Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE Corso di Laurea in Fisica

TRANSIZIONI A STATI CONGESTIONATI IN MODELLI DI TRAFFICO

Relatore: Chiar.mo Prof. ARMANDO BAZZANI Preșentata da: NICOLÒ GRASSI

Sessione II Anno Accademico 2014/2015

Abstract

La congestione del traffico è un fenomeno molto familiare, con il quale si ha a che fare nelle più svariate occasioni. Dal punto di vista fisico, il flusso del traffico rappresenta un sistema di particelle interagenti (i veicoli) in condizione di non equilibrio. L'effetto complessivo di un sistema composto da molte particelle interagenti è la creazione di una instabilità, osservata empiricamente, nello stato di *free flow* (scorrimento libero), causata dall'aumentare delle fluttuazioni. In questi casi di parla di *phantom traffic jam*, ovvero una congestione che ha origine senza cause apparenti, come incidenti o lavori in corso. Sarà dimostrato come la condizione di *stop & go* si verifichi spontaneamente se la densità media dei veicoli eccede un certo valore critico.

L'importanza di poter predire una congestione stradale non è un problema puramente matematico, ma ha risvolti socio-economici non indifferenti. Infatti, le caratteristiche della mobilità e dei sistemi di trasporto sono strettamente legate alla struttura della comunità e alla qualità della vita. Con il seguente studio si cercherà di trovare un osservabile facilmente calcolabile, che potrebbe essere un predittore della formazione di uno stato congestionato con un intervallo di tempo sufficientemente adeguato. A tal fine sono state prese in considerazione misure relative alle condizioni del traffico su strade provinciali dell'Emilia-Romagna, tramite un sistema MTS composto da 3509 spire che registra i passaggi delle macchine; in seguito, per poter avere una comprensione maggiore dei fenomeni che si manifestano durante la transizione a stato congestionato, si è provveduto a creare un modello matematico utilizzato per le simulazioni al computer. I risultati ottenuti dalle simulazioni, poi, sono stati utilizzati per trovare l'osservabile cercato nei dati pervenuti dalle strade campione.

Contents

Ι	Introduzione	3
II	Il modello matematico	6
1	Optimal velocity model	6
2	Modello utilizzato 2.1 Modello Optimal velocity 2.2 Studio della congestione nei modelli	8 8 9
II	I Analisi dati	12
3	Osservazioni sperimentali 3.1 Strumenti di misura 3.2 Dati utilizzati e strumenti di studio 3.2.1 Metodo di calcolo dei dati necessari 3.2.2 Ricorso ai fundamental diagrams 3.3 Diagrammi fondamentali	12 12 16 16 16 17
4 I\	Risultati delle simulazioni 4.1 Implementazione del modello 4.2 Analisi dati 4.2 Onfronto con i dati sperimentali	21 21 22 27
V	Conclusioni	30

Part I Introduzione

Lo studio della transizione a stato congestionato nei sistemi di traffico non rappresenta un problema puramente accademico, ma possiede svariati risvolti socioeconomici, come già dimostrato nei lavori di Bazzani A., Giorgini B., Rambaldi S., Turchetti G., "ComplexCity: modeling urban mobility" o anche S. Rambaldi, A. Bazzani, "Idee per un sistema di e-governance per la mobilità autoveicolare". Nell'ambito dei diversi campi di progettazione, applicazione e sviluppo di Smart City, dall'uso del suolo al risparmio energetico, dal mercato delle abitazioni alla logistica delle merci, dalla protezione civile alla programmazione e controllo dei cosiddetti grandi eventi, che convogliano una folla di dimensioni equivalenti o comparabili al numero di abitanti - si pensi al carnevale di Venezia - è evidente che la mobilità rappresenti un tema chiave. Nello specifico, la mobilità umana è significativa per i piani urbanistici, per disegnare i sistemi di trasporto, per prevedere e contenere la propagazione di epidemie, ed è anche un problema strategico quando si deve far fronte a eventi catastrofici naturali come terremoti, uragani, tsunami o eventi sociali di elevata portanza come rivolte o grandi celebrazioni sportive, musicali o artistiche. In generale, la sfida è rispondere a domande come: quali sono gli itinerari preferiti dagli individui, se si possono predire quali saranno le aree a grande densità di traffico, quando è in arrivo una congestione automobilistica o uno stop and go, quali sono i percorsi più celeri e sicuri in caso di emergenze. La possibilità di poter governare la mobilità in un futuro prossimo, tramite un sistema di controllo in remoto, rappresenta una semplificazione della vita quotidiana, un risparmio in termini di tempo e soldi e una riduzione dell'inquinamento prodotto dalla mobilità di una città.

Il comportamento di un sistema complesso come il flusso automobilistico è caratterizzato da molti fattori che concorrono nell'evoluzione temporale del sistema stesso. Tali fattori sono ancora oggi in fase di studio; la transizione a stato congetionato può essere spiegata, in un primo approccio qualitativo, dal fatto che si hanno tempi di reazione finiti che destabilizzano la soluzione di equilibrio oltre ad un valore critico. Ad esempio, in presenza di una frenata e di una densità sufficientemente elevata, si ha la formazione di un'onda retrograda che si intensifica a mano a mano che percorre lo spazio. Inoltre si devono aggiungere anche fattori umani, tra i quali la presenza di un atteggiamento competitivo che può facilitare la formazione di congestione. Infatti, se un automobilista cerca di superare il veicolo che lo precede, si ha che, ad un certo istante t, una vettura sarà molto vicina a quella successiva (nel momento in cui ci si prepara al sorpasso); così facendo, aumenta la densità locale, facilitando pertanto la formazione di uno stato congestionato.



Figura 1.1: Beijing, China. Agosto 2010: una coda lunga circa 100 chilometri, durata 12 giorni, lungo la superstrada Beijing-Tibet.

Anche se questi fattori non sono ad oggi misurabili, è possibile studiare il comportamento del traffico osservando quantità facilmente calcolabili come la densità e il flusso. Per quanto possa essere intuitivo pensare che la formazione di una coda derivi da un aumento troppo elevato della densità, tale pensiero risulta non del tutto corretto, in quanto non è la densità in sé a innescare il processo di transizione a stato congestionato, bensì i tempi di reazione degli automobilisti.

Con questo studio ci riproponiamo di analizzare situazioni di transizione a stato congestionato e di individuare fattori che possano aiutare a predire la formazione di una situazione di traffico intermittente. Utilizzeremo dati provenienti da situazioni, reali o simulate, nelle quali si sono evitati fattori "bottleneck" (collo di bottiglia), che sono solo meccanismi secondari, non essenziali alla formazione di uno stato congestionato, come già dimostrato nel lavoro di Yuki Sugiyama et al, "Traffic jams without bottlenecks—experimental evidence for the physical mechanism of the formation of a jam". Le misurazioni stradali sono state eseguite su strade statali della regione Emilia-Romagna, che si ringrazia per la disponibilità e il supporto a tale progetto; in particolare i servizi viabilità, navigazione interna e portualità commerciale della regione Emilia-Romagna.



Figura 1.2: Grafico delle congestioni rilevate durante l'anno 2011. In ascissa le ore della giornata, in ordinata la frequenza delle congestioni, normalizzata a 1. I dati sono divisi tra giorni feriali e week-end (sabato e domenica).

Ai fini di studio abbiamo fatto ricorso a modelli matematici che semplificassero la complessità del sistema traffico, lasciandone però inalterate le proprietà fondamentali. Tra questi, i modelli di Newell 1961, o anche Bando, M., Hasebe, K., Nakayama, A., Shibata, A. and Sugiyama, Y. (1994) e infine Bando, et al, 1995.

Nella seconda parte verranno esposti vari esempi di modelli matematici che sono stati proposti nell'arco del tempo, evidenziando quello utilizzato nella seguente trattazione. Verranno mostrati alcuni passaggi matematici che giustificano le formule adottate.

Nel terzo capitolo saranno studiati i dati ottenuti sia dalle misurazioni su strada, sia dalle simulazioni al computer. La prima parte riguarderà lo studio e la graficazione del comportamento delle spire utilizzate, prestando particolare attenzione ai modelli matematici con i quali è stato possibile interpolare i dati. La seconda parte riguarderà le simulazioni effettuate, descrivendo il procedimento e le variabili adottate per l'implementazione dei modelli considerati; inoltre verranno mostrati grafici dai quali saranno avanzate ipotesi riguardanti la corretteza dei modelli interessati e verranno fornite possibili spiegazioni ai fenomeni di congestione.

Il capitolo quarto si focalizzerà prevalentemente sul confronto dei dati ottenuti, con particolare attenzione allo stato congestionato e alla transizione ad esso.

In ultimo, nella parte quinta si trarranno le conclusioni del lavoro svolto con la proposta di un osservabile atto a predire la congestione. Sebbene i risultati ottenuti non siano definitivi, rappresentano, tuttavia, un punto di partenza che si è dimostrato valido, dal quale proseguire con ulteriori misurazioni e simulazioni.

Part II Il modello matematico

Il sistema "traffico" non soggiage al principio di azione-reazione newtoniano: infatti i veicoli vengono influenzati principalmente da quelli precedenti e molto poco, o quasi nulla, da quelli che seguono. Questo comporta che non è possibile applicare le leggi classiche della meccanica, e bisogna ricorrere a modelli che violino tali leggi.

L'andamento del traffico come un fluido granulare è stato studiato tramite l'utilizzo di un modello composto dalla sovrapposizione di due modelli matematici: Microscopic car-following model e Optimal velocity model. L'utilizzo di entrambi è giustificato dal fatto che si presuppone che durante lo stato non congestionato le vetture seguano la propria velocità ottimale e interagiscano in maniera estremamente limitata o nulla con gli altri veicoli, mentre durante la congestione le interazioni tra gli automobilisti sono significative e, quindi, tendono ad allineare la loro velocità con quella del vicino. Entrambi considerano le singole auto come entità separate a differenza dei modelli macroscopici (come quelli proposti da Lighthill and Whitham 1955 e successivamente perfezionati da Payne 1971, Philips 1979) che, invece, analizzano il traffico come un fluido uno-dimensionale con densità variabile e velocità media. Nel modello da noi utilizzato il veicolo j è influenzato solamente dal veicolo che lo precede j+1, che viene chiamato veicolo guida (o Leading vehicle). Ciò comporta che le interazioni tra i veicoli avvengano solamente in una direzione, essendo essi influenzati soltanto dal veicolo che li precede.

1 Optimal velocity model

Nel 1961 Newell propose il modello di velocità ottimale che sarà quello a cui faremo riferimento per tutta la trattazione.

Si assuma che l'equazione del moto per il veicolo j può essere espressa da un'equazione differenziale con ritardo:

$$\frac{dx_j(t+\tau)}{dt} = v_{opt} \left(\Delta x_j\right)$$

dove $x_j(t)$ rappresenta la posizione del veicolo j al tempo t, τ è il tempo di ritardo, che rappresenta il tempo necessario affinché la velocità di un veicolo raggiunga la velocità ottimale $v(\Delta x_j(t))$ quando il flusso di traffico varia, $\Delta x_j(t)$ $(= x_{j+1}(t) - x_j(t))$ è la distanza che intercorre tra il veicolo j e il veicolo j+1, $v_{opt}(\Delta x_j)$ è la velocità ottimale. L'idea alla base di questo modello è che il guidatore aggiusti la velocità del proprio veicolo in base alla strada libera davanti a sé $\Delta x_j(t)$. Applicando lo sviluppo di Taylor al primo ordine in tau all'equazione precedente, si ottiene l'equazione differenziale che rappresenta in prima approssimazione dell'effetto del ritardo.

$$\frac{d^2 x_j}{dt^2} = \left(\frac{1}{\tau}\right) \left[\left(v_{opt}(\Delta x_j) \right) - \frac{d x_j(t)}{dt} \right]$$

L'inverso $1/\tau$ del tempo di ritardo rappresenta la sensibilità (β) del guidatore, ovvero quanto è reattivo ad un cambio di stato: più β assume un valore alto più il tempo di reazione sarà breve, viceversa un guidatore poco efficiente avrà un valore di β basso.

In generale, è richiesto che la funzione che descrive la velocità ottimale abbia le seguenti proprietà: sia una funzione monotona crescente e abbia un limite superiore finito, ovvero la velocità massima consentita dalle condizioni come limiti di velocità o limite tecnico del veicolo.

Bando e colleghi, nel 1995, suggerirono che la funzione della velocità ottimale sarebbe potuta essere espressa tramite la relazione

$$v_{opt}(\Delta x_j) = \frac{v_{max}}{2} \left[\tanh(\Delta x_j(t) - x_c) + \tanh(x_c) \right]$$

ove x_c è una costante che rappresenta la distanza di sicurezza.

Quando $v_{opt} \to \infty \Lambda x_c > 0$, si ha che $v(\infty) \approx v_{max}$, dove v_{max} rappresenta la velocità libera caratteristica della strada. Il modello è semplice e conveniente per una simulazione al computer e una analisi teorica: tuttavia, poiché tale modello non tiene conto della risposta di un automobilista alla velocità relativa tra la propria e quella del veicolo davanti, esso produce incidenti per collisioni con tempo di ritardo τ crescente. Per evitare tali collisioni, Treiber e colleghi nel 1999-2000 proposero l'intelligent driver model (IDM) nel quale compaiono le velocità relative. Tale modello fu preso in considerazione anche in lavori successivi come quelli di Gipps 1981, Krauss e colleghi 1996, Helbing 1997, Helbing e Tilch 1998 e Tomer e colleghi 2000. Successivamente il modello della velocità ottimale fu esteso da Nagatani nel 1999 per tenere in conto anche l'interazione di una vettura con il veicolo immediatamente successivo a quello davanti (next*nearest-neighbour interaction*). Se la strada libera $\Delta x_j + 1$ del veicolo successivo j+1 è maggiore di quella Δx_i del veicolo j, l'automobilista del veicolo j può deciere di procedere con velocità maggiore di quella ottimale $v_{opt}(\Delta x_i)$. Tale modello è rappresentato dall'equazione:

$$\frac{d^2 x_j(t)}{dt^2} = \left(\frac{1}{\tau}\right) \left\{ v\left(\Delta x_j(t)\right) + \gamma \left[v\left(\Delta x_{j+1}(t)\right) - v\left(\Delta x_j(t)\right)\right] - \frac{dx_j(t)}{dt} \right\}$$

Dove il parametro γ rappresenta la quantità di interazione del vicino successivo e $0 \leq \gamma \leq 1$. Il secondo termine sul lato destro è l'incremento della velocità desiderata tenuto conto del *next-nearest-neighbour model*.

Dalle equazioni si evince che si tratta di un sistema non newtoniano, tale per cui non vale il principio di azione-reazione: infatti il veicolo j adatta la propria reazione in base al comportamento del veicolo j+1 (presenza di "azione"), tuttavia il veicolo j+1 non viene influenzato dal moto del veicolo j-esimo (mancanza di "reazione"). Per tale motivo non è possibile studiare questi sistemi tramite la meccanica hamiltoniana classica. Essi, infatti, non sono in grado di riprodurre le transizioni di fase osservate.

2 Modello utilizzato

Per la situazione sperimentale in cui si sviluppa il nostro obiettivo, la questione delle collisioni non rappresenta un elemento importante; di conseguenza, si è utilizzato il modello *optimal velocity* per la simulazione al calcolatore, dove le situazioni di conflitto sono risolte escludendole dalle possibilità. Infatti, nel caso in cui il veicolo j si avvicinasse sotto la distanza minima di sicurezza (impostata a 6 metri) al veicolo j+1, esso si arresterebbe rapidamente evitando la collisione.

2.1 Modello Optimal velocity

Alla luce delle considerazioni precedenti, si è deciso di utilizare un modello più semplice e velocemente calcolabile rispetto a quello elaborato da Newel per la *optimal velocity*, che mantiene, tuttavia, tutte le caratteristiche necessarie a riprodurre il fenomeno studiato ed è compatibile con le osservazioni sperimentali. Si vuole, infatti, avere il minor numero possibile di parametri per la simulazione della transizione alla congestione.

Tale modello è rappresentato dall'equazione:

$$v_{opt} \left(\Delta x_j \right) = \begin{cases} v_{\infty} \left(1 - \left(\frac{d_0}{\Delta x_j} \right)^a \right)^m & \Delta x_j > d_0 \\ 0 & \Delta x_j < d_0 \end{cases}$$
(1)

dove d_0 rappresenta la dimensione efficace del veicolo, ovvero la dimensione della vettura più la distanza minima di sicurezza per evitare incidenti. La velocità ottimale dipende dagli esponenti a, m > 0, che potranno essere variati per uno studio parametrico del problema. La formula è ottenuta tramite una interpolazione dei dati ricavati durante l'anno. La figura 2.1 mostra come la disposizione dei punti nel grafico densità/velocità possano essere interpolati in buona approsimazione tramite l'equazione (1).



Figura 2.1 Grafico per la spira n°12. Asse X: densità v_{free} (auto/h). Asse Y: velocità (km/h). Distribuzione delle velocità in funzione della densità. L'interpolazione dei dati è stata realizzata tramite la formula (1)

2.2 Studio della congestione nei modelli

Possiamo riscalare le unità di misura del sistema tramite le relazioni:

$$x_j \to \frac{x_j}{d_0} \qquad v_j \to \frac{v_j}{v_\infty} \qquad t \to \frac{t_{v_\infty}}{d_0}$$

che porta ad avere $\boldsymbol{\beta}'=\beta d_0/v_\infty$ e

$$v'_{opt}(\Delta x_j) = \left(1 - \frac{1}{\Delta x_j^a}\right)^m \tag{2}$$

in cui gli unici parametri rilevanti sono $\beta^{'},\,a$ edm.

Introduciamo, ora, la velocità relativa $w_j=v_{j-1}-v_j$ e la distanza relativa $u_j=x_{j-1}-x_j,$ così da ottenere

$$\begin{cases} \dot{u} = w_{j} \\ \dot{w} = -\beta' \left\{ w_{j} - \left[v'_{opt}(u_{j-1}) - v'_{opt}(u_{j}) \right] \right\}$$
(3)

È immediato osservare che il sistema appena ottenuto ha una soluzione stabile per $u_j = L/(d_0N)$ e $w_j = 0 \quad \forall j$. A questo punto possiamo considerare il

problema della stabilità attorno al punto di equilibrio, introducendo la perturbazione

$$u_j = u_0 + \varepsilon e^{(i\lambda \frac{j}{N} - wt)} \qquad u_0 = \frac{L}{d_0 N}$$

con periodicità $\lambda = 2\pi k$. Linearizzando le due equazioni differenziali trovate sopra, si ottiene l'equazione degli autovalori

$$w^{2} = \beta' \left(w + ke^{\frac{-i\lambda}{N}} - 1 \right) \qquad k = \frac{dv_{opt}^{2}}{du}(u_{0})$$

Possiamo calcolare il valore di K applicando la definizione di v' data dalla (2)

$$k = m \left(1 - \frac{1}{u_0^a} \right)^{m-1} \frac{a}{u_0^{a+1}} \ge 0$$

A questo punto possiamo ottenere il valore di ω tenendo conto della periodicità e scomponendo l'esponenziale nella sua parte reale ed immaginaria

$$w = \frac{\beta'}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4k}{\beta'} \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{N} - 1\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \right)} \right)$$

Per semplicità di lettura e di calcolo, poniamo $\theta = 2\pi k/N$ e $A = 4k/\beta'$; la condizione di instabilità è data da $\Re(w) < 0$, che nel nostro caso può essere espressa come

$$\Re \sqrt{1-A+Ae^{i\theta}}>1$$

Possiamo calcolare la fase dell'argomento della radice quadrata come

$$\cos\varphi = \frac{1 - A(1 - \cos\theta)}{\sqrt{(1 - A)^2 + 2A(1 - A)\cos\theta + A^2}}$$

e usando l'equazione

$$\left(\Re\sqrt{1-A+Ae^{i\theta}}\right)^2 = \sqrt{(1-A)^2 + 2A(1-A)\cos\theta + A^2} \frac{\cos\varphi + 1}{2}$$

tramite alcune manipolazioni algebriche, la condizione di instabilità può essere espressa da

$$1 - A(1 - \cos \theta) + \sqrt{(1 - A)^2 + 2A(1 - A)\cos \theta + A^2} > 2$$

da cui otteniamo

$$(1-A)^2 + 2A(1-A)\cos\theta + A^2 > (1+A(1-\cos\theta))^2 = A(1+A)^2 - 2A(1+A)\cos\theta + A^2\cos^2\theta$$

La condizione finale diventa quindi

$$4A - 4A\cos\theta + A^2\cos^2\theta - A^2 = A(1 - \cos\theta)(4 - A(\cos\theta + 1)) < 0$$

che ci porta a

$$\cos\theta > \frac{4}{A} - 1 = \frac{\beta'}{k} - 1$$

A questo punto si è in grado di determinare per quali valori di β ' si ha l'instabilità o la stabilità del sistema:

• Se

$$\beta^{'} \ge 2k = 2\frac{dv_{opt}}{du}(u_0)$$

il sistema si trova in uno stato stabile;

• Se

$$\beta^{'} < 2k$$

ed N è sufficientemente grande, la disuguaglianza rimane

$$\cos\frac{2\pi k}{N} > \frac{\beta'}{k} - 1$$

e la lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi k/N$ è linearmente instabile.

Definiamo, infine, β_c come il valore critico di β (o β' nella scala naturale) sotto il quale il traffico inizia a congestionarsi; per le simulazioni numeriche compiute è stata utilizzata, come formula per il calcolo di β_c , la seguente uguaglianza, ricavabile sviluppando la derivata di v_{opt}

$$\beta_c = \left[2a\left(\frac{D_{car}}{\eta}\right)^{(a+1)}\right]\frac{v_0}{D_{car}}$$

dove η è l'inverso della densità di macchine sul circuito (calcolata come lo spazio medio a disposizione di un veicolo, ovvero LunghezzaCircuito/Numeroveicoli), D_{car} rappresenta le dimensioni del veicolo (supposti tutti uguali) e v_0 la velocità che si vorrebbe avere per tutti i veicoli.

Part III Analisi dati

Nelle seguenti analisi si studieranno i dati prelevati da strade statali nel tentativo di individuarvi un comportamento definito. In seguito, si analizzeranno i dati pervenuti dalla simulazione eseguita al computer tramite il programma appositamente progettato e si cercherà di individuare, se presente, una qualche legge o uno o più fattori che potranno tornare utili nell'identificazione del momento transitorio tra stabilità e congestione del sistema. Infine, si confronteranno i risultati ottenuti da strade reali con quelli pervenuti dalla simulazione e, nel caso ci fosse un qualche raccordo tra di essi, si tenterà di trovare, se possibile, la variabile, o le variabili, utili allo scopo di questo esperimento.

3 Osservazioni sperimentali

In questa sezione si analizzeranno i dati ricevuti dalle misurazioni fatte su strade statali in tutta la regione Emilia-Romagna e si osserveranno le transizioni a stato congestionato.

3.1 Strumenti di misura

Il rilevatore è formato da una spira induttiva, la quale rileva il passaggio di autovetture tramite la variazione di campo magnetico causata dal passaggio di oggetti metallici. La Spira magnetica, insieme al Condensatore posto nel rilevatore formano un oscillatore LC. La grandezza del Condensatore e l'induttività della Spira determinano la frequenza di risonanza del circuito. La spira viene posta sotto il manto stradale ed affinché la rilevazione sia ottimale, bisogna che la larghezza della spira sia pari o di poco inferiore a quella dei veicoli.

In figura 3.1 è mostrata un'immagine che illustra la messa in posa della strumentazione. Le linee presenti sul manto stradale indicano la posizione delle spire.



Figura 3.1 Messa in posa delle spire; le linee sulla strada indicano la po $sizione \ della \ strumentazione$

Le spire sono state posizionate sui tratti di strada con un carico di traffico abbastanza elevato. Infatti sono state poste lungo tutta l'Emilia-Romagna, sui tratti di strada provinciali più trafficati.

La posizione delle spire è mostrata in figura 3.2.



Figura 3.2: La posizione delle spire (quadrati neri) in tutta la regione Emilia-Romagna.

Nella graficazione dei dati che sarà effetuata nella parte III sezione 3, sono state utilizzate le spire n°122 e n°25, poichè rappresentano rispettivamente un ottimo esempio di stato congestionato e di flusso libero.

La spira n°122 si trova sulla via Emila Pavese/SP 10 tra San Nicolò e Piacenza (figura 3.3), mentre la n°25 in via Marco Emilio Lepido nei pressi di Parma (figura 3.4). Per una individuazione più precisa delle spire considerate per questo elaborato si rimanda alle due immagini sottostanti.



Figura 3.3: Mappa per la spira n°122. La posizione indicativa è evindenziata dal cerchio in rosso.



Figura 3.4: Mappa per la spira n°25. La posizione indicativa è evidenziata dal cerchio in rosso.

3.2 Dati utilizzati e strumenti di studio

3.2.1 Metodo di calcolo dei dati necessari

I dati pervenuti corrispondono ai tempi di passaggio e alle velocità delle singole vetture, misurati durante l'arco temporale di un anno (2011). Da questi dati è possibile ricavare gli intertempi $\Delta t = |t_i - t_{i+1}|$ e la distanza reciproca calcolata come $\Delta x = |t_i - t_{i+1}| v_{i+1}$. Ciò che verrà utilizzato nella trattazione sarà la media per ogni 100 macchine del flusso e della densità calcolati secondo le seguenti equazioni:

$$\Phi(t) = \frac{1}{<\Delta t>_{100}} \qquad \rho = \frac{1}{<\Delta x>_{100}}$$

Il flusso $\Phi(t)$ al tempo t è calcolato come il reciproco della media degli ultimi 100 intervalli di tempo osservati, la densità $\rho(t)$ al tempo t segue lo stesso procedimento ma si considerano le interdistanze tra i vari passaggi assumendo che ogni auto mantenga la stessa velocità fino a quando la vettura seguente non viene rilevata dalla spira.

3.2.2 Ricorso ai fundamental diagrams

Densità, flusso e velocità sono utili per avere un'idea generale e visiva del comportamento del sistema nel suo insieme. Infatti, osservando i *fundamental diagrams of traffic flow* si può capire se il sistema sia in equilibrio o stia attraversando la fase di congestione. Questo permette di selezionare direttamente le zone di dati di interesse per il nostro studio, velocizzando così il processo di analisi. I *fundamental diagrams of traffic flow* sono grafici che forniscono una relazione tra il flusso (misurato in veicoli/ora) e la densità del traffico (misurato in veicoli/Km). Un modello macroscopico di traffico che coinvolga il flusso, la densità e la velocità del traffico costituisce le basi di un diagramma fondamentale. Questi grafici possono essere utilizzati per predire e osservare la capacità di un sistema stradale, o il suo comportamento al variare del flusso in entrata, o i limiti di velocità. Il funzionamento basilare dei *fundamental diagrams* si basa su alcuni punti:

- Esiste una connessione tra la densità del traffico e la velocità dei veicoli: più autovetture sono presenti sulla strada, più lentamente si muoveranno.
- Al raggiungimento di una densità critica e della sua corrispondente velocità critica lo stato del flusso cambia da stabile a instabile.
- Per prevenire la congestione e mantenere il flusso stabile, il numero di veicoli in entrata deve essere più piccolo o al più eguagliare quello in uscita.
- Se anche pochi veicoli entrano in regime di flusso instabile allora l'intero sistema si avvia cerso il regime instabile.

Come già spiegato poc'anzi, i fundamental diagrams rappresentano lo strumento primario per la rappresentazione grafica delle informazioni nello studio del flusso del traffico. Essi consistono in tre grafici differenti: Flusso-Densità, Velocità-Flusso, Velocità-Densità. I grafici hanno dimensione 2 e sono tutti correlati tramite l'equazione $\phi = \rho * v$. Tramite i diagrammi fondamentali si possono studiare le relazioni che intercorrono tra la velocità, la densità e il flusso del traffico.

Per i nostri studi ci avvarremo di due grafici fondamentali: Flusso-Densità e Velocità-Densità. Va specificato che la densità riportata nei grafici non è puramente autovetture/km ma viene moltiplicata per la free speed (velocità libera, calcolata come l'85 percentile) ovvero la velocità in assenza di traffico: si ottiene, così, una quantità direttamente confrontabile con il flusso. Si ha infatti:

$$\rho' = \rho * v_{free} = \frac{veicoli}{km} \frac{km}{h} = \frac{veicoli}{h} = \Phi$$
(4)

3.3 Diagrammi fondamentali

Di seguito vengono mostrate due coppie di grafici che bene riassumono i due casi in cui si può trovare il traffico: stato libero e stato congestionato. I dati rappresentati sono stati presi da due spire differenti in due giorni differenti. La prima coppia è riferita alla spira n°25, mentre la seconda mostra i dati provenienti dalla spira n°122. Tali misurazioni sono state prese ad esempio di comportamenti in stato non congestionato (spira n°25) e congestionato (spira n°122). I dati illustrati sono misure prelevate durante lo scorrere del tempo, pertanto i punti dei grafici seguono un ordine temporale e non rappresentano un distribuzione a tempo fissato. Si ricorda che la densità usata è ρ' data dalla (4). Nei grafici illustrati poco più avanti si sono utilizzatti due modelli per l'interpolazione dei dati:

- diagrammi densità-flusso: $a * (1 \frac{\rho'}{\varphi})^m$, con *a* ed *m* costanti di interpolazione e φ rappresenta il flusso massimo rispetto a ρ' ;
- diagrammi densità-velocità: $v_{\infty}(1-\frac{\rho'}{\varphi})^m$ dove valgono le stesse considerazioni fatte prima per $m \in \varphi$. v_{∞} rappresenta la velocità massima della strada.

L'ordine con cui sono riportati i foundamental diagrams è il seguente:

- densità-flusso spira n°25, figura 3.5
- densità-velocità spira n°25, figura 3.6
- densità-flusso spira n°122, figura 3.7
- densità-velocità spira n°122, figura 3.8



Figura 3.5: Spira n°25, grafico $\rho'(auto/ora) - \phi(auto/ora)$. L'andamento è abbastanza lineare soprattutto nella prima parte. Modello interpolante 1.1 * $\left(1 - \frac{\rho'}{9500}\right)^{1.5}$



Figura 3.6: Spira n°25, grafico $\rho'(auto/ora) \cdot v(km/h)$. La curva di interpolazione indica un andamento lineare. Modello interpolante 73 * $\left(1 - \frac{\rho'}{9500}\right)^{1.5}$



Figura 3.7: Spira n°122, grafico $\rho'(auto/ora) - \phi(auto/ora)$. Si nota un ciclo di isteresi, segno di transizione di fase. Modello interpolante $1.27*\left(1-\frac{\rho'}{9000}\right)^{1.58}$



Figura 3.8: Spira n°122, grafico $\rho'(auto/ora)-v(km/h)$. Presente un leggero andamento a power-law. Modello interpolante $82 * \left(1 - \frac{\rho'}{9000}\right)^{1.58}$

L'osservazione diretta delle figure 3.5 e 3.6 mostra come per la spira n°25 il flusso si mantenga in un regime stabile e la velocità decresca linearmente all'aumentare della densità.

La spira n°122 (figure 3.7 e 3.8) evidenzia invece i segni di una transizione di fase verso lo stato congestionato; inoltre, bisogna fare una considerazione aggiuntiva: essa presenta nel grafico densità-flusso un andamento a ciclo di isterisi. Infatti, al raggiungimento della densità limite si ha un andamento asintotico, seguito successivamente da una inversione brusca dell'andamento del flusso, che ritorna, poi alla posizione di equilibro su un altro livello più basso. Il manifestarsi di un ciclo di isteresi è la prova che vi è una transizione di fase in atto: come dimostreremo di seguito, si sta assistendo alla sovrapposizione di due comportamenti distinti che caratterizzano l'uno l'andamento nello stato poco interagente, l'altro una situazione di congestione e quindi di forte interazione tra gli automobilisti.

4 Risultati delle simulazioni

La creazione di un modello è uno strumento utile, usato nel nostro caso per verificare che il comportamento del traffico dipenda effettivamente da due fattori: l'eterogeneità degli automobilisti e la coesistenza del modello *optimal velocity* e del modello *car following* a seconda della situazione (congestione o non). Di seguito verrano spiegati i metodi utilizzati per la simulazione e saranno mostrati i grafici relativi alle misure ottenute.

4.1 Implementazione del modello

Il modello è stato creato tramite l'elaborazione di un programma in linguaggio C++, che rappresenta un numero scelto di veicoli in un circuito chiuso circolare. La scelta di un circuito chiuso può sembrare inappropriata dato che le spire misurano segmenti aperti di strade, tuttavia la scelta è giustificata dal fatto che si preferisce studiare se e come si formi un regime congestionato anche senza la presenza di fattori "*bottle neck*" (collo di bottiglia) come ad esempio un tunnel o una rampa. Questo modello ha avuto già numerosi riscontri positivi come confermato anche in alcuni articoli dell'università di Tokyo sulle transizioni di fase a stato congestionato del traffico (2008 New J. Phys. 10 033001 ed 2013 New J. Phys. 15 103034).

Il programma calcola l'andamento delle autovetture per una durata di 500 secondi simulati, alla fine dei quali produce un file nel quale sono elencati gli intertempi e le rispettive occorrenze. Si è scelto un valore arbitrario per la durata della simulazione, ma che fosse sufficientemente elevato da permettere alle vetture di interagire. Il numero di autovetture utilizzato nelle simulazioni è pari a 50000, rimasto invariato durante tutto il periodo di studio, con velocità asintotica pari a 15 m/s; al parametro β si è scelto di attribuire il valore 2, moltiplicandolo successivamente per una variabile random centrata a 0.5 (in tal modo i β dei singoli automobilisti vengono creati casualmente all'interno dell'intervallo [1,3]). Ciò che si è scelto di variare a ogni ciclo è stata la lunghezza della strada, misurata in km, in ordine decrescente nell'intervallo [60, 400].

4.2 Analisi dati

Grazie ai dati ottenuti dalla simulazione è stato possibile verificare l'andamento degli intertempi in funzione della densità della strada. Di seguito sono riportati alcuni grafici che illustrano la distribuzione degli intertempi per diversi valori di lunghezza della strada L (fissi per ogni grafico), e di conseguenza di β_c , diversi. Riassiumiamo i dati con cui sono ottenuti i dati: 50000 auto con velocità asintotica di 15 m/sec, $\beta = 2$ con variabilità \pm 0.5 random, tempo di simulazione 30 sec. Usato l'*optimal velocity model* fino ad una velocità ottimale v_{opt} calcolata in base alla densità.

I grafici riportati, tutti con area normalizzata a 1, verranno esposti a coppie nelle quali il primo grafico a sinistra è in scala semi-logaritmica per evidenziare il comportamento esponenziale, mentre quello a destra è in scala log-log per mettere meglio in luce il comportamento a power-law. Il comportamento lineare in scala semi-log indica una distribuzione poissoniana della variabile considerata, ovvero l'assenza d'interazione tra gli automobilisti, i quali procederanno secondo il modello *optimal velocity*. D'altra parte, la presenza di un andamento lineare in scala log-log, significa che i veicoli stanno interagendo tra loro, e quindi seguiranno il modello *car following*, adattando la propria velocità a quella del veicolo antecedente.

Di seguito sono riportati alcuni grafici che mostrano, a diverse lunghezze (L) di strada considerate, lo sviluppo di uno stato congestionato a mano a mano che la densità stradale aumenta. I modelli interpolanti per il grafico sono i seguenti:

- in scala semi-log $a * e^{(b*\Delta t)}$, ovvero una forma esponenziale;
- in scala log-log $a * (\Delta t)^b$, ovvero una forma a potenza.

Le linee di interpolazione che saranno visualizzate nei grafici saranno solo quelle che hanno una correlazione non inferiore allo 0.98, ovvero solo quelle con una ottima approsimazione dei dati.



Figura 4.1: L = 400 km. Asse X: intertempi (sec); asse Y: distribuzione intertempi. Distanza media tra i veicoli 80m. $\beta_c = 0.03$ $v_{opt} = 13.9$ m/s. Modello interpolante esponenziale a = 0.126 e b = -0.17, correlazione 0.994



Figura 4.2: L = 200 km. Asse X: intertempi (sec); asse Y: distribuzione intertempi. Distanza media tra i veicoli 40m. $\beta_c = 0.11$ $v_{opt} = 12.75$ m/s. Modello interpolante esponenziale con a = 0.16 e b = -0.31, correlazione 0.983



Figura 4.3: L = 100 km. Asse X: intertempi (sec); asse Y: distribuzione intertempi. Distanza media tra i veicoli 20m. $\beta_c = 0.45$ $v_{opt} = 10.5$ m/s. Nessun modello interpolante.



Figura 4.4: L = 90 km. Asse X: intertempi (sec); asse Y: distribuzione intertempi. Distanza media tra i veicoli 18m. $\beta_c = 0.55$ $v_{opt} = 10.0$ m/s. Nessun modello interpolante.



Figura 4.5: L = 70 km. Asse X: intertempi (sec); asse Y: distribuzione intertempi. Distanza media tra i veicoli 14m. $\beta_c = 0.9 v_{opt} = 8.5$ m/s. Modello interpolante a potenza con a = 56 e b = -2.545, correlazione 0.990



Figura 4.6: L = 65 km. Asse X: intertempi (sec); asse Y: distribuzione intertempi. Distanza media tra i veicoli 13m. $\beta_c = 1$ $v_{opt} = 8.0$ m/s. Modello interpolante a potenza con a = 0.44 e b = -2.31, correlazione 0.994



Figura 4.7: L = 60 km. Asse X: intertempi (sec); asse Y: distribuzione intertempi. Distanza media tra i veicoli 12m. $\beta_c = 1.25 v_{opt} = 7.5$ m/s. Modello interpolante a potenza con a = 0.37 e b = -2.12, correlazione 0.992

Occorre fare una importante precisazione prima di passare allo studio dei dati appena ottenuti: affinché si avvii lo stato congestionato non è necessario che tutte le autovetture abbiano il loro parametro β sotto il valore critico β_c ; Infatti, più aumenta il numero di automobilisti che possiedono un valore di $\beta < \beta_c$, più si rafforza la congestione, ma essa ha inizio già quando alcune vetture risentono della condizione di criticità.

L'osservazione degli istogrammi mostra come in situazioni dove la densità è scarsa (figura 4.1: L = 400 km ed figura 4.2: L = 200 km) gli intertempi in scala semi-log hanno una buona corrispondenza con un fit lineare, mentre all'aumentare delle autovetture con $\beta < \beta_c$ la corrispondenza tra un fit lineare e i dati si sposta verso i grafici in scala log-log (figura 4.5: L = 70 km, figura 4.6: L = 65 km e figura 4.7: L = 60 km). I due grafici corrispondenti alle lunghezze 100 km (figura 4.3) e 90 km (figura 4.4) non riportano nessuna regressione lineare, il che indica la coesistenza pressoché paritaria dei due modelli interpretabile come stato transitorio.

I risultati ottenuti suggeriscono che i modelli presi in considerazione, in combinazione con automobilisti con bravure alla guida differenti, sembrano riprodurre coerentemente situazioni di congestione e di transizione tra uno stato libero ed uno congestionato. La spiegazione fornitaci dal modello è, quindi, che gli stati congestionati occorrono a causa di un diverso comportamento degli automobilisti.

Part IV Confronto con i dati sperimentali

I dati ottenuti dalle simulazioni e quelli ricevuti dalle spire non posso essere confrontati direttamente poichè, ovviamente, la simulazione introduce una serie di semplificazioni; La realtà del traffico è un fenomeno estremamente complesso che dipende da molteplici fattori, molti dei quali ancora non individuati. Quindi, per quanto un confronto quantitativo sia poco significativo, a livello qualitativo fornisce un buon quadro della situazione. Infatti, i risultati ottenuti mostrano che il modello utilizzato per la simulazione riproduce in buona approsimazione le transizioni a stato congestionato osservate sulle strade statali; questo porta a considerare come valida la modelizzazione del sistema traffico che utilizza l'optimal velocity model e il car-following model. Inoltre è stato confermato che le interpolazioni dei dati tramite leggi esponenziali (per le situazioni di free flow) e power-law (per gli stati congestionati) rispecchiano effettivamente due situazioni differenti della situazione del traffico: l'assenza o la presenza di congestione.

Si può verificare tale asserzione osservando i grafici riportati di seguito e la linea di interpolazione presenti in essi, che si presenta in una forma in accordo con le ipotesi introdotte per la simulazione.

I dati che sono stati misurati sulle strade provinciali coprono un arco temporale di un anno e sono stati presi durante due fasce orarie: dalle 7 alle 8 e dalle 18 alle 19. La fascia oraria pomeridiana in media ha presentato una congestione minore rispetto a quella mattutina, motivo per i quale veranno esposti solo dati relativi alla mattina in quanto più significativi.

Di seguito sono mostrati due grafici che rappresentano l'andamento della distribuzione degli intertempi. Il primo è relativo alle ore 6 e mezza della mattina, mentre il secondo grafica i dati relativi alle ore 7 e mezza della mattina.



Figura IV.1: Grafico spira n°122 alle ore 6:30. Modello interpolante esponenziale con a=0.65 e b=-0.103



Figura IV.2: Grafico spira n°122 ore 7:30. Modello interpolante $\left[\frac{1.3}{(\Delta t-2)^{2.15}}\right] * e^{-0.085*\Delta t}$

Il modello intertpolante di figura IV.1 è della forma $a * e^{b*\Delta t}$ con a e b costanti di interpolazione, ovvero un'esponenziale, che indica una distribuzione poissoniana delle posizioni dei veicoli: si è quindi in uno stato non congestionato.

Un discorso diverso invece va fatto per la figura IV.2: infatti il modello interpolante è dato da $\left[\frac{a}{(\Delta t+b)^c}\right] * e^{d*\Delta t}$ (a, b, c e d costanti di interpolazione) sul quale è bene soffermarsi; esso presenta un decadimento esponenziale verso le x positive molto grandi, ma compare un termine a potenza nella prima parte della interpolazione, e poichè si tratta di una situazione di lieve congestione è verificata l'ipotesi che un andamento a power-law rispecchi uno stato congestionato.

Part V Conclusioni

Poichè il modello ha fornito la chiave di lettura dei dati reali, si è provveduto ad osservare l'andamento del flusso e della sua standard deviation.

I dati graficati in figura 5.1 sono stati misurati durante l'arco di una giornata. Il grafico rappresenta l'andamento della densità, del flusso e della sua standard deviation durante lo scorrere del tempo.



Figura 5.1: Grafico per dati misurati durante l'arco di tempo di una giornata. Linea gialla: densità $(\rho * v_{free})[auto/h]$; linea rossa: flusso $(\phi)[auto/h]$; linea blu: deviazione standard del flusso $(\Delta \phi)[auto/h]$. Asse X: tempo (ore). Asse X: flusso (auto/h). Le linee azzurre e viola delimitano l'arco temporale in cui il flusso e la standard deviation del flusso rispettivamente, si distaccano dalla densità.

Nella figura 5.1 sono ben visibili le congestioni delle 8 e delle 18, dove la densità aumenta molto rapidamente. Per poter leggere meglio la figura si riporta un ingrandimento eseguito attorno alla congestione delle 8 (figura 5.2).



Figura 5.2: Linea gialla: densità $(\rho * v_{free})[auto/h]$; linea rossa: flusso $(\phi)[auto/h]$; linea blu: deviazione standard del flusso $(\Delta\phi)[auto/h]$. Asse X: tempo (ore). Asse X: flusso (auto/h). Le linee azzurre e viola delimitano l'arco temporale in cui il flusso e la standard deviation del flusso rispettivamente, si distaccano dalla densità.

Con un approccio qualitativo, tramite la sola osservazione del grafico di figura 5.2, si intuisce che la standard deviation del flusso può rappresentare una variabile in grado di predire la formazione di stati congestionati. Infatti, essa inverte il proprio andamento prima del flusso e prima di un innalzamento brusco della densità, corrispondente ad una situazione di traffico congestionato.

La spiegazione di tale fenomeno risiede nel fatto che le fluttuazioni sul flusso risentono del minore spazio tra i veicoli per cui il range di valori entro il quale possono variare si restringe, diminuendo il valore delle fluttuazioni. Dal punto di vista matematico ciò accade perché la transizione a stato congestionato è caratterizzata da una forte interazione tra gli automobilisti, che si contraddistingue per un cambio del tipo di distribuzione: da un andamento esponenziale, si passa ad uno a potenza; la power-law tende più velocemente a zero della potenza, di conseguenza si hanno valori più bassi per la standard deviation, ovvero fluttuazioni più piccole.

Il fatto che, nei casi studiati, la deviazione strandard si distacchi dall'andamento della densità prima del flusso stesso, permette di individuare le zone in cui si sta per creare una situazione di congestione con anticipo. Calcolando lo scostamento tra il flusso e la standard deviation e ricercando i punti in cui tale differenza risulta significativa, si può fare un paragone tra le situazioni in cui si è prevista la congestione e quelle in cui si è realmente verificata. I dati sui quali si sono eseguiti i calcoli riguardano la spira n°122 sulla via Emilia Pavese/SP 10 in direzione Castel San Giovanni, ottenuti da nove mesi di rilevazioni durante il 2011. Di seguito vengono illustrate le occorrenze delle situazioni di congestione durante l'intero periodo di misurazione, divise tra giorni lavorativi e week-end.



Figura 5.3: Frequenza delle situazioni di congestione durante l'intero periodo di test. In ascissa sono riportate le ore della giornata mentre in ordinata la frequenza normalizzata a 1. Dati provenienti dalla via Emilia-Pavese/SP 10 tra Piacenza e Castel San Giovanni, in direzione Castel San Giovanni.

Graficando le situazioni previste e i riscontri con i dati ottenuti dalla spira si ottiene la distribuzione mostrata in figura 5.4. Nel grafico vengono riportate le ore della giornata in ascissa e in ordinata le occorrenze delle situazioni di congestione, previste e non. Le situazioni di congestione sulle quali si è effettuato il test sono quelle mostrate nel grafico precedente.



Figura 5.4: Situazioni di traffico congestionato previste e mancate durante le ore della giornata. In ascissa sono riportate le ore della giornata mentre in ordinata le occorrenze. Nella fascia oraria mattutina la predizione ha ottenuto buoni risultati, mentre si sviluppano molti casi di mancata previsione durante la fascia pomeridiana.

Durante i test eseguiti sono sorti molti casi di falsi positivi, ovvero segnali teorici di previsione che non sono seguiti da un reale congestionamento del traffico entro i successivi 15 minuti. Nei 277 giorni considerati è stata contata soltanto una presenza di falso positivo per 15 minuti, ovvero non si sono verificate sovrapposizioni di falsi segnali in un range di 15 minuti.

Vengono riportate di seguito le occorrenze, disposte lungo le ore giornaliere e normalizzate a 1, dei falsi positivi ottenuti (figura 5.5).



Figura 5.5: Occorrenze (asse Y) dei falsi positivi durante le ore della giornata (asse X). Si notano due picchi: nella fascia attorno alle ore 9 e in quella delle 18.

Come si può osservare dal grafico, emergono relativamente molti falsi positivi attorno alle 18; ciò è dovuto al fatto che la situazione stradale è prossima alle condizione dei criticità, e se aumentasse il flusso del traffico, la strada diverrebbe congestionata, ma non sono presenti sufficienti veicoli per raggiungere la congestione. Anche attorno alle 9 si sono riscontrati molti falsi positivi, ma la spiegazione di questo risiede nella post-criticità del sistema, in quanto le congestioni attorno alle 8 sono generalemente garantite.

Realizzando la cumulativa delle previsioni andate a buon fine si ottiene la curva di figura 5.6.



Figura 5.6: Cumulativa delle previsioni effettuate. In ascissa: il tempo a partire dal segnale predittivo, entro il quale si verifica effettivamente la congestione. In ordinata: la frequenza di predizioni esatte, normalizzata a 1. La probabilità che una congestione si realizzi entro 5 minuti dal segnale è circa del 50%.

In conclusione, è stato trovato un osservabile in grado di predire la congestione del traffico: la deviazione standard del flusso. Nel 50% dei casi è stato possibile prevedere correttamente la congestione con un anticipo di 5 minuti. Per quanto questo non rappresenti un risultato definitivo, l'individuazione di un fattore con proprietà predittive della congestione è un buon punto di partenza dal quale sviluppare studi futuri. In alcuni momenti della giornata persistono molti falsi positivi che influenzano le misure effetuate. Per un risultato più preciso sono necessari più dati e un miglioramento degli strumenti di misurazione, nonché un maggior numero di simulazioni.

Siamo tuttavia fiduciosi che con un miglioramento delle tecniche di raccolta dati e dei modelli proposti si possa ottenere una predizione accurata della congestione con tempi apprezzabili.

References

- Bando, M., Hasebe, K., Nakayama, A., Shibata, A. and Sugiyama, Y. (1994) "Structure Stability of Congestion in Traffic Dynamics". Japanese Journal of Industrial and Applied Mathematics, 11, 203-223.
- [2] Bando, M., Hasebe, K., Nakanishi, K., Nakayama, A., Shibata, A. and Sugiyama, Y. (1995) "Phenomenological Study of Dynamical Model of Traffic Flow". Journal of Physics I France, 5, 1389-1399
- Bando, M., Hasebe, K., Nakayama, A., Shibata, A. and Sugiyama, Y. (1995)
 "Dynamical Model of Traffic Congestion and Numerical Simulation". Physical Review E, 51, 1035-1042.
- [4] Yuki Sugiyama et al 2008 New J. Phys. 10 033001 "Traffic jams without bottlenecks—experimental evidence for the physical mechanism of the formation of a jam"
- [5] Bazzani A., Giorgini B., Rambaldi S., Turchetti G., ComplexCity: modeling urban mobility, «ADVANCES IN COMPLEX SYSTEM», 2007, 10-2, pp. 255 - 270, o anche
- [6] S. Rambaldi, A. Bazzani, Idee per un sistema di e-governance per la mobilità autoveicolare, «TECHNOLOGY REVIEW», 2007, 6, pp. 18 - 19
- [7] Treiber, Martin; Hennecke, Ansgar; Helbing, Dirk (2000), "Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations", Physical Review E 62 (2): 1805–1824
- [8] Takashi Nagatani Division of Thermal Science, Department of Mechanical Engineering, Shizuoka University, Hamamatsu 432-8561, Japan
- [9] Guidetti Mattia, Di Cristina Marco, Andreotti Eleonora, Armando Bazzani, Sandro Rambaldi, Biophys14-forecasting traffic congestions - lab. fisica della città.