

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

**UNA TRATTAZIONE IPERTESTUALE  
DI ALCUNI ELEMENTI DI STATICA  
DEI SISTEMI MECCANICI**

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

**Relatore:**  
Chiar.ma Prof.  
EMANUELA CALICETI

**Presentata da:**  
CHIARA GAMBERI

**Correlatore:**  
Chiar.mo Prof.  
ALESSANDRO  
GIMIGLIANO

**Sessione Luglio  
Anno Accademico 2014/2015**

*A te, che sempre mi sei accanto e mi hai fatto provare la vera essenza di tutte le emozioni di una vita fino ad ora. A te, che mi hai sempre dato la forza, anche per cose che non avrei mai nemmeno immaginato. A te, che sarai sempre in me.*



# Indice



# Introduzione

L'obbiettivo di questa tesi è svolgere una trattazione semplice ma esauriente degli aspetti essenziali per lo studio delle configurazioni di equilibrio di semplici sistemi meccanici.

In particolare l'analisi è volta a far parte del 'Progetto Matematica'; un portale del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, il cui scopo, attraverso le tesi di chi vi partecipa, è *"presentare la Matematica del primo biennio delle facoltà scientifiche in maniera interattiva, graduale, multimediale: in una parola, nel modo più amichevole possibile."*

L'analisi, dopo alcuni richiami su elementi di base di calcolo vettoriale, si apre con un capitolo che enuncia nozioni e risultati fondamentali di meccanica classica, indispensabili per affrontare il problema dell'equilibrio nell'ambito della statica.

Con il secondo capitolo inizia la trattazione delle configurazioni di equilibrio partendo dalla statica del punto materiale per poi passare ai sistemi più complessi costituiti da un numero arbitrario di punti.

Per la parte di applicazioni vengono illustrati i due metodi classici di risoluzione: quello basato sulle equazioni cardinali della statica, che oltre ad individuare le configurazioni di equilibrio del sistema consente di determinare anche i corrispondenti valori delle reazioni vincolari, e quello basato sul principio dei lavori virtuali. Vengono poi riportati tre problemi standard la cui risoluzione è svolta attraverso entrambi i metodi per cercare di garantire una più completa comprensione della materia.

Per l'esposizione degli argomenti analizzati si è fatto riferimento principalmente ai Trattati [?], [?], a cui si rinvia per ogni ulteriore approfondimento (sulla materia), in particolare riguardo ai dettagli che, per necessità di sintesi, si sono dovuti omettere.



# Elementi di calcolo vettoriale

Indicheremo un generico vettore dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$  delle terne ordinate di numeri reali sul campo  $\mathbb{R}$  con una lettera minuscola sormontata da una freccia:  $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ . Il vettore  $\vec{a}$  potrà essere rappresentato mediante le sue componenti rispetto alla base canonica  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} : \vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$ . Così si avrà

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad a_x, a_y, a_z \in \mathbb{R}.$$

Fissato un sistema di riferimento cartesiano  $(O, x, y, z)$  il vettore  $\vec{a}$  potrà essere identificato al punto  $P$  dello spazio euclideo di coordinate  $(a_x, a_y, a_z)$  e pertanto con la classe di equivalenza dei segmenti orientati aventi la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso (da  $O$  verso  $P$ ) del segmento orientato  $\vec{OP}$ . Scriveremo dunque  $\vec{a} = \vec{OP} \equiv P - O$ , ma anche  $\vec{a} = \vec{AB} \equiv B - A$ , se  $\vec{AB}$  è un segmento orientato di estremi  $A$  e  $B$  aventi stessa lunghezza, direzione e verso di  $\vec{OP}$ .

In particolare la direzione di un segmento orientato  $\vec{AB}$  è quella della retta  $AB$ , e il verso da  $A$  verso  $B$  è rappresentato mediante una freccia con punta in  $B$ . La lunghezza del segmento orientato  $\vec{AB}$  è detta *modulo* del vettore  $\vec{a}$  e si denota con  $|\vec{a}|$  o semplicemente  $a$ . Si ha

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

In virtù dell'unicità del punto  $P$ , spesso il vettore  $\vec{a}$  verrà identificata con lo stesso punto  $P$  e si potrà scrivere

$$\vec{a} = P - O \equiv P.$$

Dati due vettori  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3, \vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , indicheremo il loro *prodotto scalare* con

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$



essendo  $\alpha$  l'angolo compreso fra due segmenti orientati rappresentanti  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , aventi l'origine in comune.

Invece il *prodotto vettoriale* di  $\vec{a}$  per  $\vec{b}$ , denotato  $\vec{a} \times \vec{b}$  è il vettore  $\vec{c}$  tale che  $|\vec{c}| = ab \sin \alpha$  ( $\alpha$  angolo tra i due vettori), la direzione di  $\vec{c}$  è normale al piano formato dai due vettori e il suo verso è stabilito dalla regola della mano destra. In coordinate cartesiane  $\vec{a} \times \vec{b}$  è dato dal seguente determinante del terzo ordine:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

# Capitolo 1

## Principi generali della meccanica

In questo capitolo verranno richiamate le nozioni e i principi fondamentali della meccanica necessari per affrontare lo studio dell'equilibrio di un sistema meccanico.

Intanto premettiamo alcune nozioni.

**Definizione 1.1.** *Un **punto materiale** è un sistema che geometricamente degenera in un punto. È quindi un oggetto ideale dotato di massa e di dimensioni trascurabili rispetto a quelle dei fenomeni considerati.*

*Un **sistema meccanico** è un corpo costituito da punti materiali.*

**Definizione 1.2.** *Un **corpo rigido** è un sistema meccanico  $C$  costituito da infiniti punti materiali tale che comunque si prendano due punti  $P, Q \in C$  la loro distanza si mantiene costante nel tempo.*

*La condizione  $|P - Q| = \text{costante}$ , costituisce il **vincolo di rigidità**.*

**Definizione 1.3.** *La **configurazione di un sistema meccanico** è l'insieme dei punti dello spazio  $\mathbb{R}^3$  occupati dai punti materiali che costituiscono il sistema.*

**Definizione 1.4.** *Si definisce **grado di libertà** di un sistema meccanico il numero di parametri necessari e sufficienti a determinare in ogni istante la configurazione del sistema.*

*Gli  $n \in \mathbb{N}$  parametri che si usano per descrivere in maniera univoca la configurazione del sistema meccanico vengono detti **parametri lagrangiani**.*

Per un sistema meccanico a  $n$  gradi di libertà la generica configurazione è quindi rappresentata da una  $n$ -upla  $q = (q_1, \dots, q_n)$  di parametri lagrangiani e verrà quindi identificata con essa.

**Esempio 1.5.** • Punto materiale libero nello spazio.

Il grado di libertà è  $n = 3$ , e come parametri lagrangiani si possono scegliere le tre coordinate rispetto ad un sistema cartesiano  $(O, x, y, z)$ :  $q_1 = x$ ;  $q_2 = y$ ;  $q_3 = z$ . La generica configurazione del punto sarà dunque rappresentata da una terna del tipo  $q = (x, y, z)$ .

• Corpo rigido libero.

In virtù del vincolo di rigidità, per conoscere la configurazione di un corpo rigido è sufficiente conoscere la configurazione di una terna cartesiana  $(O_1, x_1, y_1, z_1)$  solidale al corpo. Supponendo di conoscere le tre coordinate dell'origine  $O_1$ , scelta appartenente al corpo, è poi sufficiente conoscere l'orientamento dei tre assi coordinati rispetto ad una terna fissa  $(O, x, y, z)$ . A questo scopo, come è noto (si veda il Trattato [?] per i dettagli), bastano i tre angoli di Eulero:  $\varphi$ : longitudine;  $\phi$ : azimuth;  $\vartheta$ : mutazione. Questi tre parametri, assieme alle coordinate di  $O_1$  costituiscono una scelta di parametri lagrangiani stabilendo come grado di libertà per un corpo rigido libero  $n = 6$ .

**Definizione 1.6.** *Un sistema meccanico si dice **libero** in una data configurazione se può passare da quella configurazione ad ogni altra possibile geometricamente vicina.*

*Un sistema meccanico si dice **vincolato** in una data configurazione se esiste una configurazione geometricamente vicina non raggiungibile a causa della presenza di qualche dispositivo, detto formalmente **vincolo**.*

Gli spostamenti infinitesimi dei punti possono essere **consentiti** o **proibiti**.

Gli spostamenti infinitesimi consentiti si distinguono in reali o virtuali.

• **Spostamento reale**: spostamento che avviene realmente e porta il punto  $P$  dalla configurazione iniziale ad una nuova  $P_1$  con velocità finita  $\vec{v}$  e si definisce come  $dP = \vec{v}dt$ .

- **Spostamento virtuale:** spostamento fittizio che generalmente non avviene nella realtà ma si immagina che avvenga in tempo nullo con velocità infinita e lo si indica  $\delta P$ .

Gli spostamenti virtuali possono essere a loro volta suddivisi in invertibili o non invertibili.

- **Spostamento invertibile:** se è consentito lo spostamento virtuale inverso  $-\delta P$  a partire dalla stessa configurazione iniziale.
- **Spostamento non invertibile:** se non è consentito lo spostamento virtuale inverso causa la presenza di vincoli.

*Osservazione 1.7.* Lo spostamento virtuale inverso  $-\delta P$  non è lo spostamento che porta il punto  $P$  nella sua configurazione iniziale. Dobbiamo ricordarci che  $\delta P$  è un vettore e quindi attraverso una traslazione può avere origine ovunque;  $-\delta P$  è quindi semplicemente il vettore di verso opposto a  $\delta P$ .

Gli spostamenti infinitesimi proibiti sono spostamenti che non possono avvenire a causa della presenza di vincoli e si dividono in totalmente e parzialmente proibiti.

- **Spostamento totalmente proibito:** spostamento che porterebbe il punto  $P$  dalla configurazione iniziale in una  $P_1$  alla quale in nessun modo si può avvicinare.
- **Spostamento parzialmente proibito:** spostamento che porterebbe il punto  $P$  in una configurazione  $P_1$  a cui il punto si può avvicinare.

La configurazione di un sistema meccanico può essere:

- **Interna:** configurazione a partire dalla quale ogni spostamento virtuale è invertibile.
- **Di confine:** configurazione a partire dalla quale esiste uno spostamento virtuale non invertibile.

I vincoli si dividono in:

- **Fissi** (o vincoli scleronomi) se sono indipendenti dalla variabile tempo.

- **Mobili** (o vincoli reonomi) se variano al variare del tempo.

**Esempio 1.8.** Punto vincolato a muoversi su un piano inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto ad una direzione fissata. Se  $\alpha$  è costante il vincolo è fisso, se  $\alpha = \alpha(t)$ , quindi varia nel tempo, il vincolo è mobile.

Tornando agli spostamenti infinitesimi dobbiamo darne una rappresentazione in termini dei parametri lagrangiani che caratterizzano la configurazione del punto  $P$  nei diversi contesti (questa caratterizzazione si generalizza anche per un sistema meccanico generico).

Supponiamo che il punto  $P$  faccia parte di un sistema meccanico (eventualmente costituito dal solo punto  $P$ ) a  $n$  gradi di libertà. Allora la configurazione  $P(t)$  del punto  $P$  al generico istante  $t$  di solito dipende esplicitamente dagli  $n$  parametri lagrangiani  $(q_1, \dots, q_n)$ , oltre che dal tempo  $t$  (in caso di vincoli mobili), ossia si può guardare  $P$  come funzione di  $n + 1$  variabili:

$$(q_1, \dots, q_n, t) \longrightarrow P = P(q_1, \dots, q_n, t). \quad (1.1)$$

Allora per lo spostamento reale  $\delta P$  si ha

$$dP = \frac{\partial P}{\partial q_1} dq_1 + \dots + \frac{\partial P}{\partial q_n} dq_n + \frac{\partial P}{\partial t} dt = \sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial P}{\partial t} dt \quad (1.2)$$

Se i vincoli considerati sono fissi non avremo la dipendenza dal tempo:

$$dP = \sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial q_i} dq_i \quad (1.3)$$

Considerando invece ora gli spostamenti virtuali sappiamo che devono avvenire in tempo  $\delta t$  nullo quindi:

$$\delta P = \sum_{k=1}^n \frac{\partial P}{\partial q_k} \delta q_k.$$

Introduciamo ora l'elemento centrale in tutto il contesto della meccanica: la nozione di forza.

**Definizione 1.9.** *Da un punto di vista fisico, una **forza** è un ente in grado di alterare lo stato di quiete o di moto di un punto e cioè di generare una variazione della velocità*

e perciò di produrre una accelerazione.

Da un punto di vista matematico una forza è un vettore applicato, ossia una coppia del tipo  $(\vec{F}, P)$  dove  $\vec{F}$  è il vettore della forza e  $P$  il suo punto di applicazione.

La retta passante per  $P$  e parallela al vettore  $\vec{F}$  è detta **linea d'azione** della forza.

*Osservazione 1.10.* L'importanza del punto di applicazione è data dal fatto che l'effetto dinamico di una forza cambia in base a dove questa viene applicata.

Il vettore  $\vec{F} = \vec{F}(P, \vec{v}, t)$  in generale è funzione del punto di applicazione  $P$ , della sua velocità e del tempo. Se rappresentiamo i vettori in termini della base ortonormale  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  di  $\mathbb{R}^3$ :

$$P \equiv P - O = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{dP}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

Allora  $F_x = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$ ,  $F_y = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$ ,  $F_z = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$  risultano 3 funzioni in 7 variabili.

Qui si è usata la notazione

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \dot{z} = \frac{dz}{dt}.$$

Riguardo ai sistemi vincolati esiste un importante postulato che ora enunciamo.

**Postulato delle reazioni vincolari:** È sempre possibile rendere libero un qualunque sistema vincolato, a patto di introdurre un opportuno sistema di forze dette **reazioni vincolari**.

Le forze non dovute all'azione dei vincoli vengono dette **forze attive**. Le reazioni vincolari sono quindi delle forze fittizie che noi introduciamo nel nostro modello per rappresentare l'azione dei vincoli e spesso a differenza delle forze attive, sono incognite del problema. Solitamente vengono indicate con  $(\vec{\Phi}, P)$  dove  $\vec{\Phi}$  è il vettore della reazione vincolare e  $P$  il punto di applicazione.

**Definizione 1.11.** Un vincolo si dice **liscio** (o privo di attrito) se è in grado di esplicitare l'azione di una sola reazione vincolare avente la stessa direzione e verso opposto di uno spostamento totalmente proibito.

Le forze agenti su di un sistema meccanico si distinguono in:

- **Interne** dovute all'azione di punti interni al sistema.
- **Esterne** dovute all'azione di punti o corpi esterni al sistema.

Possiamo ora enunciare uno dei principi fondamentali della meccanica.

**Principio di azione e reazione:** *Se su di un punto  $A$  agisce una forza di vettore  $\vec{F}$  da parte di un punto  $B$ , allora sul punto  $B$  agisce una forza di vettore  $-\vec{F}$  da parte del punto  $A$ ; entrambe le forze hanno come linea d'azione la retta congiungete i due punti, cioè la retta  $AB$ .*

*Osservazione 1.12.* L'insieme delle forze interne di un generico sistema meccanico possono essere raggruppate in coppie del tipo Azione-Reazione. Se invece una forza è generata da un punto esterno al sistema meccanico in esame ma ha punto di applicazione su di esso, il punto esterno subirà una forza di verso opposto ma questa non verrà considerata nello studio perchè appunto è esterna al nostro sistema.

**Definizione 1.13.** *Data una forza  $(\vec{F}, P)$  e un polo qualunque  $O \in \mathbb{R}^3$  si chiama **Momento della forza** rispetto al fissato polo  $O$  il prodotto vettoriale:*

$$\vec{\Omega}(O) := \vec{F} \times (O - P)$$

*Osservazione 1.14.* Il momento di una forza rispetto ad un polo appartenente alla sua linea d'azione è nullo.

Consideriamo ora un insieme costituito da un numero finito di punti, che chiamiamo **sistema di forze** e denoteremo brevemente con  $(S) : (\vec{F}_1, P_1), \dots, (\vec{F}_N, P_N)$ . Gli elementi caratterizzanti il sistema  $(S)$  sono due, che ora andiamo a definire.

**Definizione 1.15.** :

- Si chiama **vettore risultante** del sistema  $(S)$  il vettore

$$\vec{R} = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s$$

- Si chiama **momento risultante** del sistema  $(S)$  rispetto a un polo  $O \in \mathbb{R}^3$  il vettore

$$\vec{\Omega}(O) = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \times (O - P_s)$$

ovvero le somme dei momenti delle singole forze che compongono il sistema.

Ora enunceremo alcune proprietà di un sistema di forze  $(S)$  funzionali al nostro studio. Per la semplice verifica ed eventuali approfondimenti si rinvia il lettore al Trattato [?].

**Proposizione 1.16.** *Valgono:*

a- Siano  $O, O_1 \in \mathbb{R}^3$ . Si ha:

$$\vec{\Omega}(O_1) = \vec{\Omega}(O) + \vec{R} \times (O_1 - O).$$

b- Il momento risultante di un sistema di forze non dipende dalla scelta del polo se e solo se il vettore risultante  $\vec{R}$  è nullo.

c- Per il principio di azione e reazione il sistema di forze interne di un qualunque corpo è caratterizzato da:

$$\vec{R} \equiv 0 \quad e \quad \vec{\Omega}(O) \equiv 0 \quad \forall O \in \mathbb{R}^3 \quad (1.4)$$

A questo punto è utile introdurre la nozione di equivalenza fra sistemi di forze.

**Definizione 1.17.** Siano  $(S) := (\vec{F}_1, P_1), \dots, (\vec{F}_N, P_N)$  e  $(S') := (\vec{F}'_1, P'_1), \dots, (\vec{F}'_m, P'_m)$  due sistemi di forze.  $(S)$  si dice *equivalente* ad  $(S')$  se e solo se sono contraddistinti dagli stessi elementi caratterizzanti, ossia:

$$\vec{R} = \vec{R}' \quad e \quad \vec{\Omega}(O) = \vec{\Omega}'(O) \quad \forall O \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{con} \quad \vec{R}' = \sum_{s=1}^m \vec{F}'_s \quad \vec{\Omega}'(O) := \sum_{s=1}^m \vec{F}'_s \times (O - P'_s).$$

**Proposizione 1.18.** Se  $R = R'$  e se esiste un polo  $O \in \mathbb{R}^3$  tale che  $\vec{\Omega}(O) = \vec{\Omega}'(O)$  allora  $\vec{\Omega}(O') = \vec{\Omega}'(O') \quad \forall O' \in \mathbb{R}^3$ .

*Osservazione 1.19.* La definizione formale di sistemi equivalenti di forze rimanda direttamente al concetto intuitivo che due sistemi di forze sono equivalenti proprio se producono gli stessi effetti dinamici su di un corpo.



**Esempio 1.20** (La forza peso). Dato un punto materiale  $P$  di massa  $m$  si chiama **forza peso** agente su  $P$  la forza  $(\vec{F}, P)$  di vettore  $\vec{F} = m\vec{g}$ , dove  $\vec{g}$  è il vettore accelerazione di gravità.

*Osservazione 1.21.* Il vettore  $\vec{F}$  è diretto 'verso il basso'  $\vec{F} = m\vec{g} = -mg\vec{j}$  impostando un sistema di riferimento cartesiano con asse  $y$  parallela ad  $\vec{F}$ .

Per un sistema di  $N$  punti  $P_1, \dots, P_N$  di masse  $m_1, \dots, m_N$  rispettivamente, si può dimostrare che il sistema delle forze peso  $(S) : (m_1\vec{g}, P_1), \dots, (m_N\vec{g}, P_N)$  è equivalente al sistema costituito da una sola forza

$$(\vec{F}, G) \quad \text{dove} \quad \vec{F} = M\vec{g} \quad \text{con} \quad M = \sum_{s=1}^N m_s$$

e  $G$  è il Baricentro del corpo definito dal vettore

$$G - O = \sum_{s=1}^N \frac{m_s(P_s - O)}{M}$$

se  $O$  è l'origine del sistema di riferimento fissato.

Passiamo ora ad illustrare la nozione di lavoro di una forza.

**Definizione 1.22.** Data una forza  $(\vec{F}, P)$  si chiama **Lavoro elementare reale** della forza, corrispondente allo spostamento reale  $dP$  di  $P$ , il prodotto scalare

$$dL := \vec{F} \cdot dP \tag{1.5}$$

Utilizzando la rappresentazione del prodotto scalare in forma intrinseca si ha

$$dL = FdP \cos \alpha, \tag{1.6}$$

se  $\alpha$  rappresenta l'angolo formato dai due vettori  $\vec{F}$  e  $dP$ .

Se invece utilizziamo una rappresentazione in coordinate cartesiane, ovvero rappresentiamo i vettori rispetto alla terna ortonormale  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , per il lavoro  $dL$  otteniamo

$$dL = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \tag{1.7}$$

Dalla (1.7) risulta ovvio che il lavoro elementare di una forza è nullo se e solo se il vettore della forza è perpendicolare allo spostamento reale di  $P$ :  $\vec{F} \perp dP$  (escludendo i casi banali  $\vec{F} = 0$  o  $dP = 0$ ).

Se nella (??) invece di uno spostamento reale consideriamo uno spostamento virtuale  $\delta P$  otteniamo la definizione di lavoro virtuale  $\delta L$  della forza  $(\vec{F}, P)$ :

$$\delta L := \vec{F} \cdot \delta P = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z.$$

*Osservazione 1.23.* I simboli  $dL$  e  $\delta L$  non rappresentano dei differenziali di funzioni, ma è semplicemente la notazione con cui si definisce il lavoro elementare.

Se invece di studiare il lavoro di una sola forza applicata ad un punto libero abbiamo un contesto più complesso con diverse forze in azione o sono presenti vincoli dovremo analizzare il lavoro elementare di un sistema di forze.

Sia dunque dato un sistema generico di forze  $(S) := (\vec{F}_1, P_1), \dots, (\vec{F}_N, P_N)$ .

Il lavoro elementare di  $(S)$  è la somma dei lavori delle singole forze, distinguendo anche in questo caso le due diverse tipologie:

- **Reale**  $dL := \sum_{s=1}^N dL_s = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot dP_s$
- **Virtuale**  $\delta L := \sum_{s=1}^N \delta L_s = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \delta P_s$ .

In un sistema di forze non si usa scomporre i vettori in coordinate cartesiane, conviene invece adoperare i parametri lagrangiani. Siano allora  $q_1, \dots, q_n$  i parametri lagrangiani in modo da poter rappresentare ogni punto del sistema come funzione delle  $n+1$  variabili  $(q_1, \dots, q_n, t)$ :  $P_s = P_s(q_1, \dots, q_n, t)$ ,  $\forall s = 1, \dots, N$ .

Si ottengono le nuove formulazioni per il lavoro elementare:

- $dL := \sum_{k=1}^n Q_k dq_k + Q^* dt$
- $\delta L := \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k$

dove  $Q_k = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \frac{\partial P_s}{\partial q_k}$   $k = 1, \dots, n$  sono dette **Forze generalizzate di Lagrange** o componenti Lagrangiane delle forze, e  $Q^* = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \frac{\partial P_s}{\partial t}$ .

Osserviamo che il lavoro elementare virtuale non presenta il termine  $Q^* \delta t$ , essendo  $\delta t = 0$ . Vediamo ora le condizioni sotto le quali il lavoro elementare può rappresentare un differenziale.

**Definizione 1.24.** a- Una forza  $(\vec{F}, P)$  si dice **posizionale** se  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{P})$ , cioè  $\vec{F}$  dipende solo dalla posizione di  $P$  e non dalla velocità, nè dal tempo. In questo caso allora il lavoro elementare rappresenta una forma differenziale in  $\mathbb{R}^3$ :

$$dL = F_x(x, y, z)dx + F_y(x, y, z)dy + F_z(x, y, z)dz.$$

b- Una forza  $(\vec{F}, P)$  posizionale si dice **conservativa** se e solo se esiste una applicazione  $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  tale che

$$dL = dU$$

cioè in termini di componenti cartesiane:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz,$$

ovvero

$$\begin{cases} F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = \frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases} \implies \vec{F} = \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \nabla U$$

$U$  si chiama **Potenziale** della forza; dunque il vettore della forza è il gradiente del potenziale. Il potenziale è definito a meno di una costante additiva essendo definito in termini del suo differenziale.

**Esempio 1.25** (Lavoro finito lungo  $\gamma$  di una forza conservativa). Il lavoro finito di una forza applicata al punto  $P$  che si muove lungo la curva  $\gamma$  dalla configurazione iniziale  $P_0$  a  $P_1$  è dato da:

$$L := \int_{\gamma} dL$$

Se la forza è conservativa dal teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo:

$$L = \int_{P_0}^{P_1} dU = U(P_1) - U(P_0)$$

Il risultato quindi dipende solo dal valore del potenziale agli estremi del percorso e non dalla traiettoria  $\gamma$ .

**Esempio 1.26** (Forze costanti). Sia  $\vec{F} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$  dove  $A, B, C \in \mathbb{R}$ . Allora la forza è conservativa con potenziale  $U = Ax + By + Cz$ .

**Esempio 1.27** (Forze peso). Si tratta di un caso particolare di forza costante, essendo  $\vec{F} = -mg\vec{j}$ . Dall'esempio precedente si ha  $U = -mgy$ , essendo  $A = C = 0$  e  $B = -mg$ .

**Esempio 1.28** (Forze centrali). Una forza  $(\vec{F}, P)$  si dice **centrale** se il vettore  $\vec{F}$  è sempre diretto verso un punto fisso  $O \in \mathbb{R}^3$  detto polo e se  $|\vec{F}|$  dipende solo dalla distanza  $\rho$  del punto  $P$  da  $O$ , ossia  $\rho = |P - O|$ . Dunque si ha  $\vec{F} = f(\rho)\vec{r}$ , essendo  $\vec{r}$  il vettore diretto da  $O$  verso  $P$ . E' facile verificare che la forza è conservativa con potenziale  $U(\rho) = \int f(\rho)d(\rho)$ .

Esempi:

- Forza gravitazionale newtoniana che si esercita su un punto  $P$  di massa  $m$  da parte di un punto materiale  $O$  di massa  $M$ :  $\vec{F} = k\frac{mM}{\rho^2}\vec{r} \rightarrow U(\rho) = k\frac{mM}{\rho}$
- Forza elastica dovuta all'azione di una molla avente un estremo fisso in  $O$  e un estremo mobile in  $P$ :  $\vec{F} = -k^2\rho\vec{r} \rightarrow U = -\frac{k^2}{2}\rho^2$ .

Consideriamo ora un sistema di forze  $(S) : (\vec{F}_1, P_1), \dots, (\vec{F}_N, P_N)$  applicate ai punti di un corpo a  $n$  gradi di libertà con parametri lagrangiani  $(q_1, \dots, q_n)$ . Supponiamo che le forze siano posizionali, cioè i vettori  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_N$  dipendono solo dai parametri  $q_1, \dots, q_n$  e non dalle loro derivate  $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ , nè dal tempo:

$$\vec{F}_s = \vec{F}_s(q_1, \dots, q_n) \quad \forall s = 1, \dots, N.$$

**Definizione 1.29.** Un sistema di forze posizionali  $(S)$ , si dice conservativo se esiste una applicazione  $U : (q_1, \dots, q_n) \rightarrow U(q_1, \dots, q_n)$  di classe  $C^\infty$  tale che

$$dL = dU$$

cioè

$$Q_1 dq_1 + \dots + Q_n dq_n = \frac{\partial U}{\partial q_1} dq_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_n} dq_n$$

ovvero  $Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}$ ,  $\forall k = 1, \dots, n$  e  $\nabla U = (Q_1, \dots, Q_n)$ .

*Osservazione 1.30.* Il dominio di definizione delle funzioni  $(q_1, \dots, q_n) \rightarrow \vec{F}_s(q_1, \dots, q_n)$  è semplicemente connesso, condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di forze sia conservativo è che

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

E' immediato verificare la seguente

**Proposizione 1.31.** *In un sistema di forze (S) se ciascuna forza  $(\vec{F}_s, P_s)$  con  $s = 1, \dots, N$  è conservativa con potenziale  $U_s = U_s(q_1, \dots, q_n)$ , allora il sistema (S) è conservativo e il potenziale totale è la somma dei singoli potenziali cioè:*

$$U = U_1 + \dots + U_N.$$

Concludiamo questo capitolo ricordando la legge di Newton o legge fondamentale della dinamica.

**Legge fondamentale della Dinamica:** *Se su di un punto P di massa m agisce una forza di vettore  $\vec{F}$ , rispetto ad un osservatore assegnato (O) allora l'accelerazione  $\vec{a}$  del punto è data dalla legge:*

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

In generale se su P agisce un sistema di forze di vettori  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_N$ , l'accelerazione  $\vec{a}$  di P è data da

$$m\vec{a} = \vec{R} \quad \text{dove} \quad \vec{R} = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \quad (1.8)$$

La (??) può anche essere riscritta come

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{\Phi} \quad (1.9)$$

se  $\vec{F}$  e  $\vec{\Phi}$  rappresentano rispettivamente il vettore risultante delle forze attive e delle reazioni vincolari agenti su P.

# Capitolo 2

## Statica

La statica è la parte della meccanica che studia le condizioni di equilibrio per un sistema meccanico.

Inizieremo dal caso più semplice, il singolo punto materiale, per passare ai sistemi più complessi, costituiti da un numero arbitrario di punti (anche infinito). Illustreremo i due metodi classici di risoluzione dei problemi: quello basato sulle equazioni cardinali della statica e quello basato sul principio dei lavori virtuali.

### 2.1 Statica del punto materiale

**Definizione 2.1.** *Una configurazione  $P_0 \in \mathbb{R}^3$  si dice **configurazione di equilibrio** per un punto  $P$ , se posto il punto in  $P_0$  all'istante iniziale fermo (i.e. con velocità nulla) il punto resta in  $P_0$  a tutti gli istanti successivi.*

Questa definizione equivale a dire che se

$$\begin{cases} P(t_0) = P_0 \\ \vec{v}(t_0) = 0 \end{cases} \implies P(t) = P_0 \quad \forall t \geq t_0.$$

Ricordando la legge di Newton come equazione differenziale del secondo ordine nell'incognita  $P = P(t)$ :

$$m \frac{d^2 P}{dt^2} = \vec{R}(P, \vec{v}, t)$$

La definizione (??) può essere così riformulata:

**Definizione 2.2.** Una configurazione  $P_0 \in \mathbb{R}^3$  si dice *configurazione di equilibrio* per il punto  $P$ , se e solo se l'unica soluzione dell'equazione del moto

$$m \frac{d^2 P}{dt^2} = \vec{R}(P, \vec{v}, t) \quad \text{corrispondente al dato iniziale} \quad \begin{cases} P(t_0) = P_0 \\ \vec{v}(t_0) = 0 \end{cases}$$

è la soluzione costante  $P(t) = P_0, \quad \forall t \geq t_0$ .

*Osservazione 2.3.* L'equazione del moto con dato iniziale fissato rappresenta matematicamente un problema di Cauchy la cui soluzione esiste ed è unica, sotto opportune ipotesi di regolarità per la funzione  $\vec{R}(P, \vec{v}, t)$ , che in questo ambito si considerano soddisfatte.

**Esempio 2.4** (Pendolo Ideale). Si chiama pendolo matematico, o ideale, un punto materiale  $P$  mobile in un piano verticale, soggetto al peso, vincolato all'estremità di un filo flessibile inestensibile (o di una barra rigida) con l'altro estremo fisso in un punto  $O$ , come in Figura (??).

Osserviamo sperimentalmente che nel caso del filo flessibile l'unica configurazione di equilibrio corrisponde a  $\vartheta = 0$ , essendo  $\vartheta$  l'angolo che la retta  $OP$  forma con la verticale; nel caso di barra rigida anche  $\vartheta = \pi$  rappresenta una configurazione di equilibrio.

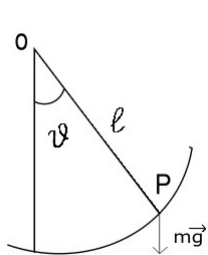


Figura 2.1: Pendolo ideale

Supponiamo che un punto materiale sia soggetto ad sistema di forze tali che  $\vec{R} = \vec{R}(P, t)$  dipende solo dalla posizione di  $P$  e dal tempo, non dalla velocità; è il caso ad esempio delle forze posizionali. Possiamo enunciare il seguente importante risultato.

**Proposizione 2.5.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché  $P_0 \in \mathbb{R}^3$  sia configurazione di equilibrio è che  $\vec{R}(P_0, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .*

*Dimostrazione.* Dimostriamo la condizione necessaria. Per la condizione sufficiente basta ripercorrere il ragionamento in senso inverso.

Supponiamo dunque che  $P_0$  sia configurazione di equilibrio. Allora  $P(t) = P_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$  è soluzione dell'equazione

$$m \frac{d^2 P}{dt^2} = \vec{R}(P, t) \quad (2.1)$$

con dato iniziale

$$\begin{cases} P(t_0) = P_0 \\ \vec{v}(t_0) = 0 \end{cases}.$$

Sostituendo nella (??)  $P(t) = P_0$ , essendo

$$m \frac{d^2 P(t)}{dt^2} = 0, \forall t$$

si ottiene

$$0 = \vec{R}(P_0, t), \forall t.$$

□

**Corollario 2.6.** *Se le forze agenti sul punto materiale  $P$  sono posizionali e quindi  $\vec{R} = \vec{R}(P)$  condizione necessaria e sufficiente affinché  $P_0$  sia di equilibrio è che*

$$\vec{R}(P_0) = 0. \quad (2.2)$$

Analizziamo ora alcuni casi particolari.

**Esempio 2.7.** Punto materiale libero. Nel caso in cui il punto  $P \in \mathbb{R}^3$  sia libero le forze di reazione vincolare su di esso sono nulle quindi il vettore risultante  $\vec{R} = \vec{F} + \vec{\Phi} = \vec{F}$  coincide con il vettore risultante delle forze attive. Come abbiamo visto una generica configurazione  $P = (x, y, z)$  è di equilibrio se e solo se

$$\vec{F}(x, y, z) = 0. \quad (2.3)$$



Ponendo  $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$  l'equazione vettoriale (??) è equivalente alle tre equazioni scalari

$$\begin{cases} F_x(x, y, z) = 0 \\ F_y(x, y, z) = 0 \\ F_z(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

che rappresentano un sistema di tre equazioni in tre incognite.

**Esempio 2.8.** Punto vincolato. Se il punto  $P \in \mathbb{R}^3$  è vincolato il vettore risultante è  $\vec{R} = \vec{F} + \vec{\Phi}$  con  $\vec{\Phi} \neq 0$ . Allora la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio  $\vec{R} = \vec{F}(x, y, z) + \vec{\Phi}(x, y, z)$  è rappresentata dal sistema:

$$\begin{cases} F_x + \Phi_x = 0 \\ F_y + \Phi_y = 0 \\ F_z + \Phi_z = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Apparentemente si direbbe che è un sistema di 3 equazioni in 6 incognite, ma essendo  $P \in \mathbb{R}^3$  vincolato, le sue tre coordinate non sono indipendenti. Il vincolo riduce il grado di libertà di  $P$ . Sarà quindi necessario introdurre un sistema di reazioni vincolari che rappresenti adeguatamente il vincolo e che renda il sistema (??) determinato.

**Esempio 2.9.** Punto vincolato su di una curva  $\gamma$ . Se il punto  $P \in \mathbb{R}^3$  è vincolato a muoversi su di una curva, rappresentiamo la sua configurazione in forma intrinseca, attraverso la coordinata curvilinea  $s$ .

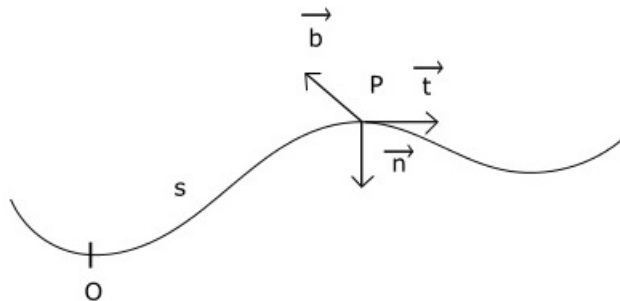


Figura 2.2: Punto vincolato alla curva  $\gamma$

Fissata un'origine  $O_1$  sulla curva ed un verso positivo, detto degli archi crescenti, il modulo di  $s$  rappresenta la lunghezza dell'arco di curva di estremi  $O_1$  e  $P$ ; la coordinata  $s$  è positiva o negativa a seconda che  $P$  segua o preceda  $O_1$  sulla curva  $\gamma$ . Dunque per il grado di libertà  $n$  di  $P$  si ha  $n = 1$  e come parametro lagrangiano si può prendere  $q = s$ . Introduciamo ora la terna ortonormale intrinseca alla curva  $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ :  $\vec{t}$  è il versore tangente a  $\gamma$  in  $P$  diretto nel verso degli archi crescenti,  $\vec{n}$  è il versore normale a  $\vec{t}$  nel piano osculatore, diretto verso il centro osculatore, e  $\vec{b}$  è il versore della binormale, tale che  $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$  è una terna ortonormale destra. Nell'ipotesi di vincolo liscio, la reazione vincolare  $\vec{\Phi}$  ha la stessa direzione e verso opposto di uno spostamento totalmente proibito, secondo la Definizione 1.11. Dunque  $\vec{\Phi}$  giace nel piano dei versori  $\vec{n}$  e  $\vec{b}$  e può essere così rappresentata:  $\vec{\Phi} = \Phi_n \vec{n} + \Phi_b \vec{b}$  generando due incognite  $\Phi_n$  e  $\Phi_b$ . Se le forze attive agenti in  $P$  sono posizionali la condizione (??) per l'equilibrio si traduce nel seguente sistema:

$$\begin{cases} F_t(s) = 0 \\ F_n(s) + \Phi_n(s) = 0 \\ F_b(s) + \Phi_b(s) = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

avendo posto  $\vec{F} = F_t \vec{t} + F_n \vec{n} + F_b \vec{b}$ , che rappresenta un sistema di tre equazioni nelle tre incognite:  $s, \Phi_n, \Phi_b$ . La prima nel sistema (??) fornisce i valori di  $s$  corrispondenti alle configurazioni di equilibrio e le altre i corrispondenti valori della reazione vincolare:  $\Phi_n(s) = -F_n(s), \Phi_b(s) = -F_b(s)$ .

**Esempio 2.10.** Pendolo ideale. Consideriamo un pendolo ideale come già definito nell'Esempio 2.4. Indichiamo con  $l$  la lunghezza del filo/barra e con  $O_1$  il punto sulla circonferenza di centro  $O$  e raggio  $l$  posto sulla verticale verso il basso, come in Figura ???. Assumiamo  $O_1$  come origine della coordinata curvilinea  $s$  per cui si avrà:  $s = l\vartheta$ .

Scomponendo il vettore  $\vec{F} = m\vec{g}$  della forza peso rispetto alla terna  $(\vec{t}, \vec{b}, \vec{n})$  si ha  $m\vec{g} = -mg \sin \vartheta \vec{t} - mg \cos \vartheta \vec{n}$ . Le (??) si traducono quindi nel seguente sistema:

$$\begin{cases} -mg \sin \vartheta = 0 \\ -mg \cos \vartheta + \Phi_n = 0 \\ \Phi_b = 0 \end{cases}$$

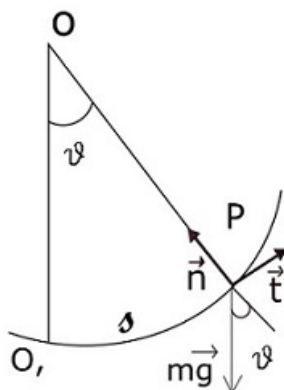


Figura 2.3: Rappresentazione intrinseca per il pendolo ideale

Otterremo così dalla prima equazione le due configurazioni  $\vartheta_1 = 0$  e  $\vartheta_2 = \pi$ . Sostituendo nella seconda otteniamo i seguenti valori per la reazione vincolare:

- Se  $\vartheta_1 = 0$  abbiamo  $\Phi_n = mg > 0$ , ossia  $\vec{\Phi} = \Phi_n \vec{n} = mg \vec{n}$ .  
Il fatto che  $\Phi_n$  risulti positivo rende la soluzione  $\vartheta_1 = 0$  compatibile sia con il filo flessibile, sia con la barra rigida. Infatti il verso di  $\vec{n}$ , e quindi di  $\vec{\Phi}$ , è diretto da  $P$  verso  $O$ , e risulta quindi opposto ad uno spostamento totalmente proibito.
- Se  $\vartheta_2 = \pi$  abbiamo  $\Phi_n = -mg < 0$ , ossia  $\vec{\Phi} = \Phi_n \vec{n} = -mg \vec{n}$ . In questo caso  $\Phi_n$  è negativa, pertanto  $\vec{\Phi}$  è diretta da  $O$  verso  $P$ : lo spostamento opposto a  $\vec{\Phi}$ , da  $P$  verso  $O$  è totalmente proibito solo nel caso di barra rigida, non di filo flessibile. Pertanto la configurazione  $\vartheta_2 = \pi$  è di equilibrio solo nel caso di barra rigida, come era legittimo aspettarsi.

In conclusione:

- Nel caso di asta rigida, configurazioni di equilibrio:  $\vartheta = 0, \pi$ .
- Nel caso di filo flessibile e inestensibile si ha una sola configurazione di equilibrio  $\vartheta = 0$ .

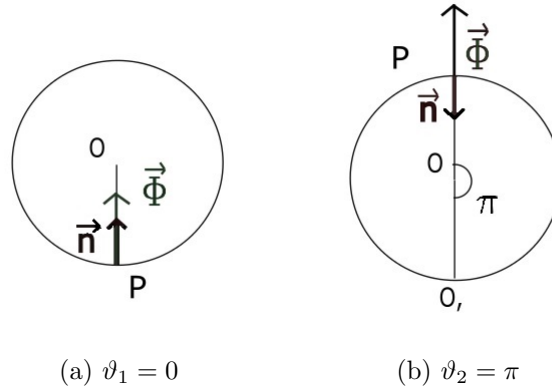


Figura 2.4: Configurazioni di equilibrio del pendolo

## 2.2 Statica di un generico sistema meccanico

In questo paragrafo esamineremo le condizioni per l'equilibrio di un corpo generico, costituito da più punti materiali. Laddove si presenterà utile per semplificare la presentazione assumeremo che sia costituito da un numero finito di punti, anche se tutti i risultati possono essere estesi a sistemi di infiniti punti, come i corpi continui.

**Definizione 2.11.** *Per un sistema di  $N$  punti materiali si dice che una configurazione  $q^0 \in \mathbb{R}^n$  ( $n$ =grado di libertà) è di equilibrio per il sistema se e solo se posto il sistema in  $q^0$  all'istante iniziale in quiete (i.e. tutti i punti hanno velocità nulla), allora il sistema resta in quella configurazione ad ogni istante successivo.*

*Osservazione 2.12.* Se  $q^0 \in \mathbb{R}^n$  è configurazione di equilibrio per un corpo allora  $q^0$  è configurazione di equilibrio per ogni suo punto.

Consideriamo un sistema meccanico costituito da  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  e supponiamo che  $q^0 \in \mathbb{R}^n$  sia configurazione di equilibrio per esso.

Indichiamo con  $\vec{F}_s$  e  $\vec{\Phi}_s$  il vettore risultante delle forze attive e il vettore risultante delle reazioni vincolari agenti su  $P_s$  rispettivamente.

Allora se il corpo è in equilibrio si avrà:

$$\vec{F}_s + \vec{\Phi}_s = 0, \quad \forall s = 1, \dots, N \quad (2.7)$$

Sommando in  $s = 1, \dots, N$ , si ottiene

$$\vec{F} + \vec{\Phi} = 0 \quad (2.8)$$

dove  $\vec{F}$  e  $\vec{\Phi}$  rappresentano il vettore risultante delle forze attive e delle reazioni vincolari agenti su tutto il corpo, rispettivamente.

Scomponiamo ora  $\vec{F} = \vec{F}^{(e)} + \vec{F}^{(i)}$  come somma del vettore risultante delle forze attive esterne  $\vec{F}^{(e)}$ , e delle forze attive interne  $\vec{F}^{(i)}$ . Analogamente facciamo per le reazioni vincolari,  $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}^{(e)} + \vec{\Phi}^{(i)}$ .

Ricordiamo la Proposizione 1.16, equazione (??), abbiamo  $\vec{F}^i = \vec{\Phi}^i = 0$ , da cui la (??) può essere così riscritta:

$$\vec{F}^{(e)} + \vec{\Phi}^{(e)} = 0 \quad (2.9)$$

*Osservazione 2.13.* La (??) risulta quindi una condizione necessaria per l'equilibrio di un qualunque corpo.

Sia ora  $O \in \mathbb{R}^3$  un polo fissato a piacere. Moltiplichiamo vettorialmente la (??) per  $(O - P_s)$ :

$$\vec{F}_s^{(i)} \times (O - P_s) + \vec{\Phi}_s^{(i)} \times (O - P_s) = 0, \quad \forall s = 1, \dots, N$$

si ottiene

$$\vec{\Omega}(O) + \vec{\Psi}(O) = 0, \quad (2.10)$$

dove  $\vec{\Omega}(O)$  e  $\vec{\Psi}(O)$  rappresentano il momento risultante delle forze attive e delle reazioni vincolari agenti sul corpo rispetto al polo  $O$ . Di nuovo dalla Proposizione 1.16, la (??) può essere così riscritta:

$$\vec{\Omega}^{(e)}(O) + \vec{\Psi}^{(e)}(O) = 0 \quad (2.11)$$

dove  $\vec{\Omega}^{(e)}(O)$  e  $\vec{\Psi}^{(e)}(O)$  denotano il momento risultante delle forze attive esterne e delle reazioni vincolari esterne rispetto a  $O$ , rispettivamente.

*Osservazione 2.14.* La (??) rappresenta un'ulteriore condizione necessaria per l'equilibrio di un qualunque sistema meccanico.

Abbiamo quindi ottenuto il seguente risultato:

**Proposizione 2.15** (Equazioni cardinali della statica). *Condizione necessaria per l'equilibrio di un qualunque sistema meccanico è che siano soddisfatte le seguenti equazioni:*

$$\begin{cases} \vec{F}^{(e)} + \vec{\Phi}^{(e)} = 0 \\ \vec{\Omega}^{(e)}(O) + \vec{\Psi}^{(e)}(O) = 0 \quad \forall O \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (2.12)$$

dette *equazioni cardinali della statica*.

*Osservazione 2.16.* È importante osservare che le equazioni cardinali della statica (??) rappresentano solo una condizione necessaria e non anche sufficiente.

Se ad esempio consideriamo una barra elastica sotto l'azione di due forze applicate agli estremi con vettori  $\vec{F}$  e  $-\vec{F}$  aventi la stessa linea d'azione, allora le equazioni cardinali sono verificate ma il corpo non è in equilibrio.

Se invece consideriamo un corpo rigido allora le equazioni cardinali della statica rappresentano una condizione necessaria e sufficiente.

Vale quindi la pena di enunciare questo importante risultato sull'equilibrio dei corpi rigidi. Per la dimostrazione ed eventuali approfondimenti si veda ad esempio il Trattato [?].

**Proposizione 2.17.** *Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un corpo rigido è*

$$\begin{cases} \vec{F}^{(e)} + \vec{\Phi}^{(e)} = 0 \\ \vec{\Omega}^{(e)}(O) + \vec{\Psi}^{(e)}(O) = 0 \quad \forall O \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (2.13)$$

*Osservazione 2.18.* In virtù della Proposizione 1.16 (b) per verificare la seconda delle (??)  $\forall O \in \mathbb{R}^3$  è sufficiente verificarla per un particolare polo scelto arbitrariamente, secondo convenienza.

*Osservazione 2.19.* Le equazioni cardinali della statica sono un sistema di equazioni vettoriali con diverse incognite, quindi dobbiamo sempre fare attenzione alla coerenza tra il numero di equazioni e il numero delle incognite affinché il sistema non risulti indeterminato.

Ad ogni equazione vettoriale ne corrispondono tre scalari e le incognite sono i parametri lagrangiani e le reazioni vincolari.

Nel caso del corpo rigido libero,  $\vec{\Phi} = 0$  avremo:

$$\begin{cases} \vec{F} = 0 \\ \vec{\Omega} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} F_x(q_1, \dots, q_n) = 0 \\ F_y(q_1, \dots, q_n) = 0 \\ F_z(q_1, \dots, q_n) = 0 \\ \Omega_x(q_1, \dots, q_n) = 0 \\ \Omega_y(q_1, \dots, q_n) = 0 \\ \Omega_z(q_1, \dots, q_n) = 0 \end{cases}$$

Abbiamo sei equazioni in  $n = 6$  incognite, in quanto per un corpo rigido libero il grado di libertà è  $n = 6$  (si veda Esempio 1.5).

Nel caso del corpo rigido vincolato apparentemente aumentano le incognite perchè si devono determinare le reazioni vincolari, ma parallelamente si riduce il grado di libertà, quindi  $n < 6$ .

Il problema sarà allora ben posto se e solo se si introduce un sistema di reazioni vincolari ottimali in modo da avere un numero adeguato di incognite.

**Esempio 2.20** (Corpo rigido con asse di rotazione fisso). In un corpo rigido che ruota rispetto ad un asse fisso  $r$ , il vincolo è rappresentato dall'asse e tutti i punti che stanno su di esso sono fermi.

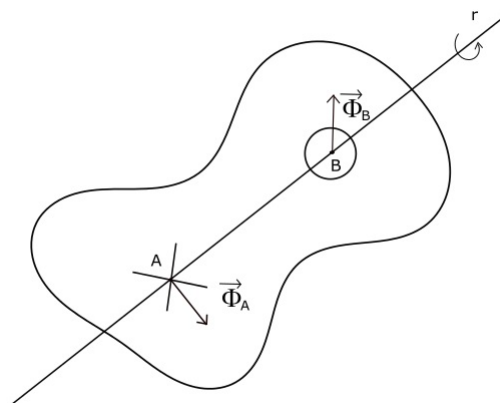


Figura 2.5: Sistema di reazioni vincolari adeguato al vincolo asse di rotazione fisso

Per rappresentare questo vincolo si potrebbero 'inchiodare' tutti i punti sull'asse, ma

così si dovrebbe determinare un numero eccessivo di reazioni vincolari e il sistema (??) sarebbe indeterminato.

Se invece si fissa un punto  $A \in r$ , un qualunque altro punto  $B \in r$  potrà solo compiere spostamenti perpendicolari ad  $r$  ( $B$  non può scorrere nella direzione dell'asse poiché così varierebbe la sua distanza da  $A$  che è fissa). Per impedire anche questi spostamenti si metterà un 'anello' in  $B$ .

Formalizzando questo modello: ogni spostamento di  $A$  è totalmente proibito e quindi  $\vec{\Phi}_A$  è completamente incognita. Gli spostamenti totalmente proibiti per  $B$  sono nel piano perpendicolare ad  $r$ , cioè la componente lungo l'asse  $r$  di  $\vec{\Phi}_B$  è nulla. Avremo quindi 5 incognite; 3 per determinare  $\vec{\Phi}_A$  e 2 per determinare  $\vec{\Phi}_B$ .

Il grado di libertà per un corpo rigido che ruota intorno ad un asse fisso è  $n = 1$  e come parametro lagrangiano  $q$  si può prendere l'angolo di rotazione  $\vartheta$ .

In totale ci sono 6 incognite e quindi il sistema (??) è risolubile.

Notiamo come sia stato fondamentale imporre un vincolo più debole in  $B$  per ridurre il numero di incognite ed impostare un problema ben posto. Se non introducessimo in modo adeguato le reazioni vincolari il problema sarebbe staticamente indeterminato (numero incognite  $> 6$ ).

**Esempio 2.21** (La leva). La leva è un corpo rigido costituito da un'asta con asse fisso perpendicolare passante per un suo punto  $O$  detto fulcro e soggetto a due forze applicate agli estremi e situate nello stesso piano dette Potenza e Resistenza,  $(\vec{P}, A)$ ,  $(\vec{R}, B)$ , come in Figura ??.

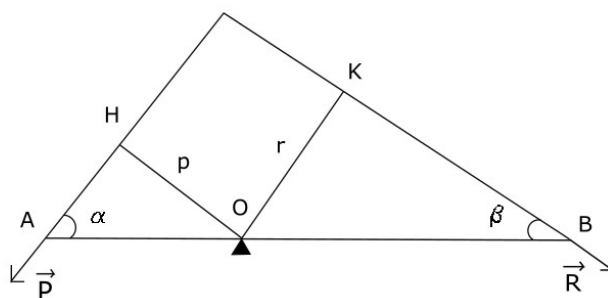


Figura 2.6: Equilibrio della leva



Sappiamo che un corpo rigido è in equilibrio se e solo se sono soddisfatte le (??).

La prima ci fornisce il valore della reazione vincolare in  $O$ . Abbiamo infatti  $\vec{R} + \vec{P} + \vec{\Phi} = 0$  e quindi  $\vec{\Phi} = -\vec{R} - \vec{P}$ , essendo il sistema di forze composto da  $(\vec{P}, A), (\vec{R}, B), (\vec{\Phi}, O)$ .

Imponiamo ora la seconda delle (??), prendendo come polo proprio il fulcro della leva. Deve essere allora:

$$\vec{P} \times (O - A) + \vec{R} \times (O - B) = 0. \quad (2.14)$$

Svolgendo i due prodotti vettoriali e indicando con  $p = |O - A| \sin \alpha$  e  $r = |O - B| \sin \beta$  rispettivamente il braccio della potenza e il braccio della resistenza, la (??) può essere così riscritta:

$$Pp - Rr = 0 \quad \text{ovvero} \quad \frac{P}{R} = \frac{r}{p}. \quad (2.15)$$

La (??), che rappresenta una condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio della leva, afferma quindi che nella leva in equilibrio la potenza sta alla resistenza come il braccio della resistenza sta al braccio della potenza.

## 2.3 Principio dei lavori virtuali

Nello studio dell'equilibrio dei corpi il principio dei lavori virtuali (di seguito abbreviato con PLV) è fondamentale poichè fornisce un nuovo criterio per determinare le configurazioni di equilibrio di un qualunque sistema meccanico.

Il principio ammette due formulazioni, utili in contesti diversi.

Indichiamo con  $(\vec{F}_1, P_1), \dots, (\vec{F}_N, P_N)$  e con  $(\vec{\Phi}_1, P_1), \dots, (\vec{\Phi}_N, P_N)$  rispettivamente i sistemi delle forze attive e delle reazioni vincolari agenti su un corpo.

- PLV per le reazioni vincolari:

*In assenza di attrito (per vicoli lisci) condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di reazioni vincolari sia compatibile con la natura dei vincoli è che il lavoro virtuale delle reazioni vincolari sia sempre maggiore o uguale a zero:*

$$\delta \rho := \sum_{s=1}^N (\vec{\Phi}_s \cdot \delta P_s) \geq 0, \quad (2.16)$$

*in particolare nullo per spostamenti virtuali invertibili, positivo ed eccezionalmente nullo per spostamenti virtuali non invertibili.*

- PLV per le forze attive:

*Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un sistema meccanico generico è che il lavoro virtuale delle forze attive sia sempre minore o uguale a zero:*

$$\delta L := \sum_{s=1}^N (\vec{F}_s \cdot \delta P_s) \leq 0, \quad (2.17)$$

*in particolare nullo per spostamenti virtuali invertibili, negativo o eccezionalmente nullo per spostamenti virtuali non invertibili.*

Il PLV per le reazioni vincolari assicura che il sistema di reazioni vincolari introdotte per rappresentare i vincoli sia adeguato pertanto la (??) deve valere in qualunque contesto, non solo di statica, cioè di equilibrio, ma anche di dinamica.

Il PLV per le forze attive invece caratterizza l'equilibrio dei sistemi, pertanto la (??) vale solo in corrispondenza alle configurazioni di equilibrio.

*Osservazione 2.22.* Se interessano solo le configurazioni di equilibrio interne, il PLV può essere così riformulato:

*Condizione necessaria e sufficiente affinché una configurazione interna  $q^0 \in \mathbb{R}^n$  sia configurazione di equilibrio è che:*

$$L = \sum_{s=1}^N (\vec{F}_s \cdot \delta P_s) = 0, \quad (2.18)$$

*per ogni spostamento virtuale invertibile  $\delta P_s, s = 1, \dots, N$  dei punti del corpo a partire da  $q^0$ . Questa equazione ci fornisce un metodo vantaggioso per cercare le configurazioni di equilibrio interne perchè non fa intervenire le reazioni vincolari che in generale sono incognite.*

A questo proposito è molto utile la seguente

**Definizione 2.23.** *Un vincolo si dice **bilaterale** se ammette solo configurazioni interne.*

**Esempio 2.24.** In un corpo rigido con asse di rotazione fisso, l'asse rappresenta un vincolo bilaterale poichè l'unico spostamento consentito è la rotazione che è sempre invertibile.

*Osservazione 2.25.* Per un sistema soggetto solo a vincoli bilaterali abbiamo che  $\delta L = \sum_{s=1}^N (\vec{F}_s \cdot \delta P_s) = 0$  è condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio.

## 2.4 Caso conservativo

Nel caso di forze attive conservative grazie al principio dei lavori virtuali, nell'ipotesi di vincoli bilaterali, otteniamo un importante criterio per l'equilibrio del corpo in termini del potenziale. Ricordando infatti che se il sistema delle forze attive è conservativo esiste una funzione  $U = U(q_1, \dots, q_n)$  tale che  $\delta L = \delta U$ , possiamo enunciare la seguente

**Proposizione 2.26.** *Per un corpo su cui agiscono solo vincoli bilaterali e forze attive conservative condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è che*

$$\delta U = 0$$

cioè

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial q_1} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial U}{\partial q_n} = 0 \end{cases}, \quad \text{ovvero} \quad \nabla U = \left( \frac{\partial U}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial q_n} \right) = 0 \quad (2.19)$$

*Pertanto le configurazioni di equilibrio del corpo corrispondono ai punti di stazionarietà del potenziale.*

*Osservazione 2.27.* Come vedremo nelle applicazioni, il principio dei lavori virtuali, e in particolare la condizione (??), sono molto utili per determinare le configurazioni di equilibrio di un qualunque sistema meccanico (ricordiamo che invece le equazioni cardinali (??) sono necessarie e sufficienti solo per l'equilibrio dei corpi rigidi). Tuttavia, a differenza delle equazioni cardinali, non consente di determinare il valore delle reazioni vincolari in corrispondenza all'equilibrio.

# Capitolo 3

## Applicazioni

Risolveremo ora tre problemi standard attraverso i due diversi approcci analizzati nel capitolo precedente.

Uno si serve delle equazioni cardinali della statica e l'altro ricerca i punti di stazionarietà del potenziale.

### 3.1 Problema 1

Trovare le configurazioni di equilibrio di un'asta rigida omogenea  $OA$  di massa  $m$  e lunghezza  $2l$  con asse fisso orizzontale per  $O$ , mobile nel piano verticale  $Oxy$ . L'asta è soggetta alla forza peso e ad una forza costante  $(\vec{F}, A)$  tale che  $\vec{F} = -F\vec{i}$ ,  $F > 0$ .

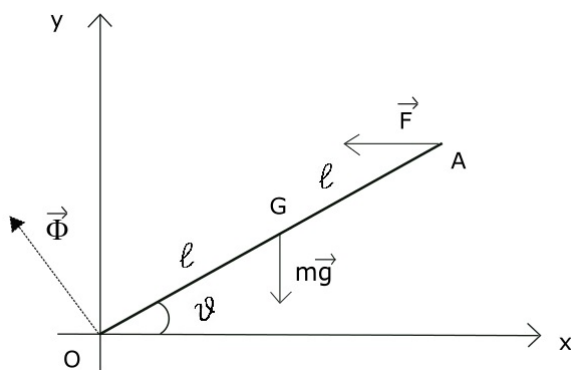


Figura 3.1: Problema 1: Asta rigida con asse fisso

Innanzitutto osserviamo che si tratta di un sistema meccanico a un grado di libertà,  $n = 1$ , e come parametro lagrangiano si può scegliere l'angolo di rotazione,  $q = \vartheta$ , che l'asta forma con l'asse  $x$ , come in Figura ??.

a) **Metodo delle equazioni cardinali della statica.**

Il sistema di forze ( $S$ ) che agisce sull'asta è costituito dalle forze  $(-mg\vec{j}, G)$ ,  $(-F\vec{i}, A)$ ,  $(\vec{\Phi}, O)$ . Qui  $G$  denota il baricentro dell'asta  $OA$ ; essendo  $OA$  omogenea,  $G$  coincide al suo punto di mezzo.

La forza  $(\vec{\Phi}, O)$  rappresenta l'azione del vincolo costituito dall'asse di rotazione in  $O$ . Poichè ogni spostamento di  $O$  è totalmente proibito  $\vec{\Phi} = \Phi_x\vec{i} + \Phi_y\vec{j}$  è completamente incognita. Per determinare le configurazioni di equilibrio imponiamo che siano soddisfatte le equazioni cardinali (??) che qui ricordiamo:

$$\begin{cases} F^{(e)} + \vec{\Phi}^{(e)} = 0 \\ \Omega^{(e)}(O) + \Psi^{(e)}(O) = 0 \quad \forall O \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

La prima diventa

$$-F\vec{i} - mg\vec{j} + \vec{\Phi} = 0$$

che ci fornisce il valore della reazione vincolare in corrispondenza all'equilibrio:

$$\vec{\Phi} = F\vec{i} + mg\vec{j}$$

ovvero  $\vec{\Phi}_x = F$ ,  $\vec{\Phi}_y = mg$ . Per determinare le configurazioni di equilibrio univocamente ci basta ora impostare la seconda equazione scegliendo convenientemente il polo  $O$ . In questo caso sceglieremo proprio come polo il punto  $O$ , primo estremo dell'asta  $OA$ , così il momento della reazione vincolare sarà nullo.

La condizione diventa quindi:

$$-mg\vec{j} \times (O - G) - F\vec{i} \times (O - A) = 0,$$

ossia

$$mg\vec{j} \times (l \cos \vartheta \vec{i} + l \sin \vartheta \vec{j}) + F\vec{i} \times (2l \cos \vartheta \vec{i} + 2l \sin \vartheta \vec{j}) = 0 \quad (3.1)$$

Ricordando che  $\vec{j} \times \vec{j} = \vec{i} \times \vec{i} = 0$  e  $\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}$ , la (??) diventa

$$-mg \cos \vartheta + 2F \sin \vartheta = 0 \quad (3.2)$$

Possiamo supporre  $\cos \vartheta \neq 0$ , infatti per  $\cos \vartheta = 0$ , la (??) non ammette soluzioni. Allora dividendo per  $\cos \vartheta$  si ottiene

$$\tan \vartheta = \frac{mg}{2F}$$

Questa equazione ammette 2 soluzioni:

$$\vartheta_1 = \arctan\left(\frac{mg}{2F}\right) \quad \text{e} \quad \vartheta_2 = \arctan\left(\frac{mg}{2F}\right) + \pi.$$

Le configurazioni di equilibrio dell'asta  $OA$  soggetta al sistema di forze  $(S)$  sono dunque  $q_1 = \vartheta_1$  e  $q_2 = \vartheta_2$ .

**b) Metodo del potenziale.**

Possiamo risolvere lo stesso problema utilizzando il principio dei lavori virtuali, ovvero imponendo la condizione (??), poichè le forze coinvolte sono conservative.

In questo modo potremo determinare le configurazioni di equilibrio, ma non la reazione vincolare in  $O$ .

Sappiamo quindi che le forze attive che agiscono sull'asta sono  $(-F\vec{i}, A)$  e  $(-mg\vec{j}, G)$ . Indicando con  $U_1$  e  $U_2$  i loro rispettivi potenziali, dall' Esempio 1.26, si ha  $U_1 = -Fx_A = -2Fl \cos \vartheta$ ,  $U_2 = -mgy_G = -mgl \cos \vartheta$ . Qui abbiamo indicato con  $(x_A, y_A)$  e  $(x_G, y_G)$  le coordinate dei punti  $A$  e  $G$  dell'asta.

Per il potenziale totale  $U = U(\vartheta)$  del sistema delle forze attive si ha quindi

$$U(\vartheta) = U_1(\vartheta) + U_2(\vartheta) = -2Fl \cos \vartheta - mgl \sin \vartheta$$

Sappiamo che le configurazioni di equilibrio coincidono con i punti di stazionarietà del potenziale, dobbiamo quindi imporre  $\nabla U = 0$ , ovvero

$$U'(\vartheta) = -mgl \cos \vartheta + 2Fl \sin \vartheta = 0$$

che equivale alla (??) trovata prima e che dunque fornisce le medesime soluzioni:

$$\vartheta_1 = \arctan\left(\frac{mg}{2F}\right), \quad \vartheta_2 = \vartheta_1 + \pi.$$

La Figura ?? rappresenta le due configurazioni di equilibrio determinate.

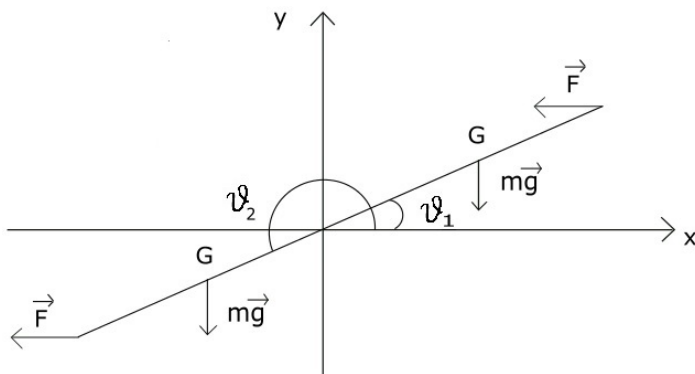


Figura 3.2: Configurazioni di equilibrio per il problema 1

### 3.2 Problema 2

Nel piano verticale  $Oxy$  è mobile il sistema articolato costituito da due aste rigide  $OA$  e  $AB$  di lunghezza  $2l$  ciascuna, incernierate in  $A$ , di masse rispettivamente  $m$  e  $M$ , con asse fisso orizzontale per  $O$  nel piano  $Oxy$ . Oltre alle forze peso agisce sul sistema una forza costante  $(F\vec{i}, B)$ ,  $F \in \mathbb{R}$ . Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema.

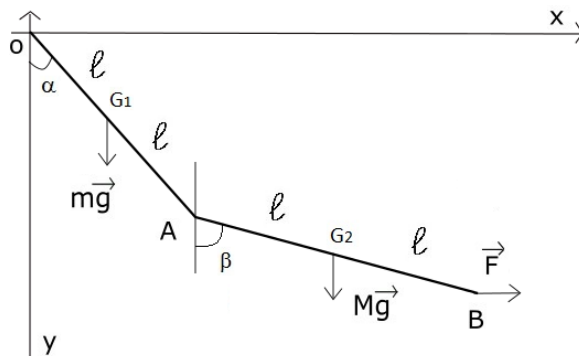


Figura 3.3: Problema 2

Si tratta di un sistema a due gradi di libertà,  $n = 2$ , e come parametri lagrangiani si possono scegliere gli angoli  $q_1 = \alpha$  e  $q_2 = \beta$  che le due aste  $OA$  e  $AB$  formano rispettivamente con la verticale, come in Figura ??.

Una generica configurazione per il sistema sarà rappresentata dalla coppia  $q = (\alpha, \beta)$ .

## a) Metodo delle equazioni cardinali della statica

Le forze attive che agiscono sono  $(-mg\vec{j}, G_1)(-Mg\vec{j}, G_2)(F\vec{i}, B)$ . Abbiamo inoltre una reazione vincolare in  $O$  di vettore  $\vec{\Phi}_O = \Phi_{Ox}\vec{i} + \Phi_{Oy}\vec{j}$ , completamente incognita, perchè ogni spostamento virtuale di  $O$  è totalmente proibito.

Tuttavia il sistema non è un corpo rigido quindi non possiamo applicare ad esso le equazioni cardinali per determinare univocamente le condizioni di equilibrio. Siccome però una configurazione è di equilibrio per un corpo se e solo se lo è per ogni suo punto, possiamo applicare le equazioni cardinali separatamente alle due aste  $OA$  e  $AB$ . Le configurazioni di equilibrio del sistema saranno tutte e sole quelle che soddisfano contemporaneamente le equazioni cardinali per l'asta  $OA$  e quelle per l'asta  $AB$ . Esaminiamo dunque le forze agenti sulle due aste.

- Il sistema di forze agenti su  $OA$  è costituito da:  $(\vec{\Phi}_O, O), (-mg\vec{j}, G_1), (\vec{\Phi}_A, A)$  con  $\vec{\Phi}_A = \Phi_{Ax}\vec{i} + \Phi_{Ay}\vec{j}$ ; quest'ultima forza rappresenta il vincolo esercitato dall'asta  $AB$ , incernierata in  $A$  all'asta  $OA$ .
- Il sistema di forze su  $AB$  invece è costituito da:  $(-Mg\vec{j}, G_2), (F\vec{i}, B), (-\vec{\Phi}_A, A)$ .

Con  $G_1$  e  $G_2$  si sono denotati i baricentri, ovvero i punti mediani, delle aste omogenee  $OA$  e  $AB$  rispettivamente.

Applicando la prima delle (??) all'asta  $OA$  si ottiene:

$$\begin{cases} \Phi_{Ox} + \Phi_{Ax} = 0 \\ \Phi_{Oy} + \Phi_{Ay} - mg = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Analogamente per l'asta  $AB$  si ottiene:

$$\begin{cases} F - \Phi_{Ax} = 0 \\ -Mg - \Phi_{Ay} = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Combinando le (??) e le (??) si ottiene:

$$\begin{cases} \Phi_{Ax} = F \\ \Phi_{Ay} = -Mg \\ \Phi_{Ox} = -F \\ \Phi_{Oy} = (m + M)g \end{cases}$$



e quindi  $\vec{\Phi}_A = F\vec{i} - Mg\vec{j}$  e  $\vec{\Phi}_O = -F\vec{i} + (m + M)g\vec{j}$ .

Determinate le reazioni vincolari possiamo imporre la seconda equazione cardinale tenendo sempre distinti i casi delle due aste, per determinare le configurazioni di equilibrio. Calcolando i momenti delle forze che agiscono su  $OA$  rispetto al polo  $O$ , otteniamo

$$-mg\vec{j} \times (O - G_1) + \vec{\Phi}_A \times (O - A) + \vec{\Phi}_O \times (O - O) = 0,$$

ossia

$$-mg\vec{j} \times (l \sin \alpha \vec{i} - l \cos \alpha \vec{j}) + (F\vec{i} - Mg\vec{j}) \times (2l \sin \alpha \vec{i} - 2l \cos \alpha \vec{j}) = 0. \quad (3.5)$$

Svolgendo i prodotti vettoriali la (??) diventa:

$$(m + 2M)g \sin \alpha - 2F \cos \alpha = 0. \quad (3.6)$$

Poichè  $\cos \alpha = 0$  non dà soluzioni per la (??), dividendo per  $\cos \alpha \neq 0$  la (??) diventa

$$\tan \alpha = \frac{2F}{(m + 2M)g}$$

che fornisce due soluzioni:

$$\alpha_1 = \arctan \left( \frac{2F}{(m + 2M)g} \right) \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \pi$$

Ora calcoliamo i momenti delle forze che agiscono su  $AB$  rispetto al polo  $A$ , e imponiamo la seconda delle (??). Otteniamo

$$-Mg\vec{j} \times (A - G_2) + F\vec{i} \times (A - B) - \vec{\Phi}_A \times (A - A) = 0$$

ovvero

$$-Mg\vec{j} \times (l \sin \beta \vec{i} - l \cos \beta \vec{j}) + F\vec{i} \times (2l \sin \beta \vec{i} - 2l \cos \beta \vec{j}) = 0. \quad (3.7)$$

Svolgendo i prodotti vettoriali in (??) si ottiene

$$Mg \sin \beta - 2F \cos \beta = 0 \quad (3.8)$$

cioè

$$\tan \beta = \frac{2F}{Mg},$$

a cui corrispondono due soluzioni:

$$\beta_1 = \arctan\left(\frac{2F}{Mg}\right) \quad \text{e} \quad \beta_2 = \beta_1 + \pi.$$

In conclusione le configurazioni di equilibrio del sistema articolato sono determinate dalle quattro coppie:  $(\alpha_1, \beta_1)$ ,  $(\alpha_2, \beta_1)$ ,  $(\alpha_1, \beta_2)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2)$ .

### b) Metodo del potenziale

Agendo sul sistema solo forze conservative possiamo risolvere l'esercizio anche con il metodo del potenziale. Le forze attive sono quindi  $(-mg\vec{j}, G_1)$ ,  $(-Mg\vec{j}, G_2)$ ,  $(\vec{F}, B)$  e i rispettivi potenziali

$$U_1 = -mgy_{G_1} = mgl \cos \alpha$$

$$U_2 = -Mgy_{G_2} = Mg(2l \cos \alpha + l \cos \beta)$$

$$U_3 = Fx_B = F(2l \sin \alpha + 2l \sin \beta).$$

Per il potenziale totale  $U = U_1 + U_2 + U_3$  si ottiene quindi

$$U(q) = U(\alpha, \beta) = mgl \cos \alpha + Mg(2l \cos \alpha + l \cos \beta) + F(2l \sin \alpha + 2l \sin \beta) = (mgl + Mg2l) \cos \alpha + 2Fl \sin \alpha + Mgl \cos \beta + 2Fl \sin \beta.$$

Ora dobbiamo trovare i punti di stazionarietà del potenziale. Imponendo che sia  $\nabla U = 0$ , ossia

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \beta} = 0 \end{cases}$$

otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -mgl \sin \alpha - Mg2l \sin \alpha + 2Fl \cos \alpha = 0 \\ -Mgl \sin \beta + 2Fl \cos \beta = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

che corrisponde esattamente alle (??) e (??) ottenute in precedenza. Si determinano pertanto le stesse soluzioni  $(\alpha_i, \beta_i)_{i,j=1,2}$  con

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{2F}{(m+2M)g}\right) \quad \text{e} \quad \beta_1 = \arctan\left(\frac{2F}{Mg}\right).$$

## 3.3 Problema 3

Trovare le configurazioni di equilibrio di un'asta rigida omogenea  $OA$  di lunghezza  $2l$  e massa  $m$  che ruota nel piano verticale  $Oxy$  attorno ad un asse fisso orizzontale passante

per  $O$ . Oltre al peso agisce una forza elastica tra il punto  $B = (d, O)$  con  $d > 0$  e il punto  $C$  dell'asta scorrevole senza attrito.

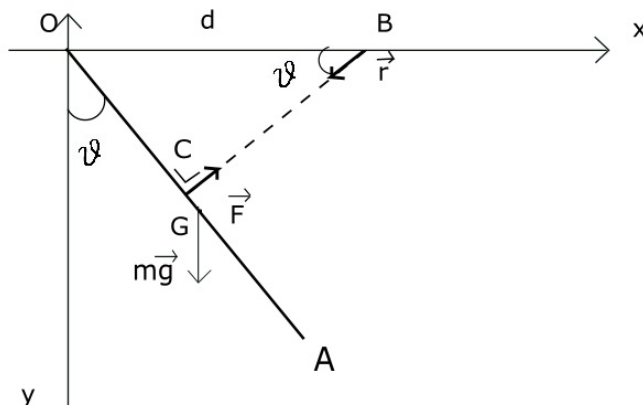


Figura 3.4: Problema 3

Il grado di libertà dell'asta è  $n = 1$  e come parametro lagrangiano prendiamo l'angolo  $q = \vartheta$  che l'asta forma con l'asse  $y$ , come in Figura ??.

Dall'Esempio 1.26 segue che la forza elastica  $(\vec{F}, C)$  è una forza centrale e ha vettore  $\vec{F} = -k\rho\vec{r}$ , essendo  $\rho = |B - C|$  e  $\vec{r}$  il versore diretto da  $B$  verso  $C$ ; alternativamente si può scrivere  $\vec{F} = k^2(B - C)$ . La condizione che il punto  $C$  sia scorrevole senza attrito si traduce nella condizione di ortogonalità dell'angolo  $B\hat{C}O$  ossia  $B\hat{C}O = \frac{\pi}{2}$ .

Sotto questa condizione si ha  $\vartheta \in [0, \pi]$  inoltre  $\rho = d \cos \vartheta$  e  $\vec{r} = -\cos \vartheta \vec{i} - \sin \vartheta \vec{j}$ ,

$$\vec{F} = k^2 \cos^2 \vartheta d \vec{i} + k^2 d \cos \vartheta \sin \vartheta \vec{j}. \quad (3.10)$$

#### a) Metodo delle equazioni cardinali

Le forze agenti sul sistema sono  $(-mg\vec{j}, G)$ ,  $(\vec{F}, C)$  e la reazione vincolare incognita  $(\vec{\Phi} = \Phi_x \vec{i} + \Phi_y \vec{j}, O)$  che rappresenta il vincolo della rotazione attorno all'asse orizzontale passante per  $O$ .

Ora possiamo imporre la prima equazione cardinale delle (??), ottenendo:

$$\begin{cases} \Phi_{Ox} + k^2 d \cos^2 \vartheta = 0 \\ \Phi_{Oy} - mg + k^2 d \cos \vartheta \sin \vartheta = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \Phi_{Ox} = -k^2 d \cos^2 \vartheta \\ \Phi_{Oy} = -k^2 d \cos \vartheta \sin \vartheta + mg, \end{cases}$$

ovvero

$$\vec{\Phi} = -k^2 d \cos^2 \vartheta \vec{i} + (k^2 d \cos \vartheta \sin \vartheta + mg) \vec{j} \quad (3.11)$$

Attraverso la seconda equazione delle (??) otteniamo, calcolando i momenti rispetto all'estremo  $O$  dell'asta:

$$-mg \vec{j} \times (O - G) + (k^2 d \cos^2 \vartheta \vec{i} + k^2 d \cos \vartheta \sin \vartheta \vec{j}) \times (O - C) = 0 \quad (3.12)$$

Poichè  $|C - O| = d \sin \vartheta$  si ha

$$C - O = d \sin \vartheta \sin \vartheta \vec{i} + d \sin \vartheta \cos \vartheta \vec{j}.$$

Sostituendo nella (??) e svolgendo i prodotti vettoriali si ottiene

$$-mgl \sin \vartheta \vec{k} + k^2 d^2 \sin \vartheta \cos^3 \vartheta \vec{k} + k^2 d^2 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta \vec{k} = 0$$

ovvero

$$\sin \vartheta (-mgl + k^2 d^2 \cos \vartheta) = 0. \quad (3.13)$$

La (??) ammette un primo gruppo di soluzioni imponendo  $\sin \vartheta = 0$ , da cui  $\vartheta_1 = 0$  e  $\vartheta_2 = \pi$ .

Una seconda possibilità si ottiene ponendo

$$k^2 d^2 \cos \vartheta - mgl = 0 \quad (3.14)$$

che ammette soluzioni se e solo se  $mgl \leq k^2 d^2$ . In questo caso si ottiene un'ulteriore configurazione di equilibrio data da

$$\vartheta_3 = \arccos \left( \frac{mgl}{k^2 d^2} \right).$$

Dalla (??) possiamo ora determinare il valore della reazione vincolare in corrispondenza alle configurazioni di equilibrio trovate:

- per  $\vartheta = 0$ , si ha  $\vec{\Phi} = -k^2 d \vec{i} + mg \vec{j}$
- per  $\vartheta = \pi$ , si ha  $\vec{\Phi} = -k^2 d \vec{i} + mg \vec{j}$

- per  $\vartheta = \arccos\left(\frac{mgl}{k^2d^2}\right)$  (se e solo se  $mgl \leq k^2d^2$ ), essendo  $\cos \vartheta = \frac{mgl}{k^2d^2}$  e  $\sin \vartheta = \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta}$ , si ha  $\vec{\Phi} = -\frac{(mgl)^2}{k^2d^2}\vec{i} + \left(mg + \frac{mgl}{k^2d^3}\sqrt{(k^2d^2)^2 - (mgl)^2}\right)\vec{j}$

### b) Metodo del potenziale

Anche la forza elastica è una forza conservativa quindi per determinare le configurazioni di equilibrio possiamo utilizzare il metodo del potenziale.

Le forze attive sono  $(m\vec{g}, G)$  e  $(\vec{F}, C)$  e i rispettivi potenziali sono

$$U_1 = -mgy_G = mgl \cos \vartheta$$

$$U_2 = -\frac{k^2\rho^2}{2} = -\frac{k^2}{2}d^2 \cos^2 \vartheta$$

Allora per il potenziale totale  $U = U_1 + U_2$  otteniamo

$$U(q) = U(\vartheta) = mgl \cos \vartheta - \frac{k^2d^2}{2} \cos^2 \vartheta.$$

Per trovare le configurazioni di equilibrio imponiamo  $\nabla U = 0$ , ovvero  $U'(\vartheta) = 0$ .

Si ottiene allora la condizione

$$-mgl \sin \vartheta + k^2d^2 \cos \vartheta \sin \vartheta = 0,$$

ovvero

$$\sin \vartheta(-mgl + k^2d^2 \cos \vartheta) = 0$$

che è equivalente alla (??) ottenuta col metodo delle equazioni cardinali e determina pertanto le stesse soluzioni.

# Capitolo 4

## Iper testo

Verranno presentate ora a scopo illustrativo due pagine dell'ipertesto presenti in 'Progetto Matematica', risultato di questa tesi.



Figura 4.1: Index dell'ipertesto.

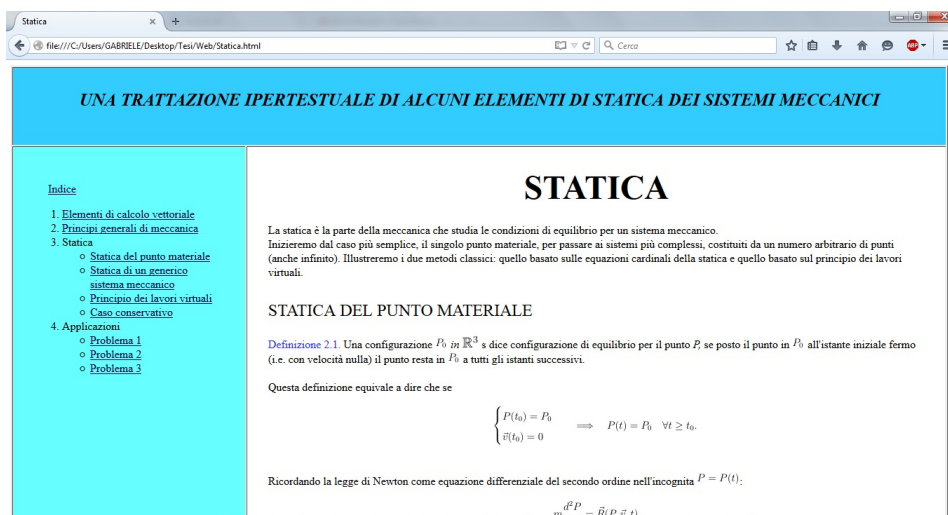


Figura 4.2: Prima pagina della sezione 'Statica'.

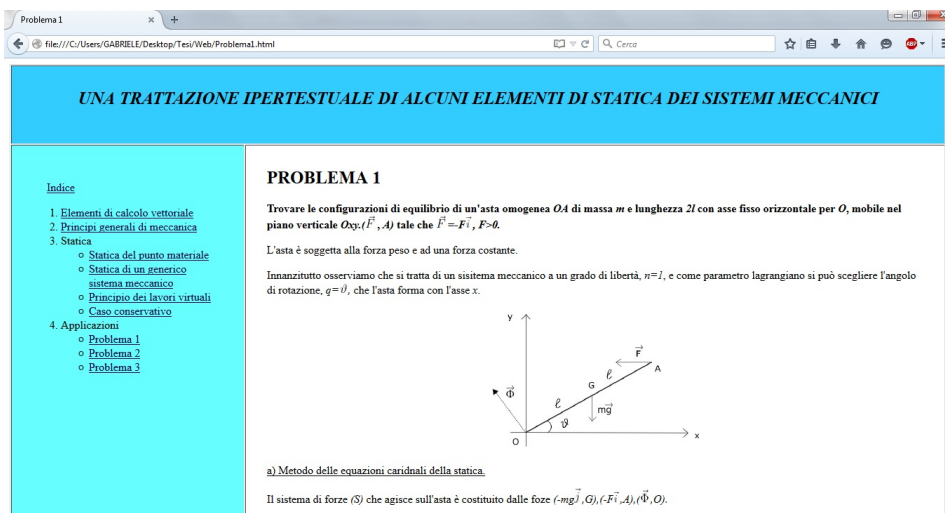


Figura 4.3: Primo problema.

# Bibliografia

- [1] D. Graffi, *Elementi di Meccanica Razionale*, Patron, Bologna 1973.
- [2] S.Graffi, Appunti dalle lezioni di Fisica Matematica II, <http://www.dm.unibo.it/smat/didattica/html>.





# Ringraziamenti

Arriva quel giorno. Il primo giorno dell'università; sei elettrizzato, curioso e ti senti in grado di poter far qualsiasi cosa nella tua vita. Ti ricordi che prima di quel momento quando vedevi gli universitari ti sembravano così grandi, ora invece sei una di loro, ma semplicemente una dei tanti, e semplicemente tu.

Di tutto ti saresti aspettata dall'università meno che quello che ti sei trovata a vivere . Il non sentirsi all'altezza.

Fatica, orari pesanti e cervello che fuma, perdere le energie e via via anche alcuni amici storici. Va bene, forse in parte te lo immaginavi, fa parte della crescita... Ma nessuno mai ti avviserà sul numero delle notti passate insonni a cercare di capire anche solo due righe di una dimostrazione, nessuno ti dirà che arriverai a sfogare la tensione in pianti isterici negli unici momenti in cui stacchi il cervello: mentre mangi, nessuno ti dice che quando si tratta di razionalità o tutto torna o sei a zero. Studiare matematica è una continua battaglia contro sè stessi, è una sfida tra la tua Ratio e quel modello perfetto che se è stato pensato vuol dire che può essere capito anche da te. E se quindi non ci arrivi sei tu che non sei all'altezza. Questa continua rincorsa alla comprensione gioca un bruttissimo ruolo sulla tua autostima e continuamente devi ricordare a te stesso che ce la puoi fare.

Ti distacchi dalla vita materiale, sei quasi un'altra ovattata dimensione dove tendi all'apatia.

Ma ora sono qua. Ho superato questa sensazione ma non l'ho superata io, le persone introno a me mi hanno rinvigorita.

Per questo voglio dire grazie di cuore a:

- mia madre Giuliana: perchè non ha mai mancato un'attenzione nei miei riguardi

e mi ha sempre fatto sentire amata e importante.

- mio padre Claudio: perchè mi stimola sempre a puntare in alto e mi dimostra ogni giorno con la sua persona il potere della volontà e del cambiamento.
- il mio fratellone Gabriele: perchè mi supporta nei miei momenti di peggiore delirio e perchè lui, silenziosamente, lotta.
- mia nonna Carla: che per ogni mio esame accende un cerino, e ogni mattina prega per me.
- mio nonno Celso: che ogni volta che mi vede mi chiama ancora 'Fangeina', e si informa sempre chiedendomi: 'vèt a scola o a danza?'.
- Andrea: tu sai meglio di chiunque altro quanto sei stato necessario.
- Katia: perchè ogni volta che ho avuto bisogno c'eri, venendo a soccorrermi sotto casa e riportandomi un sorriso. Perchè non ho bisogno di spiegarmi con te, hai già capito prima che inizi a parlare.
- Daniela: compagna di danza, compagna di studi, compagna di viaggi. Perchè hai condiviso con me chiacchiere, lacrime, urla, sudore e risate, e perchè mi stimoli sempre ad essere una persona migliore.
- Eleonora: perchè sai sempre come farmi sentire quanto mi vuoi bene, perchè prima di qualsiasi scelta ho bisogno del tuo parere.
- Massimo: perchè mi passi sempre la tua energia e il tuo entusiasmo. Perchè mi conosci in tutte le mie sfaccettature e perchè mi accetti così, anche se sono ansiolitica.
- Simona, Alessandra, Fancesca: perchè so che ci siete, perchè mi portate a ballare, perchè siamo tutte sulla stessa barca.
- Alfio: migliore amico di una vita, perchè ci sei sempre stato e so che sempre ci sarai nonostante non riusciamo mai a vederci quanto vorremmo (dovremmo convivere al quel punto).

- Claudia e Francesca: perchè non potevo sperare di trovare due compagne migliori di voi. Perchè mi avete sopportato a quelle infinite lezioni, perchè abbiamo condiviso momenti di grande gioia ma anche momenti di ansia alle stelle, perchè senza di voi non sarei nemmeno mai arrivata alla fine. Grazie perchè avete reso questi tre anni migliori, le infinite telefonate, i caffè per aggiornarci , i commenti acidi e i pranzi sulle scale.
- Caterina e Debora: perchè mi siete state accanto nei momenti di bisogno, perchè mi avete aiutato, perchè mi siete state d'esempio, ma soprattutto perchè mi avete sempre fatto sentire all'altezza.
- Michela: perchè mi vuoi bene nonostante la mia incapacità di starti vicino, perchè so che ci sei.