Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

==

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

I GIOCHI DI STRATEGIA NELL'EDUCAZIONE MATEMATICA

IL CASO DEL BRIDGE

Relatore:
Prof.
GIORGIO BOLONDI

Correlatore:
Prof.
MIRKO DEGLI ESPOSTI

Presentata da:
QUINTO
LEPRAI

II Sessione
2014/2015

Indice

Introduzione

L'importanza dell'uso dei giochi di strategia per l'insegnamento della matematica è una cosa ormai nota.
Da vari anni, ad esempio, presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa durante la "Settimana Matematica", sono organizzati dei laboratori che conseguono un grande successo, per gli studenti delle scuole superiori, dedicati ai giochi. Non si tratta di un avvenimento singolare quanto piuttosto di un fenomeno mondiale, ovunque si è osservato quanto i giochi costituiscano uno strumento didattico efficacissimo. L'interesse degli studenti è subito attirato dal meccanismo del gioco, e tutti si sentono coinvolti già dalle prime "pillole" che servono per capire le regole. Poi, piano piano, l'esigenza agonistica di capire "cosa fare per vincere", avvince i ragazzi: è qui che inizia il percorso matematico.
L'insegnante si trova in una situazione favorevole per tre importanti motivi: l'interesse degli studenti è molto alto fin dall'inizio; l'approccio matematico allo studio dei giochi è convincente perché offre risultati concreti e agonisticamente utili; infine, gli argomenti matematici che si nascondono nel meccanismo di certi giochi (che vanno opportunamente scelti) sono molto significativi.
Tra i giochi con un contenuto matematico elevato quelli con le carte offrono gli spunti più interessanti e immediatamente riconducibili alla Matematica. Per questo ricoprono una posizione primaria per la didattica della Matematica. Tra tutti questi giochi un ruolo fondamentale e di primissimo piano è riservato al gioco del bridge.
Non per nulla nelle più importanti Università esiste un circolo dove si insegna e si gioca a Bridge. Dal 1993 in Italia è una disciplina riconosciuta dal C.O.N.I. come sport della mente, dal 1994 invece la Federazione Gioco Bridge ha dato vita, con il patrocinio del C.O.N.I. ed il consenso del Ministero della Pubblica Istruzione, ad un'ambiziosa iniziativa: il Progetto "Bridge a Scuola".
Da allora il Progetto si è sviluppato e articolato al punto che attualmente sono già più di seicento le Scuole che hanno aderito all'iniziativa e quasi diecimila gli studenti che si sono approcciati al gioco del Bridge cogliendone la sua valenza educativa.

Lo schema della tesi è il seguente:

- Il primo capitolo “la probabilità con le carte” illustra la Matematica che possiamo usare per descrivere la casualità nell’uso di un mazzo di cinquantadue carte e nella sua distribuzione in un tavolo da gioco. Fornisce inoltre diversi esempi utili all’insegnante che, attraverso l’uso delle carte, intende spiegare la probabilità.
- Il secondo capitolo “la Matematica per il Bridge” descrive la Matematica che occorre ad un giocatore di Bridge.
- Il terzo capitolo “il Bridge per la Matematica” si addentra nei meccanismi del gioco del Bridge mettendo in risalto quelli che offrono motivi di studio e di approfondimento per quanto concerne la Matematica.
- Il quarto capitolo vuole essere un’appendice dell’opera importante per chi, dopo la lettura, abbia interesse al gioco del Bridge e voglia una guida per i primi passi. Descrive il gioco, come si articola e quali ne siano le regole e le finalità, mettendo in risalto le affinità di questo gioco con una “mente matematica”.

Quest’opera si propone di fornire ad un docente delle Scuole Superiori qualche strumento in più per appassionare lo studente alla matematica con l’uso di uno dei giochi con le carte più diffuso e famoso nel quale, quando si gioca in torneo, la fortuna non conta affatto. Per un docente universitario spero possa servire come stimolo per approfondire quei temi del gioco del Bridge e più in generale dell’uso delle carte da gioco che meritano un approfondimento.

1. *La probabilità con l'uso delle carte*

1.1 Esperimenti casuali, spazio dei campioni, eventi

Tutti conoscono l'importanza che hanno gli esperimenti nella scienza e nella tecnologia, ed il fondamentale principio secondo cui, se si esegue ripetutamente un esperimento nelle stesse condizioni, si arriva a risultati che sono essenzialmente uguali.

Ci sono tuttavia esperimenti che, nonostante siano condotti nelle medesime condizioni, possono avere diversi risultati possibili, e il cui risultato non è prevedibile con certezza: **esperimenti** di questo tipo sono detti **casuali**.

Ad esempio nel lancio di una moneta il risultato dell'esperimento può essere T (testa) o C (croce), cioè uno degli elementi dell'insieme $\{T, C\}$.

Nel lancio di un dado il risultato può essere uno dei numeri dell'insieme $\{1,2,3,4,5,6\}$. Nell'esperimento consistente in due lanci di una moneta il risultato può essere uno degli elementi dell'insieme $\{TT, CC, TC, CT\}$.

Come si osserva dagli esempi, i possibili risultati dell'esperimento si possono esplicitare a priori, ma non si può dire con certezza quale si verificherà.

Un insieme S contenente tutti i possibili risultati di un esperimento casuale è detto **spazio campione**; ciascun risultato è un **elemento** o **punto** di S.

Gli spazi campione vengono classificati in base al numero degli elementi che essi contengono.

Lo spazio campione S corrispondente al lancio di un dado contiene 6 elementi

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

e costituisce un esempio di **spazio campione finito**.

Se si considera come evento il numero di volte che un dado deve essere lanciato prima di ottenere un 6, si ha invece uno **spazio campione infinito**: infatti ogni numero intero positivo è un possibile risultato. Il numero degli elementi in questo caso è un'infinità numerabile.

Se l'esperimento consiste nel misurare la lunghezza di un segmento, lo spazio S può corrispondere a tutti i punti di un intervallo della retta reale: si ha in questo caso uno **spazio campione continuo**.

Uno **spazio campione** è detto **discreto** se ha un numero finito o un'infinità numerabile di elementi.

Un **evento** è un sottoinsieme $E \subseteq S$ dello spazio campione S, cioè un insieme di risultati possibili.

Esempio 1

Si estrae una carta a caso da un mazzo di 52 carte; si può allora descrivere lo spazio campione quando

a – i semi non sono considerati;
b – i semi sono considerati.

Si indica

1 = asso; 11 = fante; 12 = regina; 13 = re;
C = cuori; Q = quadri; P = picche; F = fiori

a – $S = \{1, 2, ..., 13\}$ S contiene 13 elementi

b – $S = \{1F, 2F, ..., 13F, 1Q, ..., 13Q, 1C, ..., 13C, 1P, ..., 13P\}$
S contiene 52 elementi

Se il risultato di un esperimento è un elemento di E, si dice che l'evento si è verificato.

Anche l'intero spazio S è un evento: l'**evento** sicuro o **certo**.

Ad esempio nell'estrazione di una carta l'evento certo è che esca una delle carte $S = \{1F, .., 13F, 1Q, .., 13Q, 1C, .., 13C, 1P, .., 13P\}$.

Anche l'insieme vuoto $\varnothing$ è un evento: l'**evento impossibile**.

Dal momento che gli eventi sono insiemi, ogni affermazione concernente gli eventi può essere tradotta nel linguaggio della teoria degli insiemi e viceversa; in particolare avremo un'**algebra degli eventi** corrispondente all'algebra degli insiemi.

Usando le **operazioni insiemistiche** sugli eventi di S si possono ottenere nuovi eventi di S.
Se A e B sono eventi di S, allora

1 – **unione**: $A \cup B$ è l'evento "A oppure B o entrambi";
2 – **intersezione**: $A \cap B$ è l'evento "sia A che B";
3 – **complementare**: $\overline{A}$ è l'evento "non A";
4 – **differenza**: $A - B$ è l'evento "A ma non B".

Definizione 1
Due **eventi** A e B sono **mutuamente esclusivi**, o **incompatibili**, se non possono verificarsi contemporaneamente.

Se gli eventi A e B sono mutuamente esclusivi, essi sono disgiunti, ossia $A \cap B = \varnothing$.
Questi concetti si possono estendere a un numero k qualsiasi di eventi.
Ricordiamo alcune delle proprietà delle operazioni insiemistiche, valide anche nell'algebra degli eventi.

Proprietà delle operazioni insiemistiche.
Siano A, B, C sottoinsiemi dello spazio S; valgono le proprietà

1 – $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
proprietà **commutativa** di $\cup$ e $\cap$
2 – $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
proprietà **associativa** di $\cup$ e $\cap$
3 – $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
proprietà **distributiva** di $\cup$ rispetto a $\cap$
4 – $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
proprietà **distributiva** di $\cap$ rispetto a $\cup$
5 – $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{(A \cap B)}$ **legge di De Morgan**
6 – $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{(A \cup B)}$ **legge di De Morgan**

Esempio 2

Si estrae una carta a caso da un mazzo di 52 carte; siano dati gli eventi
Evento A = “è uscito un re”.
Evento B = “è uscita una carta picche”.

Gli eventi sotto elencati si descrivono nel modo seguente:

a - Evento $A \cup B$ = “re o picche o entrambi (cioè re di picche)”.

b - Evento $A \cap B$ = “re di picche”.

c - Evento $A \cup \overline{B}$ = “re o cuori o quadri o fiori”. Infatti Evento B = “non picche” = evento “cuori o quadri o fiori”.

d - Evento $\overline{A} \cup \overline{B}$ = “non re di picche” = “ogni carta diversa dal re di picche”.

Infatti per la legge di De Morgan $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{(A \cap B)}$ e, servendosi del risultato b, $\overline{(A \cap B)}$ = “non re di picche”.

e - Evento $A - B$ = “un re, ma non di picche”.

1.2 Calcolo Combinatorio ed Esempi con le Carte

A volte può essere difficile, o almeno noioso, determinare per elencazione diretta gli elementi in uno spazio campione finito. E' preferibile avere dei metodi per contare il numero di tali elementi senza elencarli. Il **calcolo combinatorio** fornisce dei metodi per calcolare il numero di elementi di un insieme.

Teorema 1

Se gli insiemi $A_1, A_2, ..., A_k$ contengono rispettivamente $n_1, n_2, ..., n_k$ oggetti, il numero di modi diversi di scegliere prima un oggetto di A_1, poi un oggetto di A_2,…, infine un oggetto di A_k è:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$$

Definizione 1

Il numero di **disposizioni con ripetizione di n oggetti a gruppi di k** è dato da

$$D_{n,k}^{(r)} = n^k$$

Esempio 1

Nella schedina del totocalcio tutti i possibili pronostici sono dati dalle disposizioni con ripetizione dei 3 elementi 1 2 X a gruppi di 13 (i tre simboli si possono ripetere); il loro numero è

$$D_{3,13}^{(r)} = 3^{13} = 1594323$$

Definizione 2

Dati n oggetti distinti, si chiamano **disposizioni semplici (senza ripetizione)** i gruppi che si possono formare scegliendo k ($k \leq n$) degli n oggetti; i gruppi devono differire o per qualche oggetto o per l'ordine in cui sono disposti.

Per trovare una formula per il numero delle disposizioni di k oggetti scelti da un insieme di n oggetti distinti, si osservi che la prima scelta è fatta dall'intero insieme di n oggetti, la seconda è fatta fra gli $n-1$ oggetti rimanenti dopo la prima scelta, in generale la k-esima scelta è fatta fra gli $n-(k-1)=n-k+1$ oggetti rimanenti dopo le prime $k-1$ scelte.
Pertanto, per la definizione 1, il numero delle disposizioni è

$$D_{n,k}=n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$$

Si può usare la notazione del fattoriale $n!=1\cdot 2\cdot ...\cdot n$.
Moltiplicando e dividendo nella per $(n-k)!$ si ottiene

$$D_{n,k}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!}$$

Pertanto vale il risultato seguente:

Teorema 2
Il numero delle **disposizioni semplici (senza ripetizione)** di k oggetti scelti da un insieme di n oggetti distinti è dato da

$$D_{n,k}=n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

Esempio 2
Si può trovare quante sequenze di 4 carte possono essere formate usando le 13 picche per la prima carta, le 13 cuori per la seconda, le 13 quadri per la terza e le 13 fiori per l'ultima e senza considerare il seme della carta (7 di fiori = 7 di picche)

a – si ammettono delle ripetizioni;

b – si usano solo le 13 carte di un seme (non si ammettono ripetizioni);

c – la prima non può essere l'asso e l'ultima carta deve essere il re e si usano solo le 13 carte di un seme (non si ammettono ripetizioni).

a – le carte, se non consideriamo il seme, si scelgono fra le 13 disponibili; si possono allora formare N sequenze

$$N = 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 = 28561.$$

b – Si devono contare le disposizioni senza ripetizioni

$$N = D_{13,4} = \frac{13!}{(13-4)!} = \frac{13!}{9!} = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 17160$$

c – La prima carta non potendo essere l'asso e neppure il re (evidentemente) può essere una delle 11 restanti; per la seconda e la terza si devono contare le disposizioni senza ripetizioni fra le 11 carte (tolta la prima e non considerando il re)

$$D_{11,2} = \frac{11!}{(11-2)!} = \frac{11!}{9!} = 11 \cdot 10 = 110$$

(ricordiamo che la quarta carta è fissata); si possono formare N numeri

$$N = 11 \cdot 110 = 1210$$

Nel caso particolare in cui k = n le disposizioni semplici si chiamano permutazioni.

Definizione 3

Le **permutazioni** di n oggetti distinti sono tutti i gruppi formati ciascuno da tutti gli n oggetti dati e che differiscono solo per l'ordine degli oggetti.

Ponendo k = n nella formula delle disposizioni semplici si ottiene il seguente risultato.

Teorema 3
Il numero delle permutazioni di n oggetti distinti è dato da

$$P_n = n!$$

Esempio 3
Cerchiamo quante sequenze si possono formare con 10 carte.

Il numero delle sequenze è dato dalle permutazioni di 10 elementi

$$P_{10} = 10! = 3628800$$

Esempio 4
Si sistemano in mano 4 carte di picche, 6 di cuori e 2 di fiori. Si può contare quante sistemazioni sono possibili se

a – le carte di ogni seme devono stare vicine
b – solo le picche devono stare insieme

a – numero di sistemazioni delle picche = 4!
numero di sistemazioni delle cuori = 6!
numero di sistemazioni delle fiori = 2!
numero di sistemazioni dei 3 semi diversi = 3!

Quindi il numero complessivo delle sistemazioni delle carte è

$$N = 4! \cdot 6! \cdot 2! \cdot 3! = 207360$$

b - Si considerano le carte di picche come un'unica carta.
Restano allora 8 carte (cuori + fiori) + 1 carta (picche) = 9 carte da sistemare in 9! modi diversi. Le carte di picche hanno 4! Sistemazioni diverse, quindi il numero complessivo di sistemazioni diverse è

$$N = 9! \cdot 4! = 8709120$$

Esempio 5
Le disposizioni delle carte in mano sono permutazioni. Se consideriamo un solo mazzo di carte le disposizioni di queste sono $P_n = n!$. Per risolvere il problema nel caso si abbiano più mazzi di carte occorre disporre di un'altra formula. Supponiamo che un insieme sia formato da n oggetti non tutti distinti, dei quali cioè n_1 sono di un tipo (indistinguibili), n_2 di un secondo tipo, ..., n_k del k-esimo tipo, con $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.
Si dimostra che

Teorema 4
Il numero delle **permutazioni di n oggetti non tutti distinti** è dato da

$$P_{n,n_1,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

Esempio 6
Si vogliono sistemare 5 carte di picche, 2 di cuori e 3 di fiori; se tutte le carte dello stesso seme sono indistinguibili, cerchiamo di trovare le sistemazioni possibili.

Il numero delle possibili sistemazioni è

$$N = \frac{10!}{5! \cdot 2! \cdot 3!} = 2520$$

In una disposizione semplice siamo interessati all'ordine degli oggetti, quindi ad esempio il gruppo "abc" è un gruppo diverso da "bca"; se invece l'ordine di scelta non interessa, cioè "abc" e "bca" sono lo stesso gruppo, si ottengono le combinazioni.

Definizione 4
Le **combinazioni** sono tutti i gruppi di k oggetti, che si possono formare da un insieme di n oggetti distinti, in modo che i gruppi differiscano per almeno un oggetto.

Teorema 5
Il numero delle **combinazioni** di n oggetti a gruppi di k è dato da

$$\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{K!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

I numeri

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k-1)}{k!}$$

sono chiamati **coefficienti binomiali**, perché compaiono nello sviluppo della potenza del binomio di Newton $(a+b)^n$.

Esempio 7

Gioco del poker.

In una mano di poker ogni giocatore riceve 5 delle 52 carte del mazzo. Calcoliamo in quanti modi può essere servito.

Il numero dei servizi possibili è dato dalle combinazioni di 5 oggetti scelti fra 52

$$C_{52,5} = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5! \cdot 47!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2598960$$

Gioco del bridge

In una mano di bridge si ricevono 13 carte su 52. Calcoliamo in quanti modi può essere servito.

Il numero dei servizi possibili è

$$C_{52,13} = \binom{52}{13} = \frac{52!}{13! \cdot 39!} = 635013559600$$

1.3 Il concetto di probabilità

Con i metodi del calcolo combinatorio si possono contare gli elementi di un insieme, in altre parole possiamo calcolare quanti sono i casi possibili in una data situazione. In ogni esperimento casuale però non sappiamo se un evento si presenterà o no: bisogna quindi studiare ciò che è probabile o improbabile.
La teoria della probabilità studia concetti e metodi per esprimere quantitativamente il grado di fiducia sul verificarsi di certi eventi. A ciascun evento può essere associata una probabilità, che, dal punto di vista matematico, è una funzione definita sull'insieme degli eventi.
Ci sono più modi mediante i quali è possibile definire la probabilità di un evento: qui definiremo la **probabilità a priori** o **probabilità matematica** e la **probabilità a posteriori** o **probabilità statistica** (o frequentistica); è possibile dare un'ulteriore definizione di probabilità, detta **probabilità soggettiva**, che qui non sarà trattata in queste lezioni.
La definizione classica di **probabilità matematica** P, dovuta a *Bernoulli* e *Laplace*, è

$$P = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$$

Questa definizione assume che tutti i risultati possibili di un esperimento siano ugualmente
probabili e che lo spazio dei campioni sia finito.
La misura della probabilità viene perciò assegnata con il seguente procedimento:

1 – si determina il numero di tutti i casi possibili;
2 – si determina il numero dei casi favorevoli, cioè di quei casi che rendono verificato l'evento di cui si vuole calcolare la probabilità;
3 – si calcola il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili.

Secondo questa definizione, ogni probabilità P è un numero compreso fra 0 e 1; inoltre la probabilità di un evento che non può accadere (**evento impossibile**) è P = 0 e la probabilità di un evento che accade sempre (**evento certo**) è P = 1. Talvolta la probabilità P viene moltiplicata per 100 ed espressa in percentuale

$$0\% \leq P \leq 100\%$$

I seguenti esempi illustrano la definizione di probabilità a priori; in alcuni di essi, contrassegnati con un asterisco, si applicano i metodi del calcolo combinatorio.

Esempio 1

Si estrae una carta da un mazzo di 52 carte. Si vuole calcolare:

a – la probabilità di estrarre un asso;

b – la probabilità di estrarre un asso oppure un 10 di cuori oppure un 2 di picche.

a – Nel mazzo ci sono 4 assi, quindi 4 casi favorevoli; la probabilità cercata è

$$P = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

b – Nel mazzo ci sono 4 assi, un 10 di cuori e un 2 di picche, quindi 6 casi favorevoli; la
probabilità cercata è

$$P = \frac{6}{52}.$$

Esempio 2

In fila su un tavolo si dispongono a caso 5 carte di picche e 5 di quadri: calcoliamo la probabilità che le carte vengano disposte con colore alternato.

Le 10 carte possono disporsi in $10!$ modi diversi (casi possibili).
Le picche possono disporsi in $5!$ modi diversi (permutazioni); così anche per le quadri, quindi i casi favorevoli sono $5! - 5!$.
Quindi la probabilità vale

$$P = \frac{5! \cdot 5!}{10!} = 0{,}00397 .$$

Esempio 3

Da un mazzo di 30 carte, 18 nere e 12 rosse vengono distribuite 10 carte. Determiniamo la probabilità che 7 fra quelle distribuite siano nere.

I casi possibili sono le combinazioni di 30 carte a gruppi di 10

$$C_{30,10} = \binom{30}{10} = 30045015$$

I casi favorevoli si hanno quando in un gruppo ci sono 7 carte nere e 3 rosse.
Il numero di gruppi di 7 carte nere che si possono formare con 18 palline nere è dato dalle combinazioni

$$C_{18,7} = \binom{18}{7} = 31824$$

Il numero dei gruppi di 3 carte rosse che si possono formare con 12 carte rosse è dato dalle combinazioni

$$C_{12,3} = \binom{12}{3} = 220$$

In totale i casi favorevoli sono

$$C_{18,7} \cdot C_{12,3} = \binom{18}{7} \cdot \binom{12}{3} = 7001280$$

La probabilità cercata è quindi:

$$P = \frac{7001280}{30045015} \cong 0,233 .$$

Ci sono molti casi in cui i vari risultati possibili di un esperimento non sono tutti ugualmente probabili. In tal caso si può definire la probabilità per mezzo di una stima frequentistica, possibile solo dopo aver esaminato un gran numero di casi. Si definisce in questo modo la **probabilità a posteriori**, detta anche **probabilità statistica** o **frequentistica**.

Se, dopo aver ripetuto n volte un esperimento, con n sufficientemente grande, un evento si è verificato h volte, si dice che la probabilità di questo evento è

$$P = \frac{h}{n} .$$

Affinché questa definizione sia valida, occorre che tutte le prove avvengano nelle stesse condizioni, cosa che in realtà non è sempre ottenibile quando si analizzano fenomeni statistici.

Se si afferma ad esempio che la probabilità di una nascita di gemelli è $P = 1/100$, si intende che la frequenza relativa osservata nell'arco di alcuni anni è stata di 1 su 100; da tale constatazione si può assumere che una nascita futura sarà una nascita di gemelli con probabilità P uguale a tale frequenza.

Sia l'approccio classico, sia quello statistico o frequentistico vanno incontro a difficoltà: il primo a causa dell'espressione "ugualmente probabile", il secondo per aver presupposto "n molto grande", concetti di palese vaghezza. A causa di queste difficoltà, si preferisce l'approccio assiomatico alla probabilità, che fa uso degli insiemi.

1.4 Definizione di Probabilità con l'Uso delle Carte

Sia S uno spazio campione finito. Ad ogni evento A di S si associa un numero reale P(A), detto **probabilità dell'evento A**, che soddisfa i seguenti assiomi

1° – $0 \leq P(A) \leq 1$
2° – $P(S) = 1$
3° – Se A e B sono eventi mutualmente esclusivi di S
(cioè $A \cap B = \varnothing$), allora

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

P è una funzione definita sull'insieme degli eventi di S e a valori reali, detta **funzione di probabilità**, che a ogni sottoinsieme A di S associa un numero reale

$$P : A \subseteq S \to P(A) \in \mathbf{R}\,.$$

Dal 1° assioma segue che P(A) è un numero reale appartenente all'intervallo [0,1]; dal 2° assioma segue che la probabilità dell'evento certo è 1; dal 3° assioma segue che le funzioni di probabilità sono funzioni additive.
Gli assiomi non devono naturalmente essere dimostrati, ma si può mostrare che essi sono coerenti con la definizione classica di probabilità.
Elenchiamo alcuni teoremi elementari che seguono dagli assiomi appena enunciati.
Il teorema 1 è una generalizzazione del terzo assioma.

Teorema 1
Se $A_1, A_2, ..., A_n$ sono eventi mutuamente esclusivi di uno spazio campione S, allora

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

Il teorema 2 consente di calcolare la probabilità dell'unione di due eventi qualsiasi, anche nel caso in cui gli eventi non sono necessariamente mutuamente esclusivi.

Teorema 2 – Regola additiva

Se A e B sono due eventi qualsiasi di S, allora

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Se gli eventi sono mutuamente esclusivi, il teorema 2 si riduce al terzo assioma della definizione.

Teorema 3

Se A è un qualunque evento di S, allora

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

In particolare l'evento impossibile ha probabilità nulla $P(\varnothing) = 0$.

Esempio 1

Si estrae una carta a caso da un mazzo di 52 carte. Si può calcolare la probabilità che sia

a – un asso;
b – un fante di cuori;
c – un 3 di picche o un 6 di fiori;
d – un cuori;
e – un seme diverso da cuori;
f – un 10 o un quadri;
g – né un 4 né un picche.

Si usano le notazioni

1 = asso; 11 = fante; 12 = regina; 13 = re;

c = cuori; q = quadri; p = picche; f = fiori.

a – $$P(1)=\frac{4}{52}$$

b – $$P(11\cap C)=\frac{1}{52}$$

c – $$P((13\cap p)\cup(6\cap f))=P(13\cap p)+P(6\cap f)=\frac{1}{52}+\frac{1}{52}=\frac{1}{26}$$

d – $$P(c)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$$

e – $$P(\overline{f})=1-P(f)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

f – 10 e quadri sono mutualmente esclusivi, quindi

$$P(10\cup q)=P(10)+P(q)-P(10\cap q)=\frac{1}{13}+\frac{1}{4}-\frac{1}{52}=\frac{4}{13}$$

g – $$P(\text{né 4 né picche})=P(\overline{4}\cap\overline{p})$$

Per la legge di De Morgan si ha:

$$P(\overline{4}\cap\overline{p})=P(\overline{(4\cup p)})=1-P(4\cup p)=$$

$$=1-[P(4)+P(p)-P(4\cap p)]=1-\left[\frac{1}{13}+\frac{1}{4}-\frac{1}{52}\right]=\frac{9}{13}$$

(si ricordi che gli eventi 4 e P non sono mutuamente esclusivi).

1.5 Probabilità Condizionata

La probabilità di un evento è un numero che misura il grado di fiducia che noi abbiamo circa il realizzarsi di questo evento. E' naturale allora che la probabilità di uno stesso evento possa cambiare, se cambiano le informazioni in nostro possesso.
Il concetto di probabilità condizionata traduce formalmente l'idea intuitiva di probabilità di un evento, calcolata sapendo che si è verificato un altro evento.

Esempio 1
Prendiamo 10 carte, dall'asso al 10 di picche ed effettuiamo l'estrazione di una di esse; consideriamo i seguenti eventi

Evento A = "esce una carta dispari" $A = \{1,3,5,7,9\}$

Evento B = "esce una carta minore di 6" $B = \{1,2,3,4,5\}$.

Calcoliamo la probabilità di ottenere un numero minore di 6, sapendo che il risultato è un numero dispari.
La probabilità dell'evento A vale

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

poiché i casi possibili sono 10 e i casi favorevoli sono 5. Analogamente per l'evento B

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

Se sappiamo che l'evento A si è già verificato, i casi possibili per l'evento B non sono più 10, ma si riducono a 5 (ossia la conoscenza del verificarsi dell'evento A riduce lo spazio campione), e i casi favorevoli sono 3, perciò la probabilità di ottenere un numero minore di 6, sapendo che il risultato è dispari, è $3/5$.

La probabilità così ottenuta è detta **probabilità condizionata**

$$P(B \mid A) = \frac{3}{5}$$

(il simbolo | si legge "a condizione che").
Il fatto di aggiungere l'informazione che la carta estratta è dispari, fa aumentare la probabilità di B da $1/2$ a $3/5$.

Osserviamo che si ha

$$A \cap B = \{1,3,5\} \qquad\qquad P(A \cap B) = \frac{3}{10}$$

e che
$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{5}$$

Queste considerazioni vengono formalizzate dalla seguente definizione.

Definizione 1
Siano A e B due eventi qualsiasi dello spazio campione S e sia $P(A) \neq 0$.
La probabilità dell'evento B, nell'ipotesi che si sia già verificato l'evento A, è chiamata **probabilità** di B **condizionata** ad A ed è definita da

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Analogamente, se $P(B) \neq 0$, la probabilità di A condizionata a B è definita da

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Il seguente risultato è una conseguenza immediata della definizione di probabilità condizionata.

Teorema 1 – Regola di moltiplicazione

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) \qquad \text{se } P(A) \neq 0$$
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B) \qquad \text{se } P(B) \neq 0$$

Questo significa che la probabilità del verificarsi di entrambi gli eventi A e B è uguale alla probabilità di A per la probabilità che B si verifichi, quando si supponga che A si sia già verificato.

Esempio 2

Supponiamo di giocare al gioco d'azzardo delle 3 carte e scegliere sempre la prima carta della smazzata. Ci si domanda ora:

a – Quale sarà la probabilità che, giocando 5 volte, non esca mai l'asso (non si è mai vinto)?

b – Quale sarà la probabilità dello stesso evento, supponendo di aver già perso (non è uscito l'asso) 4 volte?

a – Sia A l'evento "in 5 giocate non si è mai vinto"; il numero dei casi possibili considerando solo la prima carta estratta nelle 5 smazzate, è 3^5; ci sono 2^5 casi "favorevoli" (di non vincere), quindi

$$P(A) = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243} \simeq 0{,}13$$

b – Sia B l'evento "nelle prime 4 giocate non si è mai vinto"; come prima si ha

$$P(B) = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

La probabilità di A, sapendo che si è verificato B, è

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{2^5}{3^5}}{\frac{2^4}{3^4}} = \frac{2}{3}$$

Si noti che $A \subseteq B$, perciò $A \cap B = A$.

Possiamo osservare come l'informazione ulteriore in nostro possesso abbia cambiato in modo evidente la valutazione della probabilità di uno stesso evento.

Può però accadere che la probabilità condizionata $P(B|A)$ sia uguale alla probabilità $P(B)$; questa condizione significa intuitivamente che sapere che A si è verificato non cambia la valutazione della probabilità di B. In questo caso si dà la seguente definizione.

Definizione 2

Due **eventi** A e B si dicono **indipendenti** se

$$P(B|A) = P(B)$$

In tal caso si ha pure

$$P(A|B) = P(A)$$

Nel caso di due eventi indipendenti, il teorema 10 diventa

Teorema 2 – Regola di moltiplicazione per eventi indipendenti

Se due eventi A e B sono indipendenti, si ha

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Questa regola viene spesso assunta come definizione di eventi indipendenti; in ogni caso può essere usata per determinare se due eventi sono indipendenti.

Esempio 3

Si estraggono due carte da un mazzo di 52 carte. Calcoliamo la probabilità di estrarre due assi se

a – la prima carta viene rimessa nel mazzo prima della seconda estrazione;

b – la prima carta non viene rimessa nel mazzo prima della seconda estrazione.

a – In questo caso gli eventi sono indipendenti; ci sono 4 assi nel mazzo, quindi

$$P = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$$

b – In questo caso gli eventi sono dipendenti; fra le 51 carte rimaste dopo l'estrazione del primo asso ci sono solo più 3 assi, quindi la probabilità di estrarre uno di questi è $3/51$; la probabilità richiesta è

$$P = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$$

Si osservi che eventi mutuamente esclusivi, (ossia disgiunti), non sono indipendenti.

Infatti per ogni coppia di eventi disgiunti A e B si ha $A \cap B = \varnothing$; se A e B fossero indipendenti dovrebbe essere

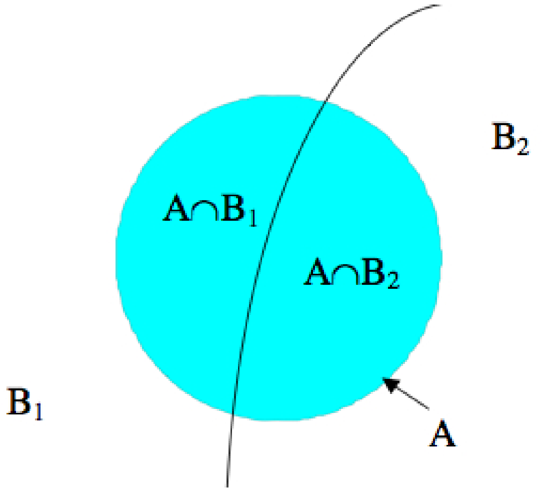
$$P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0 = P(A) \cdot P(B)$$

quindi almeno uno dei due eventi dovrebbe avere probabilità 0, cioè essere impossibile.

In realtà due eventi disgiunti sono fortemente dipendenti, perché disgiunti significa che se uno si realizza, allora l'altro non si può realizzare.

1.6 Il teorema di Bayes

Consideriamo la situazione illustrata con il seguente diagramma di Venn



Gli eventi B_1 e B_2 sono tali che

$$B_1 \cap B_2 = \varnothing \quad \text{e} \quad B_1 \cup B_2 = S$$

dove S è lo spazio campione. Gli insiemi $A \cap B_1$ e $A \cap B_2$ sono mutuamente esclusivi, perciò

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2).$$

Applicando la regola di moltiplicazione si ottiene

$$P(A) = P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2).$$

Questa formula esprime la regola della probabilità totale nel caso particolare di due eventi B_1 e B_2. La regola può essere generalizzata al caso di una famiglia di n eventi $B_1, B_2, \ldots, B_n$ mutuamente esclusivi ed esaustivi.
Si può dimostrare il seguente teorema

Teorema 1 – Teorema della probabilità totale

Sia A un evento e $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ una famiglia di eventi dello spazio campione S mutuamente esclusivi e tali che uno e uno solo di essi si verifichi, ossia tali che

$B_i \cap B_j = \emptyset$	per $i \neq j$	(mutuamente esclusivi)
$B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = S$		(esaustivi)
$P(B_i) \neq 0$	per ogni i	

Allora si dimostra che

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + ... + P(A|B_n) \cdot P(B_n) = \\ = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

Per dimostrare questo risultato è sufficiente osservare che se A si verifica, esso deve verificarsi insieme ad uno e uno solo degli eventi $B_1, B_2, ..., B_n$, perciò

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap B_n).$$

Applicando il teorema 1 di 1.5 si ha

$$P(A \cap B_i) = P(B_i) \cdot P(A|B_i).$$

Sostituendo questa relazione nella precedente si ottiene la tesi.

■

L'utilità del teorema sta nel fatto che talvolta $P(A)$ è difficile da calcolare direttamente, mentre è più facile calcolare le probabilità $P(A|B_i)$ e poi ricostruire $P(A)$ dalla formula (teorema 1 di 1.6).

Esempio 1

Siano dati due mazzi di carte che contengono rispettivamente

mazzo I 2 carte di cuori e 1 di picche

mazzo II 3 carte di cuori e 2 di picche.

Scegliamo a caso un mazzo e peschiamo da questo una carta a caso. Cerchiamo la probabilità di pescare una carta di picche.

Evento B_1 = "è stato scelto il mazzo I"

Evento B_2 = "è stato scelto il mazzo II"

$$B_1 \cap B_2 = \varnothing \qquad B_1 \cup B_2 = S$$

Evento A = "è stata pescata una carta di picche"

Applicando il teorema della probabilità totale

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)$$

si ha

$$P(B_1) = \frac{1}{2} \qquad P(B_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B_1) = \frac{1}{3} \qquad P(A|B_2) = \frac{2}{5}$$

quindi

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{30} \cong 0{,}367 .$$

Si osservi che la probabilità è diversa da quella che si avrebbe se tutte le carte fossero contenute in un unico mazzo: in questo caso la probabilità di pescare una carta di picche sarebbe

$$P(A) = \frac{3}{8} = 0{,}375 .$$

La differenza fra i due risultati dipende dal fatto che i due mazzi contengono un numero diverso di carte, quindi una carta del mazzo I non ha la stessa probabilità di essere estratta di una carta del mazzo II.

Esempio 2

Riferendoci all'esempio precedente possiamo ora porre il seguente quesito: se è stata estratta una carta di picche, qual è la probabilità di aver scelto il mazzo I?
Per rispondere a questa domanda bisogna calcolare la probabilità $P(B_1 \mid A)$.
Dal teorema 10 si ricava la relazione

$$P(B_1 \mid A) \cdot P(A) = P(A \mid B_1) \cdot P(B_1)$$

da cui segue

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{11}{30}} = \frac{5}{11} \cong 0,455.$$

Generalizzando il procedimento seguito in questo esempio si può ottenere il seguente importante risultato.

Teorema 2 – Teorema di Bayes

Sia A un evento con P(A) > 0 e $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ una famiglia di eventi dello spazio campione S soddisfacenti le ipotesi del teorema precedente.
Allora

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \mid B_k) \cdot P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)} \qquad \text{per ogni k}$$

Questo teorema ci permette di trovare le probabilità degli eventi B_k che possono essere la causa del verificarsi dell'evento A, in altre parole che l'effetto A sia stato provocato dalla causa B_k; per questo motivo è detto anche teorema della probabilità delle cause.

Esempio 3

Siano dati 2 mazzi di carte contenenti delle carte di picche e cuori; nel mazzo I il 70% delle carte sono picche; nel mazzo II il 40% delle carte sono picche.
La probabilità di scegliere il mazzo I sia 0,1; la probabilità di scegliere il mazzo II sia invece 0,9. Calcolare la probabilità che una carta di picche pescata a caso provenga dal mazzo I.
Evento A = "carta pescata di picche";
Evento B_1 = "la carta proviene dal mazzo I";
Evento B_2 = "la carta proviene dal mazzo II".

$$P(B_1) = 0{,}1 \qquad\qquad P(B_2) = 0{,}9$$
$$P(A \mid B_1) = 0{,}7 \qquad\qquad P(A \mid B_2) = 0{,}4$$

Dal teorema di Bayes segue

$$P(\text{dal mazzo I} \mid \text{picche}) = P(B_1 \mid A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A \mid B_1)}{P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2)} =$$
$$= \frac{0{,}1 \cdot 0{,}7}{0{,}1 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}4} = 0{,}163 = 16{,}3\%$$

Il risultato può essere interpretato come segue: effettuando numerose prove, nel 16.3% dei casi in cui si è pescata una picche, essa proviene dal mazzo I.

Nel caso in cui gli eventi della famiglia $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ hanno la stessa probabilità $P(B_i) = \frac{1}{n}$, la formula del teorema di Bayes si semplifica e diventa

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \mid B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)} \qquad \text{per ogni k}$$

2. *La Matematica per il Bridge*

In questo secondo capitolo desidero parlare della Matematica che serve ai giocatori di bridge per migliorare le proprie prestazioni. Di quella Matematica a cui il giocatore esperto dovrebbe far ricorso per giocare al meglio, per avere maggiori chance di vittoria.

Chi prende il gioco come semplice svago e il lavoro troppo seriamente ha capito poco dell'uno e dell'altro. Così si esprimeva un secolo fa il poeta tedesco Heine; eppure nella nostra cultura è tuttora presente una dicotomia tra gioco e lavoro.

Sul gioco pesa un antico pregiudizio che lo considera una attività se non proprio inutile, certamente priva della responsabilità, e quindi della serietà, che comporta invece il lavoro.

L'intuizione di Heine non ha fatto che anticipare quanto la moderna psicologia va affermando da qualche decennio; il gioco è da una parte una attività necessaria per la vita sociale, dall'altra è sentita, da parte dell'adulto, come una esigenza costante soprattutto quando questi svolge un lavoro ripetitivo e scarsamente creativo.

Il termine gioco è assai generico in realtà; varie e assai complesse sono le attività comprese entro tale concetto; tra queste attività il gioco del bridge, a mio avviso, è una delle più importanti e sicuramente più intelligenti.

Inoltre il gioco del bridge, presentando caratteristiche matematiche, è tra le attività una delle più creative.

Voglio dire che quei giochi che possono essere ricondotti ad un fondamento matematico o di logica matematica, si rivelano anche come i più impegnativi e i più costruttivi dal punto di vista mentale ed intellettuale.

A questo punto è allora il caso di stabilire qual è il legame esistente tra il gioco del bridge e la matematica.

2.1 Introduzione al gioco del Bridge

Per chi non conosce il bridge: si gioca in quattro, la coppia Nord-Sud (NS) contro la coppia Est-Ovest (EO), con il mazzo da 52 carte (13 carte per ciascun seme: picche ♠, cuori ♥, quadri ♦, fiori ♣).

Ciascun giocatore riceve 13 carte. Il gioco si articola in due fasi:

- **la fase della dichiarazione**, in cui una delle due coppie, attraverso dichiarazioni convenzionali, "vince il contratto" cioè stabilisce quale sarà il seme della briscola (a bridge si chiama atout) e quante prese (su 13) dovrà aggiudicarsi;
- **la fase del gioco**: si giocano 13 mani in maniera simile alla briscola ma con l'obbligo di rispondere a colore.

Se la coppia che ha vinto la dichiarazione riesce ad aggiudicarsi almeno il numero di mani dichiarate vince, altrimenti "**va sotto**" e vince l'altra coppia.

Questa è una semplificazione, può succedere infatti che "**vinca**" la coppia che non è riuscita a mantenere il contratto. Così infatti ha dato meno punti agli avversari che non facendoli "giocare" in attacco.

La coppia o **linea** che "**vince**" la licita (che si aggiudica il contratto) si dice che gioca **in attacco,** l'altra che gioca **in difesa** .

Per il nostro scopo è sufficiente per ora questa semplificazione, andando avanti diventerà più chiaro il gioco.

I giocatori per comodità di analisi vengono associati ai 4 punti cardinali terrestri Nord, Sud, Est, Ovest. Solitamente la linea che attacca, che è impegnata a mantenere il contratto, si chiama NS (Nord – Sud); la linea in difesa EO (Est – Ovest).

2.2 Un problema fondamentale – La distribuzione dei resti

Un tipico (e spesso decisivo) problema del bridge è quello di prevedere come sono distribuite tra i due avversari le carte di un certo seme che mancano sulla linea. Per esempio la linea NS possiede 9 carte di picche. È molto importante sapere come possono essere distribuite le rimanenti 4 carte di picche sulla linea EO dei miei avversari; ci sono tre possibilità:

- Le quattro carte di picche sono tutte in mano ad un solo avversario: distribuzione 4-0.
- Un avversario possiede tre carte di picche e l'altro una sola carta di picche: distribuzione 3-1.
- Ciascun avversario possiede 2 carte di picche: distribuzione 2-2

Qual è la probabilità di ciascuna di queste distribuzioni? Questo, per un numero qualsiasi di carte mancanti, è il problema che vogliamo risolvere.

Supponiamo di aver distribuito le carte, 13 a testa, e di sapere (dalla dichiarazione, o da una giocata del proprio compagno, o dell'avversario) che alla nostra linea NS (Nord – Sud) mancano n carte di picche, per esempio n=4. Tra le 26 carte della linea EO (Est – Ovest) ci sono dunque le 4 carte di cui vogliamo conoscere la distribuzione.

Costruiamo il seguente modello: abbiamo un mazzo con 26 carte (le carte degli avversari, le nostre non ci interessano), di cui 4 sono di picche e 22 sono degli altri semi. Si estraggono ora 13 carte (le carte di Est, per esempio).

Tra queste 13 quante sono le carte di picche?

Possono essere 0, 1, 2, 3, 4 (e Ovest avrà rispettivamente le rimanenti 4, 3, 2, 1, 0). Osserviamo innanzitutto che il numero di eventi possibili (le possibili suddivisioni di 26 carte tra Est ed Ovest) è dato dal numero di sottoinsiemi di 13 elementi scelti in un insieme di 26, e quindi:

$$\binom{26}{13} = \frac{26!}{13!(26-13)!} = 10.400.600$$

Ragioniamo sempre sull'esempio n=4: nel mazzo ci sono 4 carte di picche e 22 carte degli altri semi.

Per semplificare e colorare mentalmente il nostro problema osserviamo che "è come se" dovessimo estrarre senza reintroduzione 13 palline da un sacchetto nel quale ci sono 4 palline nere e 22 palline bianche.
In quanti modi possibili, estraendo 13 palline da tale sacchetto si possono avere

- 4 palline nere e 9 bianche?
- 3 palline nere e 10 bianche?
- 2 palline nere e 11 bianche?
- 1 pallina nera e 12 bianche?
- 13 palline bianche?

Concentriamoci sul caso 3 palline nere e 10 bianche: ci stiamo chiedendo in quanti modi è possibile estrarre 3 palline nere su 4 e 10 palline bianche su 22: tale numero è uguale al prodotto tra

- il numero di modi con cui si possono pescare 3 palline nere su 4, cioè

$$\binom{4}{3} = 4$$

- il numero di modi con cui si possono pescare 10 palline bianche su 22, cioè

$$\binom{22}{10} = \frac{22!}{10!12!} = 1.738.201.006.080.000$$

Quindi estraendo 13 palline da un sacchetto che ne contiene 26, di cui 4 nere e 22 bianche, la probabilità di averne 3 nere e 10 bianche è

$$\frac{\binom{22}{10}\binom{4}{3}}{\binom{26}{13}} = \frac{143}{575}$$

Questa è la probabilità che Est abbia 3 carte di picche e (di conseguenza) Ovest ne abbia 1. Per simmetria la probabilità di avere 1 carta di picche in Est e 3 carte di picche in Ovest è la stessa. Poiché a noi interessa solo la distribuzione, la probabilità della distribuzione 3-1 è

$$\frac{286}{575}.$$

Analogamente la probabilità che Est abbia 4 carte di picche (e Ovest ne abbia 0) è

$$\frac{\binom{22}{9}\binom{4}{4}}{\binom{26}{13}}=\frac{11}{230}$$

quindi la probabilità della distribuzione 4-0 è $\frac{11}{115}$.

Infine la probabilità che Est ed Ovest abbiano due carte di picche ciascuno è

$$\frac{\binom{22}{11}\binom{4}{2}}{\binom{26}{13}}=\frac{234}{575}.$$

Osserviamo (con una certa soddisfazione) che

$$\frac{286}{575}+\frac{11}{115}+\frac{234}{575}=1$$

Il risultato è curioso e non del tutto intuitivo: quando mancano sulla linea 4 carte di un seme, la distribuzione più probabile è la 3-1, non la 2-2.

Dai calcoli svolti si capisce perché: la distribuzione 3-1 si presenta in due modi distinti (3-1 e 1-3) mentre la 2-2 in un solo modo.

Il ragionamento che abbiamo svolto è classico e risolve il seguente problema generale: in un sacchetto ci sono B palline bianche e N palline nere. Si

estraggono senza reintroduzione H palline; *qual è la probabilità di averne estratte* B_0 *bianche (e quindi* $N_0 = H - B_0$ *nere)*?
Tale probabilità è

$$\frac{\binom{B}{B_0}\binom{N}{N_0}}{\binom{B+N}{B_0+N_0}}$$

Se introduciamo la variabile aleatoria
X = numero di palline bianche estratte
la distribuzione di probabilità di X è la *distribuzione ipergeometrica*:

$$p(X=k) = \frac{\binom{B}{k}\binom{N}{H-k}}{\binom{B+N}{H}}$$

Una classica applicazione di tale metodo riguarda il **gioco del poker**:
qual è la probabilità di avere un poker d'Assi servito?
Se giochiamo con un mazzo da 32 carte (dal 7 all'Asso) allora "è come se" in un sacchetto avessimo 32 palline, 4 nere (i quattro Assi) e 28 bianche.
Se ne estraiamo 5 (le carte di una mano) la probabilità di avere poker d'Assi è:

$$\frac{\binom{4}{4}\binom{28}{1}}{\binom{32}{5}} = \frac{1}{7192} \approx 0{,}014\%.$$

Il metodo si generalizza:
in un sacchetto ci sono a_1 palline di colore 1, a_2 palline di colore 2, ..., a_n palline di colore n. Si estraggono senza reintroduzione H palline; *qual è la*

probabilità di averne k_1 di colore 1, k_2 di colore 2, ..., k_n di colore n (con $k_1 + k_2 + ... + k_n = H$)?

Tale probabilità è:

$$\frac{\binom{a_1}{k_1}\binom{a_2}{k_2}\cdots\binom{a_n}{k_n}}{\binom{a_1 + a_2 + ... + a_n}{k_1 + k_2 + ... + k_n}}.$$

Per esempio, la probabilità di avere un full di Assi e Re (3 Assi e due Re) è:

$$\frac{\binom{4}{3}\binom{4}{1}\binom{24}{0}}{\binom{32}{5}} = \frac{3}{25172}$$

Torniamo al bridge e generalizziamo.

Nel nostro sacchetto ci sono n palline nere e 26–n palline bianche. Se ne estraggono 13; *qual è la probabilità di estrarre k palline nere su n (e 13−k palline bianche su 26−n)?*

La risposta è:

$$\frac{\binom{26-n}{13-k}\binom{n}{k}}{\binom{26}{13}}.$$

Tenendo conto che tale rapporto va raddoppiato tranne nel caso in cui $k = \frac{n}{2}$, possiamo compilare la seguente tabella.

Carte mancanti nella linea	*Distribuzione*	*Probabilità*	*%*
2	2-0	12/25	48
	1-1	13/25	52
3	3-0	11/50	22
	2-1	39/50	78
4	4-0	55/575	9,6
	3-1	286/575	49,7
	2-2	234/575	40,7
5	5-0	9/230	3,9
	4-1	65/230	28,3
	3-2	156/230	67,8
6	6-0	12/805	1,5
	5-1	117/805	14,5
	4-2	390/805	48,4
	3-3	286/805	35,6
7	7-0	6/1150	0,5
	6-1	78/1150	6,8
	5-2	351/1150	30,5
	4,3	715/1150	62,2
8	8-0	18/10925	0,2
	7-1	312/10925	2,9
	6-2	1872/10925	17,1
	5-3	5148/10925	47,1
	4-4	3575/10925	32,7

I dati riportati in questa tabella sono molto utili al giocatore di bridge per conoscere in anticipo le probabilità di riuscita di un certo gioco (affrancamento di un colore lungo, possibilità di ricevere tagli, di impasse ecc.).
Va detto che per **impasse** si intende una manovra per cui, ad esempio, il giocatore riesce a fare due prese avendo AQ dello stesso seme nel suo compagno e due scartine in mano se il K si trova alla sua sinistra. Basterà

infatti che il compagno giochi la Dama se prima giocano una scartina o l'Asso se giocano il Re. Per **espasse** invece si intende una manovra per cui, ad esempio, il giocatore riesce a fare una presa avendo il suo compagno Kx dello stesso seme e due scartine in mano se l'A si trova alla sua sinistra. Basterà, in questo caso, che il compagno giochi il Re se chi è prima gioca una scartina o una scartina se prima giocano l'Assso.
Altra tabella da tenere presente, in cui sono riportate le probabilità di gioco basati su uno o più impasse o espasse, è la seguente:

Tentativi possibili di impasse	*Prese da effettuare*	*Probabilità*
1	1	50%
2	1	75%
3	1	87,5%
4	1	93,75%
2	2	25%
3	2	50%
4	2	68,7%
3	3	12,5%
4	3	31,3%
4	4	6,25%

Vediamo ora qualche esempio pratico per chiarire come la conoscenza dei dati riportati nelle due tabelle porti il giocatore a seguire la strada migliore, più probabile, nel gioco della carta.

Esempio 1

Nord	AQxxx
Sud	xx

Cerchiamo la probabilità di realizzare quattro prese nel colore.

Perché l'evento si verifichi è necessaria la concomitanza di due eventi: che il Re sia in Ovest (50% di Probabilità) e che i resti siano divisi 3-3 (35,6 % di probabilità).
La probabilità richiesta è una probabilità composta data dal prodotto delle probabilità semplici dei due eventi,
quindi:

$$50\% \times 35,6\% = 17,8\%$$

Esempio 2

Nord	AF10xx
Sud	xxx

Cerchiamo la probabilità di realizzare due prese nel colore.

Perché l'evento riesca è necessario che si verifichi **almeno una** delle seguenti condizioni:

a) che almeno uno degli onori mancanti sia situato in Ovest (75% di probabilità);
b) nel caso che ciò non avvenga (25%), che i resti nel colore siano divisi 3-3 (35,6% di probabilità).

In definitiva, la probabilità totale è data dalla somma delle probabilità che competono ai due eventi, ed è precisamente:

$$75\% + \left(25\% \times 35,6\%\right) = 83,9\%$$

Esempio 3

Nord	AD10xx
Sud	xx

Cerchiamo la probabilità di realizzare cinque prese nel colore.

Perché l'evento avvenga è necessario che si verifichino **entrambe** le seguenti condizioni:

a) che entrambi gli onori mancanti siano situati in Ovest (25% di probabilità);
b) che i resti nel colore siano divisi 3-3 (35,6% di probabilità).

In definitiva, la probabilità totale è data dal prodotto delle probabilità che competono ai due eventi, ed è precisamente:

$$25\% + 35{,}6\% = 8{,}9\%$$

Esempio 4

Nord	AD10xx
Sud	xxx

Quale è la probabilità di realizzare cinque prese nel colore?
Perché l'evento avvenga è necessario che si verifichino **entrambe** le seguenti condizioni:

a) che entrambi gli onori mancanti siano situati in Ovest (25% di probabilità);
b) che i resti nel colore siano divisi 3-2 (67,8% di probabilità).

In definitiva, la probabilità totale è data dal prodotto delle probabilità che competono ai due eventi, ed è precisamente:

$$25\% + 67{,}8\% = 16{,}95\%$$

2.3 L'impasse

L'impasse nel gioco del bridge è un'operazione frequente e strettamente legata alla teoria elementare delle probabilità.
Nel gioco quello che si verifica è questo: Il dichiarante che ha l'asso e il re di picche in mano gioca il fante dal morto. Se il secondo giocatore mette la Dama il dichiarante prende con il Re. Se la Dama non viene giocata il dichiarante lascia correre il Fante che rimane in presa e successivamente gioca il 10 dal morto per ripetere la giocata.
Evidentemente l'impasse ha una probabilità su due di vittoria.
Al giocatore si presentano i seguenti problemi:

a – Quando fare un impasse?

b – E' meglio che giocare Asso e Re di seguito?

c – Qual è la probabilità di successo di questo gioco in alcuni casi particolari?

Esempio 1

Assumiamo che il dichiarante abbia 8 carte di picche in linea, con Asso, Re e Fante. Gli avversari ne hanno quindi 5. Ora, 5 carte possono essere distribuite in 2^5 modi.
Di questi 2^5 determiniamo quali permettono di catturare la dama mancante in due colpi, "battendo" l'Asso e il Re.
(5–0) Se sono divise 5–0, la Dama è in salvo.
(4–1) In una divisione 4–1 la Dama è salva solo nel caso in cui stia nella mano con 4 carte.
(3–2) Se le picche sono divise 3-2, la Dama si salva se si trova nelle 3, ma viene catturata se sta nel doubleton. Se ciò avviene esistono $4 = C(4,1)$ casi in cui viene catturata.
Abbiamo in totale $5 = C(4,0) + C(4,1)$ casi in cui riusciamo a catturare la Dama battendo in testa Asso e Re, ma questo numero va raddoppiato, poiché le carte possono essere divise (0–5), (1–4) o (2–3).

Quindi la nostra chance di successo, con questo metodo di gioco è $\frac{10}{2^5} = \frac{5}{16}$, mentre con l'impasse è $\frac{1}{2}$.

Esempio 2

Analizziamo ora un numero pari di picche, diciamo 4, con una distribuzione 4–0, 0–4, 3–1,1–3, 2–2.

Per una distribuzione 2-2 la Dama sarà presa da Asso e Re e questa situazione di presenta in $C(4,2) = 6$ modi diversi, mentre per una distribuzione 4–0 o 0–4 la Dama è in salvo.

Le nostre chance totali diventano:

$$\frac{2C(3,0) + C(4,2)}{2^4} = \frac{1}{2}.$$

Generalizziamo, considerando $2n + k =$ il numero di carte detenute dagli avversario, ecco che evidentemente rimane solo che adattare il nostro metodo alla distribuzione

$$\frac{2n+k}{2}, \frac{2n+k}{2}, \text{ dove } k \text{ è naturalmente pari.}$$

E' facilmente verificabile che

$$C\left(2n+k, \frac{2n+k}{2}\right) = 2C\left(2n+k-1, \frac{2n+k}{2} - 1\right).$$

Abbiamo quindi la seguente probabilità per le possibili vie diverse per catturare la carta mancante:

$$2\left[C(2n+k-1,0) + C(2n+k-1,1) + ... + C(2n+k-1,n-1)\right]$$

Quindi, fino a che il numero di possibili distribuzioni è 2^{2n+k}, conviene l'impasse se e solo se la nostra probabilità di successo porta direttamente a

$$\frac{C(2n+k-1,0)+C(2n+k-1,1)+....+C(2n+k-1,n-1)}{2^{2n-k-1}} \leq \frac{1}{2}.$$

Ciò avviene quando

$$\sum_{n=0}^{n-1} C(2n+k-1,r) \leq 2^{2n-k-2}$$

Ma questo è vero solo quando $k \geq 0$, perciò, ponendo $k = 0$, abbiamo la stessa istanza del teorema binomiale:

$$\sum_{n=0}^{2n-1} C(2n-1,r) \leq 2^{2n-1}$$

Ma poiché $2n-1$ è dispari

$$\sum_{n=0}^{n-1} C(2n-1,r) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{2n-1} C(2n-1,r) = 2^{2n-2}.$$

Di nuovo, per $k > 0$ abbiamo, allo stesso modo

$$\sum_{n=0}^{2n+k-1} C(2n+k-1,r) = 2^{2n-k-1}.$$

Ma

$$\sum_{n=0}^{n-1} C(2n+k-1,r) < \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{2n+k-1} C(2n+k-1,r) = 2^{2n-k-2}$$

di conseguenza, *conviene fare l'impasse se e solo se il numero delle carte in possesso degli avversari è maggiore alla metà del numero delle carte nella nostra linea*.

2.4 Alcune osservazioni sulla probabilità nel bridge

Nel gioco del bridge, un giocatore è frequentemente chiamato a scegliere tra diverse linee di gioco; naturalmente, il giocatore vincente sceglierà la linea con la maggior probabilità di successo.

Supponiamo che una data linea abbia successo se le picche sono divise 3–3 (ciascuno dei due avversari deve avere 3 carte di picche nella propria mano) con la probabilità p_1 o se Ovest ha in mano l'asso di cuori con la probabilità p_2 o se il fante di picche si trova nella mano che non ha atout con la probabilità p_3. Così la probabilità di successo è approssimativamente calcolata come

$$1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3);$$

il calcolo è approssimativo perché gli eventi possono non essere strettamente indipendenti.

Normalmente tutti i giocatori di bridge conoscono questo sistema di calcolo.

Consideriamo ora una situazione leggermente diversa: la linea di gioco avrà successo se le picche sono divise 4–2 (probabilità p_1) o 3–3 (probabilità p_2). Questi due eventi sono evidentemente mutualmente esclusivi così la probabilità di vittoria sarà $p_1 + p_2$.

Si può poi porre il problema di quando si deve decidere se i dati eventi sono indipendenti o mutualmente esclusivi o in qualche posto in mezzo, e calcolare la probabilità in ciascun caso. Tutte le tre situazioni capitano nel bridge; in pratica, solo i due estremi sono generalmente considerati dai giocatori, nel corso del gioco solo i calcoli mentali sono permessi dalle regole del gioco.

Vorrei poi illustrare ciò che, molto spesso, condiziona la probabilità è un più usato sistema che presenta calcoli pratici che sono assolutamente probabili.

E' questo il tema della discussione. Andremo a dimostrare un <u>semplice metodo di calcolo delle probabilità</u> nelle diverse situazioni nel bridge.

Supponiamo di avere due palle rosse e due palle blu e metterle a caso, a due a due, in due scatole diverse.

Qual è la probabilità che entrambe le palle blu vadano nella stessa scatola?

In questo esempio è possibile una numerazione diretta. Usando una ovvia notazione abbiamo B_1B_2, B_1R_1, B_1R_2, B_2R_1, B_2R_2 e R_1R_2 con la medesima possibilità di andare nella scatola uno, per ciascun evento vediamo che la probabilità è $1/6$.
Questo è naturalmente l'approccio assoluto.
L'approccio condizionato è di assumere che una delle palle blu, diciamo B_1, è collocata in una delle scatole, ad esempio la numero uno. Le rimanenti tre palle siano distribuite a caso. Chiaramente la palla B_2 ha due volte la chance di andare nella scatola due, in cui ci sono due posti liberi, che nella scatola uno dove rimane un solo posto, così arriveremo alla corretta risposta di $1/3$.
Il calcolo condizionato sembra avere, in questo caso, un piccolo vantaggio sull'assoluto.
Modifichiamo appena un po' il problema per arrivare ad un problema di bridge.

Esempio 1
Se 13 carte sono distribuite a ciascuno dei due giocatori, Est ed Ovest, e se tra le 26 carte ci sono due carte di picche, qual è la probabilità che entrambe siano nella stessa mano, cioè che le picche siano divise 2–0?

Il calcolo assoluto ora diventa lunghissimo mentre quello condizionato è appena più lungo di quello delle due palle blu, facilmente arriviamo alla risposta

$$\frac{12}{25} = 48\%.$$

Similarmente, per tre carte la probabilità della divisione 3–0 è

$$\left(\frac{12}{25}\right) \cdot \left(\frac{11}{24}\right) = 22\%$$

mentre per la divisione 2–1 è

$$3 \cdot \left(\frac{13}{25} \right) \cdot \left(\frac{12}{24} \right) = 78\%$$

dei casi (il fattore 3 qui corrisponde al numero delle possibili divisioni 2–1 che ci sono, 6 volte $1/2$, fino a che la prima carta può messa in entrambe le mani). Seguendo lo stesso ragionamento, possiamo calcolare le probabilità delle divisioni 4–0, 3–1 e 2–2 con quattro carte constatando che sono

$\frac{11}{115} = 9,6\%$; $\frac{286}{575} = 49,7\%$ e $\frac{234}{575} = 40,7\%$ rispettivamente.

Una relativamente semplice regola per il calcolo della probabilità di una divisione m–n è la seguente. Calcoliamo il numero delle possibili divisioni che esistono, le moltiplichiamo per $1/2$, finché una delle due mani prende la prima carta, e procediamo moltiplicando per

$$\frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} \cdot \cdots \cdot \frac{13-(m-1)}{26-(m-1)} \cdot \frac{13}{26-m} \cdots \cdots \frac{13-(n-1)}{26-(m+n-1)}$$

Queste sono gli appropriati fattori corrispondenti al "riempimento" dei posti liberi nelle due mani.
E' facile verificare che non fa nessuna differenza in quale ordine i posti liberi vengono riempiti. Per inciso, il numero di modi in cui si può verificare la divisione m–n è dato da

$$2C(m+n,n) \text{ se } n \neq m \text{ e da } C(m+n,m) \text{ se } m = n,$$

dove $C(k,j)$ è il numero de combinazioni di k oggetti presi j alla volta.

Questo approccio alla divisione del colore è conosciuto solo dagli esperti del gioco bridge.

Kelsey nel suo libro *Advanced Play at Bridge* suggerisce che la probabilità della divisione 4-2 venga calcolata così:

$$\frac{2\cdot C(6,2)\cdot C(20,11)}{C(26,13)}=\frac{2\left(\frac{6!}{4!2!}\cdot\frac{20!}{11!9!}\right)}{\frac{26!}{13!13!}}=\frac{2519400}{10400600}.$$

Questo, naturalmente dà lo stesso risultato (48,4%) della formula vista precedentemente,

$$30\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{25}\cdot\frac{13}{24}\cdot\frac{12}{23}\cdot\frac{11}{22}\cdot\frac{10}{21},$$

eccetto che l'approccio di Kelsey sembra richiedere uno sforzo maggiore. Tra l'altro, una *risposta immediata* e "rozza" si ottiene dividendo il numero dei modi in cui le sei carte possono essere distribuite fra le due mani 4–2 $(2C(6,2)=30)$ con il numero totale in cui le sei carte possono essere distribuite $(2^6=64)$ per ottenere il 46,8% o, con un approssimativo calcolo a mente, $15/32\,;\ 1/2$.

Probabilmente l'aspetto meno intuitivo della teoria della probabilità riguarda le applicazioni del *teorema di Bayes*.

Ricordiamo che il teorema di Bayes ci dice che se una probabilità misura lo spazio S questo è diviso in n serie disgiunte A_i, e se $B\subset S$ allora

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(B\mid A_i)P(A_i)}{\sum_i P(B\mid A_i)P(A_i)},\ \ i=1,2,\ldots,n$$

Dove $P(A\mid B)$ rappresenta la probabilità condizionata di A dato B.

Questa relazione è facilmente derivabile dalle due formule fondamentali

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

$$\text{e}\ P(A\cap B)=P(B\mid A)P(A)=P(A\mid B)P(B).$$

Esempio 2 (Il paradosso del secondino)

Un famoso esempio non bridgistico del teorema di Bayes è il "*paradosso del secondino*". Dove A, B e C sono in prigione; uno dei tre è condannato a morte mentre gli altri due saranno liberati, ma solo il secondino conosce quali. Ora A vuole spedire una lettera alla propria fidanzata, e da quanto conosce con certezza B o C sta per essere liberato e domanda al secondino di dirgli il nome di almeno uno degli altri che verrà liberato in modo da consegnargli la lettera (nel caso si lui stesso il destinato alla morte). Il secondino obietta, spiegando che ora la probabilità di A di morire è di $1/3$ ma se lui dice, ad esempio, che B sarà libero, questa probabilità aumenta fino ad $1/2$.

Questo sembra intuitivamente sospetto, *visto che il secondino non fornisce nessuna nuova informazione ad A, perché la sua probabilità di morire cambia?*

Qui, il teorema di Bayes dà facilmente la corretta risposta (ancora $1/3$) : se

A_1 = "A muore",

A_2 = "C muore",

B = "il secondino dice che B sarà liberato".

Nota: $P(B \mid A_1) = 1/2$ ma $P(B \mid A_2) = 1$.

Il principio della scelta ristretta

Oltre alla applicazione del teorema di Bayes, si potrebbe capire questo "paradosso" da un punto di vista intuitivo. Il punto cruciale che può forse chiarire la situazione è la discrepanza fra $P(B \mid A_1)$ e $P(B \mid A_2)$. I giocatori di bridge chiamano questo il "*principio della scelta ristretta*". La probabilità di una scelta ristretta è ovviamente più grande di una libera scelta, ed un comune errore di coloro che cercano di risolvere intuitivamente questo problema è di non tener conto di questo punto.

Nel caso del paradosso del secondino, se il secondino dice " B sarà liberato" questo è due volte tanto probabile che accada quando C è fissato per morire (scelta ristretta; il secondino deve dire B) che A sia destinato a morire (libera scelta; il secondino può dire entrambi C o B).

La storia di questo principio nel gioco del bridge è estremamente interessante. L'applicazione prototipo si verifica nella seguente situazione. Sud, dichiarante, ha Asso, Re ed una o più picche, prende con l'Asso di picche. Ci sono quattro picche da collocare tra i difensori, Est e Ovest, il 2,3, la Dama e il Fante.
Est gioca il 2 ed Ovest la Dama. Sud deve decidere chi possiede il Fante, così da poter giocare l'impasse o la cattura diretta.
Diamo un'occhiata al diagramma della situazione. Le possibili disposizioni dopo un giro di picche sono

	Ovest	Est
1)	J	3
2)	Nulla	J,3

Dato che ci sono solo due casi, sembrerebbe ovvio che la probabilità che Ovest abbia il fante sia $1/2$. Persino matematici molto ben preparati spesso non riescono ad arrivare a credere che la probabilità del caso 1) non è $1/2$ ma $1/3$, senza andare nel dettaglio del calcolo.
(Ad essere precisi bisogna considerare anche la probabilità della divisione 2–2 contro la 3–1).
Il punto è, naturalmente, che la situazione 1) e 2) non sono egualmente probabili. Essi sono indotti dalla seguente situazione iniziale

	Ovest	Est
1')	Q,J	3,2
2')	Q	J,3,2

Nel caso 1'), Ovest avrebbe giocato il fante $1/2$ delle volte, mentre nel caso 2') la sua scelta è ristretta a giocare la dama. Quindi il caso 2 è due volte più probabile del caso 1.

Dal punto di vista del teorema di Bayes,

$$P(\text{Ovest gioca } Q | \text{Ovest ha in mano } Q, J) = 1/2$$

mentre

$$P(\text{Ovest gioca } Q | \text{Ovest ha in mano solo } Q) = 1.$$

Questo è un punto molto sottile e che viene trascurato facilmente. Il bridge attuale viene giocato fin dal 1929 e i suoi predecessori (bridge senza licita, il bridge giocato col morto ed il whist) molte centinaia di anni prima. Gli stessi problemi si presentano in tutti questi giochi, ed ancora, fino approssimativamente al 1960, i due casi erano trattati con la stessa probabilità di successo, persino dai giocatori esperti. Da allora i giocatori esperti di bridge seguono sempre le probabilità (come loro le percepiscono) questo indica come la probabilità sia difficile da calcolare quando è richiesto il teorema di Bayes.

2.5 *Il teorema di Bayes nel gioco del Bridge*

In questo paragrafo desidero approfondire come la valutazione delle probabilità durante il corso del gioco di una mano di bridge richieda l'uso della *formula di Bayes*.
Prenderò in esame due esempi per illustrare la precisa applicazione di questa formula nel calcolo delle probabilità in una tipica situazione che si presenta durante il gioco del bridge.

I problemi di probabilità che si presentano nel corso del gioco del bridge sono generalmente di due tipi:

1. Chi possiede quella carta?
2. Come sono divise le carte in una smazzata?

La risposta a molte di queste domande dipende dal totale delle informazioni che abbiamo. Prima di giocare possiamo valutare la probabilità di certe distribuzioni; ma come cominciamo ad acquisire informazioni durante il gioco queste valutazioni vanno riviste.
Non suggeriremo un metodo per calcolare e modificare il calcolo delle probabilità durante il gioco. Analizzeremo invece due esempi del gioco e delle variazioni delle probabilità
Applicheremo la formula di Bayes nel gioco del bridge, usando una notazione adatta al nostro scopo. Siamo interessati a quelle sicure probabilità che sono determinate dopo che la distribuzione delle carte è completata e comincia il gioco.
Assumiamo che Sud sia il dichiarante. Dopo l'inizio del gioco, sud conosce almeno 26 carte come anche i propri avversari est e ovest, le proprie 13 e quelle del morto. Spesso sud è capace di collocare in un avversario o nell'altro, altre carte oltre a quelle che vede. Se, per esempio, Ovest sceglie di giocare come prima carta (la carta di attacco nel bridge) la Dama di un seme non dichiarato (durante la licita) da Est, Sud può ragionevolmente assumere che Ovest abbia il Fante e probabilmente anche il 10, di questo seme.

A questo punto del gioco, ci sono n carte nascoste, r possedute da Ovest e $n - r$ in mano di Est. Queste n carte possono essere divise fra Ovest ed Est in uno dei

$$\binom{n}{r}$$

modi possibili. Ciascuna di queste possibili disposizioni può essere definita dai nomi delle r carte nella mano di Ovest, dato che se Ovest possiede determinate r carte, Est deve avere necessariamente le altre $n - r$.

In generale, Sud ha bisogno di determinare la probabilità che le carte di Ovest appartengano ad un determinato gruppo (per esempio, il gruppo delle possibili partizioni in cui Ovest possiede il Re di picche, o esattamente tre carte di quadri).

Classifichiamo le possibili carte di Ovest nei seguenti m gruppi completi e mutualmente esclusivi:

$$h_1, h_2, ..., h_m$$

e usiamo le lettere maiuscole:

$$H_1, H_2, ..., H_m$$

per rappresentare il numero di possibili partizioni appartenenti a ciascuno di questi gruppi.

In generale H_i può essere calcolato con l'analisi combinatoria. Il numero totale delle possibili partizioni è

$$N = \sum_{i=1}^{n} H_i = \binom{n}{r}$$

Se queste N possibili partizioni sono considerate essere ugualmente probabili, la probabilità che la mano di Ovest appartenga a h_k è H_k / N. Questo è

comunque un caso speciale. In generale, le svariate possibili mani non sono ugualmente probabili. In un certo senso, H_k/N è la probabilità a priori che la mano di Ovest appartenga a h_k, calcolata dopo che il gioco è cominciato ma prima di tener conto della strategia seguita da Est ed Ovest. Ma H_k/N è completamente diversa da quella della probabilità a priori come è descritta in tutti i libri di bridge; dove la probabilità di un impasse è sempre $1/2$, e la probabilità della divisione $3-2$ in un colore di 5 carte è sempre $0{,}67826$. La *probabilità a priori* che è universalmente usata si basa sul fatto di assumere la distribuzione delle 26 carte casuale; 13 in Ovest e 13 in Est. Le sempre citate percentuali non sono ugualmente misure accurate della probabilità a priori dopo che il gioco è cominciato.
Sia S rappresentante di particolari serie di dichiarazioni e giocate fatte da Est e Ovest, e siano

$$(S,H_1),(S,H_2),\ldots,(S,H_m)$$

le probabilità condizionate dall'evento S se le mani di Ovest sono rispettivamente $h_1,h_2,\ldots,h_m$.
Poi, se le mani vengono giocate N volte, la frequenza attesa di S dalle prese appartenenti a h_k è

$$H_k(S,H_k);$$

e per tutte le prese è

$$\sum_{i=1}^{n} H_i(S,H_i).$$

Dopo che si è verificato S, la probabilità inversa che le prese di Ovest appartenenti a h_k è

$$\left(H_k,S\right)=\frac{H_k\left(S,H_k\right)}{\sum_{i=1}^{n}H_i\left(S,H_i\right)}$$

e la probabilità inversa per ciascun gruppo di prese è
(2.5.1)

$$\frac{H_1\left(S,H_1\right)}{\sum_{i=1}^{n}H_i\left(S,H_i\right)},\frac{H_2\left(S,H_2\right)}{\sum_{i=1}^{n}H_i\left(S,H_i\right)},\ldots,\frac{H_m\left(S,H_m\right)}{\sum_{i=1}^{n}H_i\left(S,H_i\right)}$$

Per le nostre analisi, troviamo conveniente preparare una tabella, come la seguente:

(2.5.2)

1	2	3	4	5
h_1	H_1	$\left(S,H_1\right)$	$H_1\left(S,H_1\right)$	$\left(H_1,S\right)$
h_2	H_2	$\left(S,H_2\right)$	$H_2\left(S,H_2\right)$	$\left(H_2,S\right)$
……………..	……………..	……………..	……………..	……………..
h_m	H_m	$\left(S,H_m\right)$	$\frac{H_m\left(S,H_m\right)}{\sum_{i=1}^{n}H_i\left(S,H_i\right)}$	$\left(H_m,S\right)$

La prima colonna definisce ciascuno degli m gruppi di partizioni.
Le frequenze nella seconda colonna sono calcolate.
La probabilità condizionata della terza colonna può essere stimata sulla base delle osservazioni di Sud del suo abituale avversario o sulle normali strategie di gioco.
La quarta colonna è calcolata dalla somma dei dati della colonna 1 e 2.
La quinta colonna fa vedere le probabilità inverse definite nella (2.5.1) e nella (2.5.2) ed si ottiene dalla divisione di ciascun termine della quarta colonna per

$$\sum_{i=1}^{n}H_i\left(S,H_i\right).$$

Esempio 1

Sud gioca 6 picche, I suoi avversari hanno:

Picche	Q 9 8 6 4
Cuori	Q 10 9 8 7 6 4 2
Quadri	J 8 7 6 5
Fiori	A J 9 8 7 6 3 2

L'attacco di Ovest è stato con il 4 di cuori. Sud ha giocato il Fante dal morto, che rimane in presa. Sud pensa che la Dama di cuori deve stare in Ovest. Al secondo turno Sud gioca l'Asso di atout (Picche), Ovest ed Est seguono rispettivamente con il 4 e 6. Est vince la terza mano con l'Asso di fiori. Ora Sud deve fare tutte le prese che rimangono. Est gioca una piccola a quadri nella quarta mano, Sud prende e il morto mette in tavola il due di picche. Est gioca l'otto. Sud ora deve giocare il Fante, nella speranza che Est abbia in mano la Dama, o giocare il Re sperando che delle due carte rimaste Ovest abbia la Dama ed Est il nove. La percentuale favorevole è per l'impasse. Ma Sud comunque gioca il Re; cattura la Dama e mantiene il suo piccolo slam.

Che percentuale di gioco ha l'impasse descritto?

In campo all'inizio del gioco, c'erano

$$\binom{26}{13} = 10.400.600$$

possibili divisioni delle 26 carte di Est e Ovest, 13 per ciascuno; e di queste

$$\binom{25}{13} = 5.200.300$$

erano partizioni in cui Est era proprietario della Dama di picche; e solo

$$\binom{4}{1}\binom{21}{11} = 1.410.864$$

erano le partizioni in cui Ovest poteva avere due carte di picche con inclusa la Dama. Perciò la probabilità a priori, che è stata calcolata come al solito, è

$$\frac{5.200.300}{10.400.600} = 50\%$$

che Est fosse in possesso della Dama di picche e solo

$$\frac{1.410.864}{10.400.600} = 13\%$$

che Ovest avesse in mano la Dama seconda di picche.

La stima iniziale di Sud è stata evidentemente *corretta* alla luce delle informazioni che ha acquisito nel corso del gioco. In quel dato momento, Sud è capace di posizionare in Est e Ovest le seguenti carte:

	Ovest	Est	da posizionare
Picche	4	8 6	Q 9
Cuori	Q 4	2	10 9 8 7 6
Quadri	8	6	J 7 5
Fiori	6	A	J 9 8 7 3 2

Classifichiamo le carte che può avere in mano Ovest in quattro gruppi, considerando le picche e analizzando le probabilità come indicate di seguito:

serie	Le picche in Ovest	H	(S,H)	$H(S,H)$	(H,S)
h_1	Q 9 4	3003	1,0	3003	0,467
h_2	Q 4	3432	1,0	3432	0,533
h_3	9 4	3432	0,0	Nessuna	0,000
h_4	4	3003	0,0	Nessuna	0,000
		___________		___________	
		$N = 12870$		$\sum H_k(S,H_k) = 6435$	

Sud avendo visto l'Asso di fiori in Est e dalla licita di Ovest che ha chiamato 4 cuori, ha concluso che, visto che Ovest non può avere più di 7 cuori perché Est ha risposto e nessuna chicane, deve avere almeno i restanti onori mancanti e quindi la Dama di picche. Questo di conseguenza conduce al fallimento dell'impasse.
Sud in effetti apprende dal gioco di Est–Ovest che le partizioni da considerare sono h_1 e h_2, e sono da scartare h_3 e h_4.
Usando l'equazione (2.5.1), la probabilità che Ovest abbia in mano il 9 e 4 di picche, o solamente il 4 è

$$\frac{H_3(S,H_3)+H_4(S,H_4)}{\sum_{i=1}^{n} H_i(S,H_i)}=0$$

La probabilità che egli abbia in mano originariamente la dama e il 4 di picche è

$$\frac{H_2(S,H_2)}{\sum_{i=1}^{n} H_i(S,H_i)}=0,533=53,3\%$$

Questo "stimando la mano prima che il gioco cominci" e revisionando la stima a secondo delle informazioni acquisite durante il gioco, ci porta alle opposte conclusioni:

	A priori	Modificata
chance di successo dell'impasse	50 %	Nessuna
chance di catturare la dama seconda in Ovest	13,6 %	53,3 %

L'esempio 1 illustra un caso in cui una linea di gioco è certamente destinata a fallire. Il dichiarante ovviamente cercherà un'alternativa con uno spiraglio di successo. Di conseguenza, la probabilità del 53,3% è puramente di interesse accademico. Questo serve ad indicare che la probabilità corretta differisce sostanzialmente dalla probabilità a priori, della quale i giocatori esperti cercano di calcolare la percentuale di gioco. Più importante è la conclusione che Ovest, piuttosto che Est, è certamente il possessore della dama di picche. Questa conclusione può essere trovata solo dall'analisi delle probabilità inverse; seguita da una analisi formale, come abbiamo fatto noi, o da una analisi informale come ha fatto Sud al tavolo.

Esempio 2

La licita è stata:

Sud	Ovest	Nord	Est
2 S.A.	Passo	3 quadri	Passo
3 S.A.	Passo	5 S.A.	Passo
6 S.A.	Passo	Passo	passo

Dopo aver giocato 8 mani, Sud è in grado di posizionare in Est–Ovest le seguenti carte:

	Ovest	Est	da posizionare
Picche	Q 7 6 5 2	9 8	
Cuori	J 10	3 2	9 5
Quadri		K	
Fiori	3	5 4 2	Q 9 7 6

Le 6 carte non posizionate devono essere distribuite 1 in Ovest e 5 in Est. Il dichiarante ha perso una presa, così che deve fare tutte le rimanenti 5 per realizzare il contratto. Sud può mantenere il suo contratto giocando le cuori se la carta rimasta ad Ovest è la dama di fiori. O giocando le fiori se la carta rimasta ad Ovest è una delle due cuori. Le possibili carte di cuori e di fiori possedute in origine da Ovest possono essere classificate come segue:

	In mano ad Ovest				
serie	cuori	fiori	(S,H)	$H(S,H)$	(H,S)
h_1	J 10 9	3	0,2	0,2	0,048
h_2	J 10 5	3	0,0	0,0	0,000
h_3	J 10	Q 3	1,0	1,0	0,238
h_4	J 10	9 3	1,0	1,0	0,238
h_5	J 10	7 3	1,0	1,0	0,238
h_6	J 10	6 3	1,0	1,0	0,238
				———	
				4,2	

Il successo con le fiori dipende solo dal trovare la Dama di fiori in Est. Alla fine della licita questa probabilità era 0,5.

Il successo con le cuori richiede che Est abbia il 9 di cuori, che Ovest abbia la Dama di fiori e che Ovest abbia esattamente una delle altre fiori di Est-Ovest. A questo punto del gioco la probabilità è approssimativamente 0,008.

Se si seguono le usuali tecniche del bridge, relativamente alla probabilità a priori, si deve convenire che il gioco delle cuori era "matematicamente inferiore" in questo caso. Ma questo giudizio si disgrega completamente dopo aver giocato 8 mani. E lo sviluppo del gioco ha grandemente modificato le probabilità in questione.

Vediamo ora come la probabilità può essere stimata all'inizio della nona mano.

Il gioco delle cuori avrà successo se originariamente la mano di Ovest era h_3; le fiori avranno successo se originariamente la mano di Ovest era h_1 o h_2.

Non c'e' stato nulla che ha condotto Est–Ovest a giocare in un certo modo, così sembra, e così assumiamo che Sud abbia la stessa impressione, che non c'è nessuna differenza che Est–Ovest abbiano cuori o fiori, eccetto che Ovest ha giocato il 10 e il Fante di cuori alla mano 2 e 7. Sud ha considerato questo "improbabile", che in questo caso quel particolare avversario abbia fatto un "falso scarto" giocando prima il 10 e poi il fante avendo in mano J 10 9.

Concretamente, assumiamo che Ovest non avrebbe giocato 10 J, tenendo il 5, da una mano composta da J 10 5.

Da questa supposizione, come si vede dalla tabella, la probabilità che Est–Ovest giochino la distribuzione h_3 è 0,238. La probabilità che abbiano giocato h_1 o h_2 è 0,048.
Da questo calcolo, il gioco delle cuori non è "matematicamente inferiore".
Ha, in realtà, meno di

$$\frac{1}{4}$$

di chance di successo, ma le fiori ne hanno meno di

$$\frac{1}{20}.$$

La probabilità di successo solitamente calcolata a priori dopo la fine della licita, e quella calcolata con il metodo qui seguito, a questo punto per la decisione di Sud, appaiono essere le seguenti:

	A priori	Modificata
Gioco delle cuori	0,008	0,238
Gioco delle fiori	0,500	0,048

Conclusioni:
Molti altri esempi possono essere fatti. Teoricamente ogni problema di probabilità che sorge durante il gioco del bridge può essere misurato correttamente dalla formula di Bayes, e solo dalla formula di Bayes.
L'applicazione della formula di Bayes ai tipici problemi che si presentano nel gioco del bridge può sembrare troppo complicata per avere un riscontro pratico durante il gioco.

Notiamo, comunque:

1– che una conoscenza dei principi della probabilità inversa può frequentemente aiutare il giocatore a prendere una rapida decisione circa l'alternativa migliore,

2– che un giocatore si può allenare per tutte le probabilità associate a certe situazioni tipiche che si verificano comunemente.

Riguardo il secondo punto, nessun giocatore fermerà il gioco per calcolare la probabilità a priori che 6 fiori non collocate siano divise 3-3, ma può ricordare che questa è meno di

$$\frac{1}{2}.$$

Ancora più difficile è una analisi delle probabilità condizionate (S, H_k). Ma un buon giocatore può prendere alcune accorte decisioni che riguardano la probabilità condizionata osservando le abitudini dei propri avversari, e più in generale dei giocatori di bridge.

3. Il Bridge per la Matematica

Alcuni problemi combinatori di bridge non hanno nulla a che fare con la strategia del gioco: Non è indispensabile per giocare a bridge conoscere che ci sono 635.013.559.600 possibili mani e 53.644.737.765.488.792.839.237.440.000 (circa) possibili smazzate.
In questo capitolo saranno trattati proprio questi temi, problemi cioè che nascono dal gioco del bridge ma interessanti solo da un punto di vista matematico.

3.1 Il numero delle possibili dichiarazioni nel gioco del bridge

Un interessante problema non strategico riguarda il numero di possibili dichiarazioni. A una prima analisi sembra che questo numero possa essere calcolato solo dopo un laborioso conteggio delle probabilità. Come potrete vedere, in ogni modo, contando le licite in una maniera un po' innaturale arriviamo direttamente alla risposta.
Assumeremo che il lettore abbia familiarità con la terminologia del bridge, ma non necessariamente con la strategia bridgistica.
Eviteremo di considerare l'infinita varietà di possibili licitazioni errate o impossibili in un tavolo di Bridge. Una licita "regolare" consiste di al massimo 35 dichiarazioni, di almeno 3 passo e di alcuni possibili contro o surcontro.
Esiste una sola licita nulla, che consiste in una sequenza di 4 passo; ometterò questo caso dal calcolo e lo aggiungerò alla fine.
Considero una licita con tutte le possibili k dichiarazioni fatte, dove $1 \leq k \leq 35$. Ciascuna dichiarazione deve essere superiore in grado alla precedente, ci sono

$$\binom{35}{k}$$

possibili sequenze dichiarative prima di cominciare a giocare.

La licita può cominciare in 4 modi: ciascuno dei 4 giocatori infatti può infatti essere il primo a dichiarare.
Dopo che è stata fatta l'ultima dichiarazione, ognuna delle seguenti 7 sequenze dichiarative può terminare la licita.
Sia p = passo, c = contro, s = surcontro

$p-p-p$	$c-s-p-p-p$	$p-p-c-s-p-p-p$
$c-p-p-p$	$c-p-p-s-p-p-p$	$p-p-c-p-p-s-p-p-p$
	$p-p-c-p-p-p$	

Tra ciascuna coppia di dichiarazioni successive, diverse sequenze di chiamate trovano spazio. Dopo che un giocatore ha dichiarato, il suo avversario di sinistra, se decide di non dichiarare può dire contro o passare. Ciascuna di queste poi presenta determinate possibilità per il giocatore successivo. Si trova che, tra due dichiarazioni successive, ci sono 21 possibili sequenze dichiarative:

nessun intervento	$p-p-c-p$	$p-p-c-s-p-p$
p	$p-p-c-p-p$	$c-p-p-s$
$p-p$	$c-s$	$c-p-p-s-p$
c	$c-s-p$	$c-p-p-s-p-p$
$c-p$	$c-s-p-p$	$p-p-c-p-p-s$
$c-p-p$	$p-p-c-s$	$p-p-c-p-p-s-p$
$p-p-c$	$p-p-c-s-p$	$p-p-c-p-p-s-p-p$

Poi ci sono $(k-1)$ coppie di dichiarazioni consecutive in una licita che consistono di k dichiarazioni, ci sono

$$4 \cdot 7 \cdot \binom{35}{k} \cdot 21^{(k-1)}$$

di queste dichiarazioni. Al fine di determinare il numero totale N delle possibili dichiarazioni senza chiamate sbagliate, noi lo sommiamo per tutto il possibile range di k, poi aggiungiamo 1 per calcolare anche l'azione nulla.
Così abbiamo

$$N = 1 + 28\sum_{k=1}^{35}\binom{35}{k}\cdot 21^{(k-1)} .$$

Aggiustando leggermente le cose, troviamo

$$N = 1 + \frac{28}{21}\left[\sum_{k=0}^{35}\binom{35}{k}21^{k} - 1\right].$$

Dalla sommatoria abbiamo immediatamente

$$N = 1 + \frac{4}{3}\left(22^{35} - 1\right)$$

Facendo i calcoli

$$\mathrm{N} = 128.745.650.347.030.683.120.231.926.111.609.371.363.122.697.557$$
$$;\ 1.3\times 10^{47}.$$

In questo modo, *sebbene il numero delle possibili smazzate sia enorme, quello delle possibili licite lo supera notevolmente*, il rapporto è di circa 2.4×10^{18} a 1.

3.2 Il conteggio e la distribuzione dei punti nel gioco del bridge

In una smazzata, nel gioco del bridge, tutte le 52 carte vengono distribuite in 4 mani di 13 carte. Il valore delle figure in ciascuna mano offre una ricca risorsa di esempi di combinatoria elementare.
Considereremo il valori delle carte nel modo seguente:

Asso=4
Re=3
Dama=2
Fante=1
dal 2 fino al 10 = 0.

Nel bridge il conteggio dei punti è importantissimo nel gioco, indica il valore della mano e la possibilità di realizzare un determinato contratto, ha conseguenze immediate sulla licità.
Il valore totale di una smazzata è naturalmente $4(4+3+2+1)=40$. Consideriamo tutte le smazzate come ugualmente probabili, ciascuna quindi con probabilità

$$\frac{(13!)^4}{52!}=1{,}864\times 10^{-29}.$$

Così una determinata mano di 13 carte ha la probabilità

$$h=\frac{\dfrac{39!}{(13!)^3}}{\dfrac{52!}{(13!)^4}}=\binom{52}{13}^{-1}=1{,}575\times 10^{-12}.$$

Così tutte le mani sono egualmente probabili, ciascuna con probabilità h. Useremo la variabile X per rappresentare il valore della mano di un giocatore, Y per quella del suo partner, e U, V per i loro avversari.

E' ovvio che il possibile valore di queste variabili casuali è il numero intero $0,1,......,37$; per esempio $X = 0$ significa che quella data mano non contiene alcuna figura, mentre $X = 37$ rappresenta la mano più forte, che ha 4 assi, 4 re, 4 donne ed 1 fante.
Poiché le mani possono essere permutate senza effetti sulla probabilità, è chiaro che la distribuzione della probabilità per X,Y,U,V è identica.
Generalizzando, le variabili casuali X,Y,U,V sono simmetricamente dipendenti o scambiabili nel senso che

$$P = \left\{X = x, Y = y, U = u, V = v\right\} = P\left\{X = x', Y = y', U = u', V = v'\right\}$$

Per ogni permutazione (x', y', u', v') di (x, y, u, v). Ma non sono certamente indipendenti. Per esempio se un giocatore ha nella propria mano un bel po' di figure diminuisce la probabilità per gli altri giocatori di averne altrettante, infatti
(3.2.1)

$$X + Y + U + V = 40$$

Problema 1
Possiamo determinare la probabilità della distribuzione $f(x) = P\left\{X = x\right\}$?

Alcuni valori si ottengono facilmente, ad esempio

$$f(0) = \binom{36}{13} h = 3,639 \times 10^{-3}$$

$$f(1) = 4\binom{36}{12} h = 7,884 \times 10^{-3}$$

$$f(2) = \left[4\binom{36}{12} + \binom{4}{2}\binom{36}{11}\right] h = 0,01356$$

(perché 2 punti possono essere composti da una dama o da 2 fanti) e

$$f(37) = 4h = 6{,}229 \cdot 10^{-12}$$

Ma determinare $f(10)$ appare quasi privo di speranza, perché ci sono così tante combinazioni di carte che producono 10 punti.
Più tardi troveremo la funzione che genera X e la useremo per calcolare le probabilità $f(x)$.
Nel frattempo, investigheremo le strade per trovare la probabilità e la variazione di X senza far ricorso direttamente alla loro definizione

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{37} xf(x)$$

$$\sigma^2 = Var(X) = E\left((X-\mu)^2\right) = \sum_{x=0}^{37} x^2 f(x) - \mu^2$$

Similarmente, determineremo la covarianza e la correlazione dei valori di due mani senza l'esplicito riferimento alla connessa distribuzione

$$P\{X = x, Y = y\}.$$

La linearità delle aspettative e la interscambiabilità di X,Y,U,V rende questo possibile.
Per cominciare calcoliamo veramente $E(X)$, in due maniere differenti. La prima, pensa X come la somma dei valori di ciascuna carte nella mano:
(3.2.2)

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{13}$$

Le variabili casuali X_i sono intercambiabili; la loro comune distribuzione è data da $c(x) = P\{X_i = x\}$, con i valori

$$c(4) = c(3) = c(2) = c(1) = \frac{1}{13},$$

$$c(0) = \frac{9}{13}.$$

Questo dà

$$E(X_i) = \sum_{x=0}^{4} xc(x) = \frac{10}{13}$$

Poi dalla (3.2.2),

$$E(X) = 13\frac{10}{13} = 10,$$

uno su quaranta del totale dei valori del tavolo.
Questo risultato moto intuitivo si può anche ottenere considerando l'aspettativa di entrambe le linee di gioco di (3.2.1). Otteniamo dalla linearità,

$$E(X) + E(Y) + E(U) + E(V) = E(40) = 40.$$

Dalla interscambiabilità, le 4 aspettative sulla sinistra sono identiche; segue $E(X) = 10$.

Poi calcoliamo la varianza dal significato dell'equazione

$$Var(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 = E(X^2) - 100$$

Dalla (3.2.2) abbiamo

$$X^2 = \sum_{i=1}^{13} X_i^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j$$

e di conseguenza dalla linearità e dalla interscambiabilità:

$$E(X^2) = 13E(X_1^2) + (13)(12)E(X_1 X_2)$$

Usando la distribuzione $c(x)$ possiamo direttamente calcolare che

$$E\left(X_1^2\right)=\frac{30}{13},$$

ma il temine $E\left(X_1X_2\right)$ richiede l'uso della distribuzione congiunta di X_1e X_2

	$X_1=0$	1	2	3	4
$X_2=0$	$315k$	$36k$	$36k$	$36k$	$36k$
1	$36k$	$3k$	$4k$	$4k$	$4k$
2	$36k$	$4k$	$3k$	$4k$	$4k$
3	$36k$	$4k$	$4k$	$3k$	$4k$
4	$36k$	$4k$	$4k$	$4k$	$3k$

Dove $k=\frac{1}{3\cdot 13\cdot 17}=\frac{1}{663}$.

Quindi

$$E\left(X_1X_2\right)=\frac{360}{663},$$

$$E\left(X^2\right)=\frac{1990}{17}, \text{ e}$$

$$Var\left(X\right)=\frac{290}{17}=17+\frac{1}{17}.$$

Più tardi darò una più semplice derivazione della varianza.
In modo simile ma con più difficoltà arriveremo al calcolo della covarianza dei valori delle due mani; perciò, la determinazione dei loro coefficienti di correlazione potrà sembrare svilupparsi in un aritmetica più disordinata.

Ma, come possiamo ora vedere, trovare la correlazione è più banale, e ci sono conseguenze molto interessanti.

Torniamo ancora una volta sulla (3.2.1); da allora la covarianza di una variabile casuale con una costante è zero, abbiamo $0 = Cov(X,40) = Cov(X, X+Y+U+V) = Var(X) + 3Cov(X,Y)$, dove abbiamo di nuovo usato la linearità e l'intercambiabilità. Dall'ultima equazione troviamo immediatamente che il coefficiente di correlazione $r_{x,y}$ è

$$\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)} = -\frac{1}{3}$$

Questo argomento è già stato affrontato e il suo risultato, fornisce una concreta descrizione dei coefficienti di correlazione interpretati come coseni di angoli.

Consideriamo un tetraedro regolare $ABCD$ con il centro nell'origine O; il problema è di determinare l'angolo al centro, $\theta = \mathrm{R}AOB$. Consideriamo A,B,C,D vettori unità dall'origine. Dal fatto che il centro del tetraedro è nell'origine abbiamo $A+B+C+D=0$. Sostituendo il prodotto di entrambi i lati di questa equazione con il vettore A abbiamo $1+3\cos\theta = 0$, perciò

$$\cos\theta = -\frac{1}{3}.$$

Tornando ad un discorso probabilistico osserviamo diverse generalizzazioni del calcolo della correlazione. Per primo, è chiaro che la correlazione $-1/3$ non dipende né dalla grandezza della smazzata né dal valore assegnato alle carte; dal metodo usato per il calcolo si vede che lo stesso risultato si ottiene con un mazzo di $4k$ carte diviso in 4 mani ognuna di k carte, con nessuna costante assegnata ai punti delle carte a priori. Una ulteriore generalizzazione sostituisce 4 con qualsiasi intero positivo m: per una mazzo di mk carte diviso in m mani di k carte ciascuna, la correlazione tra i punti totali di una mano è uguale a $-1/(m-1)$.

Come caso particolare prendiamo $m=52$ e $k=1$. Troveremo che la correlazione tra i punti delle figure di qualsiasi due carte distinte è

$$r_{x_1x_2} = -\frac{1}{51},$$

che è naturalmente possibile anche ottenere dalla distribuzione probabilistica di X_1 e X_2.

Con questo ultimo risultato possiamo tornare al calcolo della varianza. Ricordando la (3.2.2) abbiamo

(3.2.3)

$$\begin{aligned} Var(X) \quad &= \sum_{i=1}^{13} Var(X_i) + \sum_{i \neq j}\sum Cov(X_i, X_j) = \\ &= 13\ Var(X_i) 156\ Cov(X_1, X_2) = \left(13 - \frac{156}{51}\right) Var(X_1). \end{aligned}$$

Poiché $Cov(X_1, X_2) = r_{x_1,x_2}\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)} = r_{x_1,x_2} Var(X_1)$.

Da $E(X_1^2) = \dfrac{30}{13}$ e $E(X_1)^2 = \left(\dfrac{10}{13}\right)^2$ abbiamo che $Var(X_1) = \dfrac{290}{169}$, che

sostituendo nella *(3.2.3)* dà di nuovo $Var(X) = \dfrac{290}{17}$.

Concludiamo questa dissertazione considerando il seguente *assurdo metodo di dare una mano di bridge*.

Prendiamo le carte dal mazzo una alla volta; per ognuna che prendiamo gettiamo una graziosa moneta, e se viene testa prendiamo la carta in mano; altrimenti la scartiamo. Allora il numero delle carte della mano è una variabile casuale N. Quindi N ha una distribuzione binomiale, e la probabilità che sia $N = 13$ è gradevolmente piccola, cioè

$$p = 2^{-52}\binom{52}{13} = 1{,}410 \times 10^{-4}$$

Ma condizionata dall'evento $N = 13$, la distribuzione dei punti nella mano sarà la stessa di X quando la mano viene distribuita nel modo tradizionale.
Sia Z il totale del valore ottenibile col metodo della moneta. Possiamo scrivere Z come $Z = Z_1 + Z_2 + ... + Z_{52}$ dove Z_i è 0 se la carta i viene scartata dalla mano, e se il valore della carta presa è 0. Allo stesso modo scriviamo N come $N = I_1 + I_2 + ... + I_{52}$ dove I_i è 1 oppure 0 a secondo che la carta j viene o no presa; in altre parole, I_i è l'indicatore dell'evento che la carta j venga presa in mano. Le coppie successive $(I_1, Z_1), (I_2, Z_2), ..., (I_{52}, Z_{52})$ sono indipendenti. Di conseguenza , per la doppia variabile si genera una funzione di N e Z tale che

$$\begin{aligned} G(s,t) \qquad &= E\left(s^N t^Z\right) = \prod_{i=1}^{52} E\left(s^{I_i} t^{Z_i}\right) = \\ &= 2^{-52}\left(1 + st^4\right)^4 \left(1 + st^3\right)^4 \left(1 + st^2\right)^4 \left(1 + st\right)^4 \left(1 + s\right)^{36} \end{aligned}$$

poiché una carta con valore k contribuisce di un fattore $\left(1 + st^k\right)/2$, e ci sono quattro casi ciascuno con $k = 4,3,2,1$, e 36 con $k = 0$.
Questo genera una funzione che possiamo anche scrivere nella forma

$$G(s,t) = \sum_{n=0}^{52} s^n E\left(t^Z \mid N = n\right) P\{N = n\}$$

Segue la funzione che genera X, chiamata $E\left(t^X\right) = E\left(t^Z \mid N = 13\right)$, è p^{-1} volte il coefficiente di s^{13} nel polinomio $G(s,t)$. Questo è semplicemente h volte il coefficiente di s^{13} nel polinomio $H(s,t) = \left(1 + st^4\right)^4 \left(1 + st^3\right)^4 \left(1 + st^2\right)^4 \left(1 + st\right)^4 \left(1 + s\right)^{36}$.
Non c'e' una strada pulita per scrivere il risultato finale, ma da

$$E\left(t^X\right) = \sum_{x=0}^{37} f(x) t^x,$$

un piccolo calcolo produce il valore di $f(x)$; sono i coefficienti di $s^{13}t^x$ in $hH(s,t)$, che abbiamo visto nella tabella 1.

La tabella che segue da i valori di $f(x)$ per $0 \le x \le 37$:

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0	$3,639 \cdot 10^{-3}$	13	$6,914 \cdot 10^{-2}$	26	$1,167 \cdot 10^{-4}$
1	$7,884 \cdot 10^{-3}$	14	$5,693 \cdot 10^{-2}$	27	$4,907 \cdot 10^{-5}$
2	$1,356 \cdot 10^{-2}$	15	$4,424 \cdot 10^{-2}$	28	$1,857 \cdot 10^{-5}$
3	$2,462 \cdot 10^{-2}$	16	$3,311 \cdot 10^{-2}$	29	$6,672 \cdot 10^{-6}$
4	$3,845 \cdot 10^{-2}$	17	$2,362 \cdot 10^{-2}$	30	$2,198 \cdot 10^{-6}$
5	$5,186 \cdot 10^{-2}$	18	$1,605 \cdot 10^{-2}$	31	$6,113 \cdot 10^{-7}$
6	$6,554 \cdot 10^{-2}$	19	$1,036 \cdot 10^{-2}$	32	$1,719 \cdot 10^{-7}$
7	$8,028 \cdot 10^{-2}$	20	$6,435 \cdot 10^{-3}$	33	$3,521 \cdot 10^{-8}$
8	$8,892 \cdot 10^{-2}$	21	$3,779 \cdot 10^{-3}$	34	$7,061 \cdot 10^{-9}$
9	$9,356 \cdot 10^{-2}$	22	$2,100 \cdot 10^{-3}$	35	$9,827 \cdot 10^{-10}$
10	$9,405 \cdot 10^{-2}$	23	$1,119 \cdot 10^{-3}$	36	$9,449 \cdot 10^{-11}$
11	$8,945 \cdot 10^{-2}$	24	$5,590 \cdot 10^{-4}$	37	$6,299 \cdot 10^{-12}$
12	$8,027 \cdot 10^{-2}$	25	$2,643 \cdot 10^{-4}$		

3.3 Le matrici Hadamard e i tornei di Bridge

In questo paragrafo descriverò un'applicazione dei residui quadratici al progetto dei tornei di bridge in duplicato.

L'applicazione comporta la costruzione di particolari matrici quadrate, chiamate di *Hadamard*.

Matrici di Hadamard

Una matrice di Hadamard è una matrice S $n \times n$ con tutti gli elementi 1 o -1, e tale che $S \cdot S^t = nI$.

Dove S^t indica la trasposta della matrice S ed I è la matrice identità.

Ecco alcuni esempi:

Esempio 1: $n = 1$

$$(1)$$

Esempio 2: $n = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 3: $n = 4$

Definiamo una matrice S 4×4 con le seguenti regole.

Le righe e colonne di S saranno etichettate 0,1,2,3;

$S(i, j)$ denota l'elemento nella riga i–esima e j–esima colonna.

Allora

$$S(i,j) = \begin{cases} 1 \text{ se } j = 0 & \text{(la colonna di sinistra)} \\ -1 \text{ se } j \neq 0,\ i = 0 & \text{(il resto della prima riga)} \\ L(i-j) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Qui è uguale a 1 (-1 rispettivamente) se $i-j$ è (risp. non è) un quadrato $\bmod 3$.
Se $i-j \neq 0$, $L(i-j)$ è l'usuale simbolo di Legendre

$$\left(\frac{i-j}{3}\right).$$

Quando $i-j=0$, $L(0)=1$ in quanto $0^2=0$.
Quindi la matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & L(1-1) & L(1-2) & L(1-3) \\ 1 & L(2-1) & L(2-2) & L(2-3) \\ 1 & L(3-1) & L(3-2) & L(3-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le righe di S sono mutuamente ortogonali, quindi $S \cdot S^t = 4I$, come si verifica immediatamente. Quindi S è una matrice di Hadamard.
L'idea di usare il simbolo di Legendre esteso $L(i-j)$ per costruire matrici di Hadamard si può estendere dal caso 4×4 al caso $n \times n$ se $4|n$ e $n-1$ è primo.

Esempio 4: $n=8$
Numeriamo righe e colonne di una matrice 8×8 con 0,1,…..,7. Forniamo la matrice

$$S(i,j) = \begin{cases} S(i,0)=1 & \forall \mathrm{i}, \\ S(0,j)=-1 & \forall \mathrm{j} \neq 0; \\ S(i,j)=L(i-j) & \forall \mathrm{i,j} \neq 0. \end{cases}$$

Con $L(i,j)=1$ (risp. -1) se $i-j$ è (risp. non è) un quadrato $\bmod 7$.
Nuovamente, se $i \neq j$,

$$L(i,j) = \left(\frac{i-j}{7}\right),$$

L'usuale simbolo di Legendre, e $L(0)=1$. Quindi $S=\left(S(i,j)\right)$ è la matrice:

$$\begin{pmatrix}
1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

Questa è la matrice di Hadamard: $S \cdot S^t = 8I$ (come si verifica facilmente).

Ecco l'esempio generico di questo tipo. Supponiamo $4|n$ e $n-1=p$ sia un primo. Poiché $p \equiv 3 \pmod 4$, -1 non è un quadrato $\bmod$ p, quindi per $i \neq j$

$$L(i-j) = -L(j-i).$$

Questo si utilizzerà per dimostrare che il nostro esempio generale è di Hadamard.

Notiamo anche che per $a \neq 0$,

$$L(a) = \left(\frac{a}{p}\right),$$

quindi abbiamo $L(a)L(b) = L(ab)$ se a,b $\neq 0$.

Definiamo una matrice $n \times nS = \left(S(i,j)\right)$, con $i = 0,1,2,\ldots,n-1$, $j = 0,1,2,\ldots,n-1$, tramite

$$
\begin{array}{ll}
S(i,0)=1 & \forall i \\
S(0,j)=-1 & \forall i \neq 0 \\
S(i,j)=L(i-j) & \text{per } i,j \neq 0
\end{array}
$$

con $L(0)=0$ e

$$L(i,j)=\left(\frac{i-j}{7}\right), \quad \text{per } i \neq j$$

Teorema:

S è una matrice di *<u>Hadamard.</u>*

***Dimostrazione*:**

Verifichiamo che le righe siano mutuamente ortogonali.

Supponiamo intanto $i,i' \neq 0$. Allora il prodotto scalare delle colonne i e i' è

$$S(i,0)S(i',0)+\sum_{j=1}^{p} S(i,j)S(i',j)=$$

$$=1+L(i-i)L(i'-i)+L(i-i')L(i'-i')+\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i,i'}}^{p}\left(L(i,j)L(i'-j)\right)$$

Poiché $L(0)=1$ e $L(-1)=-1$ (in quanto p ≡ 3 (mod 4)) il secondo e terzo termine si cancellano. Siccome $L(i-j)L(i'-i)=L((i-j)L(i'-j)$ se $j \neq i,i'$, il prodotto scalare di cui sopra diventa

$$1+\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i,i'}}^{p}\left(L\left((i-j)(i'-i+i-j)\right)\right).$$

Sia $a = i' - i$, $c = i - j$. Allora c prende i valori 1, …., p–1 escluso –a. Quindi la somma diventa

$$1 + \sum_{\substack{c=1 \\ c \neq -a}}^{p} L\left(c\left(a + c\right)\right)$$

Poiché $L(c^2) = 1$, questo è uguale a

$$1 + \sum_{\substack{c=1 \\ c \neq -a}}^{p} L\left(1 + \frac{a}{c}\right).$$

Sia $e = 1 + \left(a/c\right)$; quando a varia fra 1 e p–1, escluso –a, e varia tra 2 e p–1; quindi la somma diventa

$$1 + \sum_{e=2}^{p-1} L\left(e\right).$$

Poiché $L(1) = 1$ questo diventa:

$$\sum_{e=1}^{p-1} L\left(e\right) = 0$$

Se i=0, il prodotto scalare delle righe 0 e i' è:

$$S(0,0)\left(S\left(i',0\right)\right) + \sum_{j=1}^{p} S\left(0, j\right) S(i', j).$$

Per $j \neq 0$, $S\left(0, j\right) = -1$, quindi la somma è

$$1 - \sum_{j=1}^{p} S\left(i', j\right) = 1 - \sum_{j=1}^{p} l\left(i' - j\right).$$

Ponendo $i' - j = c$, diventa

$$1 - L(0) - \sum_{c=1}^{p-1} L(c) = 0$$

per le stesse ragioni di prima. Quindi le righe di S sono ortogonali, e S è una matrice di Hadamard.

■

Tornei di bridge in duplicato

Un torneo di bridge in duplicato completo è organizzato come segue.

Ci sono n coppie, con n multiplo di 2. Una smazzata è una distribuzione delle carte da gioco in 4 mani di 13 carte ciascuna. In un torneo completo, ogni coppia gioca una volta contro ognuna delle altre $n-1$ coppie, ciascuna con una smazzata differente, quindi ci sono $n-1$ smazzate. Ogni smazzata è giocata $n/2$ volte.

Il punteggio funziona così: ogni smazzata è giocata da tutte le coppie, metà che giocano Nord–Sud e metà che giocano Est–Ovest. Dopo che tutte le coppie hanno giocato la smazzata, le coppie Est–Ovest sono comparate e ordinate linearmente sulla base del punteggio realizzato. Analogamente le coppie che giocano Nord–Sud.

Supponiamo per esempio $n = 8$, le coppie siano etichettate $0,1,...,7$ ed i risultati di una data smazzata sono stati dati come segue:

N-S	E-O	Risultato
1	2	420 per Nord–Sud

ossia la coppia 1 ha giocato le mani Nord–Sud contro la coppia 2, ed il risultato è stato di 420 punto per la coppia Nord–Sud e di -420 punti per Est–Ovest. Vediamo il risultato complessivo della smazzata:

N-S	E-O	Risultato
1	2	420 per Nord–Sud
3	4	100 per Est–Ovest
5	6	420 per Nord–Sud
7	0	400 per Nord–Sud

Quindi tra i giocatori Nord–Sud le coppie 1 e 5 hanno fatto meglio, fra i giocatori Est–Ovest l'ordine è rovesciato.
Il punteggio finale è 0 al peggiore, 1 al successivo, ecc., con le patte che dividono la posta. Nella smazzata descritta il punteggio risulta il seguente:

Coppia	1	2	3	4	5	6	7	0
Punti	2,5	0,5	0	3	2,5	0,5	1	2

Quindi ci sono 3 tipi di relazioni per una data smazzata. La coppia 1, per esempio, affronta la coppia 2, compete con 3,5,7 e collabora con 4,6,0. Il miglior risultato per 1 in questa smazzata è di far bene contro 2 e che 4,6,0 facciano bene contro 3,5,7.
Per il progetto di un torneo di bridge si vuole che ogni due coppie A e B si affrontino in una smazzata, e nelle altre competano l'una con l'altra tante volte quante collaborano.
Un modo di farlo è di progettare il torneo usando le matrici di Hadamard che abbiamo costruito.

Bridge per 8 coppie

Illustriamo la costruzione generale descrivendo un torneo per 8 coppie.
Sia S la matrice di Hadamard 8×8 che abbiamo costruito nell'esempio 4 di questo paragrafo.
La matrice S ha il seguente significato. I numeri di riga corrispondono alle coppie. Cancellate la colonna 0; le altre colonne sono le smazzate. Il numero $S(i,j)$, detta funzione "linea", specifica se la coppia i gioca la smazzata j come Nord–Sud (se $S(i,j) = 1$) o come Est–Ovest (se $S(i,j) = -1$).

Se possiamo arrangiare il torneo in modo che una coppia i giochi la smazzata j secondo la matrice S, poiché le righe, prima di togliere la colonna 0 sono ortogonali, date due coppie i_1 ed i_2, queste giocheranno contro una volta, tre volte competeranno e tre volte collaboreranno. Infatti poiché

$$S(i_1,0)S(i_2,0)+\sum_{j=1}^{7}S(i_1,j)S(i_2,j)=0,$$

essendo il prodotto scalare delle righe i_1 e i_2 della matrice S, e poiché

$$S(i_1,0)=S(i_2,0)=1,$$

abbiamo

$$\sum_{j=1}^{7}S(i_1,j)S(i_2,j)=-1.$$

Poiché $S(i_1,j)S(i_2,j)=\pm 1\ \ \forall j$, esistono 3 smazzate per cui si ha $S(i_1,j)S(i_2,j)=1$ ossia $S(i_1,j)=S(i_2,j)$, cioè i_1 e i_2 giocano nella stessa direzione, e quindi competono, e 4 smazzate per cui giocano in direzioni opposte e quindi una volta si affrontano e 3 collaborano.
Dobbiamo distribuire le coppie e le smazzate. Dobbiamo quindi specificare in quale turno la coppia i gioca la smazzata j. Un turno è il periodo di tempo in cui una smazzata viene giocata. Un torneo disposto in maniera efficiente avrà esattamente tanti turni quante mani, in tal caso 7 e ogni coppia giocherà in ogni turno.
Ecco un modo di sistemare le coppie e le smazzate. Definiamo la funzione turno $T(i,j)$, per $i=0,1,\ldots,7$, $j=0,1,\ldots,7$ tramite

$$\begin{aligned}&T(0,j)=3j \pmod 7;\\ &T(i,j)=3j+(i-j)L(i,j) \pmod 7 \ \text{ se } i\neq 0.\end{aligned}$$

Qui $L(i-j)$, come prima, è 1 se $i=j$ e $\left(\frac{i-j}{7}\right)$ altrimenti.

Allora $T(i,j)=r$ significa che la coppia i gioca la smazzata j nel turno r.

Della funzione T dobbiamo verificare quanto segue.

1. Data la coppia i e la smazzata j, esiste esattamente un'altra coppia $i' \neq i$ che gioca la smazzata j nello stesso turno di i: simbolicamente, $T(i',j)=T(i,j)$ per esattamente una $i' \neq i$;
2. Ogni coppia gioca una ed una sola smazzata in ogni turno, ossia $T(i,-)$ è una funzione iniettiva di j per i fissato.

Usando la funzione turno si può descrivere il progetto in forma di tabella:

	Turno	1	2	3	4	5	6	7
Coppia								
0		5-	3-	1-	6-	4-	2-	7-
1		7+	4+	1+	3-	5-	6+	2-
2		6-	7+	3-	1+	5+	2+	4-
3		6+	3+	5-	7-	1+	4-	2+
4		2+	5-	3+	7+	4+	6-	1-
5		5+	7-	2-	3+	6-	4+	1+
6		7-	5+	2+	6+	1-	3-	4+
7		2-	4-	5+	1-	6+	3+	7+

Ad esempio, 3+ nella posizione (5,4) significa che la coppia 5 nel turno 4 gioca la smazzata 3 come Nord–Sud.
La tavola si ottiene cercando per ogni coppia i ed ogni turno r l'unica smazzata j tale che $T(i,j)=r$, quindi calcolando $S(i,j)$.
Sistemando la tavola è conveniente avere una funzione $B(i,r)$, una funzione "smazzata", tale che $B(i,r)=j$ se e solo se $T(i,j)=r$.
Ecco la funzione B è definita mod 7:

$$B(0,r)=r/3=5r;$$

$$B(i,r)=\begin{cases}(r-i)/(3-1)=4(r-i) & \text{se } L(3i-r)=1\\ (r+i)/(3+1)=2(r+i) & \text{se } L(3i-r)=-1\end{cases}$$

E' facile verificare che per $i=0$, $B(0,r)$ e $T(0,j)$ sono inverse una dell'altra; per $i\neq 0$ è un po' più difficile.
Per $i\neq 0$, dimostriamo che $T(i,B(i,r))=r$ calcolando

$$T(i,B(i,r))=3B(i,r)+(i-B(i,r))L(i-B(i,r)).$$

Supponiamo $L(3i-r)=1$. Allora

$$i-B(i,r)=i-4(r-i)=5i-4r\equiv 4(3i-r) \qquad \text{(mod 7)}.$$

Siccome 4 è un quadrato mod 7, $L(i.B(i,r))=1$. Quindi

$$\begin{aligned}T(i,B(i,r)) &= T(i,4(r-i))=3(4(r-i)+(i-B(i,r))=\\ &=12(r-i)+4(3i-r)=8r\equiv r \pmod 7\end{aligned}$$

Se invece $L(3i-r)=-1$, allora

$$i-B(i,r)=i=(2(r+i))=-2r-i\equiv 2(3i-r) \pmod 7.$$

Quindi

$$L(i-B(i,r))=L(2(3i-r))=L(2)L(3i-r)=-1$$

(poichè $L(2)=L(4^2)=1$). Quindi

$$T(i,B(i,r))=T(i,2(r+i))=3(2(r+i))-(-2r-i)=8r+7i\equiv r (\mathrm{mod}\, 7)$$

Proposizione 1

Per $i \neq 0$, $\qquad\qquad B(i,T(i,j)) = j$.

Dimostrazione

Dimostrando che $B(i,-)$ è la funzione inversa di $T(i,-)$, abbiamo in particolare verificato la proprietà (2) di cui sopra per $T(i,-)$.

Per ottenere ad esempio $B(5,4)$, procediamo così. Poiché

$$L(11) = L(4) = 1, B(5,4) = 4(4-5) = -4 = 3.$$

Quindi la coppia 5 al quarto turno gioca la smazzata 3.

Bridge per p+1

Consideriamo $p+1$ giocatori, con p un primo ≡ 3(mod 4). La tecnica usata nei tornei a 8 coppie funziona anche come il progetto di tornei con $n = 4m$ coppie, quando $n-1 = p > 3$ è un numero primo: per esempio, $n = 12,20,24,32,44,48,.....$; ecco come fare.

Usiamo l'esempio generico di matrice di Hadamard S costruito nella sezione A. Quindi i suoi elementi sono definiti dalla funzione linea

$$S(0,j) = -1 \qquad \text{per j=1,2,….,p}$$
$$S(i,j) = L(i-J) - 1 \qquad \text{per j=1,2,….,p}$$

Dove, se $i-1 \neq 0$, $L(i,j) = \left(\dfrac{i-j}{p}\right)$ è il simbolo di Legendre.

L'interpretazione di S è che $S(i,j) = s$ significa: la coppia i gioca la smazzata j come Nord–Sud (risp. Est–Ovest) se $s = 1$ (risp. $s = -1$). Come nel caso a 8 coppie, se sistemeremo coppie e smazzate secondo S avremo un torneo ben progettato.

Per completare il progetto definiamo la funzione turno $T(i,j)$ nel modo seguente. Cerchiamo $b \neq p$ tale che $b+1$ e $b-1$ siano entrambi non nulli e residui quadratici mod p. Allora poniamo

$$T(0,j) = bj$$
$$T(i,j) = bj + (i-j)L(i-j) \qquad \text{se } i \neq 0$$

con i calcoli seguiti mod p. Notiamo che con $n = 8$ e $p = 7$, $b = 3$ soddisfa le condizioni poste, e nella verifica $T(i,B(i,r)) = r$ abbiamo utilizzato che 2 e 4 fossero quadrati mod 7.

Proposizione 2:
Per ogni $p \geq 7$, b può essere scelto fra 2,3 e 5.

Dimostrazione
Dobbiamo verificare:

(1) $T(i,j) = T(i',j)$ per esattamente un $i' \neq i$, e per tale i' abbiamo $S(i,j)S(i',j) = -1$;
(2) $R(i,-)$, come funzione di una variabile con i fissato, è iniettiva.

Nelle verifiche l'aritmetica è mod p.

Dimostro la (1):
Se $i = 0$, $T(0,j) = T(i',j)$ se e solo se $bj = bj + (i'-j)L(i'-j)$ per qualche i'. Ora tale equazione non è risolubile se $i' \neq j$, in quanto allora $(i'-j)L(i'-j) \neq 0$. Quindi $T(0,j) = T(i',j)$ esattamente quando $i' = 0$ oppure $i' = j$. In quest'ultimo caso $S(0,j)S(ij,j) = -1$.
Se $i,i' \neq 0$, e $T(i,j) = T(i',j)$, allora $j \neq i,i'$ per la proposizione 1 (in tal caso sarebbero entrambi uguali a $T(0,j)$). Quindi $T(i,j) = T(i',j)$ se e solo se $bj + (i-j)L(i-j) = bj + (i'-j)L(i'-j)$, se e solo se $(i-j)L(i-j) = (i'-j)L(i'-j)$.
Se $i' \neq j$, questo è possibile solo se $L(i-j) = -L(i'-j)$ e $(i-j) = -(i'-j)$, ossia $i' = 2j - i$. Quindi esiste al più un i' tale che $T(i,j) = T(i',j)$.
Viceversa, se $i' = 2j - i$, allora $L(i'-j) = L(2j-i-j) = L(-(i-j)) = L(-1)L(i-j) = -L(i,j)$ poiché

$p \equiv 3 \pmod 4$. Quindi $i' = 2j - i$ è l'unica soluzione di $T(i,j) = T(i',j)$ con $i' \neq j$ e nessuno $= 0$.
Evidentemente $S(i, jS(i', j) = -1$.

■

Dimostro la (2):
Per dimostrare che $T(i,j)$, per i fissato, è iniettiva come funzione di j, definiamo l'applicazione $B(i,r)$ che, per i fissato, è l'inversa di $R(i,j)$:

$$B(0,r) = \frac{r}{b}$$
$$B(i,r) = \begin{cases} (r-i)/(b-1) & \text{se } L(bi-r) = 1 \\ (r+i)/(b+1) & \text{se } L(bi-r) = -1 \end{cases}$$

In cui la definizione ha senso in quanto per ipotesi $b, b-1, b+1$ sono $\neq 0$.

■

Proposizione 2
$B(i,T(i,j)) = j$ e $T(i,B(i,r)) = r \quad \forall i,j,r$

Dimostrazione
Dimostrata la parte (2) della dimostrazione precedente è dimostrato.

■

Usando S e T o B si può organizzare un torneo di bridge per n coppie con $n = 4m$ e $n-1$ primo (purché abbiate n mazzi di carte).
La descrizione del progetto di tornei di bridge che ho descritto viene da Berlekamp e Hwang (1972). Le matrici di Hadamard hanno applicazioni nel progetto statistico di esperimenti, nei circuiti elettronici e in biologia. Il problema di determinare per quali n esistono matrici di Hadamard $n \times n$ è un'area di ricerca attiva nella matematica combinatoria.

3.4 Influenza della mescolata sulla ripartizione delle carte tra i 4 giocatori.

Una mescolata teoricamente perfetta sarà quello che darà probabilità rigorosamente uguali a tutte le permutazioni possibili delle 52 carte nel gioco, di cui il numero è 52!.
Ma, in realtà, l'unica cosa che interessa ai giocatori, è la ripartizione delle carte tra i 4 giocatori dopo che esse sono state distribuite una a una seguendo le regole abituali.
Questa distribuzione ha lo scopo di dare a uno dei giocatori le carte i cui ranghi sono 1, 5, 9, 13, 17,…, cioè uguali a un multiplo di 4 aumentato di 1 (ranghi della forma 4k + 1), ad un altro giocatore le carte i cui ranghi sono uguali a un multiplo di 4 aumentato di 2 (ranghi 4n + 2), al terzo giocatore le carte di ranghi 4n + 3 e infine all'ultimo giocatore le carte di ranghi 4n.
Quello che importa dunque, dal momento che si cerca di sapere a quale giocatore sarà distribuita una carta, non è il rango della carta ma soltanto il resto della divisione di questo rango per 4. Le carte dei ranghi 13 e 37 saranno date allo stesso giocatore e anche le carte dei ranghi 16 e 40.
Si tratta quindi di vedere come il mescolare le carte modifica i ranghi, dal punto di vista del resto della loro divisione per 4. Studieremo successivamente le operazioni elementari che abbiamo chiamato A e B.
Prendiamo innanzitutto l'operazione A; il gioco è diviso in due mazzi che sono inseriti l'uno nell'altro; supponiamo che, dopo questo inserimento, ciascun mazzetto è diviso nello stesso numero di mazzetti elementari e supponiamo ugualmente, per fissare/chiarire le idee, che il mazzetto superiore non rimanga superiore. Se, per abbreviare la scrittura, noi ci limitiamo al caso in cui il numero dei mazzetti elementari è uguale a 12, la loro disposizione, prima del mescolamento è

$$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12},$$

e diventa, dopo aver mescolato,

$$P_7, P_1, P_8, P_2, P_9, P_3, P_{10}, P_4, P_{11}, P_5, P_{12}, P_6,$$

Indichiamo con a_1 il numero di carte di P_1, con a_2 quello di P_2, ecc.
Si ha

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} = 52$$

Indichiamo con x_7 il rango di una carta del mazzetto P_7 prima del mescolamento e con y_7 questo rango dopo aver mescolato le carte; si avrà

$$y_7 = x_7 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 - a_6$$

Allo stesso modo x_1 e y_1 indicano i ranghi di una carta del mazzetto P_1 prima e dopo il mescolamento, si avrà

$$y_1 = x_1 - a_7$$

Si troverà allo stesso modo facilmente

$$\begin{aligned}
&y_8 = x_8 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 - a_6,\\
&y_2 = x_2 + a_7 + a_8,\\
&y_9 = x_2 - a_3 - a_4 - a_5 - a_6,\\
&y_3 = x_3 + a_7 + a_8 + a_9,\\
&y_{10} = x_{10} - a_4 - a_5 - a_6,\\
&y_4 = x_4 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10},\\
&y_{11} = x_{11} - a_5 - a_6,\\
&y_5 = x_5 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11},\\
&y_{12} = x_{12} - a_6,\\
&y_6 = x_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12},
\end{aligned}$$

Si vede che le y si deducono dalle x, sia dalla somma dei numeri seguenti:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_7, \\
s_2 &= a_7 + a_8, \\
s_3 &= a_7 + a_8 + a_9, \\
s_4 &= a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}, \\
s_5 &= a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}, \\
s_6 &= a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12},
\end{aligned}
$$

sia dalla sottrazione dei numeri seguenti:

$$
\begin{aligned}
s_7 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6, \\
s_8 &= a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6, \\
s_9 &= a_3 + a_4 + a_5 + a_6, \\
s_{10} &= a_4 + a_5 + a_6, \\
s_{11} &= a_5 + a_6, \\
s_{12} &= a_6,
\end{aligned}
$$

I numeri $s_1, s_2, ..., s_{12}$ sono legati dalla sola relazione $s_6 + s_7 = 52$, relazione che corrisponde al fatto che i mazzetti P_6 e P_7 non sono in realtà separati dal mescolamento che abbiamo descritto; essi saranno riuniti nella loro posizione originaria in conseguenza al taglio del mazzo; tutto accade quindi come se ci fossero soltanto 11 mazzetti, dal momento che P_6 e P_7 ne formano uno solo.
Consideriamo 2 carte appartenenti a 2 mazzetti differenti tra questi 11 mazzi; per esempio a P_2 e a P_{11}; siano x_2 e x_{11} i loro ranghi prima del mescolamento; sappiamo che, sapendo che $x_{11} - x_2$ è un multiplo di 4 o un multiplo di 4 + 1, 2, o 3, se la carta P_2 è distribuita al giocatore Sud, la seconda sarà distribuita a Sud, a Ovest, a Nord o a Est.
Che cosa succederà dopo il mescolamento?
Si avrà

$$y_{11} - y_2 = x_{11} - x_2 - s_2 - s_{11}.$$

Supponiamo per chiarirci le idee che $x_{11} - x_2$ sia un multiplo di 4, in modo che, prima del mescolamento, le 2 carte saranno state distribuite allo stesso giocatore, per esempio Sud.

Dopo il mescolamento, se la carta y_2 va a Sud, la carta y_{11} andrà a Sud, Ovest, Nord o Est a seconda che $s_2 + s_{11} = a_5 + a_6 + a_7 + a_8$ sarà un multiplo di 4, o un multiplo di 4 aumentato di 3, di 2 o di 1. Quindi è abbastanza evidente che i mazzetti sono formati a caso, le probabilità di questi quattro sono uguali.

Quindi il fatto che le 2 carte dovessero andare allo stesso giocatore prima del mescolamento non ha alcuna influenza sul fatto che esse andranno dopo il mescolamento, sia allo stesso giocatore, sia a 2 giocatori separati da un intervallo qualsiasi (si dirà che l'intervallo è 1 tra Sud e Ovest, 2 tra Sud e Nord, 3 tra Sud e Est).

Intendiamoci, questo ragionamento non si applica a 2 carte di uno stesso mazzetto, e dobbiamo completare questo primo studio con un esame più approfondito del comportamento delle carte vicine, carte che possono appartenere ad uno stesso mazzetto; è quello che faremo tra poco e vedremo che un mescolamento più prolungato è necessario per disperdere queste carte.

Noi potremmo non di meno tirare delle conclusioni interessanti dai risultati già ottenuti. Prima di esporre queste conclusioni, esaminiamo rapidamente il caso in cui si impiega l'operazione elementare di mescolamento che noi abbiamo chiamato B. Ricordiamo che essa consiste, se noi dividiamo il gioco in 7 mazzetti

$$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7,$$

nel piazzarli nell'ordine

$$P_6, P_4, P_2, P_1, P_3, P_5, P_7$$

Se conserviamo le stesse annotazioni, abbiamo

$$\begin{aligned}
y_6 &= x_6 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5, \\
y_4 &= x_4 + a_6 - a_1 - a_2 - a_3, \\
y_2 &= x_2 + a_4 + a_6 - a_1, \\
y_1 &= x_1 + a_2 + a_4 + a_6, \\
y_3 &= x_3 + a_4 + a_6, \\
y_5 &= x_5 + a_6, \\
y_7 &= x_7,
\end{aligned}$$

e si vede, senza che sia necessario insistere, che si arriva alle stesse conclusioni che per l'operazione A.

3.5 Annotazioni. Combinazioni e Percentuali.

Nei calcoli delle probabilità relative ai giochi delle carte, vediamo figurare costantemente il prodotto di n numeri interi; questo prodotto, che chiamiamo fattoriale di n è generalmente indicato col simbolo n! Abbiamo quindi:

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$
$$8! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 40.320$$

Dal momento che il numero n è molto grande, si ottiene il valore approssimativo di n! dalla formula di Stirling; tutti i calcoli qui di seguito sono stati fatti direttamente, alla maniera del triangolo aritmetico di Pascal e della calcolatrice, senza utilizzare la formula di Stirling, né i logaritmi.
Si osserva che, se m è (minore o)(almeno) uguale a 1, si ha

$$\frac{(m+1)!}{m!} = m + 1$$

E' conveniente estendere questa formula al caso in cui m=0, il che dà

$$\frac{1!}{0!} = 1$$

Siccome 1! è evidentemente uguale a 1, si è quindi condotti ad attribuire il valore 1 al simbolo 0!, che non avrà a prima vista alcun senso. Questa convenzione è pratica, come vedremo in queste formule elementari di combinazioni.
Se si prendono n oggetti in un insieme di m oggetti tutti diversi, il numero totale delle combinazioni possibili, senza omissione né ripetizione, è indicato da C_m^n e dato dalla formula

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

In questa formula, non si tiene conto dell'ordine col quale sono scelti gli n oggetti, cioè si considerano come identiche due combinazioni formate dagli stessi n oggetti, qualunque sia l'ordine nel quale essi sono stati scelti. E' il caso delle carte distribuite a un giocatore; la sola cosa che gli importa, sono le 13 carte che lui riceve e non l'ordine nel quale le riceve.

Si ha evidentemente $C_m^n = C_m^{m-n}$, ciò significa che ci sono tante maniere di scegliere n oggetti quante di sceglierne $m - n$.

3.6 Le mani a priori

Ci sono 39 mani possibili a bridge, dal momento che si classificano le mani in base al numero delle carte di ciascun colore, senza preoccuparsi della natura di queste carte, e senza preoccuparsi neanche della natura del colore che corrisponde a ciascun numero di carte. Per esempio, il tipo 4-3-3-3 significa che ci sono 4 carte di un colore e tre carte di ciascuno degli altri tre colori, ma non si specifica se le carte che sono di numero 4 sono picche, cuori, quadri o fiori.

Per ottenere tutti i tipi di mani, bisogna dunque scomporre il numero 13 in una somma di 4 numeri interi (di cui alcuni possono essere nulli). E' quello che gli aritmetici chiamano un problema di partizione dei numeri; questi problemi sono difficili da trattare teoricamente, ma nel caso di piccoli numeri, la soluzione si ottiene agevolmente con una serie di tentativi metodici.

I diversi tipi di mani sono enumerati nella tabella seguente (tabella3). Si noterà che questi tipi rientrano nelle categorie delle permutazioni che abbiamo numerato con 1, 2 e 3, e di cui il numero di permutazioni è rispettivamente 24, 12 e 4.

Tabella 3 – Le mani a priori

Mani	%	% totale	Mani	%	% totale
4-4-3-2	21,55118				
4-3-3-3	10,53613	35,081			
4-4-4-1	2,99322		8-2-2-1	0,19236	
			8-3-1-1	0,11755	
			8-3-2-0	0,10851	0,467
5-3-3-2	15,51685		8-4-1-0	0,04521	
5-4-3-1	12,93071		8-5-0-0	0,003130	
5-4-2-2	10,57967		9-2-1-1	0,017811	
5-5-2-1	3,17390	44,340	9-3-1-0	0,010047	0,0370
5-4-4-0	1,24334		9-2-2-0	0,008220	
5-5-3-0	0,89520		9-4-0-0	0,0009661	
6-3-2-2	5,64249				
6-4-2-1	4,70207		10-2-1-0	0,00110961	
6-3-3-1	3,44819		10-1-1-1	0,0003958	0,00165
6-4-3-0	1,32623	16,548	10-3-0-0	0,0001546	
6-5-1-1	0,70531				
6-5-2-0	0,65106				
6-6-1-0	0,07234		11-1-1-0	0,00002461	
7-3-2-1	1,88083		11-2-0-0	0,00001150	
7-2-2-2	0,51295				
7-4-1-1	0,39184				
7-4-2-0	0,36170	3,527	12-1-0-0	0,0000003194	
7-3-3-0	0,26525				
7-5-1-0	0,10851		13-0-0-0	0,0000000006299	
7-6-00	0,005565				

Una scomposizione semplice mostra che ci sono 11 mani:

5-4-3-1, 6-4-2-1, 6-4-3-0, 6-5-2-0, 7-3-2-1, 7-4-2-0,
7-5-1-0, 8-3-2-0, 8-4-1-0, 9-3-1-0, 10-2-1-0,

che appartengono alla 1^a categoria (24 permutazioni), 23 che appartengono alla 2^a (12 permutazioni), e infine 5 che appartengono alla 3^a (4 permutazioni).

4-3-3-3; 4-4-4-1; 7-2-2-2; 10-1-1-1; 13-0-0-0.

Se quindi guardiamo come distinte le mani per le quali i numeri sono gli stessi, ma sono affiliate a dei colori diversi (per esempio, una mano che vede 5 picche, 4 cuori, 3 quadri e 1 fiore e una mano con 4 picche, 5 cuori, 3 quadri e 1 fiore), il numero totale delle mani diventa

$$11 \times 24 + 23 \times 12 + 5 \times 4 = 560$$

Preciso che, per le 39 mani, la tabella 3 dà le loro probabilità rispettive calcolate prima della distribuzione delle carte, o comunque immediatamente dopo questa distribuzione, prima che un sol gioco sia stato preso.

4. *Il Bridge uno sport per Matematici*

Il bridge è l'unico gioco di carte classificato come "sport" ed è l'unico in cui le regole sono codificate a livello mondiale. Il bridge è una disciplina associata al CONI con una sua federazione (F.I.G.B.). Come un altro "sport mentale", gli scacchi, non ha però ancora avuto il riconoscimento di disciplina autonoma per partecipare alle Olimpiadi.

Esistono due modi di giocare a Bridge.
Quello a casa in cui le carte vengono ogni volta mescolate e distribuite, in questo caso naturalmente la casualità della distribuzione delle carte ha notevole influenza sull'esito della partita.
Esiste poi il Bridge da Torneo o Rubber Bridge, quello che si pratica nelle gare di questo gioco. Qui le carte non vengono mescolate ma "reimbussolate" in un "board" o contenitore che viene poi passato ad un'altra coppia e così via. Alla fine vince il torneo chi riesce ad avere le "prestazioni migliori" con quel mazzo di carte, chi cioè, della propria linea E-O oppure N-S, ottiene il risultato migliore con la medesima sequenza di smazzate.
Naturalmente è il bridge da torneo quello che descriverò di seguito, quel bridge nel quale "la fortuna" non influenza in alcuna maniera il risultato, ma anzi questo è dovuto esclusivamente dalla propria capacità di analisi della "mano" dal punto di vista matematico, o dall'affiatamento con il partner.

4.1 Come si gioca a Bridge

Il Bridge è un gioco che si svolge fra 2 coppie contrapposte nel quale i 4 giocatori vengono tradizionalmente indicati con i 4 punti cardinali. Le coppie avversarie (dette anche “linee”) sono Nord-Sud e Est-Ovest (in genere abbreviate come NS e EO).
Il gioco si effettua con un mazzo di 52 carte (13 carte per ciascun seme: picche ♠, cuori ♥, quadri ♦, fiori ♣).
Ciascun giocatore riceve 13 carte.
Il gioco si articola in due fasi: la dichiarazione o “licita” ed il “gioco della carta”.
Ci sono due forme di gioco in torneo:
il torneo a coppie dove i risultati sono confrontati tra le coppie che hanno giocato con le stesse carte della propria coppia.
il torneo a squadre (che usa lo stesso meccanismo di gioco del bridge duplicato, sfida organizzata tra 2 squadre di 4 giocatori ciascuna.
Le due squadre giocano in due tavoli distinti posti in due stanze separate chiamate sala aperta (dove sono ammessi spettatori, gli angolisti, o kibitzers, lett. "ficcanasi") e sala chiusa, dove è ammesso l'ingresso dei soli giocatori. Le due squadre si confrontano tra loro: ogni squadra gioca esattamente con le stesse carte dell'altra. Le carte di ogni mano giocata in ogni sala (tipicamente 4 mani o loro multiplo) vengono poste in appositi contenitori (astucci o board). Alla fine del turno di gioco gli arbitri provvedono a scambiare i board giocati tra le due sale, che verranno giocati nuovamente a coppie invertite. Per cui le 2 squadre giocheranno 2 partite con la stessa distribuzione e si confronteranno i risultati ottenuti dalle due squadre che si sono cimentate a turno con le stesse carte.
Nei tornei (ma anche nei duplicati quando i tavoli sono a portata di voce) le dichiarazioni avvengono nel più rigoroso silenzio, grazie all'uso di cartoncini recanti le dichiarazioni, inserite in appositi contenitori (bidding boxes).
Inoltre, nei campionati più importanti, quali le Olimpiadi o i Campionati Europei e Mondiali, viene utilizzato il cosiddetto sipario: si tratta di una tavola generalmente in legno, posta nel verso diagonale del tavolo da gioco (ovvero,

tra i due angoli opposti), alta quanto basta per impedire la vista del proprio compagno, consentendo al giocatore la vista dell'avversario alla sua sinistra, la quale presenta una fenditura nella parte bassa a contatto col tavolo da gioco, tale da permettere a tutti i giocatori l'esibizione dei cartoncini dichiarativi, e la visione delle carte del morto e di quelle giocate, non appena è terminata la fase dichiarativa ed inizia la fase chiamata, appunto, del gioco della carta. Lo scopo del sipario è quello, ovviamente, di non consentire l'emissione d'informazioni vietate tramite mimiche facciali, gestualità delle braccia/mani, ecc.

4.2 La dichiarazione o licita

La dichiarazione è quella fase in cui una delle due coppie, attraverso dichiarazioni convenzionali, "vince il contratto" cioè stabilisce quale sarà il seme della briscola (a bridge si chiama atout) oppure se non verrà usata l'atout e quante prese (su 13) dovrà almeno aggiudicarsi per realizzare il contratto.

Durante la licita i giocatori parlano a turno. Il primo a parlare è il mazziere, nel caso di un torneo viene indicato sul board, quindi si procede in senso orario.
Ogni giocatore può passare o effettuare una chiamata che superi, per numero di prese o per rango del seme, l'ultima effettuata da altri. Il rango dei semi è, in ordine crescente, il seguente: fiori (♣), quadri (♦), cuori (♥) e picche (♠). Ancora superiore è il rango delle chiamate a senza atout.
La coppia con la dichiarazione più alta proverà a vincere almeno quel numero di prese chiamato, con lo specifico seme come atout.
Durante la dichiarazione, il numero dichiarato rappresenta il numero di prese in eccesso di sei in cui la coppia s'impegna per vincere. Per esempio, una dichiarazione di "due cuori" rappresenta un contratto di vincere almeno 8 prese 8 = 6 + 2) con cuori come briscola.
Per la finalità della dichiarazione le possibili atout sono classificate come: senza atout (il più alto), picche, cuori, quadri, fiori (il più basso). Una dichiarazione di un grande numero di prese batte sempre una dichiarazione di un numero più piccolo e se il numero di prese è uguale, il seme più alto batte il più basso. La più bassa dichiarazione consentita è "uno fiori" (per vincere almeno 7 prese con fiori come briscola), e la più alta è "sette senza atout" (per vincere tutte le 13 prese senza atout).
La dichiarazione può durare un giro oppure diversi giri dichiarativi, ovvero uno stesso giocatore può dichiarare più di una volta, anche dopo aver passato al giro precedente. La dichiarazione termina dopo tre passi consecutivi; la coppia a cui appartiene il giocatore che per ultimo ha dichiarato le prese che intende realizzare si aggiudica il contratto, vale a dire impone il seme di atout (o il gioco a senza atout) e ottiene il diritto di provare a realizzare le prese

dichiarate. L'altra coppia (i difensori) cercherà di impedire agli avversari di mantenere il proprio impegno. Il giocatore della linea che si è aggiudicata il contratto che per primo ha nominato il seme di atout è detto dichiarante, il suo compagno non partecipa al successivo gioco della carta ed è quindi detto morto.
È importante sottolineare che il meccanismo del punteggio tende a premiare, anche in maniera rilevante, gli impegni più elevati per cui, nonostante la licitazione possa assomigliare ad un'asta, non sempre la linea ha l'interesse ad aggiudicarsi il contratto al minimo livello.
La coppia che si aggiudica il contratto, uno dei componenti cioè fa una licita seguita da tre passo, si dice che gioca in attacco, l'altra in difesa.

Nel caso in cui un giocatore della coppia che non ha vinto il contratto ritenga improbabile che la coppia avversaria riesca a realizzare le prese dichiarate, può esprimerlo con il contre, l'equivalente di una scommessa sull'impossibilità del mantenimento dell'impegno. Se lo ritiene opportuno il giocatore che tenterà di realizzare le prese dichiarate può dire surcontre, nel caso si senta sicuro di rispettare l'impegno. Il contre e il surcontre non valgono più se viene fatta un'altra offerta.

Durante l'asta è anche possibile "contrare" una dichiarazione dell'altro lato o "surcontrare" il contro dell'avversario.
Il contro è essenzialmente una dichiarazione del tipo "scommetto che non riesci a rispettare il contratto", mentre il surcontro che segue il contro è una scommessa sul fatto che la linea mantenga il contratto.

La maggior parte delle volte le dichiarazioni di contro e surcontro hanno però un significato convenzionale, rappresentano cioè un messaggio al proprio compagno sulla forza o distribuzione della propria mano.
Per forza di una mano si intende il numero di punti onore presenti nelle proprie tredici carte.

Agli onori o carte alte viene attribuito un punteggio, contando ogni asso=4, re=3, regina=2, fante=1, e 0 per le altre carte.
Per distribuzione della mano si intende invece la descrizione del numero dei vari semi in essa.
In particolare si considera una mano bilanciata se ha una distribuzione del tipo 4-3-3-3 o 4-4-3-2 o equipollenti (combinazioni di essi), dove il primo numero della sequenza rappresenta il numero delle carte a picche, il secondo a cuori, il terzo a quadri ed infine il quarto a fiori.
Le altre possibili distribuzioni vengono chiamate sbilanciate, cioè dove il numero delle carte di uno o di più semi non è in equilibrio con i rimanenti.
Le dichiarazioni convenzionali, non naturali, cioè quelle dichiarazioni che non rappresentano in maniera naturale la propria mano (ad esempio una dichiarazione di 3 fiori avendo una sola carta di fiori) , fanno parte di una serie di accordi della coppia che devono essere illustrati prima del gioco agli avversari.
Durante le competizioni vengono di norma utilizzati per la dichiarazione degli speciali cartoncini raccolti in una scatola (bidding box). Invece di pronunciare la propria chiamata, ogni giocatore al proprio turno estrae dalla scatola il cartoncino corrispondente e lo dispone sul tavolo davanti a sé senza nascondere i precedenti. In questo modo si evitano contestazioni sulla sequenza licitativa, si eliminano le informazioni involontariamente trasmesse col tono della voce e soprattutto si evita che le chiamate possano essere udite dai tavoli vicini.
Nei tornei nazionali si usano inoltre dei sipari sia sopra che sotto il tavolo per impedire comunicazioni con il compagno tramite smorfie o colpi con il piede.
Per consentire comunque di comunicare informazioni utili a chiarire le caratteristiche della propria mano e quindi a fornire indicazioni per scegliere il migliore contratto, sono stati ideati dei sistemi di dichiarazione, che permettono di trasmettere al compagno, in maniera lecita, chiarimenti sulle proprie carte.
Per giocare a Bridge è assolutamente necessario conoscere almeno un sistema licitativo, e quindi dedicare un po di tempo allo studio delle regole e delle convenzioni del metodo scelto.

In Italia, dopo molti anni in cui vigevano sistemi differenti, la Federazione ha creato un sistema Standard nazionale, a base naturale, che ormai si insegna in tutte le scuole di Bridge.
La difficoltà maggiore nel gioco consiste nell'arrivare al miglior contratto. Nessun giocatore, per quanto abile, potrà riuscire a mantenere un contratto troppo elevato e viceversa, se non sono state dichiarate, le prese fatte in più sono di scarsa utilità. È importante quindi che i compagni riescano a ottenere il maggior numero di informazioni circa le carte che possiedono. Per rendere più proficuo lo scambio di informazioni, sono utilizzati numerosi sistemi licitativi all'interno dei quali le varie dichiarazioni assumono significati codificati talvolta secondo logiche naturali, talvolta del tutto convenzionali. Ogni sistema è basato innanzi tutto sulla valutazione della mano che avviene tenendo conto della distribuzione, vale a dire di come le carte sono ripartite nei vari semi, e delle carte alte (onori) possedute.
Per quest'ultimo aspetto viene spesso usata la scala di Milton-Work che assegna 4 punti agli Assi, 3 ai Re, 2 alle Donne e 1 ai Fanti in modo che un mazzo contenga quindi 40 punti.

4.3 Il gioco della carta

Come sopra descritto, nella fase di gioco solamente uno dei due componenti della coppia che ha vinto la dichiarazione proverà a rispettare il contratto assunto nella fase di dichiarazione: il dichiarante, cioè il giocatore che ha annunciato per primo il seme che ha prevalso come atout o che per primo ha deciso di giocare senza atout.

Il suo compagno, una volta che l'avversario alla sua destra avrà giocato la prima carta (carta di attacco), calerà le proprie carte sul tavolo rendendole visibili a tutti e diventerà il morto, potendo per quella mano solo osservare l'andamento del gioco, senza parteciparvi attivamente.

Durante la smazzata, ogni giocatore muove una carta alla volta e la presa si completa quando ognuno dei quattro giocatori ha fornito la propria.

Regola fondamentale del gioco è che si debba rispondere nel seme di uscita del primo giocatore: se il primo giocatore gioca fiori, tutti devono giocare una carta di fiori. Nel caso che un giocatore non sia in grado di rispondere nel seme, può (ma non necessariamente deve) giocare una carta di atout. La presa spetta al giocatore che ha fornito la carta più alta nel seme di uscita, a meno che non sia stato giocato un atout, nel qual caso predomina la carta più alta di quel seme. Esaurita la presa (che è patrimonio della coppia), uscirà per la presa successiva il giocatore che ha vinto la presa precedente. Una coppia avrà diritto ad un punteggio positivo soltanto se realizzerà un numero di prese uguale o superiore alla dichiarazione effettuata. In caso contrario il punteggio positivo andrà alla coppia avversaria.

La mano, come già detto, è suddivisa in 13 prese ed ogni presa è formata da una carta giocata da ciascun giocatore (il giocante decide anche la carta del morto).

In ogni presa il primo a giocare è chi si è aggiudicato la presa precedente.

E' sempre obbligatorio "rispondere" al seme, cioè bisogna giocare lo stesso seme della prima carta giocata nella presa corrente; non avendo carte di quel seme, si può giocare qualsiasi altra carta, comprese le atout.

Se non sono state giocate carte di atout, si aggiudica la presa chi ha giocato la carta più alta nel seme; se ci sono atout, chi ha giocato l'atout più alta.

Ciò che valgono sono le prese cumulative della coppia: non vi è differenza se vengano realizzate da uno o dall'altro partner.
Terminate le 13 prese, si aggiudicano i punti alla coppia che ha prevalso: agli attaccanti, se il contratto è stato realizzato, ai difensori se sono riusciti ad impedirlo.

E' importante fare presente che il Bridge è un gioco nel quale non è permesso ai giocatori comunicare informazioni parlando o utilizzando altre forme e anzi tali azioni sono considerate gravi violazioni dell'etica di questo gioco e vengono sempre sanzionate, talune volte anche con lunghe squalifiche.
Nelle gare le dichiarazioni vengono effettuate mediante appositi cartellini, in modo da evitare che si possano dare informazioni anche con il semplice tono della voce.
Inoltre, nei campionati internazionali e nei tornei più prestigiosi, si usano addirittura dei sipari che tagliano diagonalmente il tavolo e che hanno una piccola apertura per vedere le carte.
I separè non permettono di vedere il partner e quindi impediscono segnali corporei o di altro genere.

Bibliografia

- Borel E., Cheron A., *Theorie Mathematique du Bridge*, Paris, Gauthier-Villars, 1955
- Childs L., *A Concrete Introduction to Higher Algebra*, Springer, 1979
- Delucchi E., Gaiffi G., Pernazza L., *Giochi e Percorsi Matematici*, Springer, 2012
- Hanner O., *Bridge Movements: a Fair Approach*, Jannersten Förlag AB Bridgeakademin, 1994
- Langlois W.E., *The Numbers of Possible Auctions at Bridge*, The American Mathematical Mountly, Vol. 69, No. 7 (Aug.-Sep., 1962), pp. 634-636
- Rouse Ball W.W., Coxeter H. S. M., *Mathematical Recreations and Essay,* London, Macmillan*, 1892*
- Sanders S.T.Jr., *Finesse at Bridge,* Mathematics News Letter, Vol. 6, No. 4 (Jan., 1932), pp. 17-19
- Waugh D.F., Waugh F.V., *On Probabilities in Bridge,* Journal of the American Statistical Association, Vol. 48, No. 261 (Mar., 1953), pp. 79-87
- Wendel J.G., *High Card Point Counts,* Mathematical Magazine, Vol. 51, No. 2 (Mar. 1978), pp. 116-120
- Winkler P., *Bridge at the Enigma Club,* Master Point Press, 2010

Sitografia

- Bapat R.B., *Exploring Mathematical Ideas with a Deck of Cards,* http://www.ias.ac.in/resonance/Volumes/12/03/0077-0090.pdf
- Conger M., Viswanath D., *Shuffling Cards for Blackjack, Bridge and Other Card Games, http://arxiv.org/pdf/math/0606031.pdf*
- Garetto M*., Statistica,* http://univaq.it/~serva/teaching/quaderno_statistica.pdf
- Rosenthal J.S., *On Duality of Probabilities For Card Dealing,* American Mathematical Society, Volume 123, Number 2, February 1995, http://www.ams.org/journals/proc/1995-123-02/S0002-9939-1995-1211588-3/S0002-9939-1995-1211588-3.pdf
- Zweifel P.F., *Some remarks about Bridge probabilities,* Mathematics Magazine June, 1986, http://www.maa.org/sites/default/files/269020536570.pdf.bannered.pdf