

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

**IL METODO DELLA PARAMETRICE
PER OPERATORI PARABOLICI**

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Giovanna Citti

Presentata da:
Riccardo Cesari

Prima Sessione
Anno Accademico 2014/2015

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è determinare le soluzioni fondamentali di equazioni paraboliche con il metodo della parametrica.

Si dice operatore parabolico l'operatore:

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \frac{\partial}{\partial x_i} u + c(x,t)u - \frac{\partial}{\partial t} u, \quad (1)$$

dove a_{ij} è una matrice definita positiva, definita su $Q = \bar{\Omega} \times [T_1, T_2]$, dove Ω è un aperto limitato di \mathbb{R}^n , mentre le b_i , c sono funzioni definite sul medesimo insieme.

Viene dapprima considerato il caso modello di operatori uniformemente parabolici a coefficienti a_{ij} costanti e con $b_i = 0$ e $c = 0$:

$$L_A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

La soluzione fondamentale Γ_A di tale operatore è facilmente ricavabile dalla soluzione fondamentale dell'operatore del calore con un cambiamento di variabile; dove la soluzione fondamentale dell'operatore del calore è ben nota essere la Gaussiana:

$$\Gamma(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Conseguentemente la soluzione fondamentale Γ_A risulta essere:

$$\Gamma_A(x,t) = \frac{\sqrt{\det(A^{-1})}}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|_A^2}{4t}},$$

dove la norma $\|x\|_A$ è la norma indotta dalla matrice $A = (a_{ij})$.

Al contrario, per gli operatori a coefficienti Hölderiani si utilizza il metodo della parametrica, che consiste nell'approssimare l'operatore L con operatori modello a coefficienti costanti di cui si conosce esplicitamente la soluzione fondamentale.

Fissati $(\xi, \tau) \in Q$ e denotata con $\Gamma_{\xi, \tau} := \Gamma_{A(\xi, \tau)}$ la soluzione fondamentale dell'operatore $L_{\xi, \tau} := L_{A(\xi, \tau)}$, allora si cercherà la soluzione fondamentale $\bar{\Gamma}(x, t, \xi, \tau)$ dell'operatore L nella forma:

$$\bar{\Gamma}(x, t, \xi, \tau) = \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau) + \sum_{j=1}^{+\infty} V_j(x, t) \quad (3)$$

dove gli operatori $V_j(x, t)$ sono operatori di convoluzione con la soluzione fondamentale $\Gamma_{\xi, \tau}$ scelti in modo tale che verifichino la condizione seguente:

$$\begin{cases} V_0 = \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau) \\ LV_j(x, t) = -R_j^{\xi, \tau}(x, t) + R_{j+1}^{\xi, \tau}(x, t) \quad \forall j \geq 1 \end{cases} \quad (4)$$

Risulta:

$$R_j^{\xi, \tau}(x, t) := \int_{T_0}^t \int_{\bar{\Omega}} (L - L_{y, \sigma}) \Gamma_{y, \sigma}(x - y, t - \sigma) V_{j-1}(y, \sigma) dy d\sigma,$$

Da questo segue formalmente che la funzione $\bar{\Gamma}(x, t, \xi, \tau)$ così costruita è soluzione fondamentale dell'operatore L , infatti usando la 3 si ha:

$$\begin{aligned} L\bar{\Gamma}(x, t, \xi, \tau) &= L \left(\Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau) + \sum_{j=1}^{+\infty} V_j(x, t) \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \left(-R_j^{\xi, \tau}(x, t) + R_{j+1}^{\xi, \tau}(x, t) \right) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

dove abbiamo usato la condizione 4 per concludere. In particolare le funzioni $V_j(x, t)$ saranno della forma:

$$V_j(x, t) = \int_{\tau}^t \int_{\bar{\Omega}} \Gamma_{y, \sigma}(x - y, t - \sigma) R_j^{\xi, \tau}(y, \sigma) dy d\sigma$$

Quindi dalla 3, la soluzione fondamentale dell'operatore L sarà della forma:

$$\bar{\Gamma}(x, t, \xi, \tau) = \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau) + \int_{\tau}^t \int_{\bar{\Omega}} \Gamma_{y, \sigma}(x - y, t - \sigma) \sum_{j=1}^{+\infty} R_j^{\xi, \tau}(y, \sigma) dy d\sigma \quad (6)$$

Nel primo capitolo verranno quindi mostrate alcune proprietà delle funzioni $V_j(x, t)$ e $R_j^{\xi, \tau}(x, t)$, che spiegheranno in modo rigoroso i calcoli puramente formali appena mostrati. Tra le proprietà principali che verranno descritte sono di primaria importanza il fatto che le $V_j(x, t)$ siano derivabili due volte rispetto alle direzioni spaziali e una volta rispetto a quella temporale. La convergenza della serie degli $R_j^{\xi, \tau}(x, t)$ in 6 si deduce dal fatto che tale funzione possa essere maggiorata con:

$$|R_{j_0+m}^{\xi, \tau}(x, t)| \leq K_0 \frac{(K(t - \tau)^{\alpha/2})^m}{\gamma(1 + m\frac{\alpha}{2})},$$

dove la funzione $\gamma(x)$ è la Gamma di Eulero.

Nell'ultimo capitolo verrà presentata un'applicazione del metodo della parametrica ad una particolare equazione di Kolmogorov Fokker Planck, mostrando come tale metodo possa essere utile nella ricerca della soluzione dell'operatore:

$$\bar{L} \equiv a(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}. \quad (7)$$

Il procedimento sarà lo stesso del caso generale: inizialmente si cercherà, con l'aiuto della trasformata di Fourier, la soluzione fondamentale dell'operatore modello con coefficiente $a = 1$:

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}. \quad (8)$$

Dopodichè, sempre tramite un cambiamento di variabile, si otterrà la soluzione fondamentale dell'operatore a coefficiente $a(x, t)$ costante; infine, con il metodo della parametrica si arriva alla soluzione dell'operatore \bar{L} approssimando tale operatore con operatori a coefficienti costanti di cui si conoscono le soluzioni fondamentali.

0.1 Motivazioni del problema

Ci interessa analizzare tale operatore, in quanto compare in molte applicazioni che spaziano dalla fisica alla finanza.

In fisica si presenta essenzialmente in due casi: come operatore appartenente alla classe degli operatori di diffusione, che vengono utilizzati per analizzare la diffusione di determinate sostanze attraverso materiali con specifiche caratteristiche. In secondo luogo compare quando si studia l'equazione di Boltzmann, che descrive il comportamento di un sistema termodinamico. In tal caso il primo addendo dell'operatore \bar{L} risulta essere una semplificazione dell'operatore di collisione di Boltzmann, il quale modella gli urti tra le particelle del sistema (per esempio le particelle di un gas).

Il modello di Black-Scholes-Merton viene utilizzato in finanza per determinare il prezzo di non arbitraggio di un'opzione a partire dal valore del suo sottostante. Più precisamente, se si considera un'opzione asiatica a media geometrica, il cui valore al tempo t dipende dalla media $M(t)$ dei prezzi del sottostante fino a quel momento, dove:

$$M(t) = \int_0^t \log(S(\tau)) d\tau$$

e $S(t)$ è il valore al tempo t del sottostante. Se denotiamo il valore dell'opzione al tempo t con $V(t, S(t), M(t))$ e consideriamo un mercato con tasso d'interesse nullo, allora dal modello di Black-Scholes seguirà che il prezzo dell'opzione sarà il valore della soluzione della seguente equazione differenziale al tempo $t = 0$:

$$S^2(t) \frac{\partial^2}{\partial S^2} V + \log(S) \frac{\partial}{\partial M} V + \frac{\partial}{\partial t} V = 0 \quad (9)$$

con condizione finale:

$$V(T, S(T), M(T)) = \max(S(T) - e^{\frac{M(T)}{T}}, 0) \quad (10)$$

Effettuando il cambio di variabile:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \log(S(t)) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} M(t) \\ u(x, y, t) = e^{\frac{\sqrt{2}\sigma}{4}x + \frac{\sigma^2}{8}t} \cdot V(T - t, e^{\frac{\sigma x}{\sqrt{2}}}, \frac{\sigma y}{\sqrt{2}}) \end{cases} \quad (11)$$

si ottiene che la (9) è equivalente a:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u + x \frac{\partial}{\partial y} u - \frac{\partial}{\partial t} u = 0 \quad (12)$$

con condizione iniziale:

$$u(x, y, 0) = e^{\frac{\sqrt{2}\sigma}{4}x} \max(e^{\frac{\sigma x}{\sqrt{2}}} - e^{\frac{\sigma y}{T\sqrt{2}}}, 0) \quad (13)$$

che è proprio un'equazione del tipo (7).

Indice

Introduzione	3
0.1 Motivazioni del problema	6
Prerequisiti	11
0.2 Soluzione fondamentale per operatori a coefficienti costanti . .	11
1 Metodo della Parametrica per operatori parabolici	15
1.1 Operatori di convoluzione con la soluzione fondamentale . . .	15
1.2 Costruzione della Parametrica	26
1.3 Velocità di convergenza del metodo	38
2 Operatore di Fokker-Planck	41
2.1 Introduzione al problema	41
2.2 Soluzione fondamentale dell'equazione modello	42
2.3 Equazione a coefficienti costanti	46
2.4 Equazione a coefficienti Hölderiani	49
2.5 Metodo della parametrica per l'equazione di Fokker-Planck . .	52
Bibliografia	55

Prerequisiti

In questo capitolo richiamiamo alcune proprietà classiche della soluzione fondamentale degli operatori parabolici a coefficienti costanti.

0.2 Soluzione fondamentale per operatori a coefficienti costanti

Definizione 0.1. Sia A una matrice simmetrica definita positiva, allora si definisce il seguente prodotto scalare:

$$\langle v, w \rangle_A := \langle A^{-1}v, w \rangle.$$

A cui è associata la seguente norma:

$$\|x\|_A = \sqrt{\langle x, x \rangle_A}.$$

Osservazione 1. Per il fatto che la matrice A sia simmetrica definita positiva, vale:

$$\lambda_{min}\|x\|^2 \leq \|x\|_A^2 \leq \lambda_{max}\|x\|^2. \quad (14)$$

In particolare, la norma associata ad A è equivalente alla norma Euclidea.

Definizione 0.2. Sia A simmetrica definita positiva. Allora si dice operatore uniformemente parabolico a coefficienti costanti:

$$L_A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Definizione 0.3. Sia Q il cilindro $Q = \bar{\Omega} \times [T_0, T_1]$, con Ω aperto limitato di \mathbb{R}^n . Sia $\Gamma(x, t, \xi, \tau)$ una funzione definita su Q per $t > \tau$ tale che rispetti le due condizioni seguenti:

1. Per ogni coppia $(\xi, \tau) \in Q$ fissata, $\Gamma(x, t, \xi, \tau)$ è soluzione dell'equazione $Lu = 0 \quad \forall (x, t) \in Q$, con $(x, t) \neq (\xi, \tau)$;
2. Per ogni funzione continua f su $\bar{\Omega}$ vale:

$$\lim_{t \rightarrow \tau^+} \int_{\bar{\Omega}} \Gamma(x, t, \xi, \tau) f(\xi) d\xi = f(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (15)$$

Allora tale funzione è detta soluzione fondamentale dell'equazione $Lu = 0$ in Q .

Osservazione 2. Se la matrice A è l'identità, allora si ottiene l'operatore del calore:

$$L_{heat} \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial}{\partial t},$$

la cui soluzione fondamentale è nota esplicitamente:

$$\Gamma(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad (16)$$

che ha integrale 1 rispetto alla variabile x .

Osservazione 3. Siccome A è una matrice simmetrica definita positiva, lo sarà anche A^{-1} e quindi esisterà una matrice N simmetrica definita positiva tale per cui ${}^t N N = A^{-1}$. Se u è soluzione di $L_{heat} u(x) = f(x)$, allora $v(x, t) := u(Nx, t)$ verifica $L_A v(x, t) = f(Nx, t)$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} L_A(v(x, t)) &= L_A(u(Nx, t)) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u(Nx, t)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial u(Nx, t)}{\partial t} = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ij} \langle Hess(u(Nx, t)) N e_i, N e_j \rangle - \frac{\partial u(Nx, t)}{\partial t} = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial x_t}(Nx, t) n_{si} n_{tj} = \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial x_t}(Nx, t) \delta_{st} = \end{aligned} \quad (17)$$

$$= \Delta u(Nx, t) - \frac{\partial u(Nx, t)}{\partial t} = f(Nx, t)$$

□

Definizione 0.4. Quindi possiamo definire:

$$\Gamma_A(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\det(A)}} \Gamma(Nx, t),$$

quindi esplicitamente si ha:

$$\Gamma_A(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ \frac{\sqrt{\det(A^{-1})}}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|_A^2}{4t}} & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad (18)$$

che risulta quindi essere la soluzione fondamentale dell'operatore L_A , con integrale 1 rispetto alla variabile x .

Osservazione 4. Le derivate di $\Gamma_A(x, t)$ sono:

$$\frac{\partial \Gamma_A(x, t)}{\partial x_i} = -\frac{\sqrt{\det(A^{-1})}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{e^{-\frac{\|x\|_A^2}{4t}}}{2t^{\frac{n}{2}+1}} \langle x, e_i \rangle_A = -\Gamma_A(x, t) \frac{\langle x, e_i \rangle_A}{2t}; \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Gamma_A(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\sqrt{\det(A^{-1})}}{(4\pi)^{n/2}} \left(-\frac{e^{-\frac{\|x\|_A^2}{4t}}}{2t^{\frac{n}{2}+1}} \langle e_j, e_i \rangle_A + \frac{e^{-\frac{\|x\|_A^2}{4t}}}{4t^{\frac{n}{2}+2}} \langle x, e_i \rangle_A \langle x, e_j \rangle_A \right) = \\ &= \Gamma_A(x, t) \frac{\langle x, e_i \rangle_A \langle x, e_j \rangle_A - 2t \langle e_j, e_i \rangle_A}{4t^2}; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \Gamma_A(x, t)}{\partial t} = \frac{\sqrt{\det(A^{-1})}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{e^{-\frac{\|x\|_A^2}{4t}}}{t^{\frac{n}{2}+2}} \left(\frac{1}{4} \|x\|_A^2 - \frac{n}{2} t \right) = \Gamma_A(x, t) \frac{\|x\|_A^2 - 2nt}{4t^2}. \quad (21)$$

Osservazione 5. Sia k fissato, allora vale:

$$\exists c > 0 : \quad s^k e^{-s^2} \leq C e^{-s^2/2} \quad \forall s \geq 0.$$

In particolare per $k = 1/2, 1, 2$ allora $C < 1$.

Dimostrazione. La disuguaglianza è banalmente verificata per $s = 0$ e per $s \rightarrow +\infty$. Quindi esisterà un compatto K centrato nell'origine per cui la disuguaglianza sia verificata per $C = 1$, inoltre la funzione $s^k e^{-s^2/2}$, essendo continua, ammetterà un massimo C_1 sul compatto K . Se si prende $C = \max\{C_1, 1\}$, allora la tesi è verificata. \square

Proposizione 0.2.1. *Valgono le seguenti maggiorazioni per Γ_A e le sue derivate:*

$$\Gamma_A(x, t) \leq \frac{\sqrt{\det(A^{-1})}}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\lambda_{\min}\|x\|^2}{4t}}, \quad (22)$$

$$\left| \frac{\partial \Gamma_A(x, t)}{\partial x_i} \right| \leq \frac{\lambda_{\max}}{\sqrt{t}} \Gamma_A^{(\lambda_{\min})}(x, t), \quad (23)$$

$$\left| \frac{\partial^2 \Gamma_A(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq \frac{\lambda_{\max} M}{t} \Gamma_A^{(\lambda_{\min})}(x, t), \quad (24)$$

$$\left| \frac{\partial \Gamma_A(x, t)}{\partial t} \right| \leq \frac{\lambda_{\max} M}{t} \Gamma_A^{(\lambda_{\min})}(x, t). \quad (25)$$

Dove

$$M = \max_{1 \leq i, j \leq n} \max_{(x, t) \in Q} a_{ij}(x, t).$$

Dimostrazione. Per la prima disuguaglianza si è usata solo la (14). La seconda disuguaglianza segue dall'osservazione 5, dalla (14) e dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \Gamma_A(x, t)}{\partial x_i} \right| &\leq \Gamma_A(x, t) \frac{|\langle x, e_i \rangle_A|}{2t} \leq \Gamma_A(x, t) \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\lambda_{\max} \|x\|}{\sqrt{t}} \leq \\ &\leq \frac{\lambda_{\max}}{\sqrt{t}} \frac{\sqrt{\det(A^{-1})}}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\lambda_{\min}\|x\|^2}{4t}} =: \frac{\lambda_{\max}}{\sqrt{t}} \Gamma_A^{(\lambda_{\min})}(x, t). \end{aligned}$$

Per la terza disuguaglianza si trova, analogamente alla precedente:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 \Gamma_A(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} \right| &\leq \Gamma_A(x, t) \frac{|\langle x, e_i \rangle_A \langle x, e_j \rangle_A - 2t \langle e_j, e_i \rangle_A|}{4t^2} \leq \\ &\leq \Gamma_A(x, t) \frac{1}{t} \frac{M (\lambda_{\max} \|x\|^2 - 2t)}{4t} \leq \Gamma_A(x, t) \frac{1}{t} \frac{M \lambda_{\max} \|x\|^2}{4t} \leq \\ &\leq \frac{M \lambda_{\max}}{t} \frac{\sqrt{\det(A^{-1})}}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\lambda_{\min}\|x\|^2}{4t}} =: \frac{M \lambda_{\max}}{t} \Gamma_A^{(\lambda_{\min})}(x, t). \end{aligned}$$

Infine la quarta disuguaglianza si trova analogamente alla terza. \square

Capitolo 1

Metodo della Parametrica per operatori parabolici

Il metodo della parametrica permette di determinare la soluzione fondamentale di un operatore parabolico a coefficienti Hölderiani, a partire dalla soluzione fondamentale di un operatore modello a coefficienti costanti. In particolare vedremo che la soluzione fondamentale dell'operatore parabolico si ottiene attraverso un operatore di convoluzione con la soluzione fondamentale dell'operatore a coefficienti costanti trovata nel capitolo precedente.

1.1 Operatori di convoluzione con la soluzione fondamentale

Definizione 1.1. Una funzione f su $\bar{\Omega}$ è detta Hölderiana di ordine α , con $0 < \alpha \leq 1$, se $\exists c \in \mathbb{R}, c > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| < c|x - y| \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Ci interessa trovare la soluzione fondamentale di un operatore parabolico L così definito:

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \frac{\partial}{\partial x_i} u + c(x,t)u - \frac{\partial}{\partial t} u, \quad (1.1)$$

dove i coefficienti a_{ij}, b_i e c sono funzioni definite sul cilindro Q , tali che valgano le seguenti condizioni di Holderianità:

$$|a_{ij}(x, t) - a_{ij}(y, \tau)| \leq K (|x - y|^\alpha + |t - \tau|^{\alpha/2}), \quad (1.2)$$

$$|b_i(x, t) - b_i(y, \tau)| \leq K|x - y|^\alpha, \quad (1.3)$$

$$|c(x, t) - c(y, \tau)| \leq K|x - y|^\alpha. \quad (1.4)$$

Inoltre consideriamo la funzione matriciale $A(x, t) = (a_{ij}(x, t))_{1 \leq i, j \leq n}$ simmetrica definita positiva.

Notazione. $\forall (y, \sigma)$ fissati, denoteremo il seguente prodotto scalare:

$$\langle v, w \rangle_{y, \sigma} := \langle A^{-1}(y, \sigma)v, w \rangle.$$

La cui norma associata è:

$$\|x\|_{y, \sigma} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{y, \sigma}}.$$

Osservazione 6. Per il fatto che la matrice A sia simmetrica definita positiva, vale:

$$\lambda_{min}\|x\|^2 \leq \|x\|_{y, \sigma}^2 \leq \lambda_{max}\|x\|^2, \quad (1.5)$$

con $\lambda_{max} \geq \lambda_{min} > 0$.

Dimostrazione. Sia $\lambda_{min} := \inf(C)$, con:

$$C := \{\lambda \in \mathbb{R}, \exists (y, \sigma) \in Q \text{ t.c. } \lambda \text{ sia autovalore di } A^{-1}(y, \sigma)\}.$$

Allora vale $\lambda_{min} > 0$, perché tutti i $\lambda \in C$ sono strettamente positivi, in quanto la matrice A è definita positiva. Se per assurdo valesse $\lambda_{min} = 0$, allora $\exists \{(y_n, \sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}\} \in Q$ tale che $\lambda_n \rightarrow 0$ dove λ_n è il più piccolo autovalore della matrice $A^{-1}(y_n, \sigma_n)$. Ma, siccome Q è compatto, allora $\exists (\bar{y}, \bar{\sigma}) \in Q$ tale che il più piccolo autovalore della matrice $A^{-1}(\bar{y}, \bar{\sigma})$ sia 0, che è assurdo. \square

Definizione 1.2. $\forall (\xi, \tau) \in Q$:

$$\Gamma_{\xi, \tau}(x, t) := \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ \frac{\sqrt{\det(A^{-1}(\xi, \tau))}}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|_{\xi, \tau}^2}{4t}} & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

che risulta essere un'altra gaussiana con integrale 1 lungo la direzione delle x .

Come avevamo precedentemente illustrato, per trovare la soluzione fondamentale dell'operatore uniformemente parabolico, si utilizza un operatore modello a coefficienti costanti. Precisamente la soluzione fondamentale sarà rappresentata nella forma:

$$\bar{\Gamma}_{\xi,\tau}(x,t) := \Gamma_{\xi,\tau}(x-\xi, t-\tau) - \int_{\tau}^t \int_{\bar{\Omega}} \Gamma_{y,\sigma}(x-y, t-\sigma) \phi_{\xi,\tau}(y, \sigma) dy d\sigma. \quad (1.7)$$

dove $\phi_{\xi,\tau}$ è un nucleo integrale che verrà costruito per ricorrenza.

Per ottenere questa rappresentazione dovremmo utilizzare le seguenti funzioni:

$$J(x,t,\tau) := \int_{\bar{\Omega}} \Gamma_{\xi,\tau}(x-\xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi, \quad (1.8)$$

$$V(x,t) := \int_{T_0}^t J(x,t,\tau) d\tau = \int_{T_0}^t \int_{\bar{\Omega}} \Gamma_{\xi,\tau}(x-\xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (1.9)$$

dove f è una funzione Hölderiana su Q . Ora studiamo le proprietà di regolarità di V .

Inizialmente si osserva che, se si raggruppano le variabili: $y' = (\xi, \tau)$ e $x' = (x, t)$, si ottiene:

$$\begin{aligned} V(x,t) &= \int_{T_0}^t \int_{\bar{\Omega}} C(\xi, \tau) \Gamma_{\xi,\tau}(x-\xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ &= \int_Q \Gamma_{y'}(x' - y') f(y') dy' = \Gamma_{\xi,\tau} * f, \end{aligned} \quad (1.10)$$

che è ben definita, in quanto $f \in C_0(Q)$.

Teorema 1.1.1. *Sia $f(x,t)$ una funzione continua su Q . Allora $V(x,t)$ ha le derivate parziali rispetto alle x continue su Q e vale:*

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i} = \int_{T_0}^t \int_{\bar{\Omega}} \frac{\partial \Gamma_{\xi,\tau}(x-\xi, t-\tau)}{\partial x_i} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (1.11)$$

Dimostrazione. Siccome $\Gamma_{\xi,\tau}(x-\xi, t-\tau)$ è una gaussiana, allora vale:

$$\int_{\bar{\Omega}} \frac{\partial \Gamma_{\xi,\tau}(x-\xi, t-\tau)}{\partial x_i} d\xi \leq \int_{\bar{\Omega}} \frac{\lambda_{max}}{\sqrt{t-\tau}} \Gamma_{\xi,\tau}^{(\lambda_{min})}(x-\xi, t-\tau) d\xi \leq \frac{C}{\sqrt{t-\tau}}, \quad (1.12)$$

che è una funzione L^1 rispetto al tempo. Quindi applicando due volte il teorema di convergenza dominata di Lebesgue si ottiene la tesi.

Inoltre, siccome

$$\frac{\partial \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i}$$

è continua, allora, dal teorema di convergenza dominata, segue la continuità della $\frac{\partial V(x, t)}{\partial x_i}$. \square

Lemma 1.1.2. *Vale:*

$$\left| \frac{\partial^2 (\Gamma_{\xi, \tau} - \Gamma_{y, t})(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq \frac{C}{|t - \tau|^{1-\alpha/2}} \Gamma_{\xi, \tau}^{\lambda_{\min}}(x - \xi, t - \tau). \quad (1.13)$$

Dimostrazione. Innanzitutto ricordiamo che, per il teorema del valor medio, $\exists c \in [a, b]$ tale che:

$$\left| \frac{e^b - e^a}{b - a} \right| \leq e^c$$

E quindi, siccome per la (1.5) valgono:

$$\|x\|_{\xi, \tau} \geq \lambda_{\min} |x|^2 \geq 0,$$

$$\|x\|_{y, t} \geq \lambda_{\min} |x|^2 \geq 0.$$

Allora si ottiene:

$$\left| e^{-\frac{\|x - \xi\|_{\xi, \tau}}{4(t - \tau)}} - e^{-\frac{\|x - \xi\|_{y, t}}{4(t - \tau)}} \right| \leq e^c \left| \frac{\|x - \xi\|_{y, t} - \|x - \xi\|_{\xi, \tau}}{4(t - \tau)} \right|,$$

dove $\min(-\frac{\|x - \xi\|_{y, t}}{4(t - \tau)}, -\frac{\|x - \xi\|_{\xi, \tau}}{4(t - \tau)}) \leq c \leq \max(-\frac{\|x - \xi\|_{y, t}}{4(t - \tau)}, -\frac{\|x - \xi\|_{\xi, \tau}}{4(t - \tau)}) \leq -\frac{\lambda_{\min} \|x - \xi\|^2}{4|t - \tau|}$
e quindi:

$$\begin{aligned} \left| e^{-\frac{\|x - \xi\|_{\xi, \tau}}{4(t - \tau)}} - e^{-\frac{\|x - \xi\|_{y, t}}{4(t - \tau)}} \right| &\leq e^{-\frac{\lambda_{\min} \|x - \xi\|^2}{4|t - \tau|}} \left| \frac{\|x - \xi\|_{y, t} - \|x - \xi\|_{\xi, \tau}}{4(t - \tau)} \right| \leq \\ &\leq e^{-\frac{\lambda_{\min} \|x - \xi\|^2}{4|t - \tau|}} \frac{|\langle (A^{-1}(\xi, \tau) - A^{-1}(y, t))x - \xi, x - \xi \rangle|}{4|t - \tau|} \leq \\ &\leq e^{-\frac{\lambda_{\min} \|x - \xi\|^2}{4|t - \tau|}} \frac{\|A^{-1}(\xi, \tau) - A^{-1}(y, t)\|_1 \|x - \xi\|^2}{4|t - \tau|}. \end{aligned}$$

Per l'Hölderianità dei coefficienti di A si ottiene che $\|A^{-1}(\xi, \tau) - A^{-1}(y, t)\|_1 \leq n^2(\|x - \xi\|^\alpha + |\tau - t|^{\alpha/2})$; quindi, tornando al calcolo precedente, risulta:

$$\left| e^{-\frac{\|x-\xi\|\xi_{\xi,\tau}}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{\|x-\xi\|y_{y,t}}{4(t-\tau)}} \right| \leq e^{-\frac{\lambda_{\min}\|x-\xi\|^2}{4|t-\tau|}} \frac{n^2(\|x - \xi\|^\alpha + |\tau - t|^{\alpha/2})\|x - \xi\|^2}{4|t - \tau|}.$$

Ora, utilizzando l'osservazione 5 con $k = 2$, si ottiene:

$$\left| e^{-\frac{\|x-\xi\|\xi_{\xi,\tau}}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{\|x-\xi\|y_{y,t}}{4(t-\tau)}} \right| \leq e^{-\frac{\lambda_{\min}\|x-\xi\|^2}{4|t-\tau|}} \frac{n^2}{4} (\|x - \xi\|^\alpha + |\tau - t|^{\alpha/2}).$$

Ma,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^2 (\Gamma_{\xi,\tau} - \Gamma_{y,t})(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq \left| C \frac{(\Gamma_{\xi,\tau} - \Gamma_{y,t})(x - \xi, t - \tau)}{t - \tau} \right| \leq \\ & \leq \frac{C}{(t - \tau)(4\pi(t - \tau))^{n/2}} \left| e^{-\frac{\|x-\xi\|\xi_{\xi,\tau}^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{\|x-\xi\|y_{y,t}^2}{4(t-\tau)}} \right| \leq \\ & \leq \frac{C}{(t - \tau)(4\pi(t - \tau))^{n/2}} \left| e^{-\frac{\lambda_{\min}\|x-\xi\|^2}{4|t-\tau|}} \frac{(\|\xi - x\|^\alpha + |\tau - t|^{\alpha/2})}{4} \right| \leq \\ & \leq \frac{C}{(4\pi(t - \tau))^{n/2}} \left[\left| e^{-\frac{\lambda_{\min}\|x-\xi\|^2}{4|t-\tau|}} \frac{\|\xi - x\|^\alpha}{|t - \tau|} \right| + \left| e^{-\frac{\lambda_{\min}\|x-\xi\|^2}{4|t-\tau|}} \frac{1}{|t - \tau|^{1-\alpha/2}} \right| \right] \leq \\ & \leq \frac{C}{(4\pi(t - \tau))^{n/2}} \left[\left| e^{-\frac{\lambda_{\min}\|x-\xi\|^2}{4|t-\tau|}} \frac{\|\xi - x\|^\alpha}{|t - \tau|^{\alpha/2}} \frac{1}{|t - \tau|^{1-\alpha/2}} \right| + \left| e^{-\frac{\lambda_{\min}\|x-\xi\|^2}{4|t-\tau|}} \frac{1}{|t - \tau|^{1-\alpha/2}} \right| \right] \leq \\ & \leq \frac{C}{(4\pi(t - \tau))^{n/2}} \left| e^{-\frac{\lambda_{\min}\|x-\xi\|^2}{4|t-\tau|}} \frac{1}{|t - \tau|^{1-\alpha/2}} \right| \leq \frac{C}{|t - \tau|^{1-\alpha/2}} \Gamma_{\xi,\tau}^{\lambda_{\min}}(x - \xi, t - \tau). \end{aligned} \quad (1.14)$$

□

Teorema 1.1.3 (di divergenza). *Sia $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ compatto con frontiera $\partial\Omega \in C^1$ e sia $F \in C^1(K)$ una funzione a valori in \mathbb{R}^n , allora vale:*

$$\int_K \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS,$$

dove \mathbf{n} è la normale esterna a $\partial\Omega$.

Teorema 1.1.4. *Sia $f(x, t)$ una funzione Hölderiana rispetto alle x di ordine α su Q . Allora $V(x, t)$ ha le derivate parziali di secondo grado rispetto alle x continue su Q e vale:*

$$\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} = \int_{T_0}^t \int_{\bar{\Omega}} \frac{\partial^2 \Gamma_{\xi,\tau}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i \partial x_j} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (1.15)$$

Osserviamo che non possiamo utilizzare più la tecnica usata precedentemente, che era basata sul teorema di convergenza dominata, in quanto:

$$\left| \frac{\partial^2 \Gamma_{\xi, \tau}(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq \frac{\lambda_{max}}{t} \Gamma_{\xi, \tau}^{(\lambda_{min})}(x, t), \quad (1.16)$$

che non è integrabile per t vicino a 0; quindi per dimostrarlo sfrutteremo la condizione di Hölderianità della f .

Dimostrazione. Intanto ricordiamo che:

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x_i} = \int_{T_0}^t \frac{\partial J(x, t, \tau)}{\partial x_i} d\tau.$$

Sia $y \in \bar{\Omega}$ fissato, riscriviamo l'argomento dell'integrale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(x, t, \tau)}{\partial x_i} &= f(y, \tau) \int_{\bar{\Omega}} \frac{\partial \Gamma_{y, t}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i} d\xi \\ &+ f(y, \tau) \int_{\bar{\Omega}} \frac{\partial (\Gamma_{\xi, \tau} - \Gamma_{y, t})(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i} d\xi \\ &+ \int_{\bar{\Omega}} \frac{\partial \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i} (f(\xi, \tau) - f(y, \tau)) d\xi. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Sia $K \subseteq \bar{\Omega}$ una palla chiusa e sia ∂K la sua frontiera; possiamo scomporre il primo integrale della (1.17) e utilizzare il teorema di divergenza:

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Omega}} \frac{\partial \Gamma_{y, t}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i} d\xi &= \int_K \frac{\partial \Gamma_{y, t}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i} d\xi + \int_{\bar{\Omega} \setminus K} \frac{\partial \Gamma_{y, t}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i} d\xi = \\ &= \int_{\partial K} \Gamma_{y, t}(x - \xi, t - \tau) \nu_i dS + \int_{\bar{\Omega} \setminus K} \frac{\partial \Gamma_{y, t}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i} d\xi, \end{aligned} \quad (1.18)$$

dove ν_i è la i -esima componente della normale alla superficie dS . Ora, tornando alla (1.17) e differenziandola un'altra volta rispetto a x_j e scegliendo

$y = x$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J(x, t, \tau)}{\partial x_i \partial x_j} = & \underbrace{f(x, \tau) \left[\int_{\partial K} \frac{\partial \Gamma_{y,t}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i} \nu_i dS + \int_{\bar{\Omega} \setminus K} \frac{\partial^2 \Gamma_{y,t}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i \partial x_j} d\xi \right]}_{I_1} \Big|_{y=x} \\ & + \underbrace{f(x, \tau) \int_{\bar{\Omega}} \left[\frac{\partial^2 (\Gamma_{\xi,\tau} - \Gamma_{y,t})(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i \partial x_j} \right]}_{I_2} \Big|_{y=x} d\xi \\ & + \underbrace{\int_{\bar{\Omega}} \frac{\partial^2 \Gamma_{\xi,\tau}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i \partial x_j} (f(\xi, \tau) - f(x, \tau)) d\xi}_{I_3}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Inizialmente prendiamo in considerazione I_1 . Si osserva che gli argomenti di entrambi gli integrali sono $L^1(\bar{\Omega})$, i limiti degli argomenti esistono e sono entrambi 0 e che la derivata prima e la derivata seconda di $\Gamma_{y,t}(x - \xi, t - \tau)$ sono dominate da una funzione in $L^1(\bar{\Omega})$ la prima e una in $L^1(\bar{\Omega} \setminus K)$ la seconda. Quindi, per il teorema di convergenza dominata, si può concludere che $\lim_{\tau \rightarrow t} I_1 = 0$. Quindi risulta valere $I_1 \in L^1([T_0, T_1])$.

Usando la (24) e la Hölderianità della f otteniamo:

$$|I_3| \leq \frac{cost}{(t - \tau)^{1-\beta/2}}, \quad (1.20)$$

che è integrabile nel tempo.

Ora valutiamo I_2 , utilizzando il lemma precedente:

$$\begin{aligned} |I_2| &= |f(x, \tau)| \int_{\bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^2 (\Gamma_{\xi,\tau} - \Gamma_{y,t})(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \Big|_{y=x} d\xi \leq \\ &\leq C \frac{|f(x, \tau)|}{|t - \tau|^{1-\alpha/2}} \int_{\bar{\Omega}} \Gamma^{(\lambda_{min})}(x - \xi, t - \tau) d\xi \leq C \frac{|f(x, \tau)|}{|t - \tau|^{1-\alpha/2}}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Quindi dalla (1.21) si ottiene:

$$|I_2| \leq C \frac{|f(x, \tau)|}{|t - \tau|^{1-\alpha/2}}. \quad (1.22)$$

Da cui:

$$\left| \frac{\partial^2 J(x, t, \tau)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq \frac{K}{(t - \tau)^{1-\alpha/2}}. \quad (1.23)$$

Quindi si può procedere con il teorema di convergenza dominata per la derivazione, infatti valgono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(x, t, \tau)}{\partial x_i} &\in L^1([T_0, T_1]), \\ \left| \frac{\partial^2 J(x, t, \tau)}{\partial x_i \partial x_j} \right| &\leq \frac{K}{(t - \tau)^{1-\alpha/2}} \in L^1([T_0, T_1]). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Per verificare la continuità si utilizza sempre il teorema di convergenza dominata, le cui ipotesi sono soddisfatte grazie alla (1.24) e al fatto che per la (1.19) la funzione $\frac{\partial^2 J(x, t, \tau)}{\partial x_i \partial x_j}$ risulta continua rispetto a t quasi ovunque su $\bar{\Omega}$. \square

Teorema 1.1.5. *Sia $f(x, t)$ una funzione Hölderiana di ordine α su Q . Allora $V(x, t)$ ha la derivata parziale rispetto al tempo continua su Q e vale:*

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = f(x, t) + \int_{T_0}^t \int_{\bar{\Omega}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\xi, \tau) \frac{\partial^2 \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i \partial x_j} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (1.25)$$

Dimostrazione. Come si era precedentemente osservato, $\Gamma_{\xi, \tau}$ è soluzione dell'equazione a coefficienti costanti $L_{\xi, \tau} u = 0$, quindi:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\xi, \tau) \frac{\partial^2 \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau)}{\partial t} \quad (1.26)$$

Di conseguenza vale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(x, t, \tau)}{\partial t} &= \int_{\bar{\Omega}} \frac{\partial \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau)}{\partial t} f(\xi, \tau) d\xi = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\bar{\Omega}} a_{ij}(\xi, \tau) \frac{\partial^2 \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i \partial x_j} f(\xi, \tau) d\xi. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Da cui si evince che:

$$\frac{\partial J(x, t, \tau)}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 J(x, t, \tau)}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (1.28)$$

Quindi vale:

$$\left| \frac{\partial J(x, t, \tau)}{\partial t} \right| \leq \frac{K}{(t - \tau)^{1-\alpha/2}}, \quad (1.29)$$

che è una funzione integrabile.

Ora dimostriamo valere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} &= J(x, t, t) + \int_{T_0}^t \frac{\partial J(x, t, \tau)}{\partial t} d\tau = \\ &= f(x, t) + \int_{T_0}^t \int_{\bar{\Omega}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\xi, \tau) \frac{\partial^2 \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i \partial x_j} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \end{aligned} \quad (1.30)$$

Infatti, se si considera il rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} \frac{V(x, t+h) - V(x, t)}{h} &= \frac{1}{h} \left[\int_{T_0}^{t+h} J(x, t+h, \tau) d\tau - \int_{T_0}^t J(x, t, \tau) d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} J(x, t+h, \tau) d\tau + \frac{1}{h} \int_{T_0}^t [J(x, t+h, \tau) - J(x, t, \tau)] d\tau = \\ &= \underbrace{J(x, t, \bar{\tau})}_{J_1} + \underbrace{\int_{T_0}^t \frac{\partial J(x, \bar{t}, \tau)}{\partial t} d\tau}_{J_2}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Dove per ottenere J_2 si è utilizzato il teorema di Lagrange, con $t < \bar{t} < t+h$; mentre per ottenere J_1 si è utilizzato il teorema della media integrale, con $t < \bar{\tau} < t+h$.

Innanzitutto si nota che, essendo $\Gamma_{\xi, \tau}$ una soluzione fondamentale, per la seconda proprietà della definizione 0.3 si ha:

$$\lim_{h \rightarrow 0} J_1 = J(x, t, t) = f(x, t). \quad (1.32)$$

Infatti, fissati $(x, t) \in Q$ e preso $\epsilon > 0$, allora per la continuità della $f \exists \delta > 0$ tale che $\forall t, |x - \xi| < \delta \implies |f(x, t) - f(\xi, t)| < \epsilon \forall t \in [T_0, T_1]$. Inoltre per la prima proprietà della definizione di soluzione fondamentale si ha:

$$\left| \int_{\bar{\Omega}} \Gamma(x - \xi, t - \tau) f(\xi, t) d\xi - f(x, t) \right| < \epsilon \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (1.33)$$

Quindi si ha:

$$\begin{aligned}
|J(x, t, \bar{\tau}) - f(x, t)| &= \left| \int_{\bar{\Omega}} \Gamma(x - \xi, t - \bar{\tau}) f(\xi, \bar{\tau}) d\xi - f(x, t) \right| \leq \\
&\leq \left| \int_{\bar{\Omega}} \Gamma(x - \xi, t - \bar{\tau}) f(x, \bar{\tau}) d\xi - f(x, t) \right| + \left| \int_{\bar{\Omega}} \Gamma(x - \xi, t - \bar{\tau}) (f(\xi, \bar{\tau}) - f(x, \bar{\tau})) d\xi \right| \leq \\
&\leq C\epsilon
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Inoltre vale anche:

$$\lim_{h \rightarrow 0} J_2 = \int_{T_0}^t \frac{\partial J(x, t, \tau)}{\partial t} d\tau = \int_{T_0}^t \int_{\bar{\Omega}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\xi, \tau) \frac{\partial^2 \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i \partial x_j} f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \tag{1.35}$$

infatti la prima uguaglianza è stata possibile ottenerla grazie al teorema di convergenza dominata, che permette di scambiare il limite con l'integrale; infatti, per la (1.17) e la (1.28), $\frac{\partial J(x, \bar{t}, \tau)}{\partial t}$ risulta essere continuo rispetto a \bar{t} e dominato da una funzione L^1 . Mentre la seconda uguaglianza segue dalla (1.27).

Per quanto riguarda la continuità di $\frac{\partial V(x, t)}{\partial t}$, si nota che $f(x, t)$ è continua e che il secondo termine della (1.25) risulta anch'esso continuo in seguito ad una dimostrazione analoga a quella della continuità del teorema precedente. \square

Dai due teoremi precedenti segue immediatamente:

Corollario 1.1.6. *Sia $f(x, t)$ una funzione Hölderiana di ordine α su Q . Allora $V(x, t)$ soddisfa la seguente equazione:*

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = \\
&= -f(x, t) + \int_{T_0}^t \int_{\bar{\Omega}} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x, t) - a_{ij}(\xi, \tau)) \frac{\partial^2 \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i \partial x_j} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Corollario 1.1.7. *I teoremi appena visti valgono anche nel caso in cui la funzione f non sia Hölderiana, ma rispetti la seguente condizione meno restrittiva:*

$$|f(x, t) - f(z, t)| \leq C |t - \tau|^\beta \Gamma_A(x - z, t) \quad (1.37)$$

per un certo $\beta > 0$ e un certo $C \in \mathbb{R}$.

1.2 Costruzione della Parametrica

In questa sezione ci occuperemo della costruzione ricorsiva della soluzione fondamentale dell'operatore uniformemente parabolico L . Partiamo dalla funzione $\Gamma_{\xi,\tau}$ e ad ogni passo aggiungiamo una funzione che ci avvicini sempre di più alla soluzione fondamentale.

Fissiamo $(\xi, \tau) \in Q$ e consideriamo: $K_1(x, t) := \Gamma_{\xi,\tau}(x - \xi, t - \tau)$ e vi applichiamo l'operatore L , otteniamo:

$$LK_1 = L_{\xi,\tau}K_1 + (L - L_{\xi,\tau})K_1 = L_{\xi,\tau}\Gamma_{\xi,\tau}(x - \xi, t - \tau) + (L - L_{\xi,\tau})\Gamma_{\xi,\tau}(x - \xi, t - \tau).$$

Dove, il primo termine della somma sarà 0 perché K_1 era stata presa proprio come la soluzione dell'operatore $L_{\xi,\tau}$; mentre il secondo termine lo denotiamo con:

$$R_1^{\xi,\tau}(x, t) := (L - L_{\xi,\tau})\Gamma_{\xi,\tau}(x - \xi, t - \tau).$$

Adesso, per il secondo passo consideriamo:

$$K_2(x, t) := K_1(x, t) + \int_{\tau}^t \int_{\bar{\Omega}} \Gamma_{y,\sigma}(x - y, t - \sigma) R_1^{\xi,\tau}(y, \sigma) dy d\sigma,$$

dove il secondo termine della somma (che denoteremo $V_1(x, t)$) è stato preso in modo tale da verificare: $LV_1(x, t) = -R_1^{\xi,\tau}(x, t) + R_2^{\xi,\tau}(x, t)$. Quest'ultima uguaglianza è un calcolo puramente formale che segue dal corollario 1.1.6, infatti:

$$\begin{aligned} LV_1(x, t) &= \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} V_1(x, t) + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} V_1(x, t) + \\ &\quad + c(x, t) V_1(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} V_1(x, t) = \\ &= -R_1^{\xi,\tau} + \int_{T_0}^t \int_{\bar{\Omega}} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x, t) - a_{ij}(y, \sigma)) \frac{\partial^2 \Gamma_{y,\sigma}(x - y, t - \sigma)}{\partial x_i \partial x_j} V_1(y, \sigma) dy d\sigma + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} V_1(x, t) + c(x, t) V_1(x, t) = \\ &= -R_1^{\xi,\tau} + \int_{T_0}^t \int_{\bar{\Omega}} (L - L_{y,\sigma}) \Gamma_{y,\sigma}(x - y, t - \sigma) V_1(y, \sigma) dy d\sigma \end{aligned}$$

Quest'ultimo termine lo denoteremo con:

$$R_2^{\xi, \tau}(x, t) := \int_{T_0}^t \int_{\bar{\Omega}} (L - L_{y, \sigma}) \Gamma_{y, \sigma}(x - y, t - \sigma) V_1(y, \sigma) dy d\sigma$$

. Quindi applicando l'operatore L a K_2 , si ottiene:

$$LK_2 = LK_1 + LV_1 = R_1^{\xi, \tau}(x, t) - R_1^{\xi, \tau}(x, t) + R_2^{\xi, \tau}(x, t) = R_2^{\xi, \tau}(x, t) \quad (1.38)$$

Procedendo ricorsivamente si otterranno le seguenti funzioni:

$$K_j(x, t) := K_1(x, t) + V_1(x, t) + V_2(x, t) + \dots + V_{j-1}(x, t) = K_{j-1}(x, t) + V_{j-1}(x, t),$$

$$R_j^{\xi, \tau}(x, t) := \int_{T_0}^t \int_{\bar{\Omega}} (L - L_{y, \sigma}) \Gamma_{y, \sigma}(x - y, t - \sigma) V_{j-1}(y, \sigma) dy d\sigma,$$

$$V_j(x, t) = \int_{\tau}^t \int_{\bar{\Omega}} \Gamma_{y, \sigma}(x - y, t - \sigma) R_j^{\xi, \tau}(y, \sigma) dy d\sigma.$$

In modo tale che ad ogni passaggio risultino valere:

$$LV_j(x, t) = -R_j^{\xi, \tau}(x, t) + R_{j+1}^{\xi, \tau}(x, t),$$

$$LK_j = LK_{j-1} + LV_{j-1} = R_{j-1}^{\xi, \tau} - R_{j-1}^{\xi, \tau} + R_j^{\xi, \tau} = R_j^{\xi, \tau}.$$

Come si vedrà nel seguito le funzioni $R_1^{\xi, \tau}$ tenderanno verso la funzione identicamente nulla e quindi ad ogni passo la funzione K_j si avvicinerà sempre di più alla soluzione fondamentale dell'operatore L.

Se riscriviamo le funzioni K_j nel modo seguente:

$$\begin{aligned} K_j(x, t) &= K_1(x, t) + \sum_{i=1}^{j-1} V_i(x, t) = \\ &= K_1(x, t) + \int_{\tau}^t \int_{\bar{\Omega}} \Gamma_{y, \sigma}(x - y, t - \sigma) \sum_{i=1}^{j-1} R_i^{\xi, \tau}(y, \sigma) dy d\sigma \end{aligned} \quad (1.39)$$

viene immediato concludere che la soluzione fondamentale dell'operatore L sia:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}(x, t, \xi, \tau) &= \lim_{j \rightarrow +\infty} K_j(x, t) = \\ &= K_1(x, t) + \int_{\tau}^t \int_{\bar{\Omega}} \Gamma_{y, \sigma}(x - y, t - \sigma) \sum_{i=1}^{+\infty} R_i^{\xi, \tau}(y, \sigma) dy d\sigma. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Questo capitolo ha due scopi principali: il primo è quello di provare che le funzioni $V_j(x, t)$ siano effettivamente derivabili due volte rispetto alle direzioni x e una volta rispetto al tempo, in modo tale da poter applicare su tali funzioni gli operatori L e $L_{\xi, \tau}$. In secondo luogo dimostreremo che la serie $\sum_{j=1}^{+\infty} R_j^{\xi, \tau}(x, t)$ è convergente, in particolare mostreremo che:

$$|R_{j_0+m}^{\xi, \tau}(x, t)| \leq K_0 \frac{(K(t-\tau)^{\alpha/2})^m}{\gamma(1+m\frac{\alpha}{2})},$$

dove la funzione $\gamma(x)$ è la Gamma di Eulero; da cui si ricaverà immediatamente la convergenza della serie.

Una volta fatto ciò si potrà concludere che, denotando con:

$$\phi_{\xi, \tau}(x, t) := \sum_{j=1}^{\infty} R_j^{\xi, \tau}(x, t),$$

la soluzione fondamentale dell'operatore L sarà:

$$\bar{\Gamma}(x, t, \xi, \tau) := \Gamma_{\xi, \tau}(x-\xi, t-\tau) + \int_{\tau}^t \int_{\bar{\Omega}} \Gamma_{y, \sigma}(x-y, t-\sigma) \phi_{\xi, \tau}(y, \sigma) dy d\sigma. \quad (1.41)$$

Osservazione 7. Per dimostrare che le funzioni $V_j(x, t)$ sono derivabili due volte rispetto alle direzioni x , basterà mostrare che gli $R_j^{\xi, \tau}(x, t)$ sono funzioni che rispettano la condizione (1.37). Infatti, dopo aver fatto vedere questo fatto (che verrà dimostrato nel teorema 1.2.5 nelle prossime pagine), si potrà concludere, grazie al teorema 1.1.4, che le funzioni $V_j(x, t)$ sono derivabili due volte rispetto alle x .

Analogamente, grazie al teorema 1.1.5, si conclude che le funzioni $V_j(x, t)$ sono derivabili una volta rispetto al tempo.

Lemma 1.2.1. *Vale:*

$$\frac{\|x - \xi\|^2}{t - \tau} + \frac{\|y - \mu\|^2}{(t-\sigma)(\sigma-\tau)} = \frac{\|y - x\|^2}{t - \sigma} + \frac{\|y - \xi\|^2}{\sigma - \tau}, \quad (1.42)$$

dove

$$\mu = \frac{(t - \sigma)\xi + (\sigma - \tau)x}{t - \tau}. \quad (1.43)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
& \frac{\|x - \xi\|^2}{t - \tau} + \frac{\|y - \frac{(t-\sigma)\xi + (\sigma-\tau)x}{t-\tau}\|^2}{\frac{(t-\sigma)(\sigma-\tau)}{t-\tau}} = \\
& = \frac{\langle x - \xi + (y - y), x - \xi + (y - y) \rangle}{t - \tau} + \\
& \quad + \frac{\langle (t - \sigma)(y - \xi) + (\sigma - \tau)(y - x), (t - \sigma)(y - \xi) + (\sigma - \tau)(y - x) \rangle}{(t - \sigma)(\sigma - \tau)(t - \tau)} = \\
& = \frac{\|y - \xi\|^2 + \|y - x\|^2 + 2\langle y - \xi, x - y \rangle}{t - \tau} + \\
& \quad + \frac{(t - \sigma)^2\|y - \xi\|^2 + (\sigma - \tau)^2\|y - x\|^2 + 2\langle (t - \sigma)(y - \xi), (\sigma - \tau)(y - x) \rangle}{(t - \sigma)(\sigma - \tau)(t - \tau)} = \\
& = \frac{\|y - \xi\|^2}{t - \tau} \left(\frac{t - \sigma}{\sigma - \tau} + 1 \right) + \frac{\|y - x\|^2}{t - \tau} \left(\frac{\sigma - \tau}{t - \sigma} + 1 \right) = \frac{\|y - x\|^2}{t - \sigma} + \frac{\|y - \xi\|^2}{\sigma - \tau}. \quad \square
\end{aligned}$$

Osservazione 8. Come si può notare dalla dimostrazione del lemma precedente, l'unica proprietà della norma Euclidea che è stata utilizzata è quella di essere una norma indotta da un prodotto scalare. Quindi il lemma precedente vale per una qualunque norma indotta da un prodotto scalare.

Teorema 1.2.2. $\forall \sigma \in (\tau, t)$ vale:

$$\int_{\bar{\Omega}} \Gamma_{y,\sigma}(x - y, t - \sigma) \Gamma_{\xi,\tau}(y - \xi, \sigma - \tau) dy \leq C \Gamma_{\xi,\tau}^{(\lambda_{min})}(x - \xi, t - \tau), \quad (1.44)$$

dove

$$C = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}.$$

Dimostrazione. Utilizzando il lemma precedente e la (1.5):

$$\begin{aligned}
& \int_{\bar{\Omega}} \Gamma_{y,\sigma}(x - y, t - \sigma) \Gamma_{\xi,\tau}(y - \xi, \sigma - \tau) dy = \\
& = \frac{\sqrt{|A^{-1}(y, \sigma)A^{-1}(\xi, \tau)|}}{(4\pi)^n (t - \sigma)^{n/2} (\sigma - \tau)^{n/2}} \int_{\bar{\Omega}} e^{-\frac{1}{4} \left(\frac{\|y-x\|_{y,\sigma}^2}{t-\sigma} + \frac{\|y-\xi\|_{\xi,\tau}^2}{\sigma-\tau} \right)} dy \leq \\
& \leq \frac{\sqrt{|A^{-1}(y, \sigma)A^{-1}(\xi, \tau)|}}{(4\pi)^n (t - \sigma)^{n/2} (\sigma - \tau)^{n/2}} \int_{\bar{\Omega}} e^{-\frac{\lambda_{min}}{4} \left(\frac{\|y-x\|^2}{t-\sigma} + \frac{\|y-\xi\|^2}{\sigma-\tau} \right)} dy \leq \\
& \leq \frac{\sqrt{|A^{-1}(y, \sigma)A^{-1}(\xi, \tau)|}}{(4\pi)^n (t - \sigma)^{n/2} (\sigma - \tau)^{n/2}} \int_{\bar{\Omega}} e^{-\frac{\lambda_{min}}{4} \left(\frac{\|x-\xi\|^2}{t-\tau} + \frac{\|y-\mu\|^2}{\frac{(t-\sigma)(\sigma-\tau)}{t-\tau}} \right)} dy \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\sqrt{|A^{-1}(\xi, \tau)|} \cdot e^{-\frac{\lambda_{min}}{4} \frac{\|x-\xi\|^2}{t-\tau}} \left(\frac{(t-\sigma)(\sigma-\tau)}{t-\tau} \right)^{n/2}}{(4\pi)^{n/2} (t-\sigma)^{n/2} (\sigma-\tau)^{n/2}} \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\sqrt{|A^{-1}(y, \sigma)|} e^{-\frac{\lambda_{min}}{4} \frac{\|y-\mu\|^2}{(t-\sigma)(\sigma-\tau)}}}{(4\pi)^{n/2} \left(\frac{(t-\sigma)(\sigma-\tau)}{t-\tau} \right)^{n/2}} dy}_{\leq \lambda_{max}/\lambda_{min}} \leq \\
&\leq \frac{\sqrt{|A^{-1}(y, \sigma)|} \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} e^{-\frac{\lambda_{min}}{4} \frac{\|x-\xi\|^2}{t-\tau}}}{(4\pi)^{n/2} (t-\tau)^{n/2}} \leq \frac{\sqrt{|A^{-1}(y, \sigma)|} \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} e^{-\frac{\lambda_{min}}{4\lambda_{max}} \frac{\|x-\xi\|_{\xi, \tau}^2}{t-\tau}}}{(4\pi)^{n/2} (t-\tau)^{n/2}} = \\
&= \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \Gamma_{\xi, \tau}^{(\lambda_{min})}(x-\xi, t-\tau). \quad \square
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Lemma 1.2.3. *Sia $\alpha < 1$ e $\beta < 1$, allora $\forall \sigma \in (\tau, t)$ vale:*

$$\int_{\tau}^t \frac{d\sigma}{|t-\sigma|^{\alpha} |\sigma-\tau|^{\beta}} \leq \frac{cost}{|t-\tau|^{\alpha+\beta-1}}. \tag{1.46}$$

Dimostrazione. Spezzando l'integrale in due parti:

$$\int_{\tau}^t \frac{d\sigma}{|t-\sigma|^{\alpha} |\sigma-\tau|^{\beta}} = \int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} \frac{d\sigma}{|t-\sigma|^{\alpha} |\sigma-\tau|^{\beta}} + \int_{\frac{t+\tau}{2}}^t \frac{d\sigma}{|t-\sigma|^{\alpha} |\sigma-\tau|^{\beta}}. \tag{1.47}$$

Ma, visto che nel primo integrale $|t-\sigma| \geq |t+\tau|/2$ e nel secondo integrale $|\sigma-\tau| \geq |t+\tau|/2$, allora si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_{\tau}^t \frac{d\sigma}{|t-\sigma|^{\alpha} |\sigma-\tau|^{\beta}} &\leq \frac{2^{\alpha}}{|t-\tau|^{\alpha}} \int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} \frac{d\sigma}{|\sigma-\tau|^{\beta}} + \frac{2^{\beta}}{|t-\tau|^{\beta}} \int_{\frac{t+\tau}{2}}^t \frac{d\sigma}{|t-\sigma|^{\alpha}} = \\
&= \frac{2^{\alpha} [|\sigma-\tau|^{1-\beta}]_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}}}{|t-\tau|^{\alpha}(1-\beta)} + \frac{2^{\beta} [|t-\sigma|^{1-\alpha}]_{\frac{t+\tau}{2}}^t}{|t-\tau|^{\beta}(1-\alpha)} = \\
&= \frac{cost}{|t-\tau|^{\alpha+\beta-1}}. \quad \square
\end{aligned} \tag{1.48}$$

Proposizione 1.2.4. *Vale*

$$|R_j^{\xi, \tau}(x, t) \leq \frac{C^j}{|t-\tau|^{1-j\alpha/2}} \Gamma_{\xi, \tau}^{(\lambda_{min})^j}(x-\xi, t-\tau) \quad \forall j \geq 1.$$

Dove:

$$C = nM\lambda_{max}T_1^{1-\alpha},$$

ricordando che n è l'ordine della matrice A e M è la costante ricavata nella proposizione 1.2.4.

Dimostrazione. Per quanto riguarda $R_1^{\xi, \tau}$:

$$\begin{aligned}
|R_1^{\xi, \tau}(x, t)| &= |(L - L_{\xi, \tau}) \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau)| \leq \\
&\leq \sum_{i, j=1}^n |a_{ij}(x, t) - a_{ij}(\xi, \tau)| \frac{\partial^2 \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i \partial x_j} + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i} + c(x, t) \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau) \leq \\
&\leq nM\lambda_{max} \left(\frac{|t - \tau|^{\alpha/2}}{|t - \tau|} \Gamma_{\xi, \tau}^{(\lambda_{min})}(x - \xi, t - \tau) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{|t - \tau|^{1/2}} \Gamma_{\xi, \tau}^{(\lambda_{min})}(x - \xi, t - \tau) + \Gamma_{\xi, \tau}^{(\lambda_{min})}(x - \xi, t - \tau) \right) \leq \\
&\leq nM\lambda_{max} T_1^{1-\alpha} \frac{1}{|t - \tau|^{1-\alpha/2}} \Gamma_{\xi, \tau}^{(\lambda_{min})}(x - \xi, t - \tau).
\end{aligned}$$

Dove nella seconda disuguaglianza è stato utilizzato il seguente fatto:

$$\begin{aligned}
|a_{ij}(x, t) - a_{ij}(\xi, \tau)| \frac{\partial^2 \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i \partial x_j} &\leq \\
&\leq nM\lambda_{max} \frac{\|x - \xi\|^\alpha + |t - \tau|^{\alpha/2}}{|t - \tau|} \Gamma_{\xi, \tau}^{(\lambda_{min})}(x - \xi, t - \tau) \leq \\
&\leq nM\lambda_{max} \frac{\|x - \xi\|^\alpha}{|t - \tau|} \Gamma_{\xi, \tau}^{(\lambda_{min})}(x - \xi, t - \tau) + C \frac{1}{|t - \tau|^{1-\alpha/2}} \Gamma_{\xi, \tau}^{(\lambda_{min})}(x - \xi, t - \tau) \leq \\
&\leq nM\lambda_{max} \frac{1}{|t - \tau|^{1-\alpha/2}} \Gamma_{\xi, \tau}^{(\lambda_{min})}(x - \xi, t - \tau),
\end{aligned} \tag{1.49}$$

grazie all'osservazione 5.

Per quanto riguarda $R_j^{\xi, \tau}$, lo dimostriamo per induzione: assumiamo che valga per $j - 1$ e dimostriamolo per j :

$$\begin{aligned}
|R_j^{\xi, \tau}(x, t)| &= \\
&= \left| \int_{\tau}^t \int_{\Omega} (L - L_{y, \sigma}) \Gamma_{y, \sigma}(x - y, t - \sigma) R_{j-1}^{\xi, \tau}(y, \sigma) dy d\sigma \right| \leq \\
&\leq \left| \int_{\tau}^t \int_{\Omega} (L - L_{y, \sigma}) \Gamma_{y, \sigma}(x - y, t - \sigma) \frac{C^{j-1}}{|\sigma - \tau|^{1-(j-1)\alpha/2}} \Gamma_{\xi, \tau}^{(\lambda_{min}^{j-1})}(y - \xi, \sigma - \tau) dy d\sigma \right| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \int_{\tau}^t \int_{\bar{\Omega}} \left[\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x,t) - a_{ij}(y,\sigma)| \frac{\partial^2 \Gamma_{y,\sigma}(x-y,t-\sigma)}{\partial x_i \partial x_j} + c(x,t) \Gamma_{y,\sigma}(x-y,t-\sigma) + \right. \right. \\
&+ \left. \sum_{i=1}^n |b_i(x,t)| \frac{\partial \Gamma_{y,\sigma}(x-y,t-\sigma)}{\partial x_i} \right] \frac{C^{j-1}}{|\sigma-\tau|^{1-(j-1)\alpha/2}} \Gamma_{\xi,\tau}^{(\lambda_{min}^{j-1})}(y-\xi,\sigma-\tau) dy d\sigma \Big| \leq \\
&\leq \left| \int_{\tau}^t \int_{\bar{\Omega}} \frac{C}{|t-\sigma|^{1-\alpha/2}} \Gamma_{y,\sigma}(x-y,t-\sigma) \frac{C^{j-1}}{|\sigma-\tau|^{1-(j-1)\alpha/2}} \Gamma_{\xi,\tau}^{(\lambda_{min}^{j-1})}(y-\xi,\sigma-\tau) dy d\sigma \right| \leq \\
&\leq \left| \int_{\tau}^t \frac{C^j}{|t-\sigma|^{1-\alpha/2} |\sigma-\tau|^{1-(j-1)\alpha/2}} \int_{\bar{\Omega}} \Gamma_{y,\sigma}(x-y,t-\sigma) \Gamma_{\xi,\tau}^{(\lambda_{min}^{j-1})}(y-\xi,\sigma-\tau) dy d\sigma \right| \leq
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Ora, usando il teorema 1.2.2 e successivamente il lemma 1.2.3:

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \int_{\tau}^t \frac{C^j}{|t-\sigma|^{1-\alpha/2} |\sigma-\tau|^{1-(j-1)\alpha/2}} \Gamma_{\xi,\tau}^{(\lambda_{min}^{j-1})}(x-\xi,t-\tau) d\sigma \right| \leq \\
&\leq C^j \Gamma_{\xi,\tau}^{(\lambda_{min}^j)}(x-\xi,t-\tau) \int_{\tau}^t \frac{d\sigma}{|t-\sigma|^{1-\alpha/2} |\sigma-\tau|^{1-(j-1)\alpha/2}} \leq \\
&\leq \frac{C^j \Gamma_{\xi,\tau}^{(\lambda_{min}^j)}(x-\xi,t-\tau)}{|t-\tau|^{1-\alpha j/2}} \quad \square
\end{aligned}$$

Teorema 1.2.5. *Le funzioni $R_j^{\xi,\tau}(x,t)$ rispettano la condizione (1.37).*

Dimostrazione. Innanzitutto mostriamo valere la seguente disuguaglianza:

$$\begin{aligned}
&(L - L_{y,\sigma})(\Gamma_{y,\sigma}(x-y,t-\sigma) - \Gamma_{y,\sigma}(z-y,t-\sigma)) = \\
&= \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x,t) - a_{ij}(y,\sigma)| \left(\frac{\partial^2 \Gamma_{y,\sigma}(x-y,t-\sigma)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \Gamma_{y,\sigma}(z-y,t-\sigma)}{\partial z_i \partial z_j} \right) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n |b_i(x,t)| \left(\frac{\partial \Gamma_{y,\sigma}(x-y,t-\sigma)}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{y,\sigma}(z-y,t-\sigma)}{\partial z_i} \right) + \\
&\quad + c(x,t)(\Gamma_{y,\sigma}(x-y,t-\sigma) - \Gamma_{y,\sigma}(z-y,t-\sigma)) \leq \\
&\leq \left(C_1 \frac{\|x-z\|^\alpha}{|t-\sigma|^{1-\alpha/2}} + \frac{C_2}{\sqrt{t-\sigma}} + C_3 \right) ((\Gamma_A(x-y,t-\sigma) - \Gamma_{A'}(z-y,t-\sigma)) \\
&\leq \left(C_1 \frac{\|x-z\|^\alpha}{|t-\sigma|^{1-\alpha/2}} + \frac{C_2}{\sqrt{t-\sigma}} + C_3 \right) \Gamma_A(x-z,t-\sigma)
\end{aligned}$$

ottenuta grazie all'utilizzo delle maggiorazioni (22), (23) e (24).

Utilizzando quanto appena dimostrato e quanto visto nella proposizione precedente, dimostriamo che i $R_j^{\xi, \tau}(x, t)$ rispettano la condizione (1.37):

$$\begin{aligned}
& |R_j^{\xi, \tau}(x, t) - R_j^{\xi, \tau}(z, t)| = \\
& = \left| \int_{\tau}^t \int_{\bar{\Omega}} (L - L_{y, \sigma}) (\Gamma_{y, \sigma}(x - y, t - \sigma) - \Gamma_{y, \sigma}(z - y, t - \sigma)) R_{j-1}^{\xi, \tau}(y, \sigma) dy d\sigma \right| \leq \\
& \leq \left| \int_{\tau}^t \int_{\bar{\Omega}} \left(C_1 \frac{\|x - y\|^\alpha}{|t - \sigma|^{1-\alpha/2}} + \frac{C_2}{\sqrt{t - \sigma}} + C_3 \right) \Gamma_A(x - z, t - \sigma) \cdot \right. \\
& \quad \left. \frac{C}{|\sigma - \tau|^{1-j\alpha/2}} \Gamma_{\xi, \tau}(y - \xi, \sigma - \tau) dy d\sigma \right| \leq \\
& \leq \left| \int_{\tau}^t \left(C_1 \frac{\|x - y\|^\alpha}{|t - \sigma|^{1-\alpha/2}} + \frac{C_2}{\sqrt{t - \sigma}} + C_3 \right) \frac{C}{|\sigma - \tau|^{1-j\alpha/2}} d\sigma \right| \Gamma_{\bar{A}}(x - z, t - \tau) \leq \\
& \leq C |t - \tau|^\beta \Gamma_A(x - z, t - \tau)
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Dove il penultimo passaggio è stato reso possibile dal teorema 1.2.2. \square

Osservazione 9. Essendo $\alpha > 0$, allora dalla proposizione 1.2.4 risulta:

$$\exists j_0 \in \mathbb{N} : \quad 1 - \frac{j_0}{2} \alpha < 0,$$

cioè $\exists j_0$ tale che $\forall j \geq j_0 \quad |R_j^{\xi, \tau}(x, t)| \leq K_0 |t - \tau|^\gamma \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau)$ con $\gamma > 0$.

Proposizione 1.2.6. $\forall m \in \mathbb{N}$ vale:

$$|R_{j_0+m}^{\xi, \tau}(x, t)| \leq K_0 \frac{(K(t - \tau)^{\alpha/2})^m}{\gamma(1 + m\frac{\alpha}{2})},$$

dove la funzione $\gamma(x)$ è la Gamma di Eulero.

Dimostrazione. Si dimostra per induzione su m : per $m = 0$ la disuguaglianza segue immediatamente dall'osservazione precedente.

Supponiamo valga per $m - 1$ e dimostriamolo per m :

Dalla dimostrazione della proposizione 1.2.4 si ottiene:

$$\begin{aligned}
& |R_{j_0+m}^{\xi, \tau}(x, t)| \leq \left| \int_{\tau}^t \int_{\bar{\Omega}} \frac{C}{|t - \sigma|^{1-\alpha/2}} \Gamma_{y, \sigma}^{(\lambda_{min})}(x - y, t - \sigma) R_{j_0+m-1}^{\xi, \tau}(y, \sigma) dy d\sigma \right| \leq \\
& \leq K_0 \frac{C^m}{\gamma(1 + (m - 1)\frac{\alpha}{2})} \int_{\bar{\Omega}} \int_{\tau}^t \Gamma_{y, \sigma}^{(\lambda_{min})}(x - y, t - \sigma) \frac{d\sigma dy}{|t - \sigma|^{1-\alpha/2} |\sigma - \tau|^{-(m-1)\alpha/2}}.
\end{aligned} \tag{1.52}$$

Ma sappiamo che:

$$\int_{\Omega} \Gamma_{y,\sigma}^{(\lambda_{min})}(x-y, t-\sigma) dy \leq \frac{1}{\lambda_{min}^n}$$

Infine, utilizzando il seguente fatto:

$$\int_0^1 (1-\rho)^{a-1} \rho^{b-1} d\rho = \frac{\gamma(a)\gamma(b)}{\gamma(a+b)}, \quad (1.53)$$

grazie alla relazione (1.53), si dimostra che:

$$\int_{\tau}^t \frac{d\sigma}{|t-\sigma|^{1-\alpha/2} |\sigma-\tau|^{-(m-1)\alpha/2}} = \frac{\gamma(\alpha/2)\gamma(1+(m-1)\frac{\alpha}{2})}{\gamma(1+m\frac{\alpha}{2})} |t-\tau|^{m\alpha/2}, \quad (1.54)$$

prendendo:

$$a = \alpha/2, \quad b = 1 + (m-1)\frac{\alpha}{2}, \quad \rho = \frac{\sigma-\tau}{t-\tau} \Rightarrow d\rho = \frac{d\sigma}{t-\tau}.$$

Quindi si è ottenuta la tesi:

$$|R_{j_0+m}^{\xi,\tau}(x,t)| \leq K_0 \frac{C^m \gamma(\alpha/2)}{\lambda_{min}^n \gamma(1+m\frac{\alpha}{2})} |t-\tau|^{m\alpha/2} \quad \square \quad (1.55)$$

Osservazione 10. Come si osserva dalla dimostrazione precedente e dall'osservazione 9, la costante K_0 dipende unicamente da R_{j_0} ; quindi tale costante rimane invariata per ogni j .

La costante K , invece, è identificata dalla relazione:

$$K = \frac{C\gamma(\alpha/2)}{\lambda_{min}^n},$$

come si può vedere dalla proposizione precedente. Ma, siccome per la proposizione 1.2.4 la costante C risulta essere $C = nM\lambda_{max}T_1^{1-\alpha}$, allora:

$$K = \frac{nM\lambda_{max}T_1^{1-\alpha}\gamma(\alpha/2)}{\lambda_{min}^n}$$

Lemma 1.2.7. *La serie:*

$$\sum_{j=j_0}^{+\infty} R_j^{\xi,\tau}(x,t) \quad (1.56)$$

è convergente e converge uniformemente.

Dimostrazione. Utilizzando i risultati ottenuti dalla proposizione 1.2.6:

$$\sum_{j=j_0}^{+\infty} R_j^{\xi, \tau}(x, t) \leq \sum_{m=0}^{+\infty} K_0 \frac{(K(t-\tau)^{\alpha/2})^m}{\gamma(1+m\frac{\alpha}{2})}. \quad (1.57)$$

Quest'ultima serie risulta essere convergente per il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{K(t-\tau)^{\alpha/2} \gamma(1+(m-1)\frac{\alpha}{2})}{\gamma(1+m\frac{\alpha}{2})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad (1.58)$$

grazie alle proprietà della funzione gamma.

Infine, tale serie converge uniformemente perché la successione dei $R_j^{\xi, \tau}(x, t)$ converge uniformemente a 0, come si può facilmente dedurre dalla proposizione precedente. \square

Proposizione 1.2.8. *Vale la seguente maggiorazione:*

$$\phi_{\xi, \tau}(x, t) \leq \begin{cases} \frac{2K_0}{\alpha} e^{K\frac{2}{\alpha}} + \frac{C}{|t-\tau|^{1-\alpha/2}} & \text{se } |t-\tau| \leq 1 \\ \frac{2K_0 K\frac{2}{\alpha}(t-\tau)}{\alpha} e^{K\frac{2}{\alpha}(t-\tau)} + C^{j_0} & \text{se } |t-\tau| > 1 \end{cases} \quad (1.59)$$

Dimostrazione. Sia r la parte intera del numero $m\alpha/2$. Allora per le proprietà della funzione gamma si ottiene:

$$\gamma(1+m\alpha/2) \geq \gamma(1+r) = r!$$

da cui:

$$\begin{aligned} \phi_{\xi, \tau}(x, t) &= \sum_{j=1}^{j_0-1} R_j^{\xi, \tau}(x, t) + \sum_{j=j_0}^{+\infty} R_j^{\xi, \tau}(x, t) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{j_0-1} \frac{C^j}{|t-\tau|^{1-j\alpha/2}} + \sum_{j=j_0}^{+\infty} K_0 \frac{(K(t-\tau)^{\alpha/2})^m}{\gamma(1+m\frac{\alpha}{2})} \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{j_0-1} \frac{C^j}{|t-\tau|^{1-j\alpha/2}} + \sum_{j=j_0}^{+\infty} K_0 \frac{(K^{2/\alpha}(t-\tau))^{m\alpha/2}}{r!}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Ora se $|t - \tau| \leq 1$:

$$\begin{aligned}
\phi_{\xi,\tau}(x,t) &\leq \frac{C}{|t - \tau|^{1-\alpha/2}} + \sum_{j=j_0}^{+\infty} K_0 \frac{(K^{2/\alpha}(t - \tau))^{m\alpha/2}}{r!} \leq \\
&\leq \frac{C}{|t - \tau|^{1-\alpha/2}} + \frac{2K_0}{\alpha} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(K^{2/\alpha}(t - \tau))^r}{r!} = \\
&= \frac{C}{|t - \tau|^{1-\alpha/2}} + \frac{2K_0}{\alpha} e^{K^{\frac{2}{\alpha}}(t-\tau)} \leq \frac{C}{|t - \tau|^{1-\alpha/2}} + \frac{2K_0}{\alpha} e^{K^{\frac{2}{\alpha}}}.
\end{aligned} \tag{1.61}$$

Mentre se $|t - \tau| > 1$:

$$\begin{aligned}
\phi_{\xi,\tau}(x,t) &\leq \frac{C^{j_0}}{|t - \tau|^{1-j_0\alpha/2}} + \sum_{j=j_0}^{\infty} K_0 \frac{(K^{2/\alpha}(t - \tau))^{m\alpha/2}}{r!} \leq \\
&\leq C^{j_0} + \frac{2K_0}{\alpha} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(K^{2/\alpha}(t - \tau))^{r+1}}{r!} = C^{j_0} + \frac{2K_0 K^{\frac{2}{\alpha}}(t - \tau)}{\alpha} e^{K^{\frac{2}{\alpha}}(t-\tau)}. \quad \square
\end{aligned}$$

Teorema 1.2.9. *Fissati $(\xi, \tau) \in Q$, allora $\bar{\Gamma}(x, t, \xi, \tau)$ è soluzione fondamentale di L .*

Dimostrazione. Innanzitutto si osserva che vale $L\bar{\Gamma}(x, t, \xi, \tau) = 0$:

$$\begin{aligned}
L\bar{\Gamma}_{\xi,\tau} &= L\Gamma_{\xi,\tau}(x - \xi, t - \tau) + L \int_{\tau}^t \int_{\Omega} \Gamma_{y,\sigma}(x - y, t - \sigma) \sum_{j=1}^{\infty} R_j^{\xi,\tau}(y, \sigma) dy d\sigma = \\
&= L\Gamma_{\xi,\tau}(x - \xi, t - \tau) + L \int_{\tau}^t \int_{\Omega} \lim_{N \rightarrow \infty} \Gamma_{y,\sigma}(x - y, t - \sigma) \sum_{j=1}^N R_j^{\xi,\tau}(y, \sigma) dy d\sigma = \\
&= L\Gamma_{\xi,\tau}(x - \xi, t - \tau) + \lim_{N \rightarrow \infty} L \int_{\tau}^t \int_{\Omega} \Gamma_{y,\sigma}(x - y, t - \sigma) \sum_{j=1}^N R_j^{\xi,\tau}(y, \sigma) dy d\sigma = \\
&= R_1^{\xi,\tau}(x, t) + \sum_{j=1}^{\infty} LV_j = R_1^{\xi,\tau}(x, t) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(-R_j^{\xi,\tau}(x, t) + R_{j+1}^{\xi,\tau}(x, t) \right) = \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} R_j^{\xi,\tau}(x, t) = 0,
\end{aligned}$$

Dove nella terza uguaglianza è stato possibile scambiare il limite con entrambi gli integrali e con l'operatore L perché la serie all'integrando converge uniformemente a $\phi_{\xi,\tau}(x, t)$.

Rimane da dimostrare che per ogni funzione continua f su $\bar{\Omega}$ vale:

$$\lim_{t \rightarrow \tau^+} \int_{\bar{\Omega}} \bar{\Gamma}_{\xi, \tau}(x, t) f(\xi) d\xi = f(x). \quad (1.62)$$

Ma,

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \tau^+} \int_{\bar{\Omega}} \bar{\Gamma}_{\xi, \tau}(x, t) f(\xi) d\xi = \\ & = \underbrace{\lim_{t \rightarrow \tau^+} \int_{\bar{\Omega}} \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau) f(\xi) d\xi}_{I_1} + \underbrace{\lim_{t \rightarrow \tau^+} \int_{\bar{\Omega}} \int_{\tau}^t \int_{\bar{\Omega}} \Gamma_{y, \sigma}(x - y, t - \sigma) \phi_{\xi, \tau}(y, \sigma) dy d\sigma d\xi}_{I_2}. \end{aligned}$$

Vogliamo dimostrare che $I_1 = f(x)$ e $I_2 = 0$ e avremmo così ottenuto la tesi. Sia $x \in \bar{\Omega}$ e sia $\epsilon > 0$, allora $\exists \delta > 0$ tale che $|f(\xi) - f(x)| < \epsilon \quad \forall \xi \in \bar{\Omega}$ tale che $\|\xi - x\| < \delta$. Quindi si ottiene:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\bar{\Omega}} \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau) f(\xi) d\xi - f(x) \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{\bar{\Omega}} \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau) f(\xi) d\xi - \int_{\bar{\Omega}} \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau) f(x) d\xi \right| \leq \\ & \leq \int_{\bar{\Omega}} |\Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau)| |f(\xi) - f(x)| d\xi = \quad (1.63) \\ & = \int_{B(x, \delta)} \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau) |f(\xi) - f(x)| d\xi + \\ & \quad + \int_{\bar{\Omega} \setminus B(x, \delta)} \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau) |f(\xi) - f(x)| d\xi. \end{aligned}$$

Ma,

$$\int_{B(x, \delta)} \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau) |f(\xi) - f(x)| d\xi \leq \epsilon \int_{\bar{\Omega}} \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau) d\xi \leq \epsilon$$

Mentre, siccome f ammette massimo M su $\bar{\Omega}$ (in quanto continua), si ottiene:

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{\Omega} \setminus B(x, \delta)} \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau) |f(\xi) - f(x)| d\xi \leq \\ & \leq \int_{\bar{\Omega} \setminus B(x, \delta)} \frac{2M \sqrt{|A^{-1}(\xi, \tau)|}}{(4\pi(t - \tau))^{n/2}} e^{-\frac{\lambda \min\|x - \xi\|^2}{4(t - \tau)}} d\xi \leq \frac{K}{(t - \tau)^{n/2}} \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda \min r^2}{4(t - \tau)}} r^{n-1} dr \quad (1.64) \end{aligned}$$

Facendo il cambio di variabile $y = \frac{\lambda_{\min} r^2}{4(t-\tau)}$, la (1.64) diventa:

$$\frac{K}{(t-\tau)^{n/2}} \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda_{\min} r^2}{4(t-\tau)}} r^{n-1} dr = K \int_{\frac{\lambda_{\min} \delta^2}{4(t-\tau)}}^{+\infty} e^{-y} y^{\frac{n}{2}-1} dy \quad (1.65)$$

che tende a 0, per $t \rightarrow \tau^+$.

Per quanto riguarda I_2 , utilizzando il teorema 1.2.2, la proposizione 1.2.8 e assumendo che $|t - \tau| < 1$ (che è lecito visto che stiamo cercando il limite per $t \rightarrow \tau^+$), si ottiene:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\bar{\Omega}} \int_{\tau}^t \int_{\bar{\Omega}} \Gamma_{y,\sigma}(x-y, t-\sigma) \phi_{\xi,\tau}(y, \sigma) dy d\sigma d\xi \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{\bar{\Omega}} \int_{\tau}^t \int_{\bar{\Omega}} \left(C \Gamma_{y,\sigma}(x-y, t-\sigma) \frac{2K_0}{\alpha} e^{K\frac{2}{\alpha}} + \frac{C}{|t-\tau|^{1-\alpha/2}} \right) dy d\sigma d\xi \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{\bar{\Omega}} \int_{\tau}^t \left(\frac{2K_0}{\alpha} e^{K\frac{2}{\alpha}} + \frac{C}{|t-\tau|^{1-\alpha/2}} \right) d\sigma d\xi \right| \leq \\ & \leq \text{cost} \cdot (t-\tau) + \int_{\tau}^t C \frac{1}{|\sigma-\tau|^{1-\alpha/2}} d\sigma \leq \text{cost} \cdot (t-\tau) + C [|\sigma-\tau|^{\alpha/2}]_{\tau}^t = \\ & = \text{cost} \cdot (t-\tau) + C|t-\tau|^{\alpha/2} \end{aligned}$$

che chiaramente tende a 0 per $t \rightarrow \tau^+$. Quindi abbiamo ottenuto la tesi. \square

1.3 Velocità di convergenza del metodo

Come si evince dall'ultima dimostrazione, la convergenza del metodo ad una soluzione dipende unicamente dal fatto che per j grandi la successione di funzioni $R_j^{\xi,\tau}(x, t)$ tenda verso la funzione nulla. Quindi, con più tale successione tenderà velocemente alla funzione nulla, con più la soluzione trovata ad ogni passo sarà vicina alla soluzione fondamentale dell'equazione.

Grazie a:

$$|R_{j_0+m}^{\xi,\tau}(x, t)| \leq K_0 \frac{(K(t-\tau)^{\alpha/2})^m}{\gamma(1+m\frac{\alpha}{2})} \quad (1.66)$$

si può osservare che per avere una convergenza quanto più rapida servirebbe avere $\alpha/2$ il più grande possibile e il coefficiente K il più piccolo possibile. Ricordando inoltre che:

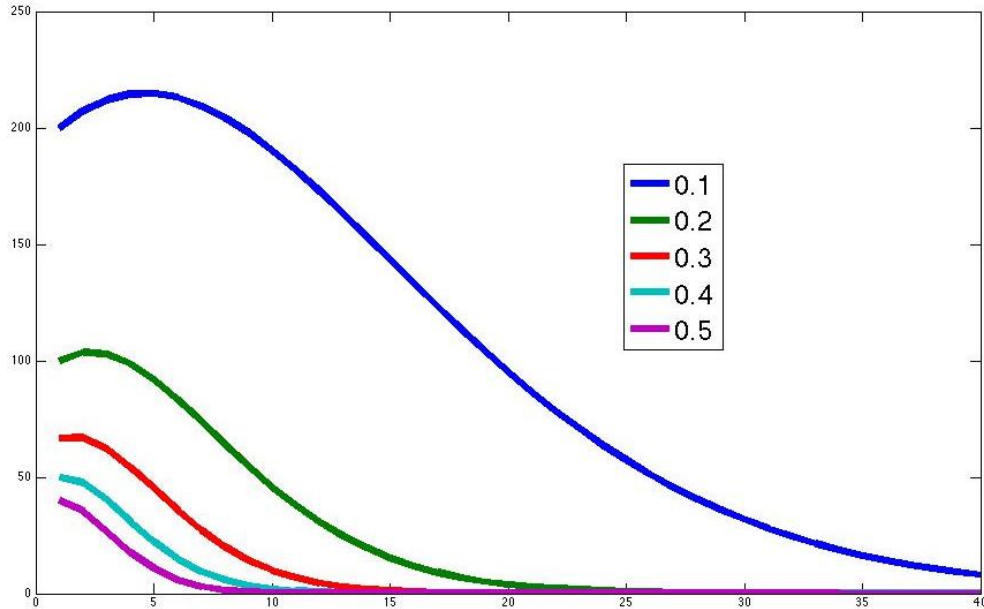
$$K = \frac{nM\lambda_{max}I_1^{1-\alpha}\gamma(\alpha/2)}{\lambda_{min}^n}$$

e ricordando che la funzione gamma ammette un minimo in 1; allora si può concludere che per avere una convergenza veloce si deve avere un ordine di Hölderianità della matrice dei coefficienti grande, una matrice di ordine basso e con autovalori vicini tra loro e grandi in modulo.

Per comprendere meglio quanto sia influente l'ordine di Hölderianità, si può analizzare il seguente grafico, in cui sono stati disegnati 5 grafici delle funzioni al variare di m :

$$\frac{K^m}{\gamma(1 + m\frac{\alpha}{2})},$$

con K fissato ($K = 5$) e con $\alpha = 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2$:



Capitolo 2

Operatore di Fokker-Planck

2.1 Introduzione al problema

In questo capitolo ci interessa trovare la soluzione fondamentale dell'operatore di Kolmogorov-Fokker-Planck \bar{L} così definito:

$$\begin{aligned} \bar{L} : C^{2,1}(Q) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto a(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + x \frac{\partial}{\partial y} u - \frac{\partial}{\partial t} u \end{aligned} \quad (2.1)$$

dove $C^{2,1}(Q)$ è la classe delle funzioni derivabili due volte nelle coordinate spaziali e una volta nella direzione $\frac{\partial}{\partial t} - x \frac{\partial}{\partial y}$ su Q , che è come nel caso precedente il cilindro $\bar{\Omega} \times [T_0, T_1]$, con Ω aperto e connesso di \mathbb{R}^2 . Inoltre la funzione $a(x, t) : Q \rightarrow \mathbb{R}$ rispetta la seguente condizione di Hölderianità:

$$|a(x, t) - a(x_0, t_0)| \leq |x - x_0|^\alpha + |t - t_0|^{\alpha/2} \quad \forall (x, t), (x_0, t_0) \in Q$$

Per trovare la soluzione fondamentale iniziamo con il cercare la soluzione fondamentale dell'operatore con coefficiente costante $a = 1$. Dopodiché, come nel capitolo precedente, si troverà la soluzione fondamentale dell'operatore a coefficienti costanti; infine, con il metodo della parametrica, si approssimerà la soluzione fondamentale dell'operatore \bar{L} con le soluzioni dell'operatore a coefficienti costanti appena trovate.

2.2 Soluzione fondamentale dell'equazione modello

Innanzitutto cerchiamo la soluzione dell'operatore L così definito:

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Applicando la trasformata di Fourier ad entrambi i membri dell'equazione:

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + x \frac{\partial}{\partial y} u,$$

si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u} = -4\pi^2 \xi_1^2 \hat{u} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \hat{u}. \quad (2.2)$$

Infatti valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \left(\frac{\partial}{\partial t} u \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}, \\ \mathfrak{F} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) &= -4\pi^2 \xi_1^2 \hat{u} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \left(x \frac{\partial}{\partial y} u(x, y, t) \right) &= \int_{\mathbb{R}^2} x \frac{\partial}{\partial y} u(x, y, t) e^{-2\pi i \langle \xi, (x, y) \rangle} dx dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} x e^{-2\pi i \xi_1 x} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial y} u(x, y, t) e^{-2\pi i \xi_2 y} dy \right) dx = \\ &= 2\pi i \xi_2 \int_{\mathbb{R}^2} x u(x, y, t) e^{-2\pi i \langle \xi, (x, y) \rangle} dx dy = \\ &= -\xi_2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} (u(x, y, t) e^{-2\pi i \langle \xi, (x, y) \rangle}) dx dy = -\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \hat{u}(\xi, t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Per trovare la soluzione di (2.2) utilizziamo il fatto che la seguente equazione differenziale (con ξ_2 costante):

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x} f = -4\pi^2 x^2 \quad (2.4)$$

ha come soluzione:

$$f(x, t) = -\frac{4\pi^2}{3\xi_2} (x^3 - (x - \xi_2 t)^3).$$

Infatti l'equazione (2.4) è un'equazione differenziale del trasporto. La soluzione dell'equazione del trasporto generica non omogenea:

$$\frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} + b \cdot \nabla f(x, y, t) = g(x, y, t) \quad (2.5)$$

è data da:

$$f(x, y, t) = \int_0^t g((x, y) + (s - t)b, s) ds, \quad (2.6)$$

dove nel nostro caso abbiamo $b = (0, \xi_2)$ e $g(x, y, t) = -4\pi^2 x^2$.

Quindi (2.2) avrà come soluzione:

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{f(\xi_1, t)} = e^{-\frac{4\pi^2}{3}(\xi_2^2 t^3 - 3\xi_1 \xi_2 t^2 + 3\xi_1^2 t)}.$$

Per trovare la soluzione all'equazione di partenza $Lu = 0$, basterà calcolare l'antitrasformata di Fourier di $\hat{u}(\xi, t)$:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \int_{\mathbb{R}^2} \hat{u}(\xi, t) e^{2\pi i \langle \xi, (x, y) \rangle} d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{4\pi^2}{3}(\xi_2^2 t^3 - 3\xi_1 \xi_2 t^2 + 3\xi_1^2 t - \frac{3ix\xi_1}{2\pi} - \frac{3iy\xi_2}{2\pi})} d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{4\pi^2}{3} \left[\left(\xi_2 \sqrt{t^3} - \frac{3iy}{4\pi\sqrt{t^3}} - \frac{3}{2}\xi_1 \sqrt{t} \right)^2 + \left(-\frac{3\sqrt{3}iy}{4\pi\sqrt{t^3}} - \frac{\sqrt{3}ix}{2\pi\sqrt{t}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\xi_1 \sqrt{t} \right)^2 + \frac{9y^2}{4\pi^2 t^3} + \frac{3x^2}{4\pi^2 t} + \frac{9xy}{4\pi^2 t^2} \right]} d\xi = \end{aligned} \quad (2.7)$$

Effettuando il cambiamento di variabile:

$$\begin{cases} y_1 = \xi_2 \sqrt{t^3} - \frac{3iy}{4\pi\sqrt{t^3}} - \frac{3}{2}\xi_1 \sqrt{t} \\ y_2 = -\frac{3\sqrt{3}iy}{4\pi\sqrt{t^3}} - \frac{\sqrt{3}ix}{2\pi\sqrt{t}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\xi_1 \sqrt{t} \end{cases} \quad (2.8)$$

il cui determinante della matrice Jacobiana associato è:

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{3t}} \\ \frac{1}{\sqrt{t^3}} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3t^2}} \quad (2.9)$$

L'integrale della (2.7) diventa:

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{2}{\sqrt{3t^2}} e^{-\frac{4\pi^2}{3}(y_1^2 + y_2^2) - \frac{3y^2}{t^3} - \frac{x^2}{t} - \frac{3xy}{t^2}} dy_1 dy_2 = \\ &= \frac{e^{-\frac{3y^2}{t^3} - \frac{x^2}{t} - \frac{3xy}{t^2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}t^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{4\pi^2}{3}(y_1^2 + y_2^2)} dy_1 dy_2 = \frac{3}{4\pi} \frac{e^{-\frac{3y^2}{t^3} - \frac{x^2}{t} - \frac{3xy}{t^2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}t^2} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi t^2} e^{-\frac{3y^2}{t^3} - \frac{x^2}{t} - \frac{3xy}{t^2}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dove, nel penultimo passaggio è stato utilizzato il seguente fatto:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{4\pi^2}{3}(y_1^2+y_2^2)} dy_1 dy_2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{4\pi^2}{3}r^2} r dr d\theta = \\ &= \frac{2\pi}{\frac{8\pi^2}{3}} \int_0^{+\infty} \frac{r8\pi^2}{3} e^{-\frac{4\pi^2}{3}r^2} dr = \frac{3}{4\pi} \int_0^{+\infty} e^{-s} ds = \frac{3}{4\pi}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Quindi la soluzione fondamentale dell'operatore L è:

$$\Gamma(x, y, t) := u(x, y, t) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi t^2} e^{-\frac{3y^2}{t^3} - \frac{x^2}{t} - \frac{3xy}{t^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi t^2} e^{-\langle A(t) \cdot (x, y), (x, y) \rangle},$$

dove:

$$A(t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & \frac{3}{2t^2} \\ \frac{3}{2t^2} & \frac{3}{t^3} \end{pmatrix}.$$

Proposizione 2.2.1. *La matrice $A(t)$ appena definita è simmetrica definita positiva; i suoi autovalori sono:*

$$\begin{aligned} \lambda_{max}(t) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{t} + \frac{3}{t^3} + \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{9}{t^6} + \frac{3}{t^4}} \right], \\ \lambda_{min}(t) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{t} + \frac{3}{t^3} - \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{9}{t^6} + \frac{3}{t^4}} \right]. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Per trovare gli autovalori si risolve l'equazione:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{t} - \lambda & \frac{3}{2t^2} \\ \frac{3}{2t^2} & \frac{3}{t^3} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{t^3} \right) \lambda + \frac{3}{4t^4} = 0,$$

le cui soluzioni sono indicate nell'enunciato.

Per dimostrare che la matrice $A(t)$ è una matrice definita positiva rimane da verificare che entrambi gli autovalori siano positivi $\forall t > 0$.

$\lambda_{max}(t)$ è ovviamente positivo per $t > 0$, mentre per quanto riguarda $\lambda_{min}(t)$ basta osservare che la disequazione seguente è verificata $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{t} + \frac{3}{t^3} \geq \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{9}{t^6} + \frac{3}{t^4}}. \quad \square$$

Osservazione 11. Vale:

$$\Gamma(x, y, t) \leq \frac{\sqrt{3}}{2\pi t^2} e^{-\frac{1}{9t} \left(x^2 + \frac{y^2}{t^2} \right)}. \quad (2.12)$$

Dimostrazione. Dapprima si prova che:

$$\frac{3y^2}{t^3} + \frac{x^2}{t} + \frac{3xy}{t^2} \geq \frac{1}{9t} \left(x^2 + \frac{y^2}{t^2} \right), \quad (2.13)$$

poichè:

$$\begin{aligned} \frac{3y^2}{t^3} + \frac{x^2}{t} + \frac{3xy}{t^2} - \frac{1}{9t} \left(x^2 + \frac{y^2}{t^2} \right) &= \frac{26y^2}{9t^3} + \frac{8x^2}{9t} + \frac{3xy}{t^2} \geq \frac{81y^2}{32t^3} + \frac{8x^2}{9t} + \frac{3xy}{t^2} = \\ &= \left(\frac{9y}{4\sqrt{2}t^{3/2}} + \frac{2\sqrt{2}x}{3\sqrt{t}} \right)^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Quindi si può concludere che:

$$\Gamma(x, y, t) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi t^2} e^{-\frac{3y^2}{t^3} - \frac{x^2}{t} - \frac{3xy}{t^2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2\pi t^2} e^{-\frac{1}{9t} \left(x^2 + \frac{y^2}{t^2} \right)}. \quad \square \quad (2.15)$$

2.3 Equazione a coefficienti costanti

Definizione 2.1. Si definisce l'operatore a coefficienti costanti L_a :

$$L_a \equiv a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Proposizione 2.3.1. *La funzione*

$$\Gamma_a(x, y, t) := \Gamma\left(\frac{x}{\sqrt{a}}, y\sqrt{a}, t\right) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi t^2} e^{-\frac{3ay^2}{t^3} - \frac{x^2}{at} - \frac{3xy}{t^2}} \quad (2.16)$$

è soluzione fondamentale di L_a , dove $\Gamma(x, y, t)$ è la soluzione fondamentale di L .

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} 0 &= L\Gamma(x, y, t) = L\Gamma_a(x\sqrt{a}, \frac{y}{\sqrt{a}}, t) = \\ &= a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Gamma_a(x\sqrt{a}, \frac{y}{\sqrt{a}}, t) + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} x \frac{\partial}{\partial y} \Gamma_a(x\sqrt{a}, \frac{y}{\sqrt{a}}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_a(x\sqrt{a}, \frac{y}{\sqrt{a}}, t) = \\ &= L_a \Gamma_a(x\sqrt{a}, \frac{y}{\sqrt{a}}, t) = L_a \Gamma_a(x', y', t), \end{aligned} \quad (2.17)$$

dopo aver fatto il cambiamento di variabile: $x' = x\sqrt{a}$, $y' = \frac{y}{\sqrt{a}}$. \square

Proposizione 2.3.2. *Valgono le seguenti disuguaglianze:*

1.

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Gamma_a(x, y, t) dx dy \leq 1, \quad (2.18)$$

2.

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \Gamma_a(x, y, t) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{at}} \Gamma_a(x, y, t), \quad (2.19)$$

3.

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} \Gamma_a(x, y, t) \right| \leq \frac{C\sqrt{a}}{t^{3/2}} \Gamma_a(x, y, t), \quad (2.20)$$

4.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Gamma_a(x, y, t) \leq \frac{C}{at} \Gamma_a(x, y, t), \quad (2.21)$$

5.

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} \Gamma_a(x, y, t) \leq \frac{C}{(at)^{3/2}} \Gamma_a(x, y, t), \quad (2.22)$$

6.

$$\frac{\partial}{\partial a} \Gamma_a(x, y, t) \leq \frac{C}{a} \Gamma_a(x, y, t). \quad (2.23)$$

Dimostrazione. Per ottenere la prima disuguaglianza si esegue il seguente cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{x}{\sqrt{ta}} \\ y_2 = \frac{y\sqrt{a}}{t^{3/2}} \end{cases} \quad (2.24)$$

la cui matrice Jacobiana associata risulta avere determinante $1/t^2$. Utilizzando anche la disuguaglianza (2.13) (con $t = 1$), si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma_a(x, y, t) dx dy &= \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_1 y_2} dy_1 dy_2 \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{9}(y_1^2 + y_2^2)} dy_1 dy_2 \leq \frac{\sqrt{3}}{12} \leq 1. \end{aligned} \quad (2.25)$$

La seconda disuguaglianza si dimostra utilizzando il lemma 5:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x} \Gamma_a(x, y, t) \right| &= \Gamma_a(x, y, t) \cdot \left| -\frac{2x}{ta} - \frac{3y}{t^2} \right| = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2\pi t^2} e^{-\frac{3ay^2}{t^3} - \frac{x^2}{at} - \frac{3xy}{t^2}} \frac{1}{\sqrt{ta}} \left(\left(\frac{2x}{\sqrt{ta}} + \frac{3y\sqrt{a}}{t^{3/2}} \right)^2 \right)^{1/2} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2\pi t^2} e^{-\frac{3ay^2}{t^3} - \frac{x^2}{at} - \frac{3xy}{t^2}} \frac{1}{\sqrt{ta}} \left(\frac{4x^2}{ta} + \frac{9ay^2}{t^3} + \frac{12xy}{t^2} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{3}}{2\pi t^2} e^{-\frac{3ay^2}{t^3} - \frac{x^2}{at} - \frac{3xy}{t^2}} \frac{C}{\sqrt{ta}} = \frac{C}{\sqrt{ta}} \Gamma_a(x, y, t). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Per la terza disuguaglianza:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial y} \Gamma_a(x, y, t) \right| &= \Gamma_a(x, y, t) \cdot \left| -\frac{6ay}{t^3} - \frac{3x}{t^2} \right| = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2\pi t^2} e^{-\frac{3ay^2}{t^3} - \frac{x^2}{at} - \frac{3xy}{t^2}} \frac{\sqrt{a}}{t^{3/2}} \left(\left(\frac{6\sqrt{a}y}{t^{3/2}} + \frac{3x}{\sqrt{at}} \right)^2 \right)^{1/2} = \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}}{2\pi t^2} e^{-\frac{3ay^2}{t^3} - \frac{x^2}{at} - \frac{3xy}{t^2}} \frac{\sqrt{a}}{t^{3/2}} \left(\frac{9x^2}{ta} + \frac{36ay^2}{t^3} + \frac{36xy}{t^2} \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \frac{\sqrt{3}}{2\pi t^2} e^{-\frac{3ay^2}{t^3} - \frac{x^2}{at} - \frac{3xy}{t^2}} \frac{C\sqrt{a}}{t^{3/2}} = \frac{C\sqrt{a}}{t^{3/2}} \Gamma_a(x, y, t).
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Mentre per la quarta si utilizza l'osservazione 5:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Gamma_a(x, y, t) &= -\frac{2}{ta} \Gamma_a(x, y, t) + \Gamma_a(x, y, t) \cdot \left(\frac{2x}{ta} + \frac{3y}{t^2} \right)^2 = \\
&= -\frac{2}{ta} \Gamma_a(x, y, t) + \frac{\sqrt{3}}{2\pi t^2} e^{-\frac{3ay^2}{t^3} - \frac{x^2}{at} - \frac{3xy}{t^2}} \frac{1}{ta} \left(\frac{4x^2}{ta} + \frac{9ay^2}{t^3} + \frac{12xy}{t^2} \right) \leq \\
&\leq \left(-\frac{2}{ta} + \frac{C}{ta} \right) \Gamma_a(x, y, t) \leq \frac{C}{ta} \Gamma_a(x, y, t).
\end{aligned}$$

Passando alla quinta disuguaglianza, utilizzando l'osservazione 5 due volte:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3}{\partial x^3} \Gamma_a(x, y, t) &= \frac{2}{ta} \left(\frac{2x}{ta} + \frac{3y}{t^2} \right) \Gamma_a(x, y, t) + \Gamma_a(x, y, t) \cdot \left(\frac{2x}{ta} + \frac{3y}{t^2} \right)^3 = \\
&= \frac{2}{(ta)^{3/2}} \left(\frac{4x^2}{ta} + \frac{9ay^2}{t^3} + \frac{12xy}{t^2} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{3}}{2\pi t^2} e^{-\frac{3ay^2}{t^3} - \frac{x^2}{at} - \frac{3xy}{t^2}} + \\
&+ \frac{\sqrt{3}}{2\pi t^2} e^{-\frac{3ay^2}{t^3} - \frac{x^2}{at} - \frac{3xy}{t^2}} \frac{1}{(ta)^{3/2}} \left(\frac{4x^2}{ta} + \frac{9ay^2}{t^3} + \frac{12xy}{t^2} \right)^{3/2} \leq \\
&\leq \frac{C}{(ta)^{3/2}} \Gamma_a(x, y, t).
\end{aligned}$$

Infine la sesta disuguaglianza si dimostra così:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial}{\partial a} \Gamma_a(x, y, t) \right| &= \left| \frac{x}{a^{3/2}} \frac{\partial \Gamma(\frac{x}{\sqrt{a}}, y\sqrt{a}, t)}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{a}} \frac{\partial \Gamma(\frac{x}{\sqrt{a}}, y\sqrt{a}, t)}{\partial x} \right| \leq \\
&\leq \left| 2 \frac{x}{\sqrt{ta}} + 3 \frac{y\sqrt{a}}{t^{3/2}} \right| \left| \Gamma_a(x, y, t) \frac{x}{\sqrt{ta}^{3/2}} \right| + \left| 3 \frac{x}{\sqrt{ta}} + 6 \frac{y\sqrt{a}}{t^{3/2}} \right| \left| \Gamma_a(x, y, t) \frac{y}{\sqrt{at}^{3/2}} \right| \leq \\
&\leq C \frac{\Gamma_a(x, y, t)}{a} \left| \frac{x}{\sqrt{ta}^{3/2}} + \frac{y}{\sqrt{at}^{3/2}} \right| \leq C \frac{\Gamma_a(x, y, t)}{a}. \quad \square
\end{aligned} \tag{2.29}$$

2.4 Equazione a coefficienti Hölderiani

Ora cerchiamo la soluzione dell'equazione $\bar{L}u = 0$ con il metodo della parametrica.

Per usare questo metodo bisogna verificare che tutti i teoremi enunciati nel capitolo precedente valgano anche nel caso della soluzione fondamentale dell'operatore a coefficienti costanti appena trovata.

Definizione 2.2. Si definisce la seminorma:

$$\| (x, y) \|_{\xi, \tau} := \sqrt{\langle B_{\xi, \tau} \cdot (x, y), (x, y) \rangle} \quad (2.30)$$

dove

$$B_{\xi, \tau} := \begin{pmatrix} \frac{1}{a(\xi, \tau)} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3a(\xi, \tau) \end{pmatrix}$$

che risulta essere quindi indotta dal prodotto scalare $\langle (x, y), (x, y) \rangle_{B_{\xi, \tau}}$.

Osservazione 12. Posto $n := 4$, la funzione $\Gamma_{a(\xi, \tau)}$ può essere riscritta come:

$$\Gamma_{a(\xi, \tau)}(x, y, t) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi t^2} e^{-\frac{3a(\xi, \tau)y^2}{t^3} - \frac{x^2}{a(\xi, \tau)t} - \frac{3xy}{t^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi t^{n/2}} e^{-\| \delta_{\frac{1}{\sqrt{t}}}(x, y) \|_{\xi, \tau}^2} \quad (2.31)$$

dove:

$$\delta_{\frac{1}{\sqrt{t}}}(x, y) := \left(\frac{x}{\sqrt{t}}, \frac{y}{t^{3/2}} \right) \quad (2.32)$$

Lemma 2.4.1 (analogo del lemma 1.1.2). $\exists (w, \theta) \in Q$ tale che:

$$\left| \frac{\partial^2 (\Gamma_a - \Gamma_b)(x - \xi_1, y - \xi_2, t - \tau)}{\partial x^2} \right| \leq \frac{C}{|\sigma - \tau|^{1-\alpha/2}} |\Gamma_c(x - \xi_1, y - \xi_2, t - \tau)| \quad (2.33)$$

dove $a = a(\xi, \tau)$, $b = a(z, t)$ e $c = a(w, \theta)$.

Dimostrazione. Per il teorema di Lagrange $\exists c \in (a, b)$ tale che:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial^2 (\Gamma_a - \Gamma_b)(x - \xi_1, y - \xi_2, t - \tau)}{\partial x^2} \right| = \left| (b - a) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial \Gamma_a(x - \xi_1, y - \xi_2, t - \tau)}{\partial a} \right]_{a=c} \right| \leq \\
& \leq |b - a| \left| \frac{2}{c^2(t - \tau)} \Gamma_c(x - \xi_1, y - \xi_2, t - \tau) - \frac{2}{(t - \tau)c} \frac{\partial \Gamma_c(x - \xi_1, y - \xi_2, t - \tau)}{\partial c} + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{2(x - \xi_1)}{(t - \tau)c} + \frac{3(y - \xi_2)}{t^2} \right)^2 \frac{\partial \Gamma_c(x - \xi_1, y - \xi_2, t - \tau)}{\partial c} - \right. \\
& \quad \left. - 2 \left(\frac{2(x - \xi_1)}{(t - \tau)c} + \frac{3(y - \xi_2)}{(t - \tau)^2} \right) \frac{2(x - \xi_1)}{c^2(t - \tau)} \Gamma_c(x - \xi_1, y - \xi_2, t - \tau) \right| \leq \\
& = K|b - a| \frac{\Gamma_c(x - \xi_1, y - \xi_2, t - \tau)}{c^3(t - \tau)} \left(5 + 2 \left| \frac{x - \xi_1}{\sqrt{(t - \tau)c}} \right| \right) \leq \\
& \leq K|b - a| \frac{\Gamma_c(x - \xi_1, y - \xi_2, t - \tau)}{c^3(t - \tau)}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Dove nell'ultimo passaggio si è utilizzato lo stesso ragionamento fatto nella dimostrazione della seconda disuguaglianza della proposizione 2.3.2.

Ora, si può osservare che $\exists(w, \theta)$ tali che $c = a(w, \theta)$; infatti, essendo $a(x, t)$ una funzione continua, allora l'immagine del compatto connesso $\bar{\Omega} \times [\tau, t]$ sarà a sua volta un compatto connesso (cioè un intervallo, visto che siamo sulla retta reale) e, siccome tale immagine contiene anche i punti a e b , allora conterrà anche tutti i punti tra essi compresi.

Inoltre, usando l'Hölderianità di $a(x, t)$ si ottiene la tesi:

$$\begin{aligned}
K|b - a| \frac{\Gamma_c(x - \xi_1, y - \xi_2, t - \tau)}{c^3(t - \tau)} &= K|a(z, t) - a(\xi, \tau)| \frac{\Gamma_c(x - \xi_1, y - \xi_2, t - \tau)}{c^3(t - \tau)} \leq \\
&\leq K \frac{\Gamma_c(x - \xi_1, y - \xi_2, t - \tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha/2} c^3}. \quad \square
\end{aligned}$$

Osservazione 13. Grazie alle proprietà della soluzione fondamentale Γ_a enunciate nelle ultime tre sezioni, è facile dimostrare i teoremi 1.1.1, 1.1.4 e 1.1.5 anche nel caso dell'operatore L_a . Le dimostrazioni, infatti, si basavano sulle maggiorazioni effettuate nella proposizione 0.2.1 e sul lemma 1.1.2, i cui enunciati analoghi nel caso dell'operatore L_a sono rispettivamente il lemma

precedente e la proposizione 2.3.2. Per praticità riscriviamo di seguito i risultati che si otterrebbero dagli analoghi del teorema 1.1.5 e del corollario 1.1.6 per l'operatore L_a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = f(x, t) + \int_{T_0}^t \int_{\bar{\Omega}} \left(a(\xi, \tau) \frac{\partial^2 \Gamma_{a(\xi, \tau)}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + (x - \xi) \frac{\partial \Gamma_{a(\xi, \tau)}(x - \xi, t - \tau)}{\partial y} \right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(x, t) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} + x \frac{\partial V(x, t)}{\partial y} - \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = \\ = -f(x, t) + \int_{T_0}^t \int_{\bar{\Omega}} (a(x, t) - a(\xi, \tau)) \frac{\partial^2 \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x^2} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{2.35}$$

2.5 Metodo della parametrica per l'equazione di Fokker-Planck

Fissati (ξ, τ) e posto $a := a(\xi, \tau)$, si definiscono ricorsivamente le funzioni $K_j(x, t)$, $V_j(x, t)$, $R_j^{\xi, \tau}(x, t)$ come nel capitolo precedente. I teoremi e le dimostrazioni presentati nella sezione "Costruzione della parametrica" nel capitolo precedente sono identici a quelli del capitolo precedente. Di seguito si riportano le dimostrazioni di alcuni teoremi che si discostano da quelle già affrontate.

Teorema 2.5.1. *Vale:*

$$\left| \int_{\bar{\Omega}} \Gamma_{a(y, \sigma)}(x - y, t - \sigma) \Gamma_{a(\xi, \tau)}(y - \xi, \sigma - \tau) dy \right| \leq C |\Gamma_{a(\xi, \tau)}(x - \xi, t - \tau)| \quad \forall \sigma \in (\tau, t) \quad (2.36)$$

dove

$$C = \frac{\Lambda(t - \tau)}{\lambda(t - \tau)}$$

Dimostrazione. Siccome la funzione $a(x, t)$ è continua sul compatto $\bar{\Omega} \times [\tau, t]$, allora la matrice $B_{a(y, \sigma)}$ ammetterà un autovalore massimo e uno minimo, che indicheremo rispettivamente con λ e Λ , i quali non dipendono né da y né da σ .

Inoltre, siccome $t - \tau > \sigma - \tau$ e $t - \tau > t - \sigma$, allora risultano $\forall (x, y) \in \bar{\Omega}$:

$$\left\| \left\| \delta_{\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}}(x, y) \right\| \right\|_{y, \sigma} \leq \left\| \left\| \delta_{\frac{1}{\sqrt{\sigma-\tau}}}(x, y) \right\| \right\|_{y, \sigma},$$

$$\left\| \left\| \delta_{\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}}(x, y) \right\| \right\|_{\xi, \tau} \leq \left\| \left\| \delta_{\frac{1}{\sqrt{t-\sigma}}}(x, y) \right\| \right\|_{\xi, \tau}.$$

Quindi si può procedere alla dimostrazione della tesi:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\bar{\Omega}} \Gamma_b(x - y, t - \sigma) \Gamma_a(y - \xi, \sigma - \tau) dy \right| = \\ & = \left| \frac{3/4}{(4\pi)^n (t - \sigma)^{n/2} (\sigma - \tau)^{n/2}} \int_{\bar{\Omega}} e^{-\frac{\left\| \left\| \delta_{\frac{1}{\sqrt{t-\sigma}}}(y-x) \right\| \right\|_{y, \sigma}^2}{4(t-\sigma)} - \frac{\left\| \left\| \delta_{\frac{1}{\sqrt{\sigma-\tau}}}(y-\xi) \right\| \right\|_{\xi, \tau}^2}{4(\sigma-\tau)}} dy \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left| \frac{3/4}{(4\pi)^n(t-\sigma)^{n/2}(\sigma-\tau)^{n/2}} \int_{\Omega} e^{-\frac{\left\| \frac{\delta}{\sqrt{t-\tau}}(y-x) \right\|_{y,\sigma}^2}{4(t-\sigma)} - \frac{\left\| \frac{\delta}{\sqrt{t-\tau}}(y-\xi) \right\|_{\xi,\tau}^2}{4(\sigma-\tau)}} dy \right| \leq \\
 &\leq \left| \frac{3/4}{(4\pi)^n(t-\sigma)^{n/2}(\sigma-\tau)^{n/2}} \int_{\Omega} e^{-\frac{\lambda(t-\tau)}{4} \left(\frac{\left\| \frac{\delta}{\sqrt{t-\tau}}(y-x) \right\|_{y,\sigma}^2}{t-\sigma} + \frac{\left\| \frac{\delta}{\sqrt{t-\tau}}(y-\xi) \right\|_{\xi,\tau}^2}{\sigma-\tau} \right)} dy \right| \leq
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

che, grazie alla dimostrazione del teorema 2.5.1, si sa essere:

$$\begin{aligned}
 &\leq \left| \frac{\frac{\sqrt{3}\Lambda(t-\tau)}{2\lambda(t-\tau)} e^{-\frac{\lambda(t-\tau)}{4} \frac{\left\| \frac{\delta}{\sqrt{t-\tau}}(x-\xi) \right\|_{\xi,\tau}^2}{t-\tau}}}{(4\pi)^{n/2}(t-\tau)^{n/2}} \right| \leq \left| \frac{\frac{\sqrt{3}\Lambda(t-\tau)}{2\lambda(t-\tau)} e^{-\frac{\lambda(t-\tau)}{4\Lambda(t-\tau)} \frac{\left\| \frac{\delta}{\sqrt{t-\tau}}(x-\xi) \right\|_{\xi,\tau}^2}{t-\tau}}}{(4\pi)^{n/2}(t-\tau)^{n/2}} \right| = \\
 &= C |\Gamma_{a(\xi,\tau)}(x-\xi, t-\tau)|. \quad \square
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Proposizione 2.5.2. *Vale:*

$$|R_j^{\xi,\tau}(x, t)| \leq \frac{C^j}{|t-\tau|^{1-j\alpha/2}} \Gamma_a^{(\lambda_{min})^j}(x-\xi, t-\tau) \quad \forall j \geq 1.$$

Dimostrazione. Per quanto riguarda $R_1^{\xi,\tau}$:

$$\begin{aligned}
 |R_1^{\xi,\tau}(x, t)| &= |(\bar{L} - L_a) \Gamma_a(x-\xi, t-\tau)| = |a(x, t) - a(\xi, \tau)| \frac{\partial^2 \Gamma_a(x-\xi, t-\tau)}{\partial x^2} \leq \\
 &\leq \frac{\|x-\xi\|^\alpha + |t-\tau|^{\alpha/2}}{|t-\tau|^\alpha} \Gamma_a(x-\xi, t-\tau) \leq \frac{C}{|t-\tau|^{1-\alpha/2}} \Gamma_a(x-\xi, t-\tau).
 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda $R_j^{\xi,\tau}$ la dimostrazione è analoga a quella della proposizione 1.2.4 del capitolo precedente. \square

Teorema 2.5.3. *Le funzioni $R_j^{\xi,\tau}(x, t)$ rispetta la condizione:*

$$|R_j^{\xi,\tau}(x, t) - R_j^{\xi,\tau}(z, t)| \leq C|t-\tau|^\beta \Gamma_A(x-z, t), \quad \text{per un certo } \beta > 0.$$

Osservazione 14. Dalla proposizione precedente risulta che, siccome $\alpha > 0$, allora:

$$\exists j_0 \in \mathbb{N} : \quad 1 - \frac{j_0}{2}\alpha < 0$$

cioè un j_0 tale che $\forall j \geq j_0 \quad |R_j^{\xi,\tau}(x, t)| \leq C|t-\tau|^\gamma \Gamma_a(x-\xi, t-\tau)$ con $\gamma > 0$.

Definizione 2.3. Ora, fissati $(\xi, \tau) \in Q$ si definisce la funzione:

$$\phi_{\xi, \tau}(x, t) := \sum_{j=1}^{\infty} R_j^{\xi, \tau}(x, t) \quad (2.39)$$

E infine si ottiene la funzione seguente, che risulta essere soluzione fondamentale dell'operatore \bar{L} :

$$\bar{\Gamma}(x, t, \xi, \tau) := \Gamma_{\xi, \tau}(x - \xi, t - \tau) + \int_{\tau}^t \int_{\bar{\Omega}} \Gamma_{y, \sigma}(x - y, t - \sigma) \phi_{\xi, \tau}(y, \sigma) dy d\sigma \quad (2.40)$$

Teorema 2.5.4. *Fissati $(\xi, \tau) \in Q$, allora $\bar{\Gamma}_{\xi, \tau}(x, t)$ è soluzione fondamentale di \bar{L} in Q .*

Bibliografia

- [1] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Dover, 2008.
- [2] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol 19, 2010.
- [3] A. Pascucci, *Kolmogorov Equations in Physics and in Finance*, 2005.
- [4] E. Barucci, S. Polidoro, V. Vespri, *Some results on partial differential equations and Asian options*, 2001.

