Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

LA TEORIA DEI NODI: UN ESPERIMENTO DIDATTICO IN UNA SCUOLA SUPERIORE

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Giorgio Bolondi

Presentata da:
Valentina Tomei

I Sessione
Anno Accademico 2014/2015

Al Babbo, la Mamma, Maddi,

Eli, Tommi e Giorgio

Indice

Introduzione

A partire dall'immagine delle Parche, che annodano e snodano il filo del destino, il simbolismo del nodo compare in molte espressioni artistiche e della vita dell'uomo. Il termine "nodo" fa parte della quotidianità, come il nodo della cravatta, il nodo delle scarpe, il nodo piano, il nodo savoia e tanti altri. Raffigurazioni di nodi si trovano incise sui megaliti e sulle pietre funerarie delle popolazioni del Neolitico. Intrecci di oscuro significato mistico e religioso sono rappresentati sui menhir e su manufatti dell'arte celtica. Ancora nel Medioevo nodi e intrecci adornano gli oggetti di culto e le miniature dei libri. Anche in letteratura affiorano inaspettatamente dei nodi: nel Paradiso dantesco, dove sono citati almeno tre volte (nei canti VII, XXVIII e XXXIII).

La teoria dei nodi ha le sue origini verso il 1860 nelle riflessioni di Lord Kelvin sulla struttura ultima della materia. L'idea di Kelvin era che la materia fosse costituita da "vortex atoms", atomi vortice o mulinello, il cui modello era dato da piccoli nodi. Per sviluppare la teoria era dunque necessario stabilire quali fossero i diversi tipi possibili di nodi. Una tale classificazione avrebbe fornito una classificazione degli atomi, associando a ogni tipo di nodo un particolare atomo. I legami fra atomi sarebbero dunque stati spiegati da reciproci annodamenti, senza bisogno di far intervenire speciali forze atomiche. La proposta stimolò uno studio dei tipi più semplici di nodi, ma cadde in disuso quando nella prima metà del '900 Niels Bohr propose invece di considerare gli atomi come sistemi solari in miniatura, tenuti insieme da forze analoghe a quella gravitazionale.

La teoria dei nodi ebbe dunque nuova vita solo nel '900 quando se ne intuirono le potenzialità come strumento applicabile anche in altre aree scientifiche come la la fisica e la biologia. Nonostante i grandi sviluppi degli ultimi anni, il problema principale resta una classificazione completa dei nodi; è quindi lecito affermare che la storia dei nodi non è ancora conclusa.

L'intento di questo progetto di tesi è quello di proporre a ragazzi di una scuola superiore un tema attuale come la teoria dei nodi, osservandone le reazioni di fronte a un argomento matematico molto distante da ciò che viene usualmente trattato a scuola, nella speranza di infondere loro il piacere della scoperta, in particolare in matematica. L'approccio per immagini e diverse attività pratiche sono un indispensabile strumento per un corretta comprensione del progetto.

La prima parte di questa tesi è strutturata in modo da raggruppare le principali nozioni di base della teoria dei nodi: la definizione di nodo e di link, gli incroci, i diagrammi, gli invarianti topologici e la connessione tra nodi e teoria dei grafi.

Nel secondo capitolo vengono analizzati i nodi torici, cioè realizzati attorno a una superficie torica, e quelli che vengono chiamati nodi celtici, cioè quei nodi presenti nell'arte celtica. La scelta di trattare nello specifico questi nodi è stata dettata dal facile legame che possiede la loro struttura con l'algebra e quindi sono stati molto utili nel progetto didattico per sottolineare come l'algebra descriva facilmente questi oggetti topologici.

Dopo questa introduzione, la tesi procede con l'esposizione dell'esperimento didattico legato alla teoria dei nodi.

Nel terzo capitolo viene motivata la scelta di questa teoria come argomento da affrontare in classe, vengono presentati gli obiettivi di tale lavoro e descritto il programma KnotPlot utilizzato per la realizzazione di gran parte delle immagini di questa tesi.

Nel quarto capitolo viene riportato il diario delle lezioni, in cui vengono descritte le ore in classe, i materiali utilizzati e soprattutto le reazioni e le osservazioni dei ragazzi durante e dopo le lezioni e infine la verifica che si è scelto di effettuare con i relativi risultati.

Nel quinto capitolo vengono tratte le conclusioni del lavoro svolto in classe, verificando così se gli obiettivi stabiliti sono stati effettivamente raggiunti.

Capitolo 1

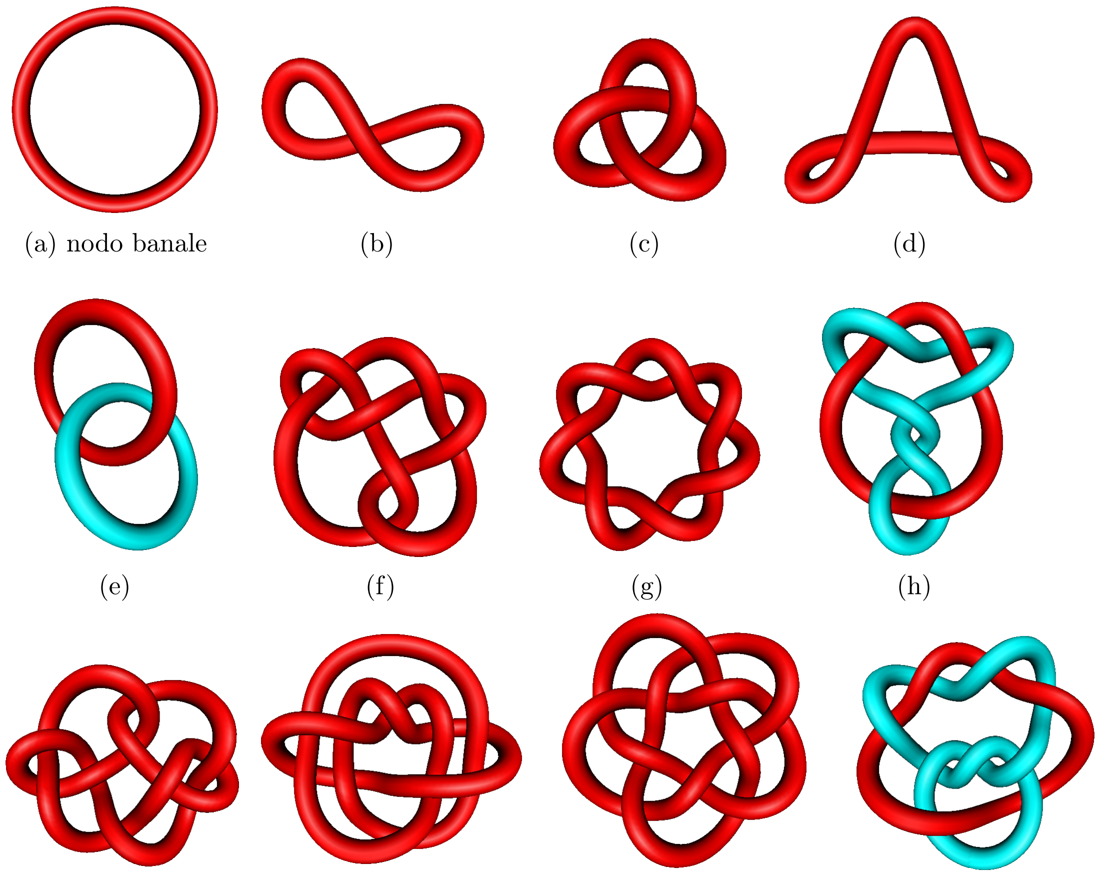
Teoria dei nodi

La teoria dei nodi è una parte della topologia che studia l'equivalenza dei nodi, in particolare il problema di quando due nodi possono essere trasformati l'uno nell'altro con un movimento continuo. Nelle seguenti pagine viene dato un cenno di questa teoria che è ancora oggi in crescita.

1.1 Definizioni

Pensando a un **nodo** la prima cosa che ci viene in mente è un pezzo di corda con le estremità libere, come il nodo delle stringhe per allacciarsi le scarpe o il nodo della cravatta e, per quanto si provi a stringere questo nodo, questo si potrà sempre sciogliere, pur di avere un po' di pazienza, semplicemente facendo scorrere uno dei capi liberi a ritroso lungo il nodo stesso. In questa teoria si chiamano nodi quelli che hanno le estremità chiuse come spiegato nella seguente definizione.

Definizione 1. Un **nodo** è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ omeomorfo alla circonferenza S^1.



(a) nodo banale (b) (c) (d)
(e) (f) (g) (h)
(i) (j) (k) (l)

Figura 1.1.1: Esempi di nodi e link

Una domanda plausibile è chiedersi perché è stato definito il nodo come un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e non come un sottospazio K di $\mathbb{R}^n$ che sia omeomorfo a S^1. Il motivo per cui nella definizione si considera $\mathbb{R}^3$ è indicato nel seguente teorema che però non dimostreremo:

Teorema 2. *Sia K un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ omeomorfo a S^1. Se $n \neq 3$, esiste sempre un omeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che $h(K)$ sia la circonferenza standard in $\mathbb{R}^n$.*

Nel caso $n = 2$ questo è noto come teorema di $Schönflies$. Nel caso $n \geq 4$, il teorema asserisce che se vivessimo in un mondo a quattro o più dimensioni potremmo sciogliere tutti i nodi: infatti, intuitivamente, la quarta dimensione ci darebbe lo spazio per far passare una parte della corda di cui è fatto il nodo "attraverso" un'altra.

Possiamo osservare alcuni esempi di nodi e *link* nella figura 1.1.1. Sebbene tutti gli spazi rappresentati in figura siano omeomorfi fra loro, poiché tutti omeomorfi ad una circonferenza, essi appaiono diversi in relazione allo spazio circostante.

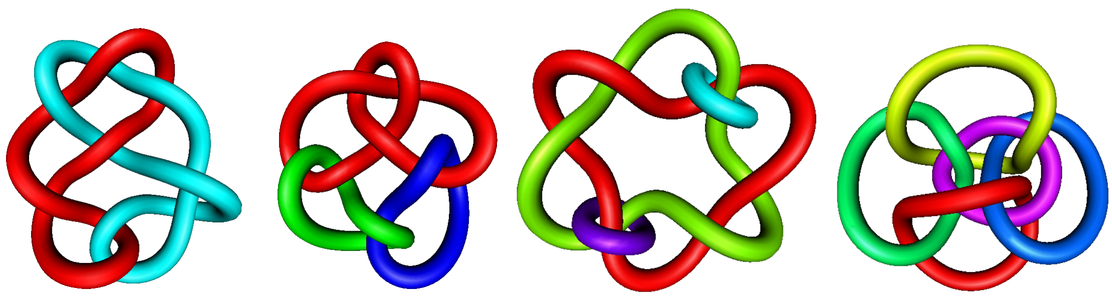
Un nodo viene detto non intrecciato o sciolto se esiste un movimento continuo nello spazio $\mathbb{R}^3$ che lo faccia coincidere con il nodo banale (il nodo (a) nella figura 1.1.1) altrimenti viene detto intrecciato. La definizione rigorosa è la seguente.

Definizione 3. Un nodo K è **non intrecciato** se esiste un omeomorfismo $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $h(K)$ sia la circonferenza standard $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ nel piano xy, altrimenti diremo che K è **intrecciato**.

Per esempio osservando la figura 1.1.1 è evidente che i nodi (a), (b) e (d) non sono intrecciati e quindi riconducibili uno all'altro tramite un movimento continuo, mentre tutti gli altri lo sono.

Osservando sempre la figura 1.1.1 si può notare come i nodi (e), (h) e (l) siano differenti dagli altri, essi infatti sono composti dall'intreccio di due nodi.

Definizione 4. Un intreccio di due o più nodi viene chiamato **link** e ciascuno dei nodi di cui è composto il link viene chiamato **componente**.

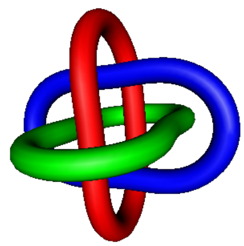


(a) 2 componenti (b) 3 componenti (c) 4 componenti (d) 5 componenti

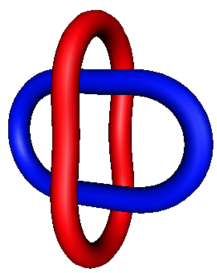
Figura 1.1.2: Esempi di link

Nella trattazione della tesi i link verranno anche chiamati nodi specificandone le componenti. Il link di Hopf, (e) in figura 1.1.1 è il nodo più semplice a due componenti. In figura 1.1.2 sono rappresentati alcuni link con più componenti.

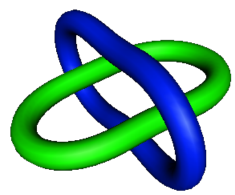
Un altro esempio di link interessante per le sue caratteristiche è dato dagli anelli borromei, un insieme di tre anelli allacciati fra loro. Questo link è stato il simbolo della celebre famiglia lombarda da cui prende il nome e di diverse altre famiglie che lo hanno preso come emblema grazie al significato simbolico a esso attribuito. La loro caratteristica peculiare è che se si toglie una delle componenti che compongono il link (per esempio quella blu) allora l'intera costruzione si sfalda e le altre due componenti, la rossa e la verde, non sono più allacciate tra loro. Quindi è solo quando li si considera tutti e tre insieme che gli anelli formano una configurazione stabile. Questa caratteristica di raggiungere la stabilità solo attraverso il contributo di tutti gli elementi ha fatto sì che essi diventassero simbolo di unità. Quindi le tre componenti sono legate fra loro, benché non lo siano a coppie come si può osservare in figura 1.1.3. Questo non accade per nessuno degli imitatori dei borromei, cioè degli altri link a tre componenti.



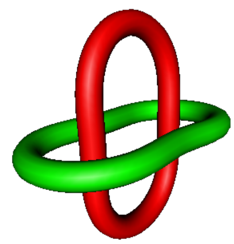
(a) Anelli borromei



(b)



(c)



(d)

Figura 1.1.3

Definizione 5. Due nodi K_1 e K_2 sono **simili** se esiste un omeomorfismo $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $h(K_1) = K_2$.

Ad esempio i nodi (a), (b) e (d) della figura 1.1.1 sono palesemente simili. Osservando la figura 1.1.4 si può notare come il primo e l'ultimo nodo siano uno l'immagine speculare dell'altro e pertanto siano simili, ma oltre a questo hanno un'altra proprietà: è possibile deformarli uno nell'altro come mostrato in figura 1.1.4. Questa azione non è applicabile ai trifogli in figura 1.1.5, poiché, nonostante siano uno lo specchio dell'altro, non esiste alcun movimento che riesca a farli coincidere. Per realizzare la similitudine in questo caso occorre riflettere il nodo rispetto a un piano e questa operazione non conserva l'orientazione, ossia trasforma un triedro destro in un triedro sinistro.

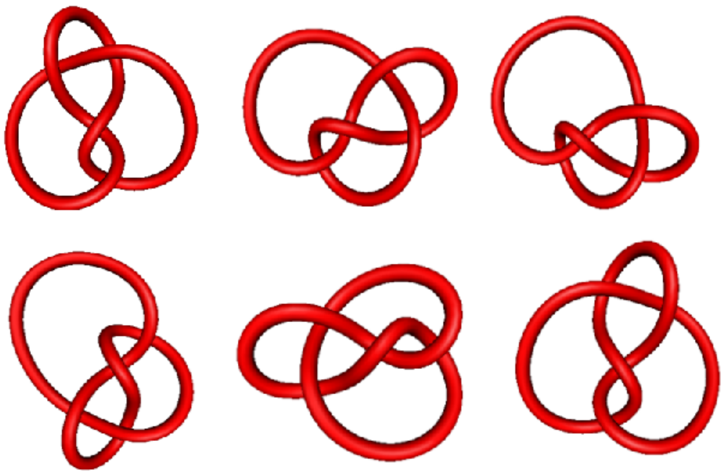


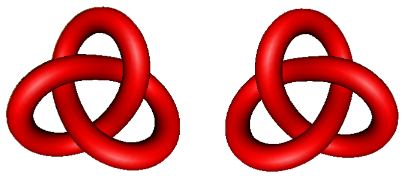
Figura 1.1.4: Deformazione nodo a otto

Definizione 6. Un nodo in cui viene scelto un verso di percorrenza è detto **nodo orientato**.

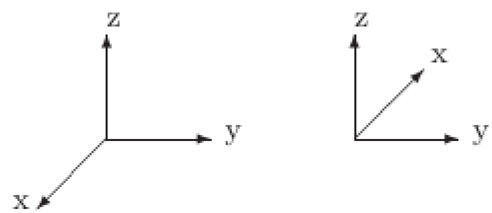
Si dice che un omeomorfismo $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ **conserva l'orientazione** se h trasforma un triedro destro in un triedro destro.

Definizione 7. Due nodi K_1 e K_2 vengono chiamati **equivalenti** se esiste un omeomorfismo $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che conserva l'orientazione e tale che $h(K_1) = K_2$.

Intuitivamente due nodi sono equivalenti se possono essere fisicamente deformati l'uno nell'altro. Non è consentito tagliare il nodo, né farlo passare attraverso se stesso. Quindi i due trifogli in figura 1.1.5 sono simili ma non equivalenti, mente il primo e l'ultimo nodo a otto della figura 1.1.4 sono sia simili che equivalenti.



(a) trifoglio destro e trifoglio sinistro



(b) triedro destro e triedro sinistro

Figura 1.1.5

Uno dei modi per stabilire l'equivalenza tra nodi è quello di esaminare le rispettive proiezioni su di un piano. Una tale proiezione si chiama **diagramma** del nodo ed è uno dei modi più chiari e immediati per visualizzarlo. Prendiamo in esame la figura 1.1.6: osservando il diagramma del nodo è facile rendersi conto che si formano delle intersezioni particolari in corrispondenza dei punti dove un tratto di corda passa sopra o sotto a un altro tratto. Tali intersezioni vengono chiamatie **punti di incrocio.**

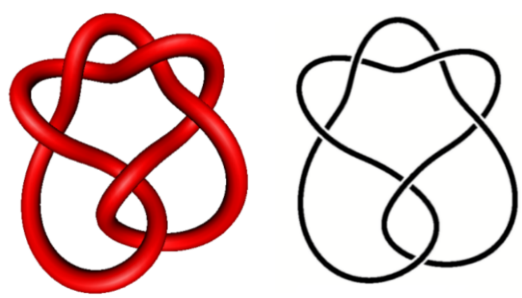
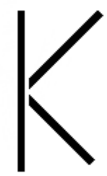


Figura 1.1.6: Un nodo con il suo diagramma

Definizione 8. Sia K un nodo in $\mathbb{R}^3$e sia p la proiezione di $\mathbb{R}^3$ sul piano $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$ definita da $p\,(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$; si dice che un punto $x \in p(K)$ è un **punto di incrocio**, o **punto doppio** se $p^{-1}(x) \cap K$ contiene esattamente due punti.

Un punto di incrocio è detto improprio se scompare con una leggera perturbazione del nodo, cioè spostando uno dei lembi di corda del nodo stesso, altrimenti viene chiamato proprio (figura 1.1.7).

(a) proprio



(b) improprio

Figura 1.1.7

Un nodo si dice **semplice** se è simile a un nodo con un numero finito di punti di incrocio, ognuno dei quali è proprio. Tutti i nodi nelle precedenti immagini sono nodi semplici, mentre nella figura 1.1.8 è riportato un **nodo non semplice** dato dalla composizione infinita di trifogli.

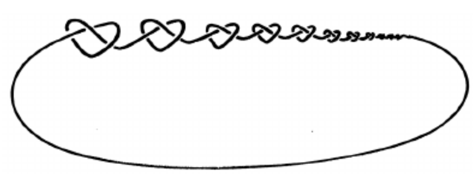
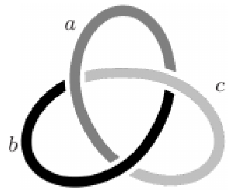
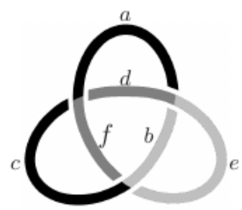


Figura 1.1.8: Nodo non semplice

Oltre agli incroci, osservando il diagramma di un nodo, è possibile individuare **ponti** e **archi**. I ponti sono tratti di curva che vanno da un sottopassaggio al successivo, dove con sottopassaggio si intende l'incrocio in cui un tratto di curva passa sotto a un altro tratto; gli archi invece sono tratti di curva compresi tra due incroci consecutivi. Osservando il nodo in figura 1.1.9 è facile notare come il numero di ponti sia ugale al numero di incroci mentre quello degli archi sia esattamente il doppio.



(a) ponti



(b) archi

Figura 1.1.9: Ponti e archi del nodo trifoglio

Diremo che un nodo è **primo** se non può essere suddiviso in uno o più nodi più semplici (meno incroci) e non banali. I nodi non primi vengono detti **composti** e si ottengono eseguendo la somma connessa tra uno o più nodi. Presi due nodi K_1e K_2 e fissato su di essi un verso di percorrenza, la loro **somma connessa** $K_1\#K_2$ è il nodo ottenuto tagliando ognuno dei due nodi e attaccando i due pezzi di corda ottenuti in modo da rendere compatibili i versi di percorrenza. Un esempio di somma connessa tra due nodi trifogli è dato dalla figura 1.1.10.

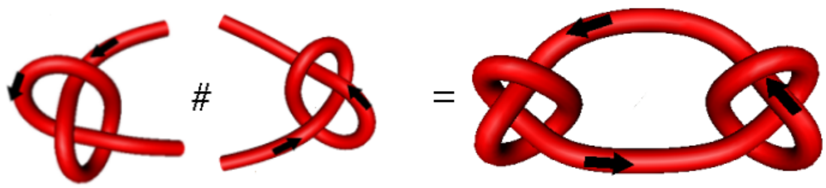


Figura 1.1.10: Somma connessa tra due nodi trifogli

1.2 Invarianti topologici

La teoria dei nodi si occupa di trovare invarianti topologici dei nodi che ne permettano una adeguata classificazione.

Un **invariante topologico** di un nodo è una sua proprietà intrinseca, che non cambia se il nodo è rappresentato in maniera differente e vale per tutti gli altri nodi simili al primo: due nodi che hanno proprietà diverse per uno stesso invariante non possono essere equivalenti.

Fu Reidemeister a dimostrare nel 1935 che due nodi sono equivalenti solo se la proiezione di uno può essere convertita nella proiezione dell'altro attraverso l'uso di tre semplici movimenti rappresentati in figura 1.2.1. Il problema sta nel fatto che osservando i movimenti di Reidemeister è chiaro che ogni nodo ha infinite proiezioni possibili sul piano, per questo motivo spesso si sceglie come diagramma di un nodo la **proiezione minima**, cioè il diagramma che mostra il minor numero di incroci.

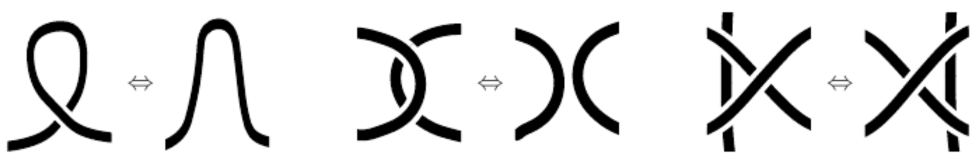
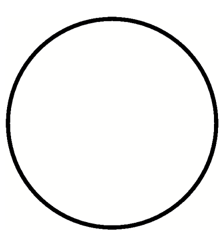


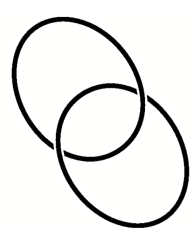
Figura 1.2.1: Movimenti di Reidemeister

1.2.1 Crossing number

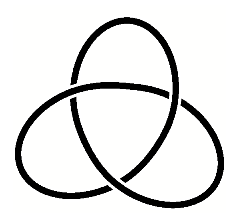
Il numero di incroci della proiezione minima viene chiamato **crossing number** ed è un invariante topolologico per il nodo.



(a) cn=0



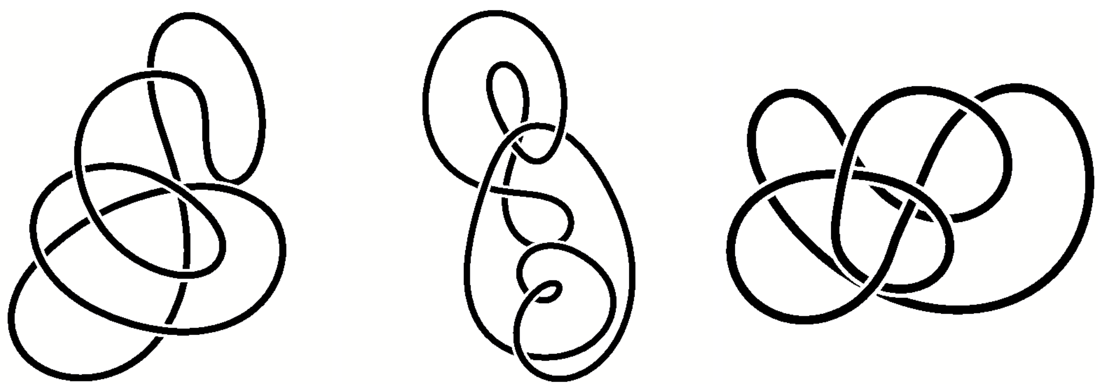
(b) cn=2



(c) cn=3

Figura 1.2.2

Tuttavia tale numero non è affatto facile da determinare: in figura 1.2.3 sono rappresentati il nodo banale, il trifoglio e il link di Hopf non in proiezione minima ed è evidente la difficoltà che si presenta nel determinare il corretto crossing number.



(a) Nodo banale (b) Link di Hopf (c) Nodo trifoglio

Figura 1.2.3

Nel libro *Knots and links* Rolfsen riporta un catalogo di tutti i nodi primi fino a 10 incroci e tutti i link fino a 9 incroci con massimo 4 componenti. Nel catalogo sono riportati anche i diagrammi di tali nodi in proiezione minima. La classificazione di Rolfsen prende spunto dai precedenti cataloghi creati da Alexander e Conway nei loro lavori sulla teoria dei nodi, citati nella bibliografia del libro *Knots e link*s.

Osservando la tabella 1.1, nella quale sono riportati il numero di nodi corrispondenti a un dato crossing number, si nota immediatamente come aumentando il numero di incroci il numero di nodi aumenti velocemente. Questo ci può dare una maggiore idea della complessità della classificazione dei nodi, problema ancora aperto in questa teoria.

Crossing Number	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nodi primi	0	1	1	2	3	7	21	49	165
Link a 2 componenti	1	0	1	1	3	8	16	61	184
Link a 3 componenti	0	0	0	0	3	1	10	21	73
Link a 4 componenti	0	0	0	0	0	0	3	1	21

Tabella 1.1: Nodi primi fino a 10 incroci e link fino a 9 incroci

1.2.2 Numero di componenti

Un altro semplice esempio di invariante topologico è il numero di **componenti presenti in un link**, infatti non vi è tra i movimenti di Reidemeister un movimento che sia in grado di mutare il numero delle componenti di un link: due link aventi un numero di componenti diverso non possono essere equivalenti. Vi sono altri invarianti dei nodi, sicuramente più potenti e interessanti, anche se un invariante in grado di distinguere tutti i nodi non è ancora stato trovato. Ai fini di questa tesi ne mostreremo, oltre ai due già esposti, solo altri tre.

1.2.3 Linking number

Per i link un altro invariante topologico più potente del numero di componenti è il **linking number** che viene definito a partire dal diagramma del nodo. Questo invariante prende in considerazione gli incroci in cui una componente passa sopra un'altra. A ogni incrocio viene assegnato un valore che può essere -1 o $+1$, a seconda che sia rispettivamente **sinistrorso** o **destrorso** (figura 1.2.4). Ovviamente per poter dare un segno all'incrocio ciascuna componente deve essere orientata (nel conteggio degli incroci non vengono calcolate le auto-intersezioni). Il linking number lk , tra due componenti in un link è definito come la metà della somma dei valori associati agli incroci tra le due componenti. Cambiando l'orientazione cambia anche il linking number. Due nodi aventi diverso linking number non sono quindi equivalenti, mentre non è possibile stabilire se due nodi con stesso linking number lo sono, quindi non è un invariante completo. In figura 1.2.5 sono rappresentati vari nodi con il loro linking number. Si nota come il link di Hopf abbia linking number differente a seconda dell'orientazione, (a) e (b), mentre i nodi (c) e (d) pur non essendo equivalenti abbiano stesso linking number.

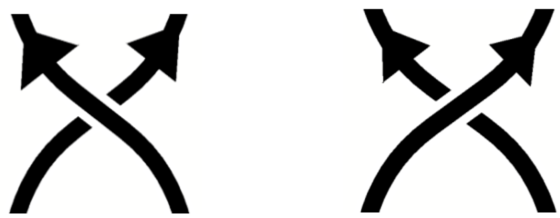
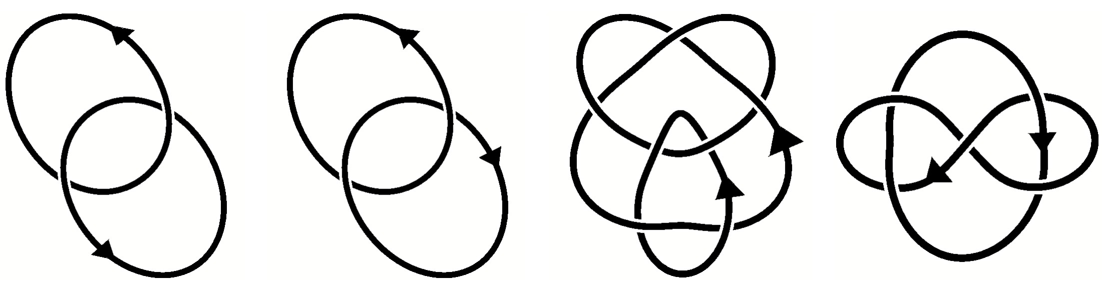


Figura 1.2.4: Incroci orientati: sinistrorso e destrorso



(a) $lk = +1$ (b) $lk = -1$ (c) $lk = 0$ (d) $lk = 0$

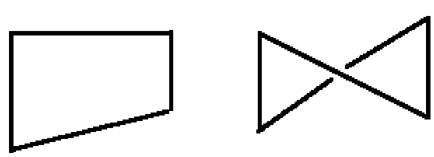
Figura 1.2.5

1.2.4 Stick number

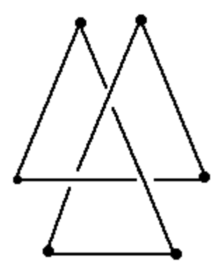
Altro invariante topologico per nodi semplici può essere lo **stick number**: il minor numero di "asticelle" o "bastoncini" necessari per costruire il nodo. Più formalmente lo **stick number** sk di un nodo K è il più piccolo n per il quale esista un poligono di n lati in $\mathbb{R}^3$ che rappresenti K, chiamato poligono minimo.

Il problema è quindi cercare di capire quanti bastoncini servono per fare un nodo non banale. Uno o due bastoncini non sono sufficienti per formare un poligono chiuso, mentre con tre si può formare un triangolo, ma poiché questo si trova in un piano non ci saranno incroci e avremo così un nodo banale. Per quanto riguarda quattro bastoncini si osserva che ci sono solo due possibilità ((a) in figura 1.2.6) e che entrambe rappresentano un nodo banale. Anche con cinque bastoncini è impossibile creare un nodo non banale, mentre con sei è possibile farlo. In particolare il trifoglio è l'unico nodo non banale che può essere costruito con sei bastoncini, cioè con $sk = 6$ ((b) in figura 1.2.6).

Nonostante possa sembrare abbastanza semplice, ancora non si sa molto su questo invariante, e per alcuni nodi non è stato dimostrato che il poligono minimo a essi associato sia effettivamente tale, cioè non si sa se è possibile trovare un altro poligono, con un numero di lati inferiore, che rappresenti ancora il nodo.



(a) nodi con $sk = 4$

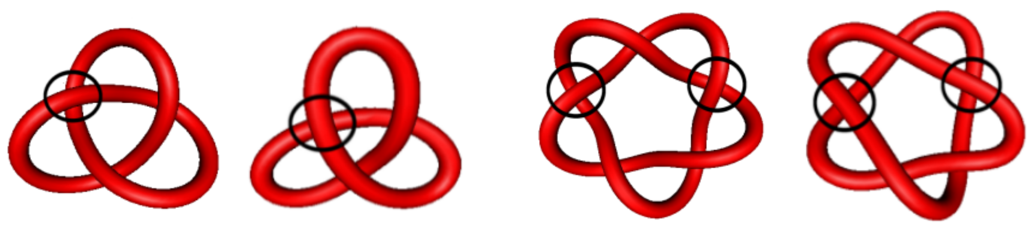


(b) trifoglio $sk = 6$

Figura 1.2.6

1.2.5 Unknotting number

L'ultimo invariante che presentiamo è l'**unknotting number**, o **numero di scioglimento**. Esso è associato all'operazione di **flip** che consiste nello scambiare il ramo superiore con quello inferiore in un incrocio: è il numero u minimo di flip da applicare agli incroci di un nodo in modo da ottenere il nodo banale. Un nodo primo ha sempre $u = 1$, mentre un nodo composto ha $u \geq 2$. Anche questo, come i precedenti, non è un invariante completo.



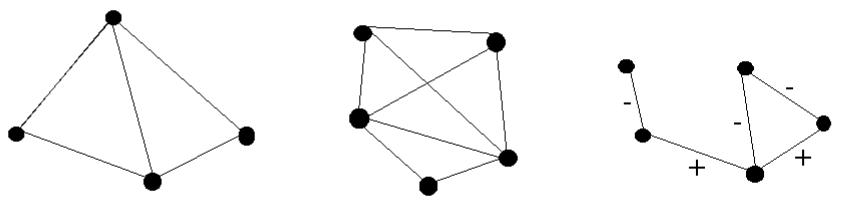
(a) $u = 1$ (b) $u = 2$

Figura 1.2.7

1.3 Il grafo di un nodo

Per quanto apparentemente lontana, la teoria dei grafi è strettamente collegata a quella dei nodi, in particolare per quanto riguarda la rappresentazione del diagramma di un dato nodo.

Un grafo è un insieme di nodi o vertici (per non creare confusione li chiamereno solo vertici), che possono essere collegati tra loro da linee chiamate archi, lati o spigoli. Più formalmente diremo che un grafo è una coppia ordinata $G = (V, E)$ di insiemi, con V insieme dei vertici e E insieme dei lati, tali che gli elementi di E siano coppie di elementi di V. Una classe importante di grafi è rappresentata dai grafi planari, ovvero grafi che si possono disegnare su un piano senza far incrociare i lati. Diremo inoltre che un grafo è con segno se a ogni lato si associa un elemento dell'insieme $\{+, -\}$.



(a) grafo planare (b) grafo non planare (c) grafo con segno

Figura 1.3.1: Esempi di grafi

Vediamo ora come la curva che costituisce un nodo si può costruire a partire da un grafo e viceversa, usando considerazioni di carattere esclusivamente locale. Per passare dal diagramma di un nodo al grafo che lo rappresenta, e viceversa, occorrono pochi semplici passi che andremo ora a elencare. Negli algoritmi che verranno descritti per stabilire se un incrocio è destrorso o sinistrorso, se non si parte da un diagramma orientato ovviamente, si può adoperare la tecnica delle "regioni colorate": L'incrocio sarà destrorso se attraversandolo sul ramo superiore si lascia la regione colorata alla propria destra, sinistrorso se invece la si lascia alla propria sinistra.

<u>Dal grafo al diagramma:</u>

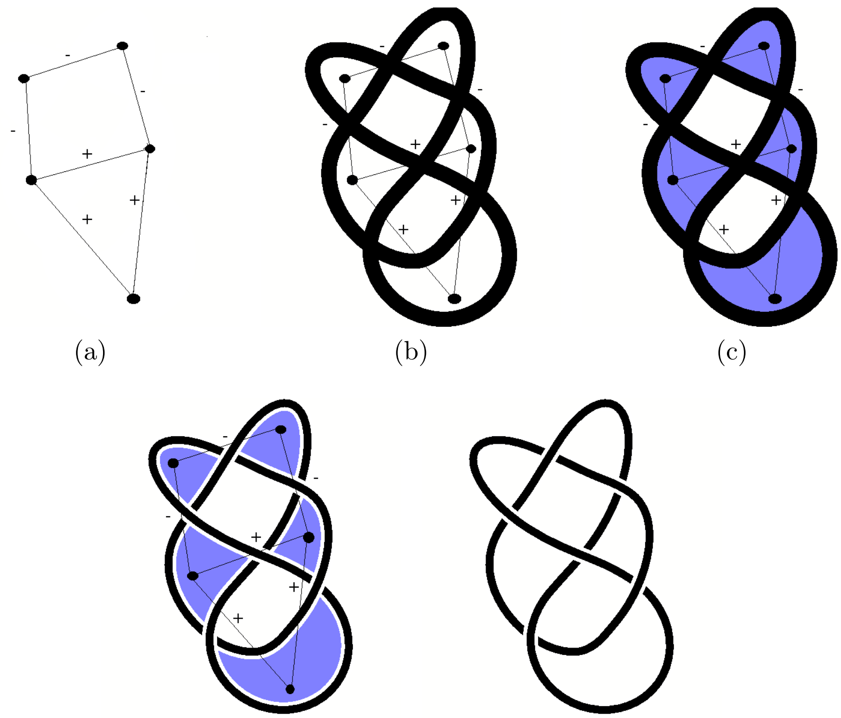
(a) Si parte considerando un grafo planare con segno.

(b) Si disegna per ogni lato del grafo un incrocio e si collegano questi tra loro se e solo se i due lati in questione sono consecutivi.

(c) Si colorano le regioni contenenti i vertici.

(d) Per ogni incrocio si stabilisce se questo è destrorso (quando c'è il più), o sinistrorso (quando c'è il meno).

(e) Eliminando il grafo si ottiene il corrispettivo diagramma del nodo.



(a) (b) (c) (d) (e)

Figura 1.3.2: Dal grafo al diagramma

<u>Dal diagramma al grafo:</u>

(a) Si parte considerando il diagramma di un nodo.

(b) Il diagramma del nodo divide il piano in diverse regioni, si colorano in modo che due regioni confinanti abbiano colore differente e facendo in modo che la regione esterna risulti non colorata.

(c) Si sceglie un vertice all'interno di ogni regione colorata e si collegano tra loro i vertici se e solo se le regioni corrispondenti hanno incroci in comune.

(d) Si assegna a ogni lato del grafo il segno $+$ o $-$ in base al tipo di incrocio che lo attraversa, sinistrorso $-$, destrorso $+$.

(e) Eliminando il diagramma si ottiene il grafo che rappresenta lo schema del nodo.

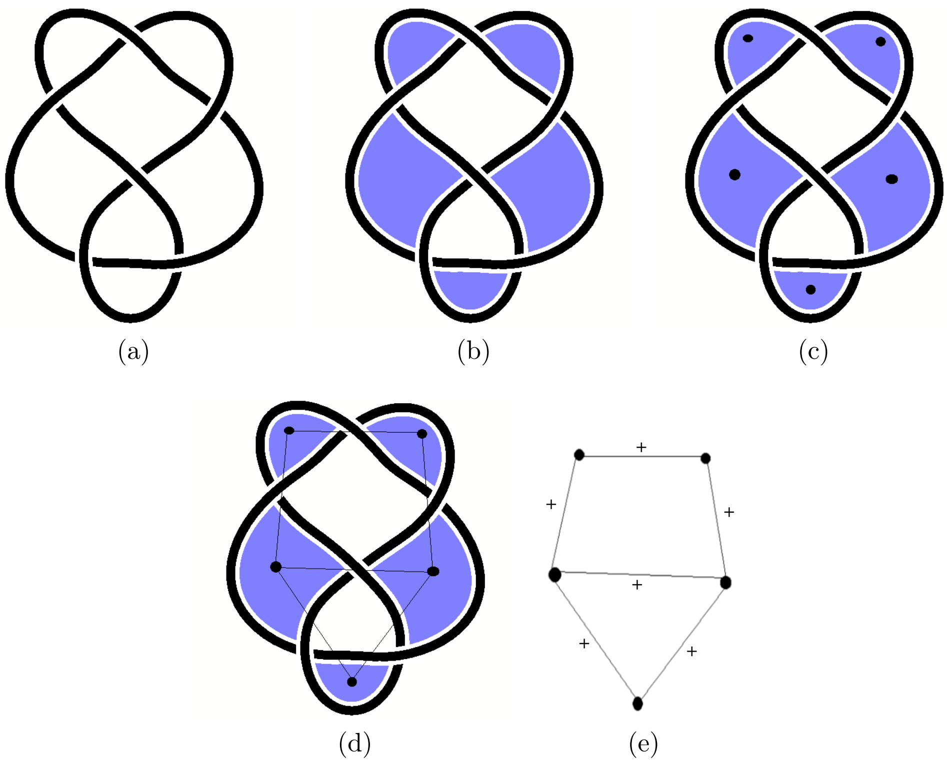


Figura 1.3.3: Dal diagramma al grafo

Capitolo 2

Nodi torici, nodi celtici

2.1 Nodi torici

Spostiamo ora la nostra attenzione sui **nodi torici**, o torali, che sono quei nodi che si possono ottenere come curve semplici chiuse in un toro contenuto in $\mathbb{R}^3$. Rappresentiamo il toro come $S^1 \times S^1$, ogni punto del toro come $(e^{i\varphi}, e^{i\theta})$, con $0 \leq \varphi,\ \theta \leq 2\pi$ e $\mathbb{R}^3$ come $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Parametrizziamo ora $\mathbb{C}$ con coordinate polari $(r, \theta) \equiv re^{i\theta}$. In questa maniera un punto in $\mathbb{R}^3$ viene rappresentato come una terna (r, θ, z), e con questa notazione definiamo un'applicazione $f : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^3$ definita come

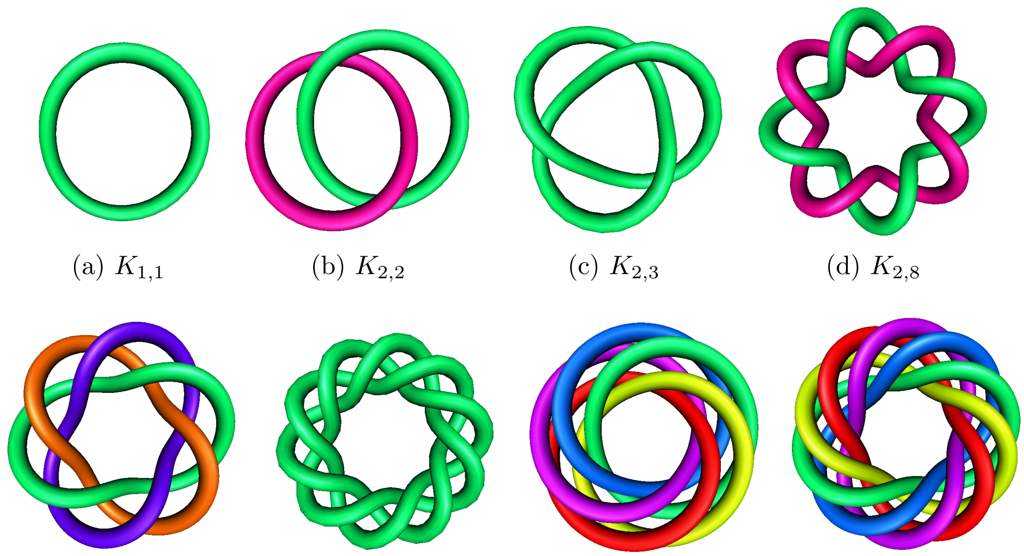
$$f(e^{i\varphi}, e^{i\theta}) = (1 + \tfrac{1}{2}\cos\varphi, \theta, \tfrac{1}{2}\sin\varphi)$$

Questa applicazione induce un omeomorfismo fra $S^1 \times S^1$ e l'immagine $f(S^1 \times S^1)$. Siano ora m e n una coppia di interi positivi primi tra loro e definiamo $K_{m,n}$ come il seguente sottospazio del toro in $\mathbb{R}^3$:

$$K_{m,n} = \{f\,(e^{2\pi imt}, e^{2\pi int}) \mid t \in I\}.$$

Osservando che l'applicazione $g : S^1 \to K_{m,n}$ definita da $g(e^{2\pi it}) = f\,(e^{2\pi imt}, e^{2\pi int})$ è un omeomorfismo, possiamo dire che $K_{m,n}$ è un nodo, chiamato **nodo torico** di tipo (m, n). In figura 2.1.1 sono riportati alcuni esempi di nodi torici.

Il toro contiene due circonferenze standard, $\{f(e^{2\pi it}, 1) \mid t \in I\}$ e $\{f(1, e^{2\pi it}) \mid t \in I\}$, e un nodo torico di tipo (m, n) si avvolge n volte sul toro nella direzione della prima circonferenza ed m volte nella direzione della seconda. Nella figura



(a) $K_{1,1}$ (b) $K_{2,2}$ (c) $K_{2,3}$ (d) $K_{2,8}$

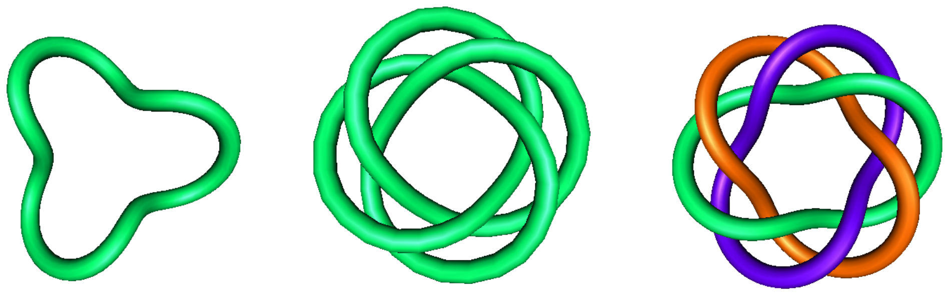
(e) $K_{3,6}$ (f) $K_{3,10}$ (g) $K_{5,5}$ (h) $K_{5,10}$

Figura 2.1.1: Esempi di nodi torici

2.1.1 possiamo osservare come il nodo banale, il nodo trifoglio e il link di Hopf facciano parte di questa famiglia di nodi, inoltre si vede immediatamente che non tutti i nodi rappresentati sono composti da una sola componente. L'indicazione sul numero di componenti di un nodo torico ci viene fornita dai numeri (m, n) che definiscono il nodo stesso:

- se m o n sono uguali a 1 allora si ottiene un nodo banale;
- se $m, n > 1$ con $MCD(m, n) = 1$ allora abbiamo un nodo formato da una sola componente;
- se $m, n > 1$ con $MCD(m, n) \neq 1$ allora si ha un nodo con un numero di componenti pari al $MCD(m, n)$.

Osservando i nodi in figura 2.1.2 è evidente che il nodo (a) è equivalente al nodo banale, il nodo (b) è formato da un'unica componente poiché 3 e 4 sono coprimi e il nodo (c) è un link a tre componenti poiché $MCD\,(3,6) = 3$.



(a) $K_{1,3}$ (b) $K_{3,4}$ (c) $K_{3,6}$

Figura 2.1.2

Quindi se per esempio fissiamo $m = 2$ otterremo un nodo a una componente quando n è dispari e un nodo a due componenti quando n è pari. Infatti, osservando i nodi (a), (c) e (f) in figura 2.1.1, questi sono formati da una sola componente, poiché hanno m e n coprimi, mentre tutti gli altri nodi hanno numero di componenti pari al massimo comun divisore tra m e n. Se prendiamo m e n coprimi possiamo dire che il nodo torico $K_{m,n}$ è quel nodo che si ottiene a partire da m segmenti su un cilindro, identificando le facce dopo una torsione di $n \cdot \left(\frac{360°}{m}\right)$.

Per questa classe di nodi è particolarmente facile calcolare alcuni degli invarianti elencati nel capitolo 1. Preso un nodo torico $K_{m,n}$, il suo numero di scioglimento è dato da $u\,(K_{m,n}) = \frac{(m-1)(n-1)}{2}$, mentre il suo stick number è dato da $sk\,(K_{m,n}) = 2n$, ma solo se vale la condizione $2 \leq m < n < 2m$.

2.2 Nodi celtici

In generale, le opere d'arte di origine celtica che sono chiamati nodi celtici, sono topologicamente riconducibili a nodi o link alternati.

Definizione 9. Un nodo si dice **alternato** se i suoi incroci sono alternati sinistrorsi e destrorsi.

Fin dai tempi più lontani questi tipi di nodi sono apparsi nelle illustrazioni di libri e nelle decorazioni di edifici sacri o tombe, ma anche usati come gioielli o nelle mappe dei sentieri di grandi castelli. Ricorrono nell'arte dei Romani, dei Sassoni e dei Vichinghi, ma ve ne è traccia anche nell'arte islamica o africana. Un capolavoro di calligrafia e di uso dei nodi è il libro del Kells ((a) in figura 2.2.1), in mostra al Trinity College di Dublino. Il significato simbolico di questi particolari nodi è un quesito affascinante e irrisolto nella storia dell'arte celtica. C'è chi ha teorizzato che questi disegni potessero servire da protezione contro il male: più il nodo era complesso e più questo avrebbe potuto intrappolare e confondere il malocchio.

(a) Libro del Kells

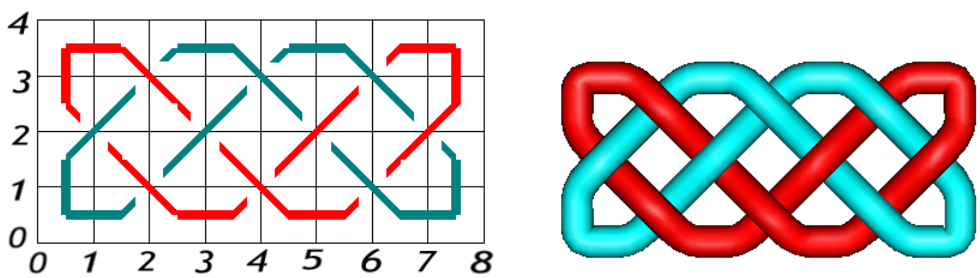
(b) Gioielli celtici

(c) Mappa sentieri

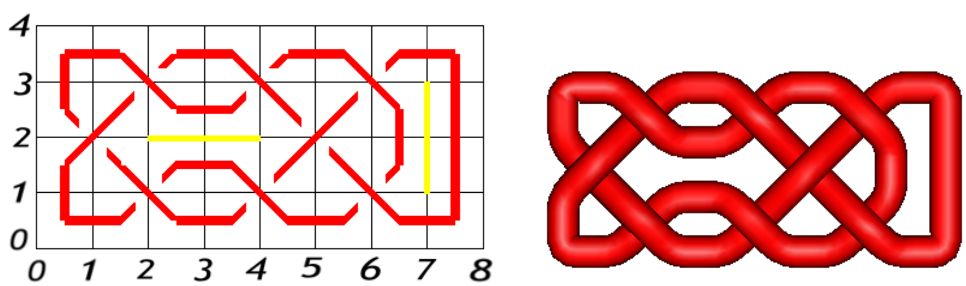
Figura 2.2.1

Ciò che andremo ad analizzare di questi nodi sono le proprietà che derivano dalla loro particolare "struttura", in inglese "Celtic framework", utile per lo studio del nodo.

Immaginiamo di poter disegnare il nodo celtico in un piano cartesiano. Possiamo individuare due griglie che ci aiutano nella costruzione del nodo per individuare il grafo a esso corrispondente: una grigia interna e una griglia esterna. Inoltre possiamo inserire delle barriere (verticali o orizzontali) all'interno della grigila interna in corrispondenza delle quali non vengono posti incroci. In figura 2.2.2 sono rappresentati due nodi, il nodo (a) è senza barriere, mentre il nodo (b) ne possiede due, una orizzontale e una verticale.



(a) Senza barriere



(b) Con barriere

Figura 2.2.2

Ogni nodo celtico comunque, con o senza barriere, è un nodo alternato, infatti osservando la figura 2.2.3 si può notare come l'inserimento di una barriera non modifichi gli altri incroci lasciando il nodo alternato.

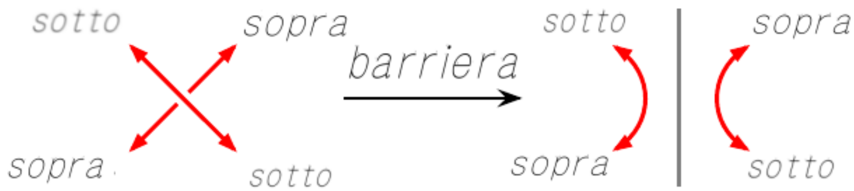


Figura 2.2.3

Come abbiamo fatto per i nodi torici possiamo identificare i nodi celtici, privi di barriere, con due numeri interi p e q usando la notazione $C_{p,q}$.

La **griglia interna** di un nodo $C_{p,q}$ è formata dai punti (x, y) con $x \in \{1, 3, 5, ..., 2p-1\}$ e $y \in \{1, 3, 5, ...2q-1\}$, mentre la **griglia esterna** dai punti (x, y) con $x \in \{0, 2, 4, ..., 2p\}$ e $y \in \{0, 2, 4, ...2q\}$.

Per esempio in figura 2.2.4 possiamo osservare il nodo $C_{3,2}$ in cui la griglia interna è stata evidenziata in blu. La griglia interna rappresenta il grafo corrispondente al nodo.

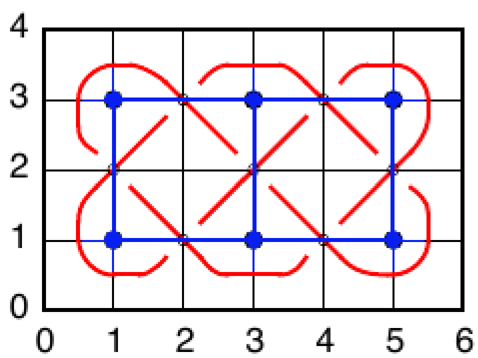
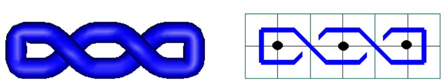


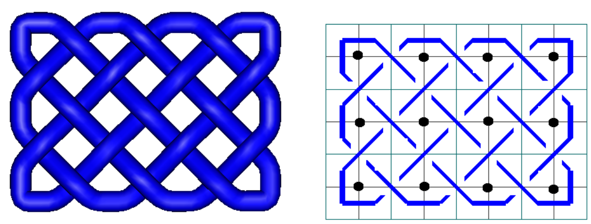
Figura 2.2.4: $C_{3,2}$

Per i nodi celtici privi di barriere è semplice stabilire il numero di componenti. Facilmente è possibile osservare che $C_{p,q}$ è il nodo celtico che possiede una grafo con $p \times q$ vertici, dove p è il numero di vertici orizzontali, mentre q il numero di quelli verticali. L'indicazione sul numero di componenti di un nodo celtico ci viene fornita dai numeri (p, q) che definiscono il nodo stesso:

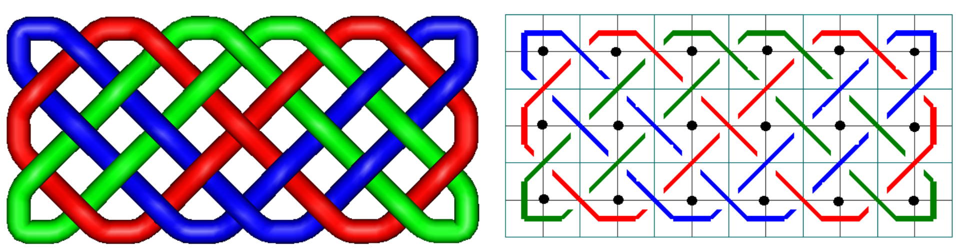
- se p o q sono uguali a 1 allora si ottiene un nodo banale;
- se $p, q > 1$ con $MCD(p, q) = 1$ allora abbiamo un nodo formato da una sola componente;
- se $p, q > 1$ con $MCD(p, q) \neq 1$ allora si ha un nodo con un numero di componenti pari al $MCD(p, q)$.



(a) $C_{3,1}$



(b) $C_{4,3}$



(c) $C_{6,3}$

Figura 2.2.5

Osservando i nodi in figura 2.2.5 è evidente che il nodo (a) è equivalente al nodo banale, il nodo (b) è formato da un'unica componente poiché 4 e 3 sono coprimi e il nodo (c) è un link a tre componenti poiché $MCD\,(6, 3) = 3$.

Per quanto riguarda gli invarianti topologici per questi nodi è molto semplice il calcolo del crossing number, infatti preso un nodo $C_{p,q}$ il suo crossing number è dato dalla formula $cn = 2pq - p - q - h - v$, dove h e v rappresentano rispettivamente il numero di barriere orizzontali o verticali.

Capitolo 3

La proposta didattica

Prendendo spunto dagli argomenti trattati nei capitoli precedenti è stato scelto di ideare un progetto didattico che avesse come fulcro la teoria dei nodi.

L'idea di trattare un argomento non standard e così lontano da quella che è la matematica affrontata a scuola è nata proprio per cercare di stimolare l'interesse verso la matematica nei ragazzi, sottolineando quanto questa sia vasta fuori dalle mura del liceo. Vedere la matematica sotto un altro punto di vista e scoprire come questa sia molto potente nel descrivere il mondo e la realtà che ci circonda, ritengo sia un bellissimo modo per appassionare gli studenti alla materia.

L'approccio che ho ritenuto più adatto e stimolante è stato quello di favorire l'apprendimento e l'attenzione dei ragazzi attraverso l'uso massiccio di immagini e attività pratiche.

La comunicazione per immagini, per sua natura, costituisce una modalità interessante non solo di divulgazione, ma anche di avvio all'apprendimento in maniera informale. Infatti l'uomo, come specie animale, dipende in modo particolarmente significativo dal senso della vista e spesso bastano pochi secondi perché un'immagine resti impressa nella mente.

Dare un forte impatto visivo a una materia che può sembrare così astratta come la matematica penso fornisca una strada alternativa rispetto ai canoni di comunicazione più conosciuti e tradizionali.

Il tema che ho deciso di trattare in classe è stato quello della teoria dei nodi con un'introduzione alla topologia. Il motivo di tale scelta, oltre a un gusto personale, sta nel fatto che la teoria dei nodi fornisce molti spunti per attività pratiche e di forte impatto visivo.

Il progetto didattico si apre con una primissima introduzione alla topologia: far immergere i ragazzi in una geometria a loro sconosciuta trovo sia stimolo di interesse e curiosità, predisposizione necessaria per affrontare un argomento nuovo.

Per quanto riguarda la teoria dei nodi ho scelto di partire fornendo ai ragazzi le nozioni di base, come nodo banale e nodo intrecciato, sottolineando però, anche attraverso attività pratiche, quanto sia vasta questa teoria.

L'aspetto su cui intendo focalizzare l'attenzione è quello del legame che vi è tra strumenti algebrici e la costruzione di questi nodi. I nodi torici e i nodi celtici forniscono un ottimo argomento in questo senso, poiché possono essere individuati dal massimo comun divisore, strumento che ragazzi di scuola superiore conoscono e adoperano frequentemente.

Tutti i temi sono stati trattati attraverso immagini e attività pratiche di manipolazione di nodi, per dar modo ai ragazzi di poter sperimentare direttamente gli argomenti spiegati.

Per le attività pratiche di laboratorio ho realizzato io stessa dei nodi con l'uso di cordini colorati e, per l'attività progettata per gli anelli borromei, mi è piaciuta l'idea di far cimentare i ragazzi stessi nella creazione di tali nodi.

3.1 Le classi

Le classi a cui è stato scelto di rivolgere le lezioni sono la $2^a D$ e la $4^a D$ del liceo internazionale ISIS Machiavelli di Firenze. La classe $2^a D$ è formata da 26 ragazzi, mentre la classe $4^a D$ da 33. L'età differente dei ragazzi a cui il progetto viene rivolto fornisce l'occasione di osservare le diverse modalità di approccio e di reazione a un argomento fuori dal programma.

3.2 Gli obiettivi

- Fornire ai ragazzi l'occasione di vedere una branca della matematica a loro distante nella speranza di stimolare un maggior interesse verso la disciplina.
- Contribuire alla formazione di una mentalità scientifica.
- Sviluppare una visione matematico-geometrica stimolando immaginazione e intuizione.

<u>Obiettivi specifici dell'apprendimento</u>

- Sapere intuitivamente che cosa è la topologia e quando, in casi semplici, possiamo dire che due oggetti sono topologicamente equivalenti.
- Sapere di cosa tratta la teoria dei nodi, conoscere la definizione di nodo, nodo semplice, nodo intrecciato, nodo banale e nodo a più componenti.
- Capire il concetto di equivalenza tra nodi.
- Sapere come vengono costruiti e identificati i nodi torici e i nodi celtici, imparando a calcolarne il numero di componenti.

3.3 KnotPlot

Per quanto riguarda l'uso di immagini in questo elaborato e nel lavoro in classe ho fatto gran uso del programma KnotPlot.

Il KnotPlot è un programma ideato dal canadese Robert Glenn Scharein per la visualizzazione interattiva e l'elaborazione di nodi 3D e 4D.

Il programma si presenta con tre finestre: la "Command Window" nella quale è possibile digitare manualmente i comandi, il "Control Panel", composto da diverse sezioni, dal quale è possibile caricare, creare e modificare i nodi tramite comandi selezionati, la finestra grafica nella quale si visualizzano e si creano i nodi (figura 3.3.1).

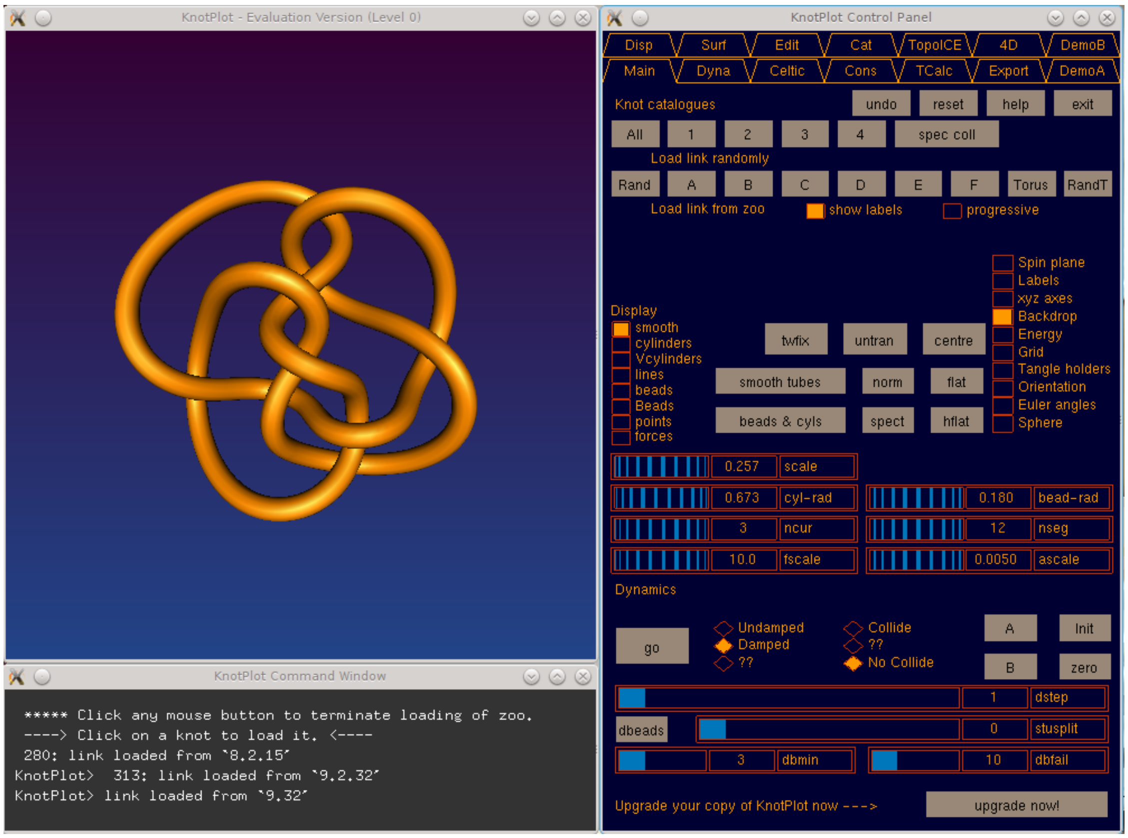
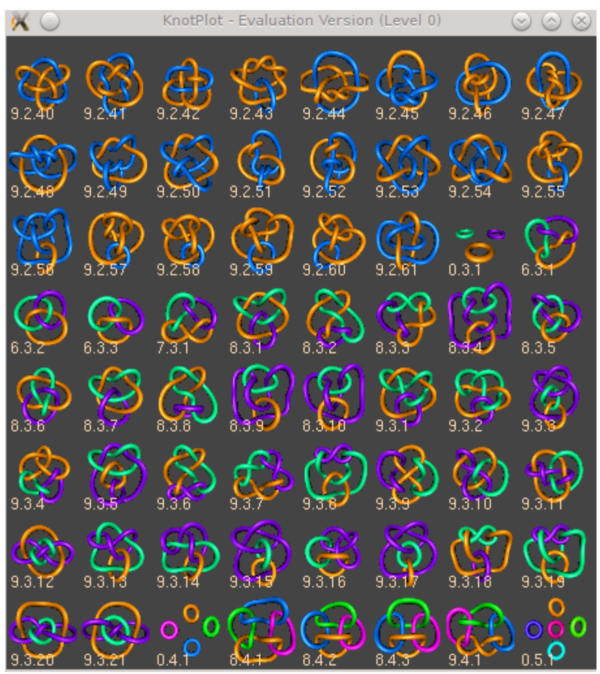


Figura 3.3.1: KnotPlot

I nodi, o i link, possono essere caricati da un database di oltre 3.000 nodi catalogati secondo il libro di Rolfsen *Knots and links* o alternativamente costruiti a mano libera dall'utente.

(a)



(b)

Figura 3.3.2: Alcuni dei nodi e link già pronti da caricare

Per la creazione di nodi si accede tramite il pannello di controllo nella sezione *"Sketch"* (schizzo, disegno), si clicca con il mouse sulla finestra grafica e si crea una spezzata. Usando il tasto destro o sinistro del mouse si sceglie di creare un incrocio destrorso o sinistrorso. Una volta completato il disegno è possibile scegliere se chiuderlo a formare effettivamente un nodo o lasciarlo aperto. A questo punto si trasporta il nodo nella sezione *"Main"* (principale), dove premendo il tasto *"go"* è possibile "rilassarlo", cioè dar modo al nodo di sistemarsi nella configurazione corrispondente alla sua proiezione minima. In tal modo è facile osservare se il nodo da noi creato è effettivamente un nodo intrecciato, infatti se così non fosse, il nodo lentamente si scioglierebbe fino a rappresentare un nodo banale. Se si è scelta l'opzione di non chiudere il nodo, per quanto si sia messo impegno nel crearlo complesso, questo "rilassandosi" si scioglierà.

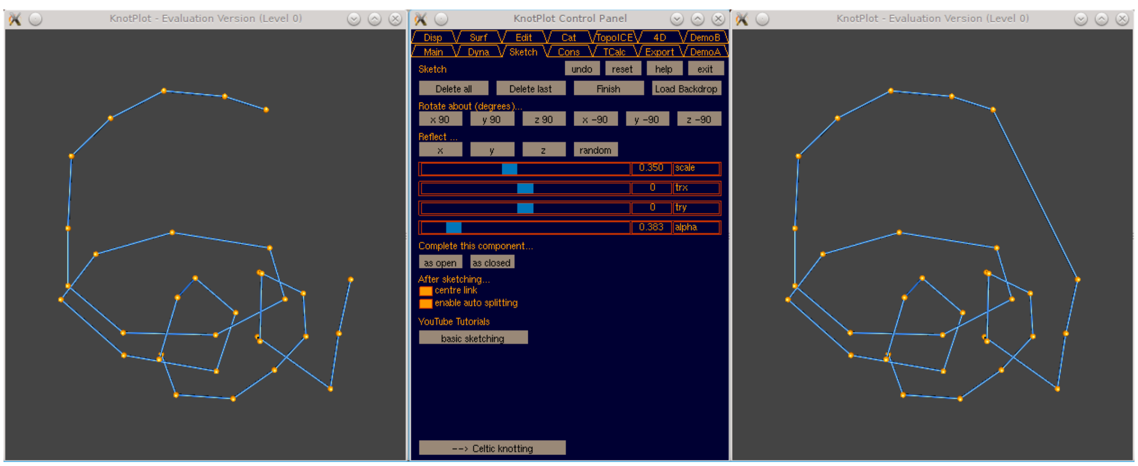
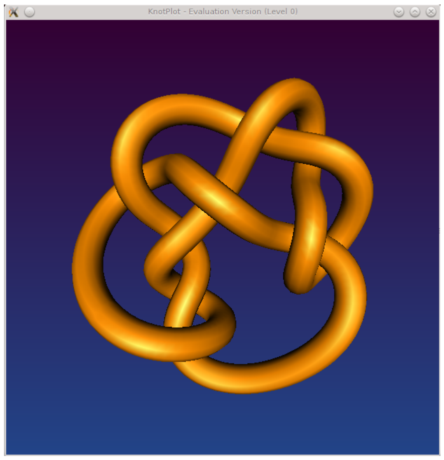
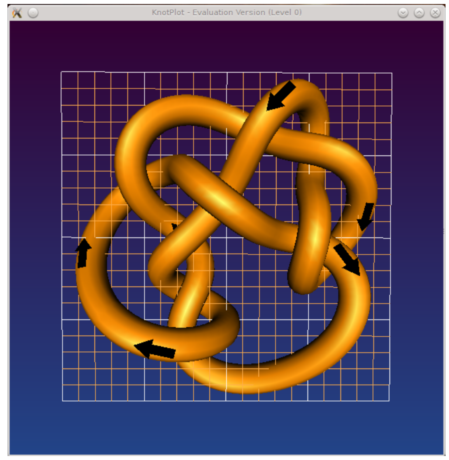


Figura 3.3.3: Creazione manuale di un nodo

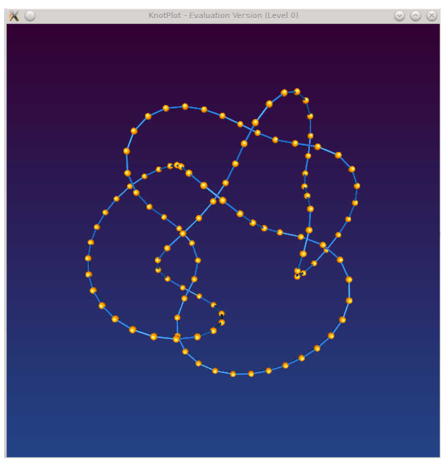
I nodi, creati o caricati, possono essere trasformati e manipolati a piacimento dall'utente all'interno della sezione *"Main"*. Il nodo può essere visualizzato come unione di segmenti, di curve o come una corda liscia, "smooth tubes", di cui è possibile variare i caratteri, come la torsione, il colore, il diametro e molti altri parametri.



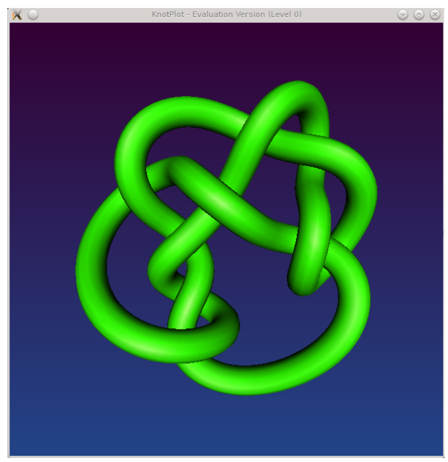
(a)



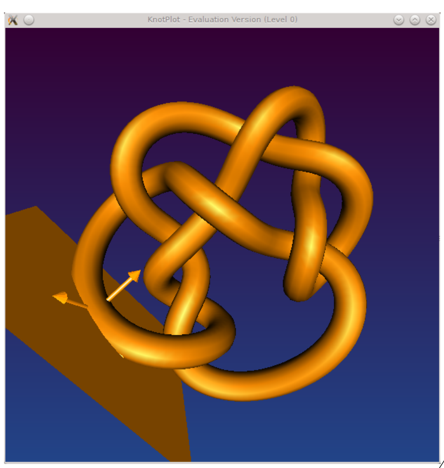
(b)



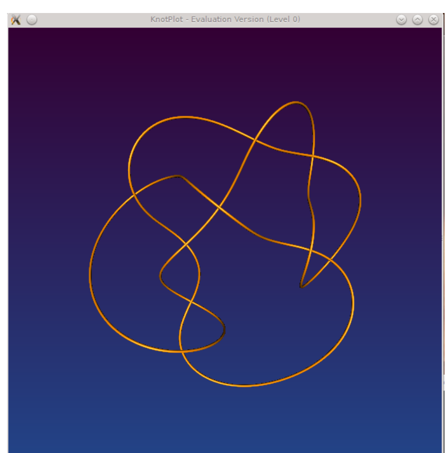
(c)



(d)



(e)

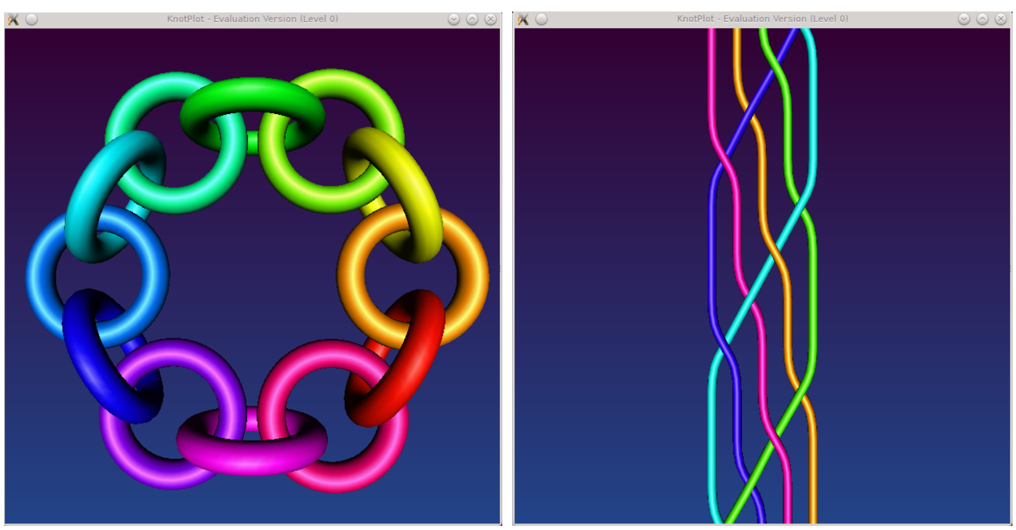


(f)

Figura 3.3.4

Inoltre è possibile visualizzare l'orientazione del nodo, un griglia di riferimento, il sistema cartesiano in cui il nodo è inserito e il piano tangente alla curva che forma il nodo stesso.

La creazione di alcuni particolari nodi, ad esempio i nodi torici e i nodi celtici, è facilitata da particolari funzioni nel pannello di controllo. Possiamo creare questi tipi di nodi digitando nell'apposita sezione le caratteristiche che vogliamo che essi abbiano e il programma penserà a realizzarli. Per i nodi celtici è possibile dire quanto grande si vuole la grigia di riferimento, specificando l'assenza di barriere o alternativamante decidendo dove posizionarle. Per i nodi torici invece è possibile modificare i numeri m e n che definiscono il nodo stesso (come spiegato nel capitolo precedente). Oltre ai nodi già citati possono essere realizzate, semplicemente specificandone le caratteristiche, catene o trecce. In figura 3.3.5 sono rappresentati questi oggetti topologici, anche se non verranno esaminate le loro caratteristiche in questo elaborato.



(a) Catena (b) Treccia

Figura 3.3.5

Il programma, oltre a permettere la visualizzazione 3D dei nodi, dà anche la possibilità di proiettare il nodo su di un piano potendone così osservare il diagramma.

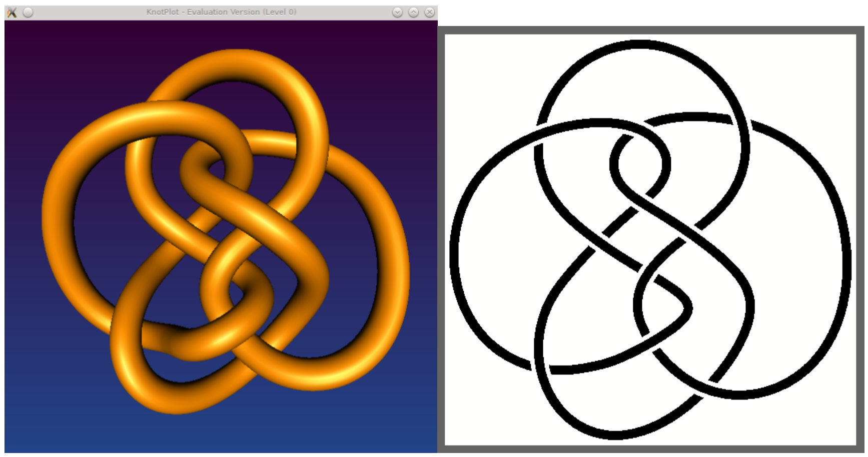


Figura 3.3.6

Il KnotPlot verrà utilizzato insieme alla LIM durante le lezioni per rappresentare facilmente le varie tipologie di nodi da analizzare nel corso del progetto. In particolare nella prima lezione, grazie alla possibilità del programma di “rilassarre” un nodo, alle classi sarà mostrato come un nodo con le estremità aperte, per quanto complesso sia, possa sempre sciogliersi, mentre un nodo come è stato definito nel primo capitolo, cioè con le estremità chiuse, non possa farlo.

Capitolo 4

Diario delle lezioni

Le lezioni si sono svolte nella terza settimana di marzo, 4 ore per classe, effettuate utilizzando lezioni frontali, lavori di gruppo e materiali da me preparati. Al ritorno dalle vacanze pasquali, per dare tempo ai ragazzi di assimilare gli argomenti affrontati, è stata effettuata una piccola verifica suddivisa in due parti: la prima parte volta a verificare le competenze e le conoscenze apprese, la seconda parte volta a verificare quanto è stato il coinvolgimento e l'interesse da parte dei ragazzi durante il progetto.

Il materiale usato per le lezioni, che comprende dispense e nodi realizzati materialmente con del cordino, è raccolto nelle appendici A e B.

4.1 Prima lezione

1. Presentazione del progetto.

2. Introduzione alla Topologia.

3. Vengono date le prime definizioni sui nodi: nodo banale, nodo semplice, nodo intrecciato.

4. Viene fatto fare a due ragazzi il gioco degli anelli.

5. Vengono definiti e mostrati i nodi a più componenti.

Tempo: un'ora.

Obiettivi specifici dell'apprendimento prima lezione:

- sapere intuitivamente quando due oggetti sono topologicamente equivalenti;
- sapere cosa è un nodo in matematica e quando questo si dice intrecciato o sciolto;
- sapere cosa è un nodo a più componenti.

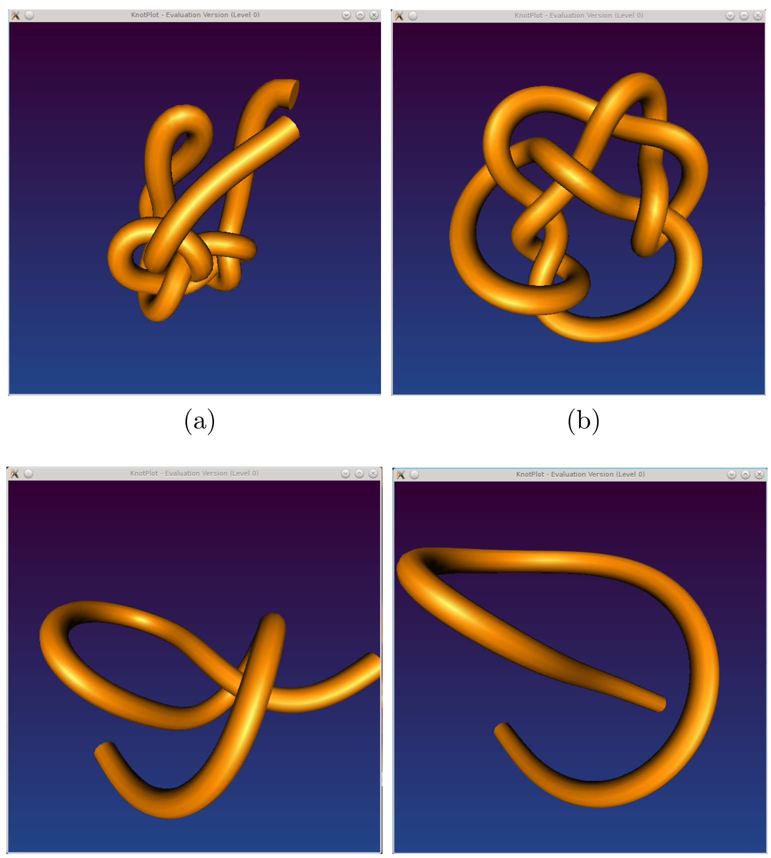
Alla classe sono state consegnate delle dispense con il riassunto di quanto da me esposto durante la lezione.

SVOLGIMENTO:

Dopo essermi presentata alla classe e aver presentato il progetto, come prima cosa ho fatto un' introduzione molto semplice e intuitiva alla topologia per capire in che ambiente avremmo lavorato. Ho proposto molti esempi di oggetti topologicamente equivalenti. Durante questa prima parte della lezione i ragazzi sono rimasti affascinati dalla topologia e mi hanno riempito di domande su questa *"diversa geometria"*, come da loro è stata definita; sono rimasti particolarmente colpiti da come una tazza possa essere topologicamente equivalente a un toro!

Ho fatto un breve accenno agli invarianti topologici, facendo notare come il numero di buchi di una superficie sia uno di questi. Abbiamo quindi fatto altri esempi su oggetti della loro quotidianità cercando di associarli correttamente alla sfera o ai vari tipi di toro.

Poi ho introdotto la teoria dei nodi. Ho chiesto per prima cosa ai ragazzi che cosa secondo loro fosse un nodo. Le risposte sono state, oltre a *"l'unità di misura del vento"*, esempi di nodi di vita quotidiana: *"il nodo per allacciarsi le scarpe", "il nodo che si forma nelle cuffie del cellulare"*. Partendo quindi dalle loro esperienze ho dato la definizione di nodo in matematica, come nodo con le estremità chiuse e ho fatto vedere loro il nodo banale. A questo punto un ragazzo di $2^a D$ è intervenuto dicendo: *"allora qualsiasi nodo io faccia partendo da un elastico chiuso è sempre riconducibile a un nodo banale!"*. Partendo da questo interessantissimo intervento ho parlato di nodi sciolti e nodi intrecciati facendo vedere tramite la LIM e l'uso del programma KnotPlot esempi di questi nodi.



(a) (b) (c) (d)

Figura 4.1.1

Per parlare di link, cioè nodi a più componenti, ho chiamato alla cattedra due ragazzi e ho fatto fare loro il gioco degli anelli: ho legato ai polsi del primo ragazzo un nastro rosso e ai polsi del secondo ragazzo un nastro blu intrecciandoli in modo da creare il link di Hopf; ho poi chiesto loro di sciogliersi esortando la classe a dare suggerimenti. Sia in $2^a D$ che in $4^a D$ c'è stato qualcuno che ha subito esclamato che era impossibile tale azione, ma la maggior parte degli alunni suggeriva mosse del tipo: *"passa dentro con le gambe!", "girati e passa sotto, vedrai così si scioglie di sicuro!".* Con il passare del tempo sempre più ragazzi si sono resi conto dell'impossibilità di sciogliere i compagni legati. Abbiamo così iniziato a parlare dei link. Ho mostrato loro nodi con diverse componenti, sottolineando come il numero di componenti distingua immediatamente un nodo da un altro e come quindi questo sia un invariante in questa teoria.

Alla fine dell'ora, parlando con la professoressa Diamanti di matematica e fisica, che mi ha gentilmente concesso le ore per il progetto, abbiamo concordato sul fatto che i ragazzi sono stati molto catturati dagli argomenti trattati. Quello che è emerso dagli interventi è stato che non si aspettavano che la matematica affrontasse anche temi di questo tipo. La reazione alla lezione è stata la medesima sia in $2^a D$ che in $4^a D$, con la differenza che mentre i ragazzi di $4^a D$ sono sembrati più "passivi" salvo qualche eccezione, quelli di $2^a D$ sono stati tutti frizzanti e molto partecipativi, intervenendo frequentemente con osservazioni anche molto interessanti.

4.2 Seconda lezione

1. Vengono mostrati gli anelli borromei come particolare link a tre componenti.

2. La classe viene divisa in gruppi di 4 ragazzi ai quali viene dato un modellino di anelli borromei realizzato con tre cordini di diversi colori; viene chiesto a ogni ragazzo di realizzare una copia di tale modello con dei nastri colorati, che si possono facilmente legare e sciogliere.

3. La classe viene divisa in guppi di 4 ragazzi e a ogni gruppo viene dato un nodo a otto fatto di cordino e viene chiesto di trasformarlo nel suo corrispettivo allo specchio che sarà proiettato sulla lavagna. Poi verrà dato a ogni gruppo il nodo trifoglio, sempre realizzato con il cordino, con la stessa consegna.

4. Viene chiesto ai ragazzi se sono riusciti a effettuare la consegna discutendo sul perché in un caso ci sono riusciti e nell'altro no.

5. Viene spiegato il concetto di equivalenza tra nodi.

Tempo: un'ora.

Obiettivi specifici dell'apprendimento seconda lezione:

- sapere cosa è un nodo a più componenti;
- conoscere gli anelli borromei e i loro imitatori;
- sapere cosa vuol dire che due nodi sono equivalenti.

Per il lavoro a gruppi sono stati consegnati dei modellini di nodi da me realizzati con del cordino, per la realizzazione degli anelli borromei dei nastri colorati che poi i ragazzi si sono tenuti, infine alla classe sono state consegnate delle dispense con il riassunto di quanto da me esposto durante la lezione.

SVOLGIMENTO:

Entrata in classe ho chiesto un piccolo riassunto degli argomenti affrontati nella precedente lezione. Gli alunni mi hanno risposto e con gioia ho scoperto che si ricordavano bene gli argomenti trattati quindi, visto che non c'erano dubbi, sono partita con la nuova lezione. Collegandomi all'ultima cosa affrontata il giorno prima, i nodi a più componenti, ho parlato degli anelli borromei. Ho fatto vedere loro degli esempi di storia dell'arte in cui questi anelli sono presenti, illustrato la loro particolare caratteristica e mostrato quelli che sono i loro "imitatori".

A questo punto la calsse è stata divisa in sei gruppi, da quattro o cinque persone l'uno, a ognuno dei quali è stato fornito un modellino di anelli borromei realizzato con tre cordini colorati. A ogni singolo ragazzo sono stati consegnati tre pezzetti di nastro colorati diversamente ed è stato chiesto loro di realizzare una copia degli anelli borromei. Gli alunni hanno così iniziato a intrecciare i fili chiamando me o la professoressa per chiedere se il lavoro andava bene. C'è chi è giunto subito alla soluzione, chi invece ha fatto qualche tentativo sbagliato, ma alla fine tutta la classe aveva il proprio modellino di anelli borromei. Abbiamo poi discusso dei problemi che avevano avuto i ragazzi nel creare il nodo: in entrambe le classi è stato detto che era difficile *"capire dove passava la corda"* o *"visualizzare correttamente e contemporaneamente tutti gli incroci"*.

Nella seconda parte della lezione abbiamo parlato di eqivalenza tra nodi. Per affrontare questo argomento è stata fatta un'attività sempre divisi in gruppi. A ogni gruppo è stato dato un nodo a otto in cordino ed è stato chiesto di trasformarlo nel suo corrispettivo allo specchio che era rappresentato alla lavagna. La prima cosa che hanno detto in entrambe le classi è stata *"ma basta rigirarlo!"*, poi vedendo che così non funzionava in $2^a D$ si sono messi a manipolare il cordino, mentre in $4^a D$ qualche ragazzo ha esclamato *"allora è impossibile!"*. In $4^a D$ alcuni ragazzi sono stati così ostinati nel credere che non fosse possibile che, finché una ragazza non è riuscita nell'intento, non hanno iniziato a lavorare e provarci anche loro.

Una volta che tutti hanno raggiunto l'obiettivo ho dato loro un nodo trifoglio in cordino con la medesima consegna. Questa volta invece inizialmente nessuno ha detto che non fosse possibile e si sono messi a manipolare il nodo. Solo dopo qualche minuto hanno iniziato a farmi domande sul perché non ci riuscivano: *"continuo a girare la corda ma non cambia, eppure è come quello di prima"*. Chiedendo ai gruppi come erano riusciti a modificare il primo nodo la risposta unanime è stata *"a caso, non saprei rifarlo"*. Abbiamo così parlato di nodi equivalenti e non equivalenti facendo semplicissimi esempi.

Al cambio dell'ora, in $2^a D$, la professoressa dell'ora successiva mi ha fermata dicendo che i ragazzi le avevano raccontato con entusiasmo le attività della prima lezione, cercando di spiegarle ciò che avevano imparato.

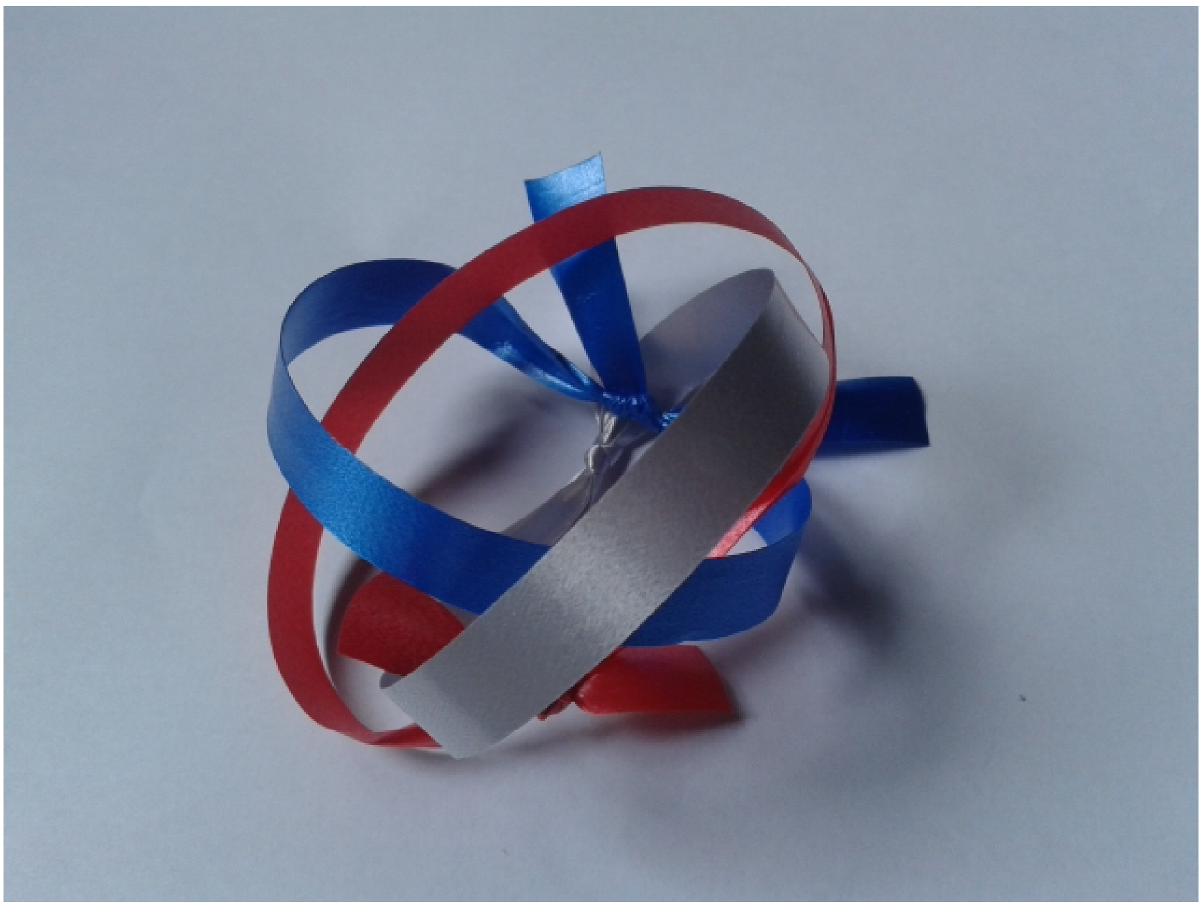


Figura 4.2.1: Esempio di anelli borromei realizzati dai ragazzi

4.3 Terza lezione

1. Vengono presentati i nodi torici e il modo per calcolarne il numero di componenti con l'utilizzo del sito Torus Knot.

2. Viene fatta una breve introduzione ai nodi celtici, accennando anche alla teoria dei grafi, facendo vedere il grafo attorno al quale il nodo è costruito.

3. Ai ragazzi viene dato un foglio nel quale sono rappresentati vari nodi celtici. Viene chiesto loro, lavorando in gruppi di massimo tre componenti, di trovare le proprietà algebriche che stanno dietro la costruzione di tali nodi, osservando il grafo su cui il nodo è costruito e il numero di componenti. In pratica viene chiesto loro di fare il lavoro che per i nodi torici è stato fatto insieme da tutta la classe.

4. I risultati dei vari gruppi vengono discussi tutti insieme.

Tempo: un'ora e mezzo.

Obiettivi specifici dell'apprendimento terza lezione:

- sapere come si costruiscono i nodi torici e i nodi celtici e come questi possono essere individuati da due numeri;

- sapere come il numero di componenti di un nodo di questo tipo è legato ai due numeri che sono stati scelti per identificare il nodo stesso.

Alla classe sono state consegnate delle dispense con il riassunto di quanto da me esposto durante la lezione; per il lavoro a coppie sui nodi celtici sono stati consegnati a ognuno due fogli contenenti vari disegni di nodi, con le componenti colorate in diverso modo per poterle individuare facilmente.

Per quanto riguarda lo svogimento di questa terza lezione preferisco descriverlo dividendo la $2^a D$ dalla $4^a D$, per distinguere bene il diverso approccio e i diversi interventi nelle due classi, in quanto a mio avviso è stata la lezione più interessante per quanto riguarda la partecipazione dei ragazzi.

Svolgimento $2^a D$:

Entrata in classe come primo argomento ho affrontato i nodi torici. Ho scelto di usare l'approccio proposto dal sito di Matematita. Ho mostrato loro un cilindro di plastica con tre cordini colorati incollati in maniera equidistante e ho chiesto alla classe cosa sarebbe successo se avessi unito il cilindro a formare un toro, stando attenta a far coincidere le estremità dei cordini.

Una ragazza ha risposto prontamente: *"tre nodi banali!"*. Abbiamo verificato che effettivamente questa era la risposta esatta, poi ho chiesto cosa sarebbe accaduto applicando una torsione al cilindro prima di unire i capi.

I ragazzi questa volta hanno detto *"sicuramente qualcosa cambia"*. Con l'aiuto del sito Torus Knot, che permette di manipolare nodi su un toro in maniera virtuale molto semplice, ho fatto vedere alla classe come il numero di componenti varia cambiando numero di cordini sul cilindro di partenza e la torsione applicata (figura 4.3.1).

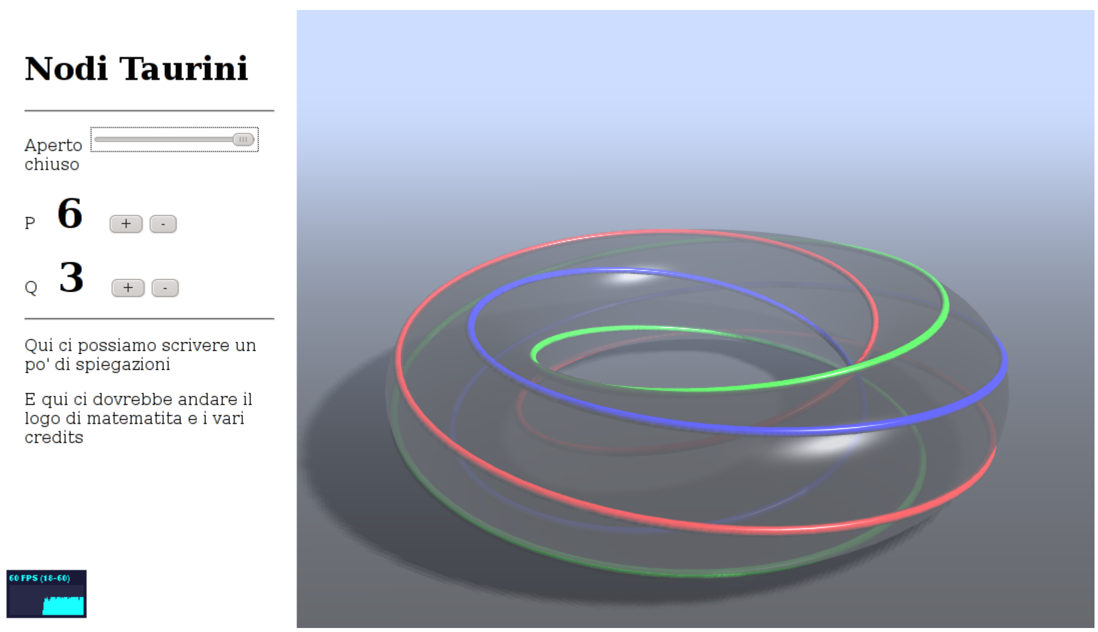


Figura 4.3.1

I ragazzi sono rimasti affascinati, almeno questo è quello che ho capito dai loro commenti anche molto coloriti. Ho detto allora alla classe che il numero iniziale di cordini e il numero che identifica la torsione in qualche modo sono collegati al numero di componenti, chiedendo di fare ipotesi su tale connessione. Mi hanno chiesto di far vedere degli esempi, tipo il nodo $K_{5,1}$, $K_{6,3}$, $K_{4,2}$, $K_{8,4}$. Una ragazza è intervenuta dicendo che secondo lei il numero di componenti era dato dalla divisione del primo numero per il secondo. Ho quindi mostrato loro il nodo $K_{10,5}$ che ha cinque componenti. Allora un altro ragazzo ha detto che secondo lui c'era una regola diversa se si utilizzavano solo numeri pari o anche numeri dispari. Un'altra ragazza invece ha detto *"è il massimo comun divisore"*, e anche gli altri hanno concordato.

Dopo aver fatto vedere tanti esempi di nodi torici, facendo calcolare ai ragazzi il numero di componenti, sono passata ai nodi celtici. Per prima cosa ho dato la definizione di grafo, sottolineando che, benché tutti i nodi siano riconducibili a un grafo, in classe avremmo visto solo quelli riconducibili ad un grafo particolare, a una griglia. Una ragazza è intervenuta dicendo che quindi questi nodi si potevano disegnare facendo riferimento a un piano cartesiano. Dopo aver fatto vedere qualche esempio di nodo con il relativo grafo, i ragazzi si sono divisi a coppie e ho consegnato due schede ciascuno contenenti vari nodi celtici con le componenti evidenziate in colori diversi. La consegna data è stata la seguente: insieme abbiamo capito come dai due numeri che identificano i nodi torici si può risalire al numero di componenti, ora cercate quali sono i due numeri che mi possono identificare il nodo celtico, cercando in che relazione stanno questi con il numero di componenti.

I ragazzi si sono subito messi a lavoro. Passando tra i banchi la prima cosa che ho osservato è che quasi tutti avevano disegnato il grafo corrispondente a ogni nodo. I primi due ragazzi convinti di aver trovato la soluzione hanno dato la seguente spiegazione: *"Il numero di componenti è dato dalla divisione del numero totale di vertici del grafo diviso il numero di vertici che forma la base".* Ovviamente in alcuni dei nodi rappresentati nella scheda questo metodo funziona bene, però non con tutti; ho chiesto dunque di provare ad applicare il loro metodo con tutti i nodi e si sono resi conto che qualcosa non andava. Un'altra coppia invece ha dato la seguente spiegazione: *"i numeri che possono identificare il nodo sono il numero dei vertici della base e il numero* *dei vertici dell'altezza e il numero di componenti è dato dalla differenza di questi due".* Anche in questo caso c'é qualche nodo in cui la loro ipotesi torna bene, ho detto che erano sulla strada giusta, ma di controllare meglio con tutti i nodi delle schede. Dopo poco mi hanno chiamato dando la risposta esatta. Altre due ragazze invece sostenevano che il numero di componenti è dato dal numero di quadrati che forma il grafo meno uno. Anche in questo caso facendo la prova con tutti i nodi si sono accorte che non andava bene. Alla fine tutti sono giunti alla conclusione esatta.

Tutti insieme abbiamo controllato su vari esempi che il risultato tornasse e abbiamo fatto qualche esercizio per riconoscere il numero di componenti dato un nodo tutto del medesimo colore.

Finito il lavoro ho fatto notare ai ragazzi come un semplice strumento algebrico, il massimo comun divisore, sia in grado di descrivere così bene i nodi da noi esaminati.

Figura 4.3.2: Sito di Matematita

(a)

(b)

Figura 4.3.3: Sito di Matematita

Svolgimento $4^a D$:

Come in $2^a D$ anche in questa classe ho utilizzato l'approccio proposto dal sito Matematita per la spiegazione dei nodi torici e l'aiuto del sito Torus Knot. Anche i ragazzi di $4^a D$ si sono subito accorti che unendo il cilindro senza applicare alcuna torsione si ottenevano tre nodi banali. Ho fatto vedere alla classe che cambiando la torsione cambiava, in alcuni casi, anche il numero di componenti e ho chiesto loro il perché. I ragazzi mi hanno chiesto di far loro vedere vari esempi e la prima osservazione che è stata fatta è stata: *"quando il numero della torsione e il numero di fili iniziale è uguale, tipo cinque, allora questo sarà il numero di componenti del nodo, altrimenti c'è sempre una sola componente".* Allora ho fatto veder il nodo $K_{8,4}$, dove il numero di componenti è quattro.

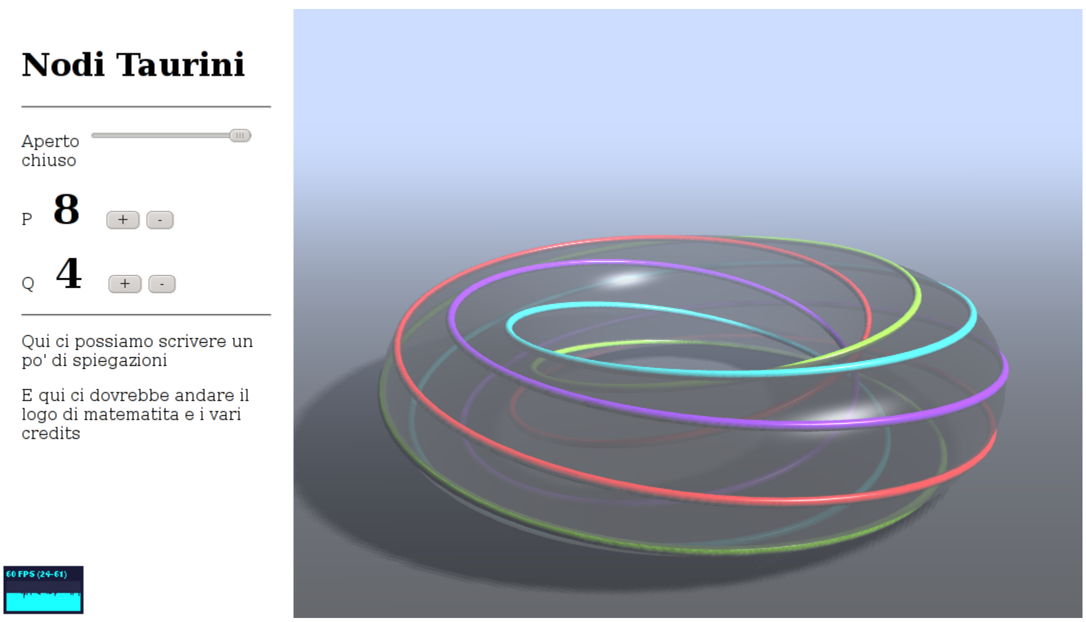


Figura 4.3.4

Anche in questa classe hanno ipotizzato che ci potesse essere un comportamento diverso per numeri pari e numeri dispari. La ragazza che aveva fatto la prima osservazione ha continuato: *"quello che ho detto prima vale quando* *il numero di fili sul cilindro di partenza è dispari, altrimenti il numero di componenti è dato dal massimo comun divisore"*. A questo punto un altro ragazzo ha fatto notare che allora la regola del massimo comun divisore si poteva applicare in ogni caso. Abbiamo fatto molti esempi per osservare come effettivamente il massimo comun divisore funzionasse bene per scoprire le componenti di un nodo torico e poi siamo passati ai nodi celtici.

La parte sui grafi e sul loro collegamento alla teoria dei nodi, in particolare ai nodi celtici, è stata svolta come in $2^a D$, poi anche i ragazzi di $4^a D$ sono stati divisi a coppie per cercare di trovare due numeri interi che caratterizzassero questi nodi, avendo a disposizione le medesime dispense con vari nodi celtici. Anche in questa classe ci sono state idee molto interessanti. Una coppia ha detto che i numeri che potevano identificare il nodo erano il numero di componenti e il numero dei vertici sulla diagonale del nodo. Altri hanno detto che doveva esserci una relazione tra i vertici del grafo e il numero di incroci del nodo, i vertici erano sempre uno in più degli incroci, ma non riuscivano a collegare questo risultato al numero di componenti. Un'altra coppia mi ha chiamata e mi ha detto: *"il numero di componenti è dato dal rapporto tra i vertici dell'altezza e i vertici della base"*. Allora ho mostrato loro che per alcuni dei nodi la cosa funzionava, ma non per tutti. Ho detto che erano sulla buona strada e poco dopo hanno capito che l'operazione da fare non era la divisione ma il massimo comun divisore. Due ragazze sostenevano che il numero di componenti si trovasse facendo il massimo comun divisore tra i vertici della base, i vertici dell'altezza e i vertici totali. Ho fatto quindi notare che il numero totale di vertici è dato dal prodotto di quelli della base per quelli dell'altezza, quindi aggiungere questo numero al massimo comun divisore non serviva a nulla. Altre due ragazze invece hanno fatto una distinzione tra i nodi con un grafo di forma quadrata e quelli con un grafo di forma rettangolare: *"i nodi che hanno un grafo con stesso numero di vertici che compongono base e altezza hanno anche lo stesso numero di componenti, il numero di componenti degli altri nodi è dato dalla differenza* *del numero di vertici che formano la base meno quello dei vertici che formano l'altezza"*. Quando ho fatto notare che la loro idea non funzionava per tutti i nodi delle dispense, partendo dall'ipotesi sui nodi a grafo quadrato sono arrivate a scoprire la regola del masssimo comun divisore.

Alla fine anche in questa classe sono tutti arrivati alla conclusione che il numero di componenti è dato dal massimo comun divisore tra i vertici della base e quelli dell'altezza. Abbiamo fatto vari esempi alla LIM osservando come in tutti si poteva applicare la regola del massimo comun divisore. Anche in questa classe ho messo in risalto come l'algebra sia in grado di descrivere oggetti apparentemente non a essa collegati.

4.4 Verifica

La verifica è stata divisa in due parti: la parte A conteneva domande teoriche e piccoli esercizi riguardanti i contenuti svolti in classe; la parte B era formata da quattro domande volte a valutare quanto l'esperienza sia stata per loro nuova e interessante e quanto li abbia coinvolti.

Il giorno della verifica in $2^a D$ c'era un assente, quindi è stata svolta da 25 ragazzi, mentre in $4^a D$ ce ne erano cinque, quindi è stata svolta da 28 ragazzi.

La parte A della verifica era composta da sei esercizi. Ovviamente per le risposte i ragazzi dovevano far riferimento alle dispense da me consegnate e a ciò che avevamo detto in classe.

Nel primo esercizio si chiedeva di individuare figure topologicamente equivalenti, nel secondo e nel terzo venivano chieste rispettivamente la definizione di nodo intrecciato e non intrecciato e quando si può dire che due nodi sono topologicamente equivalenti; nel quarto era richiesta la definizione di nodo torico spiegando il procedimento che avevamo visto per costruirlo, nel quinto bisognava individuare le componenti di alcuni nodi celtici dato il loro diagramma; infine nel sesto erano rappresentati quattro link a tre componenti e bisognava stabilire quale di essi rappresentava gli anelli borromei.

Nella tabella 4.1 sono riportate le risposte dei ragazzi di $2^a D$. Si osserva facilmente come le risposte siano state in maggioranza esatte o parzialmente esatte.

In maniera analoga nella tabella 4.2 sono riportati i risultati della classe $4^a D$, e anche in questo caso la gran maggioranza dei ragazzi ha dato una risposta esatta o parzialmente esatta.

Risposta	$n^o 1$	$n^o 2$	$n^o 3$	$n^o 4$	$n^o 5$	$n^o 6$
Esatta	14	23	18	9	22	20
Parzialmente esatta	8	$\backslash$	7	13	2	$\backslash$
Scorretta o mancante	3	2	$\backslash$	3	1	5

Tabella 4.1: Risposte verifica $2^a D$ (parte A)

Risposta	$n^o 1$	$n^o 2$	$n^o 3$	$n^o 4$	$n^o 5$	$n^o 6$
Esatta	22	26	23	14	20	20
Parzialmente esatta	6	$\backslash$	3	10	5	$\backslash$
Scorretta o mancante	$\backslash$	2	2	4	3	8

Tabella 4.2: Risposte verifica $4^a D$ (parte A)

La parte B della verifica era invece composta da quattro domande, qui di seguito riportate con i rispettivi risultati.

Domanda 1: Quale delle attività o argomento trattato ti è piaciuta maggiormente?

Argomento	Risposte
Anelli borromei, nodi equivalenti	16
Nodi celtici	2
Nodi torici	2
Introduzione topologia	1
Tutto	4

(a) Domanda 1 $2^a D$

Argomento	Risposte
Anelli borromei, nodi equivalenti	13
Nodi celtici	7
Nodi torici	6
Introduzione topologia	1
Tutto	1

(b) Domanda 1 $4^a D$

Tabella 4.3: Risposte domanda 1

Circa il 55% del totale dei ragazzi ha risposto che l'attività che maggiormente li aveva interessati è stata quella sugli anelli borromei, in particolare la loro costruzione. Una ragazza di $4^a D$ ha scritto: *"Mi è sembrata più interessante la parte pratica: poter costruire gli anelli borromei e trasformare un nodo in un suo equivalente. Abbiamo verificato e sperimentato direttamente la parte teorica"*. Una ragazza di $2^a D$ invece scrive: *"Le attività più interessanti sono state sicuramente quelle di laboratorio, è stato interessante provare la parte pratica con quella teorica e persino utile per capirla meglio"*.

Domanda 2: I temi affrontati ti sono sembrati interessanti? Perché?

La totalità dei ragazzi ha risposta a questa domanda che gli argomenti erano stati interessanti. Alcuni hanno risposto semplicemete *"sì"*, mentre altri hanno anche motivato la risposta data. Una ragazza di $4^a D$ scrive: *"Sì, perché abbiamo scoperto che la matematica è applicabile in cose anche più comuni e non solo in calcoli ed equazioni"*. Un altro ragazzo scrive: *"Sì, perché hanno un riscontro reale, non sono solo numeri e calcoli, sono oggetti e forme"*. Invece un ragazzo di $2^a D$ scrive: *"Sì, mi sono sembrati molto interessanti* *soprattutto perché nella scuola superiore non è solito trattare questi argomenti moderni, ma io ho avuto questa fortuna, è stata una novità!"*.

Domanda 3: Pensavi che la matematica potesse abbracciare un così vasto tipo di argomenti apparentemente scollegati con quella che è la tua esperienza scolastica?

Sì	No
5	20

(a) Domanda 3 $2^a D$

Sì	No
11	17

(b) Domanda 3 $4^a D$

Tabella 4.4: Risposte domanda 3

Il 70% dei ragazzi ha dato una risposta negativa scrivendo che sono rimasti molto sorpresi che *"anche queste cose fossero matematica"*. Chi invece ha risposto "sì" ha poi scritto cose molto simili a quello che ha scritto una ragazza di $4^a D$: *"Certo, non mi sorprende, alla fine con la matematica si possono trovare regole che spiegano la natura, solo che noi a scuola studiamo una piccolissima parte degli argomenti della matematica"*. Un ragazzo di $2^a D$ scrive: *"Sinceramente non avrei mai pensato che ci potesse essere un collegamento tra questi due tipi di matematica, all'apparenza scollegati. Invece ci sono relazioni anche molto semplici come l'uso del MCD per calcolare il numero di componenti in alcuni nodi"*.

Domanda 4: Hai parlato con qualcuno degli argomenti trattati a lezione? Se sì, ti sono sembrati interessati?

Familiari	Coetanei	Cotanei e familiari	Nessuno
11	7	3	4

(a) Domanda 4 $2^a D$

Familiari	Coetanei	Cotanei e familiari	Nessuno
14	8	2	4

(b) Domanda 4 $4^a D$

Tabella 4.5: Risposte domanda 4

Osservando i dati solo il 9% dei ragazzi non ha parlato con nessuno degli argomenti trattati. Alcuni ragazzi hanno scritto che hanno riproposto l'attività degli anelli borromei in famiglia, una ragazza di $4^a D$ scrive: *"Ne ho parlato con i miei fratelli più piccoli e sono sembrati molto interessati, hanno anche provato a rifare gli anelli borromei!"*. Un'altra scrive: *"Ho parlato con la mia corrispondente francese e mi ha detto che anche lei aveva trattato in un progetto argomenti simili"*. Una ragazza di $2^a D$ scrive: *"Ne ho parlato con i miei genitori, che sono sembrati molto interessati, e con i miei compagni di altre classi che sono rimasti stupiti perché non ne hanno mai sentito parlare"*.

Nelle seguenti tabelle sono riportate in percentuale le risposte date dal totale degli alunni delle due classi che hanno partecipato alla verifica.

Risposta	n^o1	n^o2	n^o3	n^o4	n^o5	n^o6
Esatta	68%	92%	77%	43%	78%	75%
Parzialmente esatta	26%	\	19%	43%	14%	\
Scorretta o mancante	6%	8%	4%	14%	8%	25%

Tabella 4.6: Risposte verifica (parte A)

Argomento	Risposte
Anelli borromei, nodi equivalenti	55%
Nodi celtici	17%
Nodi torici	15%
Introduzione topologia	4%
Tutto	9%

Tabella 4.7: Domanda 1 (parte B)

Sì	No
30%	70%

Tabella 4.8: Domanda 3 (parte B)

Familiari	Coetanei	Coetanei e familiari	Nessuno
47%	29%	15%	9%

Tabella 4.9: Domanda 4 (parte B)

Capitolo 5

Conclusioni

Alla fine di questo progetto sono molto soddisfatta di come si sono svolte le lezioni e dei risultati ottenuti. Penso che la scelta della teoria dei nodi sia stata appropriata, poiché tale argomento ha affascinato i ragazzi e credo sia riuscito a infondere in loro un pizzico di curiosità nei riguardi della matematica.

Per quanto riguarda gli obiettivi, specifici dell'apprendimento e non, che mi ero prefissata all'inizio di questo progetto, ritengo che siano stati raggiunti con successo, come è possibile osservare dai risultati della verifica e dall'atteggiamento che i ragazzi hanno tenuto durante le lezioni descritto nel capitolo precedente.

Parlando con la professoressa Diamanti, dopo averle comunicato i risultati delle prove, è venuto fuori che alcuni ragazzi, che normalmente hanno un atteggiamento negativo nei confronti della materia, avevano dato ottime risposte ed era evidente il loro impegno nel progetto.

Sono molto contenta di aver iniziato il lavoro in classe parlando di topologia, perché questo ha stimolato interesse e curiosità nei ragazzi, che sono stati molto attenti e partecipi in tutte le lezioni. Parlando anche con altri professori mi è stato detto che gli alunni di $2^a D$ hanno raccontato loro con trasporto ed entusiasmo delle lezioni, soprattutto della prima: hanno raccontato di come una "ciambella" in matematica si chiama toro e di come in topologia cubo e sfera siano equivalenti.

Parlare di un argomento trattato a lezione ritengo sia sintomo del fatto che il tema li abbia affascinati e colpiti, tanto che si è sentito il bisogno di raccontare l'esperienza non solo ad altri compagni, ma anche a genitori e professori di altre materie.

Le attività manuali sono state molto apprezzate dalle classi, come si può notare dai risultati della verifica, e credo siano state un ottimo veicolo di conoscenza. Durante le attività non c'era confusione o disattenzione, ma, oltre a un po' di sana competizione tra i gruppi, la voglia di scoprire se le cose andavano esattamente come la teoria diceva o meno.

La creazione degli anelli borromei è piaciuta molto, alcuni dei ragazzi sono rimasti particolarmente affascinati dalle caratteristiche di questi anelli e dal simbolismo storico a essi collegato e ciò ha sicuramente contribuito ad un'ottima riuscita del lavoro di gruppo. Durante questa parte del progetto, passando tra i banchi, ho notato anche come chi era giunto velocemente alla soluzione fosse felice di spiegare agli altri il giusto procedimento da seguire, sottolineando dove avevano sbagliato e perché.

L'attività dell'ultima lezione sui nodi celtici è stata a mio avviso la più produttiva. I ragazzi hanno dato delle risposte particolarmente interessanti, come ho riportato nel capitolo precedente, e ho notato coinvolgimento e impegno. Erano veramente soddisfatti quando alla fine del lavoro sono riusciti a ricavare la regola del massimo comun divisore e ritengo che il fatto di aver ricavato in maniera autonoma questo risultato sia stato un momento importante della fase di apprendimento.

Osservando i risultati della verifica, la parte che forse è stata meno appresa è stata quella dei nodi torici. Questa era l'unica parte che non veniva preceduta da una attività pratica di gruppo, ma veniva fatta in maniera collettiva da tutta la classe. Forse questa modalità non ha fatto sì che, con il poco tempo a disposizione, l'argomento venisse assimilato correttamente, infatti molti dei ragazzi hanno dato risposte solo parzialmente esatte, nonostante la loro partecipazione in classe.

Ritengo quindi che il lavoro in piccoli gruppi, in cui ognuno è costretto a dire la propria opinione per raggungere un risultato comune, sia sicuramente molto produttivo per l'assimilazione e la formazione di conoscenze.

Nonostante il lavoro sia andato bene in entrambe le classi, è stato profondamente diverso l'approccio dei ragazzi di seconda rispetto a quello dei ragazzi di quarta. La classe $2^a D$ si è mostrata fin da subito molto entusiasta e con la voglia di imparare, mentre l'atteggiamento dei ragazzi di $4^a D$ era sì interessato, ma molto più distaccato, come se ormai, avendo già visto molto, nessun nuovo argomento potesse entusiasmarli veramente. Dovendo scegliere in quale classe l'attività abbia avuto più successo non c'è dubbio che sia la $2^a D$. Penso che l'età del biennio delle superiori sia la migliore per stimolare i ragazzi, non solo verso la matematica, ma verso tutte le discipline in generale, ed è quindi essenziale fornire loro esperienze diversificate e interessanti per farli appassionare. Crescendo il piacere della scoperta diminuisce sempre più e quindi una corretta predisposizione verso le novità è molto limitata. Per quanto riguarda la matematica quello che ho percepito è che ormai i ragazzi di quarta si erano costruiti, nei loro anni di scuola, un'immagine della materia ben precisa ed erano sicuri delle proprie convinzioni, mentre in seconda c'era una maggior apertura mentale che ha reso l'esperienza più vivace e interattiva.

A conclusione del mio lavoro ritengo di importante riportare due commenti a mio parere molto significativi di due ragazzi delle classi $2^a D$ e $4^a D$:

"Sinceramente ho trovato questa attività interessante, non tanto per l'argomento in sé per sé, ma per aver capito che la matematica è applicabile un po' in tutto".

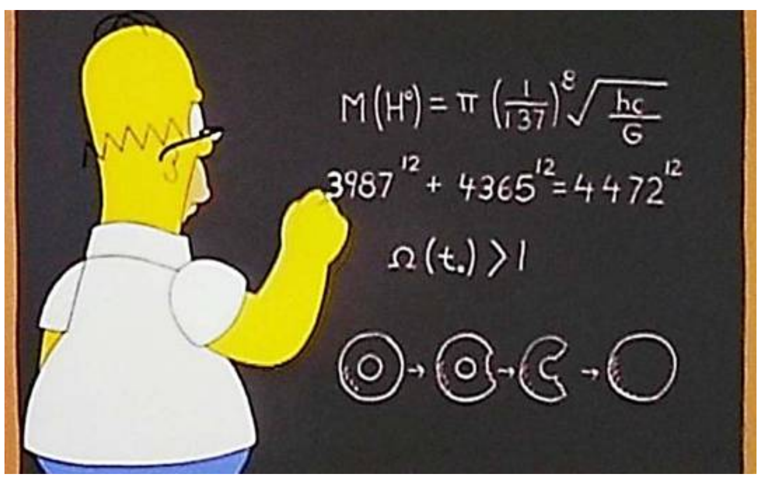
"Scoprire la topologia è stato veramente affascinante e divertente. I temi trattati non erano scontati e pieni di curiosità".

Non ho certo la pretesa di esser riuscita ad appassionare i ragazzi alla materia, ma spero di aver infuso loro la voglia per affrontare la matematica con un atteggiamento più aperto e curioso.

Appendice A

Materiale per le lezioni

A.1 Materiale prima lezione



Introduzione alla topologia

La **Topologia** (dal greco *topos* “spazio” e *logos* “studio”) è una branca della geometria sviluppatasi verso la metà del XIX secolo. Si caratterizza come lo studio delle proprietà delle figure e delle forme che non cambiano quando viene effettuata una **deformazione senza “strappi”, “sovrapposizioni” o “incollature”**. La topologia si occupa pertanto delle proprietà delle figure geometriche che restano invariate quando la figura viene piegata, stirata, compressa o deformata in qualunque modo che non crei nuovi punti o ne fonda insieme altri; presuppone in altre parole che vi sia una corrispondenza uno a uno tra i punti della figura originale e i punti della figura trasformata e che la trasformazione mandi punti vicini in punti vicini. Quest'ultima proprietà è detta continuità. In parole povere la continuità esige che non si facciano "strappi", mentre sono ammesse "deformazioni".

La topologia viene spesso descritta come la geometria del foglio di gomma, perché le proprietà topologiche delle figure restano le stesse quando si immagina la figura realizzata con gomma morbida, o disegnata su un foglio di gomma, e la si comprime o la si stira. Per esempio, il fatto che due regioni siano confinanti è una proprietà topologica dal momento che uno stiramento o una compressione non possono modificare tale proprietà.

Un cubo e una sfera sono oggetti topologicamente equivalenti, perché possono essere deformati l'uno nell'altro senza ricorrere a nessuna incollatura, strappo o sovrapposizione.

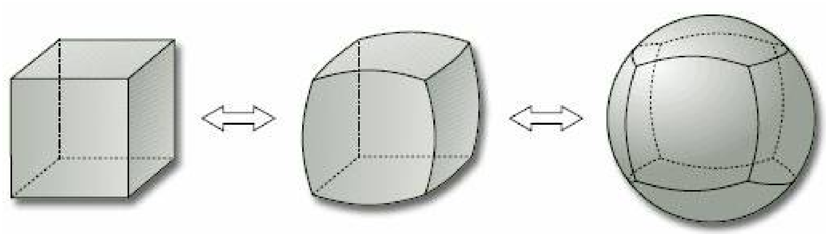
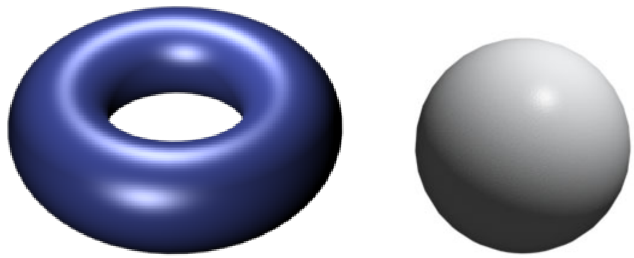


Figura A.1.1

Una sfera e un toro invece non lo sono, perché il toro contiene un "buco" che non può essere eliminato da una deformazione.



$\neq$

(a) Toro (b) Sfera

Figura A.1.2

Nella figura A.1.3 è possibile osservare quattro figure che non sono topologicamente equivalenti.

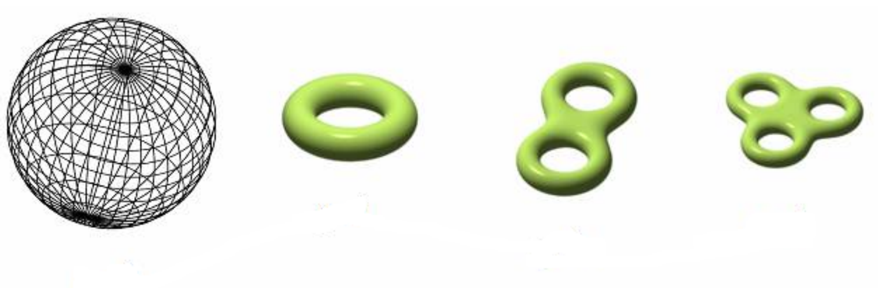


Figura A.1.3

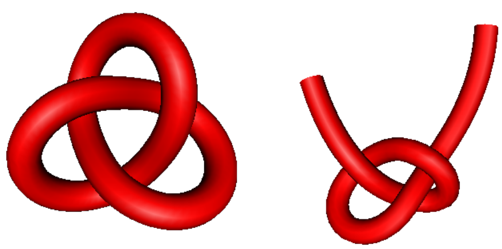
Possiamo quindi dire che la proprietà di avere un "buco" è una proprietà che non può cambiare se adoperiamo una deformazione senza "strappi". Le proprietà che non cambiano con le deformazioni del genere che abbiamo visto si chiamano invarianti topologici.

Figura A.1.4: Da una tazza ad un toro

La teoria dei nodi

Pensando a un **nodo** la prima cosa che ci viene in mente è un pezzo di corda con le estremità libere, come il nodo per allacciarsi le scarpe o il nodo della cravatta, e per quanto si provi a stringere il nodo, questo si potrà sempre sciogliere, pur di avere un po' di pazienza, semplicemente facendo scorrere uno dei capi liberi a ritroso lungo il nodo stesso.

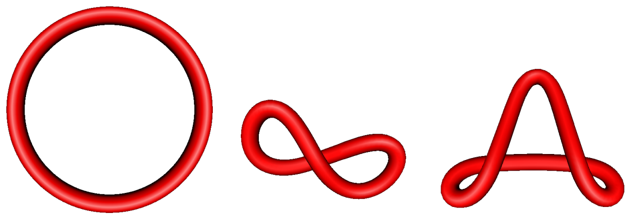
In matematica quando pensiamo a un **nodo** invece bisogna immaginarlo sempre con le due **estremità incollate** (esempio in figura A.1.5).



(a) Nodo (b) Non nodo

Figura A.1.5

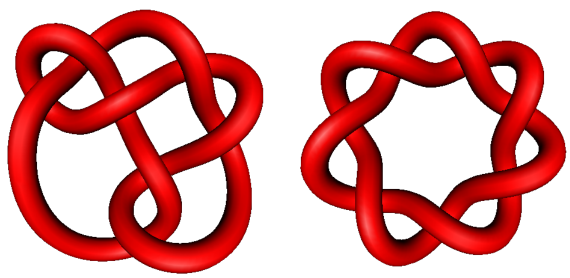
Un nodo viene detto **non intrecciato** o **sciolto** se esiste un movimento continuo nello spazio che lo faccia coincidere con il **nodo banale**. In figura A.1.6 possiamo osservare tutti nodi non intrecciati che è quindi possibile, tramite semplici movimenti, riportare al nodo banale.



(a) Nodo banale (b) (c)

Figura A.1.6: Nodi non intrecciati

Diremo invece che un nodo è **intrecciato** quando non è possibile, a meno di tagli della corda (operazione in topologia non consentita) ricondurlo al nodo banale. In figura A.1.7 sono rappresentati alcuni nodi intrecciati.



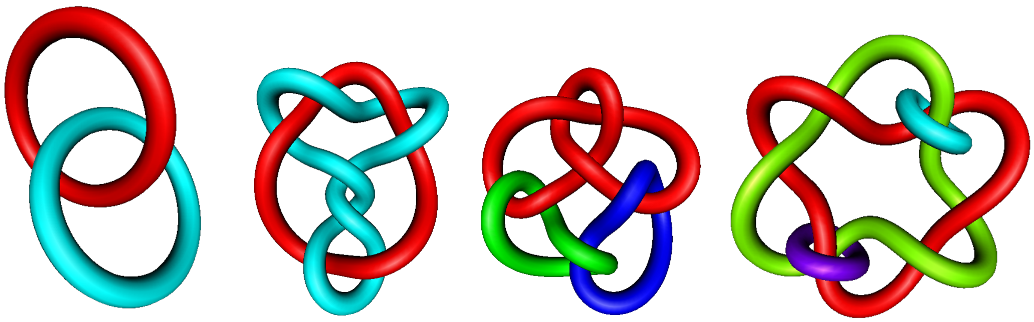
(a) (b)

Figura A.1.7: Nodi intrecciati

A.2 Materiale seconda lezione

Nodi a più componenti

Osserviamo la figura A.2.1: si nota immediatamente come questi nodi siano diversi dai nodi visti in precedenza, essi infatti sono composti dall'intreccio di due o più nodi. Un intreccio di due o più nodi viene chiamato **link** e ciascuno dei nodi di cui è composto il link viene chiamato **componente**. Nella trattazione i link verranno anche chiamati nodi specificandone le componenti. Il link di Hopf, (a) in figura A.2.1, è il nodo più semplice a due componenti, accanto a esso sono rappresentati un altro nodo a due componenti (b), un nodo a tre componenti (c) e un nodo a quattro componenti (d).



(a) link di Hopf (b) (c) (d)

Figura A.2.1: Esempi di nodi a più componenti

Un esempio di nodo a più componenti interessante per le sue caratteristiche è dato dagli **anelli borromei**. Questo link è stato il simbolo della celebre famiglia lombarda da cui prende il nome e di diverse altre famiglie che lo hanno preso come emblema grazie al significato simbolico a esso attribuito: le tre componenti, che rappresentano ciascuna un nodo banale, sono legate fra loro, benché non lo siano a coppie. Più precisamente, rimuovendo una qualsiasi delle tre componenti, le due rimanenti risultano sciolte, benché le tre insieme non lo siano, come è possibile osservare in figura A.2.2. Ciò non accade per nessuno degli imitatori dei borromei, cioè degli altri link a tre componenti.

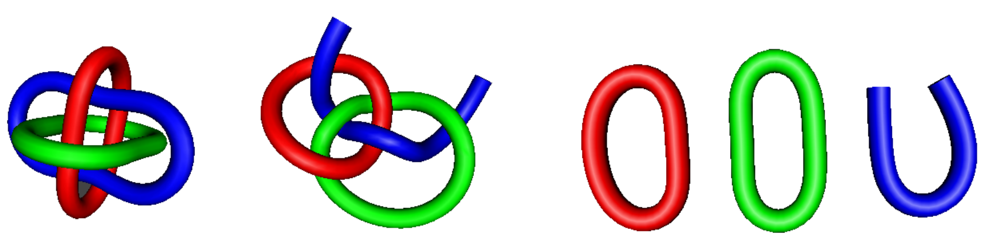


Figura A.2.2: Anelli borromei

Spesso questi nodi si vedono raffigurati in giro per Milano e in Lombardia in vari luoghi su stemmi, statue, fontane o portali. A volte però osservando attentamente si nota che non tutti sono anelli borromei, alcuni hanno degli incroci invertiti e vengono chiamati "imitatori" dei borromei. Gli imitatori sono quattro e sono rappresentati nel seguente poster della mostra *Metamilano*.

Figura A.2.3

Nodi equivalenti

Intuitivamente due nodi sono **equivalenti** se possono essere fisicamente deformati l'uno nell'altro, non è consentito tagliare il nodo, né farlo passare attraverso se stesso. Quindi i due trifogli in figura A.2.4 non sono equivalenti, mente il primo e l'ultimo nodo a otto della figura A.2.5 lo sono.

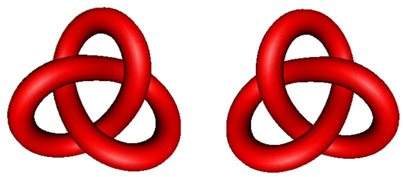


Figura A.2.4: Trifoglio destro e trifoglio sinistro

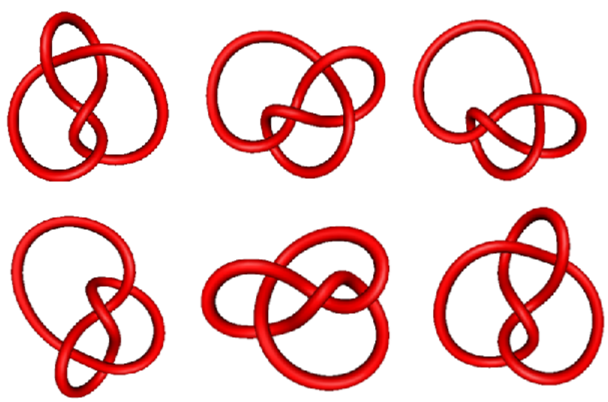


Figura A.2.5: Deformazione nodo a otto

Generalmente è molto difficile stabilire quando due nodi sono equivalenti e questo è un problema di ricerca della matematica ancora in evoluzione. Possiamo però vedere facilmente che nodi con un numero di componenti differenti non possono essere equivalenti, poiché non possono essere trasformati uno nell'altro, cioè il numero di componenti di un nodo è un invariante topologico, come lo è il numero di "buchi" di una superficie.

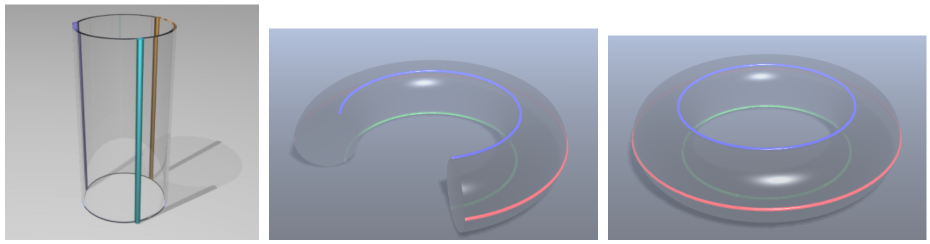
A.3 Materiale terza lezione

Nodi torici

Figura A.3.1

I **nodi torici** sono nodi che possono essere disegnati sulla superficie di un toro (una ciambella in matematica). Questi nodi sono completamente determinati da una coppia di numeri interi e non è troppo complicato capire in che modo. Possiamo infatti pensare di generarli partendo da un cilindro e fissando sulla superficie laterale del cilindro un certo numero (tre in figura A.3.2 (a)) di segmenti paralleli all'altezza del cilindro ed "equamente disposti" (l'uno si ottiene dall'altro con una rotazione di $120°$ e $120° = 360°/3$). Ora immaginiamo il cilindro flessibile e richiudiamolo a formare un toro ((b) in figura A.3.2). Sulle due facce che stiamo andando a identificare per formare la ciambella troviamo i tre punti; se incolliamo le due facce senza dare torsioni, il punto che su una faccia proviene da un certo segmento si attacca al punto che sulla seconda faccia proviene dallo stesso segmento; e in conclusione i tre segmenti si uniscono a formare tre circonferenze "staccate" fra loro, cioè tre nodi banali ((c) in figura A.3.2).

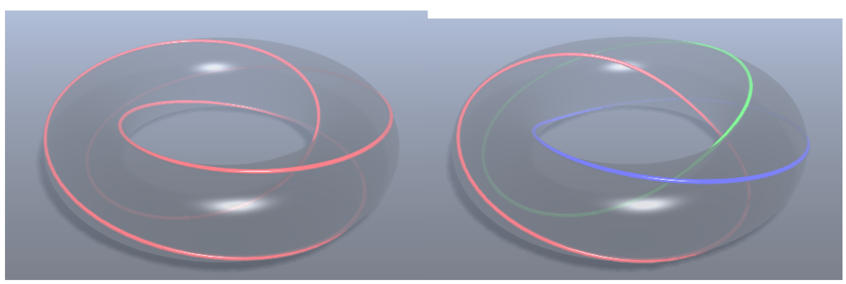
Ma se prima di incollare diamo una torsione, si apre una serie di interessanti possibilità; naturalmente, per collegare i tre segmenti, non dobbiamo dare una torsione qualsiasi, ma dobbiamo fare in modo che ciascuno dei tre punti su una faccia si colleghi con uno dei punti dell'altra; quindi la torsione dovrà essere di un angolo multiplo di $120°$. Ed è così che compare l'altro



(a) (b) (c)

Figura A.3.2: Costruzione di un nodo torico

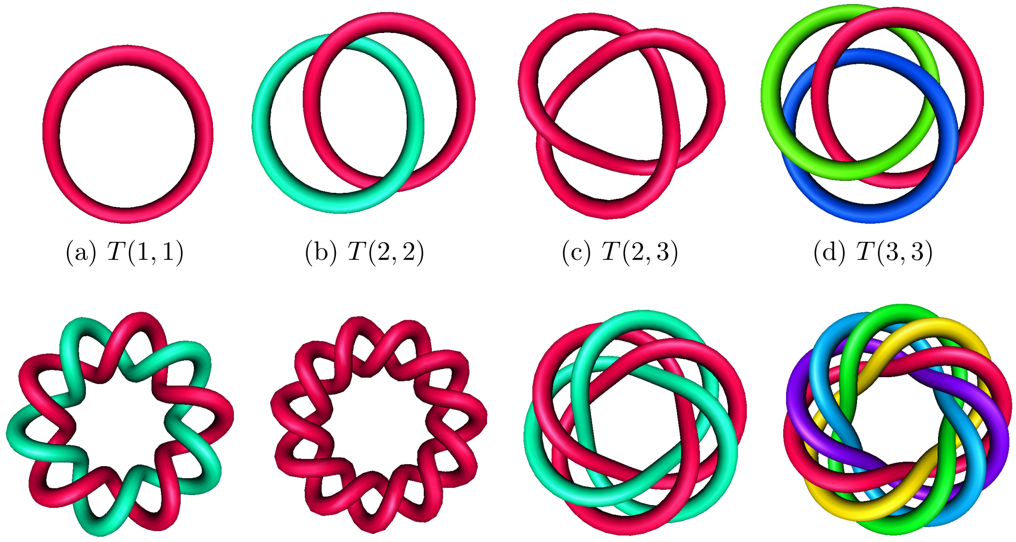
dei due numeri interi che caratterizzano il nodo torico: il nodo torico di tipo (m, n), $T(m, n)$, è quello che si ottiene a partire da m segmenti sul cilindro, identificando le facce dopo una torsione di $n \cdot (360°/m)$. In figura A.3.3 possiamo vedere come può cambiare il nodo della figura A.3.2 con una torsione prima $2 \cdot (360°/3)$ (a), poi di $3 \cdot (360°/3)$ (b).



(a) $T(3, 2)$ (b) $T(3, 3)$

Figura A.3.3

Non è detto che si ottenga un nodo a una sola componente, per esempio il nodo (b) in figura A.3.3 ha tre componenti. Può quindi capitare che si ottengano nodi a più componenti; questa è una cosa che si può capire facilmente a partire dai numeri interi m e n che caratterizzano il nodo torico: le componenti del nodo sono pari al massimo comun divisore tra m e n, e in particolare si ottiene un solo nodo quando questi due numeri sono primi fra loro. Vediamo in figura A.3.4 alcuni esempi notando come sia estremamente semplice calcolare il numero di componenti facendo il massimo comun divisore tra gli interi m e n.

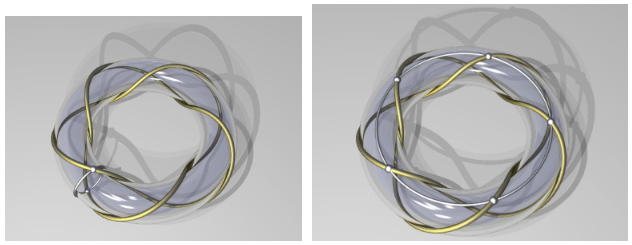


(a) $T(1,1)$ (b) $T(2,2)$ (c) $T(2,3)$ (d) $T(3,3)$

(e) $T(2,10)$ (f) $T(2,11)$ (g) $T(4,6)$ (h) $T(5,10)$

Figura A.3.4: Esempi di nodi torici

Questi due interi rappresentano quindi il numero di volte in cui la curva (o le curve, se si tratta di nodi a più componenti) "gira intorno al buco": m dà il numero delle volte in cui la curva si avvolge longitudinalmente (quindi per ottenere m si può contare il numero di punti in cui la curva interseca un meridiano); n dà il numero delle volte in cui la curva si avvolge trasversalmente (quindi per ottenere n si può contare il numero di punti in cui la curva interseca un parallelo). Come esempio possiamo vedere in figura A.3.5 il nodo $T(2,5)$: esso incontra uno qualsiasi dei meridiani 2 volte e uno qualsiasi dei paralleli 5 volte.



(a) meridiano (b) parallelo

Figura A.3.5: Incontro del nodo con meridiano e parallelo

Nodi celtici

Fin dai tempi più lontani questi tipi di nodi sono apparsi nelle illustrazioni di libri e nelle decorazioni degli edifici sacri o delle tombe. A ogni passo in Irlanda, o comunque in Paesi nordici, è possibile incontrare nodi di questo tipo (figura A.3.1).

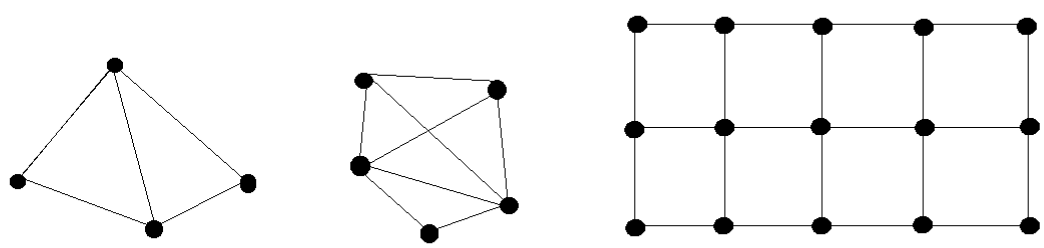
Un capolavoro di calligrafia e di uso dei nodi è il libro del Kells (figura A.3.6), in mostra al Trinity College di Dublino. In questo libro è possibile trovare rappresentazioni di nodi in ogni pagina, soprattutto nella decorazione dei capolettera delle pagine. Il significato simbolico di questi particolari nodi è un questio affascinante e irrisolto nella storia dell'arte celtica. C'è chi ha teorizzato che questi disegni fossero di protezione contro il male: più il nodo era complesso e più questo avrebbe potuto intrappolare e confondere il malocchio.

Figura A.3.6: Immagini dal libro del Kells

Si tratta di nodi di una bellezza impressionante e, come per i nodi torici, possono essere completamente determinati da una coppia di numeri interi.

I nodi celtici sono nodi che possono essere costruiti a partire da una griglia regolare, o più precisalente da un grafo. In realtà ogni nodo può essere rappresentato a partire da un grafo, ma per semlicità vedremo solo cosa accade per i nodi celtici.

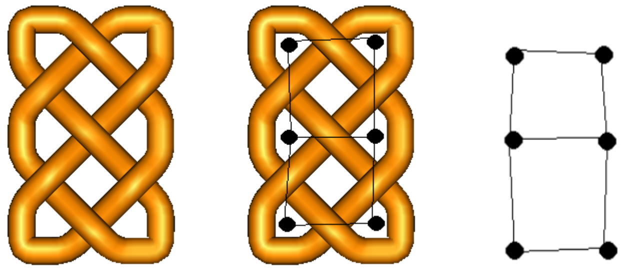
Un grafo è un insieme di nodi o vertici (per non creare confusione li chiamereno solo vertici), che possono essere collegati tra loro da linee chiamate archi, lati o spigoli. Più formalmente diremo che un grafo è una coppia ordinata $G = (V, E)$ di insiemi, con V insieme dei vertici ed E insieme dei lati, tali che gli elementi di E siano coppie di elementi di V. In figura A.3.7 sono rappresentati alcuni tipi di grafo, quelli che andremo a considerare noi sono quelli simili al grafo (c). In questi grafi è facile individuare il numero di vertici della "base" e il numero di verici dell'"altezza" che formano il grafo. Il grafo (c) ha 5 vertici per base e 3 per altezza.



(a) (b) (c)

Figura A.3.7: Esempi di grafi

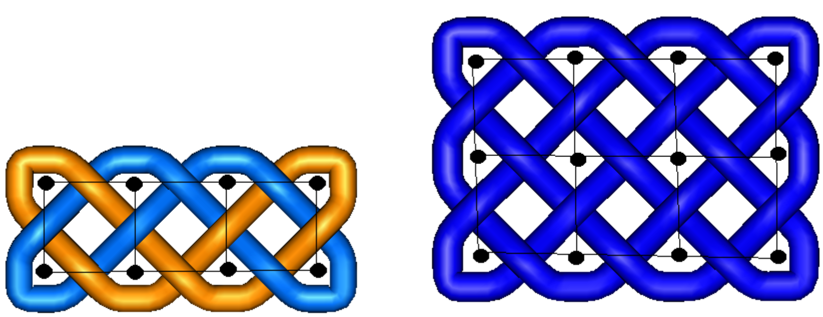
In figura A.3.8 è rappresentato un nodo celtico con il suo grafo. Il nodo è stato creato da un grafo con due vertici di base e tre di altezza, chiameremo questo nodo $C(2, 3)$. In generale ogni nodo celtico formato da un grafo con p vertici per base e q vertici per altezza verrà indicato con $C(p, q)$. Quindi come per i nodi torici è possibile individuare un nodo celtico se si conoscono i numeri interi p e q.



(a) (b) (c)

Figura A.3.8

Ma vi è forse una connessione tra questi due numeri e il numero di componenti di un nodo celtico? La risposta è sì. Osserviamo la figura A.3.9 in cui sono rappresentati due nodi. Il nodo (a) possiede due componenti, mentre il nodo (b) ne possiede una sola. L'indicazione sul numero di componenti di un nodo celtico, come accade per i nodi torici, ci viene fornita dai numeri (p, q) che definiscono il nodo stesso, più precisamente dal massimo comun divisore. Il numero di componenti è dato dal $MCD(p, q)$, quindi è facile osservare come in figura A.3.9 il nodo (a) ha due componenti, $MCD(4, 2) = 2$, mentre il nodo (b) ne ha una sola, $MCD(4, 3) = 1$.



(a) $C(4, 2)$ (b) $C(4, 3)$

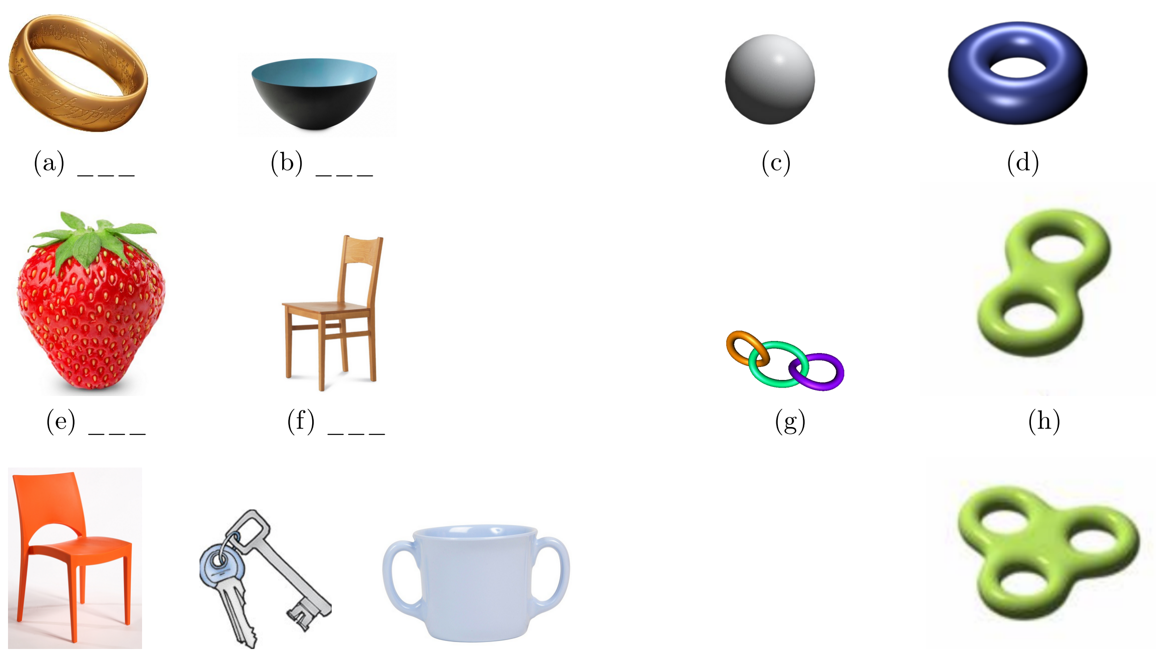
Figura A.3.9

A.4 Verifica

Verifica **Nome:** **Classe:**

Parte A

1. Osserva attentamente gli oggetti in figura A.4.1. Scrivi accanto a ogni oggetto nella colonna di sinistra la lettera dell'equivalente topologico della colonna di destra.



(a) ___ (b) ___ (c) (d)

(e) ___ (f) ___ (g) (h)

(i) ___ (j) ___ (k) ___ (l)

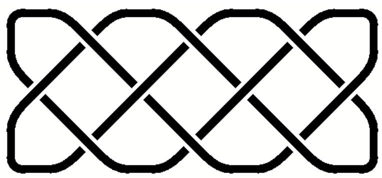
Figura A.4.1

2. Cosa vuol dire che un nodo è "non intrecciato"? e "intrecciato"?

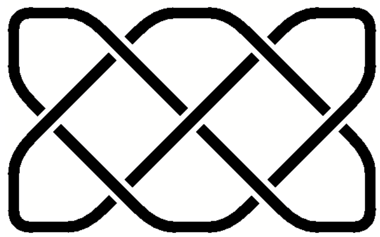
3. Quando due nodi sono equivalenti?

4. Che cosa è un nodo torico? Come è possibile definirlo in maniera algebrica?

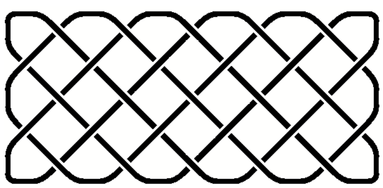
5. Osserva i seguenti nodi celtici in figura A.4.2. Per ognuno di essi individua il numero di componenti e scrivi il nome del nodo adeguatamente.



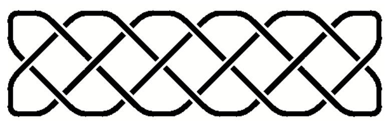
(a) _ ___



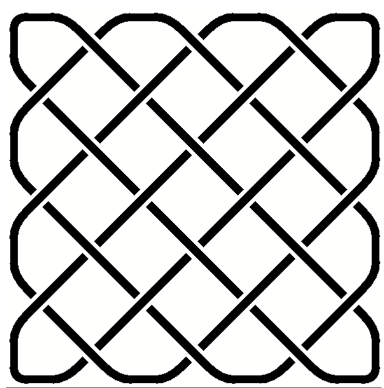
(b) _ ___



(c) _ ___



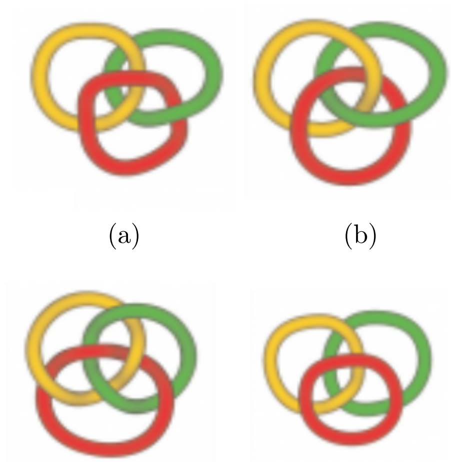
(d) _ ___



(e) _ ___

Figura A.4.2

6. Quali dei seguenti nodi rappresenta gli anelli borromei?



(a) (b)

(c) (d)

Figura A.4.3

Parte B

1. Quale delle attività o argomento trattato ti è piaciuta maggiormente?

2. I temi affrontati ti sono sembrati interessanti? Perché?

3. Pensavi che la matematica potesse abbracciare un così vasto campo di argomenti apparentemente scollegati con quella che è la tua esperienza scolastica?

4. Hai parlato con qualcuno degli argomenti trattati a lezione? Se sì, ti sono sembrati interessati?

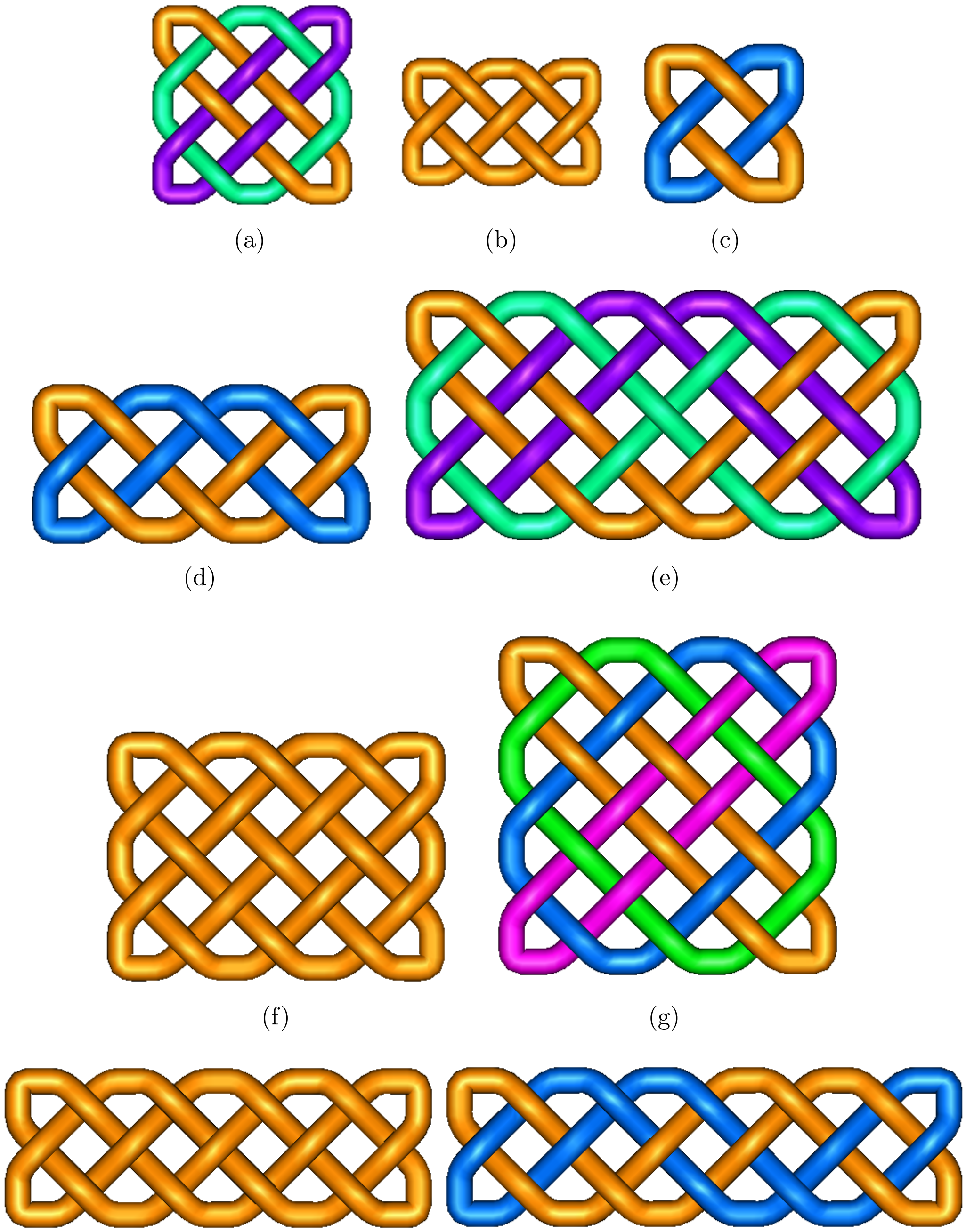
Appendice B

Materiali per i lavori di gruppo

In figura B.0.1 in (a) vi è la foto del nodo trifoglio e del nodo ad otto che i ragazzi hanno manipolato per cercare di trasformarli nel corrispettivo allo specchio, mentre in (b) c'è la foto del modello degli anelli borromei.

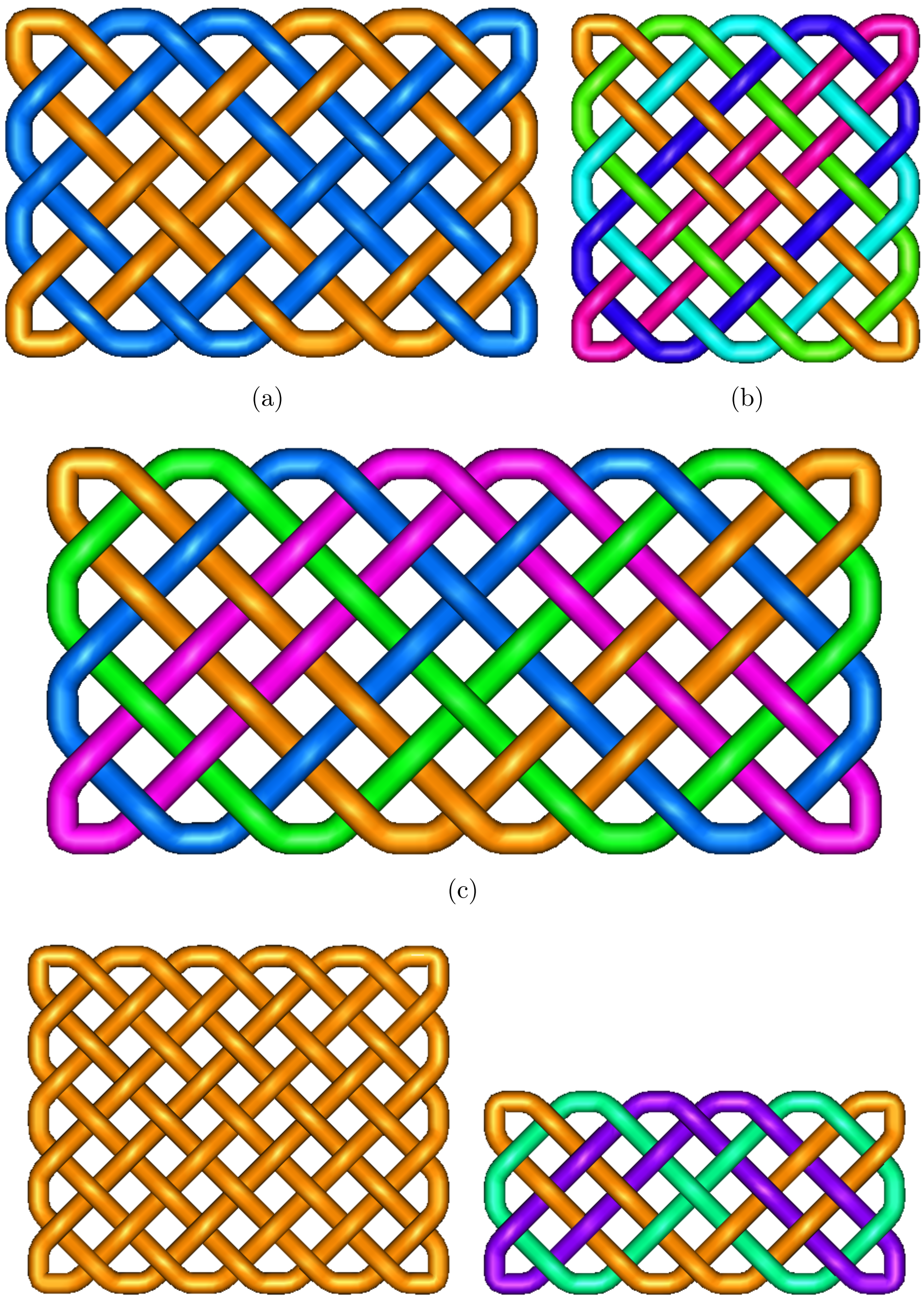
Figura B.0.1

Nelle pagine seguenti sono riportate le schede che i ragazzi hanno utilizzato nell'attività di caratterizzazione dei nodi celtici.



(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i)

Figure B.0.2:



(a) (b) (c) (d) (e)

Figure B.0.3:

Bibliografia

1. J. W. Alexander, *Topological invariants of knots and links*, Transactions of the American Mathematical Society 30 (1928).
2. S. Baruk, *Dizionario di matematica elementare*, Zanichelli, Bologna (1998).
3. J. H. Conway, *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*, Computational Problems in Abstract Algebra, John Leech editor (1970).
4. Gwen Fisher, *On the Topology of Celtic Knot Designs,* documento online*, www.mi.sanu.ac.rs/vismath/fisher/.*
5. Georg Glaeser, Konrad Plothier, *Immagini della matematica*, Raffaello Cortina Editore (2013).
6. Jonathan L. Gross and Thomas W. Tucker, *A Celtic Framework for Knots and Links,* Springer Science+Business Media (2010).
7. Czes Kosniowski, *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli Editore S.p.A. (1988).
8. Dale Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish (1976).
9. Robert G. Scharein, *Interactive Topological Drawing*, Department of Computer Science, The University of British Columbia (1998).

Sitografia

1. Sito web di *Matematita* : centro ineruniversitario di ricerca per la comunicazione e l'apprendimento informale della matematica.
   www.matematita.it

2. Sito web *Celtik Knotwork*.
   www.entrelacs.net

3. Sito web *The Knotplot Site*.
   www.knotplot.com

4. Sito web *Polymath*: Progetto Polymath Politecnico di Torino.
   www.polito.it/polymath/

5. Sito web *Torus Knot*
   www.toonz.com

Ringraziamenti

Qui si conclude un percorso importante della mia vita e mi sembra giusto ringraziare, oltre al Professor Bolondi che mi ha seguita con preziose indicazioni nella stesura di questa tesi, quelle persone che mi hanno accompagnato in questo viaggio.

Ringrazio per primi i miei genitori, per avermi fatto venire la passione per la Matematica, per avermi cresciuta in un ambiente ricco di stimoli e per avermi insegnato ad aggredire il foglio del compito per ricavarne il miglior risultato.

Ringrazio le mie sorelline e Giorgio per avermi tenuto compagnia durante lo studio di questi cinque anni e avermi riempito di "in bocca al lupo".

Ringrazio nonni e zie per essersi concentrati per me prima di ogni esame.

Un grazie speciale va anche alle cinque matematiche più belle del mondo che con la loro simpatia, i loro balletti, la loro pazzia e soprattutto la loro magia hanno reso questi anni fantastici e pieni di allegria... sono per me delle brillanti compagne e soprattutto amiche grazie alle quali sono riuscita a rendere il gioco più colorato e divertente.

Ringrazio anche gli scout del mio gruppo, perché il primo approccio con i nodi è stato proprio con loro.

Infine un enorme grazie va a Tommi, per avermi sentita ripetere prima di ogni esame facendo finta di capire quello che dicevo, per avermi sostenuta, incoraggiata e consolata quando le cose non andavano secondo i piani e per aver fessteggiato con me quando arrivavano i risultati. Inoltre a lui mi

sento di dover dire ancora un altro grazie per avermi dato l'idea per questa tesi, senza di lui non avrei saputo da dove partire... hai visto Tommi? Credevi di non sapere nulla di ciò che studiavo, invece grazie ai tuoi nodi ho potuto concludere questo viaggio impegnativo, sudato, ma bellissimo nella Matematica.