

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Corso di Laurea in Fisica

# Inflazione cosmologica $R^2$

Relatore:  
Prof. Roberto Casadio

Presentata da:  
Gabriele Franciolini

Sessione I  
Anno Accademico 2014/2015



”The path of discovery runs through series of inferences which are deeply veiled by the darkness of instinctive guessing”

---

- Erwin Schrödinger -

Un ringraziamento particolare al mio relatore Prof. Roberto Casadio per la disponibilità che ha sempre mostrato nei miei confronti e per i suoi preziosi consigli.

---



# Indice

<b>Abstract</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2 Cenni sul modello standard della cosmologia</b>	<b>9</b>
2.1 La metrica di Robertson-Walker . . . . .	9
2.2 La legge di Hubble . . . . .	10
2.3 Le equazioni di Friedmann . . . . .	12
2.4 I modelli di Friedmann . . . . .	14
2.5 Orizzonti cosmologici . . . . .	17
<b>3 La teoria dell'inflazione</b>	<b>19</b>
3.1 Il problema della piattezza . . . . .	19
3.2 Il problema dell'orizzonte cosmologico . . . . .	20
3.3 Il modello dell'inflazione . . . . .	22
3.4 L'inflazione generata da un campo scalare . . . . .	25
3.5 Approssimazione <i>slow-roll</i> . . . . .	29
3.6 Il modello della "vecchia inflazione" . . . . .	30
3.7 Numero di <i>e-folding</i> . . . . .	32
<b>4 Inflazione <math>R^2</math></b>	<b>37</b>
4.1 Teorie della gravità $f(R)$ e limite di basse energie . . . . .	37
4.2 Trasformazioni conformi e scelta del <i>frame</i> . . . . .	40
4.3 Inflazione $R^2$ nel frame di Jordan . . . . .	44
4.4 Inflazione $R^2$ nel frame di Einstein . . . . .	47
<b>5 Conclusione</b>	<b>53</b>



# Elenco delle figure

1.1	Legge di Hubble . . . . .	3
1.2	Immagine della radiazione cosmica di fondo . . . . .	5
1.3	Inflazione e Modelli di Friedmann classici a confronto . . . . .	6
2.1	Spazi curvi . . . . .	11
3.1	Orizzonte cosmologico durante l'inflazione . . . . .	23
3.2	Evoluzione dell'orizzonte cosmologico comovente . . . . .	24
3.3	Andamento del parametro di densità durante l'inflazione. . . . .	25
3.4	Potenziale $V(\phi)$ per la " <i>vecchia inflazione</i> " . . . . .	31
4.1	Potenziale $V(\phi)$ per l'inflazione $R^2$ nel frame di Einstein . . . . .	48
4.2	Andamento del fattore di scala nel frame di Einstein . . . . .	50
5.1	Dati sperimentali per $r$ , $n_{\mathcal{R}}$ Planck 2015 . . . . .	57
5.2	Dati sperimentali Planck 2015, confronto predizioni-modelli inflazione . .	57



# Abstract

Lo scopo di questa tesi è illustrare il paradigma dell'inflazione cosmologica descrivendo in particolare la teoria dell'inflazione  $R^2$ .

In una prima sezione si fa riferimento al contesto della relatività generale per descrivere l'universo su larga scala. Vengono prese in esame le ipotesi utilizzate per ottenere il modello standard della cosmologia e le principali proprietà che da esso possono essere ricavate. Si focalizza quindi l'analisi sulla descrizione dell'universo primordiale da cui traggono origine le ipotesi dell'esistenza dell'epoca inflazionaria esponendo, in particolare, come questa teoria riesca a risolvere i problemi della piattezza e dell'orizzonte cosmologico. Viene poi descritto come la fase di espansione esponenziale richiesta da queste ipotesi possa essere generata dalla presenza di un campo scalare  $\phi$  specifico. Particolare risalto è dato alla descrizione dell'approssimazione di "slow-roll" ed ai vincoli sul numero di "e-folding".

Una seconda sezione mostra l'applicazione dell'analisi generale esposta in precedenza al modello di inflazione di Starobinsky. A tal fine sono descritte le caratteristiche delle teorie della gravità  $f(R)$  con particolare attenzione alle trasformazioni conformi e scelta del frame. Attraverso l'esposizione delle equazioni di campo cosmologiche nella teoria della gravità  $R^2$  si mostra come il processo di espansione inflazionaria dell'universo nelle sue fasi iniziali possa essere descritto da un comportamento non standard della gravità ad alte energie. Sono riportati i risultati principali ottenuti con questa teoria nel frame di Jordan e in quello di Einstein.

La conclusione descrive in sintesi lo stato attuale delle osservazioni sperimentali e come queste abbiano un legame stretto con la teoria delle perturbazioni cosmologiche. In particolare, presentando i risultati ottenuti nel contesto dell'inflazione  $R^2$  ed esponendo gli ultimi dati raccolti dall'esperimento Planck, si analizza come il modello sia in accordo con i dati sperimentali attualmente disponibili.



# Capitolo 1

## Introduzione

La cosmologia è una branca della fisica che studia l'universo con l'intento di spiegare la sua formazione e di descriverne l'evoluzione. Le teorie comprese in essa non si distinguono da altri ambiti di studio della fisica per quanto riguarda il loro essere basate sulle osservazioni sperimentali. Infatti l'obiettivo primario di ogni fisico è quello di ideare una teoria matematica che spieghi bene i dati sperimentali provenienti dalle osservazioni di un dato fenomeno e, successivamente, è quello di riuscire a trarne delle predizioni che possano essere verificate. Sono molti i casi noti in cui la teoria matematica ha indirizzato l'attenzione dei ricercatori verso nuovi fenomeni non ancora osservati. Un fatto rimane però certo: il test finale di una teoria non è nient'altro che la sua consistenza con la natura osservata attraverso gli esperimenti. La cosa particolare della cosmologia moderna è il fatto che le predizioni sono rivolte anche al passato. Oltre all'essere rivolta all'analisi ed alla modellizzazione di ciò che ci circonda, questa disciplina studia come ha avuto origine la struttura stessa del nostro universo ed i suoi costituenti fondamentali.

Lo studio della cosmologia, come si è detto, si basa sulle osservazioni sperimentali che principalmente si possono eseguire analizzando con metodi più o meno sofisticati ciò che circonda il nostro pianeta. Questo tipo di osservazioni ha una storia antichissima che parte fin dalle prime civiltà che hanno popolato la terra. Se si considera in particolare la cosmologia moderna, ciò che ha veramente dato un nuovo impulso allo sviluppo di questa materia è la formulazione della "Teoria della Relatività Generale". Pubblicata in maniera definitiva da Albert Einstein nel 1916, questa ha gettato le fondamenta per la maggior parte degli studi successivi in ambito cosmologico.

Il fisico tedesco, per iniziare il percorso che lo ha portato alla formulazione della nuova teoria della gravità, partì dalla teoria della Relatività Ristretta, in cui si era posto l'obiettivo di descrivere la fisica attraverso leggi covarianti in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Successivamente cercò di trovare una generalizzazione della teoria in modo tale da comprendere nella trattazione anche i sistemi di riferimento non inerziali. Così, attraverso l'intuizione del principio di equivalenza, riuscì a formulare una teoria che descrive la gravitazione in maniera più accurata di quanto fosse mai stato fatto in precedenza. I suoi successi non eliminano la possibilità che la teoria della Relatività Generale debba essere modificata in futuro in modo da poter allargare la gamma di fenomeni che descrive. Infatti restano ancora da risolvere i problemi di cui soffre soprattutto per quanto riguarda la sua consistenza con la meccanica quantistica e le altre interazioni fondamentali. Uno

dei più grandi risultati di questa teoria è la capacità di mettere in connessione la struttura geometrica dello spaziotempo con le sorgenti gravitazionali identificabili nella massa e nell'energia. Questo ha portato un approccio completamente innovativo allo studio della gravitazione in quanto, nella visione einsteiniana, la gravità non è più considerata come un'interazione che avviene all'interno dello spaziotempo, considerato classicamente euclideo, ma la si ipotizza essere un frutto delle proprietà stesse dello spaziotempo in generale curvo.

Nello studio della topologia dell'universo e delle sue caratteristiche è fondamentale la Relatività Generale come strumento per descrivere le interazioni gravitazionali. Si capisce semplicemente perché la gravità è l'interazione che domina a livello cosmologico: il primo motivo è dovuto al fatto che l'attrazione gravitazionale è una forza a lungo raggio, a differenza delle interazioni forti e deboli; il secondo motivo ha a che fare con l'impossibilità di costruire un oggetto la cui "carica" rispetto all'interazione gravitazionale è nulla. Se su certe scale gli oggetti carichi elettricamente sono osservati neutri, avendo un uguale contributo, in media, di cariche positive e negative, per la gravità questo non può accadere. Così appare chiaro che cercando di studiare l'universo su grande scala la forza fondamentale che si deve analizzare è la gravità.

Successivamente alla pubblicazione della teoria si sono quasi immediatamente trovate delle soluzioni dell'equazione di Einstein. Le equazioni di campo della Relatività Generale sono difficilmente risolvibili in maniera esatta essendo un sistema di dieci equazioni non lineari. Nonostante ciò si possono trovare soluzioni relativamente semplici per sistemi fisici dotati di particolari simmetrie. Ad esempio si può pensare alla metrica di Schwarzschild trovata pochi mesi dopo la pubblicazione della teoria di Einstein come soluzione dell'equazione di campo gravitazionale per una sorgente statica a simmetria sferica.

Nel caso delle teorie cosmologiche moderne è stato compiuto un passo fondamentale con la pubblicazione della metrica di "Robertson–Walker" tra gli anni 1922 e 1924 che descrive la soluzione dell'equazione di campo per un universo *omogeneo* ed *isotropo* su larga scala. L'assunzione delle proprietà precedenti per lo spaziotempo è stata fondamentale poiché è servita a ridurre i gradi di libertà dell'equazione in modo da trovare dei risultati in funzione di alcuni parametri. Come si osserverà in seguito, ciò che ha reso questi risultati importanti sono state le osservazioni sperimentali successive che hanno supportato con grandissima confidenza le ipotesi adottate.

La metrica FRWL <sup>A</sup> descrive la dipendenza delle dimensioni dell'universo rispetto al tempo attraverso il parametro di scala. Osservando i possibili andamenti di questo parametro si vede come siano possibili solo soluzioni per universi non statici: le soluzioni ammettono che le dimensioni caratteristiche dell'universo siano in espansione o in contrazione. Fino ai primi decenni del novecento le teorie cosmologiche si basavano sulla gravità descritta dalle equazioni di Newton e secondo le osservazioni del tempo il cosmo era considerato occupare uno stato stazionario. Per poter ammettere una soluzione statica Einstein aggiunse un fattore nella sua celebre equazione che compensasse l'attrazione gravitazionale. Questo termine venne chiamato costante cosmologica ma Einstein stesso lo definì come "*il suo più grande errore*".

<sup>A</sup>La metrica di "Robertson e Walker" è anche definita metrica di "Friedmann, Robertson, Walker, Lemaître" (FRWL) in onore ai ricercatori che hanno contribuito al suo studio.

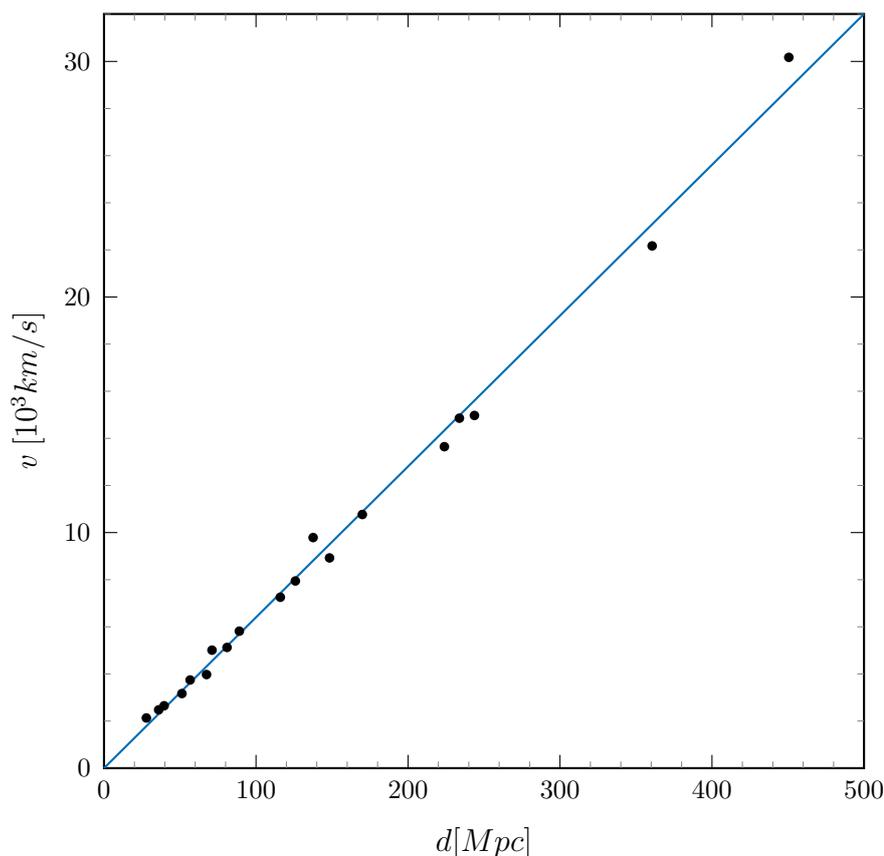


FIGURA 1.1: [6] Il grafico rappresenta la velocità di allontanamento delle galassie in funzione della loro distanza dalla terra. Facendo un fit dei dati disponibili negli '20 si ottiene in buona approssimazione una relazione lineare tra le due grandezze. Questo risultato è descritto dalla legge di Hubble.

Il disappunto fu causato dalle osservazioni fatte dall'astrofisico Edwin Hubble il quale per la prima volta ipotizzò su basi sperimentali la possibilità di un universo non statico. Quello che dimostrò tramite i dati raccolti, si veda la Figura 1.1, infatti, fu che le galassie più distanti da noi si allontanano con velocità maggiori rispetto a quelle più vicine secondo la relazione lineare  $v = Hd$ , dimostrando inequivocabilmente che l'universo è in espansione. Nel 1929 Hubble pubblicò la relazione distanza-redshift poi diventata nota come la "Legge di Hubble" che eliminò con chiarezza la possibilità di un universo statico. Nonostante tutto la costante cosmologica, anche definita in alcuni casi energia oscura, è argomento di ricerca attuale in quanto sembra essere fondamentale alla luce delle osservazioni sperimentali più moderne che dimostrano un'accelerazione dell'espansione osservata da Hubble<sup>B</sup>.

I fisici citati fin qui hanno posto le fondamenta per le teorie cosmologiche che in breve

---

<sup>B</sup> Nel 2011 il Premio Nobel per la fisica fu assegnato ai tre ricercatori: S.Perlmutter, B.P. Schmidt, A.G. Riess. Il loro grande contributo alla comunità scientifica fu la scoperta dell'espansione accelerata dell'universo attraverso l'osservazione delle supernovae distanti.

tempo furono pubblicate andando a formare nell'insieme quello che è chiamato il modello standard della cosmologia. Eliminata tramite gli studi di Hubble la teoria dell'universo stazionario, fu immediato orientare le speculazioni scientifiche a come fosse potuta essere stata l'evoluzione dell'universo fino al momento attuale. In questo modo, studiando i "modelli di Friedmann" si sono trovate delle soluzioni che descrivono l'evoluzione a ritroso nel tempo come una contrazione. Parallelamente alla contrazione si ha una diminuzione delle dimensioni dell'universo ed un aumento della temperatura. Così nacque la teoria del Big Bang che descrive l'inizio del cosmo come una singolarità spaziotemporale: uno stato in cui le dimensioni dell'intero universo erano infinitesime in cui la temperatura e la densità sono altissime. Nessun modello fisico rimane consistente in queste condizioni.

Il problema che fu subito associato a queste ipotesi fu la scarsa possibilità di ottenere osservazioni in grado di aiutare i ricercatori nell'affinare una teoria. In particolare si sono dovute considerare valide le teorie fisiche al momento a disposizione anche in situazioni estremamente particolari: infatti ancora oggi non sono state studiate teorie fisiche supportate da osservazioni sperimentali in grado di descrivere le interazioni fondamentali a livelli di energia superiori ad alcuni  $TeV$ .

Con il miglioramento delle capacità tecnologiche fu possibile eseguire esperimenti sempre più accurati in modo tale da aumentare la quantità di fenomeni osservabili. Un'osservazione cardine fu quella della radiazione cosmica di fondo (CMB). Osservata per la prima volta nel 1964 dai ricercatori Arno Penzias e Robert Wilson, fu una delle scoperte più importanti nell'ambito della cosmologia dell'ultimo secolo. Per questa scoperta i due ricercatori meritavano il Premio Nobel per la fisica nel 1978. Questa radiazione fu osservata quasi casualmente ed ha delle caratteristiche particolari. I dati ottenuti tramite l'analisi dello spettro della radiazione CMB approssimano in maniera molto accurata lo spettro di radiazione del corpo nero ad una temperatura di <sup>C</sup> [10] :

$$(2.7255 \pm 0.0006)^\circ K . \tag{1.1}$$

La scoperta di questa radiazione residua fu la prova fondamentale della validità dell'ipotesi del Big Bang in quanto dimostra l'esistenza di temperature altissime nel passato. Questa radiazione è stata rilasciata sulla superficie di ultimo scattering quando l'universo era ancora a temperature  $T \simeq 3000^\circ K$  . La radiazione poi si è raffreddata in seguito all'espansione l'universo secondo la legge del redshift cosmologico. Quello che stupisce di questo segnale è il fatto che sia isotropo con una buonissima approssimazione: si veda Figura 1.2. Se si osservano le disomogeneità si vede che sono dell'ordine di  $\Delta T/T = 10^{-5}$  [6]. Questo dato conferma definitivamente l'assunzione dell'isotropia dell'universo su grande scala che era stata utilizzata per ottenere la soluzione delle equazioni di Einstein. Grazie a questa proprietà si può facilmente dedurre anche la caratteristica dell'omogeneità. Infatti si deve considerare un'altra assunzione fondamentale: il "principio cosmologico". Il principio afferma che un osservatore posto sulla terra non è un osservatore privilegiato. Questa è una richiesta ragionevole se si considera che la terra non ha una posizione particolare all'interno del sistema solare o all'interno della galassia. Se le osservazioni su

---

<sup>C</sup>Il dato è presentato aggiornato alle ultime osservazioni sperimentali frutto di oltre 50 anni di miglioramenti rispetto alle osservazioni ottenute negli anni immediatamente successivi alla scoperta.

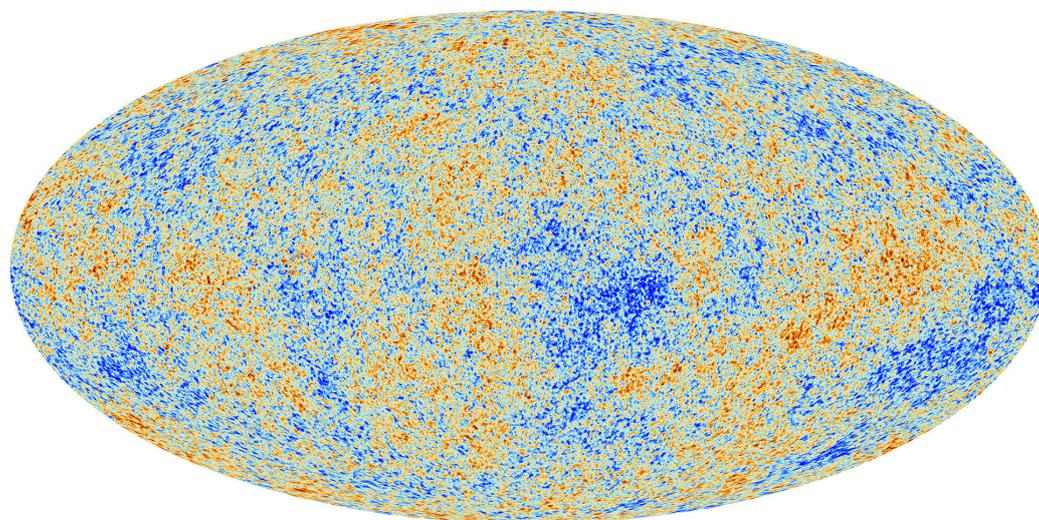


FIGURA 1.2: Immagine della radiazione cosmica di fondo (CMB) osservata dall'esperimento "Planck" [1]. Le differenze di colore rappresentano variazioni della temperatura dell'ordine di  $10^{-5}$ .

grande scala fossero fatte da un altro punto rispetto a quello fisso sulla terra si otterrebbero gli stessi risultati. Si dimostra che l'isotropia e ed il principio cosmologico implicano l'omogeneità su grande scala. In questo modo si giustificano fortemente i principi su cui si era basata la formulazione della metrica di "Robertson-Walker".

L'osservazione della radiazione cosmica di fondo e l'analisi delle sue caratteristiche non ha portato solo risposte ma ha anche posto dei quesiti che sono diventati il motivo della nascita della teoria dell'inflazione cosmologica. Infatti, come si descriverà approfonditamente nei capitoli successivi, la quasi perfetta isotropia dell'universo è difficile da spiegare secondo le teorie fino ad oggi studiate. In aggiunta a questo, le osservazioni riguardanti la densità dell'universo hanno rivelato come il valore sia estremamente vicino al valore critico. Questi due problemi sono risolti solamente tramite una scelta accuratissima delle condizioni iniziali al momento del Big Bang, cosa che è altamente improbabile.

Parallelamente a questi studi, negli anni '70, visti i successi delle teorie di gauge nel descrivere le interazioni fondamentali, molti fisici teorici intrapresero lo studio di una possibile teoria che unificasse le forze fondamentali della natura. Questa teoria prese il nome di GUT (Grand Unified Theory). Il modello ipotizza che, attraverso particolari processi, sia possibile la formazione di monopoli magnetici nelle prime fasi dell'universo. Il quesito del perché queste particelle non fossero mai state osservate ha scosso la comunità scientifica alla ricerca di una spiegazione.

Per tentare di risolvere questi problemi il brillante fisico americano Alan Guth, contemporaneamente allo scienziato sovietico Alexei Starobinsky, nel 1980 propose la teoria dell'inflazione la quale ipotizza una espansione esponenziale dell'universo nelle sue fasi

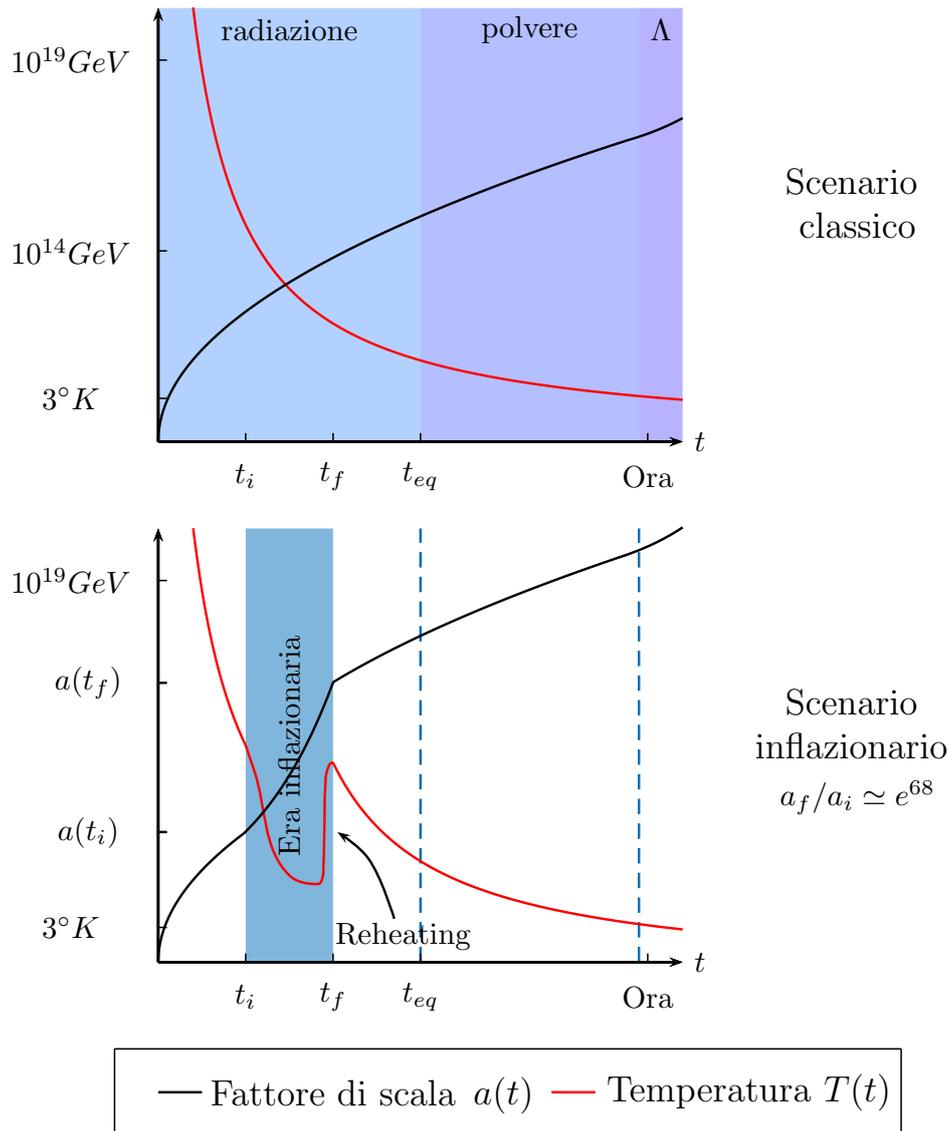


FIGURA 1.3: I grafici evidenziano in maniera indicativa le differenze tra il modello standard della cosmologia ed il modello modificato con l'introduzione dell'era inflazionaria. Sono presentati gli andamenti indicativi in funzione del tempo del fattore di scala e della temperatura. Si possono vedere con chiarezza i periodi dominati dai diversi contributi alla densità di energia dell'universo e dove si colloca in maniera indicativa il periodo di inflazione.

iniziali. L'ipotesi riesce a dare una soluzione di gran parte dei problemi non risolti nel modello standard della cosmologia come ad esempio il problema della piattezza, il problema dell'isotropia della radiazione cosmica di fondo ed il problema della mancanza di osservazione di monopoli magnetici. In generale, da condizioni iniziali non necessariamente particolari, il processo di espansione da una spiegazione di come si arrivi alle condizioni che manifestano una così accurata condizione di isotropia.

Pur cercando una soluzione dei problemi della teoria del Big Bang, il paradigma dell'inflazione rimane un'aggiunta alla teoria classica che non ne modifica i risultati più importanti, come ad esempio la spiegazione dell'emissione della radiazione cosmica di fondo e la descrizione della nucleosintesi. La violenta espansione ipotizzata nelle teorie inflazionistiche genera, di conseguenza, una forte diminuzione della densità di energia e della temperatura dell'universo. Per questo motivo è necessario che l'inflazione preveda un meccanismo che riporti la temperatura dell'universo a quella necessaria per far rimanere valida l'evoluzione classica nelle fasi successive. Questo processo è chiamato *reheating*: riscaldamento. Si veda la Figura 1.3.

L'inflazione può essere ottenuta attraverso l'ipotesi dell'esistenza di un campo scalare che domina le altre componenti di densità di energia. In questo modo si crea una pressione gravitazionale negativa che genera una forte espansione. Nel modello inizialmente proposto da Guth si ipotizza una situazione iniziale con il campo scalare che occupa uno stato metastabile in cui il valore del potenziale è non nullo. Questo modello fu poi abbandonato in quanto non riusciva a dare una spiegazione di come l'espansione si interrompesse. È chiaro che un modello di inflazione valido debba dare una descrizione della dinamica dell'espansione così come del processo che porta alla sua interruzione.

Come si descriverà in seguito sono possibili molti modelli che ipotizzano varie dinamiche del campo scalare responsabile dell'espansione. Un altro pregio della teoria dell'inflazione è quello di riuscire a spiegare la natura delle perturbazioni che hanno portato alla formazione delle strutture di piccola scala dell'universo come le galassie e i sistemi planetari. Infatti, se si considera valida l'ipotesi dell'inflazione, si ottiene che grazie all'espansione di vari ordini di grandezza dell'universo nelle sue fasi iniziali, le perturbazioni causate dalle fluttuazioni quantistiche del campo scalare sono diventate fluttuazioni su larga scala. Il processo di formazione delle strutture astrofisiche osservate oggi è il frutto dell'instabilità gravitazionale. La gravità infatti amplifica le disomogeneità portando ad un aumento delle differenze nella distribuzione della materia nell'universo. Proprio dall'osservazione degli effetti che la fase di inflazione ha avuto sulla formazione delle perturbazioni si riesce oggi ad ottenere dei dati sperimentali importanti per vincolare la teoria.

Un approccio del tutto diverso e innovativo rispetto a quello utilizzato da A.Guth è costituito dal tentativo di spostare la speculazione teorica dalle sorgenti gravitazionali alla struttura delle equazioni di Einstein. Infatti se si considera realisticamente che la descrizione dell'interazione gravitazionale ad alte energie sia inadeguata, si può cercare di modificare la teoria in modo da ammettere comportamenti diversi nelle condizioni di non applicabilità della teoria classica. Le teorie della gravità  $f(R)$  si basano proprio su queste assunzioni. Si descriverà nell'ultimo capitolo come da un caso particolare delle teorie della gravità  $f(R)$  nasca una promettente descrizione dell'inflazione proveniente dal comportamento peculiare della gravità generale ad alte energie.

Nella formulazione delle leggi che descrivono i fenomeni cosmologici si utilizzerà la convenzione tipicamente adottata nello studio della Relatività Generale in cui si utilizzano le unità di misura naturali. Queste unità di misura sono definite imponendo che le costanti fisiche fondamentali come la velocità della luce e la costante di Planck abbiano valore unitario:  $c = \hbar = 1$ . In più si specifica che verrà utilizzata la convenzione sulla

segnatura della metrica:  $(-, +, +, +)$ .

Per chiarificare la notazione utilizzata di seguito si espone brevemente il valore delle costanti fondamentali utilizzate. La costante  $G_N$  è la costante di gravitazione universale di Newton [16]:

$$G_N = 6,6738(8) \cdot 10^{-11} m^3 / (Kg \cdot s^2) .$$

La massa di Planck è definita nel modo seguente:

$$m_p = \sqrt{\hbar c / G_N} = G_N^{-1/2} \Big|_{c=\hbar=1} .$$

Per semplicità di notazione, a volte, si inserisce nelle equazioni la massa di Planck ridotta  $M_P = (\hbar c / 8\pi G_N)^{1/2}$  con valore [16]:

$$M_P = 2,43540(14) \cdot 10^{18} GeV / c^2 .$$

# Capitolo 2

## Cenni sul modello standard della cosmologia

In questo capitolo si affronterà brevemente il percorso che, dai principi e dalle osservazioni sperimentali esposti nell'introduzione, ha portato alla formulazione della teoria che oggi è chiamata modello standard della cosmologia.

### 2.1 La metrica di Robertson-Walker

Si è esposto nell'introduzione come le osservazioni sperimentali indichino la possibilità di assumere con buona approssimazione l'isotropia e l'omogeneità dello spazio su larga scala. Questi principi quindi costituiscono la base su cui poter costruire una teoria cosmologica. Allo stesso tempo si è evidenziato, attraverso le osservazioni di Hubble, come l'universo sia in espansione. Per questo motivo non si deve considerare l'ipotesi di spaziotempo omogeneo e isotropo, bensì un modello più realistico in cui la varietà spaziotemporale  $\mathcal{M}$  è composta da una parte temporale ed una parte spaziale con particolari proprietà di simmetria. Questa richiesta, nel contesto della Relatività Generale, equivale alla richiesta che lo spaziotempo possa essere decomposto in una foliazione formata da ipersuperfici spaziali:  $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma_t$ . Ogni sottovarietà  $\Sigma_t$  viene ipotizzata essere omogenea e isotropa. Per questo motivo la metrica che descrive le proprietà geometriche della varietà  $\mathcal{M}$  dovrà avere la forma descritta nella formula seguente:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\sigma^2 , \quad (2.1)$$

in cui  $d\sigma$  rappresenta lo spostamento infinitesimo sulla sottovarietà  $\Sigma_t$ :

$$d\sigma^2 = g_{ij}dx^i dx^j ; \quad (2.2)$$

si è inoltre definito  $a(t)$  come il fattore di scala. Le coordinate utilizzate  $\{t, x^i\}$  sono definite coordinate comoventi in quanto la metrica non ha il termine  $dt dx^i$  ed il coefficiente di  $dt^2$  è indipendente da  $x^i$ . Una varietà n-dimensionale con le proprietà di omogeneità e isotropia è detta avere le proprietà di massima simmetria. Per questo il tensore di Riemann si può scrivere nel modo seguente [5]:

$$R_{ijkl} = k(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) , \quad (2.3)$$

in cui la costante  $k$  rappresenta lo scalare di Ricci normalizzato:

$$k = \frac{R}{n(n-1)} . \quad (2.4)$$

Considerando  $n = 3$  si ottiene  $k = R/6$ . In questo modo il tensore di Ricci diventa:

$$R_{ij} = 2kg_{ij} . \quad (2.5)$$

Data l'assunzione che lo spazio abbia proprietà di massima simmetria sicuramente avrà simmetria sferica. La metrica spaziale può essere scritta quindi:

$$d\sigma^2 = \exp(2\beta(r)) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) , \quad (2.6)$$

con l'introduzione delle coordinate polari  $\{r, \theta, \phi\}$  ed un parametro  $\beta(r)$ . Andando a risolvere l'equazione (2.5) in funzione di  $\beta$  si ottiene la seguente metrica spaziale:

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) . \quad (2.7)$$

Si può quindi scrivere la metrica della varietà spaziotemporale  $\mathcal{M}$  sfruttando il risultato (2.7), ottenendo la metrica di Robertson-Walker:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right] . \quad (2.8)$$

Come prima cosa si osserva che il valore di  $k$  può essere ricondotto ai valori  $\{+1, 0, -1\}$  attraverso una ridefinizione della coordinata  $r$  e del fattore di scala  $a(t)$ <sup>A</sup>. Il parametro  $k$  inoltre risulta fondamentale per definire le caratteristiche geometriche dello spazio. Infatti si vede facilmente come la metrica spaziale  $g_{ij}$  descritta dalla (2.7) si riduce esattamente alla metrica euclidea per  $k = 0$ , ( $R = 0$ ). In questo caso l'ipersuperficie  $\Sigma_t$  ha curvatura nulla e si è in condizioni di spazio piatto euclideo. Si definisce spazio chiuso la situazione in cui si ha curvatura positiva con  $k = +1$  e spazio aperto il caso in cui si ha curvatura negativa con  $k = -1$ . Si veda la Figura 2.1 per una intuizione geometrica dei vari scenari.

## 2.2 La legge di Hubble

Considerando le proprietà geometriche dello spaziotempo sul larga scala evidenziate nella sezione precedente, si darà una giustificazione geometrica della legge di Hubble esposta qualitativamente nell'introduzione.

Si può definire la distanza propria tra due punti  $P$  e  $P_0$  nel modo seguente:

$$d_p = \int_0^r \frac{adr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = af(r) ; \quad (2.9)$$

<sup>A</sup> Se si ipotizza avere  $k = \pm|\varepsilon|$ , si possono ridefinire  $r$  ed  $a$  nel modo seguente:

$$r' = \sqrt{\varepsilon}r , \quad a' = a/\sqrt{\varepsilon} .$$

Così si trova che  $k' = \pm 1$ .

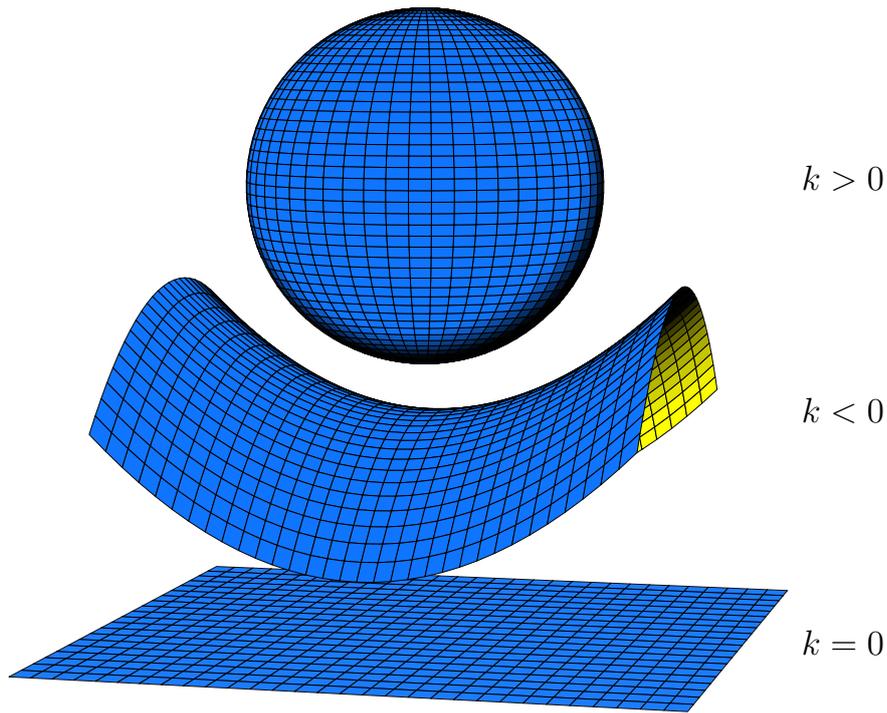


FIGURA 2.1: Un esempio di spazi curvi due dimensionali.

in cui si è definito  $P_0$  come origine delle coordinate. Si trova facilmente che  $f(r)$  diventa [5]:

$$f(r) = \begin{cases} \sin^{-1}(r) & k = +1 ; \\ r & k = 0 ; \\ \sinh^{-1}(r) & k = -1 . \end{cases} \quad (2.10)$$

Se i due punti  $P$  e  $P_0$  sono considerati in quiete rispetto al sistema comovente il valore delle loro coordinate  $\{r, \theta, \phi\}$  rimane fisso. La distanza propria  $d_p$  sarà determinata dal valore del parametro di scala  $a(t)$  e quindi sarà dipendente dall'evoluzione delle dimensioni dell'universo su larga scala. Così si ottiene la relazione che esprime l'evoluzione della distanza propria nel tempo:

$$d_p(t) = a(t)f(r) = \frac{a(t)}{a_0}d_p(t_0) . \quad (2.11)$$

Si trova semplicemente che la velocità radiale, dovuta all'evoluzione del parametro di scala, rispetto all'origine  $P_0$ , è data dalla relazione:

$$\frac{d_p}{dt} = v_r = \dot{a}f(r) = \frac{\dot{a}}{a}d_p . \quad (2.12)$$

Definita la costante di Hubble come:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} , \quad (2.13)$$

l'equazione (2.12) diventa la legge di Hubble.

La costante  $H(t)$  si definisce più correttamente parametro di Hubble in quanto non è una vera costante ma varia in funzione del tempo. L'incertezza sul suo valore è solitamente inserita attraverso l'introduzione del parametro  $h$ . Secondo le ultime osservazioni il suo valore attuale  $H_0$  è <sup>B</sup>:

$$H_0 = 100h \text{Km} \cdot \text{s}^{-1} \text{Mpc}^{-1} ; \quad (2.14)$$

il valore di  $h$  secondo i dati attualmente disponibili assume un valore [2]:

$$h = (0.678 \pm 0.009) . \quad (2.15)$$

Si vede che l'evoluzione dell'universo parametrizzata attraverso  $a(t)$  provoca un effettiva modifica delle distanze tra le galassie. Questo effetto è osservato nella realtà attraverso le applicazioni sperimentali della relazione distanza-luminosità che coinvolgono un complesso processo di osservazione delle distanze extragalattiche. Le dimensioni intrinseche delle strutture galattiche rimangono invariate essendo dovute alle forze gravitazionali interstellari che sono dominanti rispetto agli effetti su larga scala.

### 2.3 Le equazioni di Friedmann

La grande convenienza dell'aver ipotizzato dei principi su cui basare la semplificazione e l'identificazione di una metrica cosmologica è il fatto che ora si può risolvere l'equazione di Einstein avendo diminuito il numero di gradi di libertà. L'equazione di Einstein è la seguente:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu} . \quad (2.16)$$

La soluzione dell'equazione (2.16) collega l'andamento del fattore di scala al tensore energia-impulso  $T_{\mu\nu}$ , il quale rappresenta la presenza di densità di materia e di energia nell'universo. Sembra naturale conseguenza delle assunzioni già fatte considerare in prima approssimazione la materia presente nell'universo come un fluido perfetto comovente. La richiesta che sia comovente è necessaria per mantenere l'ipotesi di isotropia in quanto una velocità di deriva  $v^i$  di questo fluido comporterebbe la possibilità di effettuare misure sperimentali che individuassero una direzione privilegiata. Si è dimostrato che sperimentalmente su larga scala questo non viene osservato.

Il tensore energia-impulso che descrive un fluido perfetto ha la forma [20]:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} . \quad (2.17)$$

Poiché la quadrivelocità di un fluido comovente è:  $u_\mu = g_{\mu\nu}u^\nu = (-1, 0, 0, 0)$ ,  $T_{\mu\nu}$  diventa:

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & g_{ij}p & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} . \quad (2.18)$$

<sup>B</sup>Il pedice 0 indica la quantità calcolata al tempo  $t_0$ , il tempo presente.

La precedente definizione può essere scritta più semplicemente come:

$$T^\mu_\nu = \text{diag}[-\rho, p, p, p] , \quad (2.19)$$

in cui  $\rho$  è la densità di energia e  $p$  è la pressione del fluido misurate da un osservatore localmente inerziale. L'equazione di Einstein (2.16) viene semplificata notevolmente attraverso queste assunzioni. Dalle componenti  $\mu\nu=ij$  e  $\mu\nu=00$  si ottengono:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3p) ; \quad (2.20)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G_N}{3}\rho - \frac{k}{a^2} . \quad (2.21)$$

Queste sono le equazioni di Friedmann che descrivono l'andamento del parametro di scala cosmico in funzione della curvatura intrinseca dello spazio e della materia presente nell'universo.

Per trovare una soluzione dell'equazione che esprima la dinamica di  $a(t)$ , è necessario considerare una ulteriore proprietà del tensore energia-impulso che deriva direttamente dalla legge di continuità definita nel contesto della relatività ristretta:

$$\frac{\partial T^\mu_\nu}{\partial x^\mu} = 0 . \quad (2.22)$$

Per questo motivo si deve avere valida l'equazione

$$\nabla_\mu(T^\mu_\nu) = 0 \quad (2.23)$$

che rappresenta una generalizzazione della legge di conservazione dell'energia ed esprime la legge del moto per le sorgenti del campo gravitazionale. Dalla componente  $\nu=0$  si deriva la seguente formula:

$$\partial_0\rho + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 . \quad (2.24)$$

La precedente equazione esprime un ulteriore vincolo per il sistema.

Come passaggio successivo nella costruzione di un modello si deve ipotizzare la natura del fluido perfetto che approssima la materia presente nell'universo. Questo è possibile farlo trovando un'equazione di stato che metta in relazione i valori di densità di energia e pressione. L'equazione di stato per un fluido perfetto assume la forma generale:

$$p = \omega\rho . \quad (2.25)$$

Introducendo l'equazione di stato nella (2.24) si ottiene:

$$\rho a^{3(1+\omega)} = \text{const} . \quad (2.26)$$

L'equazione di Friedmann (2.21) può essere riscritta nel modo seguente:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2} . \quad (2.27)$$

L'ultimo passaggio è stata fatto definendo il parametro di densità  $\Omega = \rho/\rho_c$  e la densità critica:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G_N} = 3M_P^2 H^2 . \quad (2.28)$$

Il suo valore attuale è [17]:

$$\rho_{c,0} = 1.05375(13) \cdot 10^{-5} h^2 \text{ GeV}/c^2 \cdot \text{cm}^{-3} . \quad (2.29)$$

La densità di energia  $\rho_c$  è definita critica poiché il suo valore rappresenta un valore limite tra diversi scenari. Infatti il segno della costante di curvatura cambia se il rapporto  $\Omega$  è sottounitario o sovraunitario. Come si sottolineerà in seguito, il valore di  $\Omega$  così altamente vicino all'unità sarà uno dei problemi non risolti della teoria cosmologica che ha portato alla ipotesi del modello inflazionario.

Bisogna inoltre sottolineare il fatto che le equazioni di Friedmann possono essere ulteriormente modificate con l'aggiunta nell'equazione di Einstein di un termine chiamato costante cosmologica. Questo può essere considerato come un contributo aggiuntivo al tensore energia-impulso:

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi G_N} g_{\mu\nu} = (\tilde{\rho} + \tilde{p})u_\mu u_\nu + \tilde{p}g_{\mu\nu} , \quad (2.30)$$

con la ridefinizione:

$$\tilde{p} = p - \frac{\Lambda}{8\pi G_N} ; \quad \tilde{\rho} = \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G_N} . \quad (2.31)$$

Di fatto, in questa interpretazione, la costante cosmologica non modifica le equazioni di Friedmann ma aggiunge la possibilità di avere densità di energia del fluido perfetto con una equazione di stato:

$$p = -\rho , \quad \omega = -1 . \quad (2.32)$$

Un fluido con queste proprietà genera una pressione negativa producendo un effetto gravitazionale repulsivo che contribuisce ad accelerare l'espansione.

## 2.4 I modelli di Friedmann

I modelli di Friedmann descrivono i possibili andamenti del parametro  $a(t)$  in base ai vari valori di  $k$ ,  $\Omega$  e  $\omega$ . Come si è sottolineato in precedenza, il parametro  $k$  indica la curvatura intrinseca dello spaziotempo, mentre il valore di  $\omega$  fissa l'equazione di stato che descrive in modo approssimato il fluido che riempie l'universo.

Si possono fare varie distinzioni. Se si approssima il fluido a materia non relativistica (chiamata polvere),  $\omega$  assume il valore nullo. Questa proprietà deriva dal fatto che per particelle non relativistiche la pressione è essenzialmente nulla. Se il fluido lo si ipotizza essere composto principalmente da materia relativistica e radiazione si ottiene  $\omega = 1/3$ . Questo risultato si trova considerando il fatto che particelle relativistiche e radiazione si comportano analogamente per quanto riguarda l'equazione di stato. Quindi se si calcola il tensore energia-impulso per i fotoni, da questo si deriva in buona approssimazione il

comportamento delle particelle relativistiche. Secondo la teoria dell'elettromagnetismo si ha [12]:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F^{\mu\lambda} F^{\nu}_{\lambda} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \right) . \quad (2.33)$$

La traccia della precedente espressione è:

$$T^{\mu}_{\mu} = \frac{1}{4\pi} \left( F^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} - \frac{1}{4} 4 F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \right) = 0 . \quad (2.34)$$

Confrontando questo risultato con l'equazione (2.19), si ottiene un'equazione di stato con  $\omega = 1/3$ . Inoltre si è già trovato che se si considera il contributo del termine dovuto alla costante cosmologica, si ha un valore  $\omega = -1$ .

Nella risoluzione delle equazioni si dovrà tenere conto del contributo di ogni tipo di materia ed energia presente nell'universo:

$$\rho = \sum_i \rho_i . \quad (2.35)$$

Se si riscrive l'equazione (2.21) considerando la densità  $\rho$  in funzione del tempo (si veda l'equazione (2.26)) si ottiene [21]:

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \sim H_0^2 \left[ \Omega_{\Lambda} + \Omega_p \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_R \left( \frac{a_0}{a} \right)^4 \right] - \frac{k}{a^2} . \quad (2.36)$$

Si può osservare come per valori piccoli di  $a(t)$  la componente dovuta alla radiazione sia dominante. Analogamente per grandi valori di  $a(t)$  la componente dovuta alla costante cosmologica da il contributo prevalente.

E' interessante definire il tempo  $t_{eq}$  in cui si ha la condizione:

$$\rho_m = \rho_r . \quad (2.37)$$

Questo istante viene definito il momento in cui si ha l'uguaglianza dei contributi alla densità di energia dovuti alla presenza di *polvere* e di *radiazione*. La condizione precedente segna il passaggio da un universo dominato da radiazione ( $t < t_{eq}$ ) ad un universo dominato da polvere ( $t > t_{eq}$ ). Si stima il valore di redshift <sup>C</sup> a  $t = t_{eq}$  dell'ordine di [17]:

$$z_{eq} = 3360(70) . \quad (2.39)$$

Per quanto detto, nei periodi precedenti al tempo  $t_{eq}$ , si considererà con buona approssimazione la densità di energia dominata dal contributo di radiazione, quindi uno sviluppo definito con  $\omega = 1/3$ ; mentre per periodi successivi al tempo  $t_{eq}$  si utilizzeranno i risultati consistenti con un modello dell'universo dominato da materia non relativistica con  $\omega = 0$ .

<sup>C</sup>  $z$  è il redshift cosmologico:

$$z = \frac{a_0}{a} - 1 . \quad (2.38)$$

$z$  così definito rappresenta la variazione relativa del fattore di scala. Si può utilizzare il valore di  $z$  come parametro al posto del tempo indicando una quantità al valore di redshift cosmologico  $z^*$  come la quantità calcolata al tempo  $t^*$  in cui  $z^* = \frac{a_0}{a(t^*)} - 1$ .

Come sottolineato dall'equazione (2.36) per tempi sufficientemente grandi il contributo costituito dal termine dovuto alla costante cosmologica diventa dominante. Secondo le osservazioni attuali infatti si stima che approssimativamente il 70% della densità di energia attuale nell'universo sia dovuta alla presenza di quella che è chiamata *energia oscura*. La natura dell'energia oscura non è ancora del tutto chiara in quanto, se interpretata come densità di energia del vuoto, si ha un enorme disaccordo tra le osservazioni sperimentali e le predizioni teoriche che derivano dalle teorie delle particelle fondamentali.

Ci si soffermerà soprattutto sulle soluzioni che si ottengono con  $k = 0$ <sup>D</sup> lasciando il valore di  $\omega$  come parametro e trascurando il termine dovuto alla costante cosmologica. Si dimostra [6] che tutti i modelli di Friedmann con un valore di  $\omega$  compreso nell'intervallo  $(-1/3, 1)$  possiedono un punto in cui il valore del fattore di scala raggiunge 0 in un tempo finito nel passato. Questa proprietà implica il raggiungimento di una singolarità spaziotemporale e ha portato alla teoria del *Big Bang*. Per vedere in maniera più accurata le soluzioni che descrivono il modello di Friedmann si riscrive l'equazione (2.21) nel modo seguente grazie alla (2.26):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0^2 \left[ \Omega_{0\omega} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3\omega} + (1 - \Omega_{0\omega}) \right]. \quad (2.40)$$

Integrando l'equazione nel caso  $k = 0$  si ottiene la soluzione [6]:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3(1+\omega)}; \quad (2.41)$$

l'età dell'universo diventa (tempo trascorso dal momento in cui  $a(t) = 0$ ):

$$t_{0\omega} = \frac{2}{3(1+\omega)H_0}. \quad (2.42)$$

Dall'equazione (2.41) si ottiene l'andamento del parametro di Hubble:

$$H(t) = \frac{2}{3(1+\omega)t}. \quad (2.43)$$

Risultati analoghi possono essere trovati per i casi in cui  $k \neq 0$ .

E' importante comunque notare il fatto che l'approssimazione  $k = 0$  è una buona approssimazione fino a che nell'equazione (2.40) il termine  $(1 - \Omega_{0\omega})$  rimane trascurabile rispetto al termine precedente, cioè:

$$\frac{a_0}{a} \simeq z \gg |\Omega_{0\omega}^{-1} - 1|^{1/(1+3\omega)}. \quad (2.44)$$

Finché  $a$  è abbastanza piccolo da mantenere valida la condizione precedente si può approssimare l'equazione (2.40) togliendo il termine dovuto alla curvatura.

---

<sup>D</sup>Si dimostrerà successivamente la validità dell'approssimazione  $k \simeq 0$  nel caso in cui vengano utilizzati i risultati ottenuti in base a questa. Infatti si è già sottolineato come un valore di  $\Omega$  molto vicino all'unità implica un valore della costante di curvatura vicino all'essere nullo. Si veda il vincolo di approssimabilità nell'equazione (2.44).

Sarà utile successivamente avere un'espressione che descriva come il parametro di densità evolve nel tempo. Dall'equazione (2.26) si ottiene facilmente:

$$\rho_\omega(z) = \rho_{0\omega}(1+z)^{3(1+\omega)}. \quad (2.45)$$

Il parametro di densità in funzione del redshift è espresso nel modo seguente:

$$\Omega_\omega(z) = \frac{\rho_\omega(z)}{[3H(z)^2/8\pi G_N]}. \quad (2.46)$$

Questa relazione, con qualche passaggio algebrico, può essere scritta così:

$$\Omega_\omega^{-1}(z) - 1 = \frac{\Omega_{0\omega}^{-1} - 1}{(1+z)^{1+3\omega}}. \quad (2.47)$$

Si osserva che se il parametro di densità fosse uguale a 1, rimarrebbe invariato in qualsiasi istante di tempo precedente o successivo. Analogamente si vede che se fosse  $\Omega > 1$  o  $\Omega < 1$ , l'espansione dell'universo non ne modificherebbe questa proprietà. Questa è una semplice conseguenza del fatto che l'evoluzione dell'universo non può modificare il segno del parametro  $k$ .

## 2.5 Orizzonti cosmologici

Uno dei principi su cui si basano le teorie della relatività, sia speciale che generale, è il fatto che nessun segnale può essere trasmesso da un punto ad un altro dello spazio con velocità maggiori della velocità della luce. Per questo motivo si possono definire delle distanze cosmologiche caratteristiche che descrivono i punti che possono essere entrati in contatto causale tra di loro.

La struttura causale è descritta in maniera chiara dai grafici dei coni di luce nei vari punti dello spaziotempo. Si trova semplicemente che con l'osservatore posto nell'origine possono entrare in contatto causale solo gli eventi <sup>E</sup> situati all'interno del suo cono di luce passato. Poiché la forma dello spaziotempo è in evoluzione in funzione del parametro di scala, la formulazione delle distanze percorse dalla luce è non banale. Per questo motivo anche la struttura dei coni di luce avrà una natura complessa.

Il luogo dei punti che possono essere entrati in contatto causale con l'osservatore deve essere contenuto all'interno della sfera di raggio proprio  $R(t)$  definito come <sup>F</sup>:

$$R_c(t) = a(t) \int_0^t \frac{c}{a(t')} dt'. \quad (2.48)$$

La superficie sferica con questo raggio si definisce *orizzonte delle particelle*. Si osserva che l'integrale è convergente solo se l'andamento del fattore di scala è del tipo:

$$a(t) \simeq t^\beta, \quad 0 < \beta \in [0, 1). \quad (2.49)$$

<sup>E</sup>Per evento si considera un punto della varietà spaziotemporale di Minkowski  $\mathcal{M}$ . Per contatto causale si indica la possibilità di inviare un segnale di qualsiasi tipo.

<sup>F</sup>In questo caso si lascia specificato  $c$  per chiarezza, successivamente si continuerà ad utilizzare la notazione solita con  $c = 1$ .

Tenendo presente la formula (2.41), questa caratteristica si riflette su una condizione per  $\omega$ :  $\omega > -1/3$ . Si vede immediatamente che se è valida la condizione necessaria per l'esistenza del Big Bang:  $\omega = (-1/3, 1)$ , si ha un *orizzonte delle particelle* finito. Utilizzando l'equazione (2.40) si ottiene una formula per calcolare l'orizzonte delle particelle:

$$R_c = \frac{a(t)}{H_0 a_0} \int_0^{a(t)} \frac{da'}{a' [\Omega_{0\omega} (a_0/a')^{1+3\omega} + (1 - \Omega_{0\omega})]^{1/2}} . \quad (2.50)$$

Se si lavora nell'approssimazione (2.44), integrando la precedente espressione si ottiene:

$$R_c(t) \simeq 3 \frac{1 + \omega}{1 + 3\omega} t . \quad (2.51)$$

Si può considerare un secondo tipo di orizzonte: l'*orizzonte cosmologico*, o altrimenti definito come la *sfera di Hubble*. Questa sfera contiene tutti i punti che si trovano all'interno di una distanza  $R_H$  dall'osservatore. Il significato di questa distanza può essere trovato riconsiderando la legge di Hubble nella formula (2.12). La formula impone che debba esistere una distanza alla quale la velocità di recessione delle galassie diventa uguale alla velocità della luce. Si trova che il valore del raggio di Hubble vale semplicemente:

$$R_H = c \frac{a}{\dot{a}} = \frac{1}{H} \Big|_{c=1} . \quad (2.52)$$

L'orizzonte cosmologico rappresenta le dimensioni caratteristiche dell'universo osservabile al tempo considerato. È notevole il fatto che, consistentemente con la condizione  $\Omega \simeq 1$ , se si confrontano le equazioni (2.52), (2.51) alla luce di quanto trovato nella (2.42), si osserva che:

$$R_H = \frac{3}{2}(1 + \omega)t = \frac{1}{2}(1 + 3\omega)R_c \simeq R_c . \quad (2.53)$$

Si vede che è valida l'uguaglianza stretta nel caso con  $\omega = 1/3$ . Nelle fasi iniziali dell'universo si ha la fase dominata da radiazione. Perciò nella trattazione del problema dell'orizzonte cosmologico verrà utilizzato  $R_c$  in maniera analoga a  $R_H$ .

Un'ulteriore definizione di orizzonte è quella dell'*orizzonte degli eventi*. In analogia con la definizione per i buchi neri, l'orizzonte degli eventi è un corrispettivo dell'orizzonte delle particelle diretto verso il futuro. Questo infatti rappresenta la distanza  $R_E$  tale che i punti che si trovano a distanze maggiori dall'osservatore non potranno mai entrarci in contatto causale in futuro. Questa distanza è definita dallo spazio che riesce a viaggiare un fotone dal tempo considerato al tempo massimo raggiungibile ( $t_{max}$  nel caso del Big Crunch,  $\infty$  negli altri casi) :

$$R_E = a(t) \int_t^{t_{max}} \frac{c}{a(t')} dt' . \quad (2.54)$$

# Capitolo 3

## La teoria dell'inflazione

In questo capitolo si descriverà la teoria dell'inflazione partendo dall'esposizione della necessità di una teoria cosmologica alternativa. L'inflazione nasce dalla richiesta di un processo capace di provocare un'epoca di espansione accelerata nelle fasi iniziali dell'universo. Si esporrà in particolare come sia importante definire un meccanismo consistente con le osservazioni che porti all'interruzione di questa fase. Infine si analizzeranno i vincoli della teoria tra cui il numero di *e-folding*.

### 3.1 Il problema della piattezza

Le osservazioni sperimentali attuali indicano che il parametro di densità dell'universo è [17]:

$$\Omega_0 = 1.000(7) . \quad (3.1)$$

Come si è sottolineato in pagina 14, il valore di  $\Omega$  è fondamentale per la definizione della curvatura dello spaziotempo. Analizzando la forma delle equazioni di Friedmann si vede che anche l'evoluzione del parametro di scala è fortemente influenzata dal valore del parametro  $\Omega$ . Si è sottolineato che se il valore del parametro di densità fosse stato esattamente unitario sarebbe rimasto invariato nel tempo. Un valore leggermente diverso da 1 sarebbe affetto dall'evoluzione del parametro di scala nel modo caratteristico espresso nell'equazione (2.47). Sapendo una stima del suo valore attuale, si può vedere come è evoluto a partire dal Big Bang. Utilizzando come coordinata il redshift al posto del tempo si può vedere facilmente come  $\Omega_{\omega}^{-1}(z) - 1$  decresca all'aumentare del valore  $z$ . Per questo motivo, date le stime attuali, al tempo  $t = 1s$  dopo il Big Bang si ipotizza avesse un valore [13]:

$$|\Omega - 1| \lesssim 10^{-16} . \quad (3.2)$$

Negli istanti ancora precedenti avrebbe dovuto avere un valore ancora minore. Questa stima è stata calcolata considerando validi i modelli di Friedmann con  $k \simeq 0$ . L'approssimazione è valida perché la condizione (2.44) è soddisfatta.

Il fatto che questo valore sia così ben calibrato vicino al valore critico lascia dei dubbi sulla reale probabilità che sia frutto delle condizioni iniziali. In alternativa si potrebbe ipotizzare lo spaziotempo su larga scala sia esattamente euclideo con  $k = 0$  e  $\Omega = 1$ . È necessario avere una forte condizione teorica per supportare questo poiché

qualsiasi esperimento che dia un valore compatibile con  $\Omega = 1$  lascerà all'interno degli errori sperimentali la possibilità di avere diversi scenari:  $\Omega_0 < 1$ ,  $\Omega_0 > 1$ ,  $\Omega_0 = 1$ . Se si ritiene valida l'interpretazione einsteiniana della relatività secondo cui le sorgenti gravitazionali siano responsabili della curvatura della varietà spaziotemporale si deve avere una distribuzione di masse estremamente particolare per ottenere lo spazio euclideo. Secondo questo ragionamento quindi si ritiene necessario un processo che porti  $\Omega$  verso l'unità.

Si può anche evidenziare il fatto che la richiesta di avere la densità di energia totale dell'universo molto vicina alla densità critica è necessaria per poter giustificare l'età dell'universo osservata <sup>A</sup>. Se si ipotizza una densità lievemente superiore a quella critica nelle fasi iniziali, si avrà una curvatura positiva dello spaziotempo. Se si considera l'equazione (2.21) con  $k > 0$  si vede che il termine  $k/a^2$  diventerebbe velocemente dominante, portando ad una decelerazione dell'espansione. Si avrebbe così il fenomeno del Big Crunch <sup>B</sup>. La fase di contrazione avverrebbe in scale temporali molto ridotte rispetto all'età dell'universo attualmente stimata.

In maniera analoga potrebbe succedere se il valore della densità fosse leggermente più basso del valore critico. Il termine di curvatura diventerebbe presto dominante dando però in questo caso contributo negativo. L'evoluzione non verrebbe frenata dall'attrazione gravitazionale portando l'universo alle dimensioni attuali in un tempo brevissimo. Per questo motivo il problema della piattezza può essere visto come la domanda del come abbia fatto l'universo ad arrivare alle dimensioni attuali in un tempo così vasto. Ovviamente nessuna osservazione sperimentale o teoria fisica impedisce che una perfetta scelta delle condizioni iniziali sia avvenuta realmente in modo casuale. D'altro canto è necessario ammettere che una situazione di questo tipo sarebbe molto improbabile.

Si vedrà che la teoria dell'inflazione cosmologica prevede un valore della densità così vicino al valore critico come conseguenza dell'espansione dell'universo avvenuta nell'epoca inflazionaria.

## 3.2 Il problema dell'orizzonte cosmologico

Le osservazioni della radiazione cosmica di fondo evidenziano un grande grado di omogeneità della superficie di ultimo scattering. E' importante sottolineare il fatto che la radiazione CMB è stata liberata in un secondo momento rispetto al Big Bang, precisamente nel momento in cui la densità di energia si è abbassata al punto tale da permettere ai fotoni di propagarsi liberi.

Finché  $T \gtrsim 3000^\circ K$ , i fotoni termici hanno un'energia capace di ionizzare gli atomi che si formano, quindi essenzialmente gli elettroni possono essere considerati liberi. Poiché i fotoni interagiscono fortemente con gli elettroni liberi attraverso lo scattering Thompson, il libero cammino medio della radiazione è molto breve. L'universo diventa

<sup>A</sup>L'età dell'universo (tempo proprio trascorso dal Big Bang ai giorni nostri) secondo i modelli più recenti è stimata essere [1]:  $t_0 = (13.81 \pm 0,05)Gyr$ .

<sup>B</sup>L'evoluzione dell'universo che porta al Big Crunch è caratterizzata dal fatto di presentare un punto di massima espansione  $t_m$  oltre il quale l'universo comincia una contrazione. Questo porta ad una nuova singolarità in maniera simmetrica all'espansione precedente.

trasparente rispetto alla radiazione quando la temperatura cala in modo da permettere la ricombinazione, cioè la formazione stabile degli atomi. Il passaggio dell'universo dall'essere opaco rispetto alla radiazione all'essere quasi completamente trasparente è chiamato *decoupling*: disaccoppiamento radiazione-materia.

La posizione temporale in cui si può trovare la superficie di *last scattering*, secondo gli studi attuali, è ben descritta dalla funzione di visibilità  $\psi$ . Questa funzione  $\psi$  rappresenta la probabilità che un fotone osservato sia stato diffuso nell'intervallo di redshift  $dz$ . Si dimostra [13] che  $\psi$  è ben approssimata da una curva gaussiana con valore medio  $z_{ls} = 1100$  e una larghezza  $\Delta z = 80$ .

Per raggiungere il grado di omogeneità osservato è necessario per lo meno che la superficie di *last scattering* sia entrata interamente in contatto causale. Se si analizzano i seguenti risultati si trova che secondo il modello di Friedmann questo non è potuto accadere. Prendendo il valore del redshift medio per la superficie di ultimo scattering  $z_{ls} \simeq 1100$ , si trova che la distanza comovente che la radiazione cosmica di fondo ha percorso dal momento della sua emissione è:

$$r_{ls} = \int_{t_{ls}}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} . \quad (3.3)$$

Per il calcolo dell'integrale si considerano valide le seguenti approssimazioni:  $\Omega \simeq 1$ , come suggerito dalle osservazioni sperimentali ed essendo verificata la condizione (2.44);  $\omega = 0$ . Il secondo valore contraddistingue un universo dominato da polvere. Questa assunzione è valida poiché la superficie di *last scattering* si è presentata successivamente al momento di uguaglianza polvere-radiazione:  $z_{ls} < z_{eq}$ . In queste condizioni, dall'equazione (3.3) si trova la distanza comovente <sup>C</sup>:

$$r_{ls} \simeq \frac{1}{a(t_{ls})} \frac{(t_0 - t_{ls})}{(1 + z_{ls})} \simeq \frac{1}{a(t_{ls})} \frac{t_0}{z_{ls}} . \quad (3.4)$$

Il valore stimato per le dimensioni proprie dell'orizzonte delle particelle nel momento di *last scattering* è [6]:

$$R_c \Big|_{\omega=0, t=t_{ls}} \simeq 3t_{ls} = 3t_0 z_{ls}^{-3/2} ; \quad (3.5)$$

si sono utilizzate le equazioni (2.51) e (2.41). Se si confrontano le due lunghezze comoventi si osserva che:

$$r_c = \frac{3}{a(t_{ls})} t_0 z_{ls}^{-3/2} = 3r_{ls} z_{ls}^{-1/2} \simeq 10^{-1} r_{ls} . \quad (3.6)$$

Attraverso la relazione precedente si trova che:

$$r_c < r_{ls} . \quad (3.7)$$

Questo risultato afferma con chiarezza che la superficie di ultimo scattering non è potuta entrare interamente in contatto causale. È impossibile quindi che il raggiungimento dell'omogeneità sia frutto di un processo che porta all'equilibrio termico.

Secondo il precedente ragionamento, il fatto di osservare una isotropia quasi perfetta della CMB implica una forte correlazione tra zone non entrate in contatto causale tra loro.

<sup>C</sup>I calcoli sono analoghi a quelli effettuati per la risoluzione dell'integrale (2.50).

La condizione ipotizzata ancora una volta può essere raggiunta solamente tramite una perfetta scelta delle condizioni iniziali dell'universo. Questo viene definito il problema dell'orizzonte cosmologico.

Se l'orizzonte che descrive la connessione causale avesse avuto evoluzioni diverse da quelle ipotizzate dal modello di Friedmann, l'isotropia e l'omogeneità sulla superficie di *last scattering* potrebbero essere spiegate.

### 3.3 Il modello dell'inflazione

La teoria dell'inflazione nasce per trovare la soluzione dei problemi del modello standard della cosmologia. In generale prevede un'epoca in cui si ha una espansione accelerata dell'universo formalizzata nel modo seguente:

$$\ddot{a}(t) \Big|_{t \in [t_i, t_f]} > 0 . \quad (3.8)$$

Si vedrà come questa espansione accelerata possa risolvere i problemi della piattezza e dell'orizzonte. Successivamente si descriveranno i vincoli della teoria.

Per prima cosa si consideri il problema dell'orizzonte cosmologico. Per avere uno scenario altamente isotropico senza ricorrere a doversi affidare ad una scelta perfetta delle condizioni iniziali, basta dimostrare che la superficie di ultimo scattering sia entrata interamente in contatto causale per un tempo sufficientemente prolungato tale da permettere il raggiungimento di un buon livello di equilibrio termico. Si consideri una regione  $\Theta$  con dimensioni caratteristiche proprie rappresentate dalla scala di lunghezza  $L$ ; questa è in grado di divenire connessa causalmente se  $L$  è minore della distanza  $R_c$  definita come l'orizzonte delle particelle. Al posto di  $R_c$  si prenda la distanza di Hubble  $R_H$ , essendo queste paragonabili come descritto nell'equazione (2.53). La differenza tra le due a livello concettuale è il fatto che  $R_c$  tiene conto di quello che è successo nel passato dal momento in cui  $a(t) = 0$ , perciò una regione che è entrata nell'orizzonte delle particelle non ne può uscire successivamente. Invece la definizione dell'orizzonte di Hubble è una definizione dipendente dall'istante  $t$  che si sta considerando. Il suo valore in termini di distanza propria è definito dalla relazione (2.52). Il suo valore comovente è definito come:

$$r_H = \frac{R_H}{a(t)} = \frac{1}{Ha} = \frac{1}{\dot{a}} . \quad (3.9)$$

I vari modelli di Friedmann, trascurando il contributo dovuto alla costante cosmologica, hanno tutti la caratteristica di avere una espansione decelerata in funzione del tempo. Per questo motivo l'orizzonte cosmologico si espande con il passare del tempo. Si osserva che la regione  $\Theta$  di dimensioni comoventi  $l$  diventa causalmente connessa nel momento in cui l'orizzonte di Hubble comovente raggiunge le dimensioni:

$$r_H = l . \quad (3.10)$$

Se si immagina un processo attraverso il quale l'orizzonte cosmologico diminuisce le sue dimensioni fino al punto che la regione ormai causalmente connessa  $l$  che era al suo interno ne fuoriesca, si potrebbe risolvere il problema della isotropia della radiazione

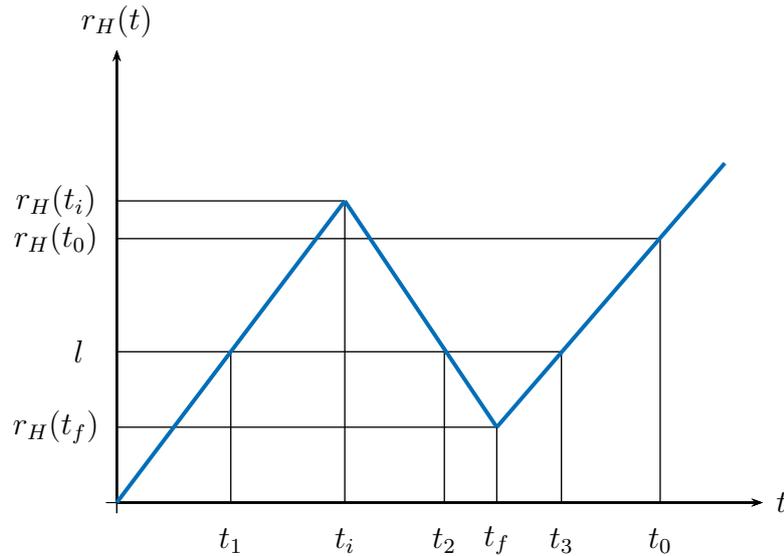


FIGURA 3.1: La figura rappresenta l'andamento indicativo dell'orizzonte cosmologico in funzione del tempo. In particolare descrive la possibilità che una certa scala di lunghezza  $l$  già entrata all'interno dell'orizzonte cosmologico possa successivamente uscirne e viceversa. La fase di espansione predetta dall'inflazione avviene nell'intervallo di tempo  $(t_i, t_f)$ .

CMB. Questa fase la si consideri attiva dal tempo  $t_i$  al tempo  $t_f$ . Nella Figura 3.1 si può vedere il grafico dell'ipotetica evoluzione dell'orizzonte cosmologico comovente in funzione del tempo. Durante il periodo compreso in  $[t_i, t_f]$ , gli oggetti che si trovano al di fuori di  $r_H$  sono già entrati in contatto causale tra loro ma non possono più comunicare poiché si trovano a distanze superiori del loro orizzonte cosmologico. In maniera ancora più precisa si può notare che la regione causalmente connessa è in realtà quella contenuta nella sfera di raggio  $r_H(t_i)$ . Finita la fase inflazionaria l'universo riprende la sua evoluzione descritta dai modelli di Friedmann con radiazione e polvere. In questo modo l'orizzonte cosmologico ricomincia a crescere facendo in modo che un osservatore nell'origine sia in grado nuovamente di osservare le regioni che ne erano uscite.

Un osservatore ignaro della fase di espansione accelerata osserverebbe la radiazione proveniente da zone apparentemente sconnesse tra loro presentare un alto grado di isotropia. Per questo motivo il problema dell'orizzonte cosmologico viene risolto tramite la fase di rapida espansione se si ha:

$$r_H(t_0) < r_H(t_i) . \quad (3.11)$$

Secondo questo modello la caratteristica importante della fase inflazionaria, avvenuta nell'intervallo  $[t_i, t_f]$ , è quella di implicare la diminuzione della distanza di Hubble comovente  $r_H$ . Per questo motivo la condizione di inflazione può anche essere scritta nel modo seguente:

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{Ha} < 0 , \quad (3.12)$$

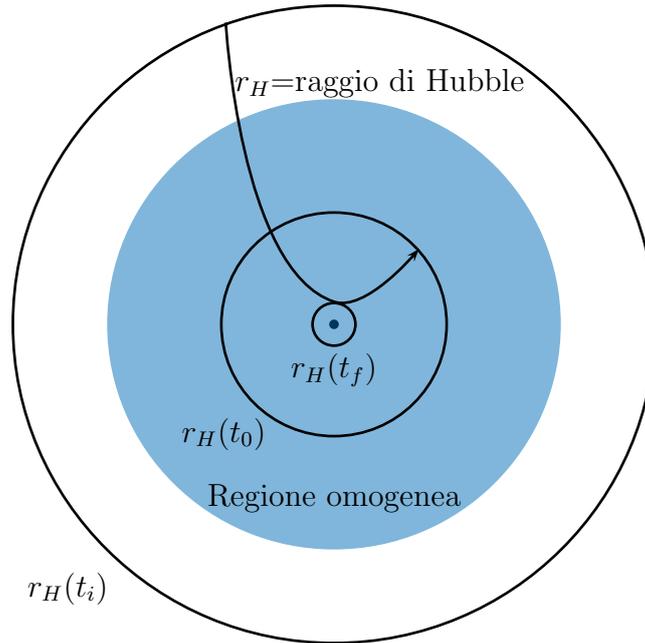


FIGURA 3.2: L'immagine rappresenta l'evoluzione dell'orizzonte cosmologico comoviente durante l'epoca dell'inflazione. In questo modo la regione omogenea che ha già raggiunto l'equilibrio termico, grazie all'espansione, raggiunge le dimensioni dell'universo osservabile rappresentate da  $r_H$ .

in maniera del tutto equivalente alla condizione (3.8). Nella Figura 3.2 si può vedere una rappresentazione diversa del processo inflazione che porta alla diminuzione dell'orizzonte cosmologico comoviente.

In questa situazione si può definire uno dei primi vincoli della teoria. Infatti per risolvere il problema dell'orizzonte cosmologico è necessario che la fase inflazionaria duri un tempo tale da permettere la riduzione dell'orizzonte di Hubble della quantità necessaria. Questo si traduce in un numero  $N$  chiamato numero di *e-folding* definito come:

$$N = \ln \frac{a(t_f)}{a(t_i)}. \quad (3.13)$$

In seguito si troveranno i valori stimati per  $N$ .

La teoria dell'inflazione cosmologica porta alla risoluzione anche del problema della piattezza. Se si considera la fase di espansione accelerata si vede in maniera chiara come questa comporti un avvicinamento del parametro di densità dell'universo verso un valore unitario. Infatti se si consideri l'equazione (2.27)

$$\Omega = 1 + \frac{k}{H^2 a^2}; \quad (3.14)$$

si nota subito che il valore del parametro  $\Omega$ , anche da un valore casuale dato da condizioni iniziali poco specifiche, può essere fatto tendere verso l'unità attraverso un particolare

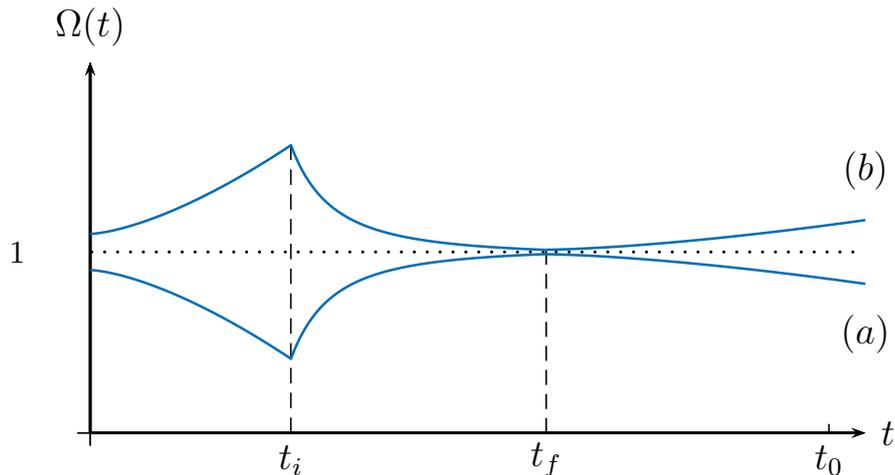


FIGURA 3.3: Nell'immagine è rappresentato l'andamento del parametro di densità dell'universo durante la fase di espansione. Con la curva (a) è rappresentato il caso in cui  $\Omega$  sia sottounitario (curvatura negativa), mentre con la curva (b) è rappresentato il caso sovraunitario (curvatura positiva).

processo che faccia diminuire il termine  $|k|/H^2 a^2$ . Ma questa condizione può essere scritta come:

$$\frac{d |k|}{dt H^2 a^2} < 0 . \quad (3.15)$$

Si vede immediatamente che questa condizione è automaticamente soddisfatta se è soddisfatta la condizione per l'inflazione (3.12). Si veda Figura 3.3.

È importante ricordare come il modello inflazionario fu proposto in un primo momento per ottenere la soluzione del problema dell'assenza di osservazioni di monopoli magnetici. Il problema consiste nel fatto che, secondo i modelli della teoria GUT dell'unificazione delle forze fondamentali, ad alte energie possa avvenire la produzione di particelle fondamentali come i monopoli magnetici. La natura ed il processo di produzione di queste particelle non verranno trattati in questa tesi. Comunque è importante sapere che nell'ambito della teoria delle interazioni fondamentali, una fase di espansione analoga a quella descritta finora avrebbe portato ad un abbassamento della probabilità di formazione di particelle di questo tipo dando una spiegazione teorica del perché non sono mai state osservate.

La nozione di espansione accelerata, per quanto sufficiente a dare una buona soluzione dei problemi principali del modello standard della cosmologia, lascia comunque una certa libertà sul come effettivamente poter costruire un modello che descriva il processo di espansione.

### 3.4 L'inflazione generata da un campo scalare

L'inflazione non può essere dovuta alla presenza di materia con le proprietà espone nel secondo capitolo. Infatti materia relativistica e non relativistica produce evoluzioni del

parametro di scala non conformi alle richieste della teoria dell'inflazione. Se si osservano i possibili scenari descritti dal modello di Friedmann si nota che tutti descrivono un'evoluzione del parametro  $a(t)$  con un andamento decelerato nel tempo. Partendo dal risultato trovato nell'equazione (2.41), si trova che si può avere un valore di  $\ddot{a} > 0$  solamente con la condizione:

$$\omega < -\frac{1}{3} . \quad (3.16)$$

Questo risultato può essere trovato in maniera del tutto analoga considerando l'equazione (2.20). Per avere la condizione  $\ddot{a} > 0$  verificata, si ha il vincolo:

$$(\rho + 3p) < 0 , \quad (3.17)$$

che implica un vincolo su  $\omega$  analogo a quello trovato precedentemente. Si potrebbe ipotizzare che l'espansione accelerata sia causata dalla presenza della costante cosmologica. Questo non è possibile poiché si è già visto come la costante cosmologica dia un contributo dominante per grandi valori di  $a(t)$ . Se l'inflazione fosse provocata dalla presenza di un termine di questo tipo, non avrebbe modo di interrompersi.

La densità di energia  $\rho$  per definizione è positiva, questo implica il fatto che l'accelerazione deve essere prodotta da un materiale con pressione negativa. Alan Guth, lavorando anche nel contesto della teoria delle particelle fondamentali, propose che questo materiale fosse un campo scalare chiamato inflatone. Nel contesto della fisica delle particelle un campo scalare descrive una particella scalare con spin=0. Si può trovare il tensore energia-impulso per un campo scalare che determina la forma della sorgente per le equazioni di campo di Einstein.

È utile ridefinire le equazioni di Einstein partendo dal principio di minima azione:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} . \quad (3.18)$$

La densità di lagrangiana  $\mathcal{L}$  per la teoria della relatività generale è definita come lo scalare:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M_P^2 R . \quad (3.19)$$

$R$  rappresenta lo scalare di curvatura che si ottiene dalla contrazione del tensore di Ricci. Attraverso il principio variazionale, sviluppando la variazione  $\delta S$  in funzione della metrica  $\delta g_{\mu\nu}$  si ottengono le equazioni di Einstein (2.16) in assenza di sorgenti ( $T_{\mu\nu} = 0$ ). Per inserire il contributo dato da una ipotetica sorgente di campo gravitazionale, è necessario inserire un termine alla densità di lagrangiana chiamato  $\mathcal{L}_{mat}$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M_P^2 R + \mathcal{L}_{mat} . \quad (3.20)$$

In maniera analoga a quanto fatto in precedenza, applicando il principio variazionale, si ottiene il tensore energia impulso  $T_{\mu\nu}$  con la forma:

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}_{mat}}{\partial g^{\mu\nu}} + g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{mat} . \quad (3.21)$$

Il contributo dato dalla densità di lagrangiana  $\mathcal{L}_{mat}$  al tensore  $T_{\mu\nu}$  deve soddisfare i vincoli imposti dalla teoria dell'inflazione.

Secondo la teoria dei campi la densità di lagrangiana per un campo scalare è possibile scriverla nel modo seguente:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - \nabla\phi \cdot \nabla\phi) - V(\phi) ; \quad (3.22)$$

il primo termine è definito termine cinetico mentre il secondo è definito potenziale. In notazione relativistica può essere scritto facilmente:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) . \quad (3.23)$$

Utilizzando l'equazione (3.21) il tensore energia-impulso per un campo scalare di questo tipo diventa:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi) \right] . \quad (3.24)$$

Poiché si deve applicare questo modello nell'ambito della teoria cosmologica standard è necessario imporre una condizione. E' stata infatti considerata valida fin dal principio l'assunzione che la metrica di Friedmann-Robertson sia quella che descrive l'universo nel sistema di riferimento comovente con il fluido cosmico nelle coordinate comoventi  $\{t, x^i\}$  o analogamente in quelle sferiche  $\{t, r, \theta, \phi\}$ . Nel sistema di riferimento comovente si ha la caratteristica di osservare una densità di quantità di moto del fluido ideale nulla. Questo vincolo deve essere applicato anche per la densità di quantità di moto dovuta alla presenza del campo scalare. Per questo motivo il contributo  $T^{0i}$  è posto uguale a 0. Successivamente bisogna aggiungere il fatto che il campo scalare, in linea con le ipotesi su cui si sono basate le equazioni di Friedmann, deve essere considerato omogeneo in prima approssimazione <sup>D</sup> ( $\nabla\phi = 0$ ). Così si ottengono i contributi per densità di energia  $T_{00}$  e pressione  $T_{ii}$ :

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) ; \quad (3.25)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) . \quad (3.26)$$

Queste relazioni rappresentano il contributo alla densità di energia ed alla pressione generati dalla presenza di un campo scalare  $\phi$ . Nonostante il fatto che si sta modellizzando il sistema come un fluido perfetto, non esiste una relazione esplicita tra densità e pressione con la forma analoga alla formula (2.20).

Data questa ipotesi sulla forma del tensore energia-impulso si possono derivare le equazioni di Friedmann in maniera analoga a come già fatto nella sezione 2.3. Dall'equazione (2.24) si ricava l'equazione per la conservazione dell'energia:

$$\partial_0\rho + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) \Big|_{(\rho_\phi, \nu, p_\phi, \nu)} = 0 \quad (3.27)$$

<sup>D</sup>La teoria delle perturbazioni descrive come dalle perturbazioni quantistiche del campo scalare  $\phi$  si arrivi alla strutturazione delle disomogeneità che hanno portato alla formazione delle strutture galattiche osservate oggi. Per la trattazione del "paradigma" dell'inflazione queste disomogeneità sono trascurate mentre ricoprono un ruolo fondamentale nel definire le osservazioni sperimentali che possono convalidare la consistenza della teoria dell'inflazione.

che diventa:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi} . \quad (3.28)$$

Questa equazione viene anche chiamata equazione d'onda scalare. La stessa equazione che descrive il comportamento del campo scalare  $\phi$  in funzione del potenziale può essere ricavata dalle equazioni di campo che derivano dalle equazioni di Eulero-Lagrange. Infatti applicando il principio di minima azione alla densità di lagrangiana  $\mathcal{L}_{mat}$  si ottiene l'equazione:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{mat}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{mat}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 . \quad (3.29)$$

Data la forma di  $\mathcal{L}_{mat}$ , si ottiene [5]:

$$\square \phi - \frac{dV}{dt} = 0 . \quad (3.30)$$

L'operatore box nella formula precedente è definito come l'operatore d'Alambertiano in coordinate generiche che prende la forma:

$$\square \phi = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi] . \quad (3.31)$$

Tramite questa definizione, ricordando che per ipotesi il campo scalare  $\phi$  è omogeneo, si arriva all'equazione (3.28).

L'equazione di Friedmann (2.21) in questo caso si ottiene per sostituzione diretta della relazione per la densità di energia (3.25):

$$H^2 = \frac{1}{3M_p^2} \left[ V(\phi) + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \right] . \quad (3.32)$$

Nella derivazione dell'equazione di Friedmann si può trascurare il contributo dato dal termine di curvatura. Questo può essere fatto poiché anche se il contributo non fosse trascurabile al momento  $t_i$ , tempo iniziale dell'inflazione, questo diventerebbe rapidamente trascurabile secondo quanto esposto nel paragrafo riguardante la soluzione del problema della piattezza.

Dato questo modello in cui si ipotizza la densità di energia dominata dal contributo dovuto alla presenza del campo scalare  $\phi$ , si può verificare che l'evoluzione del parametro di scala che ne deriva sia consistente con i vincoli descritti dal modello generale dell'inflazione. Si trova facilmente che il vincolo (3.17) è verificato se, considerando le definizioni di  $\rho_{\phi,V}$  e di  $p_{\phi,V}$  si ha che:

$$\rho + 3p = 2 \left( \dot{\phi}^2 - V \right) < 0 . \quad (3.33)$$

Quindi si trova una condizione definita nel modo seguente:

$$\dot{\phi}^2 < V(\phi) . \quad (3.34)$$

Chiaramente il modello dell'inflazione così ipotizzato non dà nessuna spiegazione sulla natura del campo scalare. Si possono però considerare fondamentali i vincoli sulla forma del potenziale  $V(\phi)$  e sul numero di *e-folding* necessario per risolvere i problemi della piattezza e dell'orizzonte. Per questo motivo la teoria dell'inflazione viene definita un *paradigma* che descrive la fase di espansione dell'universo in maniera generale. I modelli che ne scaturiscono sono molti e si differenziano tra di loro in base alle varie ipotesi sulla natura del campo  $\phi$ .

### 3.5 Approssimazione *slow-roll*

Per risolvere le equazioni di Friedmann applicate alla fase di inflazione cosmologica esiste uno schema di approssimazione chiamato *Slow-roll*. Osservando la struttura delle equazioni (3.28),(3.32) si capisce immediatamente che la loro risoluzione verrebbe semplificata se fosse possibile trascurare alcuni termini. In particolare per la prima equazione la derivata seconda del campo; nella seconda il termine  $\dot{\phi}^2$ . In questo modo si ottengono le equazioni:

$$3H\dot{\phi} \simeq -\frac{dV(\phi)}{d\phi}, \quad (3.35)$$

$$H^2 \simeq \frac{V(\phi)}{3M_P^2}. \quad (3.36)$$

È necessario descrivere in maniera quantitativa le condizioni di validità dell' approssimazione utilizzata. Per quanto riguarda l'equazione (3.35), l'approssimazione è valida se:

$$\left| \frac{\ddot{\phi}}{3H\dot{\phi}} \right| \ll 1. \quad (3.37)$$

Attraverso alcuni passaggi algebrici, la condizione può essere scritta nel modo seguente:

$$|\eta(V)| = \left| M_P^2 \frac{V''}{V} \right| \ll 1; \quad (3.38)$$

si può definire così il primo parametro di *slow-roll*  $\eta$ . L'approssimazione attraverso la quale si è ottenuta l'equazione (3.36) è valida se:

$$\left| \frac{\dot{\phi}^2}{V(\phi)} \right| \ll 1. \quad (3.39)$$

Questa può essere scritta nel modo seguente:

$$\varepsilon(V) = \frac{M_P^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1. \quad (3.40)$$

$\varepsilon$  è il secondo parametro di *slow-roll*.

Il set di condizioni  $|\eta| \ll 1, \varepsilon \ll 1$  è sufficiente per ritenere valida l'approssimazione *slow-roll*. Queste condizioni si ripercuotono sulla forma del potenziale anche se in realtà non lo determinano in maniera univoca. Infatti, nei vincoli precedenti, è presente una dipendenza dallo stato in cui si trova il campo scalare al momento di inizio della fase inflazionaria. Si osserva che, a prescindere dalla forma del potenziale che si sta considerando, sarebbe sempre possibile scegliere un valore iniziale di  $\dot{\phi}$  tale da rendere l'approssimazione non applicabile. Si può dimostrare però come varie condizioni iniziali tendano verso lo scenario di inflazione *Slow-roll* per dei valori piccoli dei parametri  $\eta$  e  $\varepsilon$  [13].

Perché questa approssimazione sia valida, è necessario che sia in accordo con le condizioni che determinano i vincoli che deve soddisfare un modello di inflazione. In particolare questi sono espressi nella condizione (3.34). Si vede dalla formula (3.39) che questo è verificato.

Il parametro  $\varepsilon$  è legato alla condizione di inflazione in maniera ancora più stretta. Infatti si può riscrivere il vincolo (3.8) nel modo seguente:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 > 0 \text{ }^E. \quad (3.41)$$

Questa relazione è verificata in modo banale se  $\dot{H} > -H^2$ . Se si scrive questo ultimo vincolo

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} < 1 \quad (3.42)$$

si vede che la condizione di inflazione può essere messa in relazione al parametro  $\varepsilon$ . Infatti si trova che:

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq \frac{M_P^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 = \varepsilon. \quad (3.43)$$

Questo ultimo risultato è importante in quanto rende chiaro il fatto si ha espansione inflazionaria se  $\varepsilon < 1$ . Oltretutto si trova che il processo di espansione si interrompe nel momento in cui il parametro  $\varepsilon$  si avvicina all'unità.

$$\varepsilon = \mathcal{O}(1). \quad (3.44)$$

### 3.6 Il modello della "vecchia inflazione"

La teoria inizialmente proposta da Alan Guth descriveva il campo scalare  $\phi$  dipendente da un potenziale con una forma particolare rappresentata nella Figura 3.4. In questo contesto il campo scalare all'inizio del periodo di inflazione era situato in una zona di falso vuoto con un certo valore di energia potenziale:

$$V(\phi)|_{t_i} \neq 0. \quad (3.45)$$

Questa condizione iniziale sarebbe stata causata dall'equilibrio termico che in condizioni di alta temperatura localizzerebbe  $\phi$  in prossimità dell'origine. Questo stato, per quanto stabile a livello classico, è uno stato metastabile. Infatti  $\phi$  ha la possibilità di uscire dalla barriera di potenziale in cui è intrappolato e raggiungere una zona il cui il valore del potenziale trascurabile attraverso l'effetto tunnel quantistico.

Se si osserva la forma del potenziale, in questo contesto si trova che è possibile applicare l'approssimazione *slow-roll*. Il valore del parametro  $\varepsilon$  è:

$$\varepsilon|_{\phi \sim 0} = 0. \quad (3.46)$$

Il parametro  $\eta$  rispetta la condizione (3.38) se si sceglie:  $V''/V \ll 1$ .

Si definisce il valore del potenziale  $V(\phi)$  nella zona di falso vuoto nel modo seguente:

$$V(\phi)|_{\phi \sim 0} = V_0. \quad (3.47)$$

Attraverso la risoluzione delle equazioni (3.35),(3.36), si ottiene la soluzione seguente:

$$a(t) \simeq a_i \exp\left(\sqrt{\frac{V_0}{3M_P^2}} (t - t_i)\right). \quad (3.48)$$

---

<sup>E</sup>Il fattore di scala  $a(t)$  è per costruzione definito positivo.

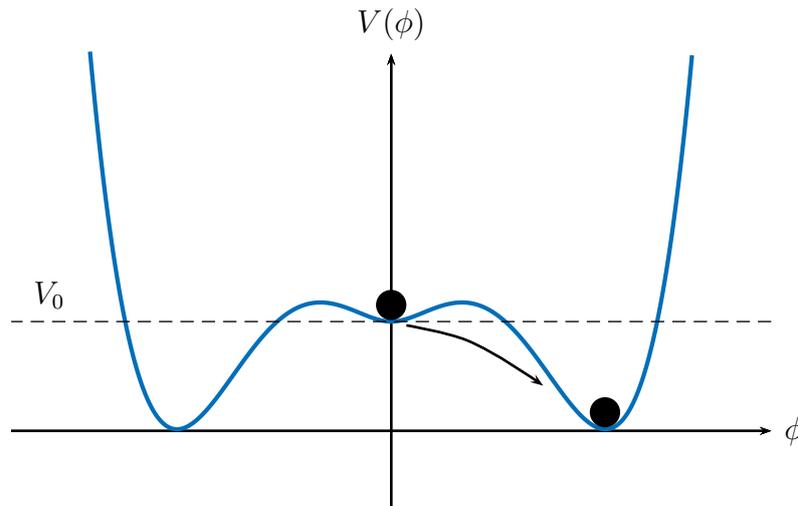


FIGURA 3.4: La figura rappresenta la forma ipotizzata del potenziale del campo scalare  $\phi$ . Il potenziale ha un minimo relativo in cui il campo è posizionato all'inizio dell'inflazione. In questa posizione il campo occupa uno stato metastabile. Attraverso l'effetto tunnel può uscire dalla barriera di potenziale ed andare ad occupare lo stato di minimo assoluto ponendo fine all'inflazione.

Questa evoluzione del parametro di scala avviene fintanto che il campo occupa lo stato metastabile.

Il processo di interruzione dell'inflazione, dovuto al decadimento dello stato metastabile occupato dal campo, fu trovato essere una transizione di fase di primo ordine che porta il campo scalare ad uscire dalla buca di potenziale in cui è intrappolato e posizionarsi in un punto di vero vuoto con un valore di potenziale trascurabile. Si osserva facilmente che una data transizione di fase non potrebbe essere una soluzione valida per definire il processo di interruzione dell'inflazione poiché presenta un problema fondamentale: la transizione non sarebbe potuta avvenire statisticamente nello stesso momento ovunque. Per questo motivo si sarebbero dovute creare delle "bolle" in cui la transizione è già avvenuta in cui il valore del campo è posizionato nel punto di minimo. Per ottenere le condizioni di omogeneità e isotropia successive al periodo dell'inflazione, queste bolle si sarebbero dovute unire rapidamente. Ma questo non potrebbe accadere poiché le zone ancora intrappolate nel falso vuoto continuerebbero l'espansione esponenziale. Le bolle sarebbero allontanate enormemente tra loro e non avrebbero la possibilità di unirsi a formare lo stato omogeneo osservato attualmente.

Si tentò di risolvere il problema considerando un tasso di generazione delle bolle più elevato. Queste soluzioni non hanno portato a risultati soddisfacenti. Per questo motivo il meccanismo chiamato *vecchia inflazione* è stato abbandonato quasi immediatamente per dare spazio a nuove ipotesi sulla dinamica dell'inflazione.

### 3.7 Numero di *e-folding*

La soluzione trovata inizialmente da A.Guth con l'ipotesi della vecchia inflazione è poi stata scartata per i problemi discussi precedentemente. Si può però considerare il tipo di evoluzione trovato per descrivere indicativamente la quantità di espansione necessaria a risolvere i problemi esposti nelle sezioni precedenti. Il numero di *e-folding* è un vincolo fondamentale in quanto si riflette anche sulla natura delle perturbazioni generate durante l'inflazione. Le osservazioni sperimentali attuali riescono ad individuare gli effetti visibili delle perturbazioni. Così si ottengono delle conferme e dei parametri utili a migliorare la teoria. Si vedrà che anche nel contesto della teoria  $R^2$  si avrà un andamento di  $a$  di tipo esponenziale in prima approssimazione rendendo comunque valida e applicabile la trattazione seguente.

Secondo la teoria della "vecchia inflazione" l'espansione avrebbe avuto un andamento esponenziale rispetto al tempo. Si può suddividere l'evoluzione del fattore di scala nelle fasi iniziali dell'universo nel seguente modo :

$$a(t) = \begin{cases} a_i \exp H_i(t - t_i) & t_i < t < t_f & \text{Inflazione} \\ a_f \left(\frac{t}{t_f}\right)^{1/2} & t_f < t < t_{eq} & [\omega = 1/3] \\ \text{Evoluzioni successive} & . & \end{cases} \quad (3.49)$$

Si considera valida l'assunzione che dopo l'epoca di inflazione inizi il periodo dominato dalla radiazione quasi immediatamente. Si sta quindi trascurando qualche possibile cambiamento nel fattore di scala nel passaggio tra queste due fasi. Secondo le equazioni che descrivono l'andamento del fattore di scala nell'approssimazione *slow roll*, il parametro di Hubble è rimasto all'incirca costante durante l'inflazione. Infatti, secondo le equazioni (3.36) e (3.40), la variazione del parametro di Hubble deve essere percentualmente piccola. Si osserva direttamente che il valore del termine di curvatura nell'equazione di Friedmann

$$\frac{|K|}{a^2 H^2} \quad (3.50)$$

debba evolversi nel tempo con un andamento del tipo:  $a^{-2}$ . Supponendo che l'universo abbia subito la forte espansione del fattore di scala,  $a(t)$  è aumentato di un fattore  $e^N$ , corrispondente ad un numero  $N$  di *e-folding*. Ipotizzando un valore del fattore  $\frac{|K|}{a^2 H^2}$  dell'ordine dell'unità al tempo  $t_i$ <sup>F</sup>, il suo valore alla fine dell'espansione inflazionaria sarà dell'ordine:

$$\frac{|K|}{a_f^2 H_f^2} = e^{-2N} . \quad (3.51)$$

Il valore del termine di curvatura ai giorni nostri sarà quindi:

$$|\Omega_K| = \frac{|K|}{a_0^2 H_0^2} = e^{-2N} \left(\frac{a_f H_f}{a_0 H_0}\right)^2 . \quad (3.52)$$

<sup>F</sup>Se si avesse un valore iniziale casuale diverso dall'unità si dovrebbe aggiungere un fattore correttivo  $\Omega_k^{(i)}$  che nel complesso non modifica in maniera significativa le stime ottenute.

Il problema della piattezza è risolto se il valore del contributo di curvatura ha il limite superiore definito dalla condizione:

$$|\Omega_k| \ll 1. \quad (3.53)$$

Infatti è stato osservato sperimentalmente che il termine di curvatura è ristretto dal limite [2]:

$$|\Omega_k| < 0.005. \quad (3.54)$$

L'equazione (3.52) può essere riscritta considerando il vincolo dato dagli esperimenti <sup>G</sup>:

$$e^N > \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|_{max}}} \frac{a_f H_f}{a_0 H_0}. \quad (3.55)$$

Per il calcolo dell'espressione precedente nei suoi dettagli si ricorda che si sta facendo l'approssimazione che ipotizza un immediato passaggio tra la fine della fase di inflazione e l'inizio della epoca di dominio della radiazione <sup>H</sup>:

$$a_f H_f \simeq a_1 H_1. \quad (3.56)$$

Prendendo in considerazione l'equazione (2.36), si può scrivere parametro di Hubble al momento dell'eguaglianza radiazione-materia nel modo seguente:

$$H = \frac{H_{eq}}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^3 + \left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^4}; \quad (3.57)$$

in cui si è definito:

$$a_{eq} = a_0 \frac{\Omega_R}{\Omega_p};$$

$$H_{eq} = \sqrt{2\Omega_p} H_0 \left(\frac{a_0}{a_{eq}}\right)^{3/2}.$$

Il valore può essere semplificato poiché si sta considerando  $a = a_1 \ll a_{eq}$ . Grazie a questa considerazione si ottiene:

$$H_1 = \frac{H_{eq}}{\sqrt{2}} \left(\frac{a_{eq}}{a_1}\right)^2 \quad (3.58)$$

Con i risultati descritti nella sezione 2.4, inserendo quanto trovato nell'equazione (3.55), si ottiene:

$$e^N \sqrt{|\Omega_k|_{max}} > \frac{a_1 H_1}{a_0 H_0} = \left(\frac{\Omega_p a_{eq}}{a_0}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{H_1}{H_0}} = \Omega_R^{1/4} \sqrt{\frac{H_1}{H_0}} = \left(\Omega_R \frac{\rho_1}{\rho_{c,0}}\right)^{1/4} \quad (3.59)$$

Come espresso dalla notazione usata,  $\rho_1$  è la densità di energia della materia relativistica all'inizio dell'epoca dominata dalla radiazione. Il valore della densità critica è quello

<sup>G</sup>Si definisce  $|\Omega_k|_{max} = 0.005$  derivante dall'equazione (3.54).

<sup>H</sup>Il pedice 1 indica che le quantità sono calcolate nel momento dell'inizio dell'era dominata dalla radiazione

presentato nella formula (2.29). Il valore del parametro di densità dovuta alla radiazione, principalmente composta dal contributo di fotoni e neutrini, è [13]:

$$\Omega_R = 4.17 \cdot 10^{-5} h^{-2}. \quad (3.60)$$

Così dalla (3.59) si ottiene la condizione:

$$e^N > \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|_{max}}} \frac{(\rho_1)^{1/4}}{0,037 h eV} \quad (3.61)$$

La precedente equazione diventa un vincolo su  $N$  se è possibile stimare la densità di energia alla fine dell'inflazione.

Grazie alla teoria della nucleosintesi cosmologica si ha che la densità di energia alla fine del processo di inflazione non può essere minore della densità di energia all'inizio della conversione neutrone-protone, stimata intorno al valore di  $(1 MeV)^4$ . D'altro canto non ci si aspetta che assuma un valore superiore a quello della densità di energia di Planck con valore:  $(1,22 \cdot 10^{19} GeV)^4$ . In realtà, attraverso lo studio avanzato delle perturbazioni durante la fase di inflazione, si trova che il limite inferiore è dato dal valore [21]  $\rho_1 \simeq (2 \cdot 10^{16} GeV)^4$ . Prendendo in considerazione il vincolo (3.54) dato dalle ultime osservazioni sperimentali, attraverso queste stime si ottiene:

$$e^N > 10^{28}; \quad (3.62)$$

il dato precedente costringe il numero di *e-folding* ad essere:

$$N \gtrsim 65. \quad (3.63)$$

Questo vincolo è stato trovato imponendo la risoluzione del problema della piattezza.

Si dimostra che un vincolo analogo può essere trovato per avere valida la risoluzione del problema dell'orizzonte cosmologico. Infatti dall'equazione (3.11), assieme alla definizione (3.9), si ottiene:

$$\frac{1}{a_0 H_0} < \frac{1}{a_i H_i}. \quad (3.64)$$

In analogia con l'equazione (3.51) si ottiene:

$$\frac{1}{a_0 H_0} < e^N \frac{1}{a_f H_f}. \quad (3.65)$$

Questa disequazione è analoga alla disequazione (3.55) dalla quale si sono ottenuti i vincoli descritti in precedenza.

La condizione che obbliga il numero di *e-folding* ad essere maggiore di un certo valore è fondamentale per definire la teoria dell'inflazione. Questo valore infatti si ripercuote in una condizione sulla forma del potenziale  $V$ . Se si lavora nell'approssimazione di *slow roll* si vede che:

$$N = \int_t^{t_{end}} H dt. \quad (3.66)$$

Grazie alle equazioni approssimate (3.35) ed (3.36) si ottiene:

$$N \simeq \frac{1}{M_P^2} \int_{\phi_{end}}^{\phi} \frac{V}{V'} d\phi, \quad (3.67)$$

in cui il valore di  $\phi_{end}$  è definito come il valore che assume il campo scalare nel momento in cui si interrompe l'inflazione. Come si è già visto la condizione che definisce la fine del processo inflazionario nell'approssimazione di *slow roll* è definita come il momento in cui il parametro  $\varepsilon$  diventa simile all'unità:

$$\varepsilon(\phi_{end}) = 1. \quad (3.68)$$

Come ultima cosa si possono descrivere le motivazioni che portano a definire il momento in cui l'epoca inflazionaria ha avuto inizio. È naturale ipotizzare che l'espansione sia incominciata approssimativamente al tempo di Planck in cui  $V^{1/4} \simeq M_P$ . Questo è necessario per prevenire la possibile contrazione dell'universo nel caso in cui il parametro di densità sia molto maggiore dall'unità:

$$\Omega \gg 1 \quad (3.69)$$

Analogamente se  $\Omega \ll 1$  si dovrebbe avere la stessa condizione per evitare che l'universo avesse un'espansione rapida dovuta al contributo della densità di energia della radiazione. Questo tipo di evoluzione non sarebbe stata compatibile con le osservazioni sperimentali che stimano l'età dell'universo. Secondo i motivi appena citati si considera valida l'ipotesi che vede come momento iniziale per l'epoca dell'inflazione il tempo di Planck [13]:

$$t_i \simeq t_P \simeq 10^{-43}. \quad (3.70)$$

Un'altra particolare proprietà che deve avere la teoria dell'inflazione per essere valida è quella che la soluzione delle equazioni di Einstein per la fase di espansione abbia un comportamento attrattivo rispetto alla vasta varietà di soluzioni possibili. Perché la teoria si veramente predittiva si deve trovare che l'evoluzione del campo scalare inizi in un particolare punto indipendentemente dalle condizioni iniziali, altrimenti tutti i risultati ottenuti sarebbero anch'essi dipendenti fortemente dalle condizioni iniziali. Poiché l'equazione d'onda che descrive l'andamento del campo scalare (3.28) è del secondo ordine, ipoteticamente  $\dot{\phi}$  può assumere un qualsiasi valore nei vari punti del potenziale rendendo evidente che non esiste una unica soluzione. La teoria quindi può essere predittiva solo se le soluzioni mostrano un comportamento attrattivo rispetto alle possibili configurazioni del campo negli istanti precedenti al tempo di Planck. In altre parole è necessario che le differenze date dalle condizioni iniziali svaniscano velocemente portando ad una comune evoluzione.



# Capitolo 4

## Inflazione $R^2$

In questo capitolo si discuterà la teoria dell'inflazione  $R^2$ . Questo modello ipotizza che, durante l'epoca inflazionaria, la densità di energia non sia dominata da un campo scalare, come la gran parte delle teorie attuali assumono, ma che la forte espansione sia causata dal comportamento diverso che la gravità assume ad alte energie. Questa teoria prevede un meccanismo consistente per l'uscita dalla fase di inflazione; in più i risultati sono in accordo con gli ultimi dati sperimentali provenienti dall'analisi delle anisotropie della radiazione cosmica di fondo. Si presenterà poi come esista un'equivalenza tra il modello  $R^2$  ed una teoria classica in presenza di un campo scalare. Questa equivalenza sarà analizzata attraverso l'utilizzo delle trasformazioni conformi.

### 4.1 Teorie della gravità $f(R)$ e limite di basse energie

Come si è già descritto nei capitoli precedenti, una delle forti assunzioni che si fanno quando si vuole affrontare lo studio delle fasi iniziali dell'universo è quella di considerare valide in buona approssimazione le teorie sviluppate finora. In particolare, se si tenta di studiare i fenomeni vicino all'epoca del Big Bang, si stanno descrivendo processi che avvengono ad energie molto elevate rispetto alle energie che si sono raggiunte negli esperimenti atti a testare queste teorie. Nell'introduzione è stato descritto brevemente come la teoria della Relatività Generale dia una descrizione eccellente di molti fenomeni nel suo ambito di applicabilità <sup>A</sup>. È necessario sottolineare però come la gravità descritta da Einstein non sia stata sottoposta a delle verifiche sperimentali ad energie elevate. Nella sezione 3.7 si è dimostrato come sia necessario vincolare l'inflazione ad iniziare approssimativamente al tempo di Planck  $t_P$ . In quel momento le energie erano talmente alte da mettere in dubbio la validità della descrizione della gravità fornita dalle leggi di Einstein.

Si consideri la formulazione variazionale delle equazioni di campo di Einstein attraverso l'azione di Einstein-Hilbert:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} M_P^2 R + \mathcal{L}_{mat} \right]. \quad (4.1)$$

---

<sup>A</sup>Si pensi alla descrizione della precessione dell'orbita di Mercurio. Il valore predetto dalla teoria della gravitazione classica di Newton non era in accordo con le osservazioni sperimentali. Con lo studio del fenomeno con le leggi della relatività generale si ottiene un valore modificato di  $\simeq 43 \text{ arcsec/secolo}$ , in accordo con le osservazioni sperimentali.

La connessione dell'azione con la metrica è determinata dalla presenza dal primo termine in cui lo scalare di curvatura  $R$  definito come [12]:

$$R = g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\nu,\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma) ; \quad (4.2)$$

con la già nota definizione della connessione affine:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} [g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}] . \quad (4.3)$$

Le sorgenti del campo gravitazionale sono inserite nelle equazioni attraverso il termine di densità di lagrangiana  $\mathcal{L}_{mat}$ .

Le teorie che tentano di modificare la gravità per ottenere una descrizione più accurata dei fenomeni che avvengono ad alte energie modificano il termine geometrico sostituendolo con un termine più complesso. Il primo modo è quello di aggiungere all'azione di Einstein-Hilbert dei termini costruiti sulla base dello scalare di curvatura  $R$ . Questo approccio porta appunto alle teorie della gravità  $f(R)$ . Sono stati studiati altri possibili modelli come ad esempio le teorie della gravità in più dimensioni o le teorie chiamate *scalar-tensor gravity*, in cui si tenta di sostituire la costante di gravitazione universale con un campo scalare. Per lo scopo di questa tesi gli ultimi due approcci allo studio della gravità non vengono considerati.

Il grosso vantaggio di questa teoria applicata al modello dell'inflazione è il fatto che potrebbe essere testata anche in esperimenti che studiano fenomeni diversi dai fenomeni cosmologici dell'universo primordiale. Se il processo di inflazione accadesse in base ad un comportamento non standard della gravitazione ad alte energie, trovando una migliore descrizione della gravità si riuscirebbero a migliorare le previsioni sui modelli cosmologici. Al momento attuale sono molti i fenomeni per i quali la Relatività Generale offre una buona descrizione e quindi la validità nel limite classico <sup>B</sup> è un vincolo che le nuove teorie devono soddisfare.

La prima restrizione da soddisfare è il fatto che la densità di lagrangiana  $\mathcal{L}_R$  deve essere uno scalare. Questa condizione è imposta dalla necessità di preservare la covarianza della teoria. La forma che è interessante considerare è la seguente:

$$\mathcal{L}_R = \alpha_0 + \alpha_1 R + \alpha_2 R^2 + \alpha_3 R^3 + \dots , \quad (4.4)$$

che può essere scritta nella forma compatta:

$$\mathcal{L}_R = \sum_n \mathcal{L}_{Rn} = \frac{M_P^2}{2} \sum_n f_n(R) = \frac{M_P^2}{2} f(R) . \quad (4.5)$$

Per ottenere la somma di grandezze omogenee i termini della funzione  $f(R)$  possono essere scritti nel modo seguente:

$$f_n(R) = \lambda_n M_P^{-2(n-1)} R^n , \quad (4.6)$$

in cui  $\lambda_n$  è una costante adimensionale. I termini con  $n \leq -1$  non sono permessi in quanto renderebbero l'azione divergente nel caso in cui si avesse curvatura nulla in assenza delle

---

<sup>B</sup>In questo contesto il limite classico è considerato come il limite in cui la in cui la teoria della relatività Generale è applicabile.

sorgenti gravitazionali, cosa che è chiaramente un assurdo. Il termine con  $n = 0$  dà il contributo costante:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{M_P^4}{2} \lambda_0, \quad (4.7)$$

il quale è stato già considerato come il termine dovuto alla costante cosmologica. Questo termine può essere descritto come proveniente dal contributo aggiuntivo al tensore energia-impulso, come esposto nell'equazione (2.30). Così i termini che rimangono da considerare sono quelli definiti con:

$$\{n \in \mathbb{N} | n \geq 1\}. \quad (4.8)$$

Le equazioni della Relatività Generale vengono recuperate se si considera solo la presenza del termine  $n = 1$  in cui la lagrangiana diventa lo scalare noto <sup>C</sup>:

$$\mathcal{L}_{R1} = \frac{M_P^2}{2} R. \quad (4.9)$$

Il termine successivo con  $n = 2$  rappresenta il contributo del secondo ordine che si può scrivere nel modo seguente:

$$\mathcal{L}_{R2} = \lambda_2 R^2. \quad (4.10)$$

Si trova che ad alte energie il termine dominante è quello con il più elevato valore di  $n$ , mentre a basse energie tutti i termini diventano trascurabili rispetto al singolo termine dell'azione (4.1). Si può calcolare questo effetto più precisamente. Come prima cosa è necessario sottolineare che lo scalare di Ricci è composto principalmente da due tipi di termini:

$$(g_{,\mu})^2 \quad g_{,\mu\nu} \quad (4.11)$$

Quindi, attraverso l'analisi dimensionale ed utilizzando le unità naturali come specificato nell'introduzione, si ottiene:

$$[R] = [L]^{-2} = [M]^2 \quad (4.12)$$

Si definisca  $l$  la scala di lunghezza che caratterizza le distanze di interazione gravitazionale e si consideri il caso in cui si ha l'interazione gravitazionale agente su lunghe distanze, e quindi basse energie, come espresso nella condizione:

$$l \gg M_P^{-1}. \quad (4.13)$$

Ogni termine di ordine  $n$  viene soppresso di un fattore:

$$(lM_P)^{-2(n-1)} \quad (4.14)$$

rispetto al termine di Einstein-Hilbert  $\mathcal{L}_{R0}$ . Infatti, alla luce delle definizioni (4.5) e (4.6), si osserva che:

$$\frac{\mathcal{L}_{Rn}}{\mathcal{L}_{R0}} = \frac{f_n(R)}{f_0(R)} = \frac{\lambda_n M_P^{-2(n-1)} R^n}{\lambda_0} = \frac{\lambda_n}{\lambda_0} \left[ \frac{R}{M_P^2} \right]^{n-1}. \quad (4.15)$$

Secondo la (4.12) si può stimare:

$$R \sim \frac{1}{l^2} \quad (4.16)$$

<sup>C</sup>Si può considerare senza perdita di generalità che  $\lambda_1 = 1$ .

I termini di ordine  $n$  diventano trascurabili se

$$\left[ \frac{1}{(lM_P)^2} \right]^{n-1} \ll 1. \quad (4.17)$$

In particolare la densità di lagrangiana è approssimata in maniera buona da quella classica della Relatività Generale nel caso in cui sia rispettata la condizione (4.13) [13]. Facendo l'ipotesi che si debbano considerare termini di ordine differente dal primo in  $R$ , come si è dovuto fare con il termine di ordine 0 quando si è introdotta la costante cosmologica, si è dimostrato come ad alte energie la descrizione classica sia insufficiente in quanto si basa su un termine trascurabile. Invece si vede immediatamente come il limite classico si possa ottenere facendo il limite di basse energie.

Le equazioni di campo si ottengono dall'applicazione del principio variazionale all'azione. Nel caso della teoria della gravità  $f(R)$ , l'azione è strutturata nel modo seguente:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{M_P^2}{2} f(R) + \mathcal{L}_{mat} \right]. \quad (4.18)$$

Così si ottiene l'equazione di campo seguente <sup>D</sup> [4]:

$$F(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu F(R) + g_{\mu\nu} \square F(R) = 8\pi G_N T_{\mu\nu}, \quad (4.19)$$

in cui  $T_{\mu\nu}$  e l'operatore  $\square$  sono definiti rispettivamente nelle (3.21), (3.31) e si è definito:

$$F(R) = \partial f / \partial R. \quad (4.20)$$

Se si considera la metrica di "Robertson-Walker" espressa nell'equazione (2.8) ed un tensore energia impulso analogo a quello descritto nella sezione 2.3, si ottengono le equazioni di Friedmann ((2.20),(2.21)) nel caso della gravità  $f(R)$  <sup>E</sup>:

$$2F(R)\dot{H} = -\ddot{F}(R) + H\dot{F}(R) - 8\pi G_N(\rho + p) \quad (4.21)$$

$$3F(R)H^2 = \frac{(F(R)R - f)}{2} - 3H\dot{F}(R) + 8\pi G_N \rho \quad (4.22)$$

Si osserva che nel caso in cui si ponga  $f(R) = R$  si ha  $F(R) = 1$  e si ritrovano esattamente le equazioni di campo di Einstein e le equazioni di Friedmann classiche.

## 4.2 Trasformazioni conformi e scelta del *frame*

Per affrontare lo studio delle teorie della gravità  $f(R)$  uno strumento matematico molto utile è quello delle trasformazioni conformi. Attraverso una trasformazione di questo tipo si vedrà che da una teoria che presenta un'azione con termini in  $R$  superiori al primo si

<sup>D</sup>La derivazione di queste equazioni si ottiene attraverso calcoli del tutto analoghi a quelli che si utilizzano per ricavare l'equazione di Einstein (2.16)

<sup>E</sup>Si lavora comunque nell'approssimazione in cui  $k = 0$  (spazio piatto). Il modello della gravità  $R^2$  sarà applicato nel periodo dell'inflazione in quanto durante il resto dell'evoluzione dell'universo si ricade nelle condizioni di validità del suo modello semplificato con  $f(R) = R$ . Si è esposto ampiamente come l'approssimazione di spazio piatto sia valida nel periodo inflazionario.

può recuperare l'azione di Einstein-Hilbert con un differente comportamento nel settore delle sorgenti del campo gravitazionale  $\mathcal{L}_m$ . Innanzitutto è necessario definire matematicamente cosa rappresenta una trasformazione conforme e successivamente descriverne le proprietà.

Si consideri lo spaziotempo rappresentato dalla coppia  $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$  in cui  $\mathcal{M}$  è una varietà differenziabile e  $g_{\mu\nu}$  è la metrica definita sulla varietà. Una trasformazione conforme può essere scritta nel modo seguente:

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x) , \quad (4.23)$$

in cui  $\Omega$  è una funzione regolare e non singolare del punto  $x$  dello spaziotempo chiamato fattore conforme. La trasformazione conforme, dilatando e contraendo le distanze tra i punti della varietà in funzione della loro posizione, può essere vista come un riscaldamento non omogeneo della metrica. Nel caso in cui si avesse il valore  $\Omega = \text{const}$  si avrebbe un semplice riscaldamento della metrica. Il fattore conforme, essendo vincolato a non essere singolare, deve assumere dei valori contenuti nell'intervallo  $(0, \infty)$ . Per questo motivo si può interpretare la trasformazione come un'applicazione  $\chi$  che mappa la varietà spaziotemporale in un'altra rispettando le seguenti proprietà:

$$\chi : \{\mathcal{M} \longrightarrow \tilde{\mathcal{M}}, \text{lineare, biunivoca, invertibile}\} . \quad (4.24)$$

Si può richiedere quindi come condizione di consistenza fisica della trasformazione che l'applicazione  $\chi$  e la sua inversa  $\chi^{-1}$  siano omomorfismi. Questa proprietà è rispettata se è valida la seguente condizione: date due operazioni binarie  $*$ ,  $\diamond$  rispettivamente nella varietà  $\mathcal{M}$ ,  $\tilde{\mathcal{M}}$ ,

$$\begin{aligned} \chi(u * v|_{\mathcal{M}}) &= \chi(u) \diamond \chi(v) \Big|_{\tilde{\mathcal{M}}} ; \\ \chi^{-1}(u \diamond v|_{\tilde{\mathcal{M}}}) &= \chi^{-1}(u) * \chi^{-1}(v) \Big|_{\mathcal{M}} . \end{aligned} \quad (4.25)$$

Un'applicazione con queste proprietà definisce un isomorfismo. La proprietà (4.25) è una richiesta di consistenza fisica poiché se si considerano le operazioni binarie  $*$ ,  $\diamond$  rispettivamente come il prodotto scalare sulle due varietà, questa si traduce nella condizione che la trasformazione conforme lasci invariati gli angoli tra i vettori. Così si ha la conservazione delle strutture dei coni di luce. In particolare, nel contesto della relatività generale, questo si traduce in una conservazione delle proprietà causali dello spaziotempo. Si può dimostrare inoltre che una trasformazione che conserva gli angoli tra i vettori deve essere necessariamente una trasformazione conforme [19] rendendo la (4.25) condizione necessaria e sufficiente per definire  $\chi$ .

È importante sottolineare che una trasformazione conforme non rappresenta un cambiamento di coordinate sulla varietà  $x^\alpha \longrightarrow \tilde{x}^\alpha$  in quanto questa sarebbe del tutto ininfluente essendo la teoria della relatività generale espressa in leggi covarianti. Quindi si può dire che una trasformazione conforme è una particolare ridefinizione della metrica che è in grado di mischiare tra di loro i gradi di libertà dovuti alla componente geometrica e quelli dovuti alla componente di materia. Ogni scelta di definizione di questi campi attraverso una trasformazione conforme è chiamato frame. Tipicamente si utilizzano due

frame in particolare. Il frame di Einstein è definito come il frame in cui l'azione prende la forma dell'azione classica della relatività generale. Il frame di Jordan invece è quello in cui l'azione prende la forma (4.18).

Dall'equazione (4.23) si può ricavare come si modifica sotto una particolare trasformazione conforme il determinante della metrica  $g = \det[g_{\mu\nu}]$ :

$$\sqrt{-\tilde{g}} = \Omega^4 \sqrt{-g} . \quad (4.26)$$

Si può vedere come le unità di lunghezza e tempo si modifichino sotto l'applicazione della trasformazione conforme. Si consideri la metrica di FRLW nel frame di Jordan:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2[d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2] \right] . \quad (4.27)$$

Poiché sotto la trasformazione  $\chi$  si ha che:

$$d\tilde{s}^2 = \Omega^2 ds^2 , \quad (4.28)$$

con la definizione (4.27) si ottiene:

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 &= \Omega^2 \left( -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2[d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2] \right] \right) \\ &= -d\tilde{t}^2 + \tilde{a}^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2[d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2] \right] . \end{aligned} \quad (4.29)$$

Dalla definizione precedente si possono estrarre le relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} d\tilde{t} &= \Omega dt ; \\ \tilde{a} &= \Omega a . \end{aligned} \quad (4.30)$$

Attraverso ulteriori passaggi algebrici si ottiene la trasformazione per lo scalare di curvatura  $R$  [7]:

$$R = \Omega^2(\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{\partial}_\mu\omega\tilde{\partial}_\nu\omega) , \quad (4.31)$$

in cui si è definito:

$$\begin{aligned} \omega &= \ln \Omega ; \\ \tilde{\partial}_\mu\omega &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} ; \\ \tilde{\square}\omega &= \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}}\tilde{\partial}_\mu \left( \sqrt{-\tilde{g}}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{\partial}_\nu\omega \right) . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Applicando una trasformazione conforme all'azione (4.18) si può vedere come questa può essere mappata nel frame di Einstein, producendo un cambiamento nel comportamento del settore dovuto alle sorgenti di campo gravitazionale. Infatti si riscriva l'azione  $f(R)$  nel modo seguente:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{M_P^2}{2} FR - U + \mathcal{L}_M \right) , \quad (4.33)$$

con la definizione di:

$$U = \frac{M_P^2}{2} (FR - f) . \quad (4.34)$$

Adesso è possibile applicare la trasformazione conforme  $\chi$  ottenendo:

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{M_P^2}{2} F \Omega^{-2} (\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\partial}_\mu \omega \tilde{\partial}_\nu \omega) - \Omega^{-4} U + \mathcal{L}_M(\Omega^{-2} \tilde{g}_{\mu\nu}) \right]. \quad (4.35)$$

Si osserva che data la forma che assume l'azione sotto trasformazione conforme, dal frame di Jordan è possibile passare al frame di Einstein attraverso una particolare scelta del fattore conforme:

$$\Omega^2 = F. \quad (4.36)$$

Per consistenza matematica si deve avere necessariamente  $F > 0$ . Con un cambio di variabili è utile introdurre un nuovo campo scalare “*ad hoc*” attraverso il quale si può rappresentare la trasformazione. Questo nuovo campo scalare  $\phi$  è definito come:

$$\phi = M_P \sqrt{3/2} \ln F. \quad (4.37)$$

Confrontando il risultato con la formula (4.32) si vede immediatamente che :

$$\omega = \frac{1}{M_P \sqrt{6}} \phi. \quad (4.38)$$

Si può così osservare che l'azione nel frame di Einstein prende la formulazione interessante seguente <sup>F</sup> :

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{M_P^2}{2} \tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\partial}_\mu \phi \tilde{\partial}_{\nu\phi} - V(\phi) \right] + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{L}_M(F^{-1}(\phi) \tilde{g}_{\mu\nu}), \quad (4.39)$$

in cui si è utilizzato il teorema di Gauss per trovare il risultato:

$$\int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\square}\omega = 0. \quad (4.40)$$

Il termine  $V(\phi)$  è definito dalla relazione (4.34) che diventa:

$$V(\phi) = \frac{U}{F^2} = \frac{M_P^2}{2} \frac{FR - f}{F^2}. \quad (4.41)$$

È interessante notare come nel frame di Einstein il contributo all'azione dovuto al fattore conforme rappresentato con  $\phi$  può essere visto come l'effetto dovuto alla presenza di un campo scalare nel settore della materia. Infatti si possono confrontare i termini in  $\phi$  dell'equazione (4.39) con l'equazione (3.23) e vedere che sono esattamente identici. Si vede in questo modo come una teoria  $f(R)$  della gravità nel frame di Jordan può essere descritta attraverso l'azione di Hilbert-Einstein nel frame di Einstein con un contributo diverso nella componente delle sorgenti gravitazionali.

<sup>F</sup>In questa sezione i termini segnati con il simbolo tilde  $\tilde{\phantom{x}}$  indicheranno gli oggetti definiti nel frame di Einstein.

Secondo quanto detto finora si dispone di perlomeno due possibili descrizioni diverse tra loro dei fenomeni fisici studiati nel contesto della teoria della gravità. Si dispone però anche di una applicazione *invertibile* che permette di mappare un frame in un altro rendendo così possibile studiare certi fenomeni in diversi frame. Questo è il metodo utilizzato spesso per risolvere le equazioni: porsi nel frame in cui queste assumono la forma più semplice e poi rimappare la soluzione nel frame in cui si effettuano gli esperimenti. Il problema fondamentale è proprio quello di definire quale sia il frame “*fisico*” in cui si effettuano le misure. Secondo una interpretazione si può definire il frame fisico quello in cui i barioni obbediscono all’equazione di continuità standard:

$$\rho \propto a^{-3} . \quad (4.42)$$

Il frame di Jordan [8] sembra presentare la precedente caratteristica e potrebbe essere considerato quello in cui le quantità fisiche sono comparate con le osservazioni sperimentali. Il dibattito su quale frame sia quello fisico non è ancora concluso in quanto l’interpretazione presentata precedentemente non è universalmente accettata. Secondo altre interpretazioni il frame fisico sarebbe quello di Einstein [9].

### 4.3 Inflazione $R^2$ nel frame di Jordan

Il modello dell’inflazione  $R^2$  proposto per la prima volta da A. Starobinsky si basa sull’idea di modificare la descrizione della gravità ad alte energie attraverso l’applicazione della teoria  $f(R)$ . In questo modo non si presenta il problema correlato al processo di fine inflazione. Infatti, consistentemente con quanto detto nella sezione 4.1, il contributo dovuto al termine quadratico diventa trascurabile rispetto al termine lineare quando viene rispettata la condizione (4.13). Questo meccanismo fornisce la descrizione del processo di uscita dalla fase inflazionaria.

Si descriverà ora la teoria dell’inflazione  $R^2$  nel contesto della teoria della gravitazione  $f(R)$ . Si consideri l’azione con la forma:

$$S_J = \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R + \frac{R^2}{6M^2} \right] , \quad (4.43)$$

consistente con il modello di inflazione  $f(R)$  con  $n = 2$  ed in cui  $M$  è una costante con le dimensioni di una massa <sup>G</sup>. Considerando trascurabili in questa fase i termini dovuti alla presenza di materia e combinando le equazioni del moto (4.21) e (4.22) che si ottengono in questo particolare caso, dal principio variazionale si arriva alle seguenti equazioni dinamiche [8]:

$$\ddot{H} - \frac{\dot{H}^2}{2H} + \frac{1}{2}M^2H = -3H\dot{H} , \quad (4.44)$$

$$\ddot{R} + 3H\dot{R} + M^2R = 0 . \quad (4.45)$$

---

<sup>G</sup>La definizione è consistente con le equazioni generali (4.5) e (4.6) prendendo i termini con  $n = \{1, 2\}$  e definendo  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = M_P^2/(6M^2)$ .

Le precedenti equazioni che descrivono la dinamica dell'evoluzione dell'universo possono essere risolte nel contesto di alcune approssimazioni. Infatti si è interessati a trovare soluzioni che descrivano un'evoluzione dell'universo consistente con la teoria dell'inflazione. In base all'equazione (3.42), la fase di espansione inflazionaria è caratterizzata dall'avere il parametro di *slow-roll*  $\varepsilon < 1$ :

$$\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} < 1 . \quad (4.46)$$

In base a questo vincolo si può ipotizzare che il parametro di Hubble evolva lentamente durante fase di inflazione portando a poter assumere le approssimazioni <sup>H</sup> [8]:

$$|\dot{H}/H^2| \ll 1 , \quad |\ddot{H}/\dot{H}H| \ll 1 . \quad (4.47)$$

Così facendo si possono trascurare i primi due termini dell'equazione (4.44). Si ottiene quindi l'equazione:

$$\dot{H} \simeq -\frac{M^2}{6} . \quad (4.48)$$

La soluzione di questa equazione è:

$$H \simeq H_i - \frac{M^2}{6} (t - t_i)^{\text{I}} , \quad (4.49)$$

dalla quale si trova l'equazione che descrive l'andamento del fattore di scala:

$$a \simeq a_i \exp \left[ H_i(t - t_i) - \frac{M^2}{12} (t - t_i)^2 \right] . \quad (4.50)$$

È utile vedere come in base alle soluzioni ottenute il parametro  $\varepsilon$  nel contesto dell'inflazione assuma il valore:

$$\varepsilon \simeq \frac{M^2}{6H^2} < 1 . \quad (4.51)$$

Per il calcolo dello scalare di curvatura  $R$ , nella fase di inflazione, si può trascurare il termine di secondo ordine dall'equazione (4.45). Così si ottiene <sup>J</sup>:

$$R \simeq 12H^2 - M^2 . \quad (4.52)$$

Si dimostra [14] che questa soluzione inflazionaria ha un comportamento attrattivo per il sistema dinamico considerato. Questo è in accordo con la richiesta di questa particolare proprietà descritta nella sezione 3.7.

---

<sup>H</sup>Queste condizioni possono essere viste come ipotesi che si assumono per ottenere una teoria più semplice e predittiva. Successivamente devono essere verificate a posteriori attraverso l'osservazione dell'accordo che le predizioni della teoria hanno con i dati sperimentali.

<sup>I</sup>Nelle equazioni il pedice  $i$  indica chiaramente il valore delle quantità al momento di inizio della fase di espansione  $t = t_i$ .

<sup>J</sup>La validità dell'approssimazione utilizzata può essere verificata a posteriori dimostrando la legittimità dell'equazione:

$$3H\dot{R} + M^2R \simeq 0$$

Questo può essere fatto per sostituzione diretta di  $R$  approssimato in base al vincolo (4.51)

La fase di espansione quasi esponenziale termina al tempo  $t = t_f$  nel momento in cui si ha che il fattore di *slow roll*  $\varepsilon \simeq 1$ , come descritto nella sezione 3.5. Da questo vincolo si ottiene:

$$H_f \simeq \frac{M}{\sqrt{6}} . \quad (4.53)$$

Andando a sostituire questo risultato nell'equazione (4.49) si ottiene:

$$t_f \simeq t_i + 6 \frac{H_i}{M^2} , \quad (4.54)$$

da cui si può estrarre in maniera immediata la formula che descrive la durata dell'espansione in base al valore dei parametri  $H_i$  ed  $M$ .

Andando a porre questo risultato nell'equazione (4.52) si ottiene una stima del valore dello scalare di curvatura al momento in cui si interrompe la fase inflazionaria. Questo risultato è perfettamente consistente con la struttura della teoria che ipotizza che il contributo del termine  $R^2$  nell'azione che descrive il campo gravitazionale sia dominante ad alte energie ma diventi altrimenti trascurabile rispetto al termine del primo ordine. Infatti si ottiene:

$$R_f \simeq M^2 . \quad (4.55)$$

Avendo il valore di  $M$  stimato in base agli esperimenti <sup>K</sup> si può vedere come:

$$\frac{R_f}{M_P^2} \ll 1 . \quad (4.56)$$

Questo vincolo esprime in maniera analoga alla condizione (4.13) il fatto che il processo di espansione inflazionaria si interrompe nel momento in cui si è in condizioni di energia tali per cui il termine dell'azione lineare in  $R$  è dominante rispetto al termine quadratico. In questo momento infatti si restaura la validità dell'equazione di Einstein classiche e quindi l'universo prosegue la sua evoluzione accuratamente descritta dai modelli di Friedmann esposti nel capitolo 2.

Si può ricavare l'espressione per il numero di *e-folding* attraverso la sostituzione dell'equazione (4.49) nell'equazione (3.66):

$$N = H_i(t_f - t_i) - \frac{M^2}{12}(t_f - t_i)^2 . \quad (4.57)$$

Considerando la (4.54) si ottiene:

$$N \simeq \frac{3H_i^2}{M^2} \simeq \frac{1}{2\varepsilon(t_i)} ; \quad (4.58)$$

in cui si è utilizzata la definizione di  $\varepsilon$  (4.51). Secondo questa teoria la durata del processo di espansione è:

$$\Delta t \simeq 6 \frac{H_i}{M^2} \simeq (12N)^{1/2} \frac{1}{M} \Bigg|_{N \simeq 65} \simeq 10^{-36} s . \quad (4.59)$$

<sup>K</sup>Gli esperimenti WMAP sulle anisotropie della radiazione CMB stimano il valore dell'ordine di grandezza della costante  $M$  di:  $M \simeq 10^{13} GeV$  (5.15).

Risulta interessante sottolineare come la teoria preveda in maniera consistente il processo di *reheating* successivo alla fase di inflazione. Infatti verso la fine dell'inflazione non sono più valide le considerazioni che si erano adottate per trascurare il termine  $\ddot{R}$  nell'equazione (4.45). Questo porta a dover considerare una fase in cui lo scalare di Ricci evolve secondo delle oscillazioni smorzate con successiva formazione di particelle ed innalzamento della densità di energia e della temperatura.

## 4.4 Inflazione $R^2$ nel frame di Einstein

Si è dimostrato come attraverso una trasformazione conforme si possa mappare la teoria in un frame differente mettendo in luce comportamenti diversi della componente dovuta alle sorgenti di campo gravitazionale. Con questo metodo si sottolineerà come la descrizione del modello dell'inflazione  $R^2$  nel frame di Jordan prenda una forma molto particolare nel frame di Einstein. Infatti si vedrà come la descrizione del modello proposto da Starobinsky nel frame di Einstein sia perfettamente analoga ad un modello in cui si ha un tensore energia-impulso dominato dalla presenza di un campo scalare con particolari proprietà.

Si consideri l'azione (4.43). Per poter analizzare il sistema nel frame di Einstein è necessario definire la trasformazione conforme:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_P}\right)g_{\mu\nu}, \quad (4.60)$$

in cui si è definito il campo scalare  $\phi$  secondo la definizione (4.37):

$$\phi = \sqrt{\frac{3}{2}}M_P \ln\left(1 + \frac{R}{3M^2}\right). \quad (4.61)$$

In questo contesto il potenziale  $V(\phi)$  assume la forma descritta nell'equazione (4.41) che esplicitamente diventa [15], si veda la figura 4.1 :

$$V(\phi) = \frac{3M^2M_P^2}{4} \left[1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_P}\right)\right]^2. \quad (4.62)$$

Il nuovo campo scalare  $\phi$  così definito rappresenta la sorgente del campo gravitazionale nel frame di Einstein. Così l'azione assume la forma (4.39) dove per convenienza il contributo dovuto al campo scalare può essere inglobato nel termine  $\mathcal{L}_m$ :

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{\partial}_\mu\phi\tilde{\partial}_{\nu\mu}\phi - \frac{3M^2M_P^2}{4} \left[1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_P}\right)\right]^2. \quad (4.63)$$

In questa trattazione si sta considerando il contributo all'azione dato dai campi di materia nel frame di Jordan come trascurabile. In questo modo il processo inflazionistico è guidato esclusivamente dalla struttura dell'interazione gravitazionale. Nel contesto del frame di Einstein, quindi, l'unico contributo al settore delle sorgenti è dato dalla presenza del campo scalare effettivo  $\phi$ .

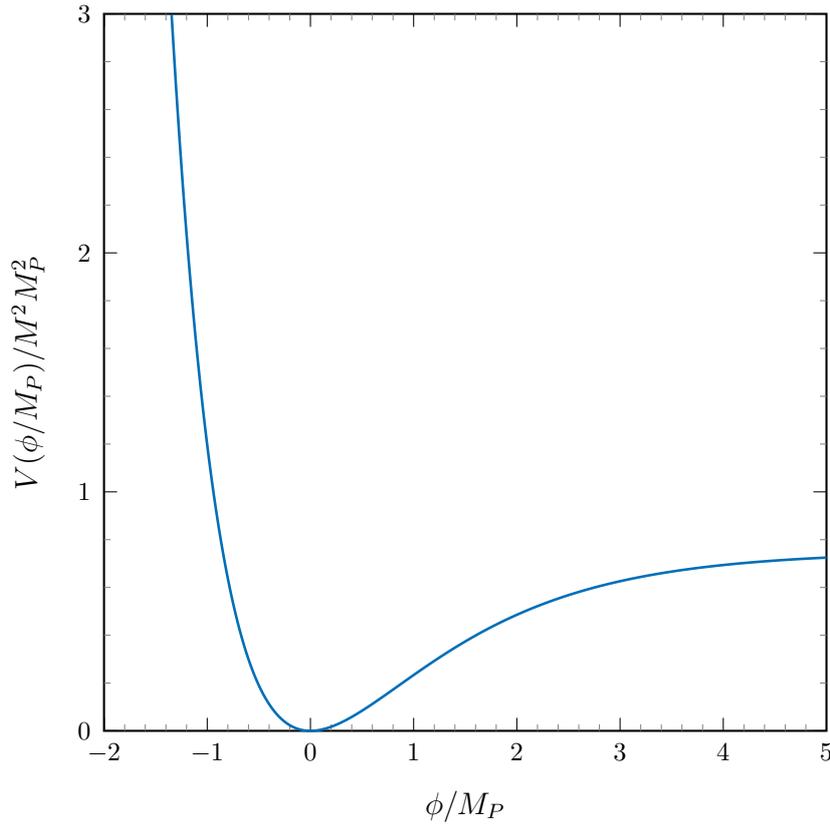


FIGURA 4.1: La figura rappresenta il potenziale descritto dall'equazione (4.62).

Per trovare l'evoluzione del sistema così trovato in questo frame si applica l'analisi fatta per un campo scalare qualsiasi nella sezione 3.4 e successivamente si introdurranno le note approssimazioni di *slow roll*. Così si ottengono l'equazione d'onda per il campo scalare e l'equazione di Friedmann (2.21) nel frame di Einstein:

$$\frac{d^2\phi}{d\tilde{t}^2} + 3\tilde{H}\frac{d\phi}{d\tilde{t}} = -\frac{dV}{d\phi} ; \quad (4.64)$$

$$\tilde{H}^2 = \frac{1}{3M_P^2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{d\tilde{t}} \right)^2 + V(\phi) \right] . \quad (4.65)$$

Per verificare la condizione di validità dell'approssimazione *slow roll* è necessario calcolare i parametri (3.38), (3.40). Il parametro  $\tilde{\varepsilon}$  è definito nel modo seguente:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{M_P^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 = \frac{4}{3} \left[ \exp \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_P} \right) - 1 \right]^{-2} . \quad (4.66)$$

Si vede che la condizione di inflazione  $\varepsilon < 1$  è soddisfatta nel caso in cui è verificata la condizione:

$$\phi > 0,94 M_P . \quad (4.67)$$

Per poter applicare l'approssimazione di *slow roll* è necessario che  $\tilde{\varepsilon} \ll 1$ , dalla quale si ottiene:

$$\frac{\phi}{M_P} \gg 1. \quad (4.68)$$

In questa condizione l'equazione (4.65) può essere semplificata eliminando i termini meno significativi ottenendo:

$$\tilde{H}^2 \simeq \frac{V(\phi)}{3M_P^2}. \quad (4.69)$$

Data questa approssimazione, si può verificare che anche il parametro  $\eta(\phi)$  soddisfa la condizione di *slow roll* in quanto:

$$\eta(\phi) \simeq \frac{V''}{3\tilde{H}^2} = -\frac{M^2}{3\tilde{H}^2} \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_P}\right) \left[1 - 2 \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_P}\right)\right], \quad (4.70)$$

così si verifica che la condizione (4.68) risulta necessaria e sufficiente per rendere applicabile l'approssimazione. In questo regime si può dimostrare come il potenziale assuma un valore costante in prima approssimazione:

$$V(\phi) \simeq \frac{3M^2 M_P^2}{4} \Big|_{\phi \gg M_P}, \quad (4.71)$$

il quale contribuisce a guidare il processo di espansione.

La soluzione delle equazioni di Friedmann per la fase di espansione può essere trovata considerando la legge di trasformazione dal frame di Jordan delle unità di tempo e del fattore di scala, come descritto nelle equazioni (4.30). In questo modo si può mappare nel frame di Einstein i risultati trovati nel frame di Jordan. È importante sottolineare come il fattore conforme  $F = (1 + R/3M^2)$ , secondo la (4.52) nel contesto delle approssimazioni (4.47), assume indicativamente il valore:

$$F \simeq \frac{4H^2}{M^2}, \quad (4.72)$$

il quale ci permette di definire il tempo  $\tilde{t}$  come:

$$\tilde{t} = \int_{t_i}^t \sqrt{F} dt \simeq \frac{2}{M} \left[ H_i(t - t_i) - \frac{M^2}{12}(t - t_i)^2 \right], \quad (4.73)$$

in cui il tempo  $\tilde{t} = 0$  corrisponde a  $t = t_i$ . Il tempo corrispondente alla fine dell'inflazione si trova per sostituzione diretta:

$$\tilde{t}_f = \frac{2N}{M}. \quad (4.74)$$

Per ottenere l'evoluzione del parametro di scala si procede applicando la stessa trasformazione all'equazione (4.50). Si ottiene:

$$\tilde{a}(\tilde{t}) \simeq \left(1 - \frac{M^2}{12H_i^2} M\tilde{t}\right) \tilde{a}_i \exp\left(\frac{M}{2}\tilde{t}\right), \quad (4.75)$$

in cui  $\tilde{a}_i = 2H_i a_i / M$ . Questa dimostra come  $\tilde{a}(\tilde{t})$  abbia un'evoluzione quasi esponenziale

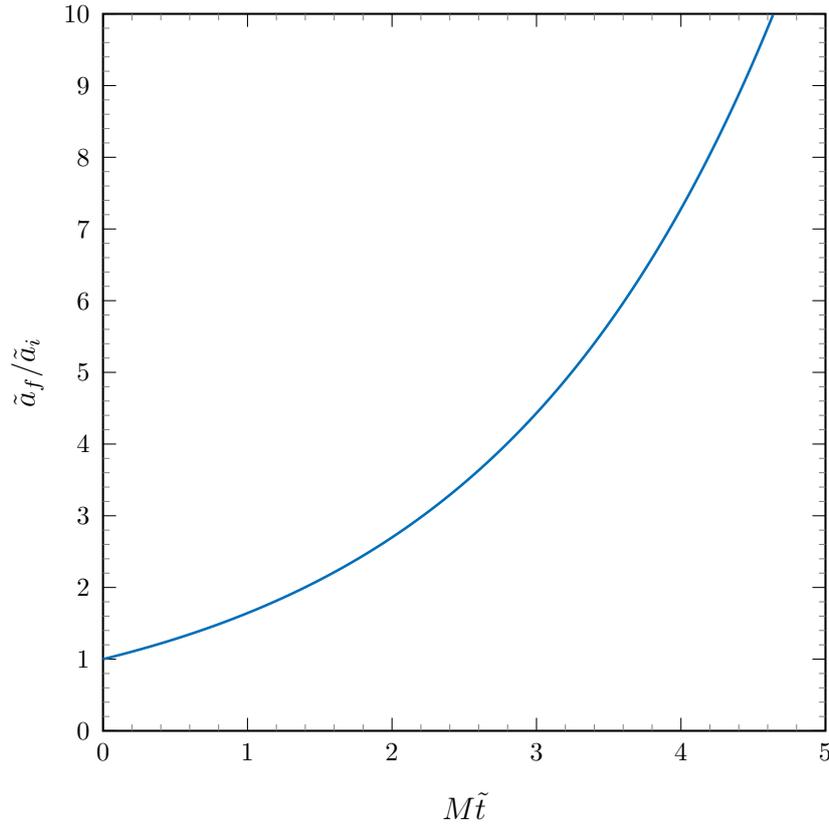


FIGURA 4.2: La figura rappresenta l'andamento del fattore di scala espresso dall'equazione (4.75). La soluzione descrive l'evoluzione dell'universo nelle sue fasi iniziali secondo la teoria dell'inflazione  $R^2$  nel frame di Einstein.

nel frame di Einstein. Il risultato trovato attraverso la trasformazione della soluzione dal frame di Jordan è consistente con la soluzione che si ottiene andando a risolvere equazioni di Friedmann nel frame di Einstein, tenendo conto delle condizioni di approssimazione *slow roll*.

Il numero di *e-folding* può essere trovato considerando la definizione (3.66). Per la forma della trasformazione conforme (4.30), si trova che:

$$\tilde{H}d\tilde{t} = Hdt \left[ 1 + \frac{\dot{F}}{2HF} \right]. \quad (4.76)$$

Questo implica che sotto la condizione (4.47)<sup>L</sup> si ha che il numero di *e-folding* nei due frame coincide [8]. Nel frame di Einstein  $\tilde{N}$  è espresso dalla relazione seguente, considerando l'approssimazione  $\phi \gg M_P$ :

$$\tilde{N} \simeq \frac{1}{M_P^2} \int_{\phi_{end}}^{\phi_i} \frac{V}{V'} d\phi \simeq \frac{3}{4} e^{\sqrt{2/3}\phi_i/M_P}. \quad (4.77)$$

<sup>L</sup>Si trova che :  $|\dot{F}/(2HF)| \simeq |\dot{H}/H^2| \ll 1$

Attraverso la definizione (4.66) e la precedente equazione si ottiene che:

$$\tilde{\epsilon} \simeq \frac{3}{4\tilde{N}^2} . \quad (4.78)$$

Infine è interessante notare come il processo di reheating nel frame di Einstein sia conseguenza naturale della teoria. Infatti il modello che descrive il potenziale per il campo scalare in Figura 4.1 prevede che  $V(\phi)$  sia approssimativamente costante nella fase in accordo con le condizioni di *slowroll*  $\phi \gg M_P$ , mentre presenta una forma che approssima il potenziale di tipo quadratico nel regime di fine inflazione. Questo può essere dedotto osservando che:

$$V(\phi)|_{|\phi| \ll M_P} \simeq \frac{1}{2} M^2 \phi^2 . \quad (4.79)$$

Si vede che secondo l'equazione (4.64) il campo scalare nella condizione  $|\phi| \ll M_P$  evolve seguendo oscillazioni smorzate dal termine di Hubble attorno alla posizione di equilibrio  $\phi = 0$ . Questo processo rappresenta il processo di reheating analogo a quello descritto nel frame di Jordan.



# Capitolo 5

## Conclusione

Il paradigma dell'inflazione si basa sull'ipotesi che sia avvenuta un'espansione accelerata che ha portato all'aumento delle dimensioni dell'universo di  $\sim 28^A$  ordini di grandezza. Attraverso la strutturazione quantitativa della teoria che deriva da queste ipotesi si riesce ad ottenere un modello consistente che risolve i problemi principali legati alle condizioni iniziali molto particolari di cui necessita l'universo primordiale secondo le teorie classiche.

All'interno di questo modello si sono costruite molte ipotesi differenti tra loro per quanto riguarda la natura del campo scalare che provoca l'evoluzione ipotizzata. Tra questi si è brevemente descritta la teoria della vecchia inflazione. Un modello più efficace è stato descritto nel capitolo 4 in cui le più innovative teorie della gravità hanno giocato un ruolo fondamentale nella descrizione del processo inflazionario.

Ciò che risulta sfuggibile è come queste teorie siano verificate attualmente nell'ambito sperimentale. Quasi la totalità delle osservazioni che vengono sostenute oggi analizzano lo spettro delle radiazioni elettromagnetiche che provengono da sorgenti più o meno lontane, non è possibile però raggiungere eventi antecedenti alla superficie di ultimo scattering. Fino a che non sarà tecnologicamente possibile osservare direttamente le onde gravitazionali non si riuscirà a spingere le osservazioni dirette oltre il limite definito da  $t_{ls}$ . Si è descritto come l'epoca inflazionaria sia situata ben prima della superficie di ultimo scattering. Nonostante ciò è possibile, attraverso osservazioni indirette, trovare risultati sperimentali che vincolano la teoria dell'inflazione e ne definiscono la validità analizzando gli effetti che questa ha avuto su fenomeni secondari.

La proprietà più importante della teoria dell'inflazione è quella di ammettere la formazione di perturbazioni scalari e tensoriali su larga scala come frutto di processi quantistici. Queste denominazioni si riferiscono rispettivamente alle perturbazioni della densità del fluido cosmico ed alle onde gravitazionali. Chiaramente, data la forma delle equazioni di Einstein, le perturbazioni di densità sono strettamente connesse alle perturbazioni dello scalare di curvatura, come si vedrà in seguito. Le perturbazioni della densità sono responsabili della formazione delle galassie, come descritto brevemente nell'introduzione, tramite l'instabilità gravitazionale. Inoltre queste sono responsabili di alcune anisotropie della radiazione cosmica di fondo. Le onde gravitazionali sono osservabili indirettamente grazie agli effetti che hanno sulla generazione di ulteriori anisotropie della CMB. Quel-

---

<sup>A</sup>Si veda come riferimento l'equazione (3.62).

lo che si riesce a spiegare attraverso la teoria delle perturbazioni generate nell'epoca inflazionaria è la larga scala su cui queste si estendono.

La proprietà fondamentale che ha l'inflazione è l'ipotizzare un'evoluzione dell'orizzonte cosmologico differente dall'evoluzione descritta dai modelli di Friedmann. Si è sottolineato come questa caratteristica sia alla base della risoluzione dei problemi cosmologici.  $R_H$  infatti rappresenta la scala oltre la quale i processi causali non possono avvenire. Prima della formulazione della teoria dell'inflazione, l'impossibilità di generare perturbazioni su scale maggiori dell'orizzonte ha portato i ricercatori ad imporre le fluttuazioni osservate "ad hoc" senza nessuna spiegazione fisica della loro natura.

Per le analisi successive si utilizza la tecnica matematica dell'espansione in serie di Fourier. In questo modo si può espandere una qualsiasi perturbazione in funzione del numero d'onda comovente  $k^B$ . Nel processo di inflazione l'orizzonte cosmologico  $R_H$  decresce, rendendo le scale fisiche sempre più grandi rispetto ad esso. In questo modo, una disomogeneità del campo scalare  $\phi$  nel frame di Einstein o una perturbazione della metrica da quella espressa nell'equazione (2.8) nel frame di Jordan, può essere studiata su scale in cui entrano in gioco le fluttuazioni quantistiche. Successivamente, in seguito all'evoluzione particolare di  $R_H$ , le scale di lunghezza su cui si estendono le perturbazioni crescono fino a fuoriuscire dall'universo osservabile andando a generare le fluttuazioni su larga scala osservate oggi. Il processo che porta le fluttuazioni quantistiche a diventare fluttuazioni su larga scala è spigato in maniera consistente. Con l'evoluzione di Friedmann successiva alle fasi primordiali dell'universo le scale fisiche su cui sono avvenute le fluttuazioni hanno la possibilità di rientrare nell'universo osservabile.

La più generale possibile perturbazione al primo ordine della metrica omogenea e isotropa (2.8) nel frame di Jordan prende la forma [8]:

$$ds^2 = -(1 + 2\alpha)dt^2 - 2a(t)(\partial_i\beta - S_i)dt dx^i + a^2(t) [(1 + 2\gamma)\delta_{ij} + 2\partial_i\partial_j\xi + 2\delta_j F_i + h_{ij}] dx^i dx^j . \quad (5.1)$$

Nella precedente definizione si è applicato il teorema della decomposizione SVT, scalare-vettore-tensore [18]. Il teorema afferma che le perturbazioni scalari, vettoriali e tensoriali sono indipendenti tra loro al primo ordine e quindi possono essere trattate separatamente. Nel caso considerato  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\xi$  sono le perturbazioni scalari.  $S_i$  e  $F_i$  sono le perturbazioni vettoriali e sono considerate trascurabili [13]<sup>C</sup>. Infine  $h_{ij}$  rappresenta le perturbazioni tensoriali.

Le perturbazioni scalari possono essere osservate definendo la perturbazione della curvatura intrinseca che assume la forma:

$$\mathcal{R} = \gamma + \frac{1}{3}\xi \quad (5.2)$$

nel sistema di riferimento in cui le ipersuperfici spaziali sono comoventi.

Le perturbazioni tensoriali si presentano sotto forma di onde gravitazionali e possono essere descritte prendendo la scomposizione tensoriale della metrica (5.1)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [(\delta_{ij} + 2\xi_{ij}^T) dx^i dx^j] . \quad (5.3)$$

<sup>B</sup>Il numero d'onda definito come  $k = 2\pi/\lambda$  in cui  $\lambda$  è la scala comovente caratteristica della perturbazione. Non è da non confondere con la costante di curvatura  $k$  definita nel capitolo (2).

<sup>C</sup>Le perturbazioni vettoriali non sono generate durante l'inflazione e vengono considerate assenti.

Sorvolando sui calcoli necessari per definire le grandezze di interesse fisico, come la scelta del gauge e la quantizzazione della teoria, si riportano i risultati fondamentali.

La perturbazione della metrica si ripercuote sulle equazioni di Einstein in due modi. Nel settore geometrico in cui sono presenti i termini derivanti dal tensore di Riemann e nel settore della materia in cui è presente il tensore energia-impulso <sup>D</sup>. L'evoluzione e la struttura delle perturbazioni è definita dalle equazioni che descrivono la gravità nella fase di inflazione. Si può scrivere quindi l'azione per la teoria perturbata e applicare le tecniche di quantizzazione nel limite in cui  $k \gg aH$  <sup>E</sup>. Dal principio variazionale poi si ottengono le equazioni dinamiche che descrivono l'evoluzione delle perturbazioni nella fase inflazionaria fino a che non escono dall'orizzonte  $R_H$ . È importante sottolineare che i calcoli possono essere svolti in particolari scelte di gauge che rispecchiano la libertà di scegliere il sistema di riferimento assicurata dalla covarianza della teoria.

Per definire le quantità osservabili è utile definire lo spettro di potenza. Si consideri una qualsiasi quantità  $g(\mathbf{x}, t)$ . Questa può essere espressa attraverso una espansione in serie di Fourier:

$$g(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} g_{\mathbf{k}}(t) . \quad (5.4)$$

Lo spettro di potenza  $\mathcal{P}_g(k)$  può essere definito nel modo seguente [13]:

$$\langle g_{\mathbf{k}_1}^*, g_{\mathbf{k}_2} \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_g(k) , \quad (5.5)$$

in modo da avere:

$$\langle g^2(\mathbf{x}, t) \rangle = \int_0^\infty \mathcal{P}_g(k) \frac{dk}{k} . \quad (5.6)$$

Si può quindi definire l'indice spettrale come:

$$n_g(k) - 1 = \frac{d \ln \mathcal{P}_g}{d \ln k} . \quad (5.7)$$

Infine un parametro utile da confrontare con gli esperimenti è il rapporto tra gli spettri di potenza scalare e tensoriale definito nel modo seguente:

$$r = \frac{\mathcal{P}_{\mathcal{T}}}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} . \quad (5.8)$$

Per il modello dell'inflazione  $f(R)$  di Starobinsky nel frame di Jordan descritto nella sezione 4.3, si deducono i seguenti spettri di potenza [8]:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \simeq \frac{1}{96\pi^2} \left( \frac{M}{M_P} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon^2} ; \quad (5.9)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{T}} \simeq \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{M}{M_P} \right)^2 . \quad (5.10)$$

---

<sup>D</sup>Si tenga presente la forma del tensore energia-impulso per il fluido perfetto con cui si approssima la materia presente nell'universo (2.17). I termini perturbativi nella metrica implicano una perturbazione della definizione delle velocità comoventi.

<sup>E</sup> $\lambda \ll r_H$ .

L'evoluzione del parametro di Hubble è descritta dall'equazione (4.49). In questi calcoli si osserva che si può utilizzare la approssimazione  $H(t_k) \simeq H_i$ . Questa approssimazione è valida se al tempo  $t_k$ , il momento in cui la lunghezza di perturbazione ha superato il raggio di Hubble ( $k = aH$ ), è rispettata la relazione:

$$\left(\frac{M^2}{6}\right) (t_k - t_i) \ll H_i . \quad (5.11)$$

In questo modo si può approssimare il numero di *e-folding* dal tempo  $t_k$  al tempo  $t_f$  come:

$$N_k \simeq \frac{1}{2\varepsilon(t_k)} . \quad (5.12)$$

Così si ottiene la relazione per lo spettro di potenza:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \simeq \frac{N_k^2}{24\pi^2} \left(\frac{M}{M_P}\right)^2 . \quad (5.13)$$

Le osservazioni sperimentali descrivono un valore per  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$  relativo alla scala  $k = 0.002Mpc^{-1}$  di [11]:

$$2.41(10) \cdot 10^{-9} . \quad (5.14)$$

Con il valore tipico considerato per  $N_k$  di 55, la costante di massa  $M$  risulta:

$$M \simeq 1.5 \cdot 10^{-5} M_P . \quad (5.15)$$

L'indice spettrale diventa:

$$n_{\mathcal{R}} - 1 \simeq -3.6 \cdot 10^{-2} \left(\frac{N_k}{55}\right)^{-1} , \quad (5.16)$$

che per  $N_k = 55$  implica  $n_{\mathcal{R}} \simeq 0.964$  che è in accordo con le osservazioni sperimentali più recenti che impongono [2]:

$$n_{\mathcal{R}} = 0.968(6) . \quad (5.17)$$

Il rapporto tra perturbazioni scalari e tensoriali definito con  $r$  si ricava essere [8]:

$$r \simeq \frac{12}{N_k^2} \simeq 4.0 \cdot 10^{-3} \left(\frac{N_k}{55}\right)^{-2} . \quad (5.18)$$

Le osservazioni sperimentali per questo parametro si limitano ad una stima del valore massimo [2]:

$$r < 0.11 . \quad (5.19)$$

Una proprietà notevole è il fatto che i risultati ottenuti nel frame di Jordan sono analoghi a quelli che si otterrebbero analizzando le perturbazioni del campo scalare  $\phi$  nel frame di Einstein [8] nelle condizioni di slow roll, rendendo la scelta del frame indifferente al fine del confronto di  $n_{\mathcal{R}}$  e  $r$  con i dati sperimentali.

Questi valori così trovati dimostrano come le predizioni della teoria dell'inflazione  $R^2$  siano in accordo con le osservazioni sperimentali rendendo questo modello di inflazione il più adeguato e consistente al momento attuale. Si vedano le figure 5.1 e 5.2.

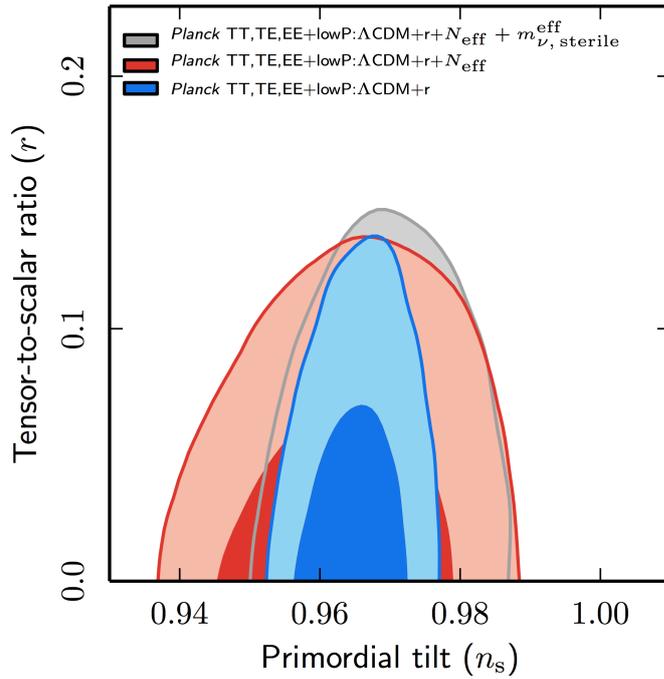


FIGURA 5.1: La figura rappresenta i valori ottenuti attraverso gli esperimenti citati nella didascalia per  $r$ ,  $n_{\mathcal{R}}$  pubblicati in [3]. Nell’immagine si definisce  $n_s = n_{\mathcal{R}}$ .

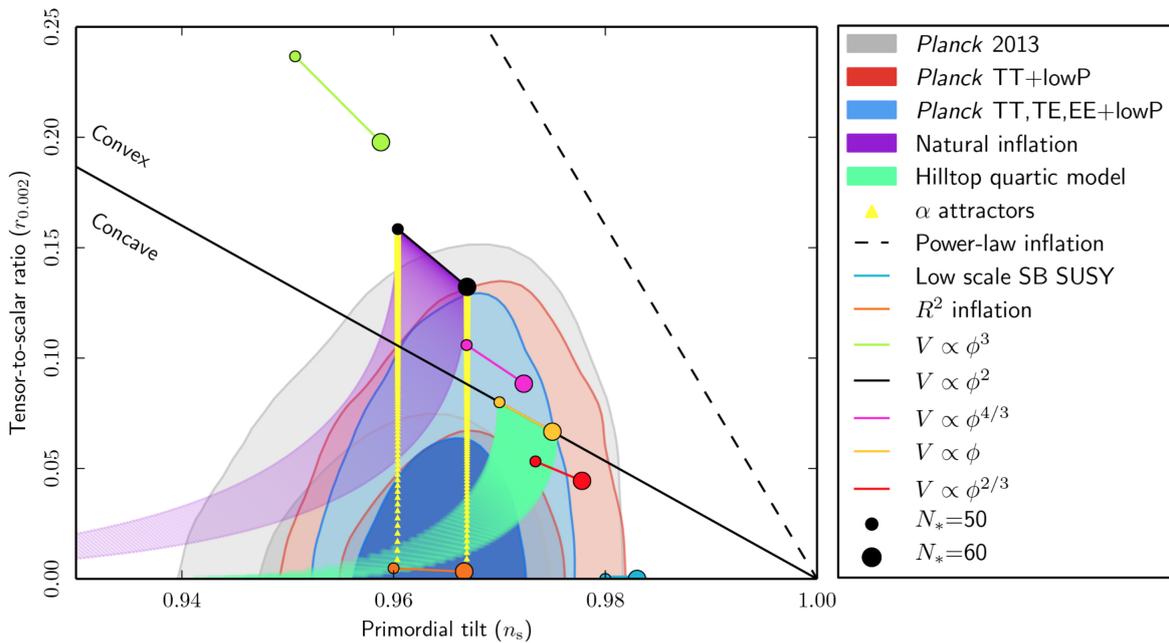


FIGURA 5.2: La figura rappresenta il posizionamento delle predizioni ottenute attraverso i vari modelli di inflazione rispetto ai valori sperimentali disponibili [3].

Attraverso le ultime analisi dei paragrafi precedenti, in cui si sono riportati i risultati principali della teoria delle perturbazioni cosmologiche, si è descritto l’accordo che la teoria esposta in questa tesi ha con i dati sperimentali attualmente disponibili. Per quanto detto in generale sulle teorie fisiche nell’introduzione, questo la rende una descrizione valida di ciò che è avvenuto nei primi istanti dell’universo primordiale. Future analisi

e osservazioni potranno confermare o mettere in dubbio questa teoria portando ad una descrizione ancora migliore della realtà in cui viviamo. Grande attesa risiede nelle possibili osservazioni delle onde gravitazionali che nei prossimi decenni potrebbero portare una svolta sul modo di affrontare le osservazioni cosmologiche ottenendo dati e osservazioni sperimentali mai ottenuti finora.

# Bibliografia

- [1] P.A.R. Ade et al., *Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results*, Astron.Astrophys. **571** (2014), A1.
- [2] ———, *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*, Planck Collaboration, arXiv 1502.01589, 2015.
- [3] ———, *Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation*, Planck Collaboration, arXiv 1502.02114, Feb 2015.
- [4] Salvatore Capozziello and Mariafelicia De Laurentis, *Extended Theories of Gravity*, Phys.Rept. **509** (2011), 167–321.
- [5] S.M. Carroll, *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*, Addison Wesley, 2004.
- [6] P.P. Coles and F. Lucchin, *Cosmology: The origin and evolution of cosmic structure*, Wiley, 2003.
- [7] Mariusz P. Dabrowski, Janusz Garecki, and David B. Blaschke, *Conformal transformations and conformal invariance in gravitation*, Annalen Phys. **18** (2009), 13–32.
- [8] Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa,  *$f(R)$  theories*, Living Rev.Rel. **13** (2010), 3.
- [9] Valerio Faraoni, Edgard Gunzig, and Pasquale Nardone, *Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology*, Fund.Cosmic Phys. **20** (1999), 121.
- [10] D. J. Fixsen, *The temperature of the cosmic microwave background*, The Astrophysical Journal **707** (2009), 916–920.
- [11] G. Hinshaw, D. Larson, E. Komatsu, D. N. Spergel, C. L. Bennett, J. Dunkley, M. R. Nolta, M. Halpern, R. S. Hill, N. Odegard, L. Page, K. M. Smith, J. L. Weiland, B. Gold, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, G. S. Tucker, E. Wollack, and E. L. Wright, *Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results*, The Astrophysical Journal Supplement **208** (2013), 19.
- [12] L.D. Landau, *The classical theory of fields*, Course Of Theoretical Physics, Elsevier Science, 2013.

- 
- [13] A.R. Liddle and D.H. Lyth, *Cosmological inflation and large-scale structure*, Cambridge University Press, 2000.
- [14] Kei-ichi Maeda, *Inflation as a transient attractor in  $R^2$  cosmology*, Phys. Rev. D **37** (1988), 858–862.
- [15] ———, *Towards the einstein-hilbert action via conformal transformation*, Phys. Rev. D **39** (1989), 3159–3162.
- [16] P. J. Mohr, B. N. Taylor, and D. B. Newell, *CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2010*, Reviews of Modern Physics **84** (2012), 1527–1605.
- [17] K.A. Olive and Particle Data Group, *Review of particle physics*, Chinese Physics C **38** (2014), no. 9, 090001.
- [18] Norbert Straumann, *Proof of a decomposition theorem for symmetric tensors on spaces with constant curvature*, Annalen Phys. **17** (1997), 609–611.
- [19] R.M. Wald, *General relativity*, University of Chicago Press, 2010.
- [20] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, Wiley, 1972.
- [21] ———, *Cosmology*, Cosmology, OUP Oxford, 2008.