

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Corso di Laurea in Fisica

## Sistemi dinamici stocastici su Network

Relatore:  
Prof. Armando Bazzani

Presentata da:  
Luigi Battistoni

Sessione I  
Anno Accademico 2014/2015

*Per aspera ad astra*

# Abstract

L'obiettivo della tesi è studiare la dinamica di un random walk su network. Essa è inoltre suddivisa in due parti: la prima è prettamente teorica, mentre la seconda analizza i risultati ottenuti mediante simulazioni.

La parte teorica è caratterizzata dall'introduzione di concetti chiave per comprendere i random walk, come i *processi di Markov* e la *Master Equation*. Dopo aver fornito un esempio intuitivo di random walk nel caso unidimensionale, tale concetto viene generalizzato. Così può essere introdotta la Master Equation che determina l'evoluzione del sistema. Successivamente si illustrano i concetti di linearità e non linearità, fondamentali per la parte di simulazione.

Nella seconda parte si studia il comportamento di un random walk su network nel caso lineare e non lineare, studiando le caratteristiche della soluzione stazionaria. La non linearità introdotta simula un comportamento *egoista* da parte di popolazioni in interazioni. In particolare si dimostra l'esistenza di una *Biforcazione di Hopf*.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
<b>1 Processi di Markov</b>	<b>7</b>
1.1 Catene di Markov . . . . .	7
1.2 Processi di Markov . . . . .	7
<b>2 Random walk su Networks</b>	<b>9</b>
2.1 Random walk in una dimensione . . . . .	9
2.2 Master Equation per un Random Walk . . . . .	12
<b>3 Random walk non lineari</b>	<b>14</b>
<b>4 Simulazione</b>	<b>17</b>
4.1 Funzionamento del Network . . . . .	17
4.2 Inserimento della non linearità . . . . .	18
<b>5 Conclusioni</b>	<b>28</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>29</b>

# Introduzione

Durante gli anni 50 i due matematici *Paul Erdos* e *Alfred Renyi* diedero vita al concetto di *random graph*: dato un intero positivo  $n$  e una probabilità  $p$ , con  $0 \leq p \leq 1$ , un grafico  $G(n,p)$  è un oggetto con  $n$  vertici (*nodi*) tali che ogni coppia  $(a,b)$  di vertici è connessa con probabilità  $p$ . Ad esempio consideriamo un numero  $n=5$  di nodi. Prendiamo la coppia  $(0,1)$  e lanciamo una moneta. Decidiamo che se il risultato sarà testa allora conetteremo i due vertici, se sarà croce li lasceremo disgiunti. In questo modo, dopo aver iterato il processo per ogni coppia, avremo costruito un *Random Network* con 5 nodi e probabilità di collegamento tra i nodi fissata a  $p=1/2$ . Bisogna comunque prestare attenzione al fatto che la coppia  $(a,b)$  è diversa dalla coppia  $(b,a)$ , infatti vogliamo che i collegamenti creati siano *direzionali* (cioè da  $b$  ad  $a$ )

Il modello di Erdos-Renyi è stato utilizzato per costruire il network su cui sono state svolte le simulazioni della seconda parte della tesi. In ogni caso questo modello possiede una limitazione: essendo i collegamenti tra i nodi distribuiti in maniera probabilistica, essi seguono una distribuzione di Poisson. Questo significa che in generale solo pochi nodi avranno un numero di collegamenti che si scosta significativamente dal numero medio di collegamenti. Quindi, nel modello di Erdos-Renyi, ci troviamo in un *mondo medio*, dove siti web diversi hanno lo stesso numero di visite e dove imprese diverse hanno lo stesso numero di clienti. Appare evidente che tale modello è inapplicabile al mondo reale e può fornire solo informazioni molto approssimate. Comunque, essendo il tipo di random network più intuitivo e realizzabile, è sicuramente il primo modello da studiare per chi si avvicina per la prima volta allo studio dei *sistemi complessi*.

Obiettivo della tesi sarà studiare inizialmente la dinamica di un random walk lineare e successivamente di un random walk non lineare. Sarà prestata particolare attenzione alle condizioni in cui il sistema si *biforca*, cioè il punto di stabilità non è più univoco. Per realizzare questa dinamica non lineare ci siamo ispirati ad un sistema biologico in cui gli individui con molte risorse (cioè i nodi con molte particelle) tendono ad essere *avarì* e a non cedere tali risorse agli individui circostanti. La discussione matematica di come si effettua ciò e le sue conseguenze verranno illustrate più avanti.

Nei prossimi capitoli si tratteranno i seguenti fondamentali argomenti teorici:

- Catene di Markov. [6][8]

Una catena di Markov è un processo stocastico per cui l'evoluzione di un sistema dipende solamente dallo stato presente dello stesso e non dal suo stato passato. Verrà qui analizzata la probabilità di transizione da uno stato all'altro.

- Processi di Markov. [6][8]

Un processo di Markov è, come nel caso di una catena, caratterizzato da una collezione discreta di stati  $S$ , ma in questo caso il tempo non è discreto, ma continuo. Dopo aver definito le *funzioni di transizione* descriveremo la *Master Equation* per un processo di Markov, cioè l'equazione che determina la dinamica del processo.

- Random walk in una dimensione. [2][3][5]

In questa sezione viene esposto un esempio intuitivo di random walk unidimensionale: un punto che si muove lungo una retta. Dopo aver fatto opportune osservazioni si ricava l'equazione per  $P(x,t)$ , cioè la probabilità che ad un tempo  $t$  il punto si trovi nella posizione  $x$ . Tale equazione verrà risolta e si troverà l'espressione generale per  $P(x,t)$ .

- Master Equation per un random walk. [1][5]

Qui viene ricavata l'espressione generale per la *Master Equation* per un random walk, cioè l'equazione che mi dice come cambia nel tempo la probabilità di trovare il sistema nello stato  $n$  al tempo  $t$ .

- Random walk non lineari. [7]

Introduciamo una non linearità nel random walk, in questo caso nel senso che la probabilità di transizione di un nodo non rimane costante durante tutta la dinamica, ma varia a seconda di quante particelle si trovano su tale nodo. Così ci apprestiamo a studiare teoricamente ciò che vedremo sperimentalmente durante la simulazione, cioè che alcuni nodi tendono ad isolarsi, chiamando a sè il maggior numero di particelle possibile, e altri tenderanno ad impoverirsi, fino a perdere tutte le particelle in loro possesso.

Inoltre in questa sezione viene introdotto mediante un esempio il concetto di *Biforcazione di Hopf*. Troveremo questo oggetto nella seconda parte della simulazione.

Nella seconda parte verrà descritta una simulazione effettuata per comprendere meglio la dinamica del random walk su network

- Funzionamento del Network. [4]

Qui verrà descritto brevemente come si comporta il network in situazione di linearità, in particolare come si distribuisce la probabilità  $p(n)$  di avere  $n$  particelle sul nodo  $k$

- Inserimento della non linearità. [7]

Cambiando la matrice di transizione  $\pi_{ij}$  nella maniera precedentemente descritta vediamo che effettivamente si realizzano le condizioni aspettate. Aumentando inoltre il parametro  $\alpha$  contenuto nel termine che dà la non linearità vediamo che, per  $\alpha > \alpha_c$  si ha una *Biforcazione*, cioè il modo in cui si evolve la dinamica del nodo dipende soltanto dalle condizioni iniziali.

# Capitolo 1

## Processi di Markov

### 1.1 Catene di Markov

Una catena di Markov è un processo stocastico per cui l'evoluzione di un sistema dipende solamente dallo stato presente dello stesso e non dal suo stato passato. In particolare, quando ci riferiamo ad una catena di Markov, consideriamo istanti discreti di tempo. Una catena di Markov è caratterizzata da un set di stati  $S$  e dalla probabilità di transizione  $p_{ji}$  tra gli stati, cioè la probabilità che il sistema sia, all'istante di tempo successivo, nello stato  $j$ , sapendo che all'istante attuale è nello stato  $i$ . Ponendosi nelle condizioni in cui tutti gli stati della catena di Markov possono comunicare (cioè posso passare da un qualunque stato ad un altro qualunque stato), dati due stati esiste un tempo  $t$  tale che la probabilità di transire da uno all'altro in un tempo  $t$  è non nulla.

Queste *probabilità di equilibrio* possono essere ricavate dalla seguente *equazione di equilibrio*:

$$\pi_i \sum p_{ji} = \sum \pi_j p_{ji}, \quad i \in S$$

Inoltre abbiamo la condizione di normalizzazione:

$$\sum_{i \in S} \pi_i = 1$$

In particolare si può dimostrare che tutti i  $\pi_i$  sono positivi, in quanto rappresentano delle probabilità.

### 1.2 Processi di Markov

Un processo di Markov è, come nel caso di una catena, caratterizzato da una collezione discreta di stati  $S$ , ma in questo caso il tempo non è discreto, ma continuo. Quindi ora una transizione può verificarsi in un qualunque istante di tempo  $t$ , e non in istanti di tempo discreti, come per una catena.

L'evoluzione di un processo di Markov è regolata dalle *funzioni di transizione*  $p_{ji}(t_1, t_2)$ . Tali funzioni sono definite come la probabilità di transizione da uno stato  $i$  all'istante  $t_1$  ad uno stato  $j$  all'istante  $t_2$ . Inoltre si ha

$$\sum_{j \in S} p_{ji}(t_1, t_2) = 1, \quad t_1 < t_2$$

Anche in questo caso le singole funzioni di transizione sono tutte positive. Si definisca ora la *matrice delle probabilità di transizione* come il vettore colonna contenente gli elementi  $p_{ji}(t_1, t_2)$

$$P(t_1, t_2) = [p_{ji}(t_1, t_2)]$$

Sia inoltre  $\pi_j(t)$  la probabilità di essere al tempo  $t$  sul nodo  $j$ , e  $\pi(t)$  il vettore colonna i cui elementi sono i  $\pi_j(t)$ . Allora possiamo scrivere la *Master Equation* che regola l'evoluzione dinamica del sistema:

$$\pi(t + \Delta t) = \pi(t)P(t, t + \Delta t), \quad t > 0$$

Essa può essere scritta anche nella forma

$$\pi_j(t + \Delta t) = \sum_{i \in S} p_{ji}(t, t + \Delta t)\pi_i(t), \quad t > 0$$

Definisco ora la *Matrice dei tassi di transizione*  $Q(t)$ : i suoi elementi  $q_{ji}$  rappresentano la frequenza di transizione dallo stato  $i$  all'istante  $t$  allo stato  $j$  all'istante  $t + dt$ . Come di consueto ho che ogni  $q_{ji}$  è positivo e che la loro somma su  $j$  è nulla. Come conseguenza ho che la matrice  $Q(t)$  ha sempre un autovalore nullo.

# Capitolo 2

## Random walk su Networks

### 2.1 Random walk in una dimensione

L'esempio più banale di random walk è il seguente: pensiamo ad un punto in grado di muoversi ad intervalli discreti di tempo casualmente avanti o indietro lungo una retta, di una distanza  $d$  ad ogni intervallo. Tale modo casuale si definisce *Random walk* in una dimensione. Quindi, escludendo il caso per cui il punto possa restare fermo, ad ogni istante di tempo ho una probabilità  $p_+$  che il punto si muova in avanti ed una probabilità  $p_-$  che esso si muova indietro. Appare evidente che

$$p_+ + p_- = 1$$

Il random walk così descritto è un *processo aleatorio*, cioè un processo per cui cammini differenti con condizioni iniziali uguali in generale dopo un tempo  $t$  (o numero di passi  $n$ ) si troveranno in posizioni diverse. Si può definire la *probabilità*  $P(x,t)$  che un punto si trovi nella posizione  $x$  dopo un tempo  $t$ . Tale probabilità dipende dalla posizione di partenza del punto, essa infatti fissa il valore di  $P(x,0)$ .

Una prima considerazione da fare per trovare l'equazione per  $P(x,t)$  è che il punto si muove ad ogni  $\Delta t$ , quindi dopo un certo numero di  $\Delta t$  dispari esso si troverà in una posizione con  $x$  dispari. Analogamente dopo un certo numero di  $\Delta t$  pari il punto si troverà in un  $x$  pari. Sia  $t$  il numero totale di intervalli di tempo  $\Delta t$ , allora  $P(x,t)$  deve soddisfare:

$$P(x,t) = p_+P(x-1,t-1) + p_-P(x+1,t-1) = \frac{1}{2}P(x-1,t-1) + \frac{1}{2}P(x+1,t-1)$$

Questa equazione è data dal fatto che dopo  $t-1$  il punto può trovarsi sia in  $x+1$  sia in  $x-1$ , ma non in  $x$ . Un'importante osservazione da fare è che il random walk è un processo di Markov, infatti il comportamento al tempo  $t$  del sistema è dato solamente dallo stato a  $t-1$  dello stesso.

Possiamo proporci di risolvere l'equazione per  $P(x,t)$ . Essa è un'equazione lineare a coefficienti costanti, risolvibile considerando una soluzione del tipo

$$P(x,t) = e^{iax} F(a,t)$$

dove  $a$  è un numero appartenente all'intervallo  $[0,2\pi]$  e  $F(a,t)$  è una funzione da determinare. Sostituendo tale espressione nell'equazione per  $P(x,t)$  e dividendo per  $e^{iax}$  otteniamo:

$$F(a,t) = \frac{e^{-ia}}{2} F(a,t-1) + \frac{e^{ia}}{2} F(a,t-1) = \cos(a) F(a,t-1)$$

Iterando questa equazione, cioè scrivendo  $F(a,t-1)$  in funzione di  $F(a,t-2)$ ,  $F(a,t-2)$  in funzione di  $F(a,t-3)$ , eccetera, possiamo ottenere  $F(a,t)$  in funzione di  $F(a,0)$ :

$$F(a,t) = [\cos(a)]^t F(a,0)$$

La soluzione generale dell'equazione per  $P(x,t)$  si ottiene sommando su tutti i possibili valori di  $a$ , cioè su tutte le soluzioni:

$$P(x,t) = \frac{1}{N} \int_0^{2\pi} e^{iax} [\cos(a)]^t F(a,0) da$$

con  $N$  fattore di normalizzazione che mi garantisce

$$\sum_x P(x,t) = 1$$

Dalla condizione iniziale per  $t=0$

$$P(x,0) = \frac{1}{N} \int_0^{2\pi} e^{iax} F(a,0) da = \delta_{x,0}$$

Ricordando che  $e^{iax} = \cos(ax) + i\sin(ax)$  si verifica facilmente che  $F(a,0) = \frac{N}{2\pi}$ . Infine la soluzione risulta

$$P(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(ax) [\cos(a)]^t da$$

Consideriamo ora un problema leggermente diverso: costruiamo un network con  $m$  nodi distribuiti lungo una *circonferenza*. Siano  $p_+$  e  $p_-$  le probabilità di muoversi rispettivamente in senso antiorario ed orario sul network partendo da un nodo qualunque  $k$ . Un random walk su network è la dinamica stocastica di una particella che si muove da un nodo ad un altro connesso ad esso, in base alle due precedenti probabilità, in ogni intervallo di tempo  $\Delta t$ .

Una traiettoria possibile è una sequenza di nodi connessi. La probabilità di realizzazione ad essa associata è il prodotto delle probabilità di effettuare i singoli movimenti.

Il comportamento medio del sistema si ottiene mediando ogni osservabile rispetto ad ogni possibile realizzazione delle dinamiche. Così le proprietà statistiche sono descritte dalla distribuzione di probabilità  $\rho(k, t)$ , che soddisfa l'equazione di Champman-Kolmogorov

$$\rho(k, t + 1) = p_- \rho(k + 1, t) + p_+ \rho(k - 1, t)$$

Bisogna ricordarsi inoltre che stiamo considerando un network su una circonferenza, quindi avrò delle condizioni al contorno periodiche:

$$\rho(k + m, t) = \rho(k, t)$$

Inoltre si ha la consueta relazione di completezza

$$\sum_k \rho(k, t) = 1, \quad \forall t$$

Per risolvere l'equazione di Chapman-Kolmogorov usiamo un'espansione di Fourier:

$$\rho(k, t) = \sum_l \rho_l(k) \exp(2\pi i k \frac{l}{m} - \omega_l t)$$

dove i  $\rho_l(k)$  sono determinati dalle condizioni iniziali.

Sostituendo si ottiene

$$\exp(-\omega_l) = p_- \exp(2\pi i \frac{l}{m}) + p_+ \exp(-2\pi i \frac{l}{m}) = \cos(2\pi \frac{l}{m}) + i(p_- - p_+) \sin(2\pi \frac{l}{m})$$

Quando  $l=0$  otteniamo la soluzione stazionaria, poichè  $\omega_0 = 0$ . Negli altri casi

$$|\exp(-\omega_l)|^2 = \cos^2(2\pi \frac{l}{m}) + (p_- - p_+)^2 \sin^2(2\pi \frac{l}{m}) = 1 - 4p_+ p_- \sin^2(2\pi \frac{l}{m}) < 1$$

Così per  $t$  che tende ad infinito abbiamo che  $\exp(-\omega_l t) \rightarrow 0$  e lo stato stazionario è attrattivo. Inoltre la parte immaginaria di  $\omega_l$  soddisfa

$$tg \omega_l^I = (p_- - p_+) tg(2\pi \frac{l}{m})$$

e introduce delle onde che si propagano nel sistema con velocità

$$v_l = \omega_l^I \frac{l}{2\pi m}$$

Tali onde si annullano quando  $p_- = p_+$ .

## 2.2 Master Equation per un Random Walk

Facciamo un passo indietro. Si definisca  $P(j, t_j | i, t_i)$  come la probabilità di essere sul nodo  $j$  al tempo  $t_j$  sapendo che al tempo  $t_i$  la particella era sul nodo  $i$ . Così le equazioni che governano i processi di Markov, cioè le equazioni di evoluzione, possono essere scritte nella seguente forma:

$$p(j, t_j) = \sum_i P(j, t_j | i, t_i) P(i, t_i)$$

Equazione di Chapman-Kolmogorov:

$$P(k, t_k | n_i, t_i) = \sum_j P(k, t_k | j, t_j) P(j, t_j | i, t_i), \quad t_i < t_j < t_k$$

Un processo è stazionario quando  $P(j, t_j | i, t_i)$  dipende solo dalla differenza  $t_j - t_i$ . Per tali processi, quando il tempo è discreto, possiamo scrivere  $P(j, t_i + t_k | i, t_i)$  come  $p_{ij}^k$ . Così posso scrivere l'equazione di Chapman

$$\begin{aligned} P(k, t_k | i, t_i) &= \sum_j P(k, t_k | j, t_j) P(j, t_j | i, t_i) \\ &= p_{jk}(t) = \sum_i p_{ji}(t_1) p_{ik}(t_2), \quad cont = t_1 + t_2 \end{aligned}$$

Dimostro la validità dell'ultima uguaglianza, che è l'equazione di cui ci servirmo successivamente:

$$\begin{aligned} p_{jk}(t_1 + t_2) &= P[X(t_1 + t_2) = k | X(0) = j] \\ &= \sum_{i \in S} P[X(t_1 + t_2) = k, X(t_1) = i | X(0) = j] \\ &= \sum_{i \in S} P[X(t_1 + t_2) = k | X(t_1) = i, X(0) = j] * P[X(t_1) = i | X(0) = j] \\ &= \sum_{i \in S} P[X(t_1 + t_2) = k | X(t_1) = i] * P[X(t_1) = i | X(0) = j] \\ &= \sum_{i \in S} p_{ji}(t_1) p_{ik}(t_2) \end{aligned}$$

Dove con  $P[. \dots .]$  si intende la probabilità condizionata, definita come di consueto. Chiamando  $p=P$  si ha che gli elementi di  $P$  sono non negativi e che:

$$\sum_j p_{ji} = \sum_j P(j, t + 1 | i, t) = 1$$

Tali matrici si chiamano *stocastiche*. In conclusione la relazione definente una catena di Markov diventa

$$P(j, t + 1) = \sum_i p_{ji} P(i, t)$$

La Master Equation una catena di Markov nel limite in cui il tempo continuo. Assumiamo innanzitutto che gli stati siano discreti e riscriviamo l'equazione di Chapman nella forma

$$P(j, t + \Delta t | n_0, t_0) = \sum_i P(j, t + \Delta t | i, t) P(i, t | n_0, t_0)$$

Dove  $n_0$  e  $t_0$  sono le condizioni iniziali. Assumiamo che il processo sia *regolare*:

$$P(j, t + \Delta t | i, t) = \begin{cases} 1 - \chi(j)\Delta t + o(\Delta t), & \text{se } j = i \\ T(j|i)\Delta t + o(\Delta t), & \text{se } j \neq i \end{cases}$$

Dove  $T(j|i)$  è il rate di transizione, definito solo per  $j \neq i$ , e

$$\chi(i) = \sum_{j \neq i} T(j|i)$$

Sostituendo nell'equazione di Chapman ottengo:

$$\begin{aligned} & \frac{P(j, t + \Delta t | j_0, 0) - P(j, t | n_0, 0)}{\Delta t} = \\ & = \sum_{i \neq j} [T(j|i)P(i, t | n_0, 0) - P(j, t | n_0, 0)] \sum_{i \neq j} [T(i|j) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}] \end{aligned}$$

Ponendosi nel limite  $\Delta t \rightarrow 0$  ottengo la *master equation*, cioè l'equazione che mi dice come cambia nel tempo la probabilità di trovare il sistema nello stato  $n$  al tempo  $t$ :

$$\frac{dP(j, t)}{dt} = \sum_{i \neq j} T(j|i)P(i, t) - \sum_{i \neq j} T(i|j)P(j, t)$$

La stessa equazione può essere scritta nel caso continuo:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \int [T(x|x')P(x', t) - T(x'|x)P(x, t)] dx'$$

## Capitolo 3

# Random walk non lineari

Introduciamo adesso il concetto di non linearità del random walk: vogliamo che la probabilità di transizione da un qualsiasi nodo  $i$  ad un nodo ad esso adiacente  $j$  non sia costante durante la dinamica, ma dipenda dallo stato del sistema.

Evidentemente possono essere introdotte le più svariate tipologie di non linearità; nel nostro caso vorremmo che il sistema evolvesse premiando i nodi con molte particelle a scapito di quelli con numero minore di esse. In tal modo ci aspettiamo che per tempi lunghi alcuni nodi vengano completamente *svuotati* ed altri si *riempiano*, isolandosi poi dal sistema circostante.

Un secondo effetto che vorremmo osservare è che aumentando sempre di più il contributo non lineare si giunga ad una configurazione in cui la caratteristica di un nodo di attirare le particelle o di tendere ad emetterle diventi funzione solo delle condizioni iniziali. Questo effetto, chiamato *Biforcazione di Hopf*, verrà approfondito successivamente.

Per ottenere le due situazioni illustrate consideriamo innanzitutto una probabilità di transizione siffatta

$$\pi_{ij}(1 - \alpha \frac{n_j}{N})$$

dove  $n_j$  rappresenta il numero di particelle nel nodo  $j$  e  $N$  è il numero totale di particelle nel sistema.  $\alpha$  è un parametro.

La probabilità di transizione quindi ora dipende dal numero di particelle nel nodo: più particelle esso ha meno è probabile che ne ceda una all'ambiente circostante. Tale probabilità, per avere senso, deve essere non negativa. Introducendo la non linearità ho come effetto che la matrice di transizione non è più stocastica, quindi sommando su  $j$  non ottengo più 1. Inoltre data la *Master Equation*

$$n_j(t + \Delta t) = n_j(t) + \sum_j \pi_{ij}(n_j)n_j(t)\Delta t - \sum_j \pi_{ji}n_i(t)\Delta t$$

se sommo tutto su  $i$  ottengo che i due contributi dati dalle due sommatorie si controbilanciano e la loro differenza è zero:

$$\sum_i \sum_j \pi_{ij} n_j(t) \Delta t - \sum_i \sum_j \pi_{ji} n_i(t) \Delta t = 0$$

Così, data la proprietà  $N(t + \Delta t) = N(t)$ , ho l'uguaglianza:

$$\sum_i n_i = N(t)$$

Inoltre si ha che per  $\alpha < \alpha_{critico}(\alpha_c)$  ogni nodo ha soltanto uno stato stazionario, ciò significa che alcuni nodi tenderanno ad arricchirsi ed altri tenderanno ad impoverirsi, indipendentemente dalle condizioni iniziali.

Invece per  $\alpha > \alpha_c$  abbiamo che la non linearità causa l'esistenza di più stati stazionari dopo la *biforcazione*, quindi lo stato a tempo  $t > 0$  del nodo dipende soltanto dalle condizioni iniziali, cioè dallo stato del nodo a  $t=0$ .

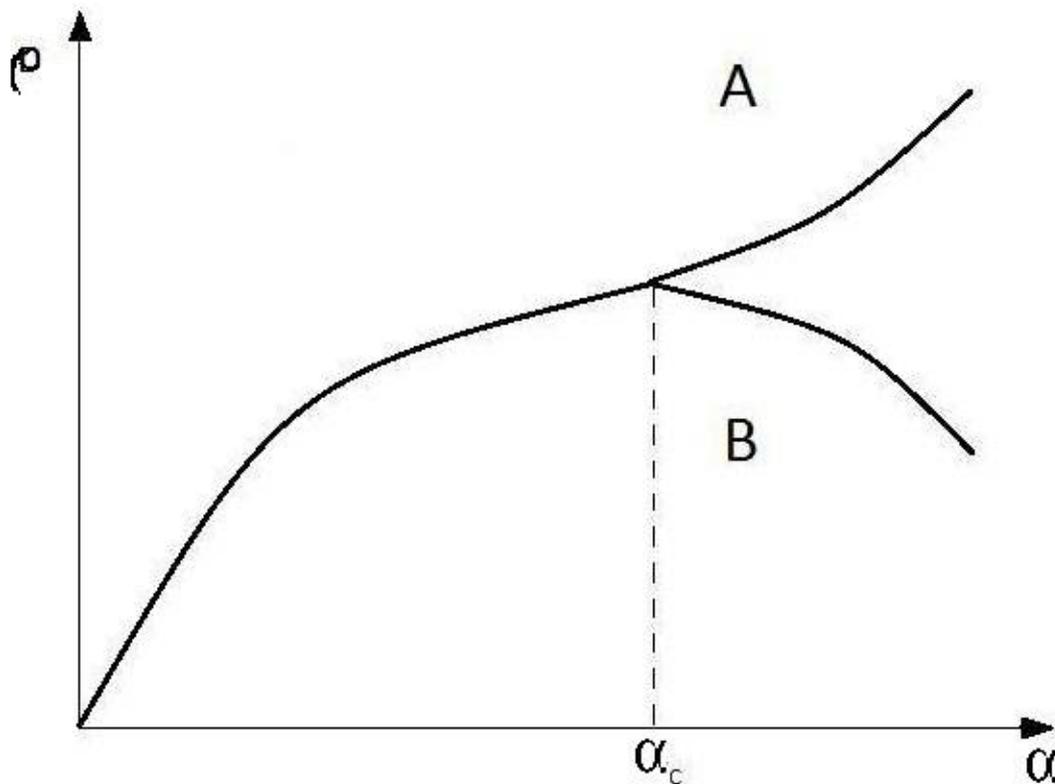


Figura 3.1: Biforcazione dello stato stazionario.

Come si può notare dalla figura 3.1 dopo  $\alpha_c$  lo stato del nodo può sia seguire il percorso  $A$  sia il percorso  $B$ , solamente in base alle condizioni iniziali.

Il comportamento nell'intorno di  $\alpha_c$  è esattamente ciò che stavamo cercando: una *Biforcazione di Hopf*. Per comprendere meglio tale oggetto consideriamo un oscillatore con la seguente forma:

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad |\alpha| < 2\omega$$

Posso riscrivere nella forma

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \alpha y - \omega^2 x - \alpha x^2 y$$

Il punto di equilibrio è nell'origine, lo Jacobiano è

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & \alpha \end{vmatrix}$$

Gli autovalori sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2}}{2}$$

Quando  $\alpha$  passa da negativo a positivo ho una *biforcazione di Hopf*, cioè quando  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ . In corrispondenza di tale biforcazione il sistema è instabile e un nodo diventa o attrattivo o repulsivo.

# Capitolo 4

## Simulazione

Il seguente capitolo riassumerà i risultati ottenuti mediante una simulazione di random walk non lineare su random network. La simulazione fondamentale si è svolta in due fasi: la prima volta a testare l'effettivo funzionamento del network e la seconda finalizzata a trovare il valore di  $\alpha_c$  per cui si ha una biforcazione.

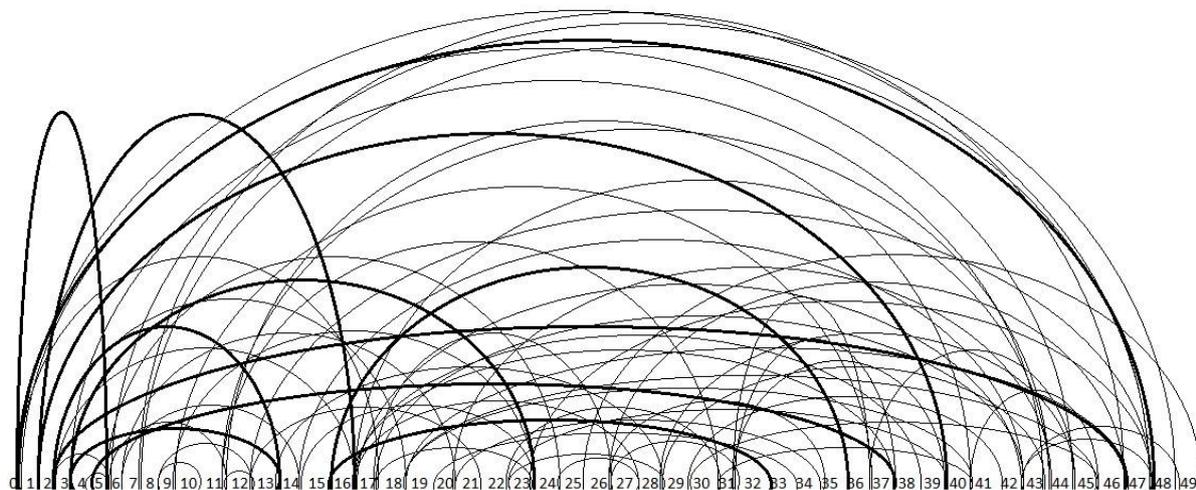


Figura 4.1: Schema del Random Network utilizzato per la simulazione. I numeri in basso rappresentano i nodi e gli archi rappresentano i collegamenti.

### 4.1 Funzionamento del Network

Dopo aver generato un random network (con probabilità di connessione fra due nodi = 0.2) ad ogni nodo è stata assegnata la propria matrice di transizione  $\pi_{ij}$ , tale che la probabilità

di muoversi dal nodo  $j$  al nodo  $i$  fosse  $1/(\text{numero di link uscenti da } j)$  e che la probabilità di rimanere fermo fosse nulla. Inizialmente quindi il random walk era *lineare*. In tale configurazione, generando  $N=1000$  particelle e distribuendole casualmente tra i 50 nodi del network, lasciando passare un numero sufficiente di  $\Delta t$ , si nota che la probabilità  $p(n)$  di avere  $n$  particelle sul nodo  $k$  è

$$p(n) = \frac{p^n(k)(1 - p(k))^{M-n}}{n!(M - n)!} M!$$

dove  $M$  è il numero di particelle totali e  $p(k)$  è definito

$$p(k) = \frac{\text{connessioni\_del\_nodo\_}k}{\text{connessioni\_totali}}$$

Questa distribuzione è una Poissoniana.

Va sottolineato comunque che  $p(k)$  così definito è corretto soltanto nel caso in cui tutti i collegamenti abbiano un *peso uguale*. Infatti, se non avessimo la stessa probabilità di transizione per ogni link del nodo l'espressione per  $p(k)$  si complicherebbe, infatti dovrebbe tener conto delle varie probabilità di transizione diverse.

## 4.2 Inserimento della non linearità

Successivamente è stata inserita una non linearità nel random walk, come descritto nel capitolo precedente. Tale non linearità simula il fatto che una popolazione sufficientemente numerosa tende a non contribuire più al mantenimento delle altre popolazioni (*comportamento egoista*).

$$\pi_{ij} \mapsto \pi_{ij} \left(1 - \frac{\alpha}{N} n_j\right)$$

Una cosa interessante da notare è che per un tempo abbastanza lungo (dell'ordine di  $100 * \Delta t$ ) e per  $\alpha < \alpha_c$  alcuni nodi, tipicamente quelli con un numero di connessioni entranti maggiore di quelle uscenti, tenderanno ad assorbire tutte le particelle del sistema, mentre i rimanenti nodi tenderanno ad espellerle tutte.

Quindi avrò una situazione in cui pochissimi nodi (in generale meno di una decina) avranno assorbito la quasi totalità delle particelle e saranno praticamente isolati dal resto del sistema, infatti tenderanno a non modificare più il proprio numero di particelle.

Al contrario i nodi con pi connessioni uscenti rispetto a quelle entranti tenderanno ad impoverirsi di tutte le particelle. Si potranno avere tutt'al più casi in cui poche singole particelle vengono scambiate per un certo numero di  $\Delta t$  piccolo tra i nodi poveri, fino a quando non vengono assorbite dai nodi ricchi.

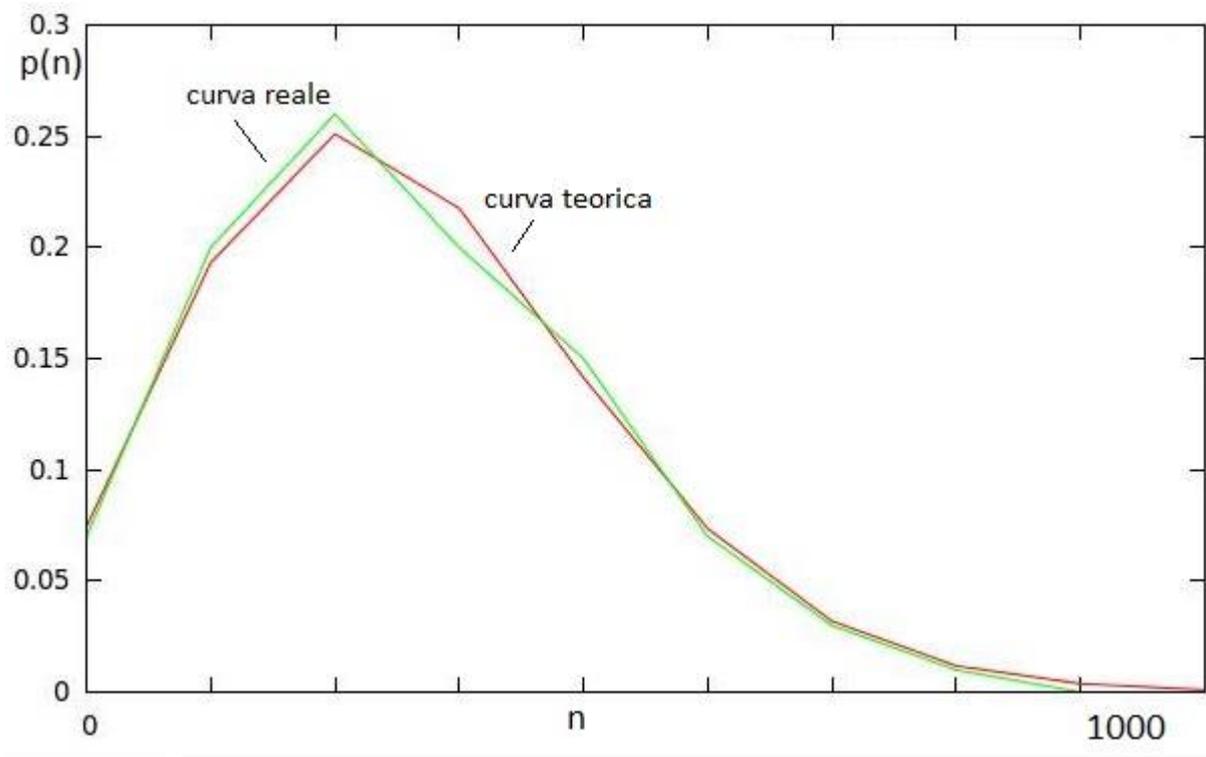


Figura 4.2: Grafico di  $p(n)$  in funzione di  $n$  per il nodo  $\theta$ . La curva reale si approssima bene alla curva teorica, quindi possiamo concludere che essa segue una distribuzione di Poisson con area normalizzata ad 1.

Ciò che otteniamo dalla simulazione, riassunto nelle tre figure 4.4 , 4.5 , 4.6, è consistente con le supposizioni teoriche. Benchè all'inizio la distribuzione di particelle fosse circa uniforme, dopo otto intervalli  $\Delta t$  ho ben 16 nodi completamente vuoti e tre con più di cento particelle.

A parte questo interessante risultato l'obiettivo principale dell'introduzione della non linearità è trovare il valore di  $\alpha_c$  dopo il quale ho una *biforcazione di Hopf*. Il valore è stato trovato monitorando il comportamento sia di nodi di arricchimento sia di nodi di impoverimento, variando  $\alpha$  a passo costante. Il valore che è emerso dalle simulazioni è  $17 < \alpha_c < 18$  . Dopo tale intervallo non si riconoscono più i nodi che tendono ad arricchirsi da quelli che tendono ad impoverirsi, infatti ad ogni simulazione il comportamento di ogni nodo è differente e dipende solamente dalle condizioni iniziali.

Si può fare un ultimo commento sul limite superiore per cui la non linearità ha senso, infatti se per  $\alpha = 0$  abbiamo che la matrice di transizione è esattamente quella del caso lineare, per  $\alpha > 50$  i nodi smettono di scambiarsi particelle: anche per un  $t$  molto grande

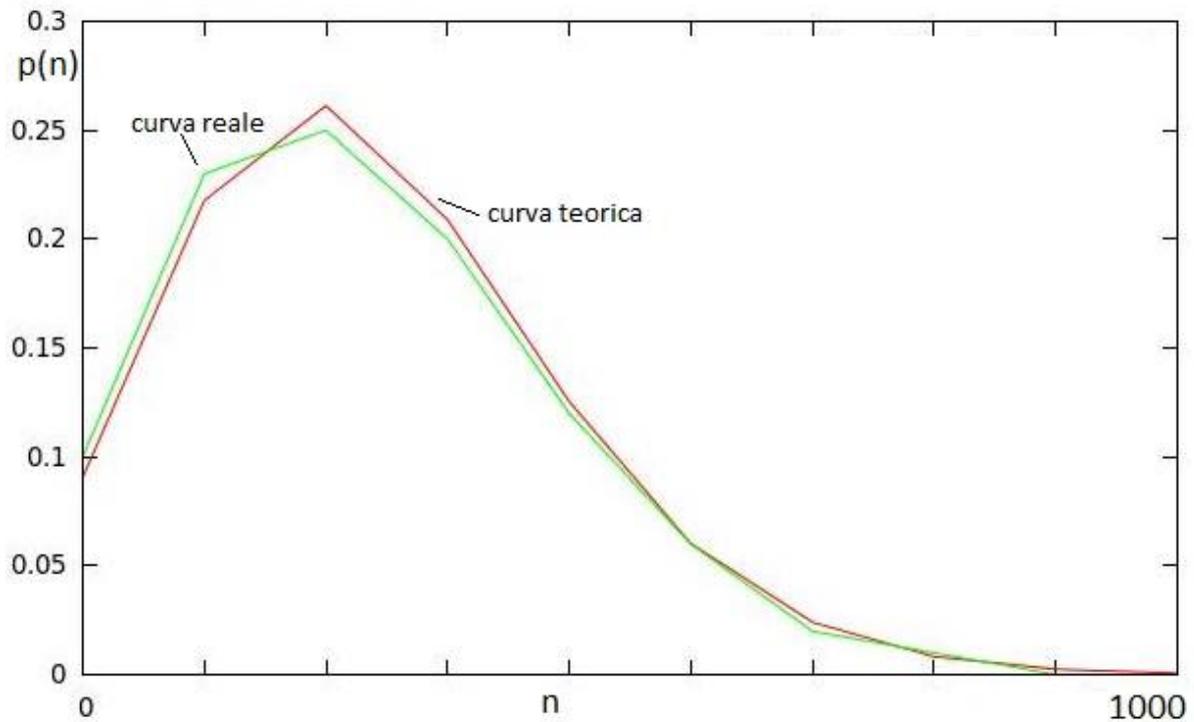


Figura 4.3: Grafico di  $p(n)$  in funzione di  $n$  per il nodo 35. Anche in questo caso la curva reale si approssima bene alla curva teorica, quindi possiamo concludere che essa segue una distribuzione di Poisson con area normalizzata ad 1.

il numero di particelle sul nodo  $k$  al tempo  $t=t^*$  è uguale al numero di particelle sullo stesso nodo al tempo  $t=0$ . Questo si verifica per ogni nodo, poichè, banalmente, la parte non lineare  $-\alpha n_j / N$  diventa più grande di 1 in modulo, quindi la probabilità di transizione si annulla per ogni nodo (alla probabilità negativa è stato associato un valore di transizione nullo).

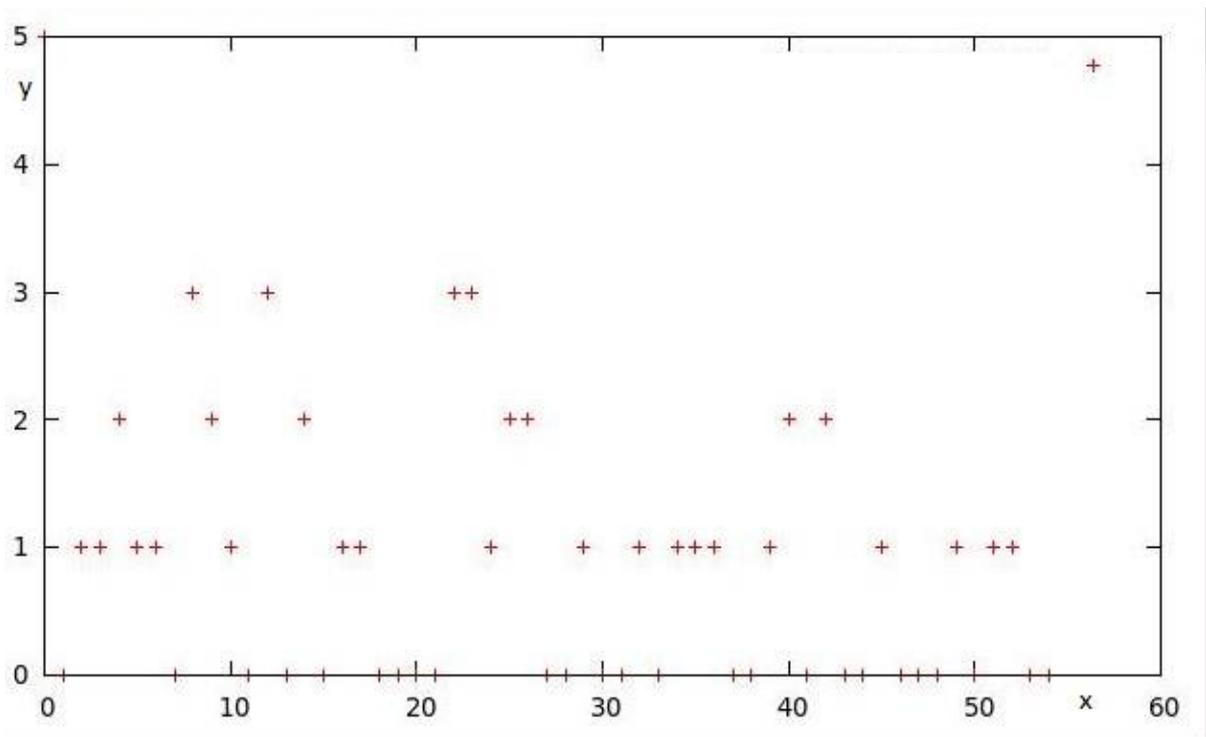


Figura 4.4: In figura è mostrata la distribuzione delle particelle sui nodi del network a  $t=0$  con  $\alpha \ll \alpha_c$  (in questo caso  $\alpha = 0.1$ ). In ascissa è riportato il numero di particelle nel nodo, in ordinata quanti nodi presentano tale numero di particelle. Ad esempio il punto  $(x=10, y=1)$  significa che solo un nodo possiede 10 particelle a  $t=0$ .

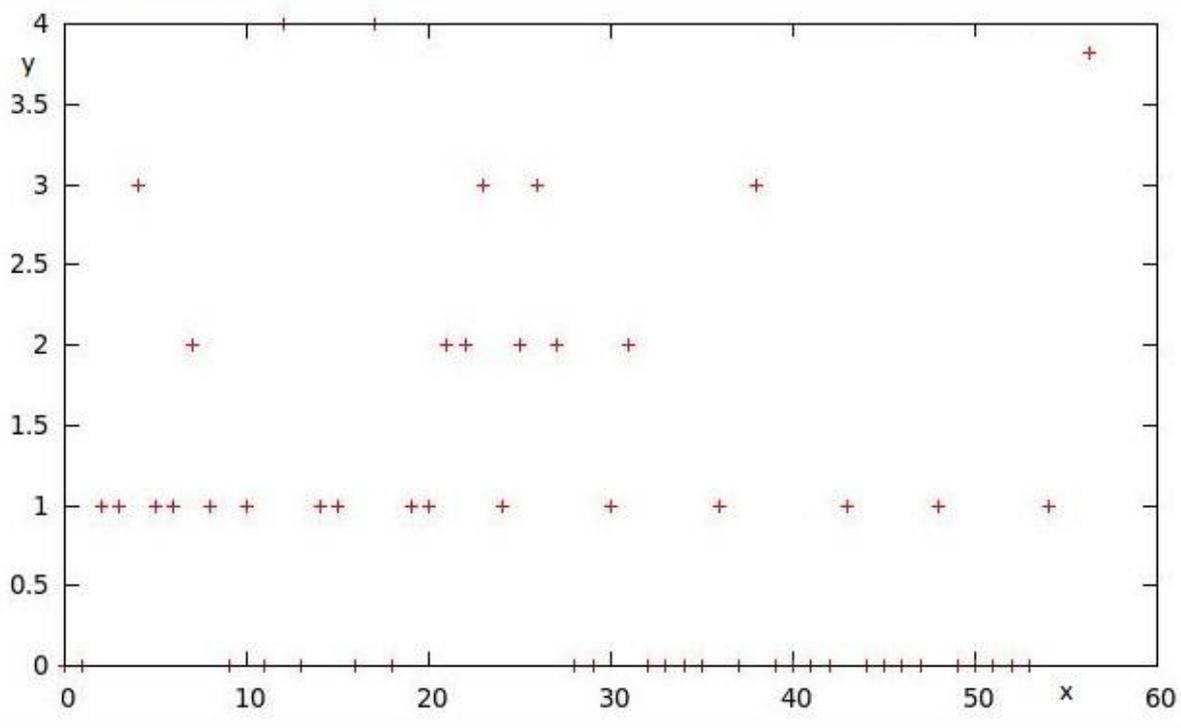


Figura 4.5: In figura è mostrata la distribuzione delle particelle sui nodi del network dopo un  $\Delta t$  con  $\alpha \ll \alpha_c$  (in questo caso  $\alpha = 0.1$ ). In ascissa è riportato il numero di particelle nel nodo, in ordinata quanti nodi presentano tale numero di particelle. Si interpreti il grafico come nel caso precedente.

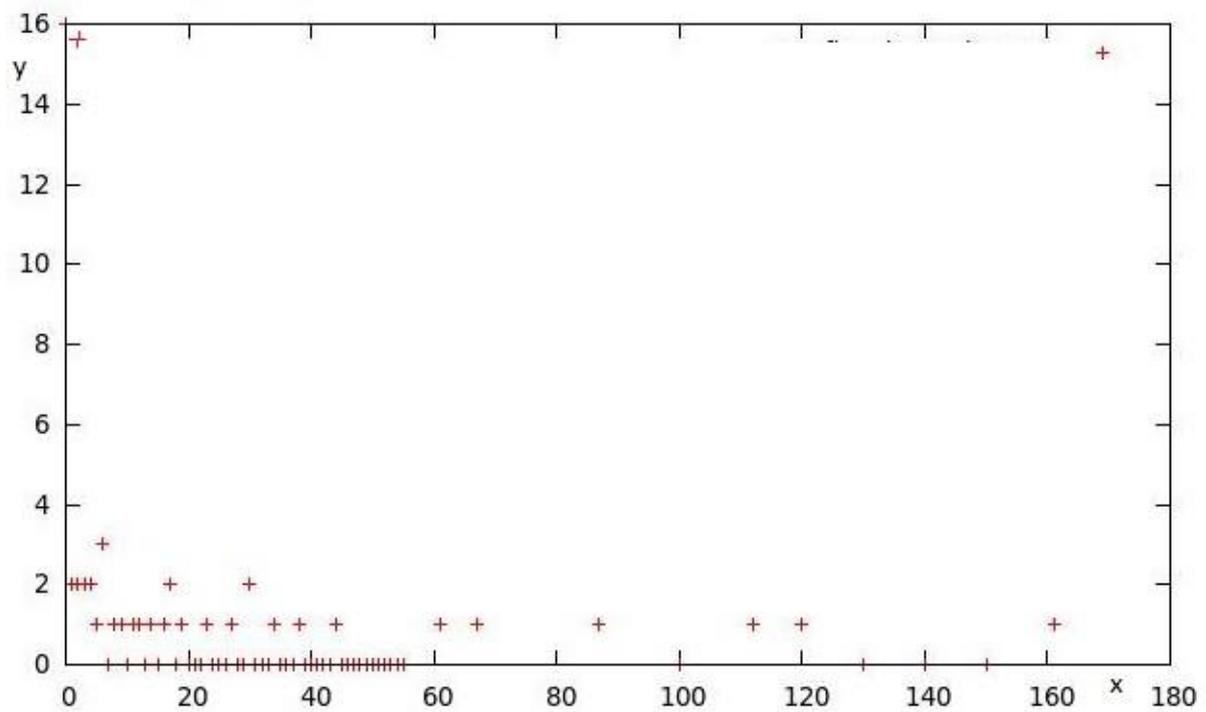


Figura 4.6: In figura è mostrata la distribuzione delle particelle sui nodi del network dopo un tempo di  $8\Delta t$  con  $\alpha \ll \alpha_c$  (in questo caso  $\alpha = 0.1$ ). In ascissa è riportato il numero di particelle nel nodo, in ordinata quanti nodi presentano tale numero di particelle. Si interpreti il grafico come nel caso precedente.

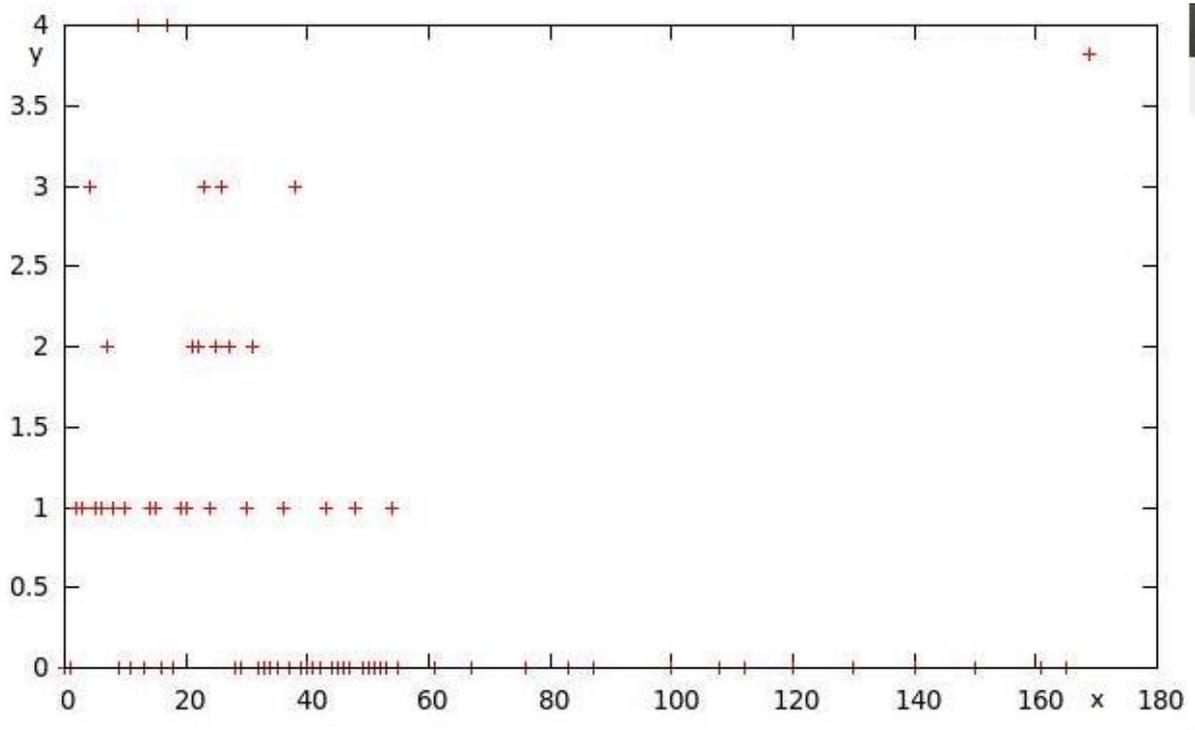
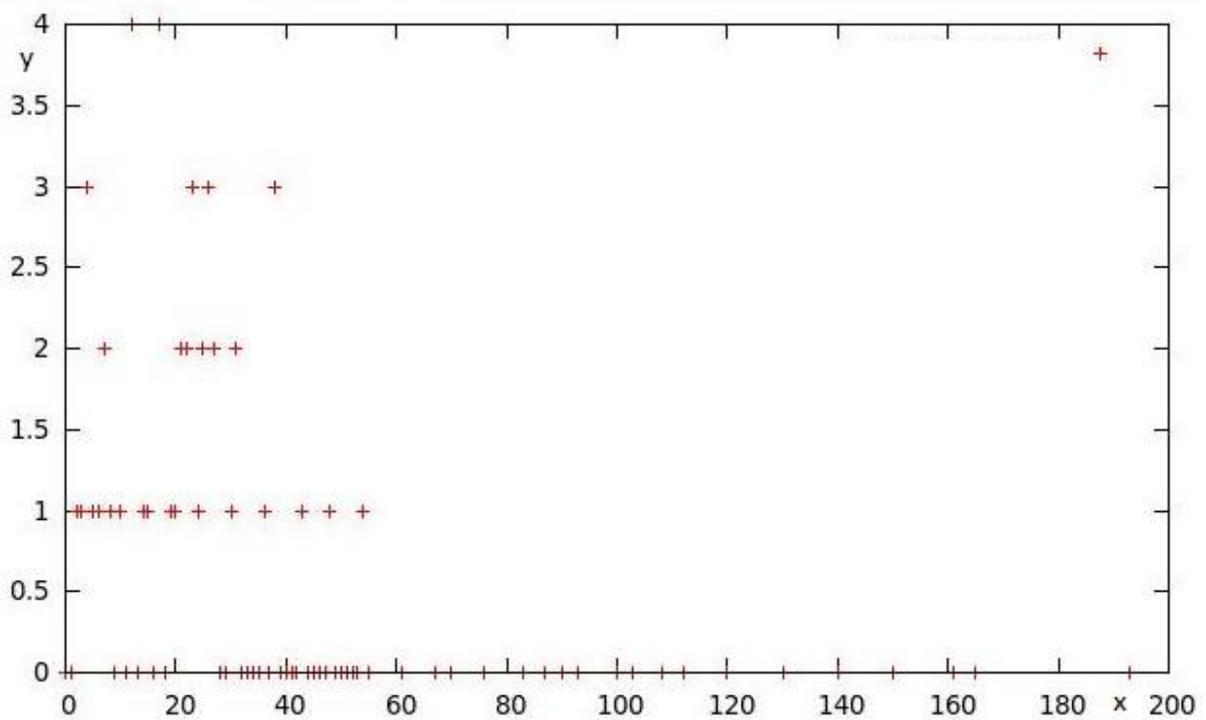


Figura 4.7: In figura è mostrata la distribuzione delle particelle sui nodi del network dopo un tempo di  $8\Delta t$  con  $\alpha = 0.0$ . In ascissa è riportato il numero di particelle nel nodo, in ordinata quanti nodi presentano tale numero di particelle. Si interpreti il grafico come nel caso precedente. Come potevamo aspettarci, essendo il random walk lineare, la distribuzione delle particelle nei nodi è Poissoniana.



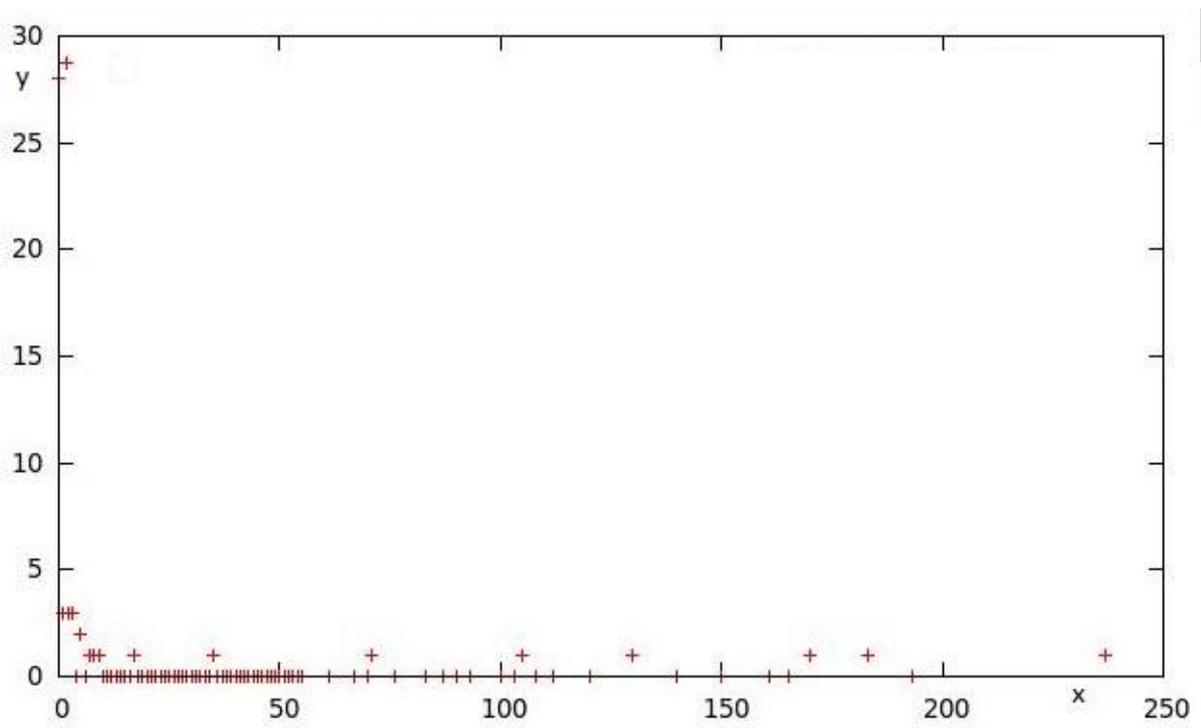


Figura 4.9: In figura è mostrata la distribuzione delle particelle sui nodi del network dopo un tempo di  $20\Delta t$  con  $\alpha = 0.01$ . In ascissa è riportato il numero di particelle nel nodo, in ordinata quanti nodi presentano tale numero di particelle. Si interpreti il grafico come nel caso precedente. Ora abbiamo fatto passare abbastanza tempo ed il sistema è riuscito a rilassarsi. Infatti ho pochi nodi con più di cento particelle (ne ho 5) e molti nodi poveri, ad esempio 28 completamente vuoti.

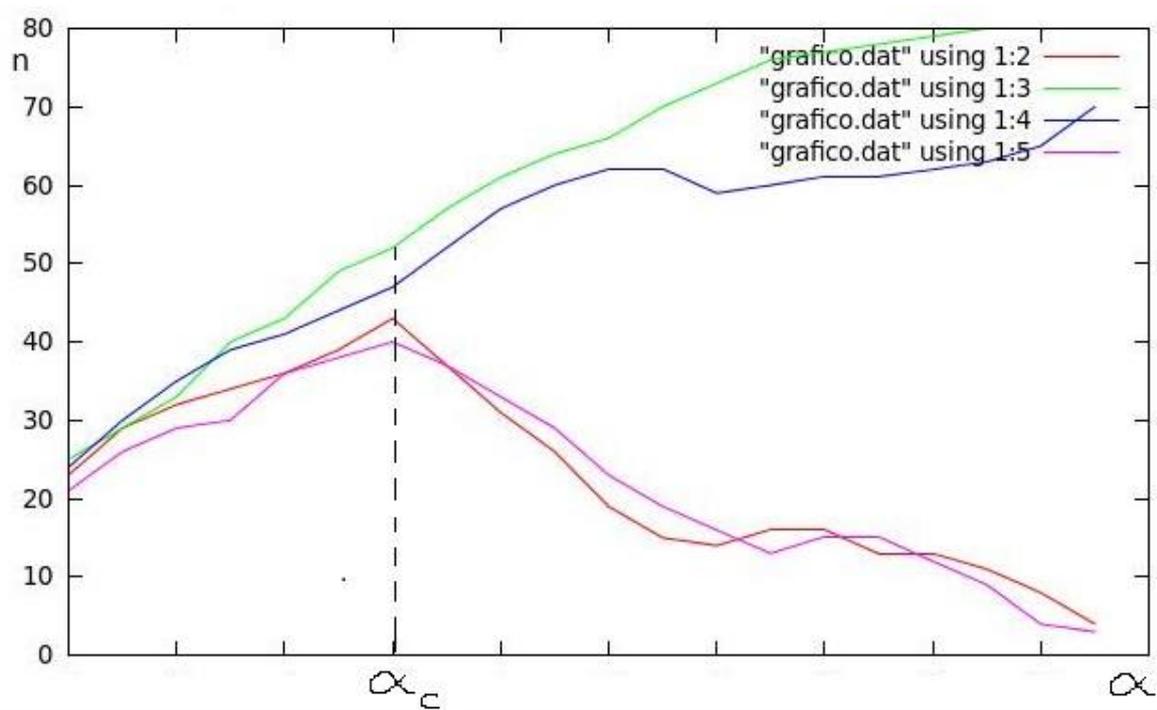


Figura 4.10: Grafico di  $\alpha$  in funzione di  $n$ . In figura è mostrato il comportamento del nodo  $\theta$ , il cui stato dopo  $\alpha = \alpha_c$  dipende soltanto dalle condizioni iniziali.

# Capitolo 5

## Conclusioni

Riassumiamo brevemente i due importanti risultati trovati in seguito all'introduzione della non linearità. Abbiamo verificato che i nodi con numero maggiore di particelle tendono ad isolarsi e a non scambiare risorse con i nodi circostanti. Grazie a questo risultato sarà possibile studiare un semplice modello in cui un sistema, ad esempio biologico, raggiunge il punto di equilibrio quando poche specie controllano tutte le risorse e molte specie sono povere.

Aumentando il contributo della parte non lineare della probabilità di transizione si raggiunge un valore critico di  $\alpha$ , oltre il quale si ha una *Biforcazione di Hopf*, cioè la stabilità del sistema dipende soltanto dalle condizioni iniziali.

Così possiamo concludere di aver trattato teoricamente e verificato tramite simulazione gli aspetti dei sistemi dinamici stocastici che ci eravamo proposti di studiare.

# Bibliografia

- [1] Bazzani A. , *Maximal Entropy Principle and Master Equation* , Bologna, 5/5/2015.
- [2] Bazzani A. , *Network Dynamics and Statistical Physics* , Bologna, 1/7/2015.
- [3] Crisanti , *Random Walk in una dimensione: Caso Discreto* , , Roma, Rev.2.0.4 , [http : //pil.phys.uniroma1.it/ labcalc/C – primer/random<sub>w</sub>alk – d.pdf](http://pil.phys.uniroma1.it/labcalc/C-primer/random_walk-d.pdf)
- [4] Erdos, P.; Renyi, A. , *On Random Graphs* , Publications Mathematicae 6 : 290-297 , 1959.
- [5] Erdos, P.; Renyi, A. , *On the evolution of random graphs* , Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences 5 : 17-61 , 1960.
- [6] Parzen E. , *Stochastic Processes* , Holden-Day , 1999.
- [7] Pastore S. , *Appunti del corso di teoria dei circuiti 2* , Trieste, 24/5/2007, [www2.units.it/pastore/TdC2/Circuiti<sub>d</sub>inamici<sub>i</sub>furcations.pdf](http://www2.units.it/pastore/TdC2/Circuiti_dinamici_i_furcations.pdf)
- [8] Zabczyk J. , *Mathematical Control Theory: An Introduction* , Boston, Birkhauser, 1995.