Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

L'irrazionalità.
Un caso di studio sull'uso della storia nella trasmissione del sapere matematico.

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Giorgio Bolondi

Presentata da:
Federica Recchiuti

Sessione I
Anno Accademico 2014/'15

Benedici il Signore, anima mia,
quanto è in me benedica il suo santo nome.
Benedici il Signore, anima mia,
non dimenticare tanti suoi benefici. [...]
Benedici il Signore, anima mia,
Signore, mio Dio, quanto sei grande!
Rivestito di maestà e di splendore,
avvolto di luce come di un manto.
Salmo 103(102), 104(103)

Indice

Introduzione

Ho amato la matematica fin da quando, a cinque anni, in procinto di iniziare quelle che allora venivano definite scuole elementari, una zia mi ha raccontato questa storia: *C'era una volta un gruppo di persone che desideravano visitare un posto bellissimo. Il giorno della partenza gli organizzatori erano preoccupati perchè, a tale gita, volevano partecipare infinite persone. Finalmente arrivò l'autobus che li avrebbe condotti nella località tanto desiderata, questo autobus aveva infiniti posti. La preoccupazione degli organizzatori non svanì completamente vedendo che ciascun partecipante aveva trovato posto sull'autobus in quanto rimaneva ancora il problema dell'albergo. Con loro somma sorpresa, arrivati a destinazione, trovarono un hotel con infinite camere e ciascun viaggiatore potè avere un letto su cui riposarsi dopo il lungo viaggio. In piena notte però arrivò un viaggiatore ritardatario, chiedendo di poter alloggiare anche lui lì con i suoi amici. Gli organizzatori a questo punto furono presi dal panico "Abbiamo sistemato infinite persone, non possiamo sistemarne un'altra" disse l'uno all'altro. Ma non fu così, nell'albergo con infinite stanze, ne ebbe una anche il viaggiatore ritardario.*

Da una parte questa storia mi consolò perchè pensai *"domani è il mio primo giorno di scuola. Se anche arrivassi in ritardo, nella scuola di sicuro ci saranno infiniti banchi e dunque ne avrò uno tutto mio!"* Dall'altra non riuscivo a capire se fidarmi o meno di quella storia: non c'era nessuna fata turchina, nessun genio della lampada a poter fare questa magia. La mattina seguente a scuola, aprendo l'astuccio dei regoli, inebriata dal profumo inconfondibile del sussidiario e dalla visione di quei mattoncini colorati, scoprii che

mettendo uno sull'altro due mattoncini bianchi (che rappresentavano l'unità) raggiungevano un'altezza pari a quella del mattoncino rosso (che, naturalmente rappresentava il 2)...e lì, sul mio banco, in quel momento, scoprii chi aveva fatto la magia la sera precedente nell'albergo...era stata la Matematica!
Raccontare una storia dunque può avere un gran valore culturale, seppure travestita da storia per bambini. Se questi possono essere gli effetti di Una storia, si pensi allora all'immensa portata culturale che può rivestire La storia, in particolare La storia della Matematica.
L'impiego della storia della matematica è auspicato oggi più di ieri dalle attuali Linee generali e competenze, relative alla matematica, delle ultime Indicazioni nazionali per i Licei ed è supportato da numerosi quadri teorici, che traghettano la storia della matematica dalle rive dell'essere *artefatto* all'essere *conoscenza*. In particolare nel secondo paragrafo del primo capitolo di questa trattazione vengono presentati gli ostacoli epistemologici di Guy Brousseau, l'approccio socio-culturale di Louis Radford, l'approccio "voci ed echi" di Paolo Boero ed infine lo spaesamento di Barbin.
In seguito, nel terzo paragrafo vengono analizzati quei contributi che mirano a rendere più operativo l'entusiasmo suscitato dall'uso della storia nell'insegnamento della matematica.
Quindi il primo capitolo ha l'obiettivo di porre le basi teoriche all'uso della stroria nella trasmissione del sapere matematico, pertanto ho deciso di mettere a punto una sperimentazione da condurre in una classe seconda di un Liceo Scientifico avente come oggetto proprio una fonte storica. Nella scelta di tale fonte è necessario tenere in considerazione che essa deve essere, dal punto di vista del contenuto, coerente con il percorso disciplinare che gli studenti coinvolti nella sperimentazione stanno compiendo e, per quanto riguarda la forma, adeguata alle competenze linguistiche che possiedono. Nella scelta del testo storico da utilizzare, oltre all'argomento, bisogna considerare fattori sia di carattere didattico che storico. Ad esempio la lunghezza del brano e la sua difficoltà linguistica non devono essere eccessive, per evitare immediati scoraggiamenti e conseguenti rinunce. D'altro canto il testo deve

essere pregnante dal punto di vista dell'evoluzione della matematica, in modo da giustificare l'uso della storia.
Per tali ragioni come argomento è stato scelto l'irrazionalità, introdotto in tale trattazione nel secondo capitolo: nel primo paragrafo viene trattato il problema della nascita dell'incommensurabilità, mentre nel secondo vengono analizzate le numerose dimostrazioni che sono state proposte nel corso dei secoli in merito all'incommensurabilità di lato e diagonale di un quadrato partendo da Aristotele ed Euclide, passando per Alessandro d'Aforisia e Platone, attraversando le dimostrazioni geometriche e quelle che sfruttano il metodo dell'anthyphairesis, per giungere ad una dimostrazione moderna che non presta il fianco alle critiche aristoteliche proposta da Salomon Ofman.
Nel terzo capitolo viene presentata la sperimentazione che io ho condotto, anteponendo a ciò i criteri adottati per la scelta del brano, ossia le lezione di Geometria tratta dal *Menone* di Platone ed un breve tributo alla figura di Platone e alla sua opera da cui è tratto il brano scelto come fonte storica. Tale capitolo è articolato in tre paragrafi: nel terzo vengono descritte dettagliatamente tutte le attività condotte in classe e vengono presentati i lavori e le risposte degli studenti.
Infine, nel quarto capitolo, vengono esaminati dettagliatamente i risultati dei ragazzi alla luce dei quadri teorici precedentemente introdotti e vengono messe in luce le peculiarità dell'attività dell'argomentare e le doti e mancanze relative a ciò degli studenti.

Capitolo 1

Didattica e Storia della Matematica

La proposta di introdurre la storia nell'insegnamento della matematica è ricca di suggestione ed è in armonia con il rinnovato interesse per la storia in generale e con la rinascente ispirazione ad un insegnamento della matematica più umanistico. Il primo cenno all'introduzione della storia nel corso di matematica della scuola secondaria superiore è presente già nelle succinte premesse ai vecchi programmi di matematica del liceo scientifico [9] che suggerivano:

"E conviene, per tenere sempre vivo l'interesse ai successivi sviluppi, dare largo posto all'intuizione, al senso comune, all'origine psicologica e storica delle teorie [...] *Le suddette esigenze non possono essere conciliate certamente dalle definizioni statiche, ma dall'uso spontaneo di quelle dinamiche, più aderenti all'intuizione. Metodo comunque induttivo dinamico, in istretto contatto col processo storico, senza esclusivismo di vedute, perchè solo così il patrimonio spirituale acquistato nella scuola media inferiore può essere veramente ripreso, evoluto e rafforzato nella scuola d'ordine superiore."*

Suggerimenti più consistenti in tal senso si evincono nei programmi di matematica per il biennio della scuola secondaria superiore proposti dalla commissione Brocca, nei quali è detto:

" L'insegnamento di matematica e di informatica promuove [...] *l'interesse per il rilievo storico di alcuni importanti eventi nello sviluppo del pensiero matematico.* [...] *Alla fine del biennio lo studente deve dimostrare di essere in grado di:* [...] *inquadrare storicamente qualche processo significativo dell'evoluzione del pensiero matematico ".*

L'ampio consenso su questo tema si riflette nell'esplicito richiamo all'inquadramento storico presente nelle Linee generali e competenze, relative alla matematica, delle ultime Indicazioni nazionali per i Licei [1]:

"Al termine del percorso [...] *lo studente* [...] *saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale. Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica."*

Questo slancio è percepito anche all'estero, ad esempio in [7] a proposito del curriculum scientifico della scuola inglese è detto:

" Gli alunni devono sviluppare una loro conoscenza e comprensione dei modi in cui le idee scientifiche cambiano nel tempo e come la natura di queste idee e gli usi a cui esse sono state sottoposte sono influenzate dal contesto sociale, morale, spirituale e culturale in cui esse sono sviluppate".

In Francia una parte rilevante dell'attività di aggiornamento degli IREM si svolge nel settore storico; inoltre nei programmi del liceo classico è esplicitamente detto:

"E' opportuno mettere in risalto il contenuto culturale della matematica; in particolare l'introduzione di una prospettiva storica può permettere agli allievi di cogliere meglio il senso e la portata delle nozioni e dei problemi studiati, e di comprendere meglio le molle dello sviluppo scientifico."

1.1 Perchè farlo: tre quadri teorici recenti

La storia della matematica rappresenta un artefatto che diventa conoscenza se usata opportunamente. Perchè accada questo occorre che l'utilizzo della storia faccia riferimento a teorie dell'educazione matematica. Per tale ragione verranno presentati i diversi e più recenti quadri teorici che sostengono l'impiego degli spunti storici nella progettazione didattica.
A partire dagli anni Settanta, Guy Brousseau introdusse il concetto di ostacolo. Secondo Brousseau, l'apprendimento, in quanto adattamento all'ambiente e ingresso nel mondo della comunicazione sociale, comporta di necessità rotture cognitive, assimilazione ed accomodamento di immagini e di concetti, formazione di modelli, modifica di modelli intuitivi, accettazione di concezioni, modifica di linguaggi, modifica di sistemi cognitivi, inserimento di fatti nuovi in script abituali, adattamento di frame consueti, etc.
Nello stesso processo di insegnamento-apprendimento, da una parte è bene

che si formino delle idee transitorie, ma dall'altro bisogna fare i conti con il fatto che tali idee tenteranno di resistere poi, al momento di superarle. E vi sono allora dei fenomeni, chiamati *ostacoli*.
Un ostacolo è un'idea che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare dei problemi precedenti, ma che si rivela fallimentare quando si tenta di applicarla ad un problema nuovo. Visto il successo ottenuto si tende a conservare l'idea già acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di salvarla. Ciò tuttavia finisce con l'essere una barriera per successivi apprendimenti.
Questa idea di Brousseau ha visto la luce nel 1976 ed egli fornisce già in questo primo lavoro alcune caratteristiche degli ostacoli. Innanzi tutto un ostacolo non deve essere considerato come una mancanza di conoscenza, ma è una conoscenza, che l'allievo utilizza per dare risposte adatte in un contesto già noto. Tuttavia, se l'allievo tenta di usare questa conoscenza fuori da tale contesto, già incontrato, fallisce, generando così risposte scorrette; ed è allora che ci si accorge di necessitare di punti di vista diversi. Quindi l'ostacolo produce contraddizioni, eppure lo studente resiste a tali contraddizioni; sembra allora avere bisogno di una conoscenza più generale, maggiore, più approfondita, che generalizzi una situazione nota e risolta e che comprenda la nuova nella quale ha fallito. Un'ultima caratteristica dell'ostacolo è quella di riapparire sporadicamente, anche una volta che esso sia stato superato.
Si possono distinguere tre tipi di ostacoli: di natura *ontogenetica*, di natura *didattica* ed infine di natura *epistemologica*. Questi ultimi assumono particolare interesse per la riflessione sul ruolo della storia nella didattica della matematica. Infatti ogni argomento a carattere matematico ha un proprio statuto epistemologico che dipende dalla storia della sua evoluzione all'interno della matematica, della sua accettazione critica nell'ambito della matematica, delle riserve che gli sono proprie, ed infine dal linguaggio in cui è espresso o che richiedere per potersi esprimere. Ad esempio, quando nella storia dell'evoluzione di un concetto si individua una non continuità, una frattura o cambi radicali di concezione, allora si suppone che quel concetto

abbia al suo interno *ostacoli di carattere epistemologico* sia ad essere concepito, sia ad essere accettato dalla comunità dei matematici, sia ad essere appreso.
Di conseguenza, un'azione didattica meditata deve servirsi dell'indagine storica per mettere in luce tali nodi, analizzarli e interpretarli.
Questo approccio è chiaramente caratterizzato da alcune importanti assunzioni epistemologiche: la prima riguarda la ricomparsa nei processi attuali (nelle situazioni di apprendimento) di uno stesso ostacolo epistemologico manifestatosi in un certo periodo storico; la seconda riguarda più specificatamente la trasmissione del sapere e prevede che il discente apprenda affrontando un problema significativo, senza influenze sociali o più in generale, senza interagire con l'ambiente. [2]
A quella di Brousseau si affiancano altre impostazioni teoretiche, basate su differenti assunzioni epistemologiche: secondo l'approccio *socio-culturale* di Louis Radford, la conoscenza si collega alle attività nelle quali i soggetti si impegnano e ciò deve essere considerato in relazione con le istituzioni culturali dell'ambiente sociale. (Per ulteriori approfondimenti si vedano [3],[4] e [5]).
Per Radford la conoscenza non si produce nel rapporto esclusivo tra individuo e problema da risolvere, ma è socialmente ottenuta: all'impostazione unidirezionale della costruzione della conoscenza scandita da successivi superamenti di ostacoli si sostituisce un progresso dialogico; l'allievo apprende la matematica in collaborazione con altri allievi e con l'insegnante, in un ampio contesto culturale. Siccome la costruzione della conoscenza ha qui le sue radici profonde, è importante ricostruire gli scenari socio-culturali del passato per comprendere quali fattori hanno favorito e diffuso tecniche e concetti matematici. La storia offre l'opportunità di conoscere questi dati e, benchè sia impossibile interpretare gli eventi passati azzerando l'influenza delle nostre attuali conoscenze, è possibile prendere consapevolezza delle trasformazioni della conoscenza matematica dovute ai cambiamenti del quadro sociale e adeguare la pratica didattica alla situazione odierna.

Molto interessante dal punto di vista didattico è l'approccio *"voci ed echi"* di Paolo Boero. Esso si basa sulla considerazione di alcune espressioni verbali e non verbali, dette *"voci"*, riconducibili a momenti storici; tali espressioni, su esplicita proposta del docente, possono essere considerate ed interpretate dai discenti, producendo pertanto un *"eco"*.
Più specificatamente, tale approccio si basa sull'attività di imitazione attiva nella zona di sviluppo prossimale degli allievi e sulla constatazione che i contenuti anti-intuitivi e i caratteri salienti del sapere teorico sono portati da *"voci"*, in particolare da *"voci storiche"*: espressioni dense e incisive attraverso le quali tali contenuti e caratteri salienti si sono manifestati, hanno modificato e modificano il nostro modo spontaneo di pensare e di esprimerci e possono essere identificati. Il *"Gioco voci-echi"* consiste nell'appropriazione delle *"voci storiche"* da parte degli allievi (sotto la guida dell'insegnante) e nella successiva produzione individuale di *"echi"*. La gestione da parte dell'insegnante delle produzioni individuali (*"echi"*) degli allievi (attraverso il confronto e la discussione collettiva da lui orchestrata) consente di sviluppare in classe la consapevolezza dei contenuti anti-intuitivi e dei caratteri salienti del sapere teorico portati dalle *"voci storiche"*.
La posizione epistemologica che sta alla base di tale impostazione prevede che la conoscenza teorica sia organizzata secondo criteri metodologici di coerenza e di sistematicità e fornisca specifici modi di vedere gli oggetti di una teoria. Tale posizione prevede inoltre che le definzioni e le dimostrazioni siano basate su strategie di pensiero collegate allo specifico linguaggio impiegato ed alle tradizioni culturali.

La concezione della matematica come oggetto di indagine storica è molto importante: l'ineliminabile presenza della "lente" determinata dalle concezioni moderne rende opportuna l'adozione consapevole di un punto di vista. La presa d'atto della presenza di una indagine storica avente per suo oggetto la matematica evidenzia la possibilità di una corretta collocazione del punto di vista moderno. Utilizzando le parole di P. Pizzamiglio [6]:

"L'introduzione della dimensione storica non serve direttamente e precisamente a spiegare la matematica, ma [...] *consente di conoscere la matematica ad un livello riflesso, studiandola cioè come strumento d'indagine appunto storica."*

Infine, si è ritenuto opportuno, in tale contesto, porre l'attenzione su un'idea interessante in merito all'efficacia dell'uso della storia, sia nell'ottica degli studenti sia per gli insegnanti, ossia quella dello *spaesamento* (*depaysement*) discussa da Barbin [11].
Per lui introdurre la storia della matematica vuol dire sostituire ciò che è usuale con qualcosa di nuovo e mettere in discussione le proprie percezioni. Ciò che è familiare diventa estraneo: questo è lo spaesamento provocato dalla storia. Attraverso lo spaesamento e la successiva fase di riposizionamento ed orientamento, la storia fornisce l'opportunità di ripensare alle proprie idee sulla natura degli oggetti matematici e sui processi per la loro costruzione.
Questa idea di spaesamento assume un ruolo particolare anche per la professionalità degli insegnanti. L'esperto che ha già acquisito i concetti che insegnerà, talvolta non ha la flessibilità di tornare indietro dal prodotto finale al processo costruttivo, ossia di passare dall'ambito formale e strutturato a quello informale delle idee grezze. Le conoscenze dell'insegnante si intrecciano alle sue convinzioni e agiscono da *filtro* tra l'insegnamento con significato e quello privo di signifivato. Seguire un ragionamento matematico che sta dietro ad un passaggio storico può diventare un mezzo per analizzare le difficoltà degli studenti in una nuova prospettiva. Inoltre può mettere in luce i meccanismi che portano alla creazione matematica, in quanto produce un contesto per osservare la transizione dal non-conoscere al conoscere, che costituisce l'intuizione pedagogica esssenziale. Dunque il contesto storico permette di validare determinate ipotesi educazionali ed elaborarne di nuove.

1.2 Come usare la storia nell'insegnamento della matematica

A questo punto è chiaro come e quanto sia le attuali Indicazioni Nazionali sia i quadri teorici precedentemente analizzati, auspichino ad un uso consapevole della storia della matematica nella matematica. L'obiettivo di tale paragrafo è dunque quello di mettere in luce quali possano essere alcuni contributi che mirino a rendere più operativo l'entusiasmo suscitato dall'uso della storia nell'insegnamento della matematica. A tale proposito, come punto di partenza della trattazione viene considerato l'elenco schematico di alcuni modi di utilizzare la storia della matematica proposto ad un convegno del 1990 sulla storia nell'educazione matematica:

- Dirigere un'attività drammatica che rifletta l'influsso matematico;

- Raccontare aneddoti storici per motivare gli studenti;

- Proporre progetti sulle attività matematiche locali del passato;

- Progettare gli approcci pedagogici in accordo con gli sviluppi storici;

- Usare esempi critici presi dal passato per illustrare tecniche o metodi;

- Incoraggiare gli studenti ad apprezzare i problemi dei matematici del passato.

In tale elenco è possibile distinguere due tipi di interventi, così come proposto da Fulvia Furinghetti in [8]: interventi di tipo *promozionale* (nei confronti della matematica) tesi ad introdurre un interesse per la disciplina ed interventi *di riflessione*, più interni allo stile di insegnamento della disciplina.

Con uso della storia a livello promozionale ci si riferisce alle diverse attività che si possono svolgere, aventi lo scopo principale di avvicinare alla matematica gli studenti mediante espedienti di varia natura, che suscitino il loro interesse; ossia, in senso lato, ci si riferisce a quelle attività che agiscono sull'immagine della matematica. In tale categoria rientrano ampiamente i primi due punti dell'elenco precedente.
Per quanto riguarda il dirigere un'attività drammatica che rifletta l'influsso matematico è un tipo di intervento riferito ad una realtà lontana da quella italiana quale è quella anglosassone, in cui l'attività scolastica ha tradizioni e ritmi diversi.
La seconda attività proposta nell'elenco riguarda il raccontare aneddoti storici. Quest'ultima motiva gli studenti, mediante lettura di episodi curiosi e cenni biografici, non sempre storicamente provati, riportati nei libri di testo o narrati dagli insegnanti, ma desta molto sospetto negli storici della matematica. Tuttavia tale attività, pur peccando talvolta di ingenuità, ha anche degli aspetti positivi: risponde infatti, se opportunamente condotta, all'obiettivo di dare in qualche modo un senso comune ed una concretezza a tale materia sentita spesso dagli studenti come estranea alla realtà ed anche una dimensione più "umana" alla matematica (e conseguentemente all'insegnante di questa disciplina).
E' vero dunque che in tali interventi di tipo promozionale vi è una certa efficacia dal punto di vista del coinvolgimento degli studenti e anche da quello della *"rassicurazione che l'insegnante trae svolgendo il duro lavoro di piazzare un prodotto con un'immagine così poco allettante per i destinatari"*[8] tuttavia è un'attività che richiede particolare competenza e cautela da parte di chi la gestisce.
Come detto in precedenza della storia se ne può fare un duplice uso; dopo aver analizzato l'aspetto promozionale si passa ora ad analizzare in quali modi la storia può servire come elemento di riflessione. A tale categoria appartengono le ultime quattro attività dell'elenco proposto precedentemente.
L'indicazione di proporre progetti sulle attività matematiche del passato, in-

tesa in senso letterale, potrebbe suggerire all'insegnante di illustrare la figura di un matematico nato o operante nella zona in cui si trova la classe o progettare un itinerario didattico centrato sulle sue opere. Tuttavia è possibile estendere tale indicazione stimolando l'attenzione degli studenti alla matematica propria di una certa civiltà ed in senso ancora più lato alla interazione tra contesto socio-culturale e l'educazione matematica; attività, quest'ultima, riconducibile all'ambito dell'etnomatematica.
Un'altra attività che prevede l'uso della storia come intervento di riflessione è il progettare gli approcci pedagogici in accordo con gli sviluppi storici. Tale approccio è senza dubbio utile per la discussione degli errori del passato, infatti per numerosi argomenti è possibile osservare una relazione tra gli ostacoli epistemologici (già trattati in 1.2) incontrati dagli studenti e quelli incontrati dai matematici della storia.
Il terzo tipo di intervento appartenente a questa categoria è: l'usare esempi critici presi dal passato per illustrare tecniche o metodi. Questo uso della storia nell'insegnamento è quello più costruttivo, e si collega all'idea espressa in [10]: *" La distinzione tra matematica e storia della matematica è falsa in principio: ci sono solo problemi matematci ed essi hanno una storia".* La storia offre alla matematica un ambito significativo per condurre un'attività di problem solving, così si aggiunge un'ulteriore motivazione a supporto dell'integrazione della storia della matematica nella matematica.
Alla base delle attività pertinenti a tale tipo di intervento, come pure del lavoro storico in generale, esiste sempre il *problema delle fonti*: sarebbe auspicabile l'uso dei testi originali, nei limiti consentiti dalla realtà della classe o, almeno, una certa cautela nella scelta dei testi di riferimento. L'uso dei testi originali ha dei vantaggi anche a livello educazionale, poichè offre un buon contesto per avviare gli studenti a *leggere matematica*.
Infine si procede ad investigare in merito all'uso della storia per incoraggiare gli studenti ad apprezzare i problemi dei matematici del passato. Tale tipologia di utilizzo rappresenta senza dubbio un punto di arrivo nel cammino dell'apprendimento, in quanto arrivare a partecipare ai problemi matematici

del passato significa avere ben assimilato le problematiche che sottendono la matematica del presente. Per tali motivi l'obiettivo di tale attività trova collocazione non solo in ambito storico ma anche epistemologico e storico.

Terminata tale riflessione in merito ad alcune possibili modalità di uso della storia in classe, è utile mettere in luce due macro categorie entro le quali poter collocare tutte le attività che prevedano il servirsi della storia nella trasmissione del sapere matematico, sulla base del problema epistemologico che emerge quando occorre stabilire se l'accostamento alla storia debba anticipare o seguire la presentazione di un concetto nella sistemazione moderna. Si potrebbe condurre, ad esempio, una diretta illustrazione cronologica dei riferimenti storici collegati ad un determinato concetto, realizzando una vera e propria "storia dell'insegnamento". A tal fine gli elementi storici servirebbero per introdurre l'argomento al quale essi stessi si riferiscono e dunque andrebbero inseriti all'inizio della trattazione. Tale modo di operare, si indica solitamente con la locuzione *uso a priori della storia nella trasmissione del sapere matematico* e pone l'accento su di una supposta valenza introduttiva degli elementi storici. Tale uso della storia pone tuttavia un interrogativo non banale: l'introduzione di un concetto deve sempre seguire l'evoluzione storica? La pratica tradizionale risponde non affermativamente a tale quesito, come testimoniato dall'adozione di percorsi storici ordinati non cronologicamente.
Della storia, nella trasmissione del sapere matematico, se ne può fare anche un *uso a posteriori*. In tal senso infatti, si può prevedere che il ruolo degli elementi storici si colleghi anche all'approfondimento ed al chiarimento degli armgomenti trattati.

Concludendo questo paragrafo di riflessioni sui possibili usi della storia è bene evidenziare che, qualsiasi siano le modalità dell'impiego della storia, è indispensabile mantenere un rigoroso atteggiamento su alcune questioni metodologiche: ogni richiamo storico deve essere adeguatamente contestualizzato e presentato con riferimento al periodo in esame; usi acritici o strumentali della storia della matematica sarebbero sostanzialmente scorretti.

Capitolo 2

Incommensurabilità

Nel capitolo precedente sono state presentate le principali teorie a sostegno degli apporti che la storia della matematica può offrire alla didattica e sono state analizzate alcune modalità di uso della storia nella trasmissione del sapere matematico.
Per capire più a fondo la funzione che queste ultime possono rivestire, è interessante verificare quali sono le reazioni degli studenti di fronte ad un testo matematico del passato e notare quali meccanismi vengono messi in atto per comprenderne il contenuto. Questo lavoro mirerà ad investigare le risposte e gli atteggiamenti degli studenti di fronte ad un testo matematico del passato inerente al tema dell'incommensurabilità.

2.1 Le origini del problema dell'incommensurabilità

La data e le modalità della scoperta dell'incommensurabilità non sono conosciute esattamente anche se molto si è scritto a sostegno di questa o di quella ipotesi. Tre autori, circa settecento anni dopo la scoperta, ci danno alcune informazioni sulle origini della teoria dell'incommensurabilità, ma è difficile stabilire quanta validità storica abbiano queste informazioni.
Secondo Pappo, la teoria dell'incommensurabilità ha avuto origine nella scuo-

la Pitagorica. Egli riporta la tradizione secondo la quale il membro di questa setta che per primo divulgò il segreto dell'incommensurabilità fu fatto morire in mare. Raccontando questa storia, Pappo gioca sull'impiego di due termini per indicare *"incommensurabile"*: $\acute{\alpha}\lambda o\gamma o\varsigma$ (álogos) o $\acute{\alpha}\rho\rho\eta\tau o\varsigma$(árretos), che possono significare entrambi "irrazionale" e "ineffabile", indicando quindi sia il significato tecnico che religioso della scoperta.
Un secondo testimone, Proclo (Costantinopoli 410 ca. - Atene 485), nel *Commento al 1. libro degli Elementi di Euclide* ascrive a Pitagora stesso la teoria degli irrazionali dicendo: *"egli infatti iniziò la trattazione delle grandezze irrazionali e trovò la costruzione delle figure cosmiche"*[65-66, ed. it. pp. 71-72].
La prima parte dell'affermazione di Proclo $\tau\grave{\eta}\nu$ $\tau\hat{\omega}\nu$ $\alpha\lambda\acute{o}\gamma\omega\nu$ $\pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\epsilon\acute{\iota}\alpha\nu$ (*"la teoria degli irrazionali"*) è stata centro di vari dibattiti, si è infatti molto discusso sul significato del termine $\alpha\lambda\acute{o}\gamma\omega\nu$. Fabricius sembra essere stato il primo a registrare la variante $\alpha\nu\alpha\lambda\acute{o}\gamma\omega\nu$ che è stata notata anche da E. F. August. $\alpha\nu\alpha\lambda\acute{o}\gamma\omega\nu$ non è la forma corretta della parola, ma il suo significato è "proporzione" o "proporzionale", e la vera lettura può essere sia $\tau\hat{\omega}\nu$ $\alpha\nu\alpha\lambda o\gamma\iota\hat{\omega}\nu$ ("proporzioni"), o più probabilmente, $\tau\hat{\omega}\nu$ $\alpha\nu\grave{\alpha}$ $\lambda\acute{o}\gamma o\nu$("proporzionali"); Diels legge $\tau\hat{\omega}\nu$ $\alpha\nu\grave{\alpha}$ $\lambda\acute{o}\gamma o\nu$, e sembrerebbe, come ha sottolineato T. Heath, che vi sia un accordo generale sul fatto che $\alpha\lambda\acute{o}\gamma\omega\nu$ è errato, e la teoria che Proclo intende attribuire a Pitagora sia la teoria delle *proporzioni* o *proporzionali*, non degli irrazionali. Heath ha sottolineato anche come l'attribuzione della teoria degli irrazionali a Pitagora si verifica in una proposizione che ha l'aspetto di una glossa. Il fatto che questo commento sia stato omesso in un'altra versione del sommario di Eudemo rafforza la tesi che si tratti di una aggiunta tardiva. Ad ogni modo, il testo di Proclo è evidentemente una fonte discutibile sulla quale basare qualsiasi conclusione circa le origini della teoria dell'incommensurabilità.
Il terzo testimone, Giamblico (Calcide 245 ca. - 325 ca. d.C.), dà una serie di notizie sui Pitagorici e le origini di questa teoria, permutando e confondendo in diversi modi varie differenti leggende quali la scoperta dell'irrazionale, la

costruzione del dodecaedro, la carriera di Ippaso, e la morte in mare di qualche empio Pitagorico:
Di Ippaso si racconta che fosse dei Pitagorici, ma che, per aver divulgato per primo la costruzione della sfera di dodici pentagoni, perisse in mare come empio[...]
(246) Colui che per primo rivelò la natura delle grandezze commensurabili e incommensurabili agli indegni di partecipare a tali cognizioni, si dice che incorresse in tanto odio che non solo fu escluso da ogni compagnia e convivenza, ma anche gli fu costruita una tomba, come se colui, ch'era una volta un compagno, avesse davvero cessato di vivere.
(247) Altri dicono che anche la divinità si adirasse con i divulgatori delle dottrine di Pitagora. Perì infatti come empio in mare colui che rivelò come s'iscrive nella sfera l'icosagono, cioè il dodecaedro, una delle cinque figure dette solide. Alcuni però narrano che questo accadesse a colui che aveva propagato la dottrina degli irrazionali e degli incommensurabili.
La tradizione che Giamblico conserva fornisce, tuttavia, poco da utilizzare per la datazione delle origini della teoria, dato che praticamente nient'altro è noto di Ippaso. Tuttavia, un certo numero di storici ha scelto di leggere in questi resoconti un intrinseco collegamento tra la scoperta dell'incommensurabilità e quella della costruzione del dodecaedro, attraverso lo studio della suddivisione dei segmenti in estrema e media ragione, conosciuto nella letteratura moderna come "sezione aurea". Tuttavia la maggior parte degli storici concorda nel sostenere che il contesto della prima scoperta dell'incommensurabilità può essere visto solo come lo studio del lato e della diagonale del quadrato.
In contrasto con Giamblico, che associa l'irrazionale al dodecaedro e ai segmenti divisi in estrema e media ragione, gli scrittori del quarto secolo Platone e Aristotele parlano sempre dell'incommensurabilità nel contesto del lato e della diagonale del quadrato. L'uso che Aristotele fa di esempi di incommensurabilità mostra che esso era un risultato familiare al suo pubblico. Esso era già, presumibilmente, entrato nella tradizione dei manuali di geometria del

suo tempo. Ma egli non accredita mai la scoperta ai Pitagorici, nonostante le sue frequenti discussioni sulle loro dottrine. Al contrario, parlando dei principi cosmologici, Aristotele riferisce così il punto di vista pitagorico:
"I Pitagorici per primi si applicarono alle matematiche e le fecero progredire e, nutriti dalle medesime, credettero che i principi di queste fossero principi di tutti gli esseri.
E, poiché nelle matematiche i numeri sono per loro natura i principi primi, e appunto nei numeri essi ritenevano di vedere, più che nel fuoco e nella terra e nell'acqua, molte somiglianze con le cose che sono e che si generano [...] *pensarono che gli elementi dei numeri fossero elementi di tutte le cose.*
Questo dogma, che può essere riassunto "tutte le cose sono numeri", è incompatibile con l'accettazione dell'irrazionale. Infatti in questo caso si dovrebbe abbandonare l'idea pitagorica del *punto-monade* occupante una porzione di spazio in favore del punto concepito come punto *ideale*, che occupa una posizione ma che è privo di estensione.
Da Platone, invece, si può ricavare l'impressione che la diffusione della conoscenza delle grandezze incommensurabili fosse ai suoi tempi abbastanza recente. Ma, dal momento che egli sembra accreditare a Teodoro dei progressi nella teoria dell'incommensurabilità, e poiché Platone, molto probabilmente, è venuto a conoscenza di questo lavoro durante il suo viaggio a Cirene un po' di tempo dopo il 390 a.C., possiamo tranquillamente affermare che l'incommensurabilità è stata scoperta prima. Tuttavia è difficile determinare quanto prima.
Aristotele, in aggiunta, per mostrare che l'esempio caratteristico dell'incommensurabilità era quello del lato e della diagonale del quadrato, fornisce un indizio sulla natura della dimostrazione dalla quale questa incommensurabilità è stata stabilita. Nella sua esposizione del metodo di ragionamento per assurdo egli rimanda alla dimostrazione in questo modo:

Se il lato e la diagonale sono supposti commensurabili, si può dedurre che i numeri dispari sono uguali ai numeri pari.

Questo assurdo dà l'incommensurabilità delle grandezze considerate.
Come si vede, questa indicazione è molto scarna ma riporta i tratti fondamentali della dimostrazione e, come Oskar Becker ha osservato, ogni variante possibile della dimostrazione effettiva deve seguire questa descrizione.
In uno scolio all'ultima proposizione del libro X degli Elementi di Euclide è sviluppata una dimostrazione molto nota (numerata a volte X.117) che segue la traccia aristotelica. Considerando inoltre che l'inclusione di questa dimostrazione negli Elementi può essere giustificata solo per interesse storico della dimostrazione, poiché la sua collocazione non ha alcuna incidenza sullo sviluppo delle proposizioni del libro X, è stato generalmente sostenuto che si dovrebbe accettare questa versione come la forma originale da cui l'incommensurabilità è stata scoperta è dimostrata.

2.2 Le dimostrazioni

Duqnue, è ormai universalmente accettato che furono i Greci a scoprire l'esistenza dell'$\acute{\alpha}\lambda o\gamma o\nu$ cioè dell'*irrazionalità*.
Anzi tutto occorre fare una dovuta precisazione. Per la matematica moderna, i numeri reali irrazionali, la cui definizione esatta fu data da Richard Dedekind nella seconda metà del XIX secolo, permettono un ampliamento sia quantitativo che qualitativo del campo numerico.
I Greci, contrariamente, non introdussero mai l'irrazionalità per i numeri; infatti nessun autore antico usa l'espressione $\acute{\alpha}\lambda o\gamma o\nu$ $\alpha\rho\iota\vartheta\mu\acute{o}\varsigma$, ossia *numero irrazionale*.
Il numero irrazionale non esiste nella Grecia antica: i termini stessi $\acute{\alpha}\rho\rho\eta\tau o\varsigma$, ossia indicibile, e $\acute{\alpha}\lambda o\gamma o\varsigma$, che non si può esprimere come $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$, cioè come rapporto di due numeri interi, stanno ad indicare questo fatto. L'irrazionalità per i Greci significò *incommensurabilità*, cioè impossibilità di trovare un sottomultiplo comune a due grandezze: l'aritmetica dunque rimase limitata

ai numeri interi e razionali positivi, mentre la geometria potè accogliere la nuova realtà ed avere nuovi ed importantissimi sviluppi.

Per rendere conto della prima dimostrazione dell'esistenza di una grandezza irrazionale, gli storici della scienza e i commentatori di Aristotele fanno riferimento ad un testo sull'incommensurabilità della diagonale che si trova nei Primi Analitici (41a 24- 50a 37). In questo testo Aristotele fa un cenno a quella che doveva essere la dimostrazione dell'incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato. Si tratta di una dimostrazione per assurdo: se lato e diagonale fossero commensurabili, un numero dovrebbe essere insieme pari e dispari.
In uno scolio all'ultima proposizione del libro X degli Elementi di Euclide (nell'edizione di Heiberg si trova in appendice) è sviluppata una dimostrazione che segue la traccia aristotelica, tuttavia editori più moderni (a partire dal 1829 con E. F. August) l'hanno omessa dal testo euclideo non trovando alcun legame tra la dimostrazione e il resto del libro X.
Verranno dunque presentate anzitutto le dimostrazioni usuali proposte, che fanno tutte riferimento al modello che si trova alla fine del libro X degli Elementi.

2.2.1 Dimostrazione tratta dagli *Elementi* di Heiberg

Testo originale della dimostrazione dell'incommensurabilità del lato e della diagonale di un quadrato tratta dall'edizione di J.L.Heiberg dell'opera Euclidis Elementa, libro X, appendice 27, pp.408-411.

Dimostrazione. Propositum sit nobis demonstrare, in figuris quadratis diametrum latusque longitudine incommensurabilia esse.

sit $AB\Gamma\Delta$ quadratum, diametrus autem eius $A\Gamma$ dico, ΓA, AB longitudine incommensurabiles esse.
nam si fieri potest, commensuraliles sint dico, fore, ut idem numerus et par et impar sit manifestum igitur, esse $A\Gamma^2 = 2AB^2$ et quoniam ΓA, AB commensurabiles sunt, $\Gamma A : AB$ rationem habet, quam numerus ad numerum. sit

$$\Gamma A : AB = EZ : H,$$

et EZ, H minimi sint eorum, qui eandem rationem habent.
itaque EZ unitas non est. si enim est unitas, et $EZ : H = A\Gamma : AB$ et $A\Gamma > AB$, erit etiam $EZ > H$, unitas numero quod absurdum est.
quare EZ unitas non est. ergo numerus est.
et quoniam est $\Gamma A : AB = EZ : H$, erit etiam $\Gamma A^2 : AB^2 = EZ^2 : H^2$. uerum $A\Gamma^2 = 2AB^2$. itaque etiam $EZ^2 = 2H^2$.
quare EZ^2 par est.
itaque etiam ipse EZ par est. nam si impar esset, etiam quadratum eius impar esset, quoniam, si numeri impares componuntur, et multitudo eorum impar est, totus impar est ergo EZ par est. in Θ in duas partes aequales secetur. et quoniam EZ, H minimi sunt eorum, qui eanden rationem habent,inter se primi sunt.
et EZ par est.
itaque H impar est.
nam si par esset, binas numeros EZ, H metiretur (omnis enim numerus par partem dimidiam habet) qui inter se primi sunt; quod fieri non potest.
ergo H par non est. impar igitur est.
et quoniam $EZ = 2E\Theta$, erit $EZ^2 = 4E\Theta^2$. est autem $EZ^2 = 2H^2$. itaque $H^2 = 2E\Theta^2$.
quare H^2 par est. itaque propter ea, quae diximus H par est.
at idem impar est; quod fieri non potest.
ergo ΓA, AB longitudine commensurabiles non sunt; quod erat demonstrandum. □

La traduzione italiana del brano appena proposto è la seguente:

Dimostrazione. Sia $AB\Gamma\Delta$ un quadrato, dove $A\Gamma$ è la diagonale.
Dimostriamo che $A\Gamma$ è incommensurabile in lunghezza con AB.
Per assurdo supponiamo che $A\Gamma$ sia commensurabile con AB. Seguirà allora che lo stesso numero è pari e dispari.
Ora è chiaro che il quadrato costruito su $A\Gamma$ è il doppio del quadrato costruito su AB, cioè $A\Gamma^2 = 2AB^2$.
Poiché $A\Gamma$ è commensurabile con AB, allora $A\Gamma$ avrà con AB lo stesso rapporto che un numero ha con un altro. Sia

$$\Gamma A : AB = EZ : H,$$

e siano questi numeri EZ e H i più piccoli numeri che abbiano questo rapporto.
Allora EZ non è l'unità.
Se EZ fosse l'unità e $EZ : H = A\Gamma : AB$, essendo $A\Gamma$ più grande di AB, allora anche EZ sarebbe più grande di H, il che è impossibile. Così, EZ non è l'unità; quindi, è un numero.
Poiché $\Gamma A : AB = EZ : H$, così anche $\Gamma A^2 : AB^2 = EZ^2 : H^2$.
Ora $\Gamma A^2 = 2AB^2$, così anche $EZ^2 = 2H^2$. Quindi EZ^2 è un numero pari, così anche EZ è pari. Se fosse dispari, il suo quadrato sarebbe anche dispari; poiché, se sommiamo un numero dispari di termini dispari, il tutto è dispari. Così EZ è pari.
Sia diviso in due parti uguali in Θ. Poiché EZ e H sono i più piccoli numeri che hanno questo dato rapporto, essi sono relativamente primi. Poiché EZ è pari, allora H è dispari. Se fosse pari, sarebbero entrambi multipli di 2 e quindi non sarebbero relativamente primi, contro l'ipotesi.
Quindi H è dispari.
Poiché $EZ = 2E\Theta$, $EZ^2 = 4E\Theta^2$. Ma $EZ^2 = 2H^2$, così $H^2 = 2E\Theta^2$.
Così H^2 è pari, e quindi H è pari. Ma H è anche dispari, il che è impossibile.

Quindi, ΓA è incommensurabile in lunghezza con AB. Che è ciò che dovevamo dimostrare. □

2.2.2 Dimostrazione di Alessandro d'Aforisia

Nella ricerca delle origini dell'irrazionalità, è importante utilizzare testi che non derivino unicamente dagli Elementi. Pertanto si propone, a questo punto, una dimostrazione tratta dai *Commentari agli Analitici Primi* di Alessandro d'Afrodisia (III secolo d.C.):

Dimostrazione. Dimostriamo che la diagonale di un quadrato è incommensurabile in lunghezza con il lato.
Ipotesi: Per assurdo supponiamo che la diagonale e il lato del quadrato siano commensurabili.
Se la diagonale e il lato del quadrato fossero commensurabili, essi avrebbero il rapporto di numeri interi, diciamo $a : b$. Sia questo rapporto ridotto ai minimi termini; cioè a e b sono relativamente primi.
Ora, anche a^2 e b^2 saranno relativamente primi.
Dalla costruzione fatta si vede che a^2 e b^2 si trovano nella medesima proporzione che il quadrato sulla diagonale al quadrato sul lato; cioè, $a^2 : b^2 = 2 : 1$.
Quindi a^2 è pari, perché è il doppio del numero b^2.
Se un numero quadrato è divisibile per 2, anche la sua metà lo è. Quindi anche b^2 (metà di a^2) sarà pari.
b^2 è anche dispari, poiché a^2 e b^2 sono relativamente primi e a^2 è pari; due numeri pari non possono essere relativamente primi, dal momento che il numero 2 li dividerebbe entrambi.
Dall'ipotesi di relativa primalità, uno o entrambi i numeri a^2 e b^2 devono essere dispari; ma dall'ipotesi di commensurabilità segue che a^2 e b^2 sono entrambi pari.
Questa contraddizione dimostra l'incommensurabilità del lato e della diago-

nale, e rende chiara l'osservazione di Aristotele che l'ipotesi della commensurabilità rende i numeri dispari uguali ai numeri pari.

□

2.2.3 Dimostrazione alternativa degli *Elementi*

Un'altra dimostrazione dell'incommensurabilità del lato e della diagonale è stata conservata in alcuni manoscritti dell'opera di Euclide. Questa dimostrazione può essere parafrasata nel modo seguente:

Dimostrazione. Sia A la diagonale di un quadrato e B il lato.
Ipotesi: A e B sono commensurabili.
Esisteranno allora un intero c e un intero d tali che $A : B = c : d$. Possiamo prendere c e d ridotti ai minimi termini; cioè c e d relativamente primi. Dall'ipotesi $A : B = c : d$ segue $A^2 : B^2 = c^2 : d^2$; ma $A^2 = 2B^2$; così $c^2 = 2d^2$. Quindi, se d fosse l'unità, allora c^2 sarebbe uguale a 2. Ma questo è impossibile, poiché 2 non è quadrato di un intero, quindi d non è l'unità.
Dal momento che $A^2 : B^2 = c^2 : d^2$, e B^2 è misura di A^2, così anche d^2 è misura di c^2. Ma quando un numero quadrato misura un altro numero quadrato, il corrispondente lato del primo misura il lato del secondo.
(25Euclide, VIII.14: Se un numero quadrato ne divide un altro, anche il lato del primo dividerà il lato del secondo. Letteralmente: Se un numero quadrato misura un quadrato, anche il lato misurerà il lato).
Cioè, d è misura sia di c che di d e abbiamo dimostrato che d non è l'unità. Quindi c e d non sono relativamente primi.
Siamo giunti ad un assurdo. Quindi, A e B sono incommensurabili.

□

2.2.4 La scoperta dell'incommensurabile nel *Menone* di Platone

In un celebre passo (819d) delle tarde *Leggi*, Platone rimprovera ai Greci l'ignoranza di una scoperta così grande quale quella dell'incommensurabilità.

Appare quindi naturale che nei suoi Dialoghi sempre ricchi di allusioni e riferimenti allo sviluppo della matematica, debba aver trovato l'occasione di trattare della scoperta in questione. Poiché nel Teeteto (147d-148b) vengono presentati proprio i risultati raggiunti in materia di incommensurabilità da Teodoro di Cirene e da Teeteto l'Ateniese, certamente Platone avrà fatto un cenno all'importantissima scoperta dell'incommensurabilità anche se non si trattava di un fatto recentissimo. In verità nel brano del Teeteto la teoria degli irrazionali si trova già ad uno stadio evoluto: Teeteto fornisce un criterio generale per riconoscere l'irrazionalità, mentre Teodoro viene rievocato per aver indicato un metodo per riconoscere l'irrazionalità delle radici quadrate dei numeri da 3 fino a 17 3.
È stato osservato da tutti che è significativo il fatto che Platone faccia cominciare le ricerche di Teodoro da $\sqrt{3}$ e non da $\sqrt{2}$. Secondo l'interpretazione più comune, questo è una testimonianza del fatto che dell'irrazionalità di 2, cioè dell'incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato, si siano occupati altri matematici antecedenti a Teodoro.
E' importante sottolineare che, da un lato l'omissione della radice quadrata di 2 da parte di Platone costituisce una delle prove più significative dell'antichità della scoperta, ma dall'altro come questo spinge a pensare che Platone, nell'omettere la radice quadrata di 2, faccia un implicito riferimento ad un argomento da lui già trattato in un dialogo precedente.
Viene subito in mente la lezione di geometria del *Menone* (82b-85b) in cui Socrate guida lo schiavo di Menone nella costruzione del quadrato doppio di un quadrato dato.
Socrate disegna un quadrato avente il lato di due piedi e fa constatare al ragazzo che esso ha l'area di 4 piedi quadrati: gli propone quindi di raddopiare il quadrato stesso, cioè di costruire un secondo quadrato che abbia area doppia del primo, ossia l'area di 8 piedi quadrati. In due tentativi falliti di specificare il lato del quadrato doppio, lo schiavo sceglie prima il doppio del lato del quadrato dato, ossia 4. Quindi l'area del nuovo quadrato sarebbe 4 volte 4, ossia 16 mentre l'area del quadrato doppio di quello iniziale deve

essere 8. Il lato 4 è dunque troppo grande. Il ragazzo propone allora di provare con il lato 3. Ma si osserva che 3 volte 3 fa 9, e che quindi neppure questa volta si è ottenuta l'area 8. Fino a qui quindi si è cercata una soluzione aritmetica del problema: vale a dire se sia possibile trovare un numero quadrato che sia doppio di un altro numero quadrato. Conducendo lo schiavo alla scoperta, Socrate accenna al fatto che la diagonale e il lato del quadrato sono incommensurabili quando consiglia al ragazzo di provare a indicare il lato del quadrato doppio se non può fare il calcolo numerico:

SOCRATE: Da una di tre piedi non si può dunque costruire un quadrato la cui superficie sia di otto piedi

SCHIAVO: No, certo!

SOCRATE: Da quale linea allora? Cerca di rispondermi con precisione: e se non vuoi fare il calcolo numerico, indicacelo!

Nella seconda parte interviene la geometria che risolve il problema. Socrate disegna quattro quadrati uguali al dato, uno accanto all'altro, così da realizzare la figura del quadrato quadruplo, cioè di lato doppio. Traccia poi una diagonale in ciascun quadrato, in modo che le quattro diagonali vengano a costituire un quadrato: quello costruito appunto sulla diagonale del quadrato dato. Ma in tal modo ciascun quadrato è stato diviso dalla diagonale in due triangoli rettangoli isosceli uguali, mentre il nuovo quadrato costruito mediante le diagonali contiene quattro di tali triangoli: dunque esso è doppio del quadrato dato, quindi il problema è risolto.

Ecco il contrasto fondamentale tra aritmetica e geometria: con i numeri non si riesce a raddoppiare il quadrato, mentre un tale problema viene risolto immediatamente con una semplicissima costruzione geometrica.

Quindi, la scoperta dell'incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato può essere avvenuta da una parte con la constatazione dell'impossibilità di trovare un numero quadrato che sia doppio di un altro numero quadrato, oppure la scoperta potrebbe anche essere stata incidentale e aver seguito il tentativo di costruzione geometrica del quadrato di area doppia.

In ogni caso, i mezzi utilizzati nella dimostrazione non vanno oltre quelli posseduti dai Pitagorici, ed è certo pitagorica anche la dottrina della reminescenza che Platone vuole provare.

2.2.5 Dimostrazione di tipo geometrico di W. Knorr

Duqnue, si procede nella trattazione con l'introdurre una dimostrazione geometrica (una dimostrazione di questo tipo è quella proposta da Wilbur Knorr) ed in seguito verrà proprosta una ricostruzione alternativa che si basa sul metodo dell'*anthyphairesis*.

Dimostrazione di tipo geometrico

Si veda Figura 6 in Appendice A

Dimostrazione. Si considera un quadrato ABCD e un quadrato più piccolo EFGH con i vertici nei punti medi dei lati di ABCD.
Supponiamo che venga chiesto quante volte il lato EF può essere incluso sulla diagonale EG.
Ipotesi: Per assurdo supponiamo che il lato EF e la diagonale EG del quadrato più piccolo siano commensurabili. Allora il loro rapporto deve essere uguale al rapporto tra due numeri interi, rispettivamente l e d. Si può esigere che questi numeri siano ridotti ai minimi termini, quindi che non siano entrambi pari.
I quadrati ABCD e EFGH, sui lati AB e EF rispettivamente, rappresentano così numeri quadrati, rispettivamente l^2 *e* d^2*.*
Dunque ABCD è il doppio di EFGH, cioè $2l^2 = d^2$*.*
Così, ABCD rappresenta un numero quadrato pari. Il suo lato AB (che è uguale a EG) deve essere pari. Poiché ABCD è un numero quadrato pari, allora deve essere divisibile per quattro.
Essendo AFKE un quarto di ABCD, esso rappresenta un numero. Il suo doppio è il numero quadrato EFGH.

Quindi, EFGH e il suo lato EF sono numeri pari.
Si è dimostrato, contrariamente all'ipotesi, che i numeri EF e EG sono entrambi pari. Dalla contraddizione segue che i due segmenti devono essere incommensurabili.

□

2.2.6 L'anthyphairesis

Si procede con l'introduzione del metodo dell'anthyphairesis.
Si veda Figura 7 in Appendice A.

Siano date due grandezze omogenee a e b, con $a > b$.
Si sottrae b da a quante volte è possibile; lasciando un resto $c < b$.

- Se questo resto è nullo, allora l'unità di misura comune di a e b è b;

- se il resto non è nullo si riapplica il procedimento alla coppia di grandezze b e c.

Se la grandezza maggiore b non è un multiplo della minore c, si ottiene un nuovo resto d, e questo è usato nello stesso modo rispetto al precedente sottraendo c, producendo un nuovo resto e.
Il procedimento continua in questo modo.

Quando l'algoritmo è applicato a dei numeri naturali, esso termina dopo un numero finito di passi, e l'ultimo resto (non nullo) è il massimo comun divisore dei due numeri dati. Allo stesso modo, il procedimento applicato alle grandezze commensurabili termina, risolvendosi nella più grande misura comune.
E' possibile visualizzare come procede l'anthyphairesis per due grandezze commensurabili immaginando che a e b siano due segmenti e riportandoli uno sull'altro. Si suppone, ad esempio, che a e b siano i lati di un rettangolo. Si riporta b su a: il primo segmento è contenuto nel secondo un numero n_0 di

volte; la parte rimanente è il segmento $c = a - n_0 \cdot b$. Ora si riporta c su b: è possibile sovrapporlo n_1 volte e la parte rimanente è il segmento $d = b - n_1 \cdot c$. Alla fine, si riporta d su c, e si trova che d può essere sovrapposto n_2 volte, supponendo, senza lasciare alcun resto. Quindi d misura c: cioè, se si prendesse d come unità di misura, c è esattamente n_2 unità,
$b = n_1 \cdot c + d = n_1 \cdot n_2 \quad d + d = d \cdot (1 + n_1 \cdot n_2)$ quindi b misura $1 + n_1 \cdot n_2$ unità e
$a = n_0 \cdot b + c = d(n_2 + n_0 \cdot (1 + n_1 \cdot n_2))$ quindi a misura $n_2 + n_0 \cdot (1 + n_1 \cdot n_2)$ unità.
Così a e b sono commensurabili dalla misura comune d.
La successione di numeri $n_0; n_1; n_2 \ldots$ è definita 'anthyphairesis di a e b' (o spettro di a e b) e si denota di solito con $[n_0; n_1; n_2; \ldots]$
Nel caso delle grandezze incommensurabili, il procedimento dell'anthyphairesis continua ad infinitum, poichè i resti delle divisioni successive diventano, alla fine, più piccoli di qualsiasi grandezza finita preassegnata, come Euclide dimostra in X.1 e X.2. La dimostrazione del fatto che il procedimento può non avere termine, cioè che ogni resto è diverso da zero, produce come conseguenza l'assenza di una misura comune, cioè l'incommensurabilità delle grandezze considerate. Se, ad esempio, si applica l'algoritmo dell'anthyphairesis al lato e alla diagonale di un quadrato si trova che le due grandezze sono incommensurabili.

Anthyphairesis applicata al quadrato
Si veda Figura 8 in Appendice A.

Dimostrazione. Si consideri un quadrato ABCD, si vuole dimostrare l'incommensurabilità del lato AB con la diagonale AC.
Si ragiona per assurdo.
Quindi si suppone, se possibile, che esista un segmentino ϵ che sia sottomultiplo comune al lato AB e alla diagonale AC di un quadrato. Cioè, che sia

ad esempio:

$$AB = m\epsilon, \qquad AC = n\epsilon,$$

così $AB = \frac{m}{n}AC$. *Riportando AB in AB' sulla AC, sarà anche*

$$AB' = m\epsilon,$$

dunque

$$B'C = AC - AB' = (n - m)\epsilon.$$

Si avrà $B'C = A'B' = BA'$.
Riportando A'B' in A'B" sulla A'C, risulterà:

$$BB'' = 2B'C = 2(n - m)\epsilon$$

dunque

$$B''C = (3m - 2n)\epsilon.$$

Continuando la costruzione quanto si vuole, cioè continuando successivamente a costruire triangoli rettangoli isosceli come

$$ABC, \quad A'B'C', \quad A''B''C, \quad A'''B'''C, \quad ecc.,$$

si ottengono cateti come

$$BC, \quad B'C, \quad B''C, \quad B'''C, \quad \dots$$

tutti multipli di ϵ.
Ma è evidente (e del resto facilmente dimostrabile) che tali cateti divengono sempre più piccoli e, dopo un numero finito di passi, risultano certamente minori di un segmentino comunque prefissato, in particolare minori dello stesso ϵ. *Tale risultato è contraddittorio, e con questo è dimostrato quanto si voleva.* □

Tuttavia per quanto seducente possa apparire questa ricostruzione, essa non trova alcun riscontro nelle fonti.

Le prime testimonianze relative all'irrazionalità collegano sempre la scoperta agli studi del rapporto tra lato e diagonale del quadrato.
Il problema è che le dimostrazioni che si riferiscono al modello proposto negli Elementi, passano tutte attraverso la rappresentazione delle frazioni come rapporto di due interi relativamente primi, vale a dire attraverso la proposizione VII.22 degli Elementi, e questo non corrisponde agli scritti aristotelici. Infatti la proposizione VII.22 è dimostrata per assurdo ma, né Platone né Aristotele, parlando dell'incommensurabilità, fanno riferimento ad una dimostrazione in cui si annidano l'uno dentro l'altro due ragionamenti per assurdo: il primo per dimostrare la proprietà di rappresentazione dei rapporti tra due numeri interi tramite due interi relativamente primi, poi, da lì, l'impossibilità della razionalità di radice quadrata di 2.

2.2.7 Dimostrazione basata sul metodo del pari e del dispari

Al termine di questa trattazione sulle origini dell'incommensurabilità, si propone una nuova e moderna dimostrazione ricostruita da Salomon Ofman, conforme al testo dei Primi Analitici e fondata sul metodo molto antico della decomposizione pari e dispari.
Non passando attraverso la proposizione VII.22, né attraverso nessun'altra proposizione dimostrata per assurdo, questa apparirà come il primo risultato che non si può dimostrare attraverso nessun altro metodo.
La dimostrazione data da Ofman si basa sul metodo molto antico del pari e del dispari che risale ad almeno 4000 anni fa. Si tratta non solo di dividere i numeri tra pari e dispari ma di considerare il numero massimo di volte che un numero può essere diviso per 2, prima di arrivare a un numero dispari.

In linguaggio moderno il metodo può essere descritto nel modo seguente:
per ogni intero n pari, abbiamo $n = 2^h u$ dove h è il numero massimo di divisioni di n per 2, e u è un dispari.

Così, ad esempio:
$28 = 2 \times 14 = 2 \times 2 \times 7$ è divisibile 2 volte per 2, vale a dire $h = 2$ o ancora $28 = 2^2 \times 7$.
La scrittura di ogni intero pari nella forma $n = 2^h u$ deriva naturalmente dalla distinzione dei numeri in pari e dispari, e permette di suddividere l'insieme dei numeri in maniera ancora più precisa ripetendo ulteriormente questa suddivisione sui pari.
Il metodo viene chiamato decomposizione pari/dispari di n e h viene chiamato grado di parità di n.

Se si pone, dunque:

- **N** l'insieme degli interi,
- **D** l'insieme dei dispari,
- **P** l'insieme dei pari,
- **2D** l'insieme dei dispari moltiplicati per 2,
- **2P** l'insieme dei pari moltiplicati per 2,
- **4D** l'insieme dei dispari moltiplicati per 4,
- **4P** l'insieme dei pari moltiplicati per 4,

ottenendo la tabella (Figura 9) in Appendice A.

Così i pari sono descritti sotto forma di una successione:

$$2(2n+1); \quad 4(2n+1); \quad 8(2n+1); \quad 16(2n+1); \ldots$$

Una tale successione di potenze di 2 si ritrova nei più antichi testi greci non matematici.
Già il ragionamento per dicotomia di Zenone si fonda sulle potenze di due e sui loro inversi, vale a dire le frazioni della forma $(\frac{1}{2})^n$.
E l'Ateniese delle Leggi di Platone propone di fissare la pena per le recidive nel modo seguente:

Se qualcuno nell'ambito di qualche arte che esercita partecipa del commercio al minuto indegno di un uomo libero, sia accusato, davanti ai cittadini giudicati primi per virtù, da chiunque vuole farlo, con l'accusa di disonorare la sua stirpe, e se risulti insudiciare con una pratica indegna il focolare suo e dei suoi padri, condannato a un anno di carcere, sia allontanato da quella occupazione; se recidivo, sarà condannato ad altri due anni di carcere, e ad ogni ricaduta nella condanna continuerà a fare dei raddoppi in relazione al tempo di detenzione precedente.

Più in generale il metodo diairetico o dicotomico utilizzato da Platone per la ricerca delle definizioni prende come modello questa successione.
Il procedimento è così sintetizzabile: preso un *"tutto uno"*, lo si divide nelle due parti/aspetti complementari che in esso sono riconoscibili, e di queste due parti si sceglierà quella che interessa per la ricerca in corso, dividendola a sua volta in due. Così facendo, ripetendo la divisione per ogni aspetto di nostro interesse fino a giungere all'oggetto d'indagine, l'intero di partenza sarà alla fine diviso nelle sue varie forme. Da qui, risalendo a ritroso seguendo le varie ramificazioni ottenute, è possibile ritrovare la definizione dell'oggetto studiato, unificando i vari aspetti di nostro interesse.
In un testo in cui critica la procedura dicotomica platonica, Aristotele osserva che questa conduce a ciò:

le differenze ultime sarebbero dell'ordine di 4 o ci sarebbe qualche altro tra i numeri binari successivi [dunque le potenze di 2].

Egli rimprovera, inoltre, a Platone, di affermare che le sole divisioni naturali sarebbero di potenze di 2, l'errore che quest'ultimo commette è dimenticare il fattore dispari che interviene quando si considera un numero in generale. Al fine di poter comprendere la dimostrazione proposta da Ofman, è necessario introdurre la *proprietà della decomposizione pari/dispari.*

Il grado di parità di un prodotto è la somma dei gradi di parità di ciascuno dei termini del prodotto, vale a dire
$m = 2^k u$ (con u dispari) e $n = 2^h v$ (con v dispari)
allora
$m \times n = 2^{k+h} w$ (con w dispari, $w = u \times v$).

Questa proprietà è chiamata additività del grado di parità.
Da questa proprietà consegue che, il grado di parità di $m^2 = m \times m$ è il doppio del grado di parità di m. Si ha dunque la proprietà seguente, chiamata proprietà dei gradi di parità dei quadrati: il grado di parità di un quadrato è sempre pari. Allo stesso modo, il grado di parità di un cubo è sempre un multiplo di 3, che chiameremo proprietà dei gradi di parità dei cubi.
Al termine di tali, doverose, premesse, viene esposta la dimostrazione proposta da Salomon Ofman

Dimostrazione. Per assurdo.
Si tratta di dimostrare che supporre l'esistenza di due interi m *e* n *di rapporto uguale a* $\sqrt{2}$ *conduce ad un'impossibilità.*
Supponiamo dunque che $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.
Elevando al quadrato, si ottiene $2 = \frac{m^2}{n^2}$*, o anche* $2n^2 = m^2$.
Per l'additività dei gradi di parità, il grado di parità di $2n^2$ *è uguale a quello di* n^2 *aumentato di uno. Per la proprietà dei gradi di parità dei quadrati, il grado di parità di* n^2 *e di* m^2 *sono pari.*
I termini di sinistra e di destra dell'uguaglianza $2n^2 = m^2$ *rappresentano lo stesso numero, quindi hanno lo stesso grado di parità.*

Si ha quindi che: un numero pari aumentato di 1 è uguale ad un numero pari. L'unità, differenza di due pari, è dunque pari.
Per definizione, un numero dispari è la somma di un pari e di una unità. Essendo ora l'unità pari, allora ogni dispari è somma di due pari, e poiché la somma di due pari è ancora pari, si ottiene che ogni dispari è pari, e quindi il crollo dei dispari nei pari, che è proprio la contraddizione indicata per tre volte nei Primi Analitici di Aristotele.

□

Questa dimostrazione non utilizza la proposizione VII.22 degli Elementi, che è il centro della prova generale dell'irrazionalità degli interi non quadrati. Secondo Ofman, infatti,

"dal punto di vista matematico, la tendenza è, in effetti, la generalizzazione e l'oblio delle tappe storiche intermedie."

Vuole mettere in evidenza il fatto che una volta che il risultato è stato ottenuto, l'attenzione si è spostata dalla parità alla primalità, e il risultato particolare riguardante 2 così come il metodo basato sulla parità sono scomparsi.
Grande importanza ha quindi questa dimostrazione che rende conto della centralità che acquista il ragionamento per assurdo, prima in matematica, poi in tutti i tipi di discorsi razionali.

Capitolo 3

Terzo Capitolo: la sperimentazione

3.1 Contesto scolastico e scelta della classe

La sperimentazione è stata realizzata presso il Liceo Scientifico A. B. Sabin di Bologna.
Nel 1972, in seguito a uno sdoppiamento del Liceo Scientifico Copernico, nasce il "Quarto Liceo Scientifico". In seguito, nel 1981, il Liceo cambia nome in "Albert Bruce Sabin". E' il liceo più giovane della città ma con una intitolazione importante, che vuole onorare una figura di scienziato di grande rilievo anche morale, che regalò il suo vaccino antipolio all'umanità, anzichè brevettarlo. Attualmente gli indirizzi di studio presenti sono:

- Liceo scientifico;

- Liceo Scientifico opzione Scienze Applicate;

- Liceo Scientifico ad indirizzo sportivo;

- Liceo delle Scienze Umane;

- Liceo delle Scienze Umane opzione Economico Sociale.

Durante lo svolgimento della mia attività professionalizzante (prevista nel piano di studi del corso di laurea magistrale in Matematica), nel medesimo istituto, affiancata al prof. Paolo Bascetta, ho avuto modo di conoscere e di lavorare, da Settembre a Dicembre 2014, con le classi: 1ˆA (liceo scientifico), 1ˆGSP (liceo scientifico ad indirizzo sportivo), 2ˆA (liceo scientifico) e 2ˆPES (Liceo delle Scienze Umane opzione Economico Sociale).
Nella specificità di questa sperimentazione, è stato scelto, in accordo con il prof. Bascetta, di operare nella classe 2ˆA, ad indirizzo scientifico, a motivo della vivacità intellettuale degli studenti e della loro proficua partecipazione a tutte le attività proposte.

3.2 Scelta dell'argomento e selezione del brano

L'irrazionalità, nell'ambito della scuola secondaria di secondo grado, viene trattata di sovente in modo squisitamente algebrico, solitamente sottolineandone due aspetti: dal punto di vista più "teorico" si concentra l'attenzione degli studenti su come i numeri irrazionali amplino l'ambito dei numeri razionali e sull'estrazione di radice come operazione (interna od esterna in base all'ambiente numerico in cui si lavora); mentre, da un punto di vista maggiormente "pratico", si dedica molto tempo e si propongono innumerevoli esercizi sulla razionalizzazione del denominatore delle frazioni, sul "portare dentro − portare fuori " dal segno di radice, sulla somma (e differenza) di radicali simili, sul prodotto ed elevamento a potenza (mediante i teoremi cosìdetti "del prodotto", " del quoziente" e "della potenza"). Come già visto nel capitolo 2 invece, l'incommensurabilità, agli albori della sua scoperta, trova

asilo nella geometria piuttosto che nell'algebra, la quale, nella Grecia antica, rimase limitata ai numeri interi e razionali positivi.
Pertanto la lettura di brani storici, a questo proposito, può portare gli studenti anche a riflettere su tale natura duale dell'irrazionalità.
E' necessario tenere in considerazione che la scelta delle fonti storiche da proporre agli studenti deve essere, dal punto di vista del contenuto, coerente con il percorso disciplinare che stanno compiendo e, per quanto riguarda la forma, adeguata alle competenze linguistiche che possiedono. Ovviamente bisogna tener conto anche del tempo a disposizione e della familiarità dei ragazzi con questo tipo di attività.
Nel caso specifico la classe non aveva mai svolto lavori simili, nè, gli studenti, avevano avuto occasione di familiarizzare con la storia della matematica.
L'argomento in questione, ossia l'irrazionalità, è stato abbondantemente ed effcacemente trattato dal docente di matematica fin dal mese di Novembre, pertanto, l'attività proposta si colloca all'interno degli *utilizzi della storia a posteriori* (già trattato in 1.3).
Nel periodo fissato per la sperimentazione, la classe aveva dunque terminato lo studio dei numeri irrazionali ed anche quello delle equazioni irrazionali, delle disequazioni irrazionali e dei sistemi irrazionali e precedentemente equazioni, disequazioni e sistemi tutti esclusivamente a coefficienti irrazionali.
Nella scelta del testo storico da utilizzare, oltre all'argomento, bisogna considerare fattori sia di carattere didattico che storico. Ad esempio la lunghezza del brano e la sua difficoltà linguistica non devono essere eccessive, per evitare immediati scoraggiamenti e conseguenti rinunce. D'altro canto il testo deve essere pregnante dal punto di vista dell'evoluzione della matematica, in modo da giustificare l'uso della storia.
Per tali motivazioni è stato scelto di utilizzare la "lezione di geometria" tratta dal *Menone* di Platone.

3.2.1 Platone

Si propone un rapido, ma doveroso, accenno alla figura di Platone, basato su una ricostruzione storica proposta da Indro Montanelli, il quale aveva l'ambizione di avvicinare il lettore agli antichi greci senza fatica e soprattutto senza noia.
La vita e l'attività di Platone trovano collocazione nel periodo in cui Alessandro s'illudeva di conquistare il mondo in nome della civiltà greca. La letteratura languiva, la tragedia era morta e a prendere il suo posto era stata una commedia borghese, intonata a mediocri motivi di adulterio e carovita. La scultura produceva ancora capolavori con Prassitele, Scopa e Lisippo. Ma la filosofia raggiungeva proprio ora il suo zenit: era questa infatti l'età di Socrate.
Platone veniva da una famiglia nobile e antica che faceva risalire le sue origini in cielo al dio del mare Poseidone, e in terra a Solone. Sua madre era sorella di Carmide e nipote di Crizia, il capo dell'opposizione aristocratica e del governo reazionario dei Trenta. Il suo vero nome era Aristocle, che significa "eccellente e rinomato"; più tardi lo chiamarono Platone, cioè "largo", per via delle forti spalle e dell'atletica corporatura. Era infatti un super sportivo e un superdecorato di guerra. Ma sui vent'anni incontrò Socrate, e alla sua scuola diventò un puro intellettuale. Fu forse il più diligente allievo del maestro, che amò appassionatamente. Per ragioni di famiglia si trovò implicato nei grandi avvenimenti seguiti alla morte di Pericle: il terrore oligarchico di Crizia e Carmide, la loro fine, la restaurazione democratica, il processo e la condanna di Socrate. Tutto questo lo sconvolse e ne fece un esule. Si rifugiò prima a Megara da Euclide, poi a Cirene, ed infine in Egitto, dove cercò la quiete e l'oblìo nella matematica e nella teologia. Tornò ad Atene nel 395, ma di nuovo fuggì per andare a studiare la folosofia pitagorica a Taranto, dove conobbe Dione, che lo invitò a Siracusa e lo presentò a Dionisio I. Il tiranno, che covava un senso di inferiorità verso gli intellettuali e non riusciva ad amarli che al prezzo di mortificarli, un giorno gli disse *"Parli come uno stupido"*. *"E tu come un prepotente"*, rispose Platone; Dionisio lo fece

arrestare e lo vendette come schiavo.
Fu un certo Anniceri di Cirene a pagare il riscatto e rifiutò di farsi restituire la somma dagli amici di Platone, che intanto avevano già raccolto il denaro; così con quel capitale fu fondata l'*Accademia*. Sul frontone della porta vi era scritto: *"Medeis ageometretos eisito"*; la geometria ricopriva effettivamente un ruolo importante nell'insegnamento, insieme con la legge, la musica e l'etica. Platone era coadiuvato da assistenti che insegnavano con diversi metodi: conferenze, dibattiti e pubblici dibattiti; anche le donne erano ammesse, essendo Platone un "femminista" accanito.
Pare che Platone abbia avuto una vecchiaia serena, completamente assorbito dalla scuola. Quando non insegnava, portava a spasso i suoi allievi a piccoli gruppi per continuare a esercitarli nell'arte dell'argomentare.
Un giorno uno dei suoi scolari lo invitò a fargli da padrino al suo matrimonio. Nonostante avesse più di ottant'anni, il maestro andò, mangiò e scherzò fino a tardi; ad un certo momento si ritirò in un angolo a schiacciare un pisolino. L'indomani mattina lo trovarono ancora lì, era passato dal sonno momentaneo a quello eterno.

3.2.2 Il *Menone*

Il Menone è un dialogo platonico incentrato sul rapporto tra la virtù, che si giunge ad identificare con la conoscenza, e la teoria delle idee. Questo dialogo è caratterizzato da una forte drammatizzazione, intesa nel senso di atto scenico, in cui i due protagonisti si muovono in una sorta di palcoscenico mettendo a parte gli ascoltatori, i lettori in questo caso, dei ragionamenti effettuati. Il *Menone* affronta due problemi: l'essenza della virtù e la sua insegnabilità. Menone infatti apre il dialogo chiedendo a Socrate se sia possibile insegnare la virtù. Il maestro ammette che è un problema molto complesso e che sarebbe lieto di poterci ragionare insieme ma, in questo momento, si pone il primo problema, ossia quello di definire la virtù. Per Menone la virtù è relativa, o meglio, risponde che la virtù del comandante è quella di comandare, quella del soldato è di obbedire, quella del marinaio è di saper navigare e così via. Socrate allora incalza col proporre la necessità di cercare un qualcosa di comune a tutte queste forme di virtù, al fine di operare un'unificazione per trovare una definizione generale. Menone allora definisce la virtù come la capicità di saper comandare e Socrate apprezza il suo sforzo di fornire un'unica definizione. Tuttavia il maestro mostra dubbi in merito a tale definizione: quella che è stata definita infatti è una sola forma di virtù, giacchè certo un servo non potrebbe mai essere virtuoso se la virtù consistesse proprio nel comandare altri uomini. Menone allora arriva a concepire la virtù come la capacità di considerare le cose belle, intese in senso greco, quindi anche buone e grandi e nel sapersele procurare. L'obiezione di Socrate, questa volta, è più difficile: egli innanzi tutto rettifica il termine *"bello"* ($\kappa\alpha\lambda\acute{o}\varsigma$) in *"buono - vantaggioso"*; sucessivamente sostiene che tutti desiderano cose buone (chi desidera cose cattive commette un errore di valutazione perchè ritiene che le cose cattive possano essere per lui vantaggiose), dunque la definizione di Menone si riduce alla sola capacità di sapersi procurare le cose buone. E Menone si trova d'accordo. Il terzo tentativo di definizione di Menone arriva però ad una tautologia: definisce infatti la virtù come il sapersi procacciare le cose belle secondo giustizia; dato che però la giustizia è una parte della virtù si entra in un circolo vizioso in cui si definisce il tutto con una parte di esso e Menone non sa più progredire. Poichè la questione originaria non era tanto l'essenza della virtù bensì la sua insegnabilità, Socrate decide di rispondere a tale quesito, definendo la virtù, in modo ipotetico, come una qualità posseduta dall'anima. Il problema dell'insegnabilità della virtù viene risolto dal maestro nel modo seguente: la virtù, se è insegnabile, deve essere scienza, giacchè solo quest'ultima è insegnabile. Menone si trova difatti d'accordo con Socrate. D'altronde bisogna altresì constatare che la virtù è un bene, affermazione che Menone non nega. Se è un bene, la virtù avrà anche le seguenti caratteristiche: sarà utile e giovevole a coloro che la possiedono; il maestro continua affermando che tutte le cose godono di tali proprietà ossia buone, utili e giovevoli, se sono utilizzate in modo giusto, ossia secondo

ragione.
Ciò dunque che distingue una cosa buona da una cattiva è la *ragionevolezza*, il *conoscere* e il *sapere*. Se la virtù ha le caratteristiche enunciate in precedenza, ossia l'essere buona, utile e giovevole, allora ne consegue che essa richiede ragionevolezza, il conoscere e il sapere. Ma se la virtù si basa su questi tre precetti, ne risulta che è scienza e che non la si può possedere in maniera innata, ma deve essere trasmessa; allora, se può essere trasmessa, e dunque insegnata, la virtù è scienza ed è insegnabile.
La soluzione così trovata incappa però in un secondario problema: se la virtù è scienza, e quindi insegnabile, si dovrebbero trovare mestri e scolari di virtù. Mentre è indubbio che ci siano scolari di virtù, ad esempio appunto Menone, non è così chiaro se esistano maestri di virtù. Socrate pensa di no mentre Menone riconosce questa figura nei Sofisti. A questo punto entra in scena Anito, che nella realtà storica fu uno dei principali accusatori di Socrate. Ad Anito, Socrate pone proprio questo quesito, ossia se i sofisti possano essere, o possano essere considerati, maestri di virtù. Anito si scaglia contro i sofisti, poichè essi affermano di far crescere al meglio i giovani sotto la loro tutela, quando invece, secondo la sua opinione, ne inquinano gli animi. Per Anito, ogni cittadino ateniese onesto e ligio alle leggi può insegnare ai suoi figli che cosa sia la virtù, poichè esso stesso è un cittadino virtuoso. Nei confronti di questa affermazione Socrate mostra di avere seri dubbi cogliendo una contraddizione nella risposta di Anito: infatti neppure i grandi tra gli ateniesi hanno saputo trasmettere la virtù ai loro figli; e pone il caso di grandi statisti e condottieri come Temistocle, Aristide, Pericle e Tucidide che, pur essendo uomini virtuosi, ebbero dei figli non alla loro altezza e che, anzi, si macchiarono di diversi peccati. Dopo la confutazione di Socrate, Anito lo ammonisce di non parlar male dei grandi cittadini di Atene e lascia la discussione che riprende tra Socrate e Menone. La questione sul *"se esistono maestri di virtù"* è così portata a soluzione da Socrate: oltre che alla scienza può risultare altrettanto efficace la giusta opinione. Quest'ultima è una sorta di ispirazione divina con la quale l'uomo che la possiede incosapevolmente guida il popolo

in modo retto; dunque, chi detiene tale bene è portato a fare scelte giuste. In tal senso la retta opinione non è in nulla inferiore alla scienza. Tuttavia la scienza è stabile, costante, mentre la retta opinione è precaria giacchè non si sostanzia di vera conoscenza del bene, ma di una sorta di riflesso di essa. Socrate ritiene infatti che i grandi uomini di Atene fossero virtuosi per retta opinione e non per scienza, motivo per cui non sarebbero riusciti ad insegnare la virtù alla loro discendenza. Solo un possessore della vera scienza potrà davvero insegnare e trasmettere la conoscenza della virtù.
Un'altro punto fondamentale del *Menone* è costituito dalla teoria della *anamnesi*. Si è già visto come Menone, dopo il terzo tentativo di definire la virtù, si arrenda ammettendo di non essere capace di definirla in modo corretto. Menone a questo punto aveva obiettato sostenendo che fosse inutile ricercare una cosa che non si conosce, giacchè, quand'anche la si sia trovata, non conoscendola, non la si riconoscerebbe come la soluzione del problema posto. Socrate definisce allora la sua teoria della conoscenza: l'anima è immortale e quando il corpo che la possiede muore, essa va nell'Ade, da dove fa ritorno trascorso un certo lasso di tempo, tornando in un altro corpo. In tale periodo l'anima ha conosciuto tutto, e quando prende posto in un altro corpo, non fa altro che dimenticare tutto. Questa conoscenza però è latente in lei, e per risvegliare questa conoscenza l'uomo deve fare della sua vita una costante ricerca del sapere perduto, ma che può essere ritrovato in ogni momento. L'anima deve essere sollecitata a ricordare, per portare nuovamente alla luce i concetti appresi un tempo.
Detto questo risulta quasi scontato il fatto che l'uomo, non potendo ricavare in alcun modo la verità dall'esperienza sensibile, fa uso dell'anima, che è il pensiero dell'uomo; per questo l'uomo ricava da sè medesimo la verità, e questo, per Platone, è il ricordare.

Un passo cruciale del *Menone* è l'esperimento maieutico fatto da Socrate per dimostrare al dubbioso Menone l'esattezza della sua teoria dell'anamnesi.

Questo passo è stato utilizzato in classe nel corso della sperimentazione e duqnue proposto agli studenti come fonte storica.

3.2.3 La lezione di geometria tratta dal *Menone*

Si veda Figura 1 in Appendice A

Socrate: *Dimmi, ragazzo, sai che questa superficie (ABCD) è quadrata?*
Schiavo: *Sì*
Socrate: *E' una superficie quadrata avente tutti questi lati (AB, BC, CD, DA) uguali?*
Schiavo: *Certo*
[...] **Socrate:** *Se questo lato (AB) fosse di due piedi e quest'altro (AD) di due, di quanti piedi sarebbe l'intera superficie?*
Schiavo: *Quattro, Socrate!*
Socrate: *Non vi potrebbe essere un'altra superficie, doppia di questa, ma simile, avente tutti i suoi lati uguali come questa?*
Schiavo: *Sì*
Socrate: *Di quanti piedi sarà?*
Schiavo: *Otto*
Socrate: *Prova a dirmi allora quanto sarà lungo ciascun lato di essa. Il lato di questa (ABCD) è di due piedi; quanto sarà quello della superficie doppia?*
Schiavo: *Evidentemente il doppio, Socrate.*

Si veda Figura 2 in Appendice A

Socrate: *Dimmi: dal lato doppio (AI) secondo te si genera la superficie doppia? Voglio dire: avente ogni lato uguale come questa e doppia di questa, cioè di otto piedi. Guarda se sei ancora dell'opinione che si generi dal lato doppio (AI)*
Schiavo: *Io sì*
Socrate: *Il lato diventa doppio di questo (AD) se aggiungiamo a partire da*

qui (D) un altro lato (DN) altrettanto lungo?
Schiavo: *Certo*
Socrate: *Tu dici che da questo lato (AN) si genererà la superficie di otto piedi, se i quattro lati sono uguali?*
Schiavo: *Sì*

Si veda Figura 3 in Appendice A

Socrate: *Tracciamo i quattro lati uguali (AN, NM, MI, IA) a partire da questo (AN). Non è forse questa (ANMI) la superficie che, secondo te, è di otto piedi?*
Schiavo: *Certo*
Socrate: *In essa non vi sono questi quattro quadrati (ABCD, BCKI, KMLC, CDNL), ciascuno dei quali è uguale a questo di quattro piedi (ABCD)?*
Schiavo: *Sì*
Socrate: *Quanto è grande allora (ANMI)? Non è il quadruplo?*
Schiavo: *Come no?*
Socrate: *Il quadruplo è dunque quanto il doppio?*
Schiavo: *No, per Zeus!*
Socrate: *Ma che multiplo è?*
Schiavo: *Il quadruplo*
Socrate: *Allora, giovanotto, dal lato doppio non si genera un quadrato doppio, ma quadruplo.*
Schiavo: *E' vero!*
Socrate: *Da quale lato allora si genera una superficie di otto piedi? La superficie di otto piedi non è doppia di questa (ABCD) e metà dell'altra (ANLI)?*
Schiavo: *Sì*
Socrate: *Non si genererà da un lato maggiore di questo (AD) e minore di quest'altro (AN)? O no?*
Schiavo: *Credo di sì*

Socrate: *Bene; esprimi il tuo parere. E dimmi: quel lato (AD) non era di due piedi e questo (AN) di quattro?*
Schiavo: *Sì*
Socrate: *E' necessario, dunque, che il lato della superficie di otto piedi sia maggiore di questo di due piedi e minore di quello di quattro.*
Schiavo: *Necessariamente*
Socrate: *Prova a dire quanto è lungo secondo te*
Schiavo: *Tre piedi*

Si veda Figura 4 in Appendice A

Socrate: *Se è di tre piedi, aggiungeremo a questo (AD) la metà (DO) e avremo il lato di tre piedi (AO)* [...] *allo stesso modo* [...] *si ha due piedi (AB) più un piede (BP)* [...] *Se ne genera la superficie che dici (APQO)*
Schiavo: *Sì*
Socrate: *L'intera superficie, se per un lato (AP) è lunga tre piedi e per l'altro (AO) tre piedi, è tre volte tre piedi? O no?*
Schiavo: *Sembra*
Socrate: *Ma tre volte tre piedi quanto fa?*
Schiavo: *Nove*
Socrate: *E di quanti piedi doveva essere la superficie doppia?*
Schiavo: *Di otto*
Socrate: *Dunque neppure dal lato di tre piedi si genera la superficie di otto piedi*
Schiavo: *No certo*
Socrate: *Da quale lato allora? Prova a dircelo con esattezza*
Schiavo: *Per Zeus, non lo so!*
Socrate: *Comprendi, Menone, quanto è progredito ormai? Prima non sapeva quale fosse il lato del quadrato di otto piedi e neppure adesso lo sa, ma allora credeva di saperlo e rispondeva disinvoltamente come se lo sapesse, senza considerarsi in difficoltà. Ormai invece si considera in difficoltà e*

poiché non sa, non crede neppure di sapere. [...] *Osserva che cosa troverà, partendo da questa difficoltà, alla ricerca con me, mentre io non farò che interrogarlo*

Si veda Figura 3 in Appendice A

Socrate: (rivolto allo schiavo) *Dimmi tu non abbiamo questa superficie (ABCD) di quattro piedi?*
Schiavo: *Sì*
Socrate: *Possiamo aggiungere ad essa quest'altra (BCKI) uguale?*
Schiavo: *Sì*
Socrate: *E questa terza (KMLC) uguale a ciascuna delle altre due?*
Schiavo: *Sì*
Socrate: *Non possiamo completare la figura con questo quadrato (DCLN) nell'angolo DCL?*
Schiavo: *Certo*
Socrate: *Non abbiamo qui quattro quadrati uguali?*
Schiavo: *Sì*
Socrate: *L'intera superficie (ANMI) di quante volte è maggiore di questo(ABCD)?*
Schiavo: *Quattro volte*
Socrate: *Ma noi avevamo bisogno di una superficie doppia, ricordi?*
Schiavo: *Certo*

Si veda Figura 5 in Appendice A

Socrate: *Questa linea, condotta da un angolo all'altro in ciascuno di questi quadrati, non divide in due ciascuno di essi?*
Schiavo: *Sì*
Socrate: *Non si generano allora queste quattro linee (BD, BK, KL, LD) uguali, che determinano questa superficie (BDLK)?*

Schiavo: *Sì*
Socrate: *Osserva: quanto è grande questa superficie?*
Schiavo: *Non comprendo*
Socrate: *Ciascuna linea non ha forse diviso a metà internamente ciascuno dei quattro quadrati?*
Schiavo: *Sì*
Socrate: *Quante metà sono in questa superficie?(BDLK)?*
Schiavo: *Quattro*
Socrate: *Quante in questa (ABCD)?*
Schiavo: *Due*
Socrate: *Che cosa è quattro in rapporto a due?*
Schiavo: *Il doppio*
Socrate: *Di quanti piedi è dunque questa (BDLK)?*
Schiavo: *Di otto*
Socrate: *Da quale linea è generata?*
Schiavo: *Da questa(BD)*
Socrate: *I competenti chiamano diagonale questa linea, sicché, se il suo nome è diagonale, la superficie doppia, come dici tu, schiavo di Menone, sarà generata dalla diagonale.*
Schiavo: *Certo, Socrate.*

3.3 Attività proposte e analisi dei dati

Le tempistiche del progetto hanno dovuto conciliare le necessità della sperimentazione con gli impegni scolastici degli studenti e dell'insegnante titolare. Dunque, con quest'ultimo, è stato concordato l'intervento in due lezioni non consecutive.
Avendo svolto il tirocinio per l'attività professionalizzante anche nella classe scelta per la sperimentazione, i ragazzi erano già stati abituati alla mia presenza in classe.

La sperimentazione è stata divisa in dieci attività: le prime sette sono state portate a termine dai ragazzi nella prima lezione, le restanti nella seconda.

3.3.1 Attività 1

La scheda relativa alla prima attività è riportata nell'appendice B. In tale attività è chiesto agli studenti di considerare un quadrato di lato due centimetri (nella scheda fornita agli studenti tale lato è rappresentato).
Successivamente è chiesto loro di pensare ad un quadrato di area doppia e di disegnare il lato di tale quadrato, oppure, nel caso in cui non si fosse in grado di farlo, di specificare il perchè.
Si procede con l'analisi delle risposte degli studenti, concentrando l'attenzione su quattro aspetti:

1. presenza del disegno;

2. argomentazione apportata (ove presente);

3. coerenza tra valore trovato algebricamente ed il valore indicato nel disegno;

4. motivazioni di coloro che non hanno prodotto alcun disegno.

Per quanto riguarda il **primo punto** dell'elenco precedente si hanno i seguenti risultati:

	DISEGNO	NON PALESA IL DISEGNO
Numero di studenti	7	17
Percentuale di studneti	29,2%	70,8%

Per quanto riguarda il **secondo punto**, si osserva che la maggior parte degli studenti hanno apportato motivazioni di tipo algebrico. Le strategie proposte possono essere così categorizzate:

- CATEGORIA 1: utilizzo delle proporzioni $\Rightarrow$
  lato quadrato iniziale : area quadrato iniziale = lato del quadrato di area doppia : area doppia $\Rightarrow 2 : 4 = x : 8$, trovando così il valore 4, come valore del lato del quadrato di area doppia;

- CATEGORIA 2: area doppia = 8; lato=$\sqrt{area}$ $\Rightarrow$ il lato del quadrato di area doppia risulta uguale a $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

	CATEGORIA 1	CATEGORIA 2	ALTRO(*)
Numero di studenti	1	17	6
Percentuale di studenti	4,2%	70,8%	25%

(*) con ALTRO ci si riferisce agli studenti che hanno apportato motivazioni non pertinenti oppure che non hanno addotto alcuna motivazione.

Per quanto riguarda il **terzo punto**, ossia la coerenza tra valore trovato algebricamente ed il valore indicato nel disegno, si sono ottenuti i seguenti risultati (ovviamente ci si riferisce esclusivamente agli studenti che hanno prodotto il disegno):

	COERENTI	NON COERENTI
Numero di studenti	6	1

La mancanza di coerenza è stata rinvenuta nell'aver trovato algebricamente il valore $\sqrt{8}$ ma poi il desegno proposto presenta un valore maggiore di tre.

Infine si analizza il **quarto punto** ossia, si analizzano le motivazioni di coloro che non hanno prodotto alcun disegno. Si considerino quattro categorie:

- CATEGORIA 1: i ragazzi non disegnano apportando come motivazione il fatto che $\sqrt{8}$ non si può disegnare poichè:

    1. $\sqrt{8}$ non è un numero naturale;

    2. $\sqrt{8}$ non è un numero razionale;

    3. $\sqrt{8}$ è un numero irrazionale;

    4. $\sqrt{8}$ è un "numero decimale";

    5. $\sqrt{8}$ non è un "numero esatto";

- CATEGORIA 2: i ragazzi non disegnano perchè sostengono di non saperlo fare oppure di non avere gli strumenti opportuni, ad esempio: un computer, una scala graduata con maggiore precisione o uno strumento elettronico;

- CATEGORIA 3: non è stata apportata nessuna motivazione.

I risultati ottenuti sono i seguenti (le percentuali sono calcolate sul 70,8% percentuale corrispondente agli studenti che non hanno apportato il disegno):

	CATEGORIA 1	CATEGORIA 2	CATEGORIA 3
Numero di studenti	7	8	2
Percentuale studenti	41,2%	47%	11,8%

In particolare, per quanto riguarda la CATEGORIA 1 (con i numeri nell'intestazione della tabella ci si riferisce all'elenco numerato precedente)

	1	2	3	4	5
Numero di studenti	1	1	3	1	1

Come già detto in precedenza alla CATEGORIA 2 appartengono i ragazzi che non disegnano perchè sostengono di non saperlo fare oppure di non avere gli strumenti opportuni, ad esempio: un computer, una scala graduata con maggiore precisione o uno strumento elettronico. A tale proposito è stato rilevato che:

	MANCANZA DI CAPACITA'	MANCANZA DI STRUMENTI
Numero di studenti	4	4

3.3.2 Attività 2

La scheda relativa alla seconda attività è riportata nell'appendice C.
In tale attività sono state proposte agli studenti le prime sei domande che nel dialogo platonico Socrate rivolge allo schiavo di Menone. Il fine di tale attività è stato quello di evincere se gli studenti riproponessero il ragionamento fatto dallo schiavo, oppure utilizzassero diverse strategie risolutive.
L'attività è stata condotta in questo modo: a ciascuno studente è stato consegnato un foglio in cui erano presenti esclusivamente i numeri da 1 a 6 e tra l'uno e l'altro vi era dello spazio da utilizzare per poter fornire le risposte. Le domande, così come le figure, sono state proiettate mediante slide sulla LIM, una per volta. Naturalmente l'immagine del quadrato ABCD e le domande proposte sono esattamente fedeli a quanto riportato in Appendice C.
Si passa all'analisi dei risultati procedendo mantenendo l'ordine con cui sono

state proposte le domande.

Prima domanda

Dopo aver osservato la figura (Appendice C), si chiedeva agli studenti di dire se fosse o meno un quadrato.
Sorpendentemente i risultati sono stati i seguenti:

	SI	NO
Numero studenti	4	20
Percentuale studenti	16,7%	83,3%

Va doverosamente precidato che l'immagine è stata realizzata con un software didattico (Geogebra) e proiettata sulla LIM, proprio per evitare fraintendimenti o dubbi.
La maggior parte degli studenti che hanno risposto negativamente alla domanda hanno asserito di non poter affermare che fosse un quadrato perchè non erano stati forniti loro dei dati di misure dei lati o degli angoli.

Seconda domanda

Dopo aver osservato la figura (Appendice C), si chiedeva agli studenti di dire se la figura avesse tutti i lati congruenti (nel testo della domanda è stato chiesto se fossero uguali, riportando le parole di Socrate nel *Menone*). Dunque, essendo tale domanda strettamente correlata alla prima, c'era da aspettarsi coerenza tra le due risposte.
Invece i dati raccolti, relativi al questo questito sono stati i seguenti:

	SI	NO
Numero studenti	7	17
Percentuale studenti	29,2%	70,8%

Terza domanda

Dopo aver osservato la figura (Appendice C), si chiedeva agli studenti di quantificare l'area dell'intera superficie se AB e AD fossero di due piedi. (E' stato specificato che il piede fosse l'unità di misura della lunghezza all'epoca di Socrate).

Quasi l'80% degli studenti ha fornito come risposta 4 (accompagnando questo valore da una gran varietà di unità di misura *cm*, cm^2, $piedi^2$, *m*, m^2. Tuttavia sono stati riportati risultati anche differenti da questo come si evince dalla tabella sottostante:

	4	8	2	*"no"*
Numero di studenti	19	1	1	3
Percentuale di studenti	79,1%	4,2%	4,2%	12,5%

Quarta domanda

Dopo aver osservato la figura (Appendice C), si chiedeva agli studenti se esistesse una superficie doppia della precedente ma simile, ossia avente tutti i lati congruenti; tale domanda potrebbe essere riparafrasata come "esiste un quadrato di area doppia rispetto al precedente?".
Le risposte degli studenti sono state le seguenti:

	SI	NO
Numero studenti	14	10
Percentuale studenti	58,3%	41,7%

Duqnue, quasi il 42% degli studenti ritiene che, dato un quadrato, non esista un quadrato di area doppia!

Quinta domanda

Questo quesito è strettamente connesso al precedente. Dopo aver chiesto se, dato un quadrato di lato pari 2 piedi, esista un quadrato di area doppia, viene ora domandato di quanti piedi sarà l'area di quest'ultimo.
I risultati sono stati suddivisi nelle seguenti categorie:

- CATEGORIA 1: forniscono un valore numerico;
- CATEGORIA 2: coerentemente con la risposta alla domanda precedente, affermano, ora, che, non potendo esistere tale quadrato, non si può fornire una risposta;
- CATEGORIA 3: la risposta fornita è *"non lo so"*;
- CATEGORIA 4: la risposta fornita è *"no"*;

	CATEGORIA1	CATEGORIA2	CATEGORIA3	CATEGORIA4
Numero di studenti	14	8	1	1
Percentuale di studenti	58,3%	33,3%	4,2%	4,2%

Facendo riferimento alla CATEGORIA 1, ossia ai ragazzi che hanno quantificato il valore della superficie di area doppia, i risultati sono stati i seguenti:

	4	$2\sqrt{2}$	8
Numero di studenti	4	3	7

Sesta domanda

Questo quesito è strettamente connesso ai due precedenti. Dopo aver chiesto agli studenti se esiste un quadrato di area doppia rispetto al quadrato dato di lato 2 piedi, è stato loro richiesto di quanti piedi fosse tale superficie; ora viene chiesto agli studenti di dire quanto sarà lungo il lato di tale quadrato. Di nuovo le risposte vengono suddivise in categorie:

- CATEGORIA 1: a tale categoria appartengono quei ragazzi che hanno fornito un valore numerico;
- CATEGORIA 2: a tale categoria appartengono quegli studenti che, rispondendo alla quarta domanda, hanno affermato la non esistenza del quadrato di area doppia, e duqnue mantengono la loro coerenza affermando che non esistendo il quadrato non è possibile rispondere a tale domanda.
- CATEGORIA 3: a tale categoria appartengono gli studenti che non rispondono a tale domanda;

- CATEGORIA 4: a tale categoria appartengono gli studenti che affermano che tale domanda non abbia senso.

I risultati sono stati i seguenti:

	CATEGORIA1	CATEGORIA2	CATEGORIA3	CATEGORIA4
Numero di studenti	14	8	1	1
Percentuale studenti	58,3%	33,3%	4,2%	4,2%

Due aspetti sono maggiormente rilevanti in tale analisi. Il primo è che alla quarta domanda in 10 hanno affermato la non esistenza del quadrato di area doppia, mentre nelle risposte successive solo 8 studenti hanno palesato coerenza affermando di non poter valutare nè l'area nè il lato di tale quadrato, in quanto hanno supposto la non esistenza di tale quadrato.
Il secondo aspetto riguarda la CATEGORIA 1, alla quale appartengono i ragazzi che hanno risposto alla domanda palesando un valore numerico. I risultati sono i seguenti:

	2	$\sqrt{8}$	8	*"poco meno di 3"*
Numero di studenti	3	8	2	1

Ora, questa domanda, seppur proposta mediante diverse parole, è la medesima domanda proposta nell'attività 1. Mentre nella prima attività bel 17 studenti hanno quantificato il lato del quadrato di area doppia mediante il valore $\sqrt{8}$, nella domanda finale relativa alla seconda attività, il numero di studenti che hanno dato la stessa risposta è sceso a 8.

3.3.3 Attività 3 e 4

Durante la terza attività è stato chiesto agli studenti di leggere individualmente la prima parte del dalogo tra Socrate e lo schiavo di Menone, tratto dall'opera *Menone* di Platone, proposto nell'appendice D. A ciascuno studente è stata consegnata una copia del dialogo, comprese le immagini cui si fa riferimento nel testo.

Nella quarta attività gli studenti si sono trovati a dover ripondere alla seguente domanda:

Durante la lettura di questa prima fase del dialogo platonico tra Socrate e lo schiavo di Menone, in quale personaggio ti sei immedesimato: Socrate o lo schiavo? Perchè?

I risultati sono stati i seguenti:

	SCHIAVO	NESSUNO	SOCRATE	ENTRAMBI
Numero di studenti	8	1	9	6
Percentuale di studenti	33,3%	4,2%	37,5%	25%

In particolare, coloro che si sono immedesimati nella figura dello **schiavo**, hanno addotto le seguenti motivazioni:

1. *"mi sono immedesimato nello schiavo perchè ho dovuto svolgere la stessa attività, ossia rispondere alle domande di Socrate"*;

2. *"mi sono immedesimato nello schiavo perchè mi sono sentito guidato dal maestro Socrate"*;

3. *"mi sono immedesimato nello schiavo perchè nella lettura del dialogo ho compreso i miei errori e ho ampliato le mie conoscenze"*;

4. *"mi sono immedesimato nello schiavo perchè come lui ho dato risposte sbagliate oppure impulsive"*;

5. *"mi sono immedesimato nello schiavo perchè ho condiviso i suoi pensieri e le sue risposte"*;

6. *"mi sono immedesimato nello schiavo perchè prima ero olto convinto delle mie risposte che però poi hanno subito una smentita*;

Nella tabella che segue le intestazioni contengono dei numeri che si riferiscono al precedente elenco numerato:

	1	2	3	4	5	6
Numero di studenti	1	3	1	1	1	1

L'unico studente che non si è immedesimato in alcuna delle due figure ha fornito la seguente motivazione: *"Non mi sono immedesimato nella figura dello schiavo perchè non avrei mai dato le sue risposte in quanto le ritengo sbagliate, nè nella figura di Socrate perchè sono giunto a delle conclusioni differenti dalle sue"*.

Per quanto riguarda, invece, gli studenti che si sono immedesimati nella figura di **Socrate**, hanno addotto le seguenti motivazioni:

1. *"mi sono immedesimato in Socrate perchè non potevo immedesimarmi nello schiavo in quanto le mie risposte alle domande di Socrate sarebbero state molto diverse da quelle che lui ha fornito"*;

2. *"mi sono immedesimato in Socrate perchè non potevo immedesimarmi nello schiavo in quanto lui risponde troppo istintivamente"*;

3. *"mi sono immedesimato in Socrate perchè ho seguito lo stesso suo ragionamento"*;

4. *"mi sono immedesimato in Socrate perchè preferisco l'eloquenza di Socrate a discapito della superficialità dello schiavo"*;

5. *"mi sono immedesimato in Socrate perchè non avrei mai risposto come lo schiavo in quanto, pur non essendo un genio, fin qui ci arrivo"*;

6. *"mi sono immedesimato in Socrate perchè è la figura che guida lo schiavo"*;

Nella tabella che segue le intestazioni contengono dei numeri che si riferiscono al precedente elenco numerato:

	1	2	3	4	5	6
Numero di studenti	2	2	1	1	1	2

Si esaminano, infine, le motivazioni che hanno riportato gli studenti immedesimatisi in entrambi i protagonisti.

1. *"Mi sono immedesimato in entrambe le figure perchè come lo schiavo sono stato chiamato a fornire le risposte alle domande e come Socrate, nel dare le risposte, ho dovuto ragionare"*;

2. *"Mi sono immedesimato in entrambe le figure. Da una parte non avrei mai dato le risposte che ha fornito lo schiavo e dunque mi sento più vicino alla figura di Socrate, d'altra parte però guidata da Socrate ho capito di aver condotto ragionamenti comunque errati"*;

3. *"Mi sono immedesimato in entrambe le figure, dipendentemente dalle risposte fornite dallo schiavo, ossia: quando ho concordato con le riposte dello schiavo mi sono immedesimato in lui, altrimenti mi sono immedesimato in Socrate"*;

4. *"Mi sono immedesimato precedentemente nello schiavo e successivamente in Socrate. Inizialmente nello schiavo perchè come lui ho risposto in modo errato tuttavia già sapevo che il lato del quadrato di area doppia deve valere* $\sqrt{8}$ *e quindi successivamente mi sono immedesimata in Socrate".*

Nella tabella che segue le intestazioni contengono dei numeri che si riferiscono al precedente elenco numerato:

	1	2	3	4
Numero di studenti	2	1	1	2

Duqnue in conclusione, alla luce dei risultati relativi a questa attività, è possibile affermare che gli studenti vedono lo schiavo come un personaggio la cui attività è quella di rispondere e che fornisce risposte errate, date in modo impulsivo o superficiale.
Tale figura si contrappone nettamente a Socrate, visto, nell'immaginario collettivo della classe, come la guida, come colui che conduce ragionamenti corretti e ponderati. Quindi emerge la contrapposizione tra due figure: una che si trova "nell'errore" e l'altra "nella verita" a seconda che non si usi oppure si usi la ragione, contrapposta nettamente all'errore, la cui causa è rintracciabile nell'impulsività.

3.3.4 Attività 5

La scheda relativa alla quinta attività è riportata nell'appendice E.
L'attività è stata condotta come la seconda: a ciascuno studente è stato consegnato un foglio in cui erano presenti esclusivamente i numeri da 1 a 6 e tra l'uno e l'altro vi era dello spazio da utilizzare per poter fornire le risposte.
Le domande, così come le figure, sono state proiettate mediante slide sulla LIM, una per volta. Naturalmente le immagini e le domande proposte sono esattamente fedeli a quanto riportato in Appendice E.
Si passa all'analisi dei risultati procedendo mantenendo l'ordine con cui sono

state proposte le domande.

Prima domanda

Si considerano due quadrati: il primo ABCD avente il lato che misura 2 piedi, e il secondo ANLI, avente lato doppio, dunque 4 piedi. La domanda proposta agli studenti chiedeva se la superficie di area pari a 8 piedi fosse uguale al doppio di quella di ABCD e metà di ANLI.
I risultati delle risposte fornite dagli studenti sono descritti nella tabella seguente:

	SI	NO
Numero di studenti	23	1
Percentuale studenti	95,8%	4,2%

Seconda domanda

Facendo riferimento a quanto detto nella descrizione relativa alla prima domanda, ora si chiede agli studenti di indicare da quale lato della figura possa essere generato il quadrato di area pari a 8 piedi.
Le risposte fornite dagli studenti sono state suddivise in varie categorie (i dettagli relativi a ciascuna categoria saranno descritti successivamente):

- CATEGORIA 1: a tale categoria appartengono gli studenti che hanno indicato un lato pari a 2 piedi;

- CATEGORIA 2: a tale categoria appartengono gli studenti che hanno indicato un lato pari a 4 piedi;

- CATEGORIA 3: a tale categoria appartengono gli studenti che non hanno risposto, oppure che hanno affermato che tale lato non esista in figura;

- CATEGORIA 4: a tale categoria appartengono gli studenti che hanno indicato la diagonale del quadrato di lato pari a due piedi;

- CATEGORIA 5: a tale categoria appartengono gli studenti che hanno indicato altre misurazioni.

	CAT. 1	CAT. 2	CAT.3	CAT. 4	CAT.5
Numero di studenti	2	7	9	3	3
Percentuale studenti	8,3%	29,2%	37,5%	12,5%	12,5%

Nel dettaglio:

- CATEGORIA 1: come già detto, a tale categoria appartengono gli studenti che hanno indicato un lato pari a 2 piedi, nello specifico uno studente indica il lato DN mentre l'altro indica BI;

- CATEGORIA 2: come già detto, a tale categoria appartengono gli studenti che hanno indicato un lato pari a 4 piedi, nello specifico uno studente indica il lato NA e ben sei studenti indicano il lato AI;

- CATEGORIA 3: come già detto, a tale categoria appartengono gli studenti che non hanno risposto (2 studenti), oppure che hanno affermato che tale lato non esista in figura (7 studenti);

- CATEGORIA 4: come già detto, a tale categoria appartengono gli studenti che hanno indicato la diagonale del quadrato di lato pari a due piedi (3 studenti);

- CATEGORIA 5: come già detto, a tale categoria appartengono gli studenti che hanno indicato altre misurazioni, nello specifico: uno studente indica $AN \cdot AB$, uno studente indica il lato BL ed infine uno studente indica $AB \cdot \sqrt{2}$.

Duqnue, tra gli studenti che indicano un lato specifico, che sono in totale 13, le preferenze sono state così suddivise:

	Lato di 2 piedi	Lato di 4 piedi	Diagonale	lato BL
Numero di studenti	2	7	3	1

Terza, quarta e quinta domanda

In questo caso, i risultati relativi alle tre domande vengono analizzati contemporaneamente in quanto strettamente collegati.
Inizialmente viene chiesto agli studenti se il lato che genera il quadrato di area doppia rispetto al quadrato iniziale (ABCD) debba essere maggiore del lato AD e minore di AN. Successivamente viene loro chiesto se i due lati, nell'ordine, misurano rispettivamente 2 e 4 piedi. Infine viene chiesto se, la condizione posta nella terza domanda, sia condizione necessaria.
I risultati relativi alla terza domanda sono i seguenti:

	SI	NO
Numero di studenti	24	0
Percentuale studenti	100%	0%

I risultati relativi alla quarta domanda sono i seguenti:

	SI	NO
Numero di studenti	23	1
Percentuale studenti	95,8%	4,2%

I risultati relativi alla quinta domanda sono i seguenti:

	SI	NO
Numero di studenti	19	5
Percentuale studenti	79,1%	20,9%

Sesta domanda

A questo punto viene chiesto, nuovamente, agli studenti di quantificare la lunghezza del quadrato di area doppia.
I risultati sono i seguenti:

	$\sqrt{8}$	8	*"Non so"*	Non risponde
Numero di studenti	18	1	2	3
Percentuale studenti	75%	8,3%	12,5%	4,2%

3.3.5 Attività 6 e 7

Durante la prima tra questa due attività, è stato chiesto agli studenti di leggere la seconda parte del diagolo platonico tra Socrate e lo schiavo di Menone, riportato in Appendice F. A ciascuno studente è stata consegnata una copia del brano, da leggere individualmente.
Per quanto riguarda la settima attività la scheda è riportata nell'appendice G.
L'attività è stata condotta come la seconda e la quinta: a ciascuno studente è stato consegnato un foglio in cui erano presenti esclusivamente i numeri corrispondenti alle domande tra cui vi era dello spazio da utilizzare per poter fornire le risposte. Le domande, così come le figure, sono state proiettate mediante slide sulla LIM, una per volta. Naturalmente le immagini e le domande proposte sono esattamente fedeli a quanto riportato in Appendice G.
Si passa all'analisi dei risultati procedendo mantenendo l'ordine con cui sono

state proposte le domande .

Prima domanda

Si considera l'immagine proposta in Appendice G e si chiede agli studenti se le quattro diagonali dividono i quattro quadrati ciascuno a metà, generando così una nuova superficie $BDLK$.
I risultati sono stati i seguenti:

	SI	NO
Numero di studenti	24	0
Percentuale studenti	100%	0%

Seconda domanda

Si considera, di nuovo, l'immagine proposta in Appendice G e viene chiesto agli studenti di quantificare quanto misura l'area della superfcie $BDLK$ appena costruita.
Le risposte sono state le seguenti:

	8 piedi (*)	8 piedi (**)	$= ABCD$ (***)
Numero di studenti	20	3	1
Percentuale studenti	83,3%	12,5%	4,2%

(*) gli studenti specificano: 8 piedi ossia il doppio del quadrato "piccolo")
(**) gli studenti specificano: 8 piedi ossia la metà del quadrato "grande")
(***) Ossia uguale al quadrato di partenza, di lato pari a 2 piedi e dunque di area 4.

3.3.6 Attività 8 e 9

Durante la prima tra questa due attività, è stato chiesto agli studenti di leggere la terza parte del diagolo platonico tra Socrate e lo schiavo di Menone, riportato in Appendice H. A ciascuno studente è stata consegnata una copia del brano, da leggere individualmente.
Per quanto riguarda la nona attività è stato chiesto agli studenti di rispondere alla seguente domanda:

Scrivi le tue impressioni sulla frase che Socrate rivolge a Menone parlando del suo schiavo:
"Comprendi, Menone, quanto è progredito ormai? Prima non sapeva quale fosse il lato del quadrato di otto piedi e neppure adesso lo sa, ma allora credeva di saperlo e rispondeva disinvoltamente come se lo sapesse, senza considerarsi in difficoltà. Ormai invece si considera in difficoltà e poiché non sa, non crede neppure di sapere. [...] *Osserva che cosa troverà, partendo da questa difficoltà, alla ricerca con me, mentre io non farò che interrogarlo."*

Vengono di seguito riportate le risposte (solo quelle pertinenti)degli studenti (quando più di uno studente, seppur con parole diverse, condivide il medesimo pensiero è stata scelta la risposta esposta meglio ed è stato specificato il numero di studenti aderenti):

1. *"Socrate da maestro si trasforma in psicologo, lo schiavo si trova in grande difficoltà e crede di non essere all'altezza di rispondere alle domande a lui poste"* (2 studenti)

2. *"Nessuno sa mai abbastanza, anche se a volte si è convinti di sapere, forse per arroganza"*;

3. *"La convinzione di sapere è piena di lacune, che causano la regressione dell'essere"*;

4. *"Sembra un gioco di parole, si passa dal credere di sapere qualcosa al rendersi conto che non si conosce niente* (2 studenti);

5. *"Con l'aiuto di Socrate lo schiavo comprendere di essere in errore, e con tale consapevolezza cresce mentalmente. Con Socrate lo schiavo riuscirà a risolvere i problemi, non 'a intuizione' ma con l'intelletto"*;

6. *"Lo schiavo di Menone sa di non sapere, contrariamente alla parte iniziale in cui è sicuro di sè. Ha raggiunto la consapevolezza della sua ingnoranza"*;

7. *"Lo schiavo, essendo schiavo, non ha grandi conoscenze scientifiche. Ma, quando si concentra con un procedimento su una parte del quadrato, riesce a rispondere e ad arrivare a una conclusione"*;

8. *"Socrate, ponendo le domande allo schiavo, vuole metterlo in difficoltà; ma lo schiavo essenso sicuro di sè non vede le sue difficoltà. Sono d'accordo con Socrate perchè mi sembra giusto voler far ragionare lo studente in modo diverso per farlo arrivare al risultato."*

9. *"Secondo me Socrate era molto bravo, perchè applicava sia la filosofia sia la matematica in uno stesso argomento. Penso che la matematica che ha insegnato Socrate debba essere insegnata anche a scuola"*;

10. *"Credo che l'importante a volte non sia conoscere una risposta (che magari è anche sbagliata) ma porsi interrogativi per cercare di scoprire la verità; inoltre bisogna sempre pensare se ciò che si sà è realtà oppure è una conoscenza 'di comodo' "*;

11. *"Secondo me, ciò che si vuole dimostrare è che l'uomo, finchè vive nell'ignoranza, è convinto di sapere tutto, oppure, semplicemente, non si pone nemmeno il problema di sapere se sà; tuttavia quando viene a conoscenza del fatto di non sapere, inizia a dubitare di sè e a porsi dei problemi"*;

12. *" Nel momento in cui Socrate interroga inizialmente lo schiavo, questo, essendo certo di ciò che vedeva, rispondeva disinvoltamente. In seguito lo schiavo comprende di aver bisogno di ragionare, e dunque non è più certo delle sue conoscenze"*;

13. *"Questa frase, anche se detta millenni fa, è vera anche oggi. Noi spesso pensiamo di avere delle capacità, ma, in realtà, quando siamo messi alla prova, ci rendiamo conto di non essere capaci e restiamo convinti di essere incapaci".*

3.3.7 Attività 10

In questa ultima attività è stato chiesto agli studenti, alla luce di tutte le attività precedenti, di costruire una dimostrazione, formalmente corretta, del fatto che, usando le parole di Socrate *"la superficie doppia è generata dalla diagonale"* (ossia, dato un quadrato, il quadrato di area pari al doppio dell'area del quadrato di partenza, ha come lato la diagonale del quadrato iniziale).
Le risposte proposte dagli studenti sono state suddivise inizialmente in tre macro categorie:

- CATEGORIA 1: a tale categoria appartengono gli studenti che hanno riportato esclusivamente un disegno;

- CATEGORIA 2: a tale categoria appartengono gli studenti che propongono una dimostrazione 'discorsiva';

- CATEGORIA 3: a tale categoria appartengono gli studenti che propongono una dimostrazione matematica e (chi più chi meno)formale;

	CAT. 1	CAT. 2	CAT. 3	NON RISPONDE
Numero di studenti	4	7	12	1
Percentuale di studenti	16,6%	20,8%	58,4%	4,2%

CATEGORIA 1

- 2 studenti disegnano il quadrato $ABCD$, e scrivono *"2 piedi"* al di sotto del lato AB; il primo studente scrive, accanto alla figura, $AC = 2\sqrt{2}$; il secondo, che contrariamente al primo nel quadrato non disegna anche la diagonale AC, scrive: *"Tesi: quadrato di area doppia, quale lato considero? $\Rightarrow$ diagonale AC del quadrato ABCD"*;

- 2 studenti ripropongono la figura 5 in Appendice A, specificando, sempre per via esclusivamente grafica, quali sono i segmenti tra loro congruenti.

CATEGORIA 2

- 4 studenti ripropongono la figura 5 in Appendice A, e argomentano usando queste parole:

  1. Il primo: *"Ogni diagonale vale $\sqrt{8}$. L'area di BKLD è quindi di 8 e perciò doppia dell'area di un quadrato che vale 4"*;

  2. Il secondo: *"Nel triangolo ABCD sono presenti due triangoli congruenti. Nel quadrato BDLK, il quadrato è formato da quattro triangoli congruenti quindi la superficie è doppia"*;

3. Il terzo: *"ABCD è composto da 2 triangoli uguali ($\Rightarrow$ i triangoli sono equivalenti per il II criterio avendo 2 lati ed un angolo in comune) e BDLK da 4 equivalenti a quelli precedenti; e quindi per questo ABCD è la metà di BDLK.*

4. Il quarto: *"Da un quadrato si può generare un rettangolo di area doppia e un quadrato di area quadrupla. Se si tracciano le diagonali si divide il quadrato ABCD in due e si crea una figura (DBLK) di area doppia rispetto ad ABCD. Quindi dalla diagonale BD si crea un quadrato doppio ad ABCD "*

- 2 studenti propongono il disegno del quadrato *ABCD*

1. Il primo accanto a ciascun lato scrive il numero 2, accompagnando la figura con questa spiegazione: *"Hanno la diagonale in comune e i lati tutti uguali quindi l'area del triangolo che si forma è la metà dell'area del quadrato. Se unissi i quattro triangoli formati dalla diagonale di quadrati equivalenti formeranno il doppio del quadrato iniziale"*;

2. Il secondo scrive: *"Se il lato AB è di due piedi, la superficie è di 4. La diagonale AC è $\sqrt{8}$ perciò la superficie è 8, e quindi il doppio."*

- uno studente non propone alcun disegno ma scrive: *"Dato che la diagonale è uguale a $2\sqrt{2}$, e dopo diventa il lato del quadrato, allora la superficie è uguale a $(2\sqrt{2})^2 = 8$. Visto che la superfice generata dalla diagonale del quadrato iniziale è uguale a 4, e che la superficie generata dalla diagonale del quadrato iniziale è uguale a 8, che è il doppio"*

CATEGORIA 3

Come nel caso delle categorie precedenti i risultati vengono suddivisi in base al disegno proposto:

- 2 studenti non propongono disegno ma argomentano in questo modo:

    1. Il primo: *"$AB = 4, \qquad AD = 4,$
    $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \quad \Rightarrow$
    $2AB^2 = BD^2 \qquad 2(4^2) = (4\sqrt{2})^2 \quad \Rightarrow$
    $32 = 32$"*

    2. Il secondo: *" Area normale* $= l^2$; *Doppia area* $= 2l^2$
    $\Rightarrow$ *il cui lato è* $\sqrt{2l^2} \quad \Rightarrow \quad l\sqrt{2}$*"*

- 2 studenti propongono la figura 5 presente in Appendice A, e le seguenti argomentazioni:

    1. Il primo: *" IP: $AB = 2$ piedi, $ABCD$ quadrato;
    TH: $ABCD^2$ è generato da AC;
    DIM: $DB = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$ Per il secondo criterio i triangoli sono tutti uguali. Essendo $ABCD$ diviso in due da BD lo sono anche gli altri e quindi il quadrato in mezzo è formato dagli stessi trangoli $+2$"*;

    2. Il secondo: *"Si costruiscano 4 quadrati di uguale dimansione (2 cm) e si traccino le diagonali di ciascun quadrato. In questo si può trovare
    $DL = LK = KB = BD$
    $BD = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}cm.$
    L'area di ciascun quadrato ($ABCD$, $DCLN$, $CKML$, $BIKC$) si trova elevando al quadrato 2 cm $\Rightarrow$ $2^2 = 4$ cm^2. Dunque la superficie doppia è generata dalla diagonale ($8 = 2 \cdot 4$ cm^2)*

- 8 studenti propongono la figura 1 presente in appendice A, apportando le seguenti argomentazioni:

  1. Il primo: *"$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$;*
     $S_{ABCD} = 4 \qquad S_{DBKL} = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 8$*"*;

  2. Il secondo: *"Quadrato di area doppia? $\sqrt{4+4} = 8 \Rightarrow$*
     $\sqrt{8} = 8 \qquad \Rightarrow \qquad 2\sqrt{2} = 8$ *la diagonale"*;

  3. Il terzo: *"AB = 2 piedi. Quale lato considerare se voglio quadrato di area doppia? $AC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2\sqrt{2}$"*;

  4. Il quarto: *"$S_{(ABCD)} = 4 \qquad$ Lato quadrato di area 8 = ?*
     $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} =$ diagonale";

  5. Il quinto: *"$A = l^2 \qquad 2A = 2l^2$*
     $AB^2 = l^2 + l^2$(teorema di Pitagora)$= 2l^2$, $\qquad AB^2 = 2l^2 = 2A$";

  6. Il sesto: *"$A_{ABCD} = 2$ piedi, $\quad 2 \cdot A_{ABCD} = 8$ piedi.*
     $AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$
     AC^2 = Area doppia di $ABCD$
     $(2\sqrt{2})^2 = 8 \qquad \Rightarrow \qquad 8 = 8$";

  7. Il settimo, accanto al lato AB appone l'etichetta x e argomenta in questo modo: *"Per il teorema di Pitagora $AC^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$ perciò la superficie generata dalla diagonale AC è il doppio di quella generata dal lato x"*;

  8. L'ottavo: *"HP: ho un quadrato di partenza, di lato 2 e area 4;*
     TH: il quadrato di area 8 ha lato $2\sqrt{2}$
     DIM: il teorema di Pitagora dimostra che la diagonale

AC =lato$\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Indico il lato finale con x *e ottengo:*

$x^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{2}$,

ora $-2\sqrt{2}$ *non è accettabile in quanto* < 0 *dunque la soluzione sarà* $+2\sqrt{2}$*. Ma allora* $(2\sqrt{2})^2 = 8$ *e* $2\sqrt{2}$ *è la diagonale".*

Capitolo 4

Conclusioni: analisi critica dei risultati

In questo ultimo capitolo si vogliono analizzare criticamente i risultati ottenuti mediante la sperimentazione, descritti in 3.3. A mio parere le risposte fornite dagli studenti sono state, in numerosi casi, davvero sorprendenti.
L'attività proposta aveva un filo conduttore, ben esplicito, ossia il dare una risposta alla domanda *"dato un quadrato, qual è il lato che "genera" il quadrato di area doppia rispetto a quella del quadrato di partenza?"* E' interessante non solo analizzare le risposte fornite dai ragazzi, ma anche le capacità argomentative che essi hanno palesato e il linguaggio mediante il quale essi portano avanti tale argomentazione.

4.1 Il filo conduttore: una domanda che si ripete

Esplicitamente, la domanda−filo conduttore di questa sperimentazione è stata posta 4 volte, seppur parafrasata in diversi modi:

1. nella attività 1 (la cui scheda è riportata in Appendice B);

2. nella domanda n. 6 attività 2 (la cui scheda è riportata in Appendice C);

3. nella domanda n. 2 attività 5 (la cui scheda è riportata in Appendice E);

4. nella domanda n. 6 attività 5 (la cui scheda è riportata in Appendice E);

Ebbene, senza dubbio l'attività 1, che esula dall'utilizzo del testo storico, in quanto proposta precedentemente rispetto alla lettura del brano tratto dal *Menone* di Platone, è più conforme alle abitudini degli studenti; ossia, appare simile ad un esercizio proposto dal libro o dall'insegnante.
Ritengo verosimile pensare che tutti gli studenti sapessero calcolare l'area di un quadrato, in particolare l'area del quadrato iniziale avente lato pari a 2 cm e anche che tutti sapessero calcolare il doppio di tale area. A questo punto, la richiesta fatta in tale attività era quella di disegnare il lato del quadrato di area doppia. Come già rilevato in 3.3.1 esclusivamente 7 studenti su 24 (ossia il 29,2% degli studenti) disegnano effettivamente il lato di tale quadrato, e, tra questi, solo 5 (pari al 20,8%) lo fanno in maniera corretta. Eppure, gli studenti che riescono a calcolare correttamente la lunghezza del lato in questione sono molti di più, come si evince dalla tabella che segue:

	Disegno corretto	lato= $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
Numero di studenti	5	17
Percentuale studenti	20,8%	70,8%

Appare dunque chiaro che gli studenti (o almeno la maggior parte di essi) possiedano le conoscenze necessarie al fine di poter rispondere alla domanda, tuttavia, pur avendo trovato il "risultato corretto", mediante una strada prettamente algebrica, non riescono a rappresentare graficamente tale valore. Sorprendenti, a questo punto, sono le motivazioni addotte dagli studenti per giustificare l'impossibità di rappresentare: emerge dalle loro riposte l'idea che l'inibizione in tale senso derivi proprio dal fatto che $\sqrt{8}$ sia numero irrazionale. Chiarificatrice in tal senso è l'argomentazione riportata da uno

studente:
"lato quadrato = 2 cm $\quad\Rightarrow\quad$ *area quadrato = 4 cm*^{2}
area quadrato di area doppia = 2 · area quadrato = 2 · 4 = 8 cm^2 $\quad\Rightarrow$
lato quadrato di area doppia = $\sqrt{area} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
Ma $2\sqrt{2}$ *non è un numero naturale, quindi non esiste, nel senso che non si può rappresentare"*
D'altra parte, l'altra motivazione citata dagli studenti, è pur sempre collegata al fatto che sia un numero irrazionale, ma palesa una diversa sfumatura. $\sqrt{8}$ non può essere rappresentato in quanto, per poterlo fare correttamente, i ragazzi sostengono di aver bisogno di strumenti tecnologici o quantomeno più precisi. Si propongono a tale proposito due argomentazioni apportate da due studenti:

1. *area doppia = 8* $\quad\Rightarrow\quad$ *lato =* $2\sqrt{2}$ *che essendo irrazionale ha infinite cifre dopo la virgola, quindi non si può rappresentare perchè avrei bisogno di un computer."*

2. *"lato =* $\sqrt{area} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. *Ora* $2\sqrt{2} = 2,828427125\ldots$ *che può essere approssimato con* $2,828$ *e non lo posso rappresentare perchè il mio righello ha solo i centimetri."*

Si percepisce dunque nel primo caso, quasi l'anelare alla precisione, impossibile alle facoltà umane; definita in letteratura come difficoltà òntica.
La motivazione proposta dal secondo studente, a mio avviso, è degna di nota: ad una prima lettura sembra riproporre la medesima motivazione del suo compagno, però mi sono domandata il perchè specificasse sia l'approssimazione che la taratura del righello. Incuriosita, nella seconda lezione in cui ho portato a termite la mia sperimentazione, ho domandato a questo studente delle delucidazioni in merito; la risposta è stata la seguente: "$\sqrt{8}$ *so che è irrazionale, quindi ha infinite cifre dopo la virgola. Quando si risolvono i problemi questi numeri si devono approssimare e, secondo me, approssimare alla terza cifra dopo la virgola va bene! Però avendo tre cifre dopo la virgola*

vuol dire che sono millimetri e io ho il righello con i centimetri. Ecco perchè non l'ho potuto disegnare!"
Appare duqnue chiaro che il problema non sia legato al quantificare il lato del quadrato quanto piuttosto al rappresentarlo.
Risultati sostanzialmente differenti si sono avuti relativamente alla domanda n. 6 dell'attività 2. In questo caso è Socrate stesso a guidare il ragionamento degli studenti, e a chiedere loro quanto misuri il lato del quadrato avente area doppia rispetto ad un quadrato di lato pari a 2 piedi. Nell'essenza questa domanda, posta al termine della seconda attività, è la riproposizione esatta della domanda posta nella prima. In questo caso gli studenti che quantificano la misura di tale lato in $\sqrt{8}$ sono molto meno numerosi, come riportato nella tabella seguente:

	1(*)	2(**)
Numero di studenti	17	8
Percentuale studenti	70,8%	33,3%

(*) studenti che rispondono lato= $\sqrt{8}$ nell'attività 1
(**) studenti che rispondono lato= $\sqrt{8}$ nella domanda 6, attività 2
Dunque il numero di studenti che rispondono correttamente alla domanda diminuisce di più della metà.
Naturalmente le motivazioni di questi risultati possono essere molteplici, tuttavia, rifacendosi ai quadri teorici proposti nel primo capitolo, senza dubbio è percepibile, nelle risposte degli studenti, lo ***spaesamento***.
L'introduzione della storia della matematica vuol dire sostituire le abitudini e gli argomenti abituali con qualcosa di nuovo, e quindi mettere in discussione le proprie percezioni, proprio grazie al cambiamento dalla routine. La metafora dello straniero già proposta nel capitolo 1 è pertinente anche in questo caso: si è visto che l'idea dello spaesamento è riconducibile a quanto accade ad un uomo che, trovatosi in un paese straniero, dopo un primo momento di smarrimento, mette in atto tentativi di riposizionamento e di orientamento. Ecco in questo caso è assolutamente percepibile il fatto che gli studenti stiano vivendo questo iniziale momento di smarrimento.

Certo questo è percepibile in tutta questa attività. Infatti le risposte fornite dagli studenti sono davvero sorpendenti.
E' curioso constatare infatti che 20 studenti su 24 (pari a circa l'83,3%) non riconoscono un quadrato nell'immagine proposta in questa trattazione in figura 1 in Appendice A. Onde evitare che si creassero fraintandimenti, come già specificato in precedenza, le immagini, tutte, sono state create mediante *Geogebra* e proiettate in classe con l'utilizzo della LIM.
Incongruenze e risultati particolari si rilevano, poi, se si analizzano i risultati relativi alla seconda domanda di tale attività anche alla luce di quanto appena visto in merito alla prima domanda. Va inoltre precisato che l'immagine proposta era la medesima, e certamente era un quadrato.
In prima analisi, coloro che affermano che la figura osservata non abbia i lati congruenti sono 17 dunque circa il 70,8%.
In secondo luogo va evidenziata un'incrongruenza tra i risultati relativi alla prima domanda e quelli relativi alla seconda: tale incogruenza ha coinvolto un ristretto numero di studenti, tuttavia è bene sottolinearla. Le le due richieste fatte agli studenti sono strettamente collegate: se nella prima domanda si chiede se l'immagine sia un quadrato, nella seconda, si incalza, chiedendo se tutti i lati siano o meno congruenti. Le anomalie si evincono dai risultati, proposti nella tabella seguente:

	E' un quadrato?		Ha i lati tutti congruenti?	
	SI	NO	SI	NO
Numero di studenti	4	20	7	17
Percentuale studenti	16,7%	83,3%	29,2%	70,8%

La definizione di quadrato che solitamente si fornisce agli studenti è la seguente:
"Un quadrato è un parallelogramma avente angoli tra loro congruenti e lati fra loro congruenti".
Così, da una parte gli studenti che hanno risposto *"SI"* alla seconda domanda e *"NO"* alla prima non cadono in contraddizione, contradditori risultano, invece, coloro che rispondono *"NO"* alla seconda e *"SI"* alla prima domanda.

Tale contraddizione viene palesata da 5 studenti ossia dal 21% degli studenti. In tal caso, le risposte degli studenti, oltre che allo smarrimento iniziale dovuto allo spaesamento, sembrano legate a clausole di quello che solitamente viene definito come *contratto sperimentale*. Lo studio del funzionamento dell'allievo in situazione sperimentale si rivela particolarmente delicato poichè si tratta di identificare i significati attribuiti dall'allievo e dallo sperimentatore in funzione dei contratti ai quali ciascuno si riferisce tacitamente. E' duqnue possibile che, in certi casi, si assista a dei *qui pro quo* che risiedono essenzialmente nella non concomitanza dei mondi di riferimento di ciascuno.
Chiarificatrice, a mio avviso, è questa risposta fornita da uno studente:
"Non posso dire se è o meno un quadrato perchè so che dovrei aver bisogno delle misure dei lati e degli angoli per poterlo affermare con certezza, anche se a me sembra che lo sia.
Non posso affermare con sicurezza che i lati siano tutti congruenti, anche se a me sembra che lo siano, perchè dovrei avere le misure; non avendole la mia risposta potrebbe non essere corretta!"
E' palese, in questo caso, l'esigenza di rieducare la percezione alla luce della conoscenza.
Ora si analizzato i risultati relativi alle domande n. 2 e 6 dell'attività 5.
Per quanto concerne la prima tra queste due domande, è meno connessa alle altre pur mantenendo una pertinenza. In questo caso infatti non viene chiesto agli studenti di indicare quanto misuri il lato del quadrato di area doppia rispetto al quadrato iniziale, piuttosto di indicare, a livello grafico, quale possa essere, nella figura, il lato sul quale costruire tale quadrato. Come si evince dai risultati riportati in 3.3.4 la maggior parte degli studenti (il 37,5%) non individua alcun lato nella figura e il 29,2% individua un lato di 4 piedi; solo il 12,5% indica la diagonale del quadrato. Il fatto che l'87,5% degli studenti non intuisca che tale lato sia proprio la diagonale del quadrato di partenza, ma anzi che quasi il 30% degli studententi individui il lato doppio, rimanda immediatamente alla figura dello schiavo, protagonista del dialogo platonico. Lui propone inizialmente proprio questo risultato, ossia il lato doppio, come

risposta alla domanda di Socrate.
Questa domanda dunque, rappresenta un ***ostacolo*** per gli studenti di oggi come per quelli del passato, nonostante gli studenti di oggi affermino di possedere molte più conoscenze ripetto a quelli del passato, come si può evincere dalle opinioni degli studenti proposte in Appendice I.
Per quanto riguarda la domanda n. 6, è situata al termine dell'attività 5, quindi gli studenti a questo punto hanno potuto già abbondantemente confrontarsi con la fonte storica, seppure non ne hanno ancora terminato la lettura: in particolare *guidati* (questo è il termine maggiormente utilizzato dai ragazzi nell'attività 4 in cui veniva loro chiesto in quale figura dei due personaggi del dialogo si identificassero maggiormente) da Socrate hanno scoperto che, la misura del lato del quadrato di area doppia deve essere compresa tra la misura del lato del quadrato di partenza e la misura del lato doppio di quest'ultimo. E' bene notare, a questo proposito, che tale *neccessità* viene riconosciuta da 19 studenti su 24 ossia dal 79,1% degli studenti. A questo punto Socrate chiede loro di nuovo di fornire la misura del lato di tale quadrato di area doppia. Dunque la domanda è di nuovo la medesima delle due precedentemente analizzate, rintracciabili nelle attività 1 e 2. Ebbene, i risultati migliorano, come si può evincere dalla tabelle che segue:

	Attività 1(*)	Attività 2(**)	Attività 5(**)
Numero di studenti	17	8	18
Percentuale studenti	70,8%	33,3%	75%

(*)Numero di studenti che, nell'Attività 1, propongono come misura del lato $\sqrt{8}$.
(**)Numero di studenti che, nell'Attività 2, propongono come misura del lato $\sqrt{8}$.
(***)Numero di studenti che, nell'Attività 5, propongono come misura del lato $\sqrt{8}$.
Duqnue, rifacendosi ancora una volta alla metafora dello straniero proposta da Barbin parlando di spaesamento, è chiaro che dopo una prima fase di smarrimento, riscontrata nell'attività precedente, gli studenti mettono in at-

to tentavivi di riposizionamento ed orientamento. Ciò che è familiare diventa estraneo, e questo è lo spaesamento provocato dalla storia; ma poi la storia fornisce l'opportunità di ripensare alle proprie idee sulla natura degli oggetti matematici e sui processi per la loro costruzione, portando ad un miglioramento dei risultati.
Tale opportunità è vista con particolare favore anche da Sjøberg, il quale afferma che:

"Un aspetto chiave nella vita dei giovani è la ricerca di significato e di rilevanza. Piacciono quelle discipline in cui la loro voce è tenuta in seria considerazione, in cui le loro visioni contano. La scienza [la fisica] e la matematica hanno un'immagine di autorità, almeno come materie scolastiche. E' facile dimostrare la nostra ignoranza in tali materie. La mancanza di possibilità di attribuire significati personali alla conoscenza e l'idea che esistano verità eterne e risposte corrette allontanano molti più giovani oggi di ieri..."
(Sjøberg, ESERA Conference, 2001)

4.2 Argomentare

L'argomentazione è importante come competenza centrale nelle attività matematiche, ma anche, più in generale, come obiettivo indispensabile della formazione intellettuale del cittadino. A livello scolastico, la scarsa capacità di argomentazione comporta la nascita di ostacoli nell'affrontare quegli aspetti della matematica non riducibili all'applicazione meccanica di tecniche e dunque, ampliando le vedute, limita la preparazione culturale degli studenti che non possiedono tali capacità argomentative.
Anzi tutto però occorre trovare una definizione di cosa significhi argomentare che sia efficace ed esaustiva. Nel linguaggio corrente con argomentazione si intende ogni discorso logicamente strutturato, prodotto allo scopo di giustificare una affermazione. Il punto debole di questo approccio riguarda cosa si intende per "logicamente strutturato". Limitandosi al caso della matematica

interessano, infatti, vari tipi di argomentazione:

- argomentazione deduttiva tipica della dimostrazione;

- argomentazioni che si appoggiano ad analogie, esempi, ecc per sostenere la plausibilità di un'affermazione;

- argomentazioni riguardanti il confronto tra metodi risolutivi diversi di uno stesso problema, al fine di giustificare la superiorità di uno di tali metodi, ecc;

Tale varietà rinvia a diversi modi di "strutturazione logica" del discorso, quindi occorre cercare una definizione sufficientemente precisa che li comprenda tutti e insieme escluda altri tipi di discorso, ad esempio la giustificazione apodittica o quella autoritaria o quella fondata sull'appello alla fiducia in chi sostiene una determinata posizione.
Forse allora sarebbe più semplice caratterizzare l'argomentazione partendo dalla definizione di *argomento* come ragione addotta per la validità di una affermazione (può trattarsi di un dato, di un'esperienza, del riferimento ad una teoria condivisa, ecc.), e nel considerare una *argomentazione* come un discorso che coordina diversi argomenti al fine di giustificare una affermazione. Tuttavia tale definzione, presenta delle difficoltà di applicabilità, in quanto coinvolge alcune parole come *ragione*, *coordina*, ... che dovrebbero essere a loro volta definite.
Per questo motivo sono state elaborate diverse definizioni più sofisticate di quella precedente, come la definizione proposta dal filosofo del linguaggio *Toulmin* negli anni '50, oggi utilizzata da diversi ricercatori nell'ambito della didattica della matematica perché offre un modello che "copre" tutti i tipi di argomentazione usualmente utilizzati in matematica e inoltre stabilisce dei collegamenti con molti tipi di argomentazione utilizzati in altri ambiti e nella vita di tutti i giorni. Toulmin considera una argomentazione come costituita da uno o più "passi di ragionamento" concatenati; i passi di ragionamento

sono a loro volta costituiti da un dato (*Data*), da una conclusione (*Conclusion*) e da un'inferenza che dal dato conduce alla conclusione grazie a una *regola di garanzia* (*Warrant*) che a sua volta può essere sostenuta da una *conoscenza di supporto* (*Backing*) (ad esempio un sistema di affermazioni appartenenti a una teoria accreditata). Nel modello proposto da Toulmin si considera sia il caso di una conclusione incondizionatamente valida (in base al *dato* e alla *regola di garanzia*), sia il caso che la conclusione possa essere valida entro limiti dipendenti da condizioni aggiuntive. La concatenazione si caratterizza attraverso il fatto che la *conclusione* di un passo di ragionamento diventa *dato* (o parte del *dato*, ad esempio nel caso di due o più linee di argomentazione che confluiscono in quel punto: *"tenuto conto delle conclusioni a cui siamo pervenuti considerando... e considerando..., possiamo affermare che... in quanto..."*) per il passo successivo.
Con riferimento alla definizione di Toulmin, occorre che chi argomenta:

1. possieda sufficienti conoscenze sull'oggetto dell'argomentazione: esse possono essere dati di partenza, ovvero conoscenze (*warrant* e *backing*) che supportano i passi di ragionamento;

2. sappia gestire sul terreno logico e linguistico i passi di ragionamento e la loro concatenazione: uso corretto dei connettivi linguistici che esprimono e permettono le inferenze, padronanza logica delle concatenazioni linguistiche dei passi di ragionamento, ecc.; si noti che le teorie sullo sviluppo delle competenze logico-linguistiche e sul funzionamento della mente oggi più accreditate pongono in evidenza il fatto che il terreno *logico* non può essere separato dal terreno *linguistico* né in fase di sviluppo intellettuale, né in fase di esercizio di tali competenze (in altre parole: la prestazione logica si esercita attraverso il linguaggio);

3. possieda modelli di argomentazione corrispondenti a diversi tipi di giustificazione deduttiva (ad esempio la dimostrazione nell'ambito di una

teoria, in matematica) e ad altre forme di argomentazione (ad esempio, sempre in matematica, l'invalidazione di enunciati mediante l'uso di contro−esempi, oppure il confronto di metodi risolutivi di un problema). Si noti che certe modalità di argomentazione possono essere valide in certi ambiti e non in altri: l'uso di esempi per giustificare una affermazione è accettabile in molte argomentazioni di uso corrente fuori della matematica, mentre non è accettabile in matematica come warrant per un enunciato (può servire solo per sostenere −in genere debolmente− la plausibilità di una congettura);

4. abbia interiorizzato i valori culturali insiti nell'argomentazione, e sappia e voglia quindi scegliere la via dell'argomentazione come modalità privilegiata per fare valere le sue ragioni, per giustificare le sue scelte o per assicurare la conformità del suo prodotto (ad esempio, un enunciato in matematica) agli standard culturali della comunità di appartenenza.

Mentre la prima e la terza condizione rinviano al settore culturale a cui si riferisce l'argomentazione, la seconda comporta lo sviluppo di abilità e competenze linguistiche trasversali ai diversi settori culturali, e la quarta richiede una estesa pratica e una forte valorizzazione ambientale.
Il soddisfacimento della seconda e della quarta condizione appare non scontato, non facile (soprattutto quando manca un adeguato retroterra culturale o familiare), e da curare sul piano culturale e didattico con una progettazione a lungo termine e di ampio respiro.
Si può osservare che la prima condizione richiede a tutti i livelli scolastici un lavoro di costruzione concettuale (sui concetti oggetto di attività argomentative) attento alla padronanza dei significati e del linguaggio. Tuttavia l'avvio alle attività argomentative in campo matematico può essere svolto con contenuti matematici abbastanza semplici, consoni ad un determinato livello scolastico. Inoltre le attività argomentative possono contribuire all'individuazione di lacune nella padronanza dei concetti e al loro superamento.
La complessità delle condizioni necessarie per l'argomentazione e le difficoltà che gli insegnanti incontrano nell'ottenere sufficienti prestazioni ar-

gomentative dalla maggior parte degli allievi ai vari livelli scolastici suggeriscono alcuni "principi" che dovrebbero essere seguiti, come sostenuto in [12], per lo sviluppo in verticale (da 5-6 anni a 18-19 anni) di attività sull'argomentazione:

1. Le attività sull'argomentazione in matematica (e più in generale le attività sull'argomentazione) non possono essere confinate in uno spazio ristretto dell'offerta formativa; dato che non si tratta di tecniche o di nozioni, ma di un insieme di atteggiamenti, valori, risorse logico-linguistiche da costruire progressivamente. L'argomentare dovrebbe diventare una prestazione che si inserisce in molte attività in ambiti disciplinari diversi.

2. Richieste del tipo "spiega perché", "motiva la tua scelta", "motiva la tua interpretazione", "confronta.... con ..."(nel caso di strategie risolutive di problemi, di ipotesi o congetture, ecc.), "stabilisci se... e giustifica la tua risposta" dovrebbero essere affiancate a compiti di natura diversa e in ambiti diversi (dalla produzione di ipotesi, alla risoluzione di problemi, alla stesura di progetti, all'analisi di fatti...).

3. Le attività sull'argomentazione (per essere incisive e credibili per gli allievi) hanno bisogno di un contesto educativo in cui il giustificare le proprie scelte, il confrontare alternative possibili identificando ed esplicitando i pro e i contro, ecc. sono richieste rivolte frequentemente agli allievi ma anche comportamenti praticati dagli insegnanti.

4. Cruciale appare una "pedagogia dell'errore" in cui l'errore viene vissuto dagli allievi come un rischio inevitabile quando si cercano strade nuove, quando si formulano ipotesi, quando si valutano situazioni. La riflessione sulle possibili cause dell'errore e sui suoi effetti, la ricerca dei modi per superarlo o per evitarlo dovrebbero sostituire la "sanzione"

dell'errore come unico sbocco del processo valutativo dell'insegnante.

5. L'attenzione alla precisione e pertinenza del linguaggio verbale dovrebbe essere oggetto di impegno da parte di tutti gli insegnanti a tutti i livelli scolastici (anche in prestazioni di natura non argomentativa, come nel caso delle descrizioni o delle narrazioni).

Si procede con l'analizzare le argomentazioni apportate dagli studenti per rispondere alla richiesta fatta nell'Attività 10, ossia di costruire una dimostrazione, formalmente corretta, del fatto che, usando le parole di Socrate "la superficie doppia è generata dalla diagonale" (cioè, dato un quadrato, il quadrato di area pari al doppio dell'area del quadrato di partenza, ha come lato la diagonale del quadrato iniziale).
Naturalmente sarabbe interessante poter riportare un'analisi di tutti gli elaborati degli studenti, tuttavia per non appesantire ulteriormente la trattazione si è scelto di analizzare alcuni casi maggiomente significativi.

Primo studente

"Nel triangolo ABCD sono presenti due triangoli congruenti. Nel quadrato BDLK, il quadrato è formato da quattro triangoli congruenti quindi la superficie è doppia"

Anzi tutto lo studente chiama triangolo una figura dotata di quattro vertici $ABCD$, e, nelle attività precedenti a questa, il ragazzo sembra utilizzare le parole triangolo e quadrato come sinonimi. Sostiene poi che in esso vi siano due triangoli congruenti, senza specificare come si formino tali triangoli. Nella seconda frase le parole triangolo e quadrato sono utilizzate con pertinenza, ma nonostante ciò l'argomentazione non appare chiara ed esaustiva.

Appare dunque che a lui manchino alcune delle caratteristiche che deve possedere colui che argomenta:

1. possedere sufficienti conoscenze sull'oggetto dell'argomentazione: in quanto confonde un triangolo con un quadrato;

2. saper gestire sul piano logico e linguistico i passi del ragionamento e la loro concetenazione: infatti si riesce ad intuire il suo ragionamento se e solo se si conosce la domanda posta e le immagini che hanno accompagnato i ragazzi nel corso delle attività.

$\boxed{\text{Secondo studente}}$

"ABCD è composto da 2 triangoli uguali ($\Rightarrow$ i triangoli sono equivalenti per il II criterio avendo 2 lati ed un angolo in comune) e BDLK da 4 equivalenti a quelli precedenti; e quindi per questo ABCD è la metà di BDLK."

Come nel caso precedente anche questo studente preferisce riferirsi al caso specifico dell'immagine proposta loro. Palesa però i *dati*: il quadrato ABCD e il quadrato BDLK; l'aggettivo "composto" non è stato certo felicemente scelto; viene citato il II criterio (avrebbe dovuto citare il II criterio di congruenza dei triangoli) come *backing* ossia come *regola di garanzia*; i passi del regionamento sono abbastanza chiari.
Duqnue rispetto al primo studente, in questo caso si ravvisano migliori capacità argomentive.

$\boxed{\text{Terzo studente}}$

"Da un quadrato si può generare un rettangolo di area doppia e un quadrato di area quadrupla. Se si tracciano le diagonali si divide il quadrato ABCD in

due e si crea una figura (DBLK) di area doppia rispetto ad ABCD. Quindi dalla diagonale BD si crea un quadrato doppio ad ABCD"

Anzi tutto occorre notare che tale argomentazione presenta un errore: non è tracciando la diagonale BD nel quadrato ABCD che si crea la figura BDLK, bensì essa si ottiene tracciando le diagonali nel quadrato di area quadrupla. Inoltre appare chiaro che manchino, a questo studente, alcune delle caratteristiche che deve possedere chi argomenta, ad esempio infatti, se per quanto riguarda l'errore appena evidenziato significa che egli non possieda sufficienti conoscenze sull'oggetto dell'argomentazione, lui non palesa neppure grandi capacità di gestire sul piano logico e linguistico i passi del ragionamento e la loro concatenazione; arriva ad una conclusione senza che le premesse presentate siano corrette nè esaustive.

Quarto studente

Le medesime mancanze di gestione dei passi del ragionamento e della loro concatenazione sono evidenziabili anche nell'argomentazione proposta da questo studente:
"Dato che la diagonale è uguale a $\sqrt{2}$, e dopo diventa il lato del quadrato, allora la superficie è uguale a $(2\sqrt{2})^2 = 8$. Visto che la superfice generata dalla diagonale del quadrato iniziale è uguale a 4, e che la superficie generata dalla diagonale del quadrato iniziale è uguale a 8, che è il doppio"

Anche in questo caso, come nella maggior parte dei casi, si fa riferimento al caso specifico del quadrato avente lato pari a 2 *piedi*. Non c'è coordinazione in quella che dovrebbe essere la conclusione: in questo caso c'è un riferimento ad una argomentazione a due passi:

1. PRIMO PASSO: *"Dato che la diagonale è uguale a $\sqrt{2}$, e dopo diventa il lato del quadrato, allora la superficie è uguale a $(2\sqrt{2})^2 = 8$."*

Questa viene poi considerata come *dato* nel secondo passo, al quale manca però una coerenza sul piano logico e linguistico.

Uno studente che non si riferisce al caso specifico ma tenta una dimostrazione più generale è il

$$\boxed{\text{Quinto studente}}$$

" $A = l^2$ $\quad$ $2A = 2 \cdot l^2$
$AB^2 = l^2 + l^2$ (teorema di Pitagora)= $2l^2$, $\quad$ $AB^2 = 2l^2 = 2A$"

Seppure non vengano specificate le motivazioni che lo spingono ad effettuare i vari passaggi, e tantomeno i dati e le conclusioni, si coglie, nell'argomentazione addotta dal ragazzo, che lui possiede le conoscenze sull'oggetto e la coerenza dei passaggi matematici, pur palesando difficoltà sul piano linguistico.

Infine si analizza quanto riportato dal

$$\boxed{\text{Sesto studente}}$$

"HP: ho un quadrato di partenza, di lato 2 e area 4;
TH: il quadrato di area 8 ha lato $2\sqrt{2}$
DIM: il teorema di Pitagora dimostra che la diagonale
$AC =$lato$\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
Indico il lato finale con x e ottengo:
$x^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{2}$,
ora $-2\sqrt{2}$ non è accettabile in quanto < 0 dunque la soluzione sarà $+2\sqrt{2}$.

Ma allora $(2\sqrt{2})^2 = 8$ *e* $2\sqrt{2}$ *è la diagonale".*

Anche in questo caso si fa riferimento al caso particolare e non al caso generale.
Tuttavia, anzitutto è palese il fatto che questa ragazza possieda modelli di argomentazione, e lo si coglie dal fatto che tenta di specificare le ipotesi e la tesi, prassi utilizzata nella dimostrazione matematica. E' palese inoltre che lei possieda sufficienti conoscenze sull'oggetto dell'argomentazione, che sappia gestire sul piano logico e linguistico i passi del ragionamento e la loro concatenazione, anche se si rivela debole la conclusione.
Inoltre dall'analisi dei risultati di tutte le attività, è sempre presente l'attitudine ad argomentare: ha sempre tentato di fornire giustificazioni, più o meno formali, a tutte le sue affermazioni.

Dunque, concludendo, appare chiara la necessità di una *"didattica dell'argomentazione"* efficace e che consenta di incidere sull'atteggiamento nei confronti della matematica, sia nell'insegnamento che nell'apprendimento, che possa essere utile per poter affrontare con struemnti adeguati i delicatissimi e persistenti problemi di demotivazione, di insuccesso scolastico e formativo che si evidenziano nella scuola secondaria di secondo grado. Sarebbe auspicabile quindi pensare ad una *"didattica dell'argomentazione"* che coinvolga più discipline, mediante attività che devono godere di un'attenzione sistematica e costante volta all'argomentazione, affinchè si possa realizzare un intervento adeguato, efficace, consistente e in cui gli studenti possano assumere un ruolo attivo e partecipe.
Un insegnamento degno di questo nome non inquadra, non uniforma, non produce scolari, ma sa animare il desiderio di sapere. Per questa ragione

ogni insegnamento che sia tale muove l'amore, è profondamente erotico, è in grado di generare trasporto.

"Sarebbe bello, Agatone, se la sapienza fosse tale da scorrere dal più pieno al più vuoto di noi, quando ci tocchiamo l'un l'altro, come fa l'acqua nelle coppe, che dalla più piena scorre sempre nella più vuota attraverso un filo di lana. Se infatti le cose stanno così anche per la sapienza, è un grande onore per me lo star sdraiato accanto a te: credo infatti che potrò essere riempito, da te, di molta e bella sapienza. La mia è infatti probabilmente qualcosa di poco valore, o è controversa e dubbia come fosse un sogno, mentre la tua è scintillante e possiede un grande futuro, quel futuro che da te ancora giovane così intensamente ha brillato e tanto lucente è apparso l'altro ieri"[13]

Appendice A

Immagini

In questa appendice sono raccolte tutte le immagini cui si è fatto riferimento nel corso della trattazione.

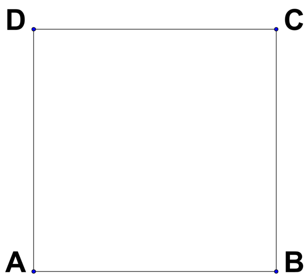


Figura 1

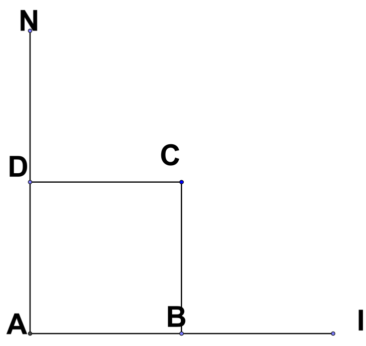


Figura 2

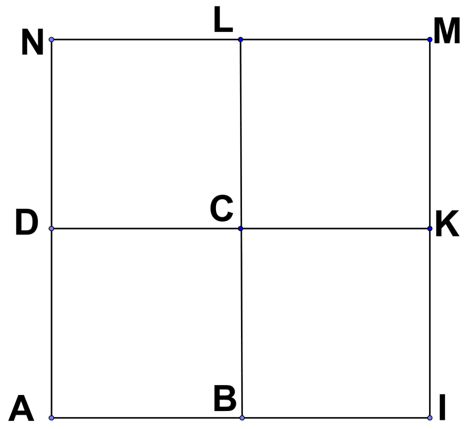


Figura 3

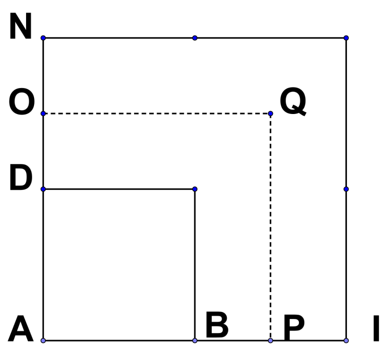


Figura 4

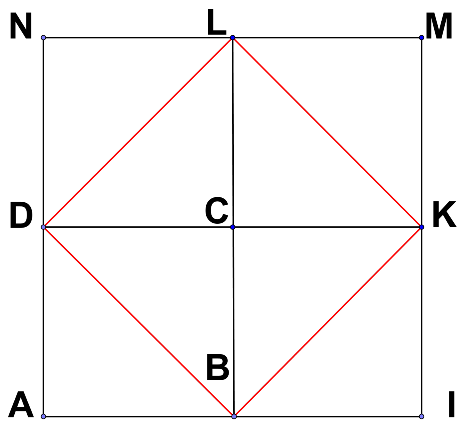


Figura 5

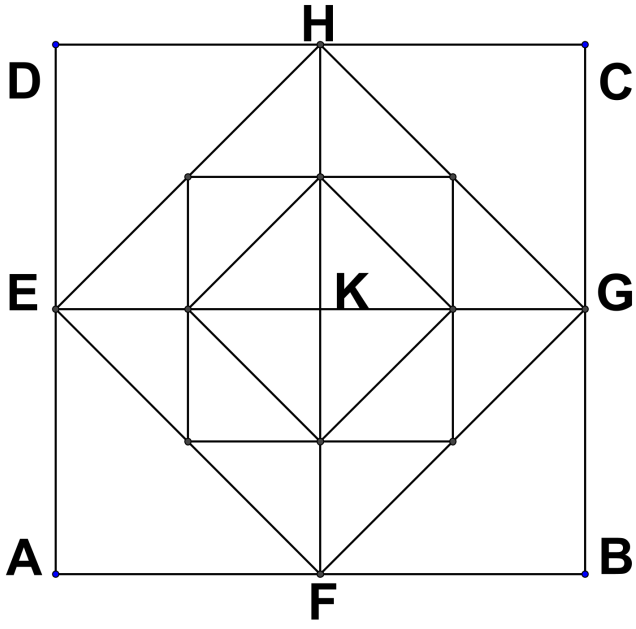


Figura 6

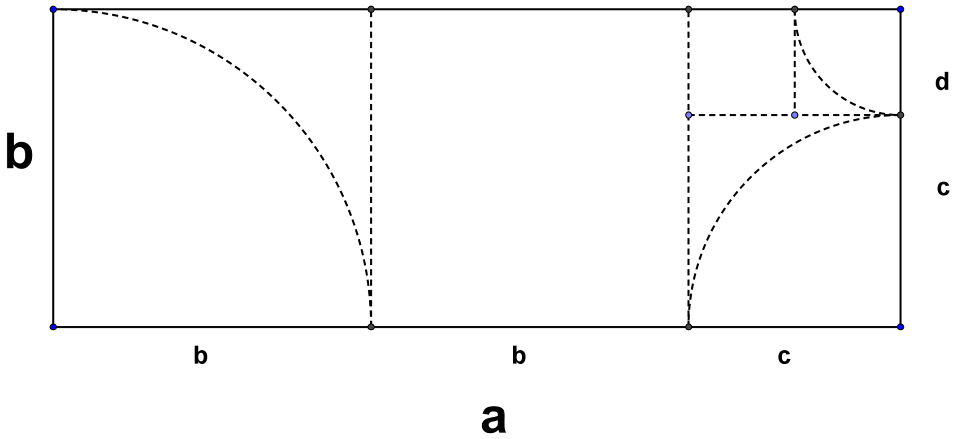


Figura 7

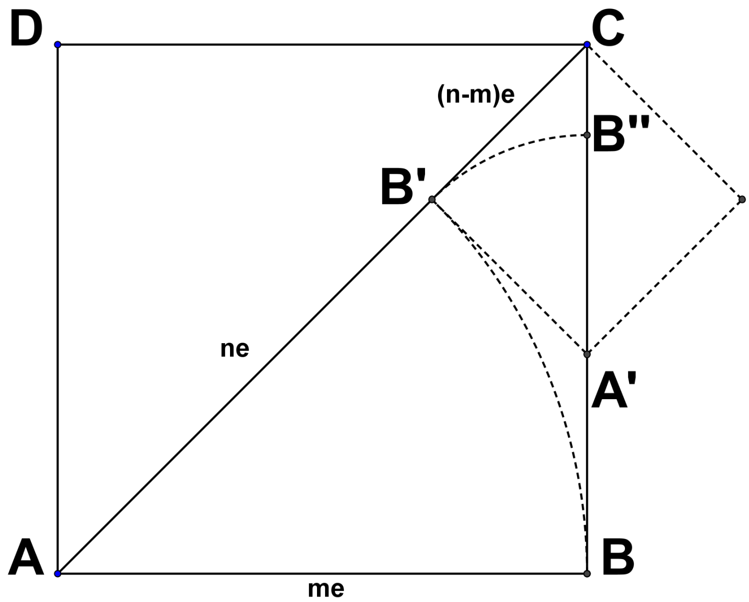


Figura 8

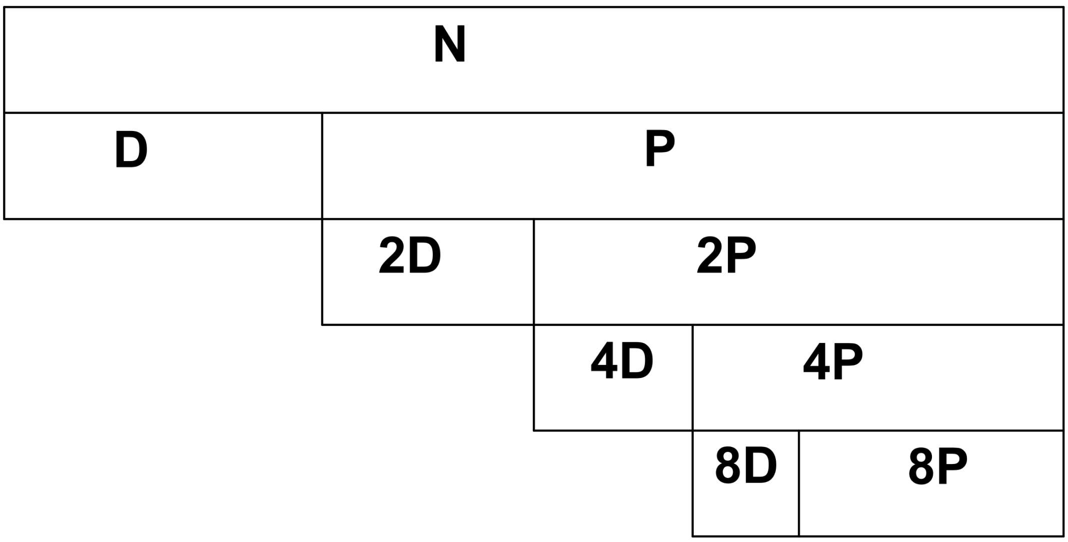
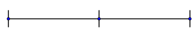


Figura 9

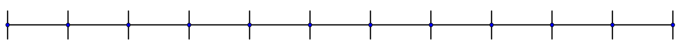
Appendice B

Sheda attività 1

La prima attività proposta è la seguente:
Considera un quadrato di lato 2 cm.



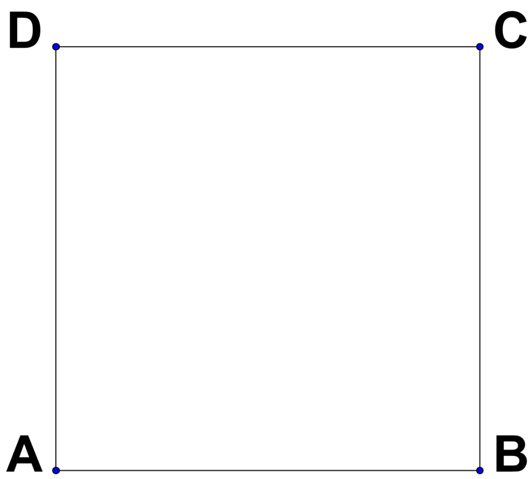
Ora pensa ad un quadrato di area doppia. Sapresti disegnare il lato di tale quadrato? Se no, scrivi perchè.



Appendice C

Scheda attività 2

La seconda attività proposta è la seguente:



1. **Socrate:** *dimmi, ragazzo, sai che questa superficie ABCD è quadrata?*

   - . . . .

2. **Socrate:** *E' una superficie quadrata avente tutti i lati: AB, BC, CD, AD uguali?*

   - . . . .

3. **Socrate:** *se questo lato (AB) fosse di due piedi e quest'altro (AD) di due, di quanti piedi sarebbe l'intera superficie?*

   - . . . .

4. **Socrate:** *Non vi potrebbe essere un'altra superficie, doppia di questa, ma simile, avente tutti i suoi lati uguali come questa?*

   - . . . .

5. **Socrate:** *di quanti piedi sarà?*

   - . . . .

6. **Socrate:** *prova a dirmi, allora, quanto sarà lungo ciascun lato di essa?Il lato di questa (ABCD) è di due piedi; quanto sarà quello della superficie doppia?*

   - . . . .

Appendice D

Scheda attività 3

La terza attività proposta è la lettura di questo brano.
Si veda Figura 1 in Appendice A

Socrate: *dimmi, ragazzo, sai che questa superficie (ABCD) è quadrata?*
Schiavo: *sì*
Socrate: *è una superficie quadrata avente tutti questi lati (AB, BC, CD, DA) uguali?*
Schiavo: *certo*
[...] **Socrate:** *se questo lato (AB) fosse di due piedi e quest'altro (AD) di due, di quanti piedi sarebbe l'intera superficie?*
Schiavo: *quattro, Socrate!*
Socrate: *non vi potrebbe essere un'altra superficie, doppia di questa, ma simile, avente tutti i suoi lati uguali come questa?*
Schiavo: *sì*
Socrate: *di quanti piedi sarà?*
Schiavo: *otto*
Socrate: *prova a dirmi allora quanto sarà lungo ciascun lato di essa. Il lato di questa (ABCD) è di due piedi; quanto sarà quello della superficie doppia?*
Schiavo: *evidentemente il doppio, Socrate.*

Si veda Figura 2 in Appendice A

Socrate: *dimmi: dal lato doppio (AI) secondo te si genera la superficie doppia? Voglio dire: avente ogni lato uguale come questa e doppia di questa, cioè di otto piedi. Guarda se sei ancora dell'opinione che si generi dal lato doppio (AI)*
Schiavo: *io sì*
Socrate: *il lato diventa doppio di questo (AD) se aggiungiamo a partire da qui (D) un altro lato (DN) altrettanto lungo?*
Schiavo: *certo*
Socrate: *tu dici che da questo lato (AN) si genererà la superficie di otto piedi, se i quattro lati sono uguali?*
Schiavo: *sì*

Si veda Figura 3 in Appendice A

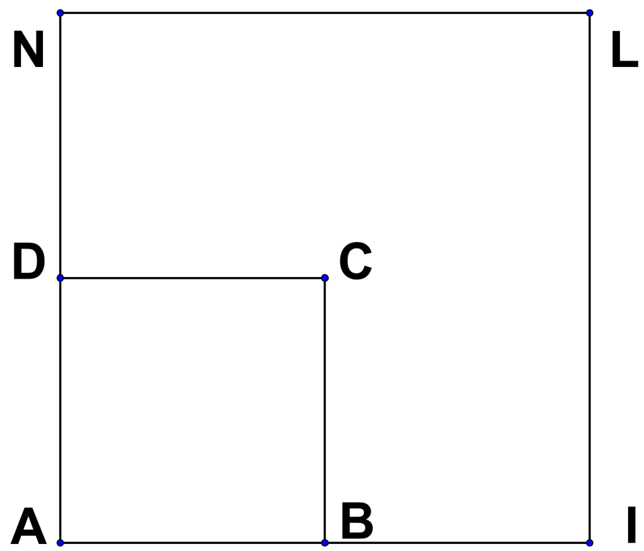
Socrate: *tracciamo i quattro lati uguali (AN, NM, MI, IA) a partire da questo (AN). Non è forse questa (ANMI) la superficie che, secondo te, è di otto piedi?*
Schiavo: *certo*
Socrate: *in essa non vi sono questi quattro quadrati (ABCD, BCKI, KMLC, CDNL), ciascuno dei quali è uguale a questo di quattro piedi (ABCD)?*
Schiavo: *sì*
Socrate: *quanto è grande allora (ANMI) ? Non è il quadruplo?*
Schiavo: *come no?*
Socrate: *il quadruplo è dunque quanto il doppio?*
Schiavo: *no, per Zeus!*
Socrate: *ma che multiplo è?*
Schiavo: *il quadruplo*
Socrate: *allora, giovanotto, dal lato doppio non si genera un quadrato doppio, ma quadruplo.*

Schiavo: *è vero !*

Appendice E

Scheda attività 5

La quinta attività proposta è la seguente:



1. **Socrate:** *La superficie di otto piedi non è doppia di questa ABCD e metà dell'altra ANLI?*

- ....

2. **Socrate:** *Da quale lato allora si genera una superficie di otto piedi?*

   - ....

3. **Socrate:** *Non si genererà da un lato maggiore di questo (AD) e minore di quest'altro (AN)? O no?*

   - ....

4. **Socrate:** *Bene; esprimi il tuo parere. E dimmi: quel lato (AD) non era di due piedi e questo (AN) di quattro?*

   - ....

5. **Socrate:** *E' necessario, dunque, che il lato della superficie di otto piedi sia maggiore di questo di due piedi e minore di quello di quattro. O no?*

   - ....

6. **Socrate:** *Prova a dire quanto è lungo secondo te.*

   - ....

Appendice F

Scheda attività 6

La sesta attività proposta è la lettura del seguente brano.
Si veda figura 3 in Appendice A.
Socrate: *da quale lato allora si genera una superficie di otto piedi ? La superficie di otto piedi non è doppia di questa (ABCD) e metà dell'altra (ANLI)?*
Schiavo: *sì*
Socrate: *non si genererà da un lato maggiore di questo (AD) e minore di quest'altro (AN) O no?* **Schiavo:** *credo di sì*
Socrate: *bene; esprimi il tuo parere. E dimmi: quel lato (AD) non era di due piedi e questo (AN) di quattro?* **Schiavo:** *sì* **Socrate:** *è necessario, dunque, che il lato della superficie di otto piedi sia maggiore di questo di due piedi e minore di quello di quattro.*
Schiavo: *necessariamente*
Socrate: *prova a dire quanto è lungo secondo te*
Schiavo: *tre piedi*

Si veda Figura 4 in Appendice A

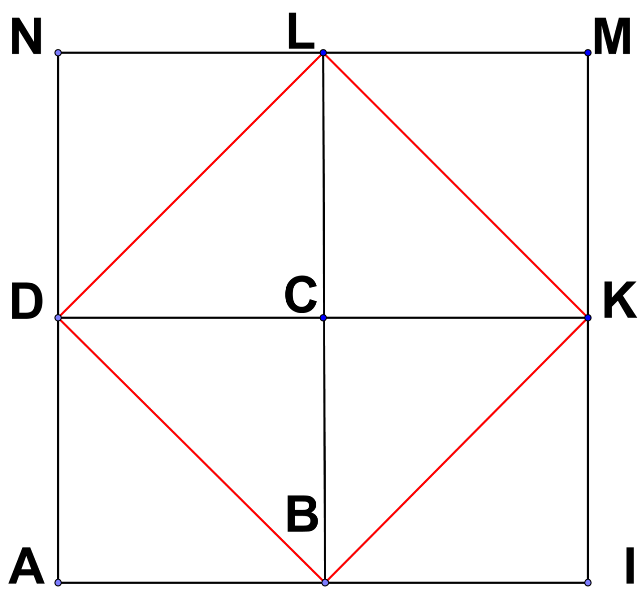
Socrate: *se è di tre piedi, aggiungeremo a questo (AD) la metà (DO) e avremo il lato di tre piedi (AO)* [...] *allo stesso modo* [...] *si ha due piedi*

(AB) più un piede (BP) [...]Se ne genera la superficie che dici (APQO)
Schiavo: *sì*
Socrate: *l'intera superficie, se per un lato (AP) è lunga tre piedi e per l'altro (AO) tre piedi, è tre volte tre piedi? O no?*
Schiavo: *sembra*
Socrate: *ma tre volte tre piedi quanto fa?*
Schiavo: *nove*
Socrate: *e di quanti piedi doveva essere la superficie doppia?*
Schiavo: *di otto*
Socrate: *dunque neppure dal lato di tre piedi si genera la superficie di otto piedi*
Schiavo: *no certo*
Socrate: *da quale lato allora ? Prova a dircelo con esattezza*
Schiavo: *per Zeus, non lo so!*
Socrate: *comprendi, Menone, quanto è progredito ormai? Prima non sapeva quale fosse il lato del quadrato di otto piedi e neppure adesso lo sa, ma allora credeva di saperlo e rispondeva disinvoltamente come se lo sapesse, senza considerarsi in difficoltà. Ormai invece si considera in difficoltà e poiché non sa, non crede neppure di sapere.* [...] *Osserva che cosa troverà, partendo da questa difficoltà, alla ricerca con me, mentre io non farò che interrogarlo*

Appendice G

Scheda attività 7

La settima attività proposta è la seguente:



1. **Socrate:** *Questa linea, condotta da un angolo all'altro in ciascuno di questi quadrati, non divide in due ciascuno di essi? E non si generano*

allora queste quattro linee BD, BK, KL, LD uguali, che determinano questa superficie $BDLK$?

- . . . .

2. **Socrate:** *osserva: quanto è grande questa superficie?*

    - . . . .

Appendice H

Scheda attività 8

L'ottava attività proposta consiste nella lettura del seguente brano.

Si veda Figura 3 in Appendice A

Socrate: (rivolto allo schiavo) *dimmi tu non abbiamo questa superficie (ABCD) di quattro piedi?*
Schiavo: *sì*
Socrate: *possiamo aggiungere ad essa quest'altra (BCKI) uguale?*
Schiavo: *sì*
Socrate: *e questa terza (KMLC) uguale a ciascuna delle altre due?*
Schiavo: *sì*
Socrate: *non possiamo completare la figura con questo quadrato (DCLN) nell'angolo DCL?*
Schiavo: *certo*
Socrate: *non abbiamo qui quattro quadrati uguali?*
Schiavo: *sì*
Socrate: *l'intera superficie (ANMI) di quante volte è maggiore di questo(ABCD)?*
Schiavo: *quattro volte*
Socrate: *ma noi avevamo bisogno di una superficie doppia, ricordi?*

Schiavo: *certo*

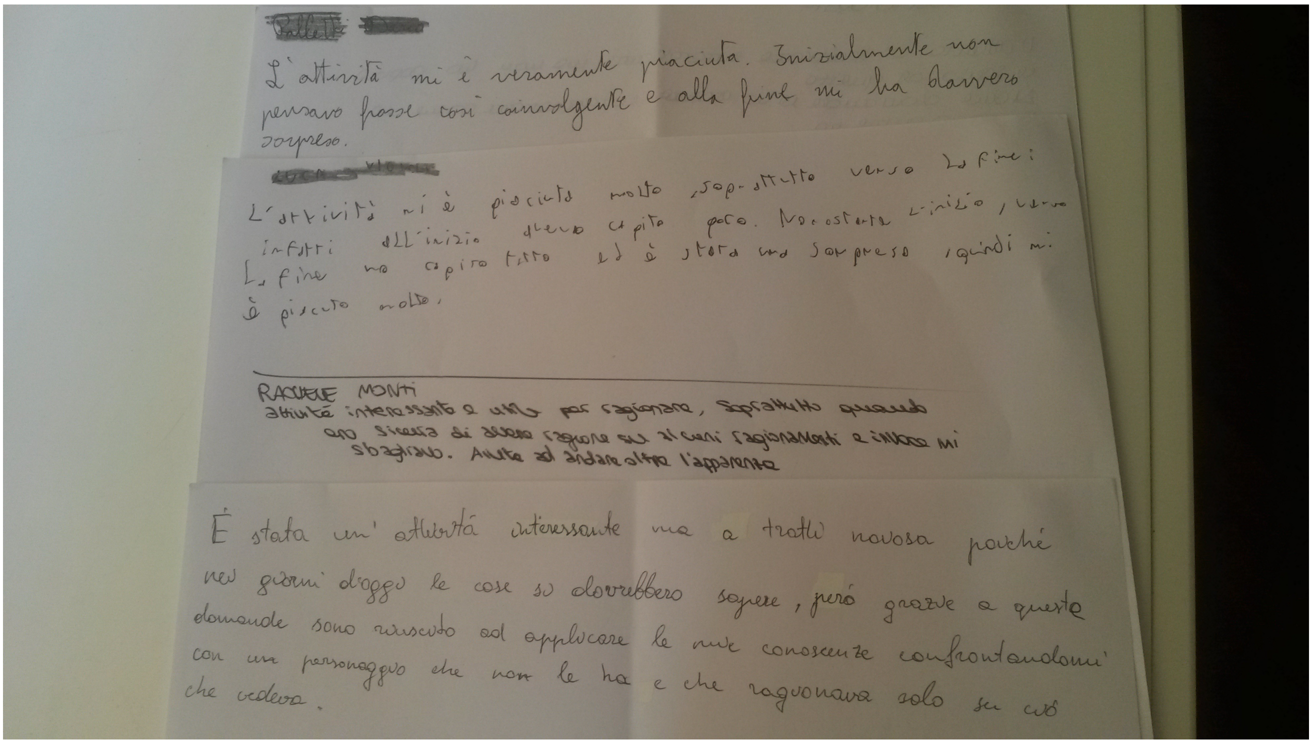
Si veda Figura 5 in Appendice A

Socrate: *questa linea, condotta da un angolo all'altro in ciascuno di questi quadrati, non divide in due ciascuno di essi?*
Schiavo: *sì*
Socrate: *non si generano allora queste quattro linee (BD, BK, KL, LD) uguali, che determinano questa superficie (BDLK)?*
Schiavo: *sì*
Socrate: *osserva: quanto è grande questa superficie?*
Schiavo: *non comprendo* **Socrate:** *ciascuna linea non ha forse diviso a metà internamente ciascuno dei quattro quadrati?*
Schiavo: *sì* **Socrate:** *quante metà sono in questa superficie?(BDLK)?*
Schiavo: *quattro*
Socrate: *quante in questa (ABCD)?*
Schiavo: *due*
Socrate: *che cosa è quattro in rapporto a due?*
Schiavo: *il doppio*
Socrate: *di quanti piedi è dunque questa (BDLK)?*
Schiavo: *di otto*
Socrate: *da quale linea è generata?*
Schiavo: *da questa(BD)*
Socrate: *i competenti chiamano diagonale questa linea, sicché, se il suo nome è diagonale, la superficie doppia, come dici tu, schiavo di Menone, sarà generata dalla diagonale.*
Schiavo: *certo, Socrate.*

Appendice I

Opinioni degli studenti

Al termine delle attività proposte, è stato chiesto agli studenti di scrivere alcune loro considerazioni. Non tutti hanno manifestato le proprie considerazioni, vengono qui riportate quelle pervenute:



[redacted]

L'attività mi è veramente piaciuta. Inizialmente non pensavo fosse così coinvolgente e alla fine mi ha davvero sorpreso.

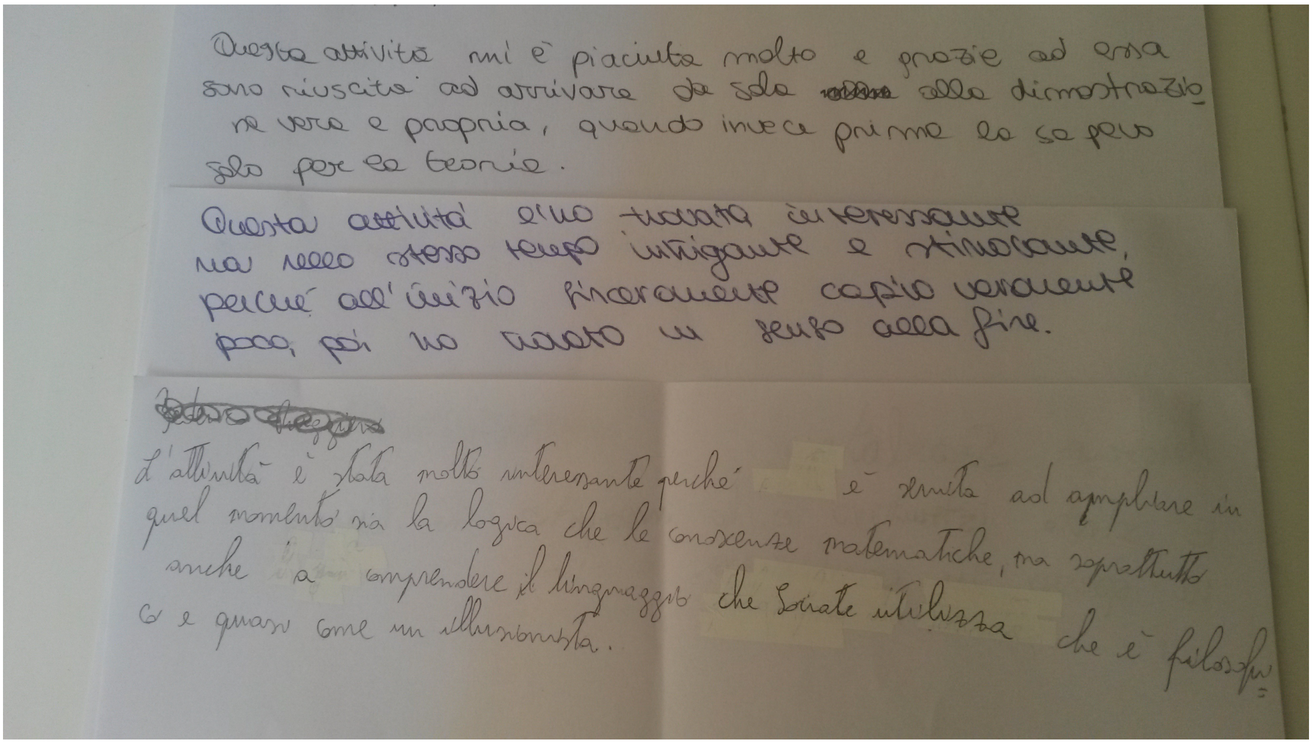
[redacted]

L'attività mi è piaciuta molto, soprattutto verso la fine; infatti all'inizio avevo capito poco. Nonostante l'inizio, verso la fine ho capito tutto ed è stata una sorpresa, quindi mi è piaciuto molto.

RACHELE MONTI

attività interessante e utile per ragionare, soprattutto quando ero sicura di avere ragione su alcuni ragionamenti e invece mi sbagliavo. Aiuta ad andare oltre l'apparenza

È stata un'attività interessante ma a tratti noiosa poiché nei giorni d'oggi le cose si dovrebbero sapere, però grazie a queste domande sono riuscito ad applicare le mie conoscenze confrontandomi con un personaggio che non le ha e che ragionava solo su ciò che vedeva.

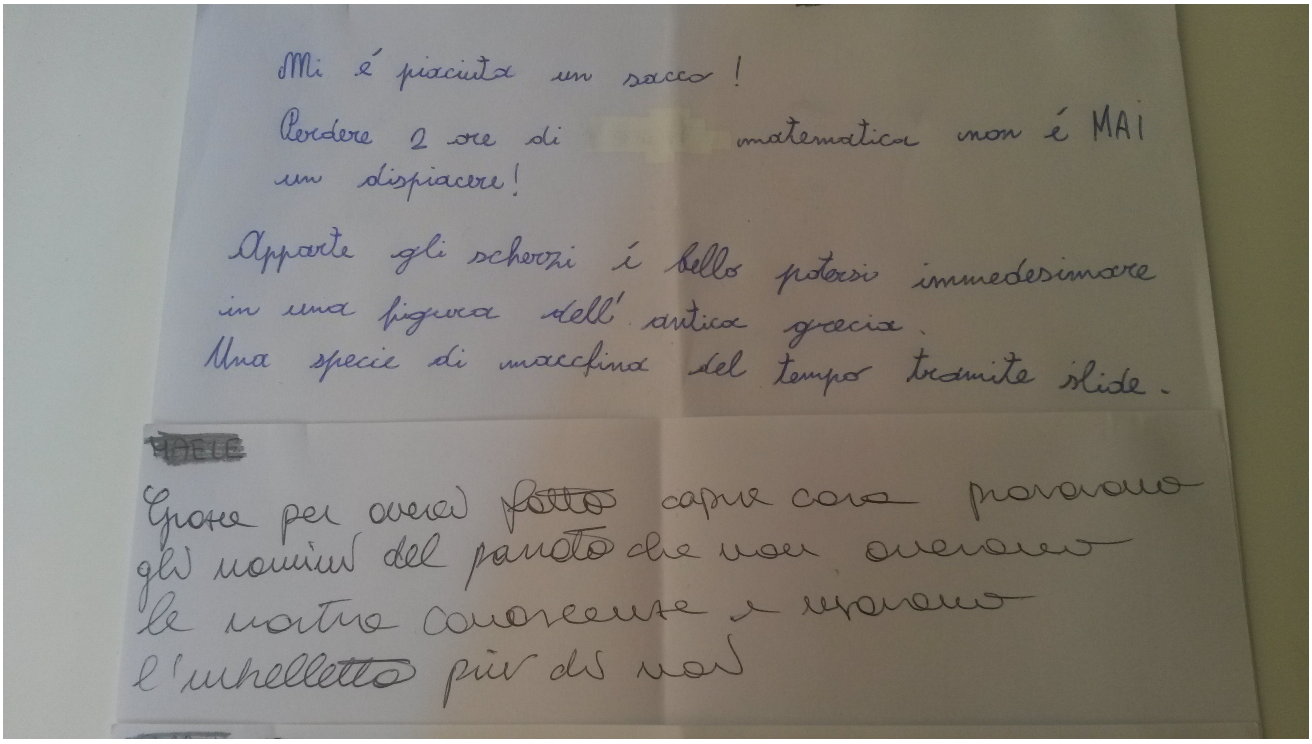


Questa attività mi è piaciuta molto e grazie ad essa sono riuscita ad arrivare da sola ~~[illegible]~~ alla dimostrazione vera e propria, quando invece prima la sapevo solo per la teoria.

Questa attività l'ho trovata interessante ma nello stesso tempo intrigante e stimolante, perché all'inizio sinceramente capivo veramente poco, poi ho trovato un senso alla fine.

[redacted]

L'attività è stata molto interessante perché è servita ad ampliare in quel momento sia la logica che le conoscenze matematiche, ma soprattutto anche a comprendere il linguaggio che Socrate utilizza che è filosofico e quasi come un illusionista.



Mi è piaciuta un sacco!

Perdere 2 ore di matematica non è MAI un dispiacere!

Apparte gli scherzi è bello potersi immedesimare in una figura dell'antica grecia.
Una specie di macchina del tempo tramite slide.

[redacted]

Grazie per averci ~~fatto~~ capire cosa provavano gli uomini del passato che non avevano le nostre conoscenze e usavano l'intelletto più di noi

É stata un'attività molto interessante, soprattutto perché mi ha permesso di comprendere le FONDAMENTA delle regole che imponiamo a scuola, spesso senza capire realmente il motivo.
É stato dunque molto utile e bisognerebbe fare attività di questo tipo più spesso.

Mi è piaciuta molto, è stata istruttiva.
Ho riflettuto su come si confrontano le opinioni.

L'ATTIVITÀ SVOLTA IN CLASSE È STATA INTERESSANTE E SIMPATICA. MI HANNO COLPITO SOPRATTUTTO I RAGIONAMENTI DI SOCRATE E LE RISPOSTE APPARENTEMENTE EFFETTIVE DELLO SCHIAVO.

attività molto carina, bellissimo come Federica si è impegnata, interessantissimo, anche se finita l'attività il mio cervello fumava.

Ringraziamenti

Il primo importante ringraziamento è per Lucia, per le sue idee brillanti.
Non avrei potuto realizzare questa tesi senza la supervisione del professor Bolondi e la disponibilità del prof. Paolo Bascetta e del Liceo Sabin di Bologna che mi hanno permesso di condurre la sperimentazione. Grazie a Maele, Fiorenza, Martina, Daniela, Sara, Paolo, Ardit, Gregorio, Veronica, Benito, Arianna, Vito, Elisabetta, Rachele, Joy, Dario, Giorgia, Federico, Stanislav, Andrea, Luca, Hanbing, Daniele e Giovanni per la loro partecipazione attiva alla sperimentazione.
Ringrazio i miei genitori: la mia mamma perchè con amore, passione, gioia, fede e dedizione mi ha insegnato tutto ciò che riesco a fare bene nella vita, perchè è lo specchio in cui mi riconosco, per come sono nell'essenza; e il mio papà che con amore e pazienza ha tolto le rotelle alla bicicletta della vita della sua principessa, dandomi la fiducia e l'amore necessari affinchè io potessi pedalare verso il raggiungimento dei miei obiettivi e per sognare sempre nuovi sogni. Ringrazio Chicco per i sorrisi, la complicità, la comprensione, la pazienza e la condivisione, fedele compagno e fratello di giochi e di vita.
Ringrazio Roberta, perchè la vita ci ha reso sorelle e perchè con la sua protezione e sorridente presenza mi ha fatto sentire degna di importanza. Ringrazio Zio Già, perchè mi ha insegnato che la vita può darti qualunque ruolo e che con impegno e tenacia si può essere, o imparare ad essere, bravi e capaci.
Ringrazio Giovanni perchè l'amore mi guarda con i suoi occhi, che cambiano colore tra le tante sfumature di ciò che siamo noi: amici, confidenti, preziosi e innamorati.

Ringrazio Pietro e Luca, perchè, essendo famiglia dei miei familiari, insieme, anche noi, siamo famiglia.
Ringrazio Ela (Emanuela) che mi ha insegnato che dare affetto è tanto bello quanto riceverlo; Angela che mi ha insegnato come si può lottare e vincere avendo accanto le persone giuste, con la gioia e la tenacia; Fabio che mi ha insegnato che il sole, anche dopo le tempeste, torna sempre ed è sempre più bello; Lucia perchè mi ha insegnato la sicurezza, la coerenza e che le impressioni iniziali possono mutarsi in amicizie vere; Sharon, Carlotta e Dario per la compagnia e la condivisione e Luca che mi ha insegnato ad andare alla ricerca dei talenti.
Ringrazio Chiara, Maria Luisa, Michela, Don Alessandro, Giusy, Suor Francesca, Luisa, Liana e Pino perchè non mi hanno fatto mai sentire sola e perchè con loro ogni giorno è speciale.

Bibliografia

[1] MIUR 2012. *Schema di regolamento recante Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali*, Roma.

[2] Brousseau, G. *Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques*, Bednarz, N. e Garnier, C. (Eds.), Constructions des savoirs, obstacles et conflicts, Agence d'Arc, Montreal, 1989.

[3] Radford, L. *On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching os Mathematics: Towards a Socio−Cultural History of Mathematics*, For the Learning of Mathematics, 1997.

[4] Radford, L. *On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Exemple from Greek Mathematical Thought*, Educational Perspective on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing, Legas, Ottawa, 2003.

[5] Radford, Boero e Vasco *Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics* History in Mathematics Education. The ICMI Study, Kluwer, Dordrecht, 2000.

[6] Pizzamiglio, P. *Matematica e storia. Per una didattica interdisciplinare*, La Scuola, Brescia 2002.

[7] Fauvel, J. *Using history in mathematics education*, For the learning of mathematics, 11, n.2, 2-6, 1991.

[8] Furinghetti, F. *Insegnare matematica in una prospettiva storica*, L'educazione matematica,; s.3,4, 123-134, 1993.

[9] *Liceo scientifico. Programma di matematica.* r.d. n. 2473 del 1925.

[10] I. Grattan-Guinnes, *Not from nowhere: history and philosophy behind mathematical education*, International journal of mathematical education in science and technology, 4, 421-423, 1973.

[11] Barbin, E. *Préface. In Commission Inter−Irem Épistémologie et histoire des mathématiques.* Quatrième université d'été d'histoire des mathématiques (ii−iii). Lille: IREM de Lille.

[12] *Riflessioni e proposte sull'argomentazione*, a cura del Grupppo di Progetto (primaria-medie-superiori), Piano Nazionale Lauree Scientifiche, Unità locale Università di Genova, Laboratorio PLS.

[13] Platone. *Simposio*, p.19-21