmatrix} a(t) \\ \bar{a}(t) \end{pmatrix}] &= [V^{-1}H_{eff}V] [V^{-1} \begin{pmatrix} a(t) \\ \bar{a}(t) \end{pmatrix}] \end{aligned} \quad (2.41)$$

(nell'ultimo passaggio si è sfruttata l'indipendenza dal tempo della matrice diagonalizzante per poterla portare sotto l'operazione di derivata). Definendo ora il vettore trasformato:

$$\begin{pmatrix} l(t) \\ s(t) \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} a(t) \\ \bar{a}(t) \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

si ottiene la forma diagonale dell'equazione di Schrödinger per il sistema dei kaoni neutri:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} l(t) \\ s(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_L & 0 \\ 0 & \mu_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l(t) \\ s(t) \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Quest'equazione ammette la soluzione esplicita:

$$\begin{pmatrix} l(t) \\ s(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l(0)e^{-i\mu_L t} \\ s(0)e^{-i\mu_S t} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

La soluzione nella base iniziale è data dalla trasformazione inversa della (2.44):

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ \bar{a}(t) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} l(t) \\ s(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{|\beta_1| + |\beta_2|}} \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_1}[l(0)e^{-i\mu_L t} + s(0)e^{-i\mu_S t}] \\ \sqrt{\beta_2}[l(0)e^{-i\mu_L t} - s(0)e^{-i\mu_S t}] \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Siamo ora in grado di scrivere la funzione d'onda del sistema:

$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{\beta_1}{|\beta_1| + |\beta_2|}} [l(0)e^{-i\mu_L t} + s(0)e^{-i\mu_S t}] |P^0\rangle + \sqrt{\frac{\beta_2}{|\beta_1| + |\beta_2|}} [l(0)e^{-i\mu_L t} - s(0)e^{-i\mu_S t}] |\bar{P}^0\rangle \quad (2.46)$$

Il problema più interessante dal punto di vista sperimentale consiste nello studio dell'evoluzione temporale di un fascio di mesoni inizialmente puro, cioè tale che all'istante $t = 0$ sia composto esclusivamente da P^0 o da \bar{P}^0 . Di seguito si ricaverà, a partire dal caso generale, l'equazione che descrive l'evoluzione di uno stato composto (inizialmente) dal solo $|P^0\rangle$ o $|\bar{P}^0\rangle$. Si ricordano le definizioni degli autovalori dell'Hamiltoniana efficace:

$$\mu_L = \alpha + \sqrt{\beta_1\beta_2} = (M_{11} - \frac{i}{2}\Gamma_{11}) + \sqrt{(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12})(M_{21} - \frac{i}{2}\Gamma_{21})} \quad (2.47)$$

$$\mu_S = \alpha - \sqrt{\beta_1\beta_2} = (M_{11} - \frac{i}{2}\Gamma_{11}) - \sqrt{(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12})(M_{21} - \frac{i}{2}\Gamma_{21})} \quad (2.48)$$

Si definiscono a partire da questi le masse efficaci m_L ed m_S e le ampiezze di decadimento efficaci Γ_L e Γ_S :

$$m_L = \text{Re}\{\mu_L\} \quad \gamma_L = -\frac{1}{2}\text{Im}\{\mu_L\} \quad (2.49)$$

$$m_S = \text{Re}\{\mu_S\} \quad \gamma_S = -\frac{1}{2}\text{Im}\{\mu_S\} \quad (2.50)$$

L'evoluzione temporale dei due sistemi diventa:

$$|P^0\rangle = f_+(t)|P^0\rangle + \frac{q}{p}f_-(t)|\bar{P}^0\rangle \quad (2.51)$$

$$|\bar{P}^0\rangle = \frac{p}{q}f_+(t)|P^0\rangle + f_-(t)|\bar{P}^0\rangle \quad (2.52)$$

dove sono state usate le notazioni compatte:

$$f_+(t) = \frac{1}{2} \left[e^{-im_L t} e^{-\frac{\gamma_L}{2} t} + e^{-im_S t} e^{-\frac{\Gamma_S}{2} t} \right] \quad (2.53)$$

$$f_-(t) = \frac{1}{2} \left[e^{-im_L t} e^{-\frac{\gamma_L}{2} t} - e^{-im_S t} e^{-\frac{\Gamma_S}{2} t} \right] \quad (2.54)$$

Appare evidente ciò che accade al sistema di $|P^0\rangle$ (o $|\bar{P}^0\rangle$), puro all'istante $t = 0$: esso autointeragisce attraverso processi deboli del secondo ordine che portano i due mesoni ad oscillare l'uno nell'altro, in maniera tale che ad un istante $t' > 0$ nel fascio siano presenti entrambi gli autostati di sapore. A queste oscillazioni si sovrappone un decadimento esponenziale dei due kaoni. Come esempio di questo fenomeno, viene mostrato in *Figura 1* l'andamento della probabilità di trovare un $|K^0\rangle$ in un fascio inizialmente puro di $|K^0\rangle$ in funzione del tempo.

2.3 Violazione di CP.

In questo paragrafo si studierà la violazione di CP del sistema dei Kaoni neutri in maniera quantitativa. Si premette la dimostrazione di due risultati che saranno fondamentali per la discussione successiva.

Se il sistema dei mesoni neutri è invariante per CPT allora, indipendentemente dall'invarianza per T, valgono le relazioni:

$$|P_S\rangle = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon \\ 1 - \epsilon \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2(1 + |\epsilon|^2)}} \quad (2.55)$$

$$|P_L\rangle = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon \\ \epsilon - 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2(1 + |\epsilon|^2)}} \quad (2.56)$$

dove $\epsilon \in \mathbb{C}$.

Consideriamo la matrice H_{eff} dell'equazione (2.33). Essendo questa una matrice 2×2 ad elementi complessi, è sempre possibile esprimerla come:

$$H_{eff} = D I + \sum_{i=1}^3 E_i \sigma_i \quad (2.57)$$

dove $D, E \in \mathbb{C}$ sono costanti, mentre le σ_i sono le matrici di Pauli. Come è stato già evidenziato, a causa del Teorema CPT gli elementi sulla diagonale principale dell'Hamiltoniana efficace sono tra loro uguali. Questo porta necessariamente a $E_3 = 0$. Posto $E_1 = E \cos(\alpha)$ e $E_2 = E \sin(\alpha)$, con $E \in \mathbb{C}$ e $\alpha \in [0, 2\pi]$, l'equazione (2.57) diventa:

$$H_{eff} = D I + E \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\alpha} \\ e^{i\alpha} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

Si verifica che gli autovettori sono:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\alpha} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{i\alpha} \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

Introducendo la notazione:

$$e^{i\alpha} = \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \quad (2.60)$$

gli autovettori (2.59) diventano:

$$\begin{pmatrix} 1 + \epsilon \\ 1 - \epsilon \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 + \epsilon \\ \epsilon - 1 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

che, divisi per gli opportuni coefficienti di normalizzazione, coincidono con le espressioni (2.55) e (2.56).

Se il sistema dei mesoni neutri è invariante per T allora, indipendentemente dall'invarianza per CPT , valgono le relazioni:

$$|P_S\rangle = \begin{pmatrix} 1 + \delta \\ 1 - \delta \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2(1 + |\delta|^2)}} \quad (2.62)$$

$$|P_L\rangle = \begin{pmatrix} 1 - \delta \\ -(1 + \delta) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2(1 + |\delta|^2)}} \quad (2.63)$$

dove $\delta \in \mathbb{C}$. Per ipotesi la dinamica del sistema è invertibile rispetto all'inversione temporale. Ciò equivale a chiedere:

$$\langle P_L | M - \frac{i}{2}\Gamma | P_S \rangle = \langle P_S | \mathcal{T}^{-1} (M - \frac{i}{2}\Gamma) \mathcal{T} | P_L \rangle = \langle P_S | M - \frac{i}{2}\Gamma | P_L \rangle \quad (2.64)$$

Ricordando che $|P_L\rangle$ e $|P_S\rangle$ sono autostati dell'Hamiltoniana efficace di autovalori μ_L e μ_S si ottiene:

$$\mu_S \langle P_L | P_S \rangle = \mu_L \langle P_S | P_L \rangle \quad (2.65)$$

Poiché si è dimostrato che $\mu_L \neq \mu_S$, mentre $\langle P_L | P_S \rangle = \langle P_S | P_L \rangle$ si ottiene:

$$\langle P_L | P_S \rangle = 0 \quad (2.66)$$

Due vettori complessi mutualmente ortogonali possono essere parametrizzati nel modo seguente:

$$|P_S\rangle \propto \begin{pmatrix} 1 + \delta \\ 1 - \delta \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

$$|P_L\rangle \propto \begin{pmatrix} 1 - \delta \\ -(1 + \delta) \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

con $\delta \in \mathbb{C}$. Le relazioni (2.67) e (2.68), divise per gli opportuni fattori di normalizzazione, forniscono la prova dell'asserto. A questo punto si definisce il parametro η nel modo seguente:

$$\eta = \langle P_S | P_L \rangle \quad (2.69)$$

dai due teoremi appena dimostrati si deduce che

$$\begin{cases} CPT \implies \eta \text{ reale} \\ T \implies \eta \text{ immaginario} \end{cases}$$

infatti se il sistema è invariante per CPT si ha, dal Teorema 2.1.:

$$\langle P_S | P_L \rangle = \frac{\epsilon + \epsilon^*}{1 + (|\epsilon|)^2} \quad (2.70)$$

mentre se è invariante per T , dal Teorema 2.2.:

$$\langle P_S | P_L \rangle = \frac{\delta^* - \delta}{1 + (|\delta|)^2} \quad (2.71)$$

Per cui η si rivela un ottimo parametro per valutare la violazione di CP (che, per il teorema CPT , avviene se viene violata T). Se entrambe le simmetrie CPT e CP fossero esatte, allora si dovrebbe avere $\eta = 0$ e i due autostati $|P_S\rangle$ e $|P_L\rangle$ si ridurrebbero agli autostati dell'operatore CP $|P_1\rangle$ e $|P_2\rangle$ definiti dalle espressioni precedenti come K_1^0 e K_2^0 . Il parametro η può essere calcolato a partire dagli elementi delle matrici di massa e di decadimento. Dato il problema agli autovalori per l'hamiltoniana efficace:

$$(M - i\frac{\Gamma}{2})|P_j\rangle = (m_j - \frac{i}{2}\gamma_j)|P_j\rangle \quad (2.72)$$

Dove j è un indice che può significare L o S . Moltiplicando per l'unità immaginaria i due lati di questa espressione ed eseguendo il prodotto scalare per il bra $\langle P_k |$ (con $k = L, S$) si ottengono le relazioni:

$$\langle P_S | \frac{\Gamma}{2} + iM | P_L \rangle = (\frac{1}{2}\gamma_L + im_L)\langle P_S | P_L \rangle \quad (2.73)$$

$$\langle P_L | \frac{\Gamma}{2} + iM | P_S \rangle = (\frac{1}{2}\gamma_S + im_S)\langle P_L | P_S \rangle \quad (2.74)$$

L'espressione hermitiana coniugata dell'equazione precedente è:

$$\langle P_L | \frac{\Gamma}{2} - iM | P_S \rangle = (\frac{1}{2}\gamma_S - im_S)\langle P_L | P_S \rangle \quad (2.75)$$

che, sommata alla (2.74), diventa:

$$2\langle P_S | \Gamma | P_L \rangle = [\frac{1}{2}(\gamma_L + \gamma_S) + i(m_L - m_S)]\eta \quad (2.76)$$

dove si è usata la definizione $\eta = \langle P_S | P_L \rangle$. E' possibile dimostrare che:

$$\langle P_S | \Gamma | P_L \rangle = \frac{1}{2} \sum_c \sqrt{\gamma_S(c) \gamma_L(c)} e^{i\theta_c} \quad (2.77)$$

dove c è un indice che identifica gli stati di decadimento finali, mentre ϕ è una generica fase. Quindi si ottiene la seguente espressione di η :

$$\eta = \frac{\sum_c \sqrt{\gamma_S(c) \gamma_L(c)} e^{i\theta_c}}{\frac{1}{2}(\gamma_L + \gamma_S) + i(m_L - m_S)} \quad (2.78)$$

Capitolo 3

Il flavour nel Modello Standard

A partire dalla seconda metà del secolo scorso, principalmente grazie alle scoperte fatte agli acceleratori di particelle, è stato progressivamente possibile comprendere la natura delle interazioni fondamentali ad alta energia e quali siano i costituenti fondamentali che compongono la materia. Il quadro delle interazioni è compendiato nel Modello Standard (d'ora in poi SM).

La dinamica delle particelle dello SM è dovuta all'interazione elettro-debole (le interazioni elettromagnetica e debole sono unificate) e all'interazione forte (cromodinamica). Lo SM distingue le particelle in due insiemi di fermioni: leptoni e quark. I quark interagiscono fortemente, mentre i Leptoni no. Sia i quark sia i leptoni interagiscono per interazione elettro-debole. Entrambi gli insiemi presentano tre generazioni di particelle che esibiscono proprietà simili. Le differenze principali tra generazioni sono dovute alla massa e alla vita media delle particelle che ne fanno parte.

All'insieme dei leptoni appartengono le famiglie di flavour (sapore) dell'*elettrone* (e^-), del *muone* (μ^-) e del *tauone* (τ^-). Ogni leptone carico è accompagnato da un corrispondente neutrino, privo di carica elettrica: ν_e , ν_μ e ν_τ :

$$L_e \equiv \begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix} \quad L_\mu \equiv \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \quad L_\tau \equiv \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Assieme alle famiglie di particelle leptoniche, esistono i corrispondenti anti-leptoni. L'elettrone, il muone e il tauone sono fermioni di spin $s = 1/2$ e carica elettrica -1 (in unità di carica). La massa dell'elettrone è $m_e = 0.510998928(11)$ MeV [22]. Questa particella per quel che è noto risulta essere stabile, in quanto non sono mai stati osservati decadimenti dell'elettrone. Il limite inferiore misurato della vita media dell'elettrone è di 4.6×10^{26} anni, con un intervallo di confidenza al 90% [22]. Il neutrino dell'elettrone è una particella che, come tutti neutrini, interagisce solo debolmente, essendo priva di carica elettrica.

L'esistenza del neutrino fu ipotizzata già nel 1930 da W. Pauli, per tenere conto del momento e dell'energia mancante nel decadimento- β , e fu rivelato nel 1956 da un gruppo di

ricercatori guidati da C. Cowan e F. Reines. La sua massa è altresì estremamente piccola: il limite superiore è fissato a 2.05 eV [25]. Alla seconda generazione di leptoni appartengono il muone (μ) e il suo neutrino (ν_μ). La massa del muone, anch'essa misurata con straordinaria precisione, è: 105.6583715(35) MeV [23], e, come si vede, corrisponde a circa 200 volte la massa dell'elettrone, al quale, è peraltro identico. Il muone è però una particella instabile che decade con vita media di $2.1969811(22) \times 10^{-6}$ s [23]. Il limite superiore della massa del neutrino del muone ν_μ è 0.19 MeV [25]. Passando alla terza generazione del tauone (τ) si osserva un ulteriore, considerevole, aumento della massa. Il tauone ha una massa $m_\tau = 1776,99 \pm 0,29$ MeV [24]. Il tauone decade quindi molto più rapidamente del muone, con una vita media di $290,6 \times 10^{-15}$ s [24]. Il limite superiore della massa del neutrino del tauone è inferiore a 18.2 MeV [25].

Ad ogni leptone è associato un *numero quantico leptonico*. Il valore +1 è assegnato per convenzione ai leptoni, mentre il valore -1 per tutti gli anti-leptoni. I processi di interazione descritti dallo SM conservano il numero leptonico. La conservazione si estende a tutte le generazioni di leptoni presenti in un determinato processo d'interazione o decadimento. In altri termini: nel Modello Standard processi che violino la conservazione di uno dei numeri leptonici o del numero leptonico totale (somma dei tre) sono strettamente proibiti. Un esempio di processo elettro-debole, corrispondente al decadimento del muone, è il seguente:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (3.2)$$

Si noti che per conservazione del numero leptonico nel processo di decadimento oltre all'elettrone, compaiono l'anti-neutrino dell'elettrone e il neutrino del muone. A causa dell'*oscillazione dei neutrini* (trasformazione dello stato di flavour del neutrino) sappiamo con certezza che esistono interazioni che non conservano il numero leptonico, non previsto dallo SM.

La struttura a quark degli adroni, le particelle che interagiscono per interazione forte, fu proposta per spiegare l'ampia varietà degli stati di particella osservati, in conseguenza dei processi di collisione fra nucleoni (protoni e neutroni) e mesoni (pioni). I primi quark ad essere individuati e scoperti furono chiamati *up*, *down* e *strange*. La caratteristica dei quark è di possedere una carica elettrica frazionaria: il quark up ha carica +2/3 mentre i quark down e strange hanno una carica corrispondente a -1/3 della carica fondamentale (carica del protone). Nel caso dei quark non esistono come per i leptoni particella partner di carica nulla. I due quark di una stessa famiglia presentano comunque una differenza di carica di una unità. Il quark up ha una massa stimata di 2.3 MeV. Il quark down ha una massa leggermente maggiore, di circa 4.8 MeV [26]. I quark up e down com'è noto formano la materia nucleare ordinaria. Essi costituiscono la prima generazione, quella dei quark più leggeri, in analogia perfetta con il caso dei leptoni. Il quark *strange* presenta le caratteristiche del quark down, ma possiede una massa di circa 95 MeV [26]. A completare la seconda generazione fu la scoperta del quark *charm*, del quale era stata anticipatamente prevista l'esistenza su base teorica (*GIM model*), con un valore di massa

dell'ordine del GeV. La scoperta del quark charm avvenne con la sensazionale rivelazione della particella J/Ψ , costituita dalla coppia di quark $c\bar{c}$. Il quark charm presenta le caratteristiche del quark up, ed effettivamente, come previsto, possiede una massa di 1.28 GeV [27]. Le particelle della terza famiglia di quark furono identificate solamente alcuni anni dopo. A questi due nuovi quark fu dato il nome di quark *bottom* e di quark *top*. Il quark top ha le caratteristiche del quark up, ed è il più massivo dei quark esistenti, con una massa del valore di 173.2 GeV [?]. Il quark *bottom* ha le caratteristiche del quark down, con carica elettrica di $-1/3$, massa dell'ordine di 4,2 GeV [?].

Le tre famiglie di quark in sintesi sono le seguenti:

$$\begin{aligned} q_{up} &= +2/3 & \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.3)$$

I quark sono generalmente distinti in quark *up-like* e quark *down-like* in riferimento a questo schema di classificazione. Questa distinzione è rilevante perché si osserva che un quark up-like per effetto delle interazioni deboli può decadere solamente in un quark di tipo down-like e viceversa. La regola fondamentale è quella di una variazione dello stato di flavour del quark in corrente debole carica, con corrispondente variazione della carica elettrica.

$$|\Delta Q| = 1 \quad (3.4)$$

Ai quark è associato un *numero barionico* pari a $+1/3$, agli anti-quark è associato il numero barionico opposto $-1/3$. Gli esperimenti dimostrano che il numero barionico si conserva in tutte le interazioni osservate. Una conseguenza immediata della conservazione del numero barionico è che il numero dei quark, meno quello degli antiquark, coinvolti in una reazione in totale si conserva. Un esempio è quello del processo di produzione adronica dell'anti-protone per collisione fra due protoni:

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p} \quad (3.5)$$

Quark e antiquark interagiscono fortemente in maniera indipendente dallo loro stato di flavour e dalla loro carica elettrica. Queste particelle sono dotate quindi di una ulteriore proprietà, di una carica di gauge propria dell'interazione forte, detta *carica di colore*. Ciascun quark, o antiquark, è portatore di una carica di gauge che può assumere tre valori differenti (stati di colore), indicati convenzionalmente come: r (red), b (blue) e g (green). Gli esperimenti mostrano che i quark si presentano in natura sempre in stati legati, generalmente denominati *adroni*. Questo proprietà è nota come *confinamento*. Il confinamento s'interpreta come impossibilità di osservare quark liberi, essi formano stati legati nei quali il sistema si trova in uno stato di *singoletto di colore* (Gell-Mann):

$$\frac{r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g}}{\sqrt{6}} \quad (3.6)$$

I quark sono legati in sistemi binari, per formare i *mesoni*, oppure sono organizzati in triplette, per formare i *barioni*. Più precisamente i mesoni sono composti da un quark e da un antiquark, i barioni sono formati da tre quark, oppure da tre antiquark. Sulla base della regola che stati legati di quark producano particelle in uno stato di singoletto di colore, si ritiene che debbano esistere sistemi legati di quark più complessi di quelli appena descritti. In effetti una prima evidenza sperimentale di questo fatto è giunta nel Luglio del 2015 dal CERN di Ginevra. L'esperimento LHCb ha confermato infatti l'esistenza di uno stato legato formato da cinque quark (4 quark e un antiquark), denominato *pentaquark*.

Nello SM esiste un'altra classe di particelle: i mediatori delle forze di interazione. Queste particelle hanno spin intero, quindi si comportano come bosoni. I mediatori delle forze sono infatti detti anche *bosoni di gauge*. A questa categoria appartengono: il fotone (γ), i bosoni W^\pm e Z^0 e i gluoni. Il fotone è il mediatore dell'interazione elettromagnetica, ha carica elettrica nulla, e come detto coincide con la sua antiparticella. Il fotone è una particella di spin 1 e massa nulla. I bosoni W^\pm e Z^0 sono i mediatori dell'interazione debole. Anch'esse sono particelle di spin 1. La carica elettrica dei bosoni W^\pm è ± 1 , mentre il bosone Z^0 è neutro. La massa dei bosoni di gauge carichi W^\pm è 80.3 GeV [18], mentre quella del bosone neutro vale 91.2 GeV [19].

I gluoni sono i bosoni di gauge dell'interazione forte. Hanno carica elettrica zero, spin 1 e si ritiene che abbiano massa nulla. Il limite sperimentale superiore della massa dei gluoni è posto a 20 MeV [20]. Queste particelle sono caratterizzate da uno stato di colore variabile fra otto stati diversi.

In figura Figura 3.1 sono riportate le particelle dello SM sopra descritte, assieme alle loro principali caratteristiche.

Per inciso osserviamo che in figura Figura 3.1 è riportato anche il *bosone di Higgs*. Questa particella, recentemente scoperta al LHC, è associata all'omonimo campo, che si ritiene permei tutto lo spazio. Negli istanti iniziali di vita dell'universo il campo di Higgs avrebbe subito un processo di condensazione che gli avrebbe fatto acquisire l'attuale valore di aspettazione non nullo di energia nello stato di vuoto, con conseguente rottura spontanea della simmetria di gauge elettro-debole. Questo è nello SM il meccanismo responsabile della acquisizione della massa delle particelle. La particella di Higgs ha una massa, stimata sperimentalmente, di 125.7 GeV [21]. Il bosone di Higgs ha carica elettrica nulla e spin zero.

3.1 Proprietà delle interazioni deboli.

Ad ogni particella fermionica del modello standard, leptone o quark, è associato un numero quantico di *sapore*. La sola interazione in grado di modificare il sapore di una particella è l'interazione debole. La conservazione del sapore rappresenta invece una simmetria di gauge globale esatta dell'elettromagnetismo e della QCD. Sono possibili tre

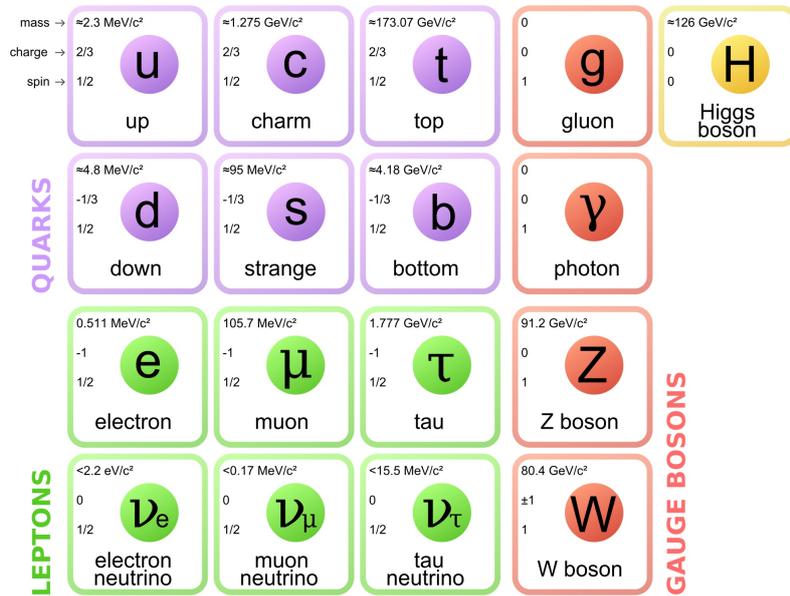


Figura 3.1: Il Modello Standard

differenti tipi di processo debole.

3.1.1 Processi puramente leptonici.

In tal caso sia nello stato iniziale sia in quello finale sono presenti soltanto leptoni. Degli esempi di questi processi sono i seguenti:

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu, \quad \text{corrente carica;} \quad (3.7a)$$

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^-, \quad \text{corrente carica;} \quad (3.7b)$$

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e, \quad \text{corrente carica;} \quad (3.7c)$$

$$\nu_e + \mu^- \rightarrow \nu_e + \mu^-, \quad \text{corrente neutra.} \quad (3.7d)$$

I processi di interazione debole in corrente neutra non producono la variazione dello stato di flavour dei leptoni coinvolti nel processo. Il processo (3.7d) riportato come esempio è dovuto allo scambio di una particella Z^0 . I diagrammi di Feynman corrispondenti a questi processi sono rappresentati in 3.2

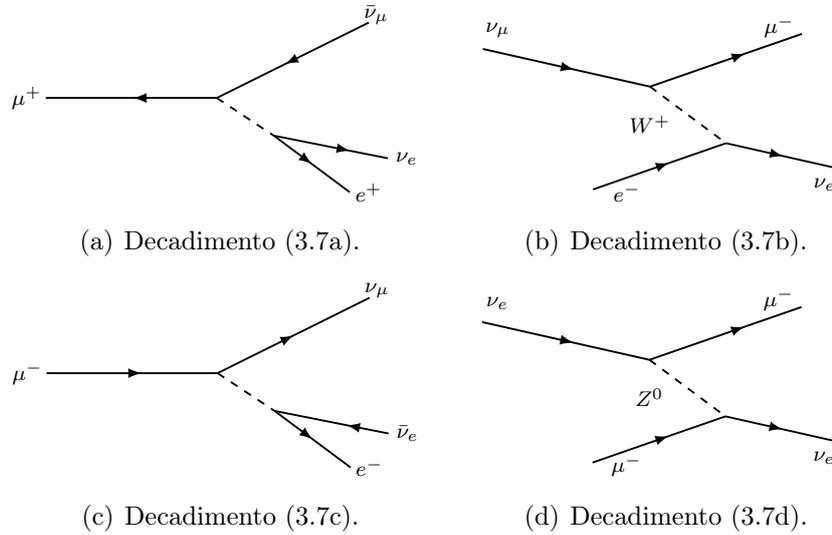


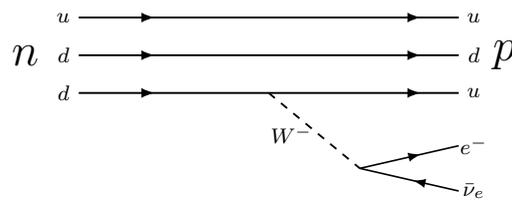
Figura 3.2: Processi deboli di tipo puramente leptonic.

3.1.2 Processi semileptonici.

In tal caso nel processo debole sono presenti sia leptoni che adroni. Un esempio di questo processo è costituito dal decadimento- β del neutrone:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (3.8)$$

il cui diagramma di Feynman è riportato in figura 3.3.



(a) Decadimento (3.8).

Figura 3.3: Processi deboli semi-leptonici.

Un ulteriore esempio di processo semileptonico è lo scattering dei neutrini

$$\nu_\mu + n \rightarrow p + \mu^- \quad \text{correntecarica} \quad (3.9a)$$

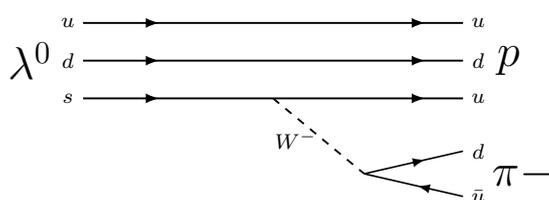
$$\nu_\mu + p \rightarrow p + \nu_\mu \quad \text{correnteneutra} \quad (3.9b)$$

3.1.3 Processi non leptonici.

In questo caso nello stato iniziale e in quello finale sono presenti solo degli adroni. Questa classe di processi contiene decadimenti del tipo:

$$\begin{aligned} \lambda^0 &\rightarrow p + \pi^- \\ s &\rightarrow u + \bar{u} + d \end{aligned} \quad (3.10)$$

Il diagramma di Feynman del processo è in visibile figura 3.4.



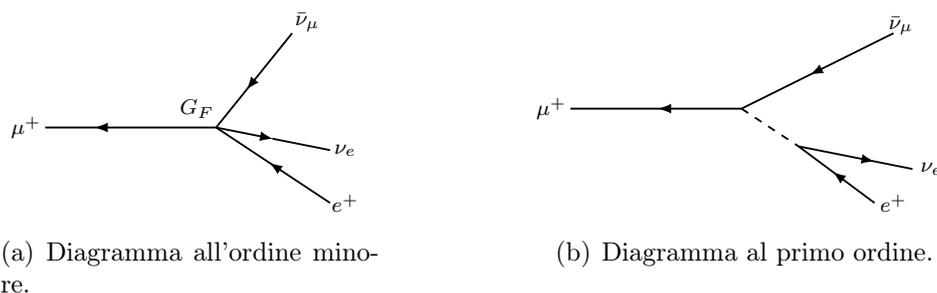
(a) Decadimento (3.10).

Figura 3.4: Decadimenti non leptonici.

Ad energie molto più basse della massa del bosone W , la probabilità di transizione risulta calcolabile mediante la teoria di Fermi, introducendo la costante chiamata appunto *costante di Fermi* (G_F). Il valore di G_F è misurabile con estrema accuratezza nel decadimento-beta del leptone μ^+ :

$$\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e \quad (3.11)$$

Il diagramma di Feynman del processo è rappresentato in figura 3.5.



(a) Diagramma all'ordine minore.

(b) Diagramma al primo ordine.

Figura 3.5: Decadimento- β dei muoni

La costante g di accoppiamento corrispondente a ogni vertice rappresenta la carica dell'interazione debole. Tale grandezza è adimensionale ed ha un ruolo analogo a quello della costante α di struttura dell'accoppiamento dell'interazione elettromagnetica. L'ampiezza

quantistica di transizione debole del processo risulta proporzionale al prodotto delle due cariche deboli e del propagatore:

$$A \propto \frac{g^2}{M_W^2 - t} \quad (3.12)$$

Supponendo che il valore del quadri-momento trasferito t sia piccolo $t \ll M_W^2$, è possibile riscrivere l'equazione 3.12 come:

$$A \propto \frac{g^2}{M_W^2} = \text{costante} \quad (3.13)$$

Dall'equazione (3.13) è evidente che la costante di Fermi abbia delle dimensioni fisiche. Infatti G_F è definita in modo tale che la quantità $G_F/(\hbar c)^3$ abbia le dimensioni dell'inverso di una energia al quadrato ($1/[\text{energia}]^2$). In particolare, la relazione con la carica debole nel sistema internazionale delle unità di misura è per definizione:

$$\frac{G_F}{(\hbar c)^3} = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{g^2}{(M_W c^2)^2} \quad (3.14)$$

nel sistema naturale, la precedente equazione si riduce a:

$$G_F = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{g^2}{M_W^2} \quad (3.15)$$

quindi nel sistema naturale delle unità di misura la costante di Fermi ha le dimensioni di una lunghezza al quadrato. Dal calcolo della vita media del muone si ottiene:

$$\Gamma(\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e) = \frac{\hbar}{\tau_\mu} = \frac{1}{192\pi^3} G_F^2 m_\mu^5 (1 + \epsilon) \quad (3.16)$$

già espresso nel sistema naturale delle unità di misura. La costante di correzione ϵ è nulla nel caso in cui si ponga la massa dell'elettrone a zero. Si noti che il tasso di decadimento è proporzionale alla quinta potenza della massa della particella che decade (proprietà è deducibile in base all'analisi dimensionale). Il valore attuale della costante di Fermi è:

$$G_F/(\hbar c)^3 = (1.16637 \pm 0.00001) \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2} \quad (3.17)$$

3.2 Universalità dei leptoni.

L'assenza di un vertice d'interazione diretto tra leptoni e gluoni rende i processi puramente leptonici l'ambiente adatto per lo studio delle correnti deboli e per la comprensione dell'universalità dell'accoppiamento di questi fermioni con i bosoni di gauge dell'interazione. Con il termine *universalità dei leptoni* si indica l'indipendenza dal flavour del

valore della costante di accoppiamento tra un leptone e i bosoni mediatori dell'interazione debole.

L'universalità di e e μ fu provata nel decadimento del leptone τ .

$$\tau^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau \quad \tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau \quad (3.18)$$

Stimando teoricamente il valore del rapporto tra le due ampiezze di decadimento si ottiene

$$\frac{\Gamma(\tau^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau)}{\Gamma(\tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau)} = \frac{g_\mu^2 \rho_\mu}{g_e^2 \rho_e} \quad (3.19)$$

dove l'ultimo fattore è il rapporto dei volumi dello spazio delle fasi, il cui valore può essere calcolato accuratamente. Utilizzando i dati sperimentali (YAO *et al.* 2006) si ottiene

$$\frac{\Gamma(\tau^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau)}{\Gamma(\tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau)} = 0.974 \pm 0.004 \quad (3.20)$$

dal quale si ottiene

$$\frac{g_\mu}{g_e} = 1.001 \pm 0.002 \quad (3.21)$$

essendo il rapporto tra le costanti di accoppiamento molto vicino all'unità, si ha la conferma che l'elettrone e il muone interagiscono fortemente allo stesso modo. Dall'analisi del decadimento β del μ e del τ si ricava l'universalità di questi due leptoni. Il rapporto delle ampiezze di decadimento risulta proporzionale al quadrato del rapporto tra la costante di accoppiamento tra il muone e il bosone W e il tauone e bosone W. I dati sperimentali indicano anche in questo caso un valore del rapporto tra le costanti di accoppiamento prossimo all'unità:

$$\frac{g_\mu}{g_\tau} = 1.001 \pm 0.003 \quad (3.22)$$

Da questo risultato possiamo dedurre che anche l'elettrone e il tauone nell'interazione debole si comportano in modo del tutto equivalente. Quindi entro gli errori sperimentali vale l'uguaglianza:

$$g_e = g_\mu = g_\tau = g \quad (3.23)$$

che rappresenta la definizione di universalità dei leptoni.

3.3 Matrice CKM e triangoli unitari.

Nella sezione precedente è stata mostrata l'universalità dei leptoni. Un discorso analogo per i quark non è valido. Questa proprietà dei quark, nota con il nome di *mixing dei quark*, fu proposta nel 1963 da Nicola Cabibbo. Al momento della scoperta del *mixing* erano noti soltanto i quark up, down e strange. Il problema era quello di spiegare due differenti tipi di decadimento β esibito dagli adroni. Alcuni decadimenti conservavano la

stranezza, altri invece la violavano, dando origine a processi con $|\Delta S| = 1$. Un esempio di decadimento-beta che conserva la stranezza, nel quale cioè $|\Delta S| = 0$, è il decadimento del neutrone:

$$n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e \quad (3.24)$$

Un decadimento che non conserva la stranezza, per il quale si ha $|\Delta S| = 1$ è:

$$\Lambda \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e \quad (3.25)$$

L'adrone λ è composto dai quark $s-d-u$, mentre il protone è composto dai quark $u-u-d$. Nel processo di decadimento il quark strange si trasforma in un quark up, emettendo un bosone W^- . Casi analoghi ai precedenti, relativi questa volta ai mesoni, sono quelli del decadimento del kaone (K) e del pione (π):

$$K^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \pi^- \quad \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \quad (3.26a)$$

$$(3.26b)$$

Il pione è costituito dai quark $\bar{u}-d$, mentre il kaone è dai $\bar{u}-s$. Il rapporto delle ampiezze di decadimento indica che il processo di decadimento del kaone è soppresso rispetto a quello del decadimento del pione. Un ulteriore problema è legato al fatto che la costante di accoppiamento del decadimento β del neutrone è considerevolmente minore di quella del decadimento del muone. Se si assume che i quark *down-type* che entrano in gioco nell'interazione non sono gli autoscatti di flavour d ed s ma loro combinazioni lineari d' e s' è possibile ottenere una descrizione coerente dei fenomeni osservati. Si fa l'ipotesi che entrambe le coppie di quark (d, s) e (d', s') costituiscano una base ortonormale per la descrizione delle correnti di transizione dello stato dei quark. La seconda di queste coppie è ottenuta dalla prima tramite una rotazione, corrispondente al cosiddetto angolo di Cabibbo (θ_C).

$$d' = d \cos \theta_C + s \sin \theta_C \quad (3.27)$$

Per effetto della rotazione si ottiene uno stato di quark *down-type* che non si trova in uno stato di flavour definito. I coefficienti di d ed s devono soddisfare la condizione di normalizzazione. L'ipotesi è che l'elemento di matrice del decadimento descritto dall'equazione (3.24) è proporzionale al coseno dell'angolo di Cabibbo, mentre il decadimento descritto dall'equazione risulta proporzionale al seno dello stesso angolo. Poiché l'angolo di Cabibbo risulta essere piccolo, il processo che conserva la stranezza è favorito rispetto quello che la viola. La larghezza di decadimento del neutrone è proporzionale alla costante di Fermi per il coseno dell'angolo di Cabibbo, mentre il decadimento del muone è legata alla sola costante di Fermi. Questo fatto spiega perché la prima sia apprezzabilmente minore della seconda. Il valore dell'angolo di Cabibbo risulta essere:

$$\theta_C = 12.9^\circ \quad (3.28)$$

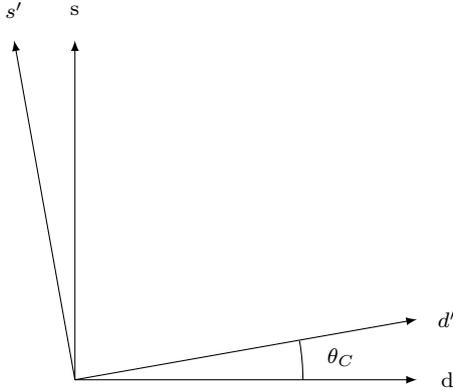


Figura 3.6: Mixing di Cabibbo

Stabilito con la scoperta del quark charm che i quark dovessero essere almeno quattro, il mixing dei quark doveva essere espresso in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} \\ V_{cd} & V_{cs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Le due basi sono connesse da una trasformazione ortogonale, come si può vedere dalla relazione (3.30). La matrice di mixing presenta un solo parametro libero, che è appunto l'angolo di Cabibbo (θ_C). La generalizzazione a tre generazioni fu proposta successivamente da M. Kobayashi e K. Maskawa. La matrice di mixing dei quark passava così dall'essere una matrice quadrata di rango 2 ad una matrice quadrata di rango 3

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

La matrice dell'equazione (3.30) è chiamata *matrice di Cabibbo-Kobayashi-K. Maskawa* (CKM). La matrice CKM ha la proprietà di essere unitaria:

$$V^\dagger V = 1 = V V^\dagger \quad (3.31)$$

La matrice CKM è una matrice 3×3 con 4 parametri liberi. Una matrice immaginaria di dimensione n , presenta ovviamente $2n^2$ parametri liberi. Per determinare il numero dei parametri liberi della teoria debbono essere sottratti i parametri vincolati alle proprietà fisiche descritte:

- condizione di unitarietà: (n^2) parametri;
- condizione di indipendenza delle fasi dei quark: $(2n - 1)$ parametri;

La seconda condizione è dovuta al fatto che non tutte le fasi dei quark hanno significato fisico, infatti la matrice di trasformazione deve risultare invariante sotto un cambio di fase del tipo

$$d^k \rightarrow e^{i\theta_k} d^k \quad V_{ik} \rightarrow e^{-i\theta_k} V_{ik} \quad (3.32)$$

Operando n trasformazioni, una per ogni elemento (d^k) del vettore colonna, è possibile raccogliere una fase globale per ogni riga della matrice, eliminando di fatto n fasi. Allo stesso modo è possibile raccogliere una fase per ogni colonna della matrice. A prima vista si potrebbe pensare che altre n fasi vengano eliminate, tuttavia solamente $(n-1)$ di esse risultano linearmente indipendenti. Infatti, la matrice di trasformazione dei quark non muta se sia il quark d^k che il quark u_i cambiano con la stessa fase. Dunque le fasi devono rispettare un vincolo, il quale impone che il numero di fasi linearmente indipendenti risulti essere proprio $(2n-1)$. Quindi per una matrice di rango n i parametri liberi sono

$$g_l = 2n^2 - n^2 - (2n-1) = (n-1)^2$$

Questo risultato prova che la matrice CKM possiede effettivamente 4 parametri liberi. Considerando lo spazio tridimensionale generato dalla terna (x,y,z) e rinominando questi assi con il nome dei quark *down-type* (d,s,b) come mostrato in figura Figura 3.7, è possibile ottenere la matrice di mixing attraverso delle trasformazioni. Operando delle rotazioni nel seguente ordine: la prima di un angolo θ_{12} attorno all'asse b , la seconda di un angolo θ_{13} attorno all'asse s e la terza di un angolo θ_{23} attorno all'asse delle d , si ottiene:

$$V_{reale} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

dove è stata utilizzata, per brevità, la scrittura $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ e $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$. L'attuale miglior stima del valore degli angoli è

$$\theta_{12} = (13.04 \pm 0.08)^\circ \quad \theta_{23} = (2.38 \pm 0.06)^\circ \quad \theta_{13} = (0.201 \pm 0.011)^\circ \quad (3.34)$$

I valori degli angoli di rotazione sono molto piccoli, ma in figura Figura 3.7 sono stati esagerati per renderli visibili.

Ora risulta necessario introdurre la fase

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ 0 & 1 & s_0 \\ -s_{13}e^{+i\delta_{13}} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{+i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{+i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{+i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{+i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

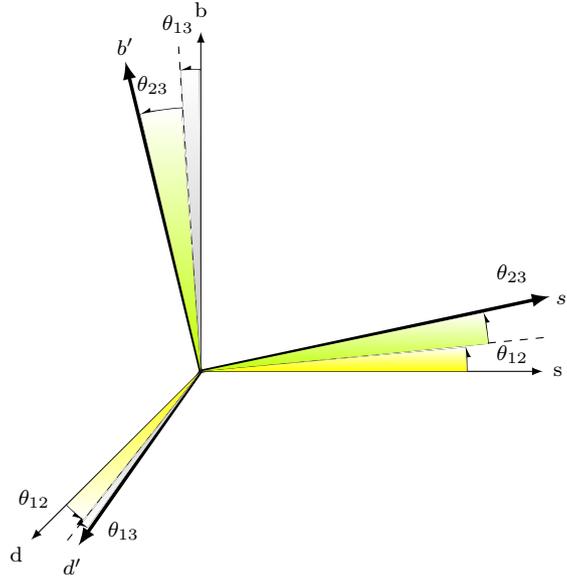


Figura 3.7: Rotazione dei quark

L'introduzione della fase in questo modo è possibile solamente se la matrice CKM è unitaria. Il suo valore è stimato essere

$$\delta_{13} = (1.20 \pm 0.08)^\circ \quad (3.36)$$

La validità della teoria, quindi dello SM stesso, può essere provata verificando che la matrice CKM sia effettivamente unitaria. Sono stati ideati precisi esperimenti volti a valutare con una incredibile accuratezza gli elementi della matrice di trasformazione. Grazie ai decadimenti semileptonici è stato possibile valutare il valore assoluto di questi. Il valore di $|V_{tb}|^2$ non è stato ancora valutato, tuttavia si è certi che il suo valore sia incredibilmente vicino all'unità. La parte immaginaria dei termini, dove presente è stata misurata attraverso i fenomeni di violazione di simmetria CP . Di seguito si riporta la matrice CKM con i valori assoluti dei suoi elementi

$$V = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 973.8 \pm 0.2 & 227.0 \pm 1.0 & 4.0 \pm 0.1 \\ 227.0 \pm 1.0 & 973.0 \pm 0.2 & 42.2 \pm 0.8 \\ 8.1 \pm 0.6 & 41.6 \pm 0.8 & 999.1 \pm 0.1 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \quad (3.37)$$

Poiché i moduli quadri degli elementi della matrice CKM rappresentano i rates di transizione da uno stato *up-like* ad uno *downlike* o viceversa, è possibile compiere una prima verifica delle ipotesi toriche, valutando quanto sia vicino all'unità la somma dei moduli

quadri lungo le righe e lungo le colonne

$$\begin{aligned}
|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 &= 0.9998 \pm 0.0008 && \text{prima riga} \\
|V_{cd}|^2 + |V_{cs}|^2 + |V_{cb}|^2 &= 1.0000 \pm 0.0009 && \text{seconda riga} \\
|V_{tc}|^2 + |V_{ts}|^2 + |V_{tb}|^2 &= 1.0000 \pm 0.0003 && \text{terza riga} \\
|V_{ud}|^2 + |V_{cd}|^2 + |V_{td}|^2 &= 0.9999 \pm 0.0009 && \text{prima colonna} \\
|V_{us}|^2 + |V_{cs}|^2 + |V_{ts}|^2 &= 1.0001 \pm 0.0009 && \text{seconda colonna} \\
|V_{ub}|^2 + |V_{cb}|^2 + |V_{tb}|^2 &= 1.0000 \pm 0.0003 && \text{terza colonna}
\end{aligned}$$

Osservando i valori della matrice CKM riportati nell'equazione (3.37) si nota subito che i termini sulla diagonale sono molto vicini all'unità. Questo significa che i quark connessi a quel termine matriciale decadono principalmente l'uno nell'altro. Analizzando i termini non diagonali è possibile capire quanto i quark di una generazione fanno mixing con un'altra. Il mixing tra la prima e la seconda generazione, per esempio, è maggiore rispetto a quello tra la seconda e la terza. Questo a sua volta risulta maggiore rispetto al mixing tra la prima e la terza generazione. Questo significa che gli adroni preferiscono decadere semileptonicamente nella generazione accanto. Ciò implica che la sottomatrice di rango 2 che descrive il mixing tra le prime due famiglie è molto simile a quella dell'equazione (3.30) e che $\theta_C \approx \theta_{12}$, $|V_{ud}| \approx |V_{cs} \approx \cos \theta_C|$ e $|V_{us}| \approx |V_{cd} \approx \sin \theta_C$.

3.3.1 Parametrizzazione di Wolfenstein e triangoli unitari.

Sulla base di queste osservazioni, il fisico americano L. Wolfenstein propose una nota parametrizzazione della matrice CKM, che porta il suo nome. Partendo dall'equazione (3.33) e procedendo con sostituzione seguente

$$s_{12} = \lambda \quad s_{23} = A\lambda^2 \quad s_{13}e^{-i\delta_{13}} = A\lambda^3(\rho - i\eta) \quad (3.38)$$

si ottiene facilmente il risultato desiderato, che al terzo ordine di approssimazione è

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + O(\lambda^4) \quad (3.39)$$

Utilizzando la parte sinistra della definizione di unitarietà, espressa dall'equazione (3.31), si ottengono nove equazioni, tre delle quali esprimono l'universalità debole

$$\begin{cases} |V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 = 1 \\ |V_{cd}|^2 + |V_{cs}|^2 + |V_{cb}|^2 = 1 \\ |V_{td}|^2 + |V_{ts}|^2 + |V_{tb}|^2 = 1 \end{cases} \quad (3.40)$$

mentre le altre sei equazioni definiscono delle relazioni di ortogonalità che rappresentano dei triangoli nel piano complesso. Di queste solamente tre risultano linearmente indipendenti

$$\begin{cases} V_{ud}^* V_{us} + V_{cd}^* V_{cs} + V_{td}^* V_{ts} = 0 \\ V_{ub}^* V_{ud} + V_{cb}^* V_{cd} + V_{tb}^* V_{td} = 0 \\ V_{us}^* V_{ub} + V_{cs}^* V_{cb} + V_{ts}^* V_{tb} = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

dalla seconda parte della relazione (3.31) si ricavano, tuttavia, altre tre equazioni linearmente indipendenti, rappresentanti altri triangoli unitari

$$\begin{cases} V_{cd} V_{ud}^* + V_{cs} V_{us}^* + V_{cb} V_{ub}^* = 0 \\ V_{td} V_{ud}^* + V_{ts} V_{us}^* + V_{tb} V_{ub}^* = 0 \\ V_{td} V_{cd}^* + V_{ts} V_{cs}^* + V_{tb} V_{cb}^* = 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

Di queste solamente tre equazioni risultano linearmente indipendenti. Sfruttando la parametrizzazione di Wolfenstein è possibile valutare quali triangoli unitari hanno i lati dello stesso ordine di grandezza

$$\begin{cases} \underbrace{V_{ud} V_{us}^*}_{o(\lambda)} + \underbrace{V_{cd}^* V_{cs}}_{o(\lambda)} + \underbrace{V_{td}^* V_{ts}}_{o(\lambda^5)} = 0 \\ \underbrace{V_{ub}^* V_{ud}}_{o(\lambda^3)} + \underbrace{V_{cb}^* V_{cd}}_{o(\lambda^3)} + \underbrace{V_{tb}^* V_{td}}_{o(\lambda^3)} = 0 \\ \underbrace{V_{us}^* V_{ub}}_{o(\lambda^4)} + \underbrace{V_{cs}^* V_{cb}}_{o(\lambda^2)} + \underbrace{V_{ts}^* V_{tb}}_{o(\lambda^2)} = 0 \\ \underbrace{V_{cd} V_{ud}^*}_{o(\lambda)} + \underbrace{V_{cs} V_{us}^*}_{o(\lambda)} + \underbrace{V_{cb} V_{ub}^*}_{o(\lambda^5)} = 0 \\ \underbrace{V_{td} V_{ud}^*}_{o(\lambda^3)} + \underbrace{V_{ts} V_{us}^*}_{o(\lambda^3)} + \underbrace{V_{tb} V_{ub}^*}_{o(\lambda^3)} = 0 \\ \underbrace{V_{td} V_{cd}^*}_{o(\lambda^4)} + \underbrace{V_{ts} V_{cs}^*}_{o(\lambda^2)} + \underbrace{V_{tb} V_{cb}^*}_{o(\lambda^2)} = 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

Quindi solamente la seconda e la quinta relazione definiscono dei triangoli di particolare rilevanza. Per analizzare geometricamente i due triangoli risulta utile riscrivere le loro

relazioni in modo da ottenere un lato unitario

$$\frac{V_{ub}^* V_{ud}}{V_{cb}^* V_{cd}} + 1 + \frac{V_{tb}^* V_{td}}{V_{cb}^* V_{cd}} = 0 \quad (3.44a)$$

$$\frac{V_{td} V_{ud}^*}{V_{ts} V_{us}^*} + 1 + \frac{V_{tb} V_{ub}^*}{V_{ts} V_{us}^*} = 0 \quad (3.44b)$$

Di particolare interesse ai fini dell'argomento trattato è il primo triangolo. Attraverso lo studio di particolari processi di decadimento che verranno analizzati in dettaglio nel seguito, è possibile stimare l'entità della violazione di CP prevista dallo SM.

Utilizzando la parametrizzazione di Wolfenstein

$$\begin{cases} \frac{V_{ub}^* V_{ud}}{V_{cb}^* V_{cd}} = \frac{A\lambda^3 \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) (\rho + i\eta)}{-A\lambda^3} = \frac{A\lambda^3 (\rho + i\eta)}{-A\lambda^3} + O(\lambda^4) \\ \frac{V_{tb}^* V_{td}}{V_{cb}^* V_{cd}} = \frac{A\lambda^3 (1 - \rho - i\eta)}{-A\lambda^3} + O(\lambda^4) \end{cases} \quad (3.45)$$

sfruttando i parametri generalizzati

$$\bar{\rho} = \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right)\rho \quad \bar{\eta} = \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right)\eta \quad (3.46)$$

si ottiene la seguente relazione per il triangolo unitario

$$(1 - \bar{\rho} - i\bar{\eta}) + (-1) + (\bar{\rho} + i\bar{\eta}) = 0 \quad (3.47)$$

Calcolando il modulo dei vettori è possibile rappresentare con maggiore semplicità il triangolo unitario in analisi

$$\begin{cases} \overline{AC} = \frac{|V_{ub}^* V_{ud}|}{|V_{cb}^* V_{cd}|} = |(\bar{\rho} + i\bar{\eta})|^2 \equiv R_b \\ \overline{BC} = 1 \\ \overline{AB} = \frac{|V_{tb}^* V_{td}|}{|V_{cb}^* V_{cd}|} = |(1 - \bar{\rho} - i\bar{\eta})|^2 \equiv R_t \end{cases} \quad (3.48)$$

Rappresentando graficamente questa relazione in un piano complesso con il parametro ρ sull'asse reale e η su quello complesso, si ottiene il grafico in figura Figura 3.8.

Ricordando che i lati del triangoli sono i moduli dei vettori del piano complesso dei quali è nota la direzione, è possibile calcolare il valore degli angoli interni del triangolo di figura Figura 3.8

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{V_{ub}^* V_{ud}}{V_{tb}^* V_{td}} \right) \\ \beta &= \left(\frac{V_{tb}^* V_{td}}{V_{cb}^* V_{cd}} \right) = \arctan \left(\frac{\bar{\eta}}{1 - \bar{\rho}} \right) \\ \gamma &= \left(\frac{V_{ub}^* V_{ud}}{V_{cb}^* V_{cd}} \right) = \arctan \left(\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}} \right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

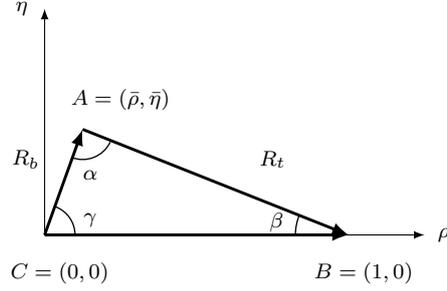


Figura 3.8: Triangolo unitario

La relazione di unitarietà espressa dall'equazione (3.44a) può essere riscritta nella seguente forma

$$R_b e^{i\gamma} + R_t e^{i\beta} = 1 \quad (3.50)$$

Sulla base dall'equazione (3.49) è possibile scrivere un'ulteriore parametrizzazione della matrice CKM che faccia uso delle relazioni che coinvolgono gli angoli interni dei triangoli di unitarietà

$$V = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}|e^{-i\gamma} \\ -|V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}|e^{-i\beta} & -|V_{ts}|e^{i\beta_s} & |V_{tb}| \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^5) \quad (3.51)$$

deove il parametro β_s rappresenta un angolo dei triangoli di unitarietà. La sua definizione è

$$\beta_s = \arg \left[-\frac{V_{ub}V_{tb}^*}{V_{us}V_{ts}^*} \right] \quad (3.52)$$

Capitolo 4

Misurazione dell'angolo γ

4.1 Metodi di misura dell'angolo γ .

Per misurare il valore dell'angolo γ sono stati sviluppati in passato diversi metodi, che sono stati impiegati con successo dagli esperimenti BaBar ai laboratori di Standford (USA) e dall'esperimento Belle al centro di ricerca di Tsukuba (Giappone). Con le stesse metodologie di analisi sono stati ottenute le più recenti misure dell'esperimento LHCb del CERN di Ginevra, con precisioni comparabili o superiori alle precedenti.

I metodi di misura si basano sulla rivelazione di particolari decadimenti dei mesoni B , costituiti dal quark bottom. Ricordiamo che la massa dei mesoni B carichi è di $m_{B^\pm} = (5279.26 \pm 0.17) \text{ MeV}$ [38] e la vita media è di $\tau_{B^\pm} = (1.638 \pm 0.004) \times 10^{-12} \text{ s}$ [38]. Gli stati finali di decadimento dei mesoni B sono numerosi, con molteplicità variabile e una ricca varietà di particelle. Di particolare interesse, per via degli elementi di matrice coinvolti nel decadimento, sono i processi che portano alla produzione dello stato intermedio costituito dal mesone D^0 (o dalla sua antiparticella) e da un kaone carico:

$$B^\pm \rightarrow D^0 K^\pm \quad (4.1a)$$

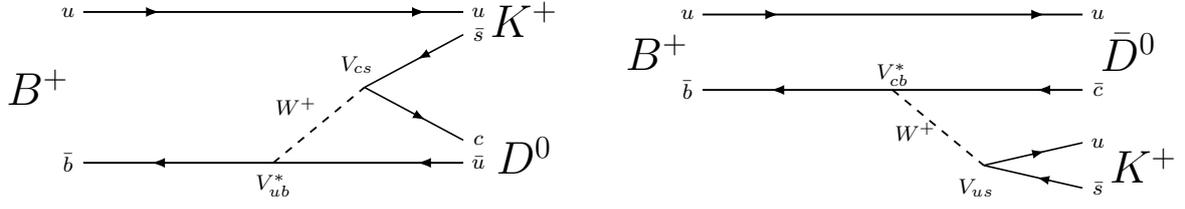
$$B^\pm \rightarrow \bar{D}^0 K^\pm \quad (4.1b)$$

I diagrammi di Feynman dei processi di decadimento del mesone B^+ sono riportati in figura 4.1 L'ampiezza di decadimento dei due processi si può scrivere come:

$$A(B^+ \rightarrow D^0 K^+) = \langle D^0 K^+ | H_w | B^+ \rangle = A_1 e^{i\delta_1} |V_{ub}| |V_{cs}| e^{+i\gamma} \equiv A_u e^{i(\delta_u + \gamma)} \quad (4.2a)$$

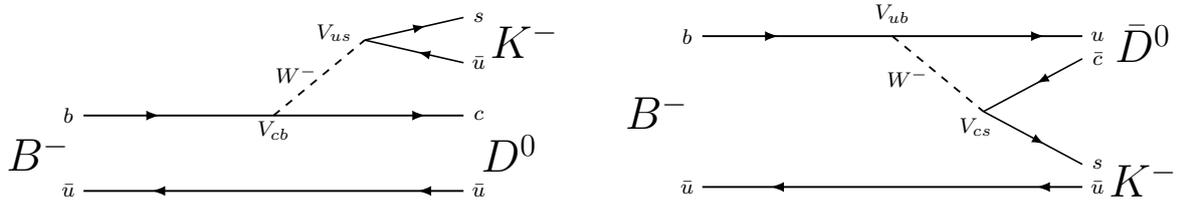
$$A(B^+ \rightarrow \bar{D}^0 K^+) = \langle \bar{D}^0 K^+ | H_w | B^+ \rangle = A_2 e^{i\delta_2} |V_{cb}| |V_{us}| \equiv A_c e^{i\delta_c} \quad (4.2b)$$

I coefficienti A_u e A_c misurano i moduli delle ampiezze quantistiche di transizione e sono pertanto delle costanti reali e positive; si riferiscono rispettivamente ai decadimenti $b \rightarrow u$ e $b \rightarrow c$. Si noti che nella relazione (4.2a) il valore di γ , nel termine esponenziale, è riportato con segno positivo, perché l'elemento della matrice che interviene in questo



(a) Decadimento descritto dall'eq. (4.1a) per B^+ . (b) Decadimento descritto dall'eq. (4.1b) per B^+ .

Figura 4.1: Decadimenti del mesone B^+ utilizzati per la misura dell'angolo γ .



(a) Decadimento descritto dall'eq. (4.1a) per B^- . (b) Decadimento descritto dall'eq. (4.1b) per B^- .

Figura 4.2: Processi di decadimento del mesone B^- per la misura dell'angolo γ .

processo corrisponde al processo coniugato di carica di quello cui ci si riferisce nella definizione della matrice CKM. Le corrispondenti ampiezze di decadimento per il mesone B^- sono:

$$A(B^- \rightarrow D^0 K^-) = \langle D^0 K^- | H_w | B^- \rangle = A_3 e^{i\delta_3} |V_{cb}| |V_{us}| \equiv A_c e^{i\delta_c} \quad (4.3a)$$

$$A(B^- \rightarrow \bar{D}^0 K^-) = \langle \bar{D}^0 K^- | H_w | B^- \rangle = A_4 e^{i\delta_4} |V_{ub}| |V_{cs}| e^{-i\gamma} \equiv A_u e^{i(\delta_u - \gamma)} \quad (4.3b)$$

In figura 4.2 sono stati riportati i diagrammi di Feynman. Possiamo osservare che le ampiezze A_c e A_u , corrispondenti alle transizioni $b \rightarrow c$ e $b \rightarrow u$ sono molto differenti, essendo la transizione $b \rightarrow c$ favorita rispetto a $b \rightarrow u$. Di seguito i diversi metodi di misura, discussi nel dettaglio.

4.1.1 Metodo Atwood-Dunietz-Soni.

Il metodo Atwood-Dunietz-Soni (*ADS*) si basa sulla rivelazione del decadimento dei D^0 e \bar{D}^0 in uno stato finale comune, in modo da poter misurare l'interferenza quantistica fra le ampiezze di decadimento e su questa base misurare il valore della fase relativa in modo da determinare γ .

I mesoni D^0 e \bar{D}^0 per il teorema *CPT* hanno la stessa vita media, pari a $\tau_{D^0} (410.1 \pm 1.5) \times 10^{-15}$ s [36]. Per confronto, la vita media dei kaoni è molto maggiore, essendo:

$\tau_{K^\pm} = (1.2380 \pm 0.0021) \times 10^{-8}$ s [32]. Lo stato di decadimento del D neutro scelto in questo caso non rappresenta un autostato dell'operatore CP , benché, come detto, per poter osservare l'interferenza, esso debba essere accessibile sia a D^0 sia a \bar{D}^0 . I diagrammi dei processi di decadimento utilizzabili sono riportati in figura 4.3. Il branching ratio

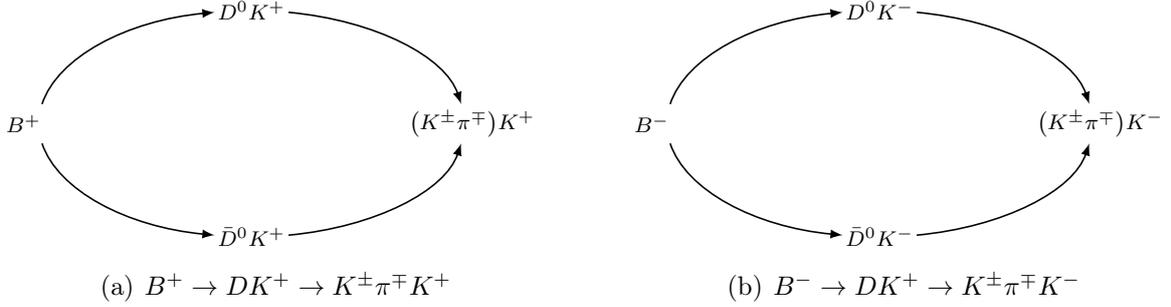


Figura 4.3: Processi di decadimento dei mesoni B^+ e B^- impiegati nel metodo ADS.

del processo di decadimento del D^0 che genera un kaone negativo e un pione positivo è $BR(D^0 \rightarrow K^- \pi^+) = (3.88 \pm 0.05)\%$. Meno frequentemente si osserva l'altro decadimento, che porta il mesone D^0 a generare uno stato finale composto da K^+ e π^- . Il BR di questa seconda modalità di decadimento è: $BR(D^0 \rightarrow K^+ \pi^-) = (1.380 \pm 0.028)^{-4}$. In figura 4.4 sono riportati i diagrammi di Feynman del processo di decadimento debole dei mesoni D^0 e \bar{D}^0 che producono lo stesso stato finale composto dal kaone positivo (K^+) e dal pione negativo (π^-).

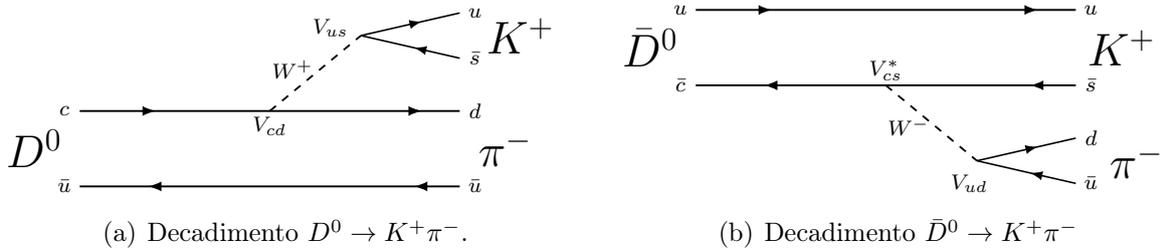


Figura 4.4: Processi di produzione dei mesoni K^+ e π^- .

Le ampiezze di decadimento del processo sono:

$$A(D^0 \rightarrow K^+ \pi^-) = \langle K^+ \pi^- | H_w | D^0 \rangle = -A_5 e^{i\delta_5} |V_{cd}| |V_{us}| \equiv A_f e^{i\delta_f} \quad (4.4a)$$

$$A(\bar{D}^0 \rightarrow K^+ \pi^-) = \langle K^+ \pi^- | H_w | \bar{D}^0 \rangle = A_6 e^{i\delta_6} |V_{cs}| |V_{ud}| \equiv A_{\bar{f}} e^{i\delta_{\bar{f}}} \quad (4.4b)$$

In figura 4.5 sono riportati i diagrammi di Feynman del processo debole che a partire dai mesoni D^0 e \bar{D}^0 produce uno stato finale composto dal kaone negativo (K^-) e dal pione positivo (π^+). Servendosi dell'espressione dei parametri della matrice CKM è possibile

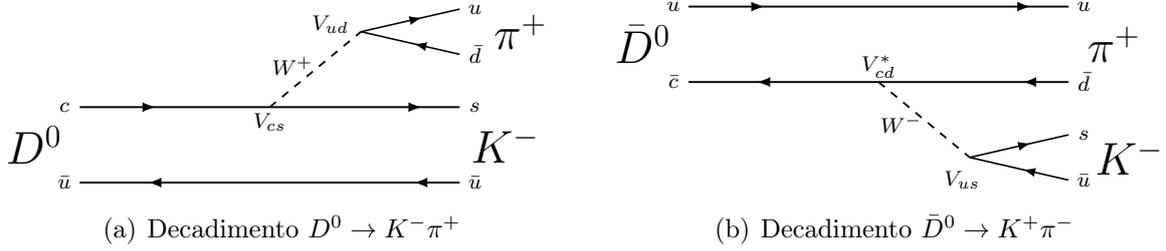


Figura 4.5: Processi di produzione dei mesoni K^- e π^+ .

calcolare le espressioni delle ampiezze di decadimento del processo:

$$A(D^0 \rightarrow K^- \pi^+) = \langle K^- \pi^+ | H_w | D^0 \rangle = A_7 e^{i\delta_7} |V_{cs}| |V_{ud}| \equiv A_{\bar{f}} e^{i\delta_{\bar{f}}} \quad (4.5a)$$

$$A(\bar{D}^0 \rightarrow K^- \pi^+) = \langle K^- \pi^+ | H_w | \bar{D}^0 \rangle = A_8 e^{i\delta_8} |V_{cd}| |V_{us}| \equiv A_f e^{i\delta_f} \quad (4.5b)$$

Siamo ora in grado di valutare le espressioni delle ampiezze di decadimento dei processi descritti dalle equazioni (4.1a) e (4.1b):

1. **Decadimento $B^+ \rightarrow DK^+ \rightarrow (K^+ \pi^-) K^+$** : il processo in questione è rappresentato in figura 4.3(a). Per calcolare l'ampiezza di decadimento della prima transizione (in alto nel diagramma), si devono moltiplicare tra loro le equazioni (4.2a) e (4.4a), mentre per la seconda transizione (in basso nel diagramma) in modo analogo si utilizzano le relazioni (4.2b) e (4.4b):

$$A(B^+ \rightarrow D^0 K^+ \rightarrow (K^+ \pi^-) K^+) = A_u A_f e^{i(\delta_u + \delta_f + \gamma)} \quad (4.6a)$$

$$A(B^+ \rightarrow \bar{D}^0 K^+ \rightarrow (K^+ \pi^-) K^+) = A_c A_{\bar{f}} e^{i(\delta_c + \delta_{\bar{f}})} \quad (4.6b)$$

L'ampiezza complessiva del processo è data dalla somma delle due relazioni:

$$A_1 = A_c A_{\bar{f}} \left[\frac{A_u A_f}{A_c A_{\bar{f}}} e^{i(\delta_u + \delta_f + \gamma)} + e^{i(\delta_c + \delta_{\bar{f}})} \right] \quad (4.7)$$

2. **Decadimento $B^- \rightarrow DK^- \rightarrow (K^+ \pi^-) K^-$** : in questo caso il processo è rappresentato in figura 4.3(b). L'ampiezza della prima transizione (in lato nel diagramma) si moltiplicano tra loro le relazioni (4.3a) e (4.4a); per per la seconda transizione (in basso nel diagramma) si utilizzano le relazioni (4.3b) e (4.4b)

$$A(B^- \rightarrow D^0 K^- \rightarrow (K^+ \pi^-) K^-) = A_c A_f e^{i(\delta_c + \delta_f)} \quad (4.8a)$$

$$A(B^- \rightarrow \bar{D}^0 K^- \rightarrow (K^+ \pi^-) K^-) = A_u A_{\bar{f}} e^{i(\delta_u + \delta_{\bar{f}} - \gamma)} \quad (4.8b)$$

Da queste possiamo calcolare l'espressione dell'ampiezza totale del processo:

$$A_2 = A_c A_{\bar{f}} \left[\frac{A_f}{A_{\bar{f}}} e^{i(\delta_c + \delta_f)} + \frac{A_u}{A_c} e^{i(\delta_u + \delta_{\bar{f}} - \gamma)} \right] \quad (4.9)$$

3. **Decadimento** $B^+ \rightarrow DK^+ \rightarrow (K^-\pi^+)K^+$: il decadimento è rappresentato in figura Figura 4.3(a). Il prodotto tra relazioni (4.2a) e (4.4a) fornisce l'ampiezza di decadimento della prima transizione per lo stato intermedio con il mesone D^0 (in alto nel diagramma). Invece dal prodotto delle relazioni (4.2b) e (4.4b) si ricava l'ampiezza del processo che produce la seconda transizione possibile, con stadio intermedio costituito dal mesone \bar{D}^0 :

$$A(B^+ \rightarrow D^0 K^+ \rightarrow (K^-\pi^+)K^+) = A_u A_{\bar{f}} e^{i(\delta_u + \delta_{\bar{f}} + \gamma)} \quad (4.10a)$$

$$A(B^+ \rightarrow \bar{D}^0 K^+ \rightarrow (K^-\pi^+)K^+) = A_c A_f e^{i(\delta_c + \delta_f)} \quad (4.10b)$$

L'ampiezza totale è dunque:

$$A_3 = A_c A_{\bar{f}} \left[\frac{A_u}{A_c} e^{i(\delta_u + \delta_{\bar{f}} + \gamma)} + \frac{A_f}{A_{\bar{f}}} e^{i(\delta_c + \delta_f)} \right] \quad (4.11)$$

4. **Decadimento** $B^- \rightarrow DK^- \rightarrow (K^-\pi^+)K^-$: infine, in figura 4.3(b) è rappresentato l'ultimo dei processi utilizzati nel metodo ADS. Per calcolare le ampiezze delle due possibili transizioni si moltiplicano tra loro le relazioni (4.3a), (4.3b) e (4.5a),(4.5b) rispettivamente:

$$A(B^- \rightarrow D^0 K^- \rightarrow (K^-\pi^+)K^-) = A_c A_{\bar{f}} e^{i(\delta_c + \delta_{\bar{f}})} \quad (4.12a)$$

$$A(B^- \rightarrow \bar{D}^0 K^- \rightarrow (K^-\pi^+)K^-) = A_u A_f e^{i(\delta_u + \delta_f - \gamma)} \quad (4.12b)$$

Da qui l'ampiezza totale

$$A_4 = A_c A_{\bar{f}} \left[e^{i(\delta_c + \delta_{\bar{f}})} + \frac{A_u A_f}{A_c A_{\bar{f}}} e^{i(\delta_u + \delta_f - \gamma)} \right] \quad (4.13)$$

Si definiscono:

$$\begin{cases} \frac{A_u}{A_c} \equiv r_B \\ \frac{A_f}{A_{\bar{f}}} \equiv r_D \end{cases} \quad \begin{cases} \delta_u - \delta_c \equiv \delta_B \\ \delta_{\bar{f}} - \delta_f \equiv \delta_D \end{cases} \quad (4.14)$$

dove il parametro r_D è anche esprimibile come $r_D = |A(D^0 \rightarrow K^+\pi^-)/A(D^0 \rightarrow K^-\pi^+)|$. Questo significa che esso rappresenta il rapporto tra le ampiezze di decadimento del mesone D^0 del processo Cabibbo soppresso diviso l'ampiezza di quello Cabibbo favorito. Utilizzando i parametri appena introdotti, i moduli quadri delle ampiezze di decadimento

possono essere scritti come

$$\begin{aligned}\Gamma(B^+ \rightarrow D[\rightarrow K^+\pi^-]K^+) &\equiv |A_1|^2 = \\ &= (A_u A_{\bar{f}})^2 [r_B^2 r_D^2 + 1 + 2r_B r_D \cos(\delta_B - \delta_D + \gamma)]\end{aligned}\quad (4.15a)$$

$$\begin{aligned}\Gamma(B^- \rightarrow D[\rightarrow K^+\pi^-]K^-) &\equiv |A_2|^2 = \\ &= (A_u A_{\bar{f}})^2 [r_B^2 + r_D^2 + 2r_B r_D \cos(\delta_B + \delta_D - \gamma)]\end{aligned}\quad (4.15b)$$

$$\begin{aligned}\Gamma(B^+ \rightarrow D[\rightarrow K^-\pi^+]K^+) &\equiv |A_3|^2 = \\ &= (A_u A_{\bar{f}})^2 [r_B^2 + r_D^2 + 2r_B r_D \cos(\delta_B + \delta_D + \gamma)]\end{aligned}\quad (4.15c)$$

$$\begin{aligned}\Gamma(B^- \rightarrow D[\rightarrow K^-\pi^+]K^-) &\equiv |A_4|^2 = \\ &= (A_u A_{\bar{f}})^2 [r_B^2 r_D^2 + 1 + 2r_B r_D \cos(\delta_B - \delta_D - \gamma)]\end{aligned}\quad (4.15d)$$

dove si è utilizzata l'uguaglianza $|z \cdot w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\text{Re}(z^*w)$ con $z, w \in \mathbb{C}$. Definiamo ora il parametro R_{ADS} :

$$R_{ADS} = \frac{\Gamma(B^- \rightarrow D[\rightarrow K^+\pi^-]K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow D[\rightarrow K^-\pi^+]K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow D[\rightarrow K^-\pi^+]K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow D[\rightarrow K^+\pi^-]K^+)}\quad (4.16)$$

che rappresenta il rapporto tra la probabilità di osservare i processi Cabibbo doppiamente soppressi diviso per la probabilità di quelli Cabibbo favoriti. Si definisce inoltre A_{ADS} come:

$$A_{ADS} = \frac{\Gamma(B^- \rightarrow D[\rightarrow K^+\pi^-]K^-) - \Gamma(B^+ \rightarrow D[\rightarrow K^-\pi^+]K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow D[\rightarrow K^+\pi^-]K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow D[\rightarrow K^-\pi^+]K^+)}\quad (4.17)$$

che rappresenta il rapporto tra la differenza tra le probabilità di osservare i processi Cabibbo soppressi diviso per la somma delle stesse.

Utilizzando le equazioni (4.15a)-(4.15d) è possibile esprimere i parametri R_{ADS} e A_{ADS} come

$$R_{ADS} = r_B^2 + r_D^2 + 2r_B r_D \cos(\delta_B + \delta_D) \cos \gamma\quad (4.18)$$

dove è stata utilizzata la formula di prostaferesi della somma del coseno e l'approssimazione di Taylor $(1+x)^{-1} \simeq 1-x$ per $x \ll 1$. Allo stesso modo

$$A_{ADS} = \frac{2 \sin(\delta_B + \delta_D) \sin \gamma}{r_B + r_D + 2 \cos(\delta_B + \delta_D) \cos \gamma}\quad (4.19)$$

dove è stata utilizzata questa volta la formula di prostaferesi della differenza del coseno. Le due osservabili R_{ADS} e A_{ADS} risultano statisticamente dipendenti. È conveniente dunque sostituire a questa coppia di osservabili le seguenti:

$$R_{\pm} = \frac{\Gamma(B^{\pm} \rightarrow D[\rightarrow K^{\mp}\pi^{\pm}]K^{\pm})}{\Gamma(B^{\pm} \rightarrow D[\rightarrow K^{\pm}\pi^{\mp}]K^{\pm})}\quad (4.20)$$

le quali risultano invece essere indipendenti.

4.1.2 Metodo Gronau-London-Wyler.

Il secondo metodo proposto, noto con il nome di metodo di Gronau-London-Wyler (*GLW*), fu il primo ad essere proposto. La sua peculiarità è di condurre ad osservabili nei quali compare oltre all'angolo gamma una sola fase forte da determinare. Il metodo si basa sulla rilevazione di quei decadimenti del mesone D^0 e \bar{D}^0 che decadono in un autostato di CP costituito da kaoni carichi.

I diagrammi completi dei decadimenti sono riportati in figura 4.6. Per lo stato finale vale

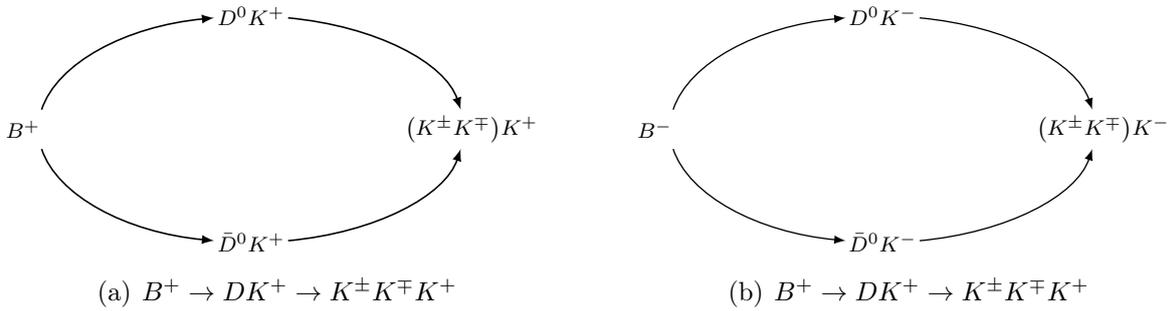


Figura 4.6: Processi di decadimento dei mesoni B^+ e B^- utilizzati nel metodo GLW.

la relazione:

$$CP|K^+K^- \rangle = K^+K^- \quad (4.21)$$

Se in alternativa si considera il processo di decadimento dei mesoni D^0 e \bar{D}^0 nello stato finale $K_s^0\pi^0$, si ha un autostato $CP = -1$.

$$\langle K_s^0\pi^0 | H_w | \bar{D}^0 \rangle = -\langle K_s^0\pi^0 | H_w | D^0 \rangle \quad (4.22)$$

Dunque nell'applicazione del metodo GLW si deve tenere conto delle due diverse condizioni possibili, corrispondenti ai due autovalori $CP = \pm 1$. Nel metodo GLW la scelta dello stato finale, come autostato di CP , ha come importante conseguenza che la differenza di fase è nulla:

$$\delta_{\bar{f}} - \delta_f = 0 \quad (4.23)$$

Il decadimento $D^0 \rightarrow K^+K^-$ ha un'ampiezza di decadimento proporzionale agli elementi di matrice $V_{cs}V_{us} \sim (1 - \lambda/2)^2 \times \lambda$, quindi la fase dell'ampiezza di transizione è una fase forte, invariante per trasformazione CP .

In figura 4.7 sono riportati i diagrammi di Feynman dei processi di decadimento dei mesoni D^0 e \bar{D}^0 nello stato con autovalore di $CP = +1$. Procedendo in modo analogo a quello impiegato nel metodo ADS, ma facendo ora uso della notevole semplificazione dell'eliminazione della differenza di fase (4.23) possiamo ricavare le espressioni delle equazioni utili a determinare l'angolo γ .

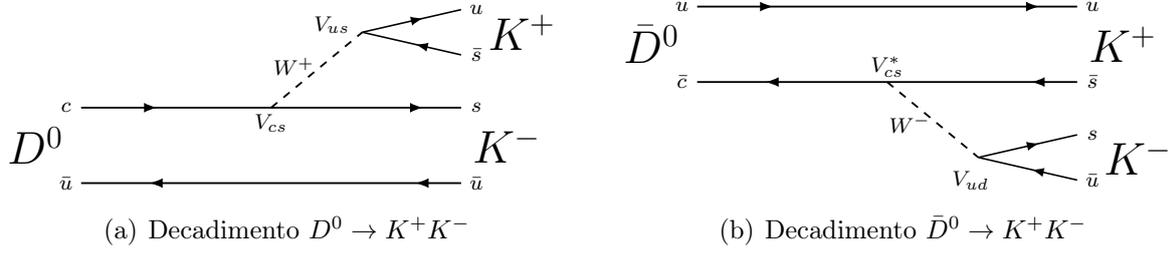


Figura 4.7: Processi di produzione dei mesoni K^+ e K^- .

Scriviamo dunque le espressioni dei processi in modo dettagliato:

$$A(D^0 \rightarrow K^+K^-) = \langle K^+K^- | H_w | D^0 \rangle = A_9 e^{i\delta_9} |V_{cs}| |V_{us}| \equiv A_s e^{i\delta_s} \quad (4.24a)$$

$$A(\bar{D}^0 \rightarrow K^+K^-) = \langle K^+K^- | H_w | \bar{D}^0 \rangle = A_{10} e^{i\delta_{10}} |V_{cs}| |V_{us}| \equiv A_s e^{i\delta_s} \quad (4.24b)$$

Tenendo conto delle ampiezze di transizione del B le espressioni del decadimento complete delle quattro differenti possibili transizioni sono:

$$A(B^+ \rightarrow D^0 [\rightarrow K^+K^-] K^+) = A_u A_s e^{i(\delta_u + \delta_s + \gamma)} \quad (4.25a)$$

$$A(B^+ \rightarrow \bar{D}^0 [\rightarrow K^+K^-] K^+) = A_c A_s e^{i(\delta_c + \delta_s)} \quad (4.25b)$$

$$A(B^- \rightarrow D^0 [\rightarrow K^+K^-] K^-) = A_c A_s e^{i(\delta_c + i\delta_s)} \quad (4.25c)$$

$$A(B^- \rightarrow \bar{D}^0 [\rightarrow K^+K^-] K^-) = A_u A_s e^{i(\delta_u + \delta_s - \gamma)} \quad (4.25d)$$

Possiamo quindi determinare l'espressione per le larghezze di decadimento dei processi che interferiscono, calcolando il modulo quadro della somma di (4.25a) e (4.25b) da un lato, e il modulo quadro della somma di (4.25c) e (4.25d) dall'altro.

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(B^+ \rightarrow D[\rightarrow K^+K^-]K^+)}{\Gamma(D^0 \rightarrow K^+K^-)} &= A_u^2 \left[e^{i(\delta_u + \delta_s + \gamma)} + \frac{A_c}{A_u} e^{i(\delta_c + \delta_s)} \right]^2 = \\ &= A_u^2 (1 + r_B^2 + 2r_B \cos(\delta_B + \gamma)) \end{aligned} \quad (4.26a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(B^- \rightarrow D[\rightarrow K^+K^-]K^-)}{\Gamma(D^0 \rightarrow K^+K^-)} &= A_u^2 \left[\frac{A_c}{A_u} e^{i(\delta_c + i\delta_s)} + e^{i(\delta_u + \delta_s - \gamma)} \right]^2 = \\ &= A_u^2 (1 + r_B^2 + 2r_B \cos(\delta_B - \gamma)) \end{aligned} \quad (4.26b)$$

Il risultato ottenuto è conforme alle attese: ci aspettavamo infatti di ottenere la dipendenza delle larghezze di decadimento da una sola fase forte, che in questo caso è appunto δ_B . Si definiscono quindi gli osservabili:

$$R_{CP^\pm} = \frac{\Gamma(B^- \rightarrow D[\rightarrow K^+K^-]K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow D[\rightarrow K^+K^-]K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow D^0 K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow \bar{D}^0 K^+)} \quad (4.27)$$

$$A_{CP^\pm} = \frac{\Gamma(B^- \rightarrow D[\rightarrow K^+K^-]K^-) - \Gamma(B^+ \rightarrow D[\rightarrow K^+K^-]K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow D[\rightarrow K^+K^-]K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow D[\rightarrow K^+K^-]K^+)} \quad (4.28)$$

le quali con la parametrizzazione (4.14) si possono riscrivere nella forma:

$$R_{CP^\pm} = 1 + r_B^2 \pm 2r_B \cos \delta_B \cos \gamma \quad (4.29)$$

$$A_{CP^\pm} = \frac{\pm 2r_B \sin \delta_B \sin \gamma}{1 + r_B^2 \pm 2r_B \cos \delta_B \cos \gamma} \quad (4.30)$$

dove con il pedice CP^+ si indica uno stato di CP che ha autovalore $+1$ (K^+K^-) mentre con CP^- quello con autovalore -1 ($K_s^0\pi^0$).

La relazione

$$A_{CP^+}R_{CP^+} + A_{CP^-}R_{CP^-} = 0 \quad (4.31)$$

riduce a tre il numero di osservabili linearmente indipendenti. Sia i ricercatori dell'esperimento Belle che di Babar eseguirono l'esperimento di misura indirizzati da questa linea teorica.

4.1.3 Metodo Giri-Grossman-Soffer-Zupan.

Il metodo sviluppato da Giri, Grossman, Soffer e Zupan (*GGSZ*) [12] rappresenta il più preciso metodo di misura dell'angolo γ . Come per i due metodi già descritti, anche il metodo GGSZ utilizza il decadimento $B^\pm \rightarrow DK^\pm$. La differenza sostanziale rispetto ai casi precedenti è costituita dallo stadio finale. In questo caso si prendono in esame i decadimenti che a partire dai mesoni D^0 e \bar{D}^0 generano uno stato comune, costituito da 3 corpi, come ad esempio:

$$D^0 \rightarrow K_S^0 + \pi^- + \pi^+ \quad (4.32a)$$

$$\bar{D}^0 \rightarrow K_S^0 + \pi^+ + \pi^- \quad (4.32b)$$

Le cui ampiezze di decadimento sono:

$$\begin{aligned} A_D(s_{12}, s_{13}) &= A_{12,13} e^{i\delta_{12,13}} = A(D^0 \rightarrow K_S^0(p_1)\pi^-(p_2)\pi^+(p_3)) \\ &= A(\bar{D}^0 \rightarrow K_S^0(p_1)\pi^+(p_2)\pi^-(p_3)) \end{aligned} \quad (4.33)$$

dove la costante $A_{12,13}$ è reale e positiva e la fase $\delta_{12,13} \in [0, 2\pi]$. I parametri s_{12} e s_{13} sono definiti da

$$s_{ij} = (p_i + p_j)^2 \quad (4.34)$$

dove p_1, p_2 e p_3 sono i momenti lineari delle particelle prodotte nel decadimento. L'intero processo è allora descritto tramite la relazione:

$$A(B^+ \rightarrow D[\rightarrow K_S^0\pi^-\pi^+]K^+) = A_B P_D (A_D(s_{12,13}) + r_B e^{i(\delta_B + \gamma)} A_D(s_{13,12})) \quad (4.35a)$$

$$A(B^- \rightarrow D[\rightarrow K_S^0\pi^-\pi^+]K^-) = A_B P_D (A_D(s_{12,13}) + r_B e^{i(\delta_B - \gamma)} A_D(s_{13,12})) \quad (4.35b)$$

dove P_D rappresenta il propagatore del mesone D . La probabilità infinitesima di osservare il decadimento è data da:

$$d\Gamma(B^\pm \rightarrow D[\rightarrow K_S^0 \pi^- \pi^+]K^\pm) = (A_{12,13}^2 + r_B^2 A_{13,12}^2 + 2r_B \text{Re}[A_D(s_{12}, s_{13})A_D^*(s_{13}, s_{12})e^{-(\delta_B \pm \gamma)}]) d\rho \quad (4.36)$$

dove $d\rho$ rappresenta l'elemento di spazio delle fasi. I due termini delle relazioni (4.35a) e (4.35b) presentano una simmetria: la relazione (4.36) è simmetrica rispetto allo scambio $12 \leftrightarrow 13$, e questo semplifica la trattazione.

Per la formula trigonometrica della somma del coseno si ottiene

$$d\Gamma(B^\pm \rightarrow D[\rightarrow K_S^0 \pi^- \pi^+]K^\pm) = A_{12,13}^2 + r_B^2 A_{13,12}^2 + 2r_B A_{(12,13)} A_{(13,12)} \times [\cos(\delta_{12,13} + \delta_{13,12}) \cos(\delta_B \pm \gamma) + \sin(\delta_{12,13} + \delta_{13,12}) \sin(\delta_B \pm \gamma)] d\rho \quad (4.37)$$

Tuttavia per confrontare i risultati teorici con i dati sperimentali si deve procedere ad una integrazione sul *Dalitz plot*:

$$c_i = \int_i d\rho A_{12,13} A_{13,12} \cos(\delta_{12,13} + \delta_{13,12}) \quad (4.38a)$$

$$s_i = \int_i d\rho A_{12,13} A_{13,12} \sin(\delta_{12,13} + \delta_{13,12}) \quad (4.38b)$$

$$\Gamma_i = \int_i d\rho A_{12,13}^2 \quad (4.38c)$$

a causa della simmetria indicata precedentemente è conveniente sviluppare l'integrale su un dominio che risulti anch'esso simmetrico. Si indichi allora con i_- gli elementi infinitesimi di integrazione sotto la retta rispetto alla quale si ha la simmetria e con i_+ gli elementi al di sopra della stessa. Risulta allora:

$$c_{i_+} = c_{i_-} \equiv c_i \quad (4.39a)$$

$$s_{i_+} = s_{i_-} \equiv s_i \quad (4.39b)$$

ma non è possibile definire alcuna relazione tra Γ_{i_+} e Γ_{i_-} . Si ottiene quindi

$$\Gamma_{i_\pm}^+ = \int_{i_\pm} d\Gamma(B^+ \rightarrow D[\rightarrow K_S^0 \pi^- \pi^+]K^+) = \Gamma_{i_\mp} + r_B^2 \Gamma_{i_\pm} + 2r_B [\cos(\delta_B + \gamma)c_i \pm \sin(\delta_B + \gamma)s_i] \quad (4.40a)$$

$$\Gamma_{i_\pm}^- = \int_{i_\pm} d\Gamma(B^- \rightarrow D[\rightarrow K_S^0 \pi^- \pi^+]K^-) = \Gamma_{i_\mp} + r_B^2 \Gamma_{i_\mp} + 2r_B [\cos(\delta_B - \gamma)c_i \mp \sin(\delta_B - \gamma)s_i] \quad (4.40b)$$

dove con $\Gamma_{i_\pm}^-$ si indica la probabilità di osservare il decadimento del mesone B^- e con $\Gamma_{i_\pm}^+$ quella del mesone B^+ . I due integrali sono fatti o sull'intero dominio superiore (di

elementi i_+) o su quello inferiore (di elementi i_-).

Si definiscono allora i parametri

$$a_{CP}^{i_+} = \Gamma_{i_+}^- - \Gamma_{i_-}^+ = 4r_B \sin \gamma [c_i \sin \delta_b + s_i \cos \delta_B] \quad (4.41)$$

$$a_{CP}^{i_-} = \Gamma_{i_-}^- - \Gamma_{i_+}^+ = 4r_B \sin \gamma [c_i \sin \delta_b - s_i \cos \delta_B] \quad (4.42)$$

Il metodo GGSZ si basa quindi sulla variazione del valore della fase forte δ_D , variabile nella regione cinematica permessa dal decadimento in tre copri del D neutro. Per la determinazione di δ_D il Dalitz plot corrispondente è suddiviso in bin. Il numero di eventi B^+ e B^- contenuto in ciascun bin è rispettivamente:

$$N_{\pm i}^+ = h_{B^+} [K_{\mp i} + (x_+^2 + y_+^2) K_{\pm i}] + 2\sqrt{K_i K_{-i}} (x_+ c_{\pm i} \mp y_+ s_{\pm i}) \quad (4.43)$$

$$N_{\pm i}^- = h_{B^-} [K_{\pm i} + (x_-^2 + y_-^2) K_{\mp i}] + 2\sqrt{K_i K_{-i}} (x_- c_{\pm i} \pm y_- s_{\pm i}) \quad (4.44)$$

dove K_i indica l'efficienza di selezione degli eventi nel bin i -esimo (il Dalitz plot è simmetrico e i bin sono indicati con indice $\pm i$), i coefficienti c_i e s_i sono il coseno e il seno della fase forte δ_D misurata nel bin i -esimo dall'esperimento CLEO-C [41]. I parametri rimanenti sono da determinare mediante analisi statistica: h_{B^\pm} sono i fattori di normalizzazione, $x_\pm = r_B \cos \delta_B \pm \gamma$ e $y_\pm = r_B \sin \delta_B \pm \gamma$ sono i parametri sensibili a γ .

4.2 Risultati delle misure.

Gli esperimenti BaBar e Belle da un lato, e l'esperimento LHCb dall'altro hanno prodotto misure dell'angolo γ utilizzando combinazione dei loro risultati ottenuti a partire dai decadimenti $B^+ \rightarrow D + K^+$.

BaBar ha utilizzato i risultati ottenuti misurando i decadimenti DK (includendo anche i modi eccitati D^*K , DK^*) ed impiegando i metodi di analisi GLW, ADS GGSZ. Belle ha utilizzato i risultati delle analisi dei modi di decadimento DK e D^*K e impiegando i metodi di analisi GLW, ADS GGSZ. LHCb utilizza i decadimenti DK con i metodi di

	Babar	Belle	LHCb
r_B	$(0.092_{-0.012}^{+0.013})$	$(0.112_{-0.015}^{+0.014})$	$(0.0914_{-0.0088}^{+0.0083})$
δ_B	$(105_{-17}^{+16})^\circ$	$(116_{-21}^{+18})^\circ$	$(127_{-12}^{+10})^\circ$
γ	$(69_{-16}^{+17})^\circ$	$(68_{-14}^{+15})^\circ$	$(73_{-10}^{+9})^\circ$

Tabella 4.1: Misura delle grandezze r_B , δ_B , γ .

analisi GLW, ADS (sia per $K\pi$ sia $K3\pi$), GGSZ ($K_S h^+ h^-$). Tutte le combinazioni delle misure utilizzano i risultati dell'esperimento CLEO che ha determinato i parametri adronici che descrivono le transizioni del quark charm. I risultati delle misure combinate sono riportati nella Tabella 4.1. Per l'analisi statistica dei risultati si veda l'appendice. Osserviamo che l'esperimento LHCb ha ottenuto la misura di γ utilizzando il campione dei dati disponibili, corrispondenti a circa 3.1 fb^{-1} .

L'esperimento LHCb ha in programma di raccogliere una statistica tre volte maggiore entro il 2018 e successivamente, utilizzando il nuovo rivelatore, di aumentare ulteriormente il campione raggiungendo una statistica complessiva equivalente a 50 fb^{-1} .

Capitolo 5

Appendice

In fisica abbiamo a che fare con modelli e parametri corrispondenti. Modelli e parametri sono le quantità che debbono essere determinati a partire dai risultati delle misure. In molti casi abbiamo forti ragioni per ritenere di conoscere con esattezza il modello da impiegare per interpretare le misure. Supponiamo quindi che del modello non siano noti i parametri, che intendiamo quindi determinare (inferenza parametrica). L'obiettivo dell'analisi statistica parametrica è quindi di determinare la migliore stima del valore dei parametri d'interesse. Utilizzando il teorema di Bayes il problema della inferenza parametrica può essere formulato in questi termini:

$$p(\theta|x, I) = \frac{p(x|\theta, I) p(\theta|I)}{\int p(x|\theta, I) p(\theta|I) d\theta} \quad (5.1)$$

dove θ è il parametro da determinare, x è il risultato della misura. $p(\theta|I)$ è la probabilità a priori per il valore del parametro, $p(\theta|x, I)$ è la probabilità a posteriori del parametro e $p(x|\theta, I)$ è il cosiddetto *likelihood*, spesso indicato come $\mathcal{L}(\theta; x)$.

La funzione di distribuzione a posteriori, da determinare mediante la (5.1) fornisce la descrizione completa della conoscenza del valore del parametro d'interesse. In base ad essa è possibile calcolare la probabilità di qualunque intervallo di variazione del parametro (*confidence intervals*). È da notare per inciso che mentre $p(x|\theta, I)$ è una distribuzione di probabilità opportunamente normalizzata, questo in generale non è il caso della funzione di likelihood $\mathcal{L}(\theta; x)$.

A titolo d'esempio consideriamo il caso in cui la risposta di un rivelatore sia di tipo gaussiano, con media μ e deviazione standard σ , descritta da:

$$p(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (5.2)$$

Utilizzando l'espressione (5.1) si può determinare la distribuzione a posteriori per il valore medio della distribuzione:

$$p(\mu|x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (5.3)$$

Il valore di aspettazione e la deviazione standard della distribuzione a posteriori sono $E(\mu) = x$ e $\sigma(\mu) = \sigma$ come ci si attende. Si osservi che questo risultato dipende da ipotesi relative alla distribuzione a priori del parametro μ e dalla forma gaussiana del likelihood. Se la conoscenza a priori del parametro è di tipo differente la distribuzione a posteriori evidentemente cambia. Supponiamo che anzichè uniforme la conoscenza a priori del parametro sia di tipo gaussiano:

$$p(\mu|\mu_0, \sigma_0, I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left[-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right] \quad (5.4)$$

In tal caso inserendo l'espressione (5.4) nell'equazione (5.1) si ottiene:

$$p(\mu|x, \mu_0, \sigma_0, I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{(\mu-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] \quad (5.5)$$

dove

$$\mu_1 = E(\mu) = \frac{\frac{x}{\sigma^2} + \frac{\mu_0}{\sigma_0^2}}{\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}} \quad (5.6)$$

e

$$\sigma_1^2 = \text{Var}(\mu) = (\sigma_0^{-2} + \sigma^{-2})^{-1} \quad (5.7)$$

Possiamo osservare la distribuzione a priori uniforme ($p(\mu|I) = \text{const}$) corrisponde al caso limite della distribuzione a priori gaussiana con grande σ_0 e valore limitato superiormente di μ_0 . Come si vede dalle equazioni (5.6) e (5.7) l'aggiunta di nuove misure riduce l'incertezza sui parametri da determinare. Nel caso siano disponibili più misure distinte il procedimento di aggiornamento della conoscenza è il seguente. Dopo la prima misura di valore x_1 la distribuzione a posteriori per il generico parametro θ diventa:

$$p(\theta|x_1, I) \propto p(x_1|\theta, I) p(\theta|I) \quad (5.8)$$

dopo una seconda misura si ha:

$$p(\theta|x_1, x_2, I) \propto p(x_2|\theta, x_1, I) p(x_1|\theta, I) = p(x_1, x_2|\theta, I) p(\theta|I) \quad (5.9)$$

Il problema in generale è di tipo multidimensionale, si tratta cioè di determinare la distribuzione dei valori a posteriori di più parametri, nella forma:

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}, I) = \frac{p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}, I) p(\boldsymbol{\theta}|I)}{\int p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}, I) p(\boldsymbol{\theta}|I) d\boldsymbol{\theta}} \quad (5.10)$$

che fornisce la distribuzione desiderata per il vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}$. Se le misure x_i sono indipendenti per il likelihood si ottiene:

$$p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x}, I) = \prod_i p(x_i | \boldsymbol{\theta}, I) \quad (5.11)$$

Per risolvere il problema in generale si deve fare ricorso all'integrazione numerica multidimensionale. Uno dei metodi più efficaci per realizzarla è di fare ricorso al metodo Markov Chain Monte Carlo.

BAT è basato sulla implementazione delle catene markoviane e risponde a due esigenze:

- Fornire uno strumento flessibile che permetta la formulazione di ogni tipo di modello statistico.
- Fornire un codice di analisi numerica fortemente ottimizzato che permetta la gestione di problemi computazionali complessi.

BAT è scritto in C++ e si basa sul package ROOT per le funzioni di input/output e la realizzazione di grafici. Le funzioni principali includono la mappatura della probabilità a posteriori in uno spazio multidimensionale, la stima dei parametri e dei relativi intervalli di credibilità, il calcolo della correlazione tra diversi parametri. Il calcolo della distribuzione a posteriori dei parametri è solitamente un problema molto difficile, specialmente nel caso di un modello con un alto numero di parametri. In particolare, risulta particolarmente dispendioso dal punto di vista del calcolo determinare il fattore di normalizzazione

$$\int p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\theta}, I) p(\boldsymbol{\theta} | I) d\boldsymbol{\theta} \quad (5.12)$$

BAT è basato sull'impiego di catene di Markov. Una catena Markoviana è costituita da una successione di numeri casuali X_t , che converge ad una distribuzione limite $\Pi(x)$. La proprietà fondamentale delle catene Markoviane è che la distribuzione di probabilità di uscita del valore dell'elemento successivo della catena X_{t+1} dipende esclusivamente dallo stato attuale X_t e non dalla intera sequenza registrata. Una catena è definita completamente dalla regola di aggiornamento per la transizione allo stato successivo: $p(X_{t+1} = y | X_t = x)$. Sotto opportune condizioni può essere dimostrato che le catene sono ergodiche, cioè che la distribuzione limite che viene raggiunta non dipende dallo stato di partenza, e che la probabilità di essere in un determinato stato è stazionaria. Una catena Markoviana Monte Carlo (MCMC) è un metodo per produrre una catena di Markov, tale che la distribuzione limite corrisponda alla distribuzione di probabilità a posteriori dei parametri d'interesse $p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x}, I)$ senza dover conoscere il fattore di normalizzazione. È sufficiente poter confrontare la distribuzione dei risultati di misura per valori differenti dei parametri:

$$\frac{p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\theta}_i, I) p(\boldsymbol{\theta}_i | I)}{p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\theta}_j, I) p(\boldsymbol{\theta}_j | I)} \quad (5.13)$$

Il metodo originale e più diffuso per implementare una MCMC è l'algoritmo Metropolis. N. Metropolis *et al.* [43]. L'algoritmo funziona secondo la sequenza di passaggi seguente:

1. Si sceglie un punto $\boldsymbol{\theta}_i$ nello spazio dei parametri (la dimensionalità dipende dal problema studiato).
2. Si sceglie in maniera casuale un secondo punto nello spazio dei parametri $\boldsymbol{\theta}'$ usando una distribuzione a simmetria sferica centrata in $\boldsymbol{\theta}_i$ (in genere una distribuzione uniforme in un dato intorno e nulla al di fuori).
3. Si calcolano i valori $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}_i, I)p(\boldsymbol{\theta}_i|I)$ e $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}', I)p(\boldsymbol{\theta}'|I)$. Se si verifica che

$$p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}', I)p(\boldsymbol{\theta}'|I) \geq p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}_i, I)p(\boldsymbol{\theta}_i|I) \quad (5.14)$$

allora si pone $\boldsymbol{\theta}_{i+1} = \boldsymbol{\theta}'$. Altrimenti si procede ad una nuova estrazione di $\boldsymbol{\theta}'$.

4. Il ciclo viene reiterato tornando al secondo punto della procedura.

Dopo un numero opportunamente grande di iterazioni la distribuzione dei valori dei parametri campionati darà un'approssimazione adeguatamente accurata della distribuzione $p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x}, I)$.

Conclusioni

Ottenere un valore sempre più preciso della fase γ della matrice CKM è ritenuto di fondamentale importanza per la verifica dell'unitarietà della matrice CKM di mixing del flavour. Esistono diversi metodi per compiere misure indipendenti del valore di γ , basati sull'interferenza delle ampiezze quantistiche che concorrono agli specifici decadimenti dei mesoni B e D . La combinazione dei risultati delle misure di γ consente oggi di ottenere una precisione relativa dell'ordine del 10%. Misure di γ sono state realizzate dagli esperimenti BaBar e Belle alle cosiddette *beauty factory* (ai collisionatori $e^+ - e^-$) e sono in corso al CERN per opera dell'esperimento LHCb.

L'esperimento LHCb ha ottenuto una misura combinata

$$\gamma = (73_{-10}^{+9})^\circ$$

Si prevede che la precisione di misura di γ migliori sensibilmente nel prossimo futuro, dal momento che l'esperimento raccoglierà, secondo programma, una statistica almeno dieci volte maggiore dell'attuale.

Bibliografia

- [1] Arnold V. I., Metodi matematici della meccanica classica, Roma, Editori Riuniti university press, 2010.
- [2] Bettini A., Introduction to Elementary Particle Physics, Cambridge, Cambridge University Press, 2008.
- [3] Griffiths D., Introduction to Quantum Mechanics, Prentice Hall, 1995.
- [4] Landau L. D., Lifshits E. M., Fisica teorica I Meccanica, Roma, Editori Riuniti university press, 2009.
- [5] Ortolani F., Appunti di Metodi matematici, Bologna, 2013.
- [6] Zucchini R., Quantum Mechanics, Bologna, 2015.
- [7] Patel M., Measurements of the CKM angle γ at LHCb, Ginevra.
- [8] Patel M., Updated of determing γ at LHCb with the decays $B^\pm \rightarrow D(K\pi, KK, \pi\pi)K^\pm$, Ginevra, 2007.
- [9] Sachrajda C., Standard Model of Particle Physics, Southampton, 2006.
- [10] AA. VV., Implications of LHCb measurements and future prospects, Ginevra, 2013.
- [11] Merk M., Particle Physics 1, Amsterdam, 2011.
- [12] Giri A., Grossman Y., Soffer A., Zupan J., Determining γ using $B^\pm DK^\pm$ with multibody D decays, Phys. Rev. Lett. D 68, 054018 (2003), Haifa, 2003.
- [13] Atwood A., Dunietz I., Soni A. Enhanced CP Violation with $B \rightarrow KD^0(\bar{D}^0)$ Modes and Extraction of the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa Angle γ , in Physical review letters, XVII volume 78, 1997.
- [14] AA. VV., The tree-level determination of γ at LHCb, Ginevra, 2009.

- [15] Nardulli J. γ measurements at LHCb, Taipei, 2008.
- [16] Rahatlou S., CKM Matrix and CP Violation in Standard Model, Roma, 2012.
- [17] AA. VV., Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/>, 2015.
- [18] AA. VV., Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-w-boson.pdf>, 2015.
- [19] AA. VV., Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-z-boson.pdf>, 2015.
- [20] AA. VV., Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-gluon.pdf>, 2015.
- [21] AA. VV., Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-higgs-boson.pdf>, 2015.
- [22] AA. VV., Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-electron.pdf>, 2015.
- [23] AA. VV., Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-muon.pdf>, 2015.
- [24] AA. VV., Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-tau.pdf>, 2015.
- [25] AA. VV., Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-neutrino-prop.pdf>, 2015.
- [26] AA. VV., Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-light-quarks.pdf>, 2015.
- [27] AA. VV., Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-c-quark.pdf>, 2015.
- [28] AA. VV., Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-b-quark.pdf>, 2015.
- [29] AA. VV., Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-t-quark.pdf>, 2015.
- [30] AA. VV., Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-pi-plus-minus.pdf>, 2015.

- [31] AA. VV., Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-pi-zero.pdf>, 2015.
- [32] AA. VV., Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-K-plus-minus.pdf>, 2015.
- [33] AA. VV., Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-K-zero.pdf>, 2015.
- [34] AA. VV., Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-K-zero-S.pdf>, 2015.
- [35] AA. VV., Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-K-zero-L.pdf>, 2015.
- [36] AA. VV., Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-D-plus-minus.pdf>, 2015.
- [37] AA. VV., Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-D-zero.pdf>, 2015.
- [38] AA. VV., Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-B-plus-minus.pdf>, 2015.
- [39] Trabelsi K., [Belle coll.], arXiv:1301.2033 [hep-ex].
- [40] Lees J. P. *et al.*, [BaBar coll.], Phys. Rev. D 87 (2013) 5, 052015.
- [41] J. Libby *et al.*, [CLEO Collaboration], Phys. Rev. D 82 (2010) 112006 [arXiv:1010.2817 [hep-ex]].
- [42] AA. VV., <http://www.slac.stanford.edu/xorg/hfag/>, 2015.
- [43] Metropolis. N. Metropolis *et al.*, J. Chem. Phys. 21 (1953) 1087.