ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

STORIA, SVILUPPI E APPLICAZIONI DEI LOGARITMI

Tesi di laurea in Elementi di Analisi e Ricerca Operativa da un punto di vista superiore

Presentata da:
SHARON CANGIALEONI

Relatore:
Prof. CHIAR.MO PROF.
PAOLO NEGRINI

ANNO ACCADEMICO 2014–2015
SESSIONE I

"Per tre cose vale la pena di vivere: la matematica, la musica e l' amore."
Renato Caccioppoli (1904-1959)

Indice

Introduzione

Scopo di questa tesi è la trattazione dei logaritmi a partire dalla storia di quest'ultimi, al loro sviluppo, fino ad arrivare alle diverse applicazioni dei logaritmi in svariate discipline.
La tesi è strutturata in quattro capitoli, nel primo dei quali si parte analizzando quali istanze teoriche e necessità pratiche abbiano preparato la strada all'introduzione dei logaritmi. Dal punto di vista teorico si segue l'evoluzione della regola degli esponenti per potenze di ugual base che permette di ridurre il calcolo del prodotto di potenze di ugual base alla somma dei rispettivi esponenti mostrando dunque la proprietà fondamentale dei logaritmmi. Per quanto riguarda l' aspetto pratico si vede come differenti strumenti di ausilio per il calcolo fossero stati escogitati per alleviare il peso dei calcoli. Per maggiori approfondimenti a riguardo si consiglia di consultare [7]. Viene poi analizzato, riportando alcuni passi, il testo piú importante dedicato da Nepero ai logaritmi, la *Mirifici logarithmorum canonis Constructio* pubblicata postuma nel 1619 seguita dalla modifica del sistema logaritmico neperiano ad opera di Henry Briggs e dalla diffusione dei logaritmi in gran parte dell'Europa [1, 2].
Nel secondo capitolo viene evidenziato il legame tra i logaritmi e la geometria dell'iperbole messo in luce originalmente dai gesuiti Gregorio di S. Vincenzo ed Alfonso de Sarasa per poi passare alla trattazione dei primi studi sulla curva logaritmica di Evangelista Torricelli e Christiaan Huygens [3]. Questo legame viene poi letto in senso opposto, mostrando come i logaritmi vennero usati per quadrare l' iperbole. Il primo a muoversi in questo senso fu Nicolaus Mercator che introdusse le serie per quadrare l'iperbole equilatera. Di quest'ultimo vengono analizzati alcuni passi della *Logarithmotechnia* pubblicata nel 1668. Il secondo capitolo si chiude con l'analisi del rapporto tra logaritmi e

serie che era stato introdotto prima di Mercator, da Pietro Mengoli e sviluppato da altri matematici dell'epoca come James Gregory e Isaac Newton [4].
Nel terzo capitolo viene esaminata la controversia tra Wilhelm Leibniz e Johann Bernoulli sul significato da attribuire ai logaritmi dei numeri negativi soffermandosi su come Leonhard Euler uscí da una situazione di stallo proponendo una teoria dei logaritmi dei numeri complessi [8].
Nel quarto ed ultimo capitolo vengono poi analizzati i diversi utilizzi della scala logaritmica ponendo l' attenzione soprattutto sul regolo calcolatore [9, 10], arrivando infine a mostrare le applicazioni dei logaritmi in altre discipline [11].
Per la stesura di questa tesi si è fatto sopratutto riferimento ai trattati [5, 6], ai quali si rimanda il lettore per ogni ulteriore approfondimento sui dettagli che, per ragioni di sintesi, in alcuni casi sono stati omessi.

Capitolo 1

Storia dei Logaritmi

1.1 Primi Precursori prima di Nepero

La motivazione alla base della scoperta dei logaritmi ed il motivo del loro successo fu la ricerca di efficienti strumenti di calcolo in grado di alleviare il peso di operazioni come moltiplicazioni tra numeri con molte cifre od estrazioni di radici quadrate o cubiche di cui erano gravati soprattutto gli astronomi del tempo. Il primo ad osservare la legge degli esponenti fu Archimede di Siracusa(287-212 a.C.) che ne fece menzione nell' opera *Arenario*. Qui espose il suo metodo per esprimere numeri sempre piú grandi con un sistema di numerazione non posizionale. A quel tempo era possibile nominare numeri fino alla miriade di miriade, cioé 10^8. Archimede chiama numeri del primo ordine quelli compresi tra 1 e 10^8, escludendo quest' ultimo che diventa l' unitá dei numeri del secondo ordine che vanno da 10^8 fino a $10^8 \cdot 10^8 = 10^{16}$ con il quale iniziano i numeri del terzo ordine e cosí via. Egli osservó che $1, 10, 100, \cdots 10^k$ formano una proporzione continuata e in particolare riconobbe la legge degli esponenti per cui, al prodotto tra potenze della proporzione corrisponde la somma degli esponenti. Archimede quindi intuí l' idea fondamentale che sta dietro alla definizione di logaritmo, cioé la possibilitá di trasformare moltiplicazioni in somme, ma nell' antichitá questo non diede origine ad ulteriori indagini. Un chiaro enunciato della legge degli esponenti si trova nell' opera di Nicholas Chuquet del 1484 *Triparty en la Science des Nombres* della quale riportiamo alcuni passi:

è utile considerare piú numeri proporzionali che, a partire da 1 formino un ordinamento continuato come 1.2.4.8.16.32 *ecc o* 1.3.9.27 *ecc... in modo da iniziare a contare il termine successivo ad 1 come il primo e quello successivo come secondo e cosí via per gli altri...Il prodotto di 4 che è il secondo numero per 8 che è il terzo numero da 32 che è il quinto numero...In questa considerazione si manifesta un segreto proprio dei numeri proporzionali. Cioé che moltiplicando per se stesso un numero della proporzione se ne ottiene un altro avente denominazione doppia. Ad esempio, moltiplicando 8 qui è terzo per se stesso si ottiene 64 che è sesto. E moltiplicando per se stesso 16 che è quarto si ottiene 256 che è ottavo...Con questo ordinamento i numeri hanno la proprietá che moltiplicandone due tra di loro se ne ottiene un altro della proporzione il cui ordine è la somma degli ordini dei fattori.*

Sempre in quest' opera vediamo enunciato un problema, quello della botte, in cui venne sfiorata l' idea di logaritmo. Il problema è il seguente:

Una botte si svuota ogni giorno di $\frac{1}{10}$ *della sua capacitá; dopo quanto tempo si sará svuotata per metá?*

Si tratta di risolvere l' equazione esponenziale $(\frac{9}{10})^x = \frac{1}{2}$; ma non vi sono ancora gli strumenti per questo formalismo.Calcolate le quantitá presenti all' inizio di ciascun giorno:

Giorni:	Vino rimasto:
1^o	1
2^o	$0,9 = \frac{9}{10}$
3^o	$0,81 = (\frac{9}{10})^2$
4^o	$0,729 = (\frac{9}{10})^3$
5^o	$0,6561 = (\frac{9}{10})^4$
6^o	$0,59049 = (\frac{9}{10})^5$
7^o	$0,531441 = (\frac{9}{10})^6$
8^o	$0,4782969 = (\frac{9}{10})^7$

Chuquet notó che il dimezzamento ha luogo nel corso del settimo giorno e per determinare il momento in cui ció avviene applicó in sostanza una interpolazione lineare della funzione esponenziale, che pure lui non conosce in tali termini. Indicato con t il tempo che deve trascorrere dall' inizio del 7^o giorno per raggiungere il valore $0,5$ nel contenuto della botte, Chuquet impostó la proporzione:

$$(0,531441 - 0,5) : t = (0,531441 - 0,4782969) : 1$$

dalla quale ricavó $t = 0,591618$ che convertito in ore e minuti da $t = 14^h 12^m$.(Il risultato esatto che si troverá con l' uso dei logaritmi sará di $13^h 53^m$)
Chuquet andó molto vicino all' idea di logaritmo che un secolo piú tardi sará formalizzata da Nepero. Andiamo con ordine, un passo in avanti decisivo dopo Chuquet si ebbe con la pubblicazione della *Arithmetica Integra* di Michael Stifel(1487-1567), il quale riuscí ad estendere la legge degli esponenti anche a numeri negativi. Di grande importanza sono anche gli enunciati delle corrispondenze tra operazioni su potenze ed operazioni su esponenti:

- *Nelle progressioni aritmetiche l' addizione corrisponde alla moltiplicazione in quelle geometriche.*
- *La sottrazione nelle progressioni aritmetiche corrisponde alla divisione nelle geometriche.*
- *La moltiplicazione semplice (cioé di un numero per un numero) quando sia eseguita in una progressione aritmetica, corrisponde alla moltiplicazione di un numero per se stesso nelle progressioni geometriche. Cosí alla moltiplicazione per due in progressioni aritmetiche corrisponde la moltiplicazione quadrata in quelle geometriche.*
- *La divisione eseguita in progressioni aritmetiche corrisponde alle estrazioni di radici nelle progressioni geometriche.*

Anche Niccoló Tartaglia(1449-1557) si interessó dell' argomento ma si limitó a riportare la legge degli esponenti nel suo *General Trattato de' Numeri et Misure* senza introdurre gli esponenti negativi.

1.2 Il peso dei Calcoli

Abbiamo visto come molti matematici abbiano notato la legge degli esponenti con il legame che essa crea tra progressioni aritmetiche e geometriche.Tale legge peró viene percepita come un' ammirabile proprietá dei numeri ma non si traduce in uno strumento utile ai fini

pratici. La motivazione alla base della scoperta dei logaritmi fu invece, come giá annunciato in precedenza, la ricerca di efficaci strumenti di calcolo in grado di alleggerire il pesante fardello di cui erano gravati soprattutto gli astronomi del tempo. A tale scopo erano state escogitate molte tavole numeriche.
In oltre per semplificare i calcoli in trigonometria, gli studiosi potevano disporre delle formule di *prostaferesi*, scoperte dall' astronomo arabo Ebn-Jounis(950-1009) ed utilizzate per primo nel mondo latino dall' astronomo danese Ticho Brahe(1546-1601).La tipica formula di prostaferesi

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

ora nota come *prima formula di Werner*, evidenzia infatti la possibilitá di ridurre la moltiplicazione tra due numeri a molte cifra decimali ad una addizione. Tra le tavole numeriche possiamo citare la *Tavola Tetragonica* dell' astronomo Giovanni Antonio Magini(1555-1617) inclusa nell' opera *De Planis Triangulis* pubblicata a Venezia nel 1592, contenente i quadrati di tutti gli interi compresi tra 1 e 11000.Utilizzata soprattuto per essere di aiuto nella risoluzione dei triangoli rettangoli.
Una via diversa fu intrapresa da John Napier (Nepero, 1550-1617) nella *Rabdologia* pubblicata nel 1617 e destinata alla semplificazione delle operazioni elementari.Il funzionamento dei noti *bastoncini* od *ossa di Nepero* è molto semplice: su ognuna delle facce laterali di un parallelepipedo vengono racchiusi in riquadri i multipli di uno degli interi da 1 a 9. All' interno di ciascun riquadro il multiplo è riportato con la cifra delle decine sopra il segmento di diagonale del quadrato riservato al numero e con le cifre delle unitá al di sotto. Consideriamo per esempio come viene effettuato il prodotto tra 357 e 249.

Si dispongono i tre bastoncini corrispondenti al 3, al 5 ed al 7 come mostrato in figura (1.1) e si considerano i riquadri dove sono riportati i multipli secondo 2, 4 e 9. In ciascuna riga, si procede a sommare in diagonale le cifre presenti. Nella riga corrispondente a 2 si ottiene, partendo da destra $714 = 357 \times 2$; nella quarta riga si ottiene $1428 = 357 \times 4$ e nella nona $3213 = 357 \times 9$. Sommando i numeri ricavati, con l' accortezza di utilizzare il seguente allineamento, che

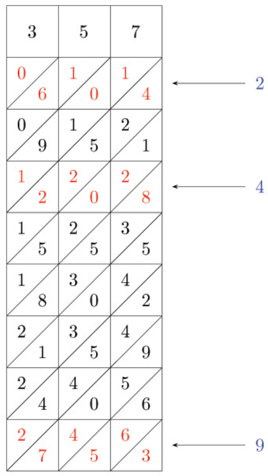

Figura 1.1: Calcolo di 357×249 utilizzando i bastoncini di Nepero. I numeri in rosso contengono i multipli secondo $2, 4, 9$ di $3, 5, 7$.

tiene conto del diverso valore posizionale delle cifre di 249, si ottiene il risultato corretto 88893.

$$\begin{array}{ccccc} & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 8 & \\ 7 & 1 & 4 & & \\ \hline 8 & 8 & 8 & 9 & 3 \end{array}$$

In questo modo Nepero rese meccanica una tecnica di moltiplicazione nota da tempo, la moltiplicazione *a graticcio* o *a gelosia*. L' unico problema è che i bastoncini di Nepero non sono di aiuto per eventuali riporti.
A tale problema pose rimedio nel 1883 l' ingegnere francese Henri Genaille, ideando un altro sistema di aste che rappresenta in maniera grafica il concetto matematico di riporto, anche se è composto da una struttura piú complessa di quella di Nepero. Un set di aste di Genaille o *regoli moltiplicatori* è composto da undici strisce di carta, legno o metallo, sulle quali sono stampate colonne di numeri e triangoli scuri (figura 1.2). Per capirne il funzionamento supponiamo di voler moltiplicare 52749 per 4. I regoli relativi alle cifre $5, 2, 7, 4$ e 9 vengono posti

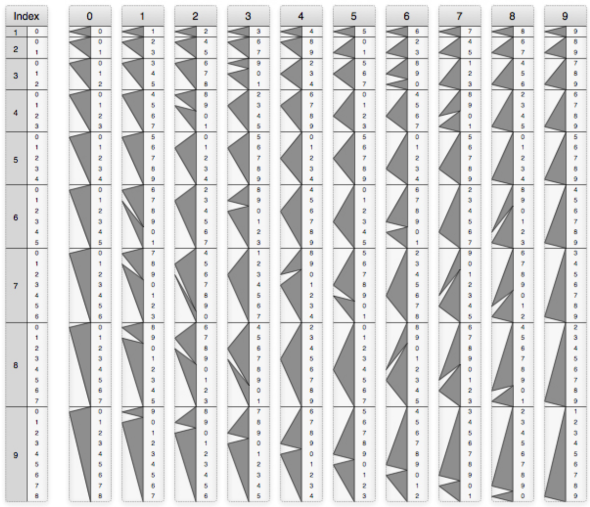

Figura 1.2: Aste di Genaille

uno affianco all' altro, in modo che le cifre in cima ai regoli formino il moltiplicando. A sinistra del gruppo viene collocato il regolo *indice*. Il moltiplicatore dell'operazione è 4, per cui si prende in considerazione la riga indicata col numero 4 nel regolo *indice*. La lettura dei regoli inizia dalla cifra piú in alto nell' ultima colonna dei numeri della riga selezionata cioé quella corrispondente all' ultima cifra del moltiplicando.

Le punte dei triangoli indicano altre cifre nei regoli successivi. La lettura prosegue seguendo l' ordine indicato dai triangoli, da destra a sinistra, fino a raggiungere la prima colonna, relativa al regolo *indice*.Il risultato della moltiplicazione si puó ottenere leggendo le cifre indicate dai triangoli, da sinistra a destra. Nel nostro esempio il risultato è 210996(figura 1.3).

Come i bastoncini di Nepero, anche le aste di Genaille possono essere adattate per eseguire divisioni: modifica apportata nel 1885 dal matematico francese Francois E. A. Lucas(1842-1891).

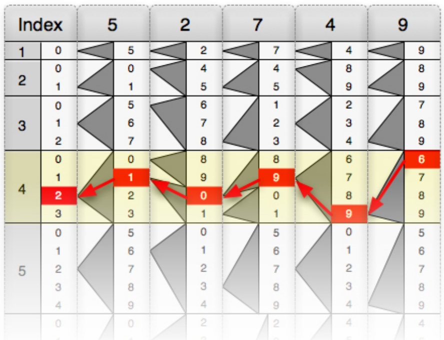

Figura 1.3: Calcolo di 52749 $\times$ 4 utilizzando le aste di Genaille.

1.3 I logaritmi di Nepero

Il processo di elaborazione di metodi per alleggerire il peso dei calcoli raggiunse il culmine nel 1614 quando John Napier introdusse i logaritmi che cambiarono radicalmente il modo di eseguire i calcoli piú complessi. Osserviamo inanzitutto che i logarimi neperiani non sono definiti come funzione inversa della funzione esponenziale ma come funzione *diretta* e che il concetto di *base* di un sistema logaritmico non compare né in Nepero né negli scritti sui logaritmi di altri matematici, fino alla alla fine del XVII secolo. La produzione matematica neperiana è limitata. Oltre alla *Rabdologia* giá citata, compose un trattato *De arte Logistica*, pubblicato postumo nel 1839, ma le opere che hanno assicurato a Nepero un posto di prima grandezza nella storia dellla matematica sono *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* pubblicata nel 1614 e *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* pubblicata postuma nel 1619, nelle quali, dopo averci lavoarato per circa venti anni, introdusse i logaritmi. Anche se la *Descriptio* fu pubblicata prima della *Constructio*, l' ordine di elaborazione è l' inverso come è dimostrato dal fatto che i logaritmi sono chiamati *numeri artificiales* nella *Constructio* e come *logarithmi* in tutta la *Descriptio*. Ma qual è l' origine del termine logaritmo?
Nepero non ne da spiegazione e vi sono principalmente due interpretazioni. La prima risale a Keplero che nella *Chiliades Logarithorum* del 1624 interpreta $\log x$ come il numero che misura il rapporto tra

un numero di riferimento ed x, cioé traduce logaritmo con *misura di rapporti*. Questa interpretazione venne ripresa da Nicolaus Mercator, quarant' anni dopo Keplero, nella *Logarithmotechnia*, dove troviamo:
Logaritmo è un vocabolo composto da rapporto e numero, quasi a dire numero di rapporti;ció che ben esprime la realtá delle cose.
Una sfumatura un pó diversa è quella di Juan Caramuel Lobkowitz nella *Mathesis Biceps, Venus et Nova* del 1670, dove interpreta la parola logaritmo in questi termini:
I logaritmi sono numeri artificiali o razionali, che si accompagnano ai numeri naturali e ci guidano alla conoscenza di numeri naturali prima ignoti.
La seconda interpretazione risale ad un lavoro di Wilhelm Matzka del 1850 in cui il termine logaritmo fa riferimento alla *logistica* che giá ai tempi di Platone designava la scienza del calcolo ed era distinta dall' aritmetica o teoria dei numeri.
Le due interpretazioni evidenziano aspetti importanti dei logaritmi. La prima mette in risalto l' introduzione dei logaritmi come progressioni aritmetiche associate ad una progressione geometrica mentre l' interpretazione di Matzka sottolinea il ruolo di ponte tra matematica pratica e matematica teorica. Infatti Nepero nella prefazione alla *Descriptio* scrisse:
Carissimi cultori della matematica, poiché non vi è nulla di tanto odioso nell' esercizio della matematica e che piú rallenti o allontani i calcolatori, quanto le moltiplicazioni e divisioni tra numeri grandi e le estrazioni di radici quadrate o cubiche, che oltre alla noia della lunghezza sono soprattutto fonte di errori, mi sono deciso a pensare in qual modo abbattere questi ostacoli, con un metodo sicuro e rapido.
Nella *Descriptio*, la teoria dei logaritmi peró occupa solo poche pagine e non contiene tutti i dettagli sullo sviluppo della teoria dei logaritmi né sul modo di ottenere le tavole logaritmiche. I risultati principali sono solo enunciati attraverso una successione di definizioni e corollari. Lo stesso Nepero infatti spiega la sua scelta nel capitolo II:
Lascio ad un tempo piú opportuno l' esposizione della teoria relativa alla costruzione ed all' uso dei logaritmi che ho omesso qui affinché la si possa gustare di piú dopo averne compreso l' uso ed aprezzata l' utilitá o la si seppellisca in silenzio se non sará apprezzata.
Quindi per comprendere cosa siano i logaritmi neperiani è necessario

rivolgere l' attenzione alla *Constructio*. La definizione di logaritmi poggia su un modello *cinematico* in cui vengono messi in corrispondenza due moti, uno uniforme od aritmetico, l' altro geometrico.
Egli parla di moto aritmetico in questi termini:
Crescere in modo aritmetico significa aumentare della stessa quantitá in tempi uguali.
Si consideri allora una semiretta spiccata dal punto fisso b verso d sulla quale si muova, da b verso d, un punto a, con legge tale che in intervalli di tempo uguali vengano percorsi uguali spazi che sono $b1, 12, 23, 34, 45$, ecc. Definisco aritmetico l' incremento $b1, b2, b3, b4, b5$, ecc.(figura 1.4)

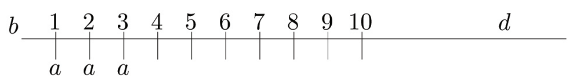

Figura 1.4: Il moto aritmetico introdotto da Nepero.

Per quanto rigurada la natura del secondo moto è chiarita nel seguente passaggio:
Decrescere in modo geometrico significa diminuire in tempi uguali di una parte sempre proporzionale, dapprima a tutta la quantitá e in seguito alle parti via via rimanenti.
Sia dunque TS il segmento del seno totale su cui si muove il punto G, da T ad 1 vesro S, e la distanza da T ad 1 sia, ad esempio, la decima parte di TS. Nello stesso tempo impiegato a per spostarsi da T in 1, G si muove da 1 in 2, con (il segmento 12) che è la decima parte di $1S$: e da 2 a 3, decima parte di $2S$: e da 3 a 4, decima parte di $3S$, e cosí via. Affermo che i seni $TS, 1S, 2S, 3S, 4S$, ecc sono detti decrescere in modo geometrico, perché diminuiscono in tempi uguali di quantitá diverse ma simili in proporzione.(figura 1.5)

Notiamo che a differenza del moto aritmetico che avviene lungo una semiretta, qui lo spazio percorso dal punto G è pari ad un segmento TS di lunghezza finita. Il significato geometrico di questo segmento è celato dalle lettere che ne indicano i punti estremi S, T: *Sinus*

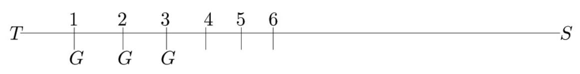

Figura 1.5: Il moto geometrico introdotto da Nepero.

Totus. Questo seno totale rappresenta il raggio r della circonferenza trigonometrica, che non era normalizzato ad 1.Nella trigonometria si moltiplicavano le funzioni seno e coseno per r, il cui valore era scelto in funzione del grado di approssimazione richiesto. Nepero sceglie $r = 10^7$ e tale è da ritenere la lunghezza del segmento TS.
La proprietá caratteristica del moto geometrico di G è quella di descrivere in intervalli di tempo uguali dei segmenti di lunghezze proporzionali alla distanza di G dall' estremo S all' inizio dell' intervallo di tempo considerato. Definiti i moti di a e G, Nepero definisce il logaritmo di un seno, cioé di un segmento di lunghezza inferiore a TS in questi termini:
Il numero artificiale di un dato seno è quello che cresce in modo aritmetico con velocitá costante pari a quella con cui il seno totale inizia a decrescere in modo geometrico ed in un tempo pari a quello necessario affinché il seno totale decresca fino al valore assegnato.
Egli considera due punti G ed a mobili su due rette parallele come in figura 1.6.

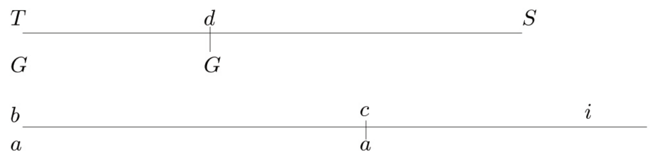

Figura 1.6: Definizione neperiana di logaritmo.

Il mobile G si trova all' istante iniziale $t = 0$ in un punto T di un segmento TS di lunghezza r pari al raggio della circonferenza trigonometrica di riferimento: $r = 10^7$. All' istante $t = 0$ G parte da T animato di moto geometrico e, allo stesso istante, da b sulla semiretta bi parte il punto a animato di moto aritmetico. Detto c il punto raggiunto da a quando G si tova in d, Nepero definisce bc come il logaritmo del seno dS. Se definiamo $y = bc$ ed $x = dS$ abbiamo:

$$y = nl(x)$$

dove nl indica il *logaritmo neperiano*.
Una prima conseguenza di questa definizione è che

$$nl(r) = 0$$

in quanto, se si sposta d in T, cioé nella posizione assunta inizialmente dal punto G, il punto a si trova in $c = b$ e dunque $y = 0$. Si ha pertanto che $nl(10^7) = 0$ e giá da questo si intuisce che $nl(x) \neq \ln x$.
Sempre dalla definizione segue che, se $x_1 < x_2$, allora $nl(x_1) > nl(x_2)$, cioé i logaritmi neperiani sono funzioni *decrescenti* dell' argomento.
La proprietá principale dei logaritmi di Nepero afferma che se $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ sono i valori numerici di quattro seni che formano la proporzione $x_1 : x_2 = x_3 : x_4$ allora

$$nl(x_1) - nl(x_2) = nl(x_3) - nl(x_4) \tag{1.1}$$

Infatti
I numeri artificiali di seni proporzionali sono equidifferenti. Ció segue necessariamente dalle funzioni di numeri artificiali e dei moti: infatti, grazie ad esse, un incremento aritmentico uniforme corrisponde ad un decremento geomerico in proporzione continuata: concludiamo necessariamente che a seni proporzionali corrispondono numeri artificiali equidifferenti.
In particolare, se prendiamo due numeri positivi a e b, poiché vale la proporzione $ab : b = a : 1$ concludiamo dalla (1.1) che

$$nl(ab) = nl(a) + nl(b) - nl(1)$$

e poiché $nl(1) \neq 0$ otteniamo che i logaritmi neperiani *non* trasformano prodotti in somme.
Cerchiamo quindi di capire qual è il legame tra i logaritmi neperiani e i logaritmi naturali di un dato numero positivo x.
Riconsideriamo due punti che si muovono su due rette distinte(figura

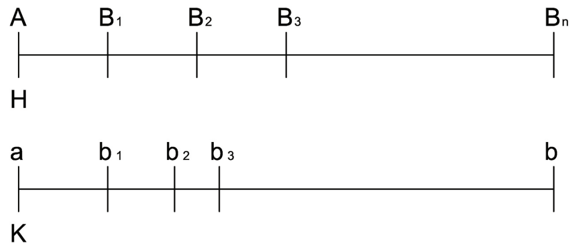

Figura 1.7: Moto aritmentico e geometrico rispettivamente dei punti H e K.

1.7). Il primo punto (H), si muove con velocitá costante a partire da un punto A; il secondo punto (K) parte dal punto a e si muove con la stessa velocitá iniziale del primo ma diminuisce la velocitá in modo che in tempi uguali percorra parti uguali di quanto gli rimane per raggiungere un punto b, situato a distanza unitaria da a, e che non raggiungerá mai. Nepero immagina di dividere il segmento $[a, b]$ in m parti con m molto grande($m = 10^7$) e assume come unitá di misura il tempo impiegato dal punto che parte da a, per percorrere $\frac{1}{m}$ della distanza che lo separa da b. Nello stesso tempo unitario, il punto che si muove da A raggiunge un punto B_1. Nella seconda unitá di tempo, H va da B_1 a B_2 con $\overline{AB_1} = \overline{B_1B_2}$, mentre k va da b_1 a b_2, con $\overline{b_2b} = (1 - \frac{1}{m})^2$, e in generale, in n unitá di tempo, H raggiunge B_n tale che $\overline{AB_n} = n\overline{AB_1}$, mentre K arriva in b_n tale che $\overline{b_nb} = (1 - \frac{1}{m})^n$. L' ipotesi di uguale velocitá iniziale consente di pensare, grazie al valore elevato di m, che lo spazio percorso da H e da K nel primo intervallo di tempo sia approsimativamente uguale, quindi $\overline{AB_1} = \overline{ab_1} = \frac{1}{m}$, e conseguentemente $\overline{AB_n} = \frac{n}{m}$. Abbiamo giá visto come Nepero definisca il segmento $\overline{AB_n}$ logaritmo del segmento $\overline{b_nb}$, cioé

$$\frac{n}{m} = \log(1 - \frac{1}{m})^n$$

Ponendo $\frac{n}{m} = x$, cioé $n = mx$, si ha

$$x = \log(1 - \frac{1}{m})^{mx}.$$

Usando un linguaggio moderno questo significa che i logaritmi neperiani hanno come base $(1-\frac{1}{m})^m$ che in virtú del valore assai elevato di m non è lontano da $\frac{1}{e}$. Questo mostra il legame tra i logaritmi concepiti da Nepero con i logaritmi nella base $\frac{1}{e}$ anche se il concetto di base è estraneo al modo in cui Nepero ha introdotto i logaritmi e lo resterá fino all' inizio del Settecento.
Tornando alla *Constructio*, per ottenere tavole molto accurate occorre avere delle regole di interpolazione sufficientemente precise. Per questo Nepero si serve di due coppie di disuguaglianze che permettono di stimare sia $nl(x)$, sia la differenza dei logaritmi di due numeri x ed $y > x$.
Il numero artificiale di un seno arbitrario assegnato è maggiore della differenza tra il seno totale ed il seno assegnato e minore della differenza tra il seno totale ed una quantitá maggiore di esso di un rapporto uguale a quello tra il seno totale e quello assegnato. Queste differenze sono dette estremi artificiali.
In termini moderni:

$$(r-x) < nl(x) < r(\frac{r}{x}-1)$$

Per quanto riguarda la seconda disuguaglianza
La differenza di due numeri artificiali è compresa tra due termini tali che: il seno totale sta al termine maggiore come il seno minore corrispondente a questi numeri artificiali sta alla differenza dei seni; il seno totale sta al termine minore come il seno piú grande corrispondente ai due numeri artificiali sta alla differenza dei seni.
Indicando con m ed M il termine minore e maggiore in modo da avere $m < nl(x) - nl(y) < M$, l' originale afferma che $\frac{r}{M} = \frac{x}{y-x}$ ed $\frac{r}{m} = \frac{y}{y-x}$ dalla quale si ricava

$$r\frac{y-x}{y} < nl(x) - nl(y) < r\frac{y-x}{x}$$

Grazie a questi risultati Nepero riuscí a costruire una tavola logaritmica accurata, in quanto per essere utile una tavola deve essere molto fitta. In oltre i logaritmi da lui trovati sono corretti fino alla quinta cifra decimale, precisione davvero notevole se si pensa alla scarsitá di mezzi di calcolo e alle esigue tecniche matematiche a disposizione.

Nepero si accorse di poter realizzare un sistema logaritmico piú comodo eliminando l' ingombrante termine $nl(1) = 161180954$ che compariva un pó dovunque. La malferma salute gli impedí peró di completare la modifica e, questo compito fu svolto dal matematico inglese Henry Briggs(1561-1630) come testimonia quest' ultimo in un passo dell' *Arithmetica Logarithmica*:
compresi che sarebbe stato molto piú agevole se, fermo restando il valore 0 *per il logaritmo del seno totale, si fosse attribuito il valore* 10000000000 *al logaritmo della decima parte del seno totale, e scrissi a tal proposito all' autore stesso(Nepero)...Mentre stavamo discutendo del cambiamento da apportare ai logaritmi, disse che anche lu lo riteneva opportuno e che lo avrebbe desiderato operare.*
Il suo contributo allo sviluppo dei logaritmi si trova infatti nell' *Arithmetica Logarithmica*, opera pubblicata nel 1624, nella quale i primi sedici capitoli sono interamente dedicati alla definizione di logaritmo ed alla spiegazione del metodo seguito da Briggs nella compilazione delle tavole, mentre i restanti sedici capitoli sono dedicati alle applicazioni, soprattutto in geometria. Cerchiamo di riassumere i passi piú importanti.
Il primo capitolo contiene la definizione di logaritmo, in stile neperiano:
I logaritmi sono numeri che, associati a numeri proporzionali, mantengono uguali differenze.
Quindi parafrasando un poco, i logaritmi costituiscono una progressione aritmetica in corrispondenza ad una geometrica.
Nel secondo capitolo seleziona tra i possibili sistemi logaritmici quelli che hanno zero come logaritmo dell' unitá. Le conseguenze principali della scelta di Briggs riguardano le proprietá algebriche dei logaritmi cosí ottenuti che, finalmente, trasformano prodotti in somme:
Il logaritmo del prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori.
Infatti dalla proporzione

$$1 : y = x : xy$$

segue, per la definizione di logaritmo, indicando i logaritmi briggsiani di un certo numero x con $bl(x)$, che

$$bl(1) - bl(y) = bl(x) - bl(xy)$$

e, siccome $bl(1) = 0$ si ha

$$bl(xy) = bl(x) + bl(y).$$

Briggs dimostra poi l' analoga proprietá per la divisione
Il logaritmo del dividendo è uguale al logaritmo del divisore piú quello del quoto.
Successivamente nel quinto capitolo rende omaggio al grande amico Nepero presentando il metodo per il calcolo dei logaritmi decimali di piccoli numeri primi che questi usava e che Briggs aveva giá esposto nell' Appendice della *Constructio* da lui curata. Qui espone cinque lemmi sulle proprietá deglli esponenti di potenze con la stessa base tra cui la nota proprietá $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ come modo per trovare termini arbitrari di una progressione geometrica senza elencarli tutti.
Le tavole di Briggs coprono gli interi da 1 a 20000 e quelli da 90000 a 100000. Il problema principale diventó quello di come ottenere espressioni accurate per i logaritmi di numeri che non compaiono nelle tavole o, al contrario, dato un logaritmo non reperibile nelle tavole, di risalire ad un accurato valore per l' antilogaritmo. Il metodo di interpolazione proposto da Briggs, perfezionato a piú riprese, è passato alla storia come *metodo radicale*. Briggs suppone dapprima di voler trovare un numero N il cui logaritmo è noto ma non si trova nella tavola. Per questo cerca il numero tabulato $N_0 < N$ piú vicino possibile ad N e calcola

$$bl(N) - bl(N_0) = bl\left(\frac{N}{N_0}\right) = r_1.$$

Determinato poi un numero della forma $1 + q_1$ con $q_1 \in [10^{-k}, 10^{-k+1})$ e $k \geq 1$ tale che $bl(1 + q_1)$ sia uguale o di poco inferiore a r_1 calcola la differenza

$$bl\left(\frac{N}{N_0}\right) - bl(1 + q_1) = bl\left(\frac{N}{N_0(1 + q_1)}\right) = r_2 < r_1$$

ed itera la procedura cercando un numero della forma $(1 + q_2)$, con q_2 almeno un ordine di grandezza minore di q_1 e tale che $bl(1 + q_2) \leq r_2$. Definisce

$$bl\left(\frac{N}{N_0(1 + q_1)}\right) - bl(1 + q_2) = bl\left(\frac{N}{N_0(1 + q_1)(1 + q_2)}\right) = r_3 < r_2$$

e continua il procedimento fino a quando non arriva al passo n in cui

$$bl\left(\frac{N}{N_0(1+q_1)(1+q_2)\cdots(1+q_n)}\right)=0.$$

A questo punto è chiaro che deve essere

$$\frac{N}{N_0(1+q_1)(1+q_2)\cdots(1+q_n)}=1$$

e dunque

$$N=N_0(1+q_1)(1+q_2)\cdots(1+q_n).$$

Il sistema è analogo per il problema opposto, cioé assegnato un numero non appartenente alle tavole, trovarne il logaritmo. Preso il numero N se ne trova un altro N_0 il cui logaritmo è presente nelle tavole e tale che $\frac{N}{N_0}$ ha 1 per parte intera. Posto

$$N-N_0=r_1$$

si determina un numero q_1 nella forma $\frac{k}{10^m}$ tale che

$$r_1=q_1N_0+r_2>r_2$$

per cui

$$N-N_0=q_1N_0+r_2$$

e dunque

$$N=N_0(1+q_1)+r_2.$$

La procedura viene iterata cercando un altro numero q_2 tale che

$$r_2=q_2N_0(1+q_1)+r_3>r_3$$

in modo che

$$N=N_0(1+q_1)(1+q_2)+r_3$$

e cosí via fino al punto che o $r_n=0$, o esso è minore di un prefissato livello di tolleranza. A questo punto

$$N=N_0(1+q_1)(1+q_2)\cdots(1+q_n)$$

e poiché sono noti i logaritmi dei fattori a destra, sará ottenibile anche $bl(N)$. Con quest' ultimo stratagemma termina la parte principale della *Arithmetica Logarithmica*.

1.4 La diffusione dei logaritmi

I logaritmi si diffusero rapidamente in tutta Europa in quanto venivano a risolvere seri problemi di calcolo soprattutto in astronomia. Tra i piú importanti sostenitori dell' opera di Nepero troviamo l' astronomo Johannes Kepler(Keplero 1571-1630). Ovviamente le sue opere sui logaritmi non sono molto interessanti se confrontate con la sua produzione in campo astronomico, tuttavia esse non solo contribuirono alla diffusione dei logaritmi in Germania, ma esercitarono una certa influenza nel modo di definire i logaritmi. Le sue opere sui logaritmi sono le *Chiliades Logarithmorum*(1624) che contiene 1036 logaritmi di numeri N nella forma $10^5 \ln\left(\frac{10^5}{N}\right)$ ed il *Supplementum chiliadis Logarithmorum*(1625) che contiene esempi illustrativi del metodo. Riguardo alle sue due tavole logaritmiche, le *Tabulae Rudolphinae*(1627), non accenna al modo in cui le ha ottenute, né spiega il loro utilizzo.
Per quanto riguarda la stesura delle *Chiliades*, la spinta decisiva gli venne da un viaggio intrapreso in Germania del Nord nel 1621, in cui rimase colpito dallo scetticismo nei confronti dei logaritmi che i colleghi astronomi nutrivano. La parte teorica dell' opera contiene un certo numero di postulati, uno schema per il calcolo di $\log 7$ e trenta proposizioni che, nelle intenzioni di Keplero dovrebbero stabilire su un solido fondamento i logaritmi neperiani. I postulati di Keplero sono di stile euclideo, basato sulla teoria delle proporzioni. Il primo ostacolo è proprio stabilire la misura m di un rapporto che non è semplicemente il confronto tra grandezze riferite ad un' unitá di misura comune, ma una relazione tra le grandezze medesime. Il valore numerico $m = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, la cui esistenza è postulata da Keplero, porta alla definizione di logaritmo. Le difficoltá incontrate da Keplero per introdurre un' appropriata misura di un rapporto si possono riassumere dicendo che, quando il numeratore ed il denominatore di proporzioni equivalenti sono molto distanti tra loro, la misura $m(\frac{a}{b})$ di un rapporto oscilla in maniera significativa. Queste oscillazioni possono essere ridotte sotto una soglia di tolleranza stabilita a priori inserendo un numero molto grande di medi proporzionali tra due numeri assegnati a e b con $a > b$. Detta $\epsilon \ll 1$ la differenza tra il termine a e quello immediatamente precedente, la misura del rapporto $\frac{a}{(a-\epsilon)}$ è ϵ e le oscillazioni subite percorrendo a ritroso la progressione

geometrica fino al termine b sono trascurabili. La misura di $\frac{a}{b}$ è data da N_ϵ, dove N è il numero di parti in cui è stato suddiviso il rapporto $\frac{a}{b}$. Per ottenere una misura pressoché costante di un rapporto $\frac{a}{c}$, dove $c < b$ occorre infittire opportunatamente la divisione. Ottenuta una soddisfacente misura di un rapporto, Keplero ne puó mostrare le proprietá algebriche elementari. Cosí nella Prop. XVIII spiega che se è noto il rapporto tra 1000 ed un numero A, sono noti i rapporti tra 1000 ed i termini di una proporzione continua basata su A. Infatti, se $A : B = B : C = C : D = D : E..$, tutti i rapporti avranno la stessa misura. Poiché le misure di rapporti sono additive rispetto alla composizione di proporzioni, $m(A : C) = m[(A : B)(B : C)] = 2m(A : B)$, visto che si tratta di una proporzione continua.
Nella Proposizione XIX si tratta il caso in cui $A = 1000$ e sono note le misure $m(A : B)$ ed $m(A : C)$ come il fatto che $A : B = C : D$. Allora si conosce anche $m(A : D)$. Infatti, $m(A : B) = m(C : D)$ e poiché $A : D = (A : C)(C : D)$ si ha $m(A : D) = m(A : C) + m(C : D) = m(A : C) + m(A : B)$, in virtú della proporzione $A : B = C : D$.
Con un procedimento simile, Keplero mostra nella Proposizione XX che, noti quattro numeri in proporzione tra loro, se si conoscono le misure dei rapporti tra 1000 e tre dei numeri coinvolti nella proporzione di partenza, allora è nota anche la misura del rapporto tra 1000 ed il quarto termine della proporzione.
A questo punto Keplero definisce finalmente il logaritmo di un rapporto $\frac{1000}{b}$ con $b < 1000$: è la misura del rapporto $\frac{1000}{b}$, cioé N_ϵ. Keplero interpreta l' origine della parola logaritmo come numero che indica il rapporto tra 1000 ed il numero di cui si calcola il logaritmo. Dopo alcune proposizioni sui logaritmi di funzioni trigonometriche, Keplero chiude l' esame della struttura dei logaritmi con tre proposizini che affermano l' irrazionalitá dei logaritmi ed il fatto che numeri maggiori del *sinus totus* hanno logaritmi negativi.
Nel *Supplementum*, Keplero aggungerá molti esempi esplicativi e renderá a Nepero e a Briggs il giusto omaggio che era mancato nelle *Chiliades*.
Per quanto riguarda la diffusione dei logaritmi in Italia, avvenne grazie a Bonaventura Cavalieri(1598-1647). Egli si occupó dei logaritmi in due opere: il *Directorium generale uranometricum in quo trigonometriae logarithmicae fundamenta, ac regulae demostrantur, astrono-*

miaeque fundamenta supputationes ad solam fere vulgarem additionem reducuntur del 1632 e la *Centuria di varii problemi per dimostrare l' uso, e la facilitá de' logaritmi nella gnomica, astronomia, geografia, altimetria, pianimetria, stereometria, e aritmetica prattica* del 1639. Nel *Directorium* Cavalieri intende porre i logaritmi al servizio dell' astronomia, seguendo l' esempio di Nepero. Egli, come Keplero, era alle prese con la misura di un rapporto quando le grandezze coinvolte non sono una il multiplo dell' altra. La via intrapresa da Cavalieri per associare in ogni caso un valore numerico ad un rapporto è originale perché poggia proprio sulla definizione di logaritmo. Inizialmente osservó che presa una progressione geometrica come $8, 4, 2, 1$, dall' uguaglianza dei rapporti

$$\frac{8}{4} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$$

e dalla definizione di logaritmo segue che

$$\log 8 - \log 4 = \log 4 - \log 2 = \log 2 - \log 1 = \text{costante}$$

e si puó dunque prendere come valore comune ai rapporti che formano la progressione geometrica questo valore costante. Questo procedimento si puó ripetere anche per la progressione

$$\frac{7}{3} = \frac{14}{6} = \frac{21}{9} = ...$$

dove le grandezze non sono una il multiplo dell' altra, ed assumere come misura del rapporto $\frac{7}{3}$ il numero

$$\log 7 - \log 3 = \log 14 - \log 6 = \text{costante}.$$

Sempre in quest' opera troviamo due tavole logaritmiche, nella prima delle quali egli riporta i logaritmi del seno di un arco, della tangente, della secante e del senoverso pari a $(1 - \cos \alpha)$.
La *Centuria* invece contiene, come suggerisce il titolo, un centone di problemi di vario genere che richiedono l' applicazione dei logaritmi. Un attenzione particolare merita il numero 92 nel quale Cavalieri introduce i logaritmi di addizione. Il problema propone di trovare $\log(a \pm b)$, dati due numeri a e $b < a$ di cui sono noti i logaritmi,

senza far intervenire $a \pm b$. La regola di Cavalieri per $\log(a+b)$ si traduce, in termini moderni, definendo un angolo ausiliare ψ tale che

$$\sin\psi := \frac{b}{a}.$$

Per le formule di bisezione si ha

$$\log\sin[\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}+\psi)] = \log\sqrt{\frac{1-\cos(\frac{\pi}{2}+\psi)}{2}} = \log\sqrt{\frac{1+\sin\psi}{2}} = \frac{1}{2}[\log(1+\sin\psi)-\log 2]$$

da cui, per la definizione di ψ otteniamo

$$\log(a+b) = \log a + \log 2 + 2\log\sin[\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}+\psi)].$$

Introducendo un altro angolo ausiliare φ tale che

$$\sin\varphi := \sqrt{\frac{b}{2a}}$$

poiché

$$\log\cos 2\varphi = \log(1-2\sin^2\varphi) = \log(1-\frac{b}{a}) = \log(a-b) - \log a$$

si arriva alla formula cercata

$$\log(a-b) = \log a + \log\cos 2\varphi.$$

Vediamo come Cavalieri è arrivato geometricamente a tale formula.

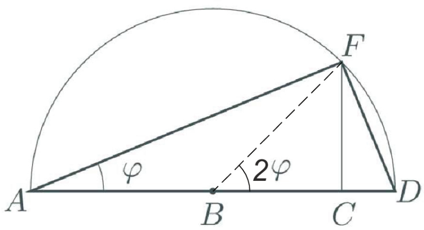

Figura 1.8: I logaritmi di addizione introdotti da Cavalieri.

Data la semicirconferenza di raggio $BD = a$ (figura 1.8) si prenda il segmento $CD = b$. Per il primo teorema di Euclide, applicato al triangolo rettangolo ADF, si ha $FD^2 = DC \times AD = 2ab$ grazie a cui è possibile risalire all' angolo $\widehat{DAF} = \varphi$ il cui seno è proprio $\sin\varphi = \sqrt{\frac{b}{2a}}$. D' altra parte $\widehat{FBD} = 2\varphi$ e dal triangolo rettangolo CBF si ha $BC = BF\cos 2\varphi$ ovvero

$$a - b = a\cos 2\varphi$$

dalla quale, passando ai logaritmi, segue la tesi.
Prima di passare al periodo in cui i logaritmi si accostarono alla geometria attraverso la quadratura dell' iperbole nominiamo in questo contesto anche il benedettino spagnolo Juan Caramuel Y Lobkowitz(1606-1682).Nell' opera *Mathesis biceps: vetus et nova* del 1670, si pose il problema di sintetizzare i logaritmi di Briggs con quelli di Nepero proponendo un sistema alternativo del quale costruí anche una tavola per i primi mille numeri interi. Indichiamo questo sistema con $cl(x)$. Dalle sue tavole si ricava che $cl10^{10} = 0, cl10^9 = 1$ e che, in generale

$$cl10^x = 10 - x$$

Infatti per ogni numero positivo a si ha

$$cl(a) = 10 - \log_{10} a.$$

In questo modo peró si perde la proprietá dei logaritmi di Briggs di trasformare prodotti in somme in quanto

$$cl(ab) = cl(a) + cl(b) - 10.$$

Capitolo 2

Logaritmi e geometria

2.1 I logaritmi e la geometria dell'iperbole

Il primo legame tra i logaritmi e la geometria dell'iperbole fu messo indirettamente in luce dal gesuita belga Gregorio di San Vincenzo(1584-1667). La sua produzione matematica è contenuta soprattutto nel trattato *Opus Geometricum Quadraturae Circuli et Sectionum Coni*, pubblicato nel 1647. Questo attiró subito l' attenzione degli studiosi per via di quel riferimento alla quadratura del cerchio, problema aperto da secoli, che Gregorio sosteneva aver finalmente risolto. Ma poco dopo la pubblicazione, Descartes criticó la soluzione in una lettera indirizzata a padre Martin Marsenne(1588-1648), il monaco francese che intratteneva corrispondenza con i maggiori studiosi dell' epoca. Nel 1648 peró, Marsenne pubblicó un opuscolo, *Reflexiones Physico-mathematicae*, dove dichiarava di non riuscire a trovare errori negli argomenti di Gregorio e proponeva un problema passato alla storia come *problema mersenniano*, che ai suoi occhi risultava difficile quanto la quadratura del cerchio:
Date tre grandezze qualsiasi , razionali od irrazionali e dati due dei loro logaritmi, trovare il logaritmo della terza grandezza geometricamente.
Ci occuperemo di tale problema tra poco, non prima di aver sottilineato il contenuto di alcuni passi fondamentali dell' *Opus Geometricum*. Quest' ultimo va ricordato almeno per due risultati importanti. Il secondo dei dieci libri di cui si compone l' opera è interamente dedi-

cato alle progressioni geometriche e la prima parte di questo libro è occupata dalla soluzione del celebre paradosso di Achille e la tartaruga, formulato da Zenone di Elea. Gregorio fu il primo a collegare il paradosso con il calcolo di una serie infinita, riuscendo a calcolare la distanza che Achille deve percorrere per raggiungere la tartaruga ed il tempo necessario perché ció accada.
Per i nostri scopi è peró piú interessante il libro VI dell' *Opus Geometricum*, intitolato *De Hyperbola* che contiene la proposizione 109:

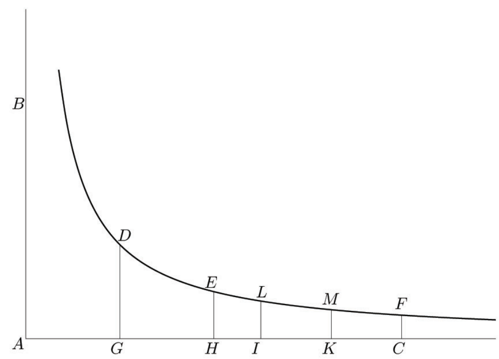

Figura 2.1: Schema per la proposizione CIX.

Proposizione 2.1. *Siano AB ed AC gli asintoti di un' iperbole (equilatera) DEF. Si suddivida AC in modo che AG, AH, AI, AK ed AC formino una progressione geometrica. Si traccino i segmenti DG, EH, LI, MK ed FC paralleli all' asintoto AB. I trapezi curvilinei DH, EI, LK ed MC sono equivalenti.*

In questo modo mostró come, presi dei punti su di un' iperbole equilatera le cui ascisse formino una progressione geometrica, le aree comprese tra il grafico dell'iperbole, l' asse delle ascisse e le rette verticali passanti per i punti predetti formano una progressione aritmetica. Prendendo in considerazione la figura (2.1), dal fatto che

$$\frac{AG}{AH} = \frac{AH}{AI} = \frac{AI}{AK} = \frac{AK}{AC} = ...$$

segue che le aree $DGEH, DGIL, DGMK, DGFC$,..ecc. formano una progressione aritmetica.
Anche se Gregorio non menzionó mai i logaritmi , il legame è peró evidente quando si pensa al modo di introdurre i logaritmi come progressione aritmetica associata ad una progressione geometrica.
Il legame tra iperbole equilatera e logaritmi venne esplicitato dall' allievo di Gregorio, Alfonso Antonio De Sarasa(1618-1667), nella sua risposta a Mersenne, *Solutio problematis a R. P. Marino Mersenno minimo propositi* del 1649, che si divide in due parti: la prima dedicata ai logaritmi, la seconda alla difesa del metodo di Gregorio per quadrare il cerchio. Per comprendere la prima parte occorre precisare il senso del quesito di Marsenne e in particolare il significato del plurale *logaritmi* e dell' avverbio *geometricamente*. Il primo termine va spiegato perché all' epoca erano giá stati proposti diversi sistemi logaritmici che differivano per la scelta del numero cui attribuire logaritmo nullo e , diremo oggi, per la base. Dalla risposta di De Sarasa, basata sulla trasformazione di progressioni geometriche in aritmetiche, si è portati a concludere che il termine logaritmo vada preso nel senso precisato da Briggs:*I logaritmi sono numeri che, associati a numeri in proporzione, conservano sempre la stessa differenza.* Ora, ad una progressione geometrica del tipo Aq^n si associa la progressione aritmetica $a + nd$ per formare un sistema logaritmico che resta completamente individuato quando vengono assegnati i parametri a e d, ovvero i logaritmi di A ed Aq. Individuato cosí il sistema logaritmico, occorre trovare il logaritmo del terzo numero e dunque il problema di Marsenne ha senso. Per quanto riguarda il termine *geometricamente*, occorre osservare che De Sarasa lo utilizza nel duplice senso di costruzioni geometriche e di *rigore geometrico*, in senso euclideo. Vediamo come nel testo del 1649, De Sarasa dopo una breve trattazione riguardo la natura dei logaritmi ed il loro rapporto con l' area sottesa dall' iperbole equilatera, passa a risolvere il problema di Marsenne.
Si consideri la successione di grandezze O, P, Q, S, T, in proporzione continua, i cui logaritmi siano i numeri $6, 7, 8, 9, 10$, etc. Si consideri una certa iperbole DEF di asintoti AB ed AC e si costruiscano i segmenti FC, MK, EG, LI, DH, etc paralleli all' asintoto AB e lunghi rispettivamente quanto O, P, Q, S, T (figura(2.2)).

Ora per la seguente proposizione,

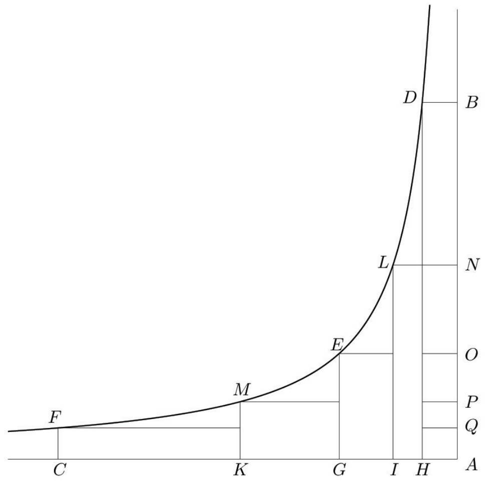

Figura 2.2: Relazione tra i logaritmi e le aree sottese da un ramo di iperbole.

Proposizione 2.2. *Se le ascisse dei punti di un' iperbole equilatera sono in progressione geometrica, le aree dei corrispondenti segmenti iperbolici formano una progressione aritmetica e viceversa.*

tutte le aree MC, EK, LG, DI sono uguali tra loro. Allora, proseguendo nella proporzione continua di rapporto $\frac{MK}{FC}$ cosí da risultare proporzionale allo stesso XZ, (che è un altro segmento verticale, posto tra DH e l' asintoto AB), *che appartiene alla medesima iperbole, l' area XH sará uguale alle aree DI, LG, etc e pertanto l' area iperbolica XC supererá quella CD di una quantitá pari all' eccesso dell' area DC rispetto all' area LC. Ancora, l' area iperbolica LC supera l' area EC dello stesso ammontare, e cosí via per le altre. Ne consegue che, al posto dei numeri $6, 7, 8, 9, 10, 11$, etc possiamo adottare le quantitá iperboliche XC, DC, LC, EC, MC come logaritmi delle grandezze O, P, Q, R, S, T, o meglio le quantitá MC, EC, LC, DC, XC o ancora, se non si vuole fare riferimento all' iperbole, quantitá che eccedano le une sulle altre di una stessa quantitá come i numeri logaritmici adottati in partenza. Per questo motivo, si vede che la natura dei logaritmi, con la sua continuazione ed eccesso dei termini si adatta perfettamente all' iperbole, cosí che, al posto dei numeri, si possono prendere parti*

dell'iperbole od il rapporto assegnato dei segmenti.
In questo modo il legame tra logaritmi ed area di segmenti iperbolici opportunamente scelti è reso esplicito. A questo punto inizia l' attacco al problema di Marsenne, riguardo al quale subordina la risposta affermativa al quesito alla possibilitá di includere o meno la terza grandezza di cui occorre determinare il logaritmo nella stessa progressione geometrica contenente le altre due grandezze. De Sararsa riesce a stabilire sotto quali condizioni tre segmenti assegnati appartengono ad una medesima progressione geometrica: ció accade se e solo se le aree dei segmenti iperbolici limitati dai segmenti di partenza sono commensurabili.
Da qui risulta ancora piú evidente che il problema di trovare, date tre grandezze ed i logaritmi di due di queste, il logaritmo della terza in modo geometrico non è stato ben formulato da Marsenne; è una richiesta che chiaramente confligge con la natura dei logaritmi, che non puó essere sempre rispettata senza restrizioni.
In questo passaggio si evidenzia la natura *discreta* dei logaritmi intesi da De Sarasa che in effetti é un passo indietro rispetto alla concezione di logaritmo di Nepero che li definiva per una variabile *continua.*
Se con De Sararsa il legame tra logaritmi ed area sottesa da un arco di iperbole viene reso esplicito, è Christiaan Huygens(1629-1695) che sfruttó la geometria dell'iperbole per calcolare i logaritmi briggsiani in *Fondamentum regulae nostrae ad inveniendos logarithmos*, che scrisse nell' agosto del 1661, senza peró pubblicarlo.
Huygens considera un' iperbole equilatera di equazione, diremo oggi, $xy = q^2$ e, per illustrare il calcolo del logaritmo (briggsiano) di 2, prende su di essa i punti A, F ed E tali che $AB = 10, FG = 2$ ed $ED = 1$ (figura 2.3).

Considera le aree $A_1 = A(ABDE)$ ed $A_2 = (FGDE)$ sottese dall' iperbole e limitate dall' asintoto CD e dai segmenti AB, FG, ed ED. Posto $\rho = \frac{A_1}{A_2}$ abbiamo, in termini moderni,

$$\rho = \frac{\log \frac{AB}{ED}}{\log \frac{FG}{ED}}$$

cioé

$$\frac{AB}{ED} = \left(\frac{FG}{ED}\right)^{\rho}$$

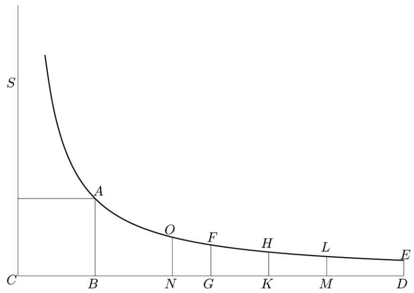

Figura 2.3: Iperbole equilatera per la determinazione geometrica di $\log 2$ proposta da Huygens.

Attraverso il metodo di Hyugens, che sfrutta il rapporto tra le aree iperboliche per dedurre il logaritmo richiesto, riesce a trovare un risultato corretto fino alla decima cifra decimale, come annuncerá all' *Academie* nel 1668, senza peró spiegare i dettagli del metodo. Grazie al suo lavoro, l' analogia tra aree iperboliche e logaritmi acquista una importante valenza applicativa, in quanto fornisce la base di un metodo accurato per trovare i logaritmi.

2.2 La curva logaritmica

I primi a trattare la curva logaritmica furono Evangelista Torricelli(1608-1647) e Christiaan Huygens. Cronologicamente l' onore di avere studiato per primo la curva logaritmica, determinandone le principali proprietá spetta a Torricelli nella *De hemihyperbole Logarithmica* del 1644. La memoria di Torricelli è notevole perché determina le proprietá della sottotangente alla curva logaritmica, la quadratura della porzione di piano delimitata dalla curva stessa, da due rette parallele all' asse delle ordinate e dall' asse delle ascisse e, infine, l' espressione del volume del solido ottenuto per rotazione completa della curva attorno al suo unico asintoto.
Soffermiamoci sulla definizione della curva logaritmica secondo Torricelli:

Definizione 2.1. *Se c'è una linea ABC che taglia tutte le rette parpendicolari a DE ed equidistanti tra loro in segmenti che formano una progressione geometrica, chiamo quella linea ABC semiperbole, visto che ha una sola retta per asintoto.*

La curva di Torricellli realizza la corrispondenza tra progressioni aritmetiche e geometriche che è alla base della definizione neperiana di logaritmo. In termini moderni, egli ha definito la curva $x = \log_a y$, ovvero $y = a^x$. Vediamo la costruzione della curva per punti, coerente con la definizione appena data.(figura 2.4)
Si consideri una retta DE illimitata da ambo le parti su cui si prendo-

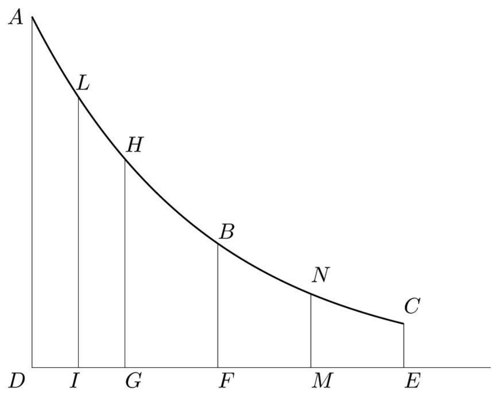

Figura 2.4: Costruzione per punti della semiperbole.

no due punti D ed E arbitrari. Si traccino due segmenti perpendicolari DA ed EC. Diviso in due parti uguali il segmento DE in F, si tracci la perpendicolare FB media (geometrica) tra DA ed EC e bisecate ancora le parti ottenute in G ed M, si traccino GH ed MN entrambi medi proporzionali tra i segmenti adiacenti. E si proceda in questa suddivisione tante volte quanto si vuole; in seguito si tracci per i punti estremi trovati $ALHBNC$ una curva che chiamiamo semiperbole per somiglianza e perché ha un solo asintoto.
Si tratta di un processo di bisezione del segmento arbitrario DE in cui ad ogni punto della suddivisione corrisponde un' ordinata che è la media geometrica delle ordinate dei punti adiacenti nella suddivisione

di DE. Torricelli illustra poi come sia possibile descrivere le due specie di logaritmi, quelli crescenti e quelli decrescenti, attraverso un' unica curva.

Si sarebbe potuto chiamare la semiperbole anche curva logaritmica o neperiana. Infatti per suo mezzo si possono vedere entrambi i tipi di logaritmi e le loro proprietá. Si consideri infatti la semiperbole $ABCDEFGH$ di asintoto IL (figura 2.5).

Si scelga un' ordinata LH come unitá e si consideri un suo multi-

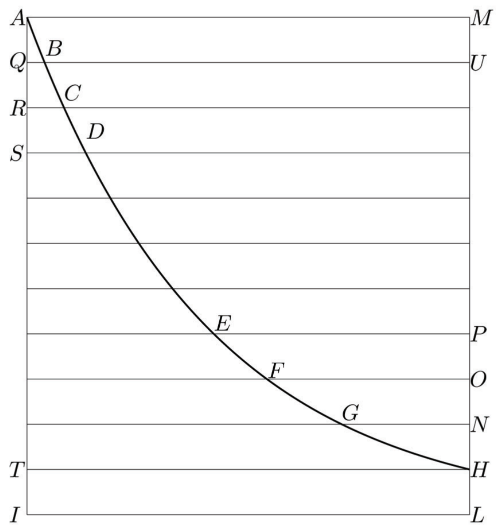

Figura 2.5: Diversi sistemi logaritmici descritti dalla stessa semiperbole.

plo qualsiasi LM come valore massimo della tavola e, completato il rettangolo $ILMA$, dai singoli punti $HNOP$ ecc si traccino delle rette parallele all' asintoto. Fatto questo, sia pari a zero il logaritmo dell' unitá LH. Il logaritmo di LN, cioé di due , sará NG, del tre LO sará OF, del quattro sará PE e cosí via fino al numero piú grande della tabella, LM, il cui logaritmo è MA. L' altro tipo di logaritmi è formato dai complementi di questi appena spiegati. Cosí il logaritmo del numero assoluto IA sará zero, quello del numero IQ sará QB e quello di IR sará RC, quello di IS sará SD, ecc. In questo modo l' unitá IT avrá il logaritmo piú grande TH. Da ció è evidente che se *è dato un solo tipo di logaritmo, non importa quale, per tutti i numeri, l' altro tipo si costruisce grazie soltanto a sottrazione, sottraendo evidentemente i singoli logaritmi. Né è importante da quale numero viene effettuata la divisione: la si puó eseguire a partire dal numero che è uguale al piú grande dei logaritmi dati come a partire da un numero a piacere minore del piú grande. Infatti il valore e l' efficacia dei logaritmi risiede unicamente nelle loro differenze.*

Ció vuol dire che il primo sistema logaritmico rappresentato sulla curva di figura(2.5) è briggsiano perché il logaritmo corrispondente all' unitá LH fissata è nullo. Chiamiamo $\log^{(1)}$ questo sistema logaritmico, per il quale vale la regola di trasformazione di prodotti in somme e sia $ML = n \times LH$. Il secondo sistema, che denotiamo con $\log^{(2)}$, è neperiano con *sinus totus* pari ad AI. Vediamo il legame che pone Torricelli tra i due sistemi logaritmici:

$$\log^{(2)}(IQ) = QB = IL - BU = \log^{(1)}(ML) - \log^{(1)}(UL) = \log^{(1)}\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

ed in generale

$$\log^{(2)}(n-k) = \log^{(1)}\left(\frac{n}{n-k}\right).$$

La convivenza di due sistemi logaritmici sulla stessa curva non sarebbe realizzabile vedendo il logaritmo come inverso della funzione esponenziale. Essa è resa possibile proprio dalla definizione neperiana di logaritmo come progressione aritmetica associata ad una progressione geometrica.

I teoremi cui Torricelli sembra dare importanza maggiore riguardano l' area della porzione di piano delimitata dalla semiperbole, dal suo asintoto e da una retta ortogonale a quest' ultimo, ed il volume del solido illimitato ottenuto per rotazione della semiperbole attorno al proprio asintoto.

Teorema 2.1. *Se si considera su questa linea un punto arbitrario A (figura 2.6), da cui si traccia la tangente AE, mentre AH è perpendicolare all' asintoto: ne risulterá una figura piana $ABFH$, compresa tra la curva, il suo asintoto e la retta AH, che è equivalente al doppio del triangolo AEH. Se poi si considera un altro punto arbitrario C da* *cui si traccia CD perpendicolare all' asintoto e CI parallela ad esso, il quadrilatero misto $ACDH$ sará equivalente al doppio del triangolo AIH.*

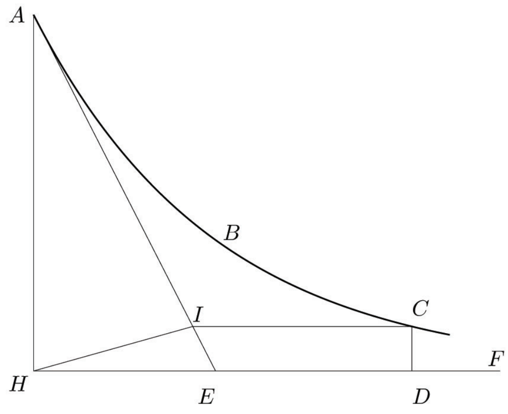

Figura 2.6: La semiperbole di Torricelli.

Teorema 2.2. *Se poi l' intera figura viene fatta ruotare attorno all' asintoto HD, il solido acuto di lunghezza infinita, ottenuto per rotazione della semiperbole, è equivalente a $\frac{3}{2}$ del cono ottenuto per rotazione del triangolo AEH attorno all' asse HE.*

Per dimostrare questi risultati, Torricelli utilizza il metodo di esaustione, cioé assume che, ad esempio, il quadrilatero misto $ACDH$ abbia area una volta maggiore ed una volta minore del doppio del triangolo AIH, ricavandone sempre un assurdo e deducendo come conseguenza l' uguaglianza delle aree.
Torricelli infine dimostra come, tracciata una tangente alla curva logaritmica, sia in realtá possibile tracciare tutte le tangenti alla curva stessa. Questo risultato, che egli chiama *Propagatio tangentium in hemihyperbola*, è ottenuto dimostrando che la sottotangente ha lunghezza costante. Il suo argomento è il seguente(figura 2.7):

Dimostrazione. Dato un arco di curva regolare AEV e condotta la tangente in un suo punto A, si considerino sull' asse delle ascisse il

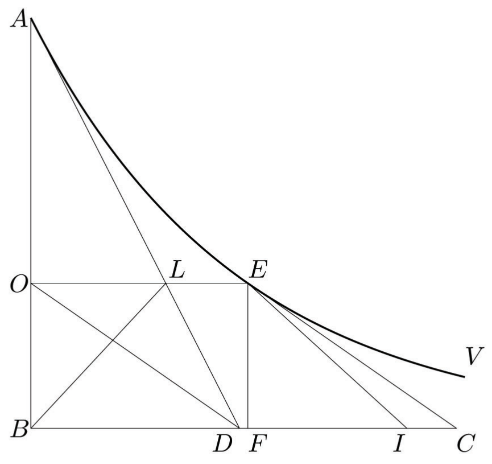

Figura 2.7: La costanza della sottotangente nella trattazione di Torricelli.

punto B avente la stessa ascissa di A e l' intersezione D della tangente alla curva: il segmento BD è la sottotangente alla curva in A.
Preso sulla semiperbole un punto arbitrario E, si stacchi il segmento EF ortogonale all'asintoto BC e si riporti su quest'ultimo il segmento FC congruente a BD. Il teorema è dimostrato se si fa vedere che EC è tangente alla semiperbole. Per assurdo, Torricelli suppone che sia EI la tangente in E e traccia la parallela EO all'asintoto BC che interseca la tangente AD alla semiperbole nel punto L. A questo punto, egli afferma che l' area della figura piana delimitata dall'arco infinito AV di semiperbole, da AB e dall'asintoto, è il doppio di quella del triangolo ADB, servendosi dunque del Teorema 2.1. Inoltre afferma l'equivalenza tra il quadrilatero mistilineo $ABFE$ ed il doppio del triangolo ALB, risultato che non viene peró dimostrato esplicitamente. Per differenza si ha che l' area della porzione illimitata EVF è doppia del triangolo BLD, ovvero di EFC, ad esso equivalente. D' altra parte se si suppone EI tangente alla semiperbole, lo stesso argomento ora utilizzato permette di concludere che AVF ha area doppia del triangolo FEI che dunque risulterebbe equivalente al triangolo FEC, cadendo in assudo. $\square$

Torricelli peró non riusci a determinare il valore costante della sottotangente. Riuscirá in questo scopo Huygens.
Poiché le ricerche di Torricelli sulla curva logaritmica rimasero inedite fino al 1900, parve che Huygens fosse stato il primo ad aver concepito l' idea di tale curva. Egli presentó le proprietá salienti della curva logaritmica nella *Discours de la cause de la pesanteur* del 1690 in cui peró avverte che l' invenzione della curva va fatta risalire ad altri, anche se non è chiaro se si riferisse a Torricelli o a James Gregory che aveva pubblicato nel 1667 a Padova la *Geometriae pars universalis* in cui parlava della curva logaritmica.
Sono molte le somiglianze con l' inedito torricelliano a cominciare dalla costruzione per punti. Cerchiamo di segnalare le novitá principali dell' approccio di Huygens. La prima è l'impiego della curva logaritmica per inserire in modo geometrico un numero arbitrario di medi proporzionali tra due numeri assegnati.
Riferendosi alla figura (2.8), riportati i segmenti PQ e QR pari al-

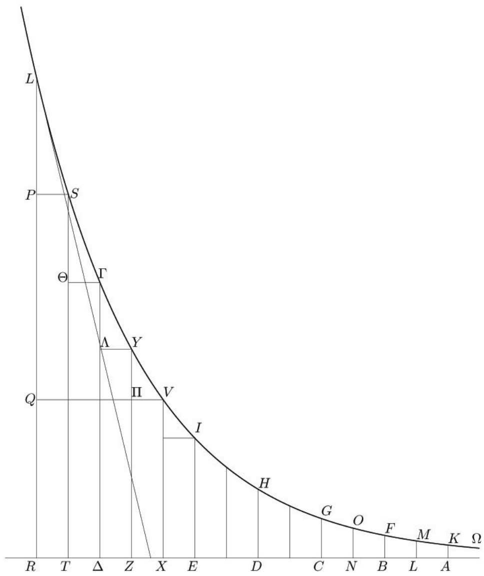

Figura 2.8: Teoremi di Huygens sulla curva logaritmica.

le grandezze entro cui inserire gli n medi proporzionali sull' asse LR

(nell' esempio $n = 2$), si trovano i punti S e V della curva logaritmica le cui ordinate ST e VX sono uguali a PR e QR. Si divide il segmento TX in $n + 1$ parti uguali: tre in questo caso. Dai punti Δ e Z della suddivisione si innalzano le perpendicolari alla curva logaritmica e, per la definizione di quest' ultima i segmenti $\Delta\Gamma$ e ZY sono i medi proporzionali richiesti.
Vediamo ora alcuni teoremi di Huygens sul rapporto tra aree di segmenti iperbolici:

Teorema 2.3. *Due regioni di spazio qualunque delimitate da coppie di rette perpendicolari tracciate alla stessa distanza come sono le regioni $TS\Gamma\Delta$, $YZXV$ stanno tra loro nello stesso rapporto che intercorre tra la perpendicolare maggiore di una di esse e la perpendicolare maggiore dell' altra o nel rapporto tra le perpendicolari minori.*

Ció afferma che

$$\frac{A(TS\Gamma\Delta)}{A(YZXV)} = \frac{TS}{YZ} = \frac{\Gamma\Delta}{XV}.$$

Da questo risultato, Huygens deduce il seguente teorema, applicazione delle proprietá elementari delle proporzioni:

Teorema 2.4. *La regione di spazio delimitata da due perpendicolari qualsiasi sta alla regione adiacente che si estende all'infinito come la differenza tra le perpendicolari sta alla perpendicolare minore.*

Riferendoci sempre alla figura (2.8),

$$\frac{A(ST\Delta\Gamma)}{A(\Gamma HK\Omega\Delta)} = \frac{S\Theta}{\Gamma\Delta}.$$

A questo punto Huygens passa a mostrare la costanza della sottotangente, della quale, come giá annunciato,a differenza di Torricelli, riesce a trovare il valore costante. La sua costruzione si traduce formalmente considerando due punti A ed X (figura 2.9) sulla curva logaritmica tali che le loro ordinate AC ed XY siano in un rapporto prossimo ad 1 : nell'esempio considerato da Huygens il rapporto è 100000 : 99999, ma in generale è del tipo $\frac{1}{(1-\epsilon)}$ con $\epsilon \ll 1$. Pertanto

$$VX = CY = \log AC - \log XY = \log \frac{1}{1-\epsilon}$$

che vale $4342923104 \times 10^{-6}$ nell' esempio considerato.
Per similitudine dei triangoli AVX ed ACE si ottiene

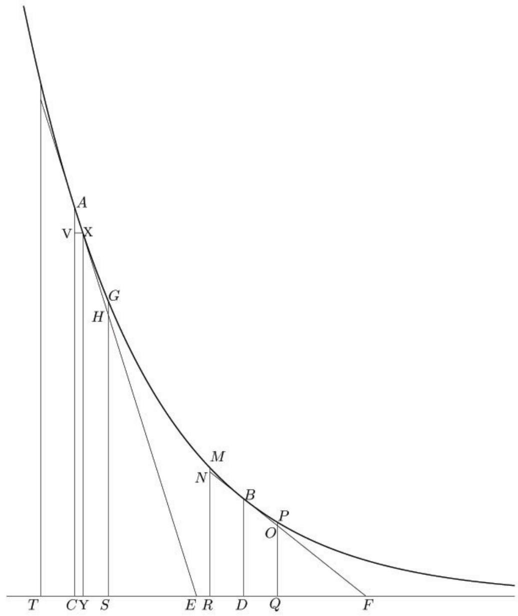

Figura 2.9: Determinazione geometrica di $\log e$.

$$CE = VX\frac{AC}{AV} = 0.4342923104.$$

D'altra parte è semplice trovare due punti S ed R sull'asintoto della curva tali che $SR = \log 2$: è sufficiente determinare due punti G ed M sulla curva logaritmica di ordinate $GS = 2MR$. Poiché $\log 2 \cong 0.3010299957$ si puó dire che $SR : CE = 3 : (4 + \frac{1}{3})$ che permette di risalire al valore di CE, noto SR. Inoltre il valore numerico di CE è tanto piú preciso quanto piú vicino ad 1 è il rapporto in cui stanno AC ed XY.
Ma qual è il significato del numero trovato da Huygens?
Prendiamo la curva $y = a^x$ e determiniamo l' equazione della sua tangente nel punto $A \equiv (x_0, a^{x_0})$. Osservato che $a^x = e^{x \ln a}$ e posto $M = \ln a$, abbiamo $y'(x) = Ma^x$ e dunque l'equazione della tangente

in A è

$$y - a^{x_0} = Ma^{x_0}(x - x_0).$$

Essa interseca l' asse delle ascisse nel punto E tale che

$$x_E - x_0 = -\frac{1}{M}$$

che mostra analiticamente la costanza della sottotangente.
D' altra parte, usando le formule per il cambiamento di base nei logaritmi, si conclude che

$$\frac{1}{M} = \frac{\log e}{\log a}$$

dove preso $a = \frac{1}{10}$, la costruzione geometrica di Huygens consente di determinare con buona approssimazione il logaritmo decimale della base dei logaritmi *naturali*

$$\log e = 0.4342944818.$$

Segue poi una parte dedicata alla quadratura dei settori delimitati da una curva logaritmica, dal suo asintoto e da una coppia di rette perpendicolari ad esso, nella quale troviamo una serie di corollari.

Corollario 2.1. *Se da un medesimo punto si tracciano la perpendicolare all'asintoto e la tangente alla curva come qui [figura (*2.10*)] sono AB ed AF, il triangolo ABF avrá sempre area pari alla metá della regione illimitata ABD.*

Il corollario successivo serve ad esprimere l' area delimitata dall' arco AH di curva logaritmica, dall' asintoto e dai segmenti verticali AB, HL che uniscono l' arco all' asintoto.

Corollario 2.2. *Una qualsiasi regione limitata da due segmenti ortogonali all' asintoto come la regione $ABHL$ [figura (*2.11*)], sará equivalente al rettangolo avente per lati il latus rectum e la differenza dei due segmenti come, in questo caso, il rettangolo AK. Infatti, poiché la regione illimitata HLD è equivalente al rettangolo CF, la regione residua $ABLH$ sará equivalente al rettangolo residuo AK.*

Infine nell' ultima parte della memoria di Huygens, tratta in dettaglio la localizzazione del centro di massa di una lamina piana omogenea limitata da un arco, eventualmente illimitato, di curva logaritmica, dal suo asintoto e da due rette ortogonali a quest' ultimo.

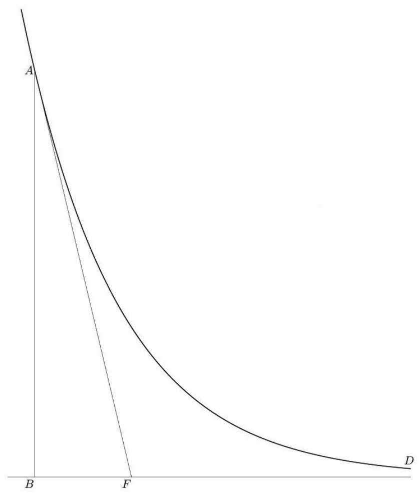

Figura 2.10: Il triangolo ABF è equivalente a metá dell' area sottesa dalla curva logaritmica, limitata a sinistra da AB.

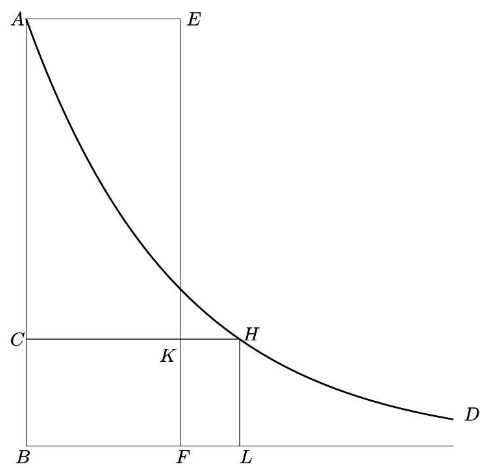

Figura 2.11: Equivalenza tra il settore sotteso da AB ed HL ed il rettangolo CL.

2.3 La quadratura dell'iperbole per definire i logaritmi

Abbiamo visto come la quadratura dell'iperbole si possa ottenere attraverso i logaritmi. Ma come ha mostrato Gregorio di San Vincenzo, le proprietá logaritmiche dell'iperbole possono essere dedotte indipendentemente dall'introduzione di un particolare sistema logaritmico. Grazie a questa osservazione è possibile fondare la teoria dei logaritmi proprio sulle proprietá geometriche dell'iperbole. Questa strada fu percorsa, a metá del 1700, nel III degli *Opuscola ad res Physicas et Mathematicas pertinentes* pubblicati a Bologna nel 1757, da padre Vincenzo Riccati(1707-1775). L' aspetto piú interessante dell' *Opusculum III* è l'impiego dell'iperbole equilatera per classificare i diversi sistemi logaritmici sulla base di due parametri dal preciso significato geometrico. Riccati considera un punto E (figura 2.12) di riferimento sull' iperbole equilatera EBR di asintoti CH e CN e sotto l'iperbole traccia la curva logaritmica dotata di questa proprietá: preso un generico punto P sulla iperbole, egli introduce un numero $b > 0$ e determina il valore (assoluto) di IT in modo che $b \times IT$ sia l' area sottesa tra l'iperbole, l'asintoto CN, la verticale di riferimento fissata ED e la verticale IP: le aree di settori come $EDIP$ posti a destra di ED sono positive, mentre quelle di settori posti a sinistra di ED sono negative.

Riccati definisce il segmento IT determinato in questo modo come il *logaritmo* di IC. Ovviamente, CD ha per costruzione logaritmo nullo. I possibili sistemi logaritmici si ottengono variando la lunghezza del segmento CD di riferimento, che Riccati chiama *protonumero*, oppure il parametro b che rappresenta la sottotangente alla curva logaritmica, staccata dalla tangente sull' asintoto CN dell'iperbole.

L'idea di Riccati di introdurre i logaritmi sulla base della quadratura dell'iperbole si ritroverá molto piú tardi come proposta didattica ad opera di Felix Klein(1849-1925), all' inizio del XX secolo. Klein lamentando il distacco tra insegnamento della matematica e progresso della ricerca nella matematica del XIX secolo, nel *Elementar Mathematik vom hoheren Standtpunkte aus* si esprime sui logaritmi in questi termini:

Vorrei ancora una volta riassumere brevemente come ritengo debbano

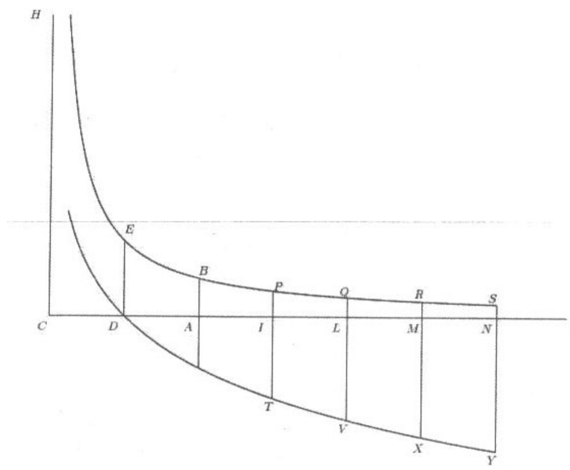

Figura 2.12: Sistema logaritmico introdotto da Vincenzo Riccati a partire dall' iperbole.

essere introdotti i logaritmi nella scuola in modo semplice e naturale: la regola somma è che il principio corretto per introdurre nuove funzioni risiede nella quadratura di curve note. Ció è conforme, come ho mostrato, sia alle circostanze storiche, sia al modo di procedere nelle parti piú avanzate della matematica.

2.4 Logaritmi e serie

Abbiamo visto come il legame tra geometria dell'iperbole equilatera e logaritmo fu sfruttato a meta del 1600 come strumento di calcolo dei logaritmi. Viceversa, nello stesso periodo, questo legame fu letto in senso opposto, nel senso che i logaritmi vennero utilizzati per quadrare l' iperbole. Il primo a muoversi in questo senso fu Nicolaus Mercator(1620-1687) che introdusse le serie per quadrare l'iperbole equilatera nella *Logarithmotechnia.* Altri matematici poi riottennero in modo rigoroso i suoi risultati o ne precisarono la portata come Lord William Brouncker(1620-1684) che quadró l' iperbole servendosi delle frazioni continue o James Gregory(1638-1675) che rese piú rigorose le conclusioni di Mercator. L' uso delle serie legato ai logaritmi era peró stato introdotto, un decennio prima che i lavori di Mercator vedessero la luce, da Pietro Mengoli(1625-1686) che, a Bologna, aveva fornito un esempio di teoria dei logaritmi fondata sulle serie. Su di lui inizialmente pesava l' accusa di avere uno stile troppo ostico ma a partire dalla fine dell' Ottocento, il giudizio degli storici su Mengoli è progressivamente cambiato. Per quanto riguarda la teoria dei logaritmi, occorre analizzare una delle sue opere principali, la *Geometriae Speciosae Elementa* del 1659, che comprende una introduzione *Lectori Elementario* e sei *Elementa*. Per il nostro scopo interessa soprattutto il *V Elementum*, *De propriis rationum logarithmis*, dove Mengoli sviluppa una rigorosa teoria dei logarirmi puramente aritmetica che non ricorre alle progressioni geometriche od all' iperbole ma a sucessioni di numeri *ordinati armonicamente*.

Definizione 2.2. *Tre quantitá si dicono ordinate armonicamente quando la differenza tra la prima e la seconda sta alla differenza simile tra la seconda e la terza come la prima quantitá sta alla terza.*

Se indichiamo con a, b, e c le tre quantitá disposte armonicamente, allora deve essere

$$(a-b):(b-c)=a:c$$

da cui si ricava che

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right).$$

La definizione viene estesa poi alle successioni

Definizione 2.3. *Piú quantitá sono dette ordinate armonicamente quando terne consecutive sono ordinate armonicamente: cioé quando la differenza tra la prima e la terza sta alla simile differenza tra la seconda e la terza, come la prima sta alla terza; ed anche la differenza tra la seconda e la terza sta alla differenza simile tra la terza e la quarta come la seconda sta alla quarta, e cosí via sino all' ultima.*

In particolare a Mengoli interessava la sucessione armonica *naturale*, caraterizzata dall' avere il primo termine che è il doppio del secondo. Mengoli considera il caso in cui il termine iniziale è uguale ad 1 per cui la sucessione risulta essere

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}, \ldots$$

A partire da questa successione egli introduce il prologaritmo

Definizione 2.4. *Se la serie armonica naturale viene ordinata a partire dall' unitá e si considerano quanti si vogliano termini, ordinati a partire da uno qualsiasi di essi, la somma di questi termini è detta prologaritmo.*

Se m ed n sono due interi con $n < m$, un prologaritmo consiste nella somma

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{m-1} \tag{2.1}$$

Poi Mengoli introduce il concetto di *iperlogaritmo*:

Definizione 2.5. *Il prologaritmo verrá detto iperlogaritmo del rapporto che hanno tra loro il primo termine considerato e quello piú vicino all' ultimo termine, che resta escluso dalla somma.*

Il prologaritmo (2.1) è un iperlogaritmo di $\frac{m}{n}$. Se m ed n sono primi tra loro abbiamo

$$Hyl_1\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{m-1}.$$

Se k è un intero qualsiasi un altro iperlogaritmo dello stesso rapporto $\frac{m}{n}$ è

$$Hyl_k\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{kn} + \frac{1}{kn+1} + \ldots + \frac{1}{km-1}.$$

Poi Mengoli definisce l' *ipologaritmo*

Definizione 2.6. *Il prologaritmo viene detto ipologaritmo del rapporto che hanno tra loro l' ultimo termine considerato e quello non considerato che si trova piú vicino al primo.*

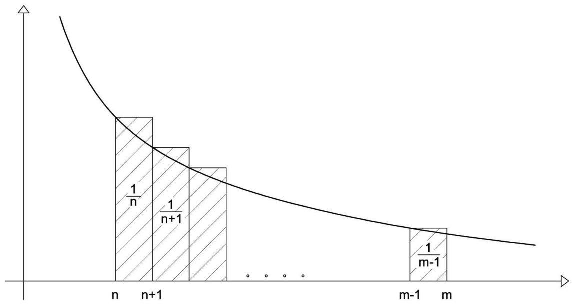

Figura 2.13: $Hyl_1\left(\frac{m}{n}\right) > \ln\frac{m}{n}$.

Formalmente:

$$hyl_1\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{m},$$

dove anche in questo caso vi sono infiniti altri ipologaritmi dello stesso rapporto $\frac{m}{n}$ definiti da

$$hyl_k\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{kn+1} + \frac{1}{kn+2} + ... + \frac{1}{km}.$$

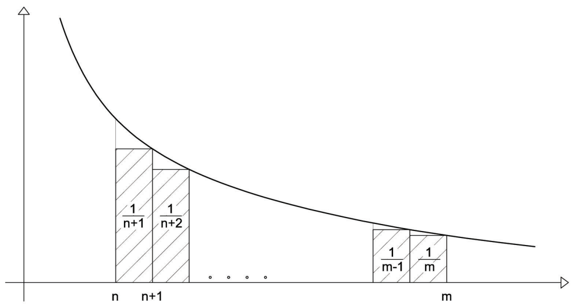

Figura 2.14: $hyl_1\left(\frac{m}{n}\right) < \ln\frac{m}{n}$.

Il logarimto di $\frac{m}{n}$ viene introdotto come

Definizione 2.7. *La quantitá che è minore di ogni iperlogaritmo di quei rapporti e maggiore di ogni loro ipologaritmo è detta logaritmo di quei rapporti.(figure* 2.13 − 2.14*)*

Nella introduzione inoltre, Mengoli aveva definito in modo ancora piú preciso il logaritmo di un numero:

Definizione 2.8. *Il logaritmo è quella quantitá a cui tendono sia gli iperlogaritmi, decrescendo via via, sia gli ipologartimi, crescendo via via; il logaritmo è minore di ogni iperlogaritmo, maggiore di ogni ipologaritmo.*

Questa definizione afferma il carattere monotono delle sucessioni di iper- e ipologaritmi di un numero razionale non minore di 1. Infatti, la limitazione della teoria di Mengoli è quella di definire i logaritmi solo per questi numeri, per cui riemerge la natura *discreta* dei logaritmi, come avevamo incontrato in De Sarasa. Vediamone le proprietá algebriche.
Presi tre numeri interi n, a e $b < a$, si definiscono

$$Hyl_n \frac{a}{b} := Hyl_n(a) - Hyl_n(b) = \frac{1}{nb} + \frac{1}{nb+1} + ... + \frac{1}{na-1}$$

e

$$hyl_n \frac{a}{b} := hyl_n(a) - hyl_n(b) = \frac{1}{nb+1} + \frac{1}{nb+2} + ... + \frac{1}{na},$$

entrambe le successioni convergono ad uno stesso valore quando $n \to \infty$ che viene definito come $\log \frac{a}{b}$. D' altra parte, poiché $Hyl_n(a)$ ed $hyl_n(a)$ convergono a $\log(a)$ e $Hyl_n(b)$ ed $hyl_n(b)$ convergono a $\log(b)$ abbiamo

$$\log(a) - \log(b) = \log \frac{a}{b}.$$

Un procedimento simile puó essere seguito per i logaritmi del prodotto di due interi a e b, con $a > b$. Per ogni intero n deve essere

$$Hyl_n(a) = \frac{1}{n} + ...\frac{1}{na-1} > \log a > \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{na} = hyl_n(a)$$

e

$$Hyl_n(b) = \frac{1}{n} + ...\frac{1}{nb-1} > \log b > \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{nb} = hyl_n(b)$$

per cui sommando

$$Hyl_n(ab) = \frac{1}{n} + ... \frac{1}{nab-1} > \log a + \log b > \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{nab} = hyl_n(ab)$$

ma siccome anche $Hyl_n(ab) > \log(ab) > hyl_n(ab)$ segue

$$\log(ab) = \log a + \log b.$$

Al termine dell' *Elementum Quintum* Mengoli aggiunse una *Appendix* nella quale osservó
Mentre scrivevo queste cose mi capitó di trovare la via corretta per calcolare i logaritmi di tutti i rapporti numerici.
A partire dall' unitá e seguendo la progressione armonica naturale egli costruisce una prima serie A i cui termini sono

$$A: \quad 1; \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{3}; ...$$

dove i termini sono considerati singolarmente; una seconda serie B dove i termini delle progressione armonica sono considerati a coppie:

$$B: \quad 1\frac{1}{2}; \quad \frac{1}{3}\frac{1}{4}; \quad \frac{1}{5}\frac{1}{6}; ...$$

una terza serie C dove i termini sono raggruppati in terne

$$C: \quad 1\frac{1}{2}\frac{1}{3}; \quad \frac{1}{4}\frac{1}{5}\frac{1}{6}; \quad \frac{1}{7}\frac{1}{8}\frac{1}{9}; ...$$

e cosí di seguito. Egli osserva che se si sottrae il primo gruppo di termini della serie B dal primo termine della serie A si ottiene

$$1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} = hyl_1 2;$$

se a questo risulatato si aggiunge la somma dei termini della seconda coppia in B e si sottrae il secondo termine in A si ha

$$hyl_1 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = hyl_2 2;$$

aggiungendo a $hyl_2 2$ la somma dei termini del terzo gruppo in B diminuita del terzo termine in A, si ottiene

$$hyl_2 2 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = hyl_3 2;$$

ripetendo la procedura si ottiene

$$hyl_k 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{2k}$$

e, al limite, lo sviluppo in serie di $\ln 2$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Il metodo si generalizza suddividendo i termini della serie armonica naturale in gruppi sempre piú grandi. La serie cosí ottenuta sará poi ricavata indipendentemente anche da un altro matematico, Nicolaus Mercator(1620-1687). Egli fu anche astronomo e fisico. L' opera di Mercator che piú ci interessa per i nostri scopi è sicuramente la *Logarithmotechnia* che consta di tre parti, due delle quali rese note nel 1667, la terza aggiunta in appendice all' edizione del 1668. Le prime due parti sono dedicate al calcolo dei logaritmi briggsiani mentre la terza parte, quella piú originale, *Vera Quadratura Hyperbolae & Inventio summae Logarithmorum*, è costituita dalle Proposizioni XIV-XIX e collega la quadratura dell'iperbole equilatera al calcolo dei logaritmi tramite lo sviluppo in serie di $\log(1+x)$, oggi noto anche come serie di Mercator. La Proposizione XIV è puramente geometrica (figura 2.15): detti I il piede della parallela all' asintoto AN condotta a partire dal vertice B dell'iperbole ed F un punto qualsiasi sull' iperbole equilatera, allora $AH : AI = BI : FH$. Si tratta della nota equivalenza tra tutti i rettangoli aventi un vertice coincidente con il centro dell'iperbole, quello opposto sull' iperbole e due lati sugli asintoti.

Grazie a questo risultato, Mercator risolve nella Prop. XV il problema di trovare FH: posto $AI = BI = 1$ ed $HI = a$, dal risultato della Prop. XIV, si ottiene $FH = \frac{1}{1+a}$ la cui rappresentazione in serie è

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + aa - a^3 + a^4 - \dots$$

Il contenuto della Prop. XVI equivale formalmente alla dimostrazione che

$$\int_0^x t^n \, dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

risultato giá ottenuto da Pierre Fermat(1601-1655). La dimostrazione procede induttivamente su n, basandosi su un esempio particolare in

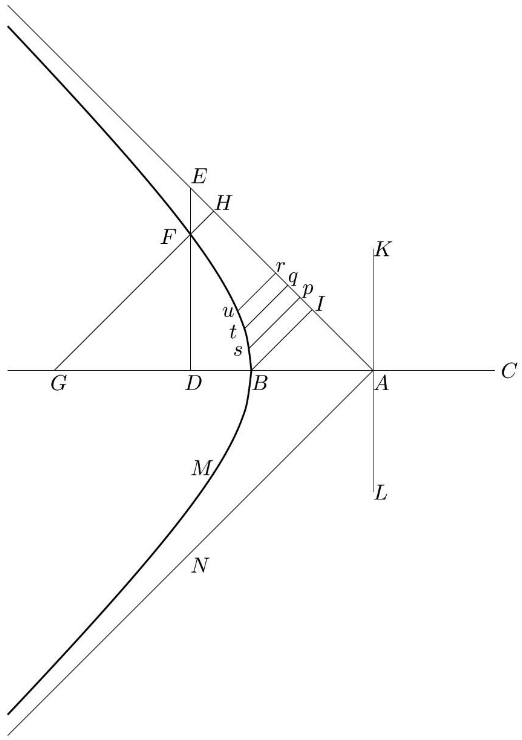

Figura 2.15: Quadratura dell'iperbole di Nicolaus Mercator.

cui $x = 21$ ed è abbastanza ostica per il lettore moderno, ma comunque gli permise di ottenere la quadratura dell'iperbole presentata nella Prop. XVII.

Proposizione 2.3 (XVII)**.** *Si ponga $AI = 1$ nella figura precedente e si divida il segmento IE dell' asintoto in un gran numero di parti uguali come sono, ad esempio, $Ip = pq = qr = a$. Per le Prop. XIV e XV, $ps = 1 - a + aa - a^3 + a^4$, ecc. e $qt = 1 - 2a + 4aa - 8a^3 + 16a^4$, ecc. e $ru = 1 - 3a + 9aa - 27a^3 + 81a^4$, ecc.*
Ora $ps + qt + ru =$ area di$BIru =$

$$= \begin{cases} 1 - a + aa - a^3 + a^4 \\ 1 - 2a + 4aa - 8a^3 + 16a^4 \qquad \textit{ecc.} \\ 1 - 3a + 9aa - 27a^3 + 81a^4 \end{cases}$$

$$= 3 - 6a + 14aa - 36a^3 + 98a^4$$

cioé è uguale al numero dei termini contenuti in Ir meno la somma di tali termini piú la somma dei loro quadrati, meno la somma dei cubi, piú la somma dei quadrato-quadrati, ecc.
Posto come prima $IA = 1$ sia ora $Ip = 0\lfloor 1$ =numero dei termini: grazie alle Prop. XV e XVI trovo che l' area $BIps$ = al numero dei termini $0\lfloor 1$, meno la somma di quei termini $= 0\lfloor 005$, piú la somma dei loro quadrati $= 0\lfloor 000333333$, meno la somma dei cubi $= 0\lfloor 000025$, piú la somma dei quadrato-quadrati $= 0\lfloor 000002$, meno la somma dei quadrato-cubi $= 0\lfloor 000000166$, piú la somma dei cubo-cubi $= 0\lfloor 000000014$, ecc.

Mercator usa il simbolo $\lfloor$ per separare la parte intera da quella decimale di un numero. La regola proposta da Mercator va letta in questo modo: si sceglie un valore per $Ip = 0.1 = a$ ed allora l' area della porzione $BIps$ delimitata dall' iperbole ha il valore approssimato

$$a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 - \ldots = 0.1 - 0.005 + 0.000333 - \ldots = 0.0095310181$$

che coincide con quello corretto 0.0095313179 fino alla sesta cifra decimale.
I risultati di Mercator attirarono molta attenzione e fornirono lo spunto per articoli apparsi sulle *Philosophical Transactions* della Royal Society di Londra in cui si proponevano altri metodi di quadratura per serie dell'iperbole ovvero miglioramenti della teoria contenuta nella *Logarithmotechnia.* Interessante è un lavoro del 1668 in cui John Wallis(1616-1703), dopo aver elogiato gli astuti procedimenti introdotti da Mercator, osserva un problema di convergenza che si presenta qualora si voglia quadrare una porzione $BIHF$ di iperbole(figura 2.15) con $IH > AI$ in quanto la serie utilizzata per effettuare la quadratura non converge. Detta $A > 1$ la lunghezza di IH, Wallis osserva che
Non bisogna frattanto nascondere che, se si cerca la quadratura della regione $BIHF$ (in cui IH è da ritenersi maggiore di AI), il procedimento non porta ad un esito positivo (...). Infatti se si prende $A > 1$ è evidente che le sue potenze successive saranno sempre piú grandi e dunque meno trascurabili.

In altre parole, Wallis osserva come la serie di Mercator

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

cessi di convergere quando $x > 1$. Oltre a sollevare il problema, Wallis lo risolve con un cambiamento di variabili, ponendo $AH = 1$, anziché $AI = 1$ e prendendo $Ir = A$. Egli ha poi suddiviso il segmento Hr in parti di ampiezza arbitrariamente piccola a, cosí che i punti di suddivisione hanno ascissa $1 = AH, 1-a, 1-2a$, fino a giungere a $1-A = Hr$. A questo punto, detto b^2 il valore costante dell'area dei rettangoli aventi vertici opposti in A e in un punto sull'iperbole equilatera, le ordinate dei punti di suddivisione sono $b^2, \frac{b^2}{(1-a)}, \frac{b^2}{(1-2a)}, \ldots, \frac{b^2}{(1-A)}$. Ora il procedimento di Mercator viene fatto ripartire inalterato, producendo una serie convergente.

Colui che rese piú rigorose le conclusioni di Mercator e contribuí a quel processo di perfezionamento degli sviluppi in serie fu sicuramente il matematico scozzese James Gregory(1638-1675). Nel 1668 pubblicó a Londra le *Exercitationes Geometricae.* Occupiamoci della prima *Exercitatio*, *N.Mercatoris quadratura hyperboles geometrice demonstrata*, dove Greogory si propone di riottenere i risultati di Mercator rigorosamente, articolando la propria dimostrazione in diverse proposizioni. Nella prima richiama un noto risulatato sulla somma S di una progressione geometrica a termini positivi $A > B > C > \ldots > F$,:

$$(A - B) : A = A : S$$

che esprime il fatto che

$$S = A\frac{1}{1-q}$$

dove $q := \frac{B}{A} < 1$ è la ragione della progressione geometrica.
Nella Proposizione 2, egli considera una progressione geometrica a segni alterni e mostra che

$$(A + B) : A = A : Z,$$

dove A e B hanno lo stesso significato di prima mentre Z è la differenza tra la somma degli infiniti termini di posto dispari e la somma

degli infiniti termini di posto pari, cioé la somma della serie a segni alterni.
La Proposizione 3 utilizza questi risultati per calcolare la somma delle aree di una successione infinita di parallelogrammi inscritti in un' iperbole *qualsiasi*, anche non equilatera.(figura 2.16)
Sia data un' iperbole $SB3$ *di verice* B *ed asintoti* AR *ed* $A4$. *Si tracci* BK *parallelo all' asintoto* AR *ed un altro segmento* YD *a piacere, parallelo ad entrambi i precedenti e tra loro compreso; dico che* YD *è la somma di una serie di termini in proporzione continua, di cui il primo è* $BK = KA$ *ed il secondo è* KD*; infatti,* $BK - KD = AD$ *sta a* BK *come* BK *sta a* DY*, da cui segue l' asserto per quanto mostrato nel primo punto. Si tracci ora un segmento* 34 *parallelo alle stesse rette* RA, BK*, al di lá del punto* K. *Affermo che il segmento* 34 *è uguale alla differenza di tutti i termini di posto dispari e tutti i termini di posto pari nella serie infinita il cui primo termine è* KB *ed il secondo è* $K4$*: infatti,* $KB + K4 = A4$ *sta a* BK *come* BK *sta a* 34 *e dunque segue l' asserto grazie a quanto mostrato al punto II.*
Per spiegare questo passo, richiamiamo una proprietá dell' equazione

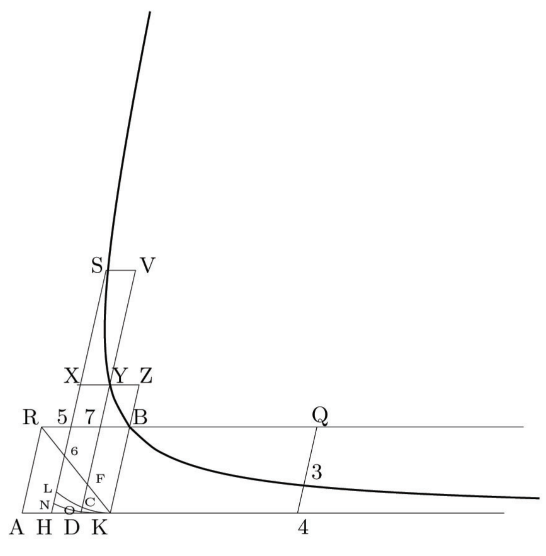

Figura 2.16: Quadratura dell'iperbole di James Gregory.

di un' iperbole generica riferita ai propri asintoti, quando questi non sono ortogonali. L' equazione generale di una conica in coordinate cartesiane ortogonali(x, y) è

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \tag{2.2}$$

e dato che il legame con le coordinate cartesiane oblique (X, Y) è dato da una relazione del tipo

$$\begin{cases} x = \alpha X + \beta Y \\ y = \gamma X + \delta Y, \end{cases}$$

sostituendo in (2.2) l' equazione generale di una conica in coordinate oblique è ancora del tipo

$$aX^2 + bY^2 + cXY + dX + eY + f = 0.$$

Se richiediamo che le rette $X = 0$ ed $Y = 0$ siano asintoti della conica, cioé non abbiano nessuna intersezione con la conica, abbiamo che le equazioni

$$bY^2 + eY + f = 0 \quad \text{e} \quad aX^2 + dX + f = 0$$

non debbono ammettere soluzioni finite, cioé deve essere $a = b = d = e = 0$, che riduce l' equazione dell'iperbole a

$$XY = k \tag{2.3}$$

formalmente coincidente con quella dell'iperbole equilatera.
Grazie a questa osservazione si comprende come possa sussistere lo stretto legame tra iperboli anche non equilatere e progressioni geometriche.
Ritornando al testo di Gregory, poiché Y e B appartengono all' iperbole e B ne è il vertice, dalla (2.3) segue

$$X_Y Y_Y = X_B Y_B$$

che puó essere riletta, ricordando che $X_B = Y_B = KB = KA$, come

$$BK - KD(= AD) : BK = BK : YD$$

ed il risulatato segue dalla Prop. 1 e dall' unicitá del quarto proporzionale. Similmente quando si prende il punto 3 sull' iperbole e si traccia la parallela 34 all' asintoto RA deve essere

$$A4(= AK + K4 = BK + K4) : BK = BK : 34$$

che mostra l' asserto di Gregory per confronto con la Prop. 2 invocando ancora l' unicitá del quarto proporzionale.
La Proposizione 4 è una astuta costruzione geometrica che permette di quadrare la regione $SBKH$ delimitata dall' arco SB di iperbole, dall' asintoto $A4$ e dalle parallele SH e BK all' asintoto AR, dove B é il vertice dell'iperbole, per cui $AKBR$ in effetti è un rombo, dal momento che $X_B = Y_B$. Sia 5 il punto di intersezione tra SH e la parallela ad $A4$ condotta dal vertice B. Sul segmento $5H$ Gregory costruisce una progressione geometrica di primo termine $5H$ e di secondo termine $6H$, dove il punto 6 è l' intersezione di $5H$ con il segmento di retta KR. Dai punti L, N, ecc della progressione Gregory traccia degli archi di curva come LCK ed NOK che passano tutti per il punto K(trilineo quadratico, trilineo cubico, ecc). Gregory cerca di mostare l' equivalenze tra il quadrilatero misto $SBKH$ e l' unione ω del parallelogramma $5K$, del triangolo $6HK$, del trilineo quadratico LHK, di quello cubico NHK e cosí via. La dimostrazione è per assurdo in quanto Gregory suppone che l' area dello spazio iperbolico $SBKH$ differisca da ω per una quantitá $\alpha > 0$.
Alla Proposizione 4 seguono quattro *Consectaria* che ne illustrano le conseguenze ed applicazioni ai logaritmi. Nel primo Gregory trova lo sviluppo in serie dell' area dello spazio iperbolico $SBKH$ in termini dell' area A_0 del parallelogrammo BH(figura 2.16). Per la Prop. 4, $SBKH$ è equivalente ad ω che è ottenuto sommando ad A_0 le aree del triangolo $6KH$ e tutti i trilinei successivi. Se $q = \frac{KH}{KB} < 1$, l' area del triangolo FKH è $A_1 = \frac{q}{2}A_0$; è possibile mostrare che il trilineo quadratico di equazione $Y = kX^2$, con $k = \frac{1}{KB}$, sottende un' area $A_2 = \frac{q^2}{3}A_0$ e cosí via ottenendo lo sviluppo

$$A(SBKH) = A_0\left(1 + \frac{1}{2}q + \frac{1}{3}q^2 + \frac{1}{4}q^3 + \frac{1}{5}q^4 + \frac{1}{6}q^5 + \dots\right)$$

che coincide con lo sviluppo di $\ln(1 - q)$ se si osserva che A_0 è proporzionale a q e si porta il fattore q nello sviluppo. Lo sviluppo di

$\ln(1+l)$ forma l' oggetto del secondo *Consectarium* dove Gregory considera la regione iperbolica $BK34$ e giunge a dimostrare che

$$A(BK34) = A'_0 \left(1 - \frac{1}{2}l + \frac{1}{3}l^2 - \frac{1}{4}l^3 + \frac{1}{5}l^4 - \frac{1}{6}l^5 + \dots\right)$$

dove A'_0 ora è l' area del parallelogramma KQ e $l = \frac{34}{KB}$.
Nei *Consectaria* 3 e 4 Gregory considera il caso $q = l$ ottenendo, rispettivamente, gli sviluppi di $A(SBKH) - A(BK43)$ e $A(SH43) = A(SBKH) + A(BK43)$ nella forma

$$A(SBKH) - A(BK43) = \beta \left(l^2 + \frac{1}{2}l^4 + \frac{1}{3}l^6 + \frac{1}{4}l^8 + \dots\right)$$

e

$$A(SH43) = 2\beta \left(l + \frac{1}{3}l^3 + \frac{1}{5}l^5 + \frac{1}{7}l^7 + \frac{1}{9}l^9 + \dots\right)$$

che convergono piú rapidamente dello sviluppo di Mercator: in particolare, il primo sviluppo coincide con quello di $\log\left(\frac{1-l}{1+l}\right)$ ed è noto come *serie di Gregory.*
Alcuni dei risultati di Mercator e Gregory furono ottenuti indipendentemente da Isaac Newton(1642-1727) che si occupó di logaritmi a livello teorico e computazionale, di cui consideriamo, per concludere il nostro discorso, il metodo di inversione di una serie per ottenere un numero di cui sia noto il logaritmo, illustrato con un certo dettaglio nel *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum infinitas*, scritto nel 1669 ma pubblicato solo nel 1711. Newton considera l'iperbole di equazione $y = \frac{1}{1-x}$ e determina $x < 1$ tale che un valore z assegnato rappresenti l'area compresa tra un arco dell'iperbole, l'asse delle ascisse, l'asse delle ordinate e la sua parallela passante per il punto $(x, 0)$. Newton pone $z := -\log(1-x)$, detta *area hyperbolae* e considera la serie di Mercator

$$z = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}, \tag{2.4}$$

troncata al termine x^5. Elevando la (2.4) al quadrato ed eliminandotutti i termini contenenti potenze superiori ad x^5 egli ottiene

$$z^2 = x^2 + x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^5 \tag{2.5}$$

e procede con lo stesso criterio, a moltiplicare tra loro(2.4) e (2.5) ricavando

$$z^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{7}{4}x^5. \tag{2.6}$$

Elevando al quadrato (2.5) e moltiplicando il risultato per (2.4), Newton ottiene infine

$$z^4 = x^4 + 2x^5 \quad \text{e} \quad z^5 = x^5 \tag{2.7}$$

e quindi osserva come, grazia a (2.4) e (2.5), la combinazione $z - \frac{1}{2}z^2$ non contenga x^2

$$z - \frac{1}{2}z^2 = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{24}x^4 - \frac{2}{15}x^5.$$

Confrontando questo risultato con (2.6) si ha

$$z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 = x + \frac{1}{24}x^4 + \frac{3}{40}x^5$$

che, combinata con le (2.7) permette di ottenere

$$z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 = x$$

che fornisce x in funzione di z con il grado di approssimazione scelto in partenza: si riconosce nel membro di sinistra il Polinomio di Taylor di quinto grado per $1 - e^{-z}$ in un intorno di $z = 0$, cioé della funzione inversa di $z = -\log(1 - x)$.

Capitolo 3

Sviluppi dei logaritmi

3.1 La controversia sui logaritmi dei numeri negativi

L' impossibilitá di definire in campo reale il logaritmo di un numero negativo fu argomento di discussione scientifica che infiammó i migliori scienziati europei: da Leibniz(1646-1716) a Johann Bernoulli(1667-1783), da Jean Le Ronde D' Alembert(1717-1783) a Leonhard Euler (Eulero, 1707-1783). La conclusione del dibattito si ebbe solo quando Eulero elaboró l' estensione del concetto di logaritmo ai numeri complessi mostrando anche che ad ogni numero corrispondono un' infinitá di valori possibili per il logaritmo. Ma andiamo con ordine, benché collegata ai logaritmi dei numeri immaginari, la controversia sui numeri negativi ebbe origine da un' altra questione.
I numeri negativi sono *meno del nulla* cioé dello zero?
Se cosí fosse, la proporzione

$$1 : -1 = -1 : 1$$

sarebbe impossibile in quanto nel rapporto a sinistra il numero piú grande sta al piú piccolo, mentre a destra è il piú piccolo che sta al piú grande. A tal proposito Leibniz pubblicó un articolo sugli *Acta Eruditorum* del 1712 in cui si esprimeva in questo modo
Dissi giá che non mi sembravano dei veri rapporti quelli nei quali una quantitá minore di nulla è l' antecedente od il conseguente, anche se

nel calcolo li si puó utilizzare in sicurezza e con frutto, come altre quantitá immaginarie.
Per Leibniz un rapporto va considerato immaginario quando non ha logaritmo. Questo è il caso del rapporto $(\frac{-1}{1})$ perché, dice Leibniz, se ammettesse logaritmo avremmo

$$\log(\frac{-1}{1}) = \log(-1) - \log(1) = \log(-1).$$

Per Leibniz $\log(-1)$ non puó essere positivo, visto che sono i logaritmi dei numeri maggiori di 1 che danno luogo a logaritmi positivi, né puó essere un numero negativo, in quanto sono i numeri positivi minori dell' unitá cui corrispondono logaritmi negativi. Non resta che concludere che $\log(-1)$ è immaginario, dove con tale termine intende sia non esistente sia un numero del tipo $\sqrt{-1}$. A questo punto Leibniz scrive a Bernoulli una breve lettera, datata 16 marzo 1712 in cui lo informa sull' argomento.
La risposta di Bernoulli è contenuta in una lettera del 25 maggio 1712 dove dissente dall' argomento di Leibniz perché a suo dire x e $-x$ hanno lo stesso logaritmo. Egli considera il differenziale $\frac{dx}{x}$ del logaritmo e poiché

$$\frac{dx}{x} = \frac{-dx}{-x}$$

ottiene

$$d\log(x) = \frac{dx}{x} = \frac{-dx}{-x} = d\log(-x)$$

che per Bernoulli dimostra l' uguaglianza

$$\log(x) = \log(-x)$$

Come conseguenza, Bernoulli afferma che, similmente all' iperbole, anche la curva logaritmica ha due rami distinti
Da ció puoi vedere che la curva logaritmica ABC (figura 3.1) ha una compagna $\alpha\beta\gamma$ come, ad esempio, un' iperbole ha la sua opposta. In questo modo, preso BE come unitá, EF non è soltanto il logaritmo dello stesso CF ma anche di γF che indica l' opposto del numero precedente.

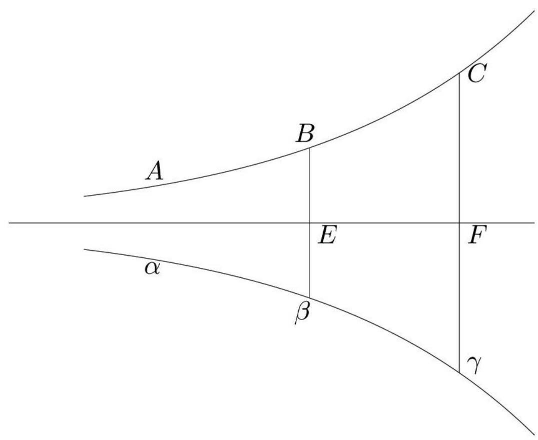

Figura 3.1: I due rami della curva logaritmica descritta da Bernoulli nella lettera del 25 maggio 1712.

Bernoulli applica identitá valide solo all' interno del dominio di definizione della funzione logaritmo, inoltre, come evidenzierá Eulero, sbaglia nel dedurre l' uguaglianza di due funzioni a partire dall' uguaglianza dei loro differenziali.
Leibniz nella lettera di risposta del 30 giugno 1712 mescola l'inammissibilitá al ricorso dei differenziali effettuata da Bernoulli ad altre osservazioni poco concludenti. Ad esempio, basa l'impossibilitá di definire $\log(-2)$ sul fatto che, se ció fosse possibile, esisterebbe anche $\log\sqrt{-2}$ che ne è la metá. Contesta anche l'argomento geometrico di Bernoulli non ammettendo la possibilitá di un comportamento discontinuo per la funzione logaritmo.
Nella risposta del 13 agosto 1712 Bernoulli non dice nulla sulla inammissibilitá dell' argomento basato sui differenziali ma, grazie alla debolezza delle altre argomentazioni addotte da Leibniz, rafforza il convincimento che x e $-x$ hanno lo stesso logaritmo. Egli sostiene che $\log\sqrt{-2}$ non è la metá di $\log(-2)$. Infatti, $\log\sqrt{2}$ è la metá di $\log 2$ perché $\sqrt{2}$ è medio proporzionale tra 1 e 2, mentre $\sqrt{-2}$ non è medio proporzionale tra -1 e -2. Inoltre per quanto rigurada l' argomento geometrico sostiene che vi siano molti esempi di curve con due rami distinti separati da un asintoto e riporta come esempio la concoide di

Nicomede.
Nella risposta di Leibniz del 18 settembre 1712, tralasciato ogni argomento geometrico, Leibniz ricomincia dalla definizione di logaritmi come progressione aritmetica associata ad una geometrica e, considerando il sistema di logaritmi in base 2 osserva che, benché sia $+2$ che -2 elevati al quadrato danno entrambi $+4$, tuttavia solo il primo numero appartiene ad una progressione geometrica contenente $+2$. Da per scontato che la progressione parta da $+1$, visto il modo in cui introduce i logaritmi in base 2. L'impossibilitá a dare simultaneamente significato ai logaritmi di 2 e -2 viene mostrata legando esplicitamente logaritmi ad esponenziali. Egli afferma che l'equazione $2^e = x$ equivale ad $e = \log_2 x$, anche se non introduce la base nella notazione, e non puó essere risolta per e quando $x = -2$. Inoltre ritiene che i logaritmi di numeri negativi vadano respinti per altri due motivi. Il primo coinvolge di nuovo $\sqrt{-2}$ che, avendo quadrato -2 dovrebbe avere logaritmo pari ad $\frac{1}{2}\log(-2)$, se quest' ultimo ammettesse logaritmo. Ora, poiché $\sqrt{-2}$ è immaginario, lo è anche il suo logaritmo e dunque anche il doppio di quest' ultimo, cioé $\log(-2)$. Come ulteriore argomento osserva come, nelle corrispondenze di operazioni tra numeri e logaritmi, come al prodotto tra numeri si associa la somma di logaritmi, alla divisione la differenza ecc, non vi sia corrispondente alcuno all' operazione che manda un numero nel suo opposto. Infine, Leibniz tiene a mostrare che, reale od immaginario che sia, $\log\sqrt{-2}$ deve essere la metá di $\log(-2)$ semplicemente perché $\sqrt{-2}$ è medio proporzionale tra $+1$ e -2.
Bernoulli non solo non trova nel ragionamento di Leibniz elementi incompatibili con l' esistenza dei logaritmi di numeri negativi ma nella successiva lettera dell' 11 novembre passa al contrattacco proponendo una costruzione dei due rami della curva logaritmica, basata sul legame tra logaritmi ed area sottesa da un' iperbole equilatera. L'unico punto su cui è d' accordo con Leibniz è che non è possibile ottenere numeri negativi in una progressione geometrica che, partendo dall' unitá, abbia ragione positiva. Con questo egli accetta che non esistano simultaneamente logaritmi di numeri positivi e negativi. Ciononostante, nulla vieta di costruire una progressione geometrica che parta da -1 e sia formata da termini negativi e ricavare ancora che $+n$ e $-n$ hanno lo stesso logaritmo. Di questo Bernoulli crede di fornire una

dimostrazione geometrica considerando i due rami PQG e pqg (figura 3.2) di un'iperbole equilatera e costruendo la curva logaritmica per punti, sfruttando il legame tra logaritmi ed area sottesa da un arco di iperbole. Fissato un punto P di riferimento sull'iperbole, l'area dei

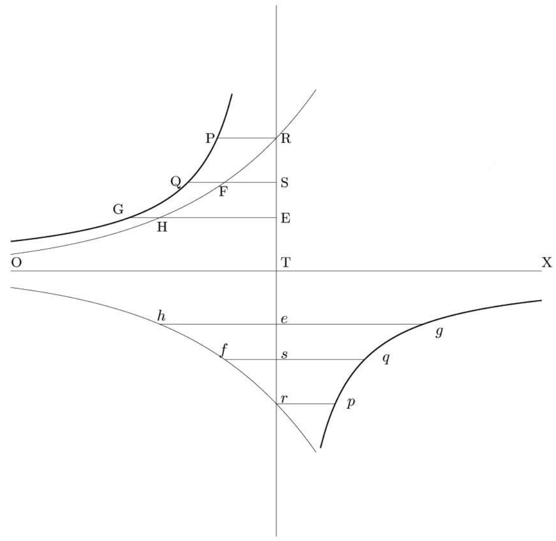

Figura 3.2: Dimostrazione geometrica dell' uguaglianza $\log(+x) = \log(-x)$ proposta da Bernoulli nella lettera dell' 11 novembre 1712.

settori come $SQPR$ e $EGPR$ cresce sempre piú man mano che la retta EG si avvicina all' asintoto OT, visto che il logaritmo tende all' infinito. Nulla impedisce di far passare la retta EG lungo il ramo pqg dell'iperbole. L'area di $egXT \cup OTPR$ è composta da una parte infinita e positiva e da una infinita negativa. Preso e tale che $TE = Te$, le parti infinite *si elidono* e resta l'area $EGPR$. Se ora si prende r sul ramo di iperbole pqg tale che $rT = TR$ Bernoulli conclude che le aree sottese da $EGPR$ ed $egpr$ sono uguali e dunque

$$\log(x) = \log(-x).$$

Il punto debole del ragionamento è proprio avere assunto $+\infty - \infty = 0$. Curiosamente peró, negli attacchi rivolti da molti matematici all' argomento bernoulliano, questa obiezione non fu mai mossa.

Nella lettera del gennaio 1713 Leibniz fissa i punti condivisi e ribadisce gli argomenti piú forti a favore della propria tesi, saldando ancora i concetti di logartimo ed esponenziale.
Non voglio null' altro rispetto a quanto mi concedi, cioé che non sia possibile per i logaritmi un passaggio da una serie di numeri positivi ad una di numeri negativi. E cosí se nell' equazione generale $2^e = x$ *è* $e = 0$ *quando* $x = 1$ *ed* $e = 1$ *quando* $x = 2$ *non è possibile assegnare* e *quando* $x = -1$.
Nella risposta di Bernoulli, datata 28 febbraio 1713, egli dichiara che non vi è nulla di straordinario nell'impossibilitá di definire il logaritmo del medio proporzionale tra un numero positivo ed uno negativo come in una curva del tipo in figura (3.3), simmetrica rispetto all'asse delle ascisse , dove GH è medio proporzionale tra i numeri positivi BC e DE. Benché GH non puó essere medio proporzionale tra BC

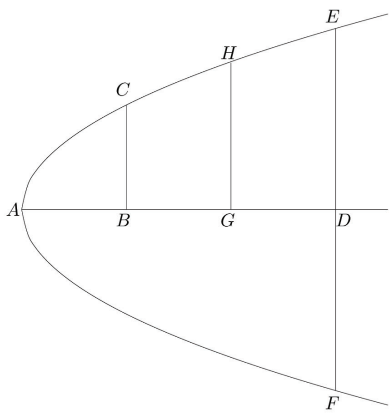

Figura 3.3: Curva con due rami simmetrici allegata da Bernoulli alla lettera del 28 febbraio 1713.

e $DF = -DE$, la curva passa per F. Una tale proprietá è condivisa dalla curva logartimica con i suoi rami simmetrici.
Infatti, nelle mie ultime lettere mostrai che davvero la curva logaritmica ha due rami situati da parti opposte rispetto all' asse cosicché allo stesso logaritmo corrispondono due ordinate ovvero due numeri, uno positivo e l' altro negativo. E ció è quanto sembravi voler negare, ovvero che i numeri negativi hanno logaritmo.

Bernoulli infine concede a Leibniz che, posto $x = 1$ in $2^e = x$ con $e = 0$ e $x = 2$ con $e = 1$ non c'è spazio per logaritmi di numeri negativi. Ma per lui nulla vieta di supporre che ad $x = -1$ corrisponda $e = 0$ e di conseguenza far corrispondere un valore di e ad ogni numero negativo. Leibniz cerca di sfruttare l' appiglio concessogli da Bernoulli per mostrare l' inammisibilitá della posizione $x = -1$ ed $e = 0$ nell' equazione $2^e = x$ e nella lettera del 26 aprile 1713 espone cinque argomenti basati ancora sull' estensione di proprietá algebriche dei logaritmi di numeri positivi a logaritmi di numeri negativi.
Vedi da tutto questo che l' esistenza dei logaritmi di numeri negativi non solo è poco naturale ed inutile ma anche inammissibile. Ció segue anche , come dissi altrove, dal fatto che non sono ammissibili proporzioni tra quantitá negative e che non si puó affermare che -1 sta ad $+1$ come $+1$ sta a -1... quando nel primo rapporto il maggiore sta al minore mentre nel secondo il minore sta al maggiore. Dunque, anche se è vero che le due frazioni $\frac{+1}{-1}$ e $\frac{-1}{+1}$ sono uguali, queste frazioni non sono veri rapporti. Da questo si capisce che sono stati dimenticati alcuni fondamenti dell' analisi.
Bernoulli nella risposta del 7 giugno 1713 risponde punto per punto alle cinque obiezioni di Leibniz, contestando l'impianto dimostrativo che fa ricorso alle proprietá algebriche dei logaritmi che sono valide solo per argomenti positivi.
Nelle ultime due lettere Leibniz tronca la discussione affermando il proprio disinteresse verso un sistema di logaritmi che non abbia le proprietá algebriche dei logaritmi di numeri positivi. Egli si accontenta di aver convinto l'amico del fatto che, accettata $e = 0$ come soluzione di $2^e = +1$, non sia possibile trovare soluzione (reale) a $2^e = -1$.
In risposta, Bernoulli il 29 luglio accondiscende a chiudere la controversia accontentandosi di aver strappato a Leibniz l' affermazione che la scelta di far partire le progressioni geometriche su cui costruire un sistema di logaritmi da $+1$ è arbitraria e che, scelto -1 come origine delle progressioni, i logartimi dei numeri negativi sono ammissibili, come egli ritiene aver mostrato con gli argomenti geometrici addotti in precedenza.
Il carteggio si chiude senza significativi passi in avanti in quanto i due studiosi restarono fermi sulle loro posizioni e ciascuno non riuscí a trovare argomenti abbastanza forti per convincere l'altro. Leibniz non si

occupó piú della questione e morí tre anni dopo la fine della controversia. Johann Bernoulli invece entró ancora sull' argomento quindici anni dopo con il giovane Eulero che era stato suo allievo in Svizzera. Lo scambio epistolare ebbe luogo tra il novembre 1727 ed il maggio 1729 quando Bernoulli aveva sessanta anni, mentre Eulero era appena ventenne. Il carteggio ebbe inizio da una domanda rivolta da Eulero a Bernoulli in una lettera datata 5 novembre 1727 in cui riporta di essersi imbattuto per caso nello studio della funzione $y = (-1)^x$ e di avere trovato difficoltá nel tracciarne il grafico in quanto y è ora positiva, ora negativa ed ora immaginaria. Tutto ció suggerisce ad Eulero che tale grafico non sia rappresentabile da alcuna curva continua.
Nella risposta del 9 gennaio 1728, Bernoulli ripresenta l' argomento per l' uguaglianza

$$\log(n) = \log(-n)$$

basato sui differenziali tale e quale lo aveva proposto a Leibniz quindici anni prima. Partendo da $y = (-n)^x$ si ha $\log(y) = x\log(-n)$ e, passando ai differenziali,

$$\frac{dy}{y} = \log(-n)dx = \log(+n)dx$$

che fornisce $\log(y) = x\log(n)$ da cui, per passaggio agli esponenziali, $y = n^x$. Preso $n = \pm 1$, egli puó concludere che $y = (\pm 1)^x = 1$.
Nella risposta di Eulero del 10 dicembre 1728, dichiara di avere argomenti sia a favore che contro l'esistenza di logaritmi per numeri negativi ma comunque affossa l' argomento di Bernoulli, evidenziando l'impossibilitá di dedurre un' uguaglianza tra funzioni a partire da una uguaglianza tra differenziali. Presi per esempio x ed $x + a$, con a costante, hanno ugual differenziale ma sono funzioni diverse. Pertanto, non è lecito concludere che $l(-x) = l(x) + l(-1)$ se non dopo aver dimostrato per altra via che $l(-1) = 0$. Tuttavia l' argomento a favore di $l(-x) = l(x)$ è originale e presenta il germe delle future ricerche di Eulero sui logaritmi di numeri immaginari. Ponendo $z := \log x^2$ si ha $\frac{1}{2}z = \log\sqrt{x^2}$ e siccome $\sqrt{x^2} = \pm x$ sembra che $\frac{1}{2}z$ coincida con $\log x$ e con $\log(-x)$.
Si potrebbe obiettare che xx ha due logaritmi, ma chi affermasse questo dovrebbe concludere che ne ha infiniti.
Eulero ritornerá su tale affermazione solo vent' anni dopo.

La risposta di Bernoulli del 18 aprile 1729 e la sucessiva replica di Eulero del 16 maggio non aggiungono molto, chiudendo in questo modo lo scambio epistolare per quel che riguarda i logartimi immaginari.

3.2 La Teoria di Eulero sui logaritmi dei numeri complessi

Il carteggio contenente la controversia tre Leibniz e Johann Bernoulli sui logaritmi dei numeri negativi fu pubblicato solo nel 1745 e infiammó il mondo matematico che si divise in opposte frazioni. Eulero fu un attento lettore del carteggio e riportó gli argomenti addotti dai due matematici a sostegno delle proprie tesi. Il suo commento è contenuto in due lavori datati 1745 e 1749. Il primo di questi lavori apparve postumo solo nel 1862 mentre il secondo venne pubblicato nel 1751. Quest' ultimo lavoro è diviso in due parti: la prima dedicata all' esposizione critica della controversia e la seconda alla definizione dei logaritmi per numeri negativi ed immaginari, sviluppando l' idea giá abbozzata nel suo carteggio con Bernoulli vent' anni prima. Nell' introduzione Eulero descrive l' imbarazzo che la controversia genera tra i matematici i quali sono abituati a dispute nell' ambito della matematica applicata ma non nel campo della matematica pura, dove la veritá o la falsitá di una proposizione dovrebbe essere sempre dimostrabile.
Siccome la teoria dei logaritmi appartiene senza dubbio alla matematica pura, si rimarrá molto sorpresi nel sapere che è stata sinora terreno di controversie tanto confuse che, qualunque partito uno prenda, cade sempre in contraddizioni da cui sembra impossibile risollevarsi. Tuttavia, se la veritá deve stare in piedi ovunque, non c'è dubbio che per quanto conclamate possano apparire, queste contraddizioni non possono che essere apparenti e che non dovrebbero mancare gli strumenti per salvare la veritá, anche se non sappiamo affatto dove procurarceli.
Eulero passa poi in rassegna l' opinione di Bernoulli e le obiezioni di Leibniz cui ne aggiunge di proprie. All' argomento

$$dl(x) = \frac{dx}{x} = \frac{-dx}{-x} = dl(-x)$$

da cui Bernoulli deduce l' uguaglianza $l(x) = l(-x)$ Eulero contrapppone la stessa critica che gli aveva mosso vent' anni prima: non è lecito concludere l' uguagllianza di due funzioni dalla uguaglianza dei loro differenziali. Questa critica comporta che la curva logaritmica non dovrebbe avere solo due rami, ma infiniti rami, uno per ogni possibile valore di n. Un' altra obiezione a Bernoulli riguarda l' argomento che Eulero ritiene il piú forte in favore dell' esistenza dei logaritmi dei numeri negativi, cioé il fatto che, essendo $(-a)^2 = (+a)^2$ si arriva a concludere che $2l(-a) = 2l(+a)$ e da qui a dire che $l(-a) = l(+a)$. Tuttavia, se ció fosse vero, poiché $(a\sqrt{-1})^4 = a^4$ ed $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}a\right)^3 = a^3$ si deve anche concludere che

$$l(a) = l\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}a\right) = l(a\sqrt{-1}),$$

scuotendo l' edificio della teoria dei logaritmi alle fondamenta.
A questo punto Eulero enuncia le idee di Leibniz in materia e non sembra aver dubbio che, qundo Leibniz afferma che il logaritmo di un numero negativo è *impossibilis*, egli intenda con ció dire immaginario. Anziché esplorare il pensiero di Leibniz, Eulero presenta tre ragioni che sembrano negare la realtá dei logartimi di numeri negativi. Il primo argomento poggia sulla serie di Mercator

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \dots$$

che, quando si pone $x = -2$, fuori dal raggio di convergenza della serie, fornisce lo sviluppo divergente

$$l(-1) = -2 - \frac{1}{2}4 + \frac{1}{3}8 - \frac{1}{4}16 + \frac{1}{5}32 - \frac{1}{6}64 + \dots$$

che è incompatibile con $l(-1) = 0$. Tuttavia nella successiva obiezione Eulero riconosce lo scarso valore persuasivo di questo primo argomento, dal momento che il comportamento di una serie fuori dall' insieme di convergenza puó dare origine a contraddizioni. Il secondo motivo a favore della tesi di Leibniz poggia sull' equivalenza $y = lx \Leftrightarrow x = e^y$ dimostrata dall' osservazione che, poiché $le = 1$, da $y = lx$ segue $yle = 1lx$ e dunque $le^y = lx$ che equivale all' asserto. Quindi è chiaro che è impossiblie che si ottenga un valore negativo per x quando y assume un qualunque valore reale. Tuttavia, questo argomento puó anche condurre a conclusioni di segno opposto in quanto, se $y = \frac{m}{2n}$, con m ed n interi, allora $x = e^{m:(2n)} = \pm\sqrt{e^{m:n}}$ il che porterebbe a concludere che i numeri x e $-x$ hanno lo stesso logaritmo. La motivazione piú forte addotta da Eulero fa leva sullo sviluppo covergente

$$x = e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{24}y^4 + \dots$$

che, insistendo a porre come Bernoulli $x = -1$ ed $y = 0$, fornisce il risultato assurdo $-1 = +1$.
Queste obiezioni rendono le idee di Leibniz piú plausibili. Tuttavia l'inconveniente che, se $l(-1)$ è un numero immaginario, lo sará anche $2l(-1) = l(+1)$, rimane ed è necessario un radicale cambio di prospettiva per restituire solido fondamento alla teoria dei logaritmi. Questo è l'obiettivo che Eulero svilupperá soprattutto in altre opere. Egli sente infatti il bisogno di un'idea completamente nuova ed il lavoro del 1749 la presenta all'improvviso. Per giustificare gli infiniti logaritmi attribuiti ad un dato numero, Eulero prende spunto dall' esistenza di piú radici corrispondenti ad un numero assegnato.
Mi sono immaginato che, cosí come una quantitá ammette due radici quadrate, tre radici cubiche, quattro radici biquadratiche, ecc una quantitá potrebbe anche avere due metá, tre terze parti, quattro quarte parti, ecc una sola delle quali sarebbe reale mentre le altre sarebbero immaginarie. Posto $ly = x$, immaginavo che

$$l\sqrt{y} = \frac{1}{2}x \quad ed \quad l(-\sqrt{y}) = \frac{1}{2}x'$$

e che $\frac{1}{2}x$ e $\frac{1}{2}x'$ potessero essere diversi, benché il doppio dell' uno come dell' altro fosse sempre uguale ad x. Allo stesso modo, per le tre radici cubiche di y sarebbe

$$l\sqrt[3]{y} = \frac{1}{3}; \quad l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{y} = \frac{1}{3}x' \quad ed \quad l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{y} = \frac{1}{3}x''$$

dove $\frac{1}{3}x$, $\frac{1}{3}x'$ e $\frac{1}{3}x''$ sono numeri diversi, il primo dei quali, $\frac{1}{3}x$ reale e gli altri due $\frac{1}{3}x'$ e $\frac{1}{3}x''$ immaginari, benché il triplo di ognuno sia uguale a x.
Egli prosegue poi con audace ostinazione e chiarisce le sue intenzioni in questi termini

Affermo dunque che, benché sia determinato il numero il cui logaritmo è uguale a 1, ogni numero ha un' infinitá di logaritmi tutti immaginari fuorché uno, se il numero è positivo; se peró il numero è negativo od immaginario, tutti i logaritmi saranno parimenti immaginari. Come conseguenza, il logaritmo dell' unitá non sará solo uguale a zero ma ci saranno ancora una infinitá di quantitá immaginarie, ciascuna delle quali rappresenta il logaritmo dell' unitá bene tanto quanto zero. Siano dunque

$$0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, ecc.$$

tutti i logaritmi dell' unitá e, dal momento che il logaritmo della radice quadrata è la metá del logaritmo della potenza, poiché $\sqrt{1}$ *vale tanto* $+1$ *quanto* -1*, i logaritmi del primo valore* $+1$ *saranno*

$$0, \frac{1}{2}\beta, \frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}\theta, ecc.$$

ed i logaritmi dell' altro valore -1 *saranno:*

$$\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\gamma, \frac{1}{2}\epsilon, \frac{1}{2}\eta, ecc.$$

che sono diversi dai precedenti benché moltiplicati per due diano i logaritmi dell' unitá. Similmente, se si prendono le radici cubiche si avrá

$$l1 = 0, \frac{1}{3}\gamma, \frac{1}{3}\zeta, \frac{1}{3}\iota, ecc.$$

$$l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{3}\alpha, \frac{1}{3}\delta, \frac{1}{3}\eta, ecc.$$

$$l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{3}\beta, \frac{1}{3}\epsilon, \frac{1}{3}\theta, ecc.$$

e questa considerazione ha giá eliminato la maggior parte delle difficoltá che ci hanno ostacolato in precedenza.

Questo è il radicale cambiamento di prospettiva operato da Eulero, la rimozione dell' ipotesi, tacitamente ammessa da Nepero in poi, che ad ogni numero competesse un unico logaritmo. Il suo progetto è quindi associare infinti logaritmi ad un numero. L' analogia che lo guida è il legame esistente tra archi di circonferenze e logaritmi, in quanto considera la circonferenza piú adatta, perché meglio studiata, della curva

logaritmica per risolvere in tutta generalitá il problema. Cosí come l' assegnazione del seno e del coseno di un arco individua un' infinitá di archi, lo stesso deve accadere per i logaritmi.
Sia φ un arco qualsiasi di una circonferenza che supporró avere raggio uguale a 1. Sia x il seno di questo arco ed y il coseno, cosicché $y = \sqrt{(1-x^2)}$; detta 2π la lunghezza di tale circonferenza, tutti gli archi compresi nell' espressione generale $2n\pi + \varphi$ avranno non solo lo stesso seno x ma anche lo stesso coseno $y = \sqrt{(1-x^2)}$, a patto che n indichi un numero intero arbitrario. Poiché $d\varphi = \frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, se si pone $x = z\sqrt{-1}$, si avrá

$$d\varphi = \frac{dz\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+z^2)}}$$

dalla quale attraverso una serie di passaggi e razionalizzazioni si arriva all' equazione

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{-1}} l(y + x\sqrt{-1}).$$

L' equazione appena trovata, che esprime il rapporto tra l' arco φ ed il suo seno e coseno, sará valida anche per tutti gli altri archi che hanno lo stesso seno x e lo stesso coseno y; di conseguenza avremo

$$\varphi \pm 2n\pi = \frac{1}{\sqrt{-1}} l(y+x\sqrt{-1}) \quad \textit{e dunque} \quad l(y+x\sqrt{-1}) = (\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1},$$

da cui è chiaro che lo stesso numero $y + x\sqrt{-1}$ corrisponde ad una infinitá di logaritmi, tutti racchiusi entro la formula generale $(\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}$ in cui come n si puó prendere un numero intero a piacere. Siccome x è il seno ed y il coseno dell' arco φ, posti $x = \sin\varphi$ ed $y = \cos\varphi$, noi avremo l' uguaglianza

$$l(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}) = (\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}.$$

Analoga alla celebre rappresentazione

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Questa prima parte del suo lavoro si chiude con una serie di esempi fino a giungere al cuore dell'opera dove Eulero dimostra il seguente teorema:

Teorema 3.1. *Esiste sempre una infinitá di logaritmi che corrispondono ad ogni numero assegnato: in altre parole, se y indica il logaritmo del numero x, dico che y racchiude un'infinitá di valori diversi.*

Dimostrazione. Dato il numero ω infinitamente piccolo, vale l' uguaglianza $\ln(1+\omega) = \omega$ da cui segue, per un numero n arbitrario, che $y := \ln(1+\omega)^n = n\omega$. Poiché $x := (1+\omega)^n$ possa descrivere un numero arbitrario occorre prendere $n \gg 1$, visto che $\omega \ll 1$. Ora, siccome $\omega = x^{\frac{1}{n}} - 1$ si vede che $y = nx^{\frac{1}{n}} - n$ che tende a $\ln x$ quanto piú grande è n. Ma poiché $x^{\frac{1}{2}}$ ha due valori distinti, $x^{\frac{1}{3}}$ tre, $x^{\frac{1}{4}}$ quattro, si vede che, al crescere di n i valori possibili per y aumentano all' infinito. □

L' argomento di Eulero fu attaccato ripetutamente perché scegliendo $\omega \ll 1$, il numero $1+\omega$ non cambia segno e dunque non si puó mai ottenere un numero negativo ad argomento del logaritmo, anche facendo tendere n all'infinito.
Infine Eulero risolve quattro importanti problemi:

- Determinare *tutti* i logaritmi di un assegnato numero positivo $+a$.
- Determinare *tutti* i logaritmi di un assegnato numero negativo $-a$.
- Determinare *tutti* i logaritmi di un assegnato numero immaginario.
- Trovare il numero che corrisponde ad un assegnato logaritmo.

Quando si tratta di ottenere i logaritmi di un numero reale positivo a, Eulero parte dal suo logaritmo reale A ottenuto dalle tavole, per osservare che, siccome $a = 1 \cdot a$, si deve avere $la = l1 + A$ cosicché il problema si riduce a trovare tutti i logaritmi di $+1$. Posto $x = 1$ si tratta di risolvere in y l' equazione

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - 1 = 0$$

dove n è un numero intero arbitrariamente grande. Ora, poiché i fattori del binomio $p^n - q^n$ si trovano risolvendo in p l' equazione

$$p^2 - 2pq\cos\left(\frac{2\lambda\pi}{n}\right) + q^2 = 0$$

dove il numero intero λ puó assumere tutti i valori possibili da 0 a $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$ si avrá in generale

$$p = q\left[\cos\left(\frac{2\lambda\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2}{\lambda}\pi n\right)\right]$$

che, posto $p = 1 + \frac{y}{n}$ e $q = 1$ consente di ottenere, per un generico n

$$1 + \frac{y}{n} = \cos\left(\frac{2\lambda\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\lambda\pi}{n}\right).$$

Inoltre, siccome n è grande a piacere, si possono utilizzare le espressioni approssimate $\cos\left(\frac{2\lambda\pi}{n}\right) = 1$ e $\sin\left(\frac{2\lambda\pi}{n}\right) = \frac{2\lambda\pi}{n}$ per concludere che

$$y = \ln(1) = \pm 2\lambda\sqrt{-1}, \qquad \lambda \quad \text{numero pari.}$$

Esiste dunque un solo logaritmo reale di $+1$, che vale 0, mentre tutti gli altri sono numeri complessi. L' argomento di Eulero è valido peró a patto di fissare λ e poi mandare n all' infinito.
Il problema successivo, in cui occorre calcolare il logaritmo di un numero negativo $-a$ chiarisce la controversia sui logaritmi dei numeri negativi. Scritto $-a = -1 \cdot a$, il problema si riduce a trovare i logaritmi di -1. Con lo stesso procedimento di prima, tale logaritmo y risolve l' equazione

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n + 1 = 0$$

che ha la forma $p^n + q^n = 0$ ed i cui fattori sono le radici dell' equazione

$$p^2 - 2pq\cos\left(\frac{(2\lambda - 1)\pi}{n}\right) + q^2 = 0$$

dove λ è un intero arbitrario. Attraverso il procedimento seguito prima si conclude che

$$y = \pm(2\lambda - 1)i\pi$$

e pertanto $l(-a) = A \pm (2\lambda - 1)i\pi$ che non è mai un numero reale. Eulero in questo modo dá ragione a Leibniz per aver sostenuto contro Bernoulli che i logaritmi dei numeri negativi fossero immaginari. Infatti $l(-1)^2 = \pm 2(2\lambda - 1)i\pi$ rappresenta il logaritmo di $+1$ cosicché resta vero che $2l(-1) = 2l(+1)$ senza che si abbia $l(-1) = l(+1)$, cioé

tutti i logaritmi di -1 moltiplicati per 2 si ritrovano tra i logaritmi di $+1$. Similmente, si puó concludere che $2l(-a) = 2l(+a)$ senza per questo concludere che $l(-a) = l(+a)$.
Il terzo problema consiste nel determinare tutti i logaritmi di un numero immaginario. Partendo dalla rappresentazione rettangolare di un numero complesso $a + ib$ e posto $c := \sqrt{a^2 + b^2}$, Eulero introduce un angolo φ tale che

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

e che permetta di scrivere $a + ib = c(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Per utilizzare lo stesso procedimento adoperato in precedenza, Eulero mostra che

$$x := (\cos\varphi + i\sin\varphi) = \left(1 + \frac{i\varphi}{n}\right)^n$$

considerando gli sviluppi in serie di Mac Laurin di

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots \quad \text{e} \quad \cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \ldots$$

e confrontandone la somma termine a termine con lo sviluppo binomiale

$$\left(1 + \frac{i\varphi}{n}\right)^n = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \ldots$$

Posto $p = 1 + \frac{y}{n}$ e $q := \frac{1+i\varphi}{n}$, il problema si riduce a risolvere in y l' equazione

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - x = 0$$

che è ancora della forma $p^n - q^n = 0$ ma questa volta ha soluzione

$$1 + \frac{y}{n} = \left(1 + \frac{i\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{n} \pm i\sin\frac{2}{\lambda}\pi n\right)$$

da cui segue, al primo ordine in n,

$$1 + \frac{y}{n} = 1 + \frac{i\varphi}{n} \pm \frac{2\lambda\pi}{n}$$

cioé

$$y = i(\varphi \pm 2\lambda\pi).$$

In generale, osserva Eulero, i logaritmi di numeri complessi sono complessi a loro volta e, detto $C := \log c = \log\sqrt{a^2+b^2}$, i logaritmi di $a+ib$ si esprimono come

$$C + (\varphi \pm p\pi)\sqrt{-1},$$

dove p è un numero arbitrario pari. Eulero nota da questa formula che, qualora $\varphi\pi$ sia un numero razionale $\frac{\mu}{\nu}$ la potenza $(a+ib)^\nu$ è un numero reale in quanto

$$l(a+ib)^\nu = \nu C + (\mu + \nu p)\pi i$$

che, se μ è un numero pari mostra per esponenziazione che $(a+ib)^\nu = e^\nu$, mentre se μ è dispari, $(a+ib)^\nu = -e^\nu$.
Per concludere, Eulero studia il problema di trovare il numero x cui corrisponda un dato logaritmo, anche qui distinguendo tre casi, a seconda che il logaritmo proposto f sia reale, immaginario puro o complesso. Nel primo caso, se f è reale, allora $x = e^f$. Quando il logaritmo è un numero del tipo ig, posto $g = m\pi$, se m è un intero pari o dispari allora x è ± 1 altrimenti, se m non è un intero , l' antilogaritmo è un numero immaginario; preso su un cerchio di raggio unitario un arco di ampiezza g, deve essere $x = \cos g + \sqrt{-1}\sin g$. Infine, se il logaritmo è della forma $f + ig$, allora l' antilogaritmo è $x = e^f(\cos g + i \sin g)$.
Abbiamo sin qui esplorato parte della letteratura specialistica che Eulero dedicó alla teoria dei logaritmi ed abbiamo visto come questa si sia trasformata in un edificio coerente, privo delle contraddizioni in cui si dibatteva all' epoca della controversia tra Leibniz e Bernoulli. Riportiamo infine un passo tratto da uno dei manuali di analisi redatti da Eulero, che esercitó grande influenza sui matematici contemporanei come su quelli di generazioni successive: la *Introductio in Analysin infinitesimorum* pubblicata nel 1748, nella quale i logaritmi sono ormai saldati alla funzione esponenziale:
Assegnato un numero a, da qualsiasi valore dello stesso z è possibile risalire al valore di y e, viceversa, dato anche un qualsiasi valore positivo di y è possibile assegnare un conveniente valore di z in modo che $a^z = y$*; inoltre questo valore di z, finché è considerato funzione dello*

stesso y, viene detto LOGARITMO di y. La dottrina dei logaritmi infatti suppone di mettere al posto di a, che per questo è detto base dei logaritmi, un certo numero fisso; fatto questo, il logaritmo di un qualsiasi numero y è quell' esponente della potenza a^z tale che a^z è uguale ad y; si è soliti indicare il logaritmo del numero y in questo modo: ly. Pertanto se è $a^z = y$, sará $z = ly$.

3.3 Il logaritmo complesso

Come sappiamo il logaritmo naturale di un numero reale positivo x è univocamente definito dalla formula

$$e^{\log x} = x$$

che ha senso solo se $x > 0$ e inoltre definisce il logaritmo in modo univoco poiché $e^a = 1$ se e solo se $a = 0$. La definizione del logaritmo in campo complesso presenta qualche difficoltá poiché l' esponenziale non è iniettivo, infatti $e^{2\pi i n} = 1$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Tuttavia l' esponenziale complesso è un diffeomorfismo locale, ovvero è invertibile localmente, quindi in un intorno di ogni punto $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ esiste una funzione f tale che

$$e^{f(z)} = z. \tag{3.1}$$

Peró potrebbero esserci piú scelte di una tale funzione. Si definisce *ramo* di $\log z$ una funzione f olomorfa in una regione $D \subset \mathbb{C} - \{0\}$ che soddisfa (3.1). Dalla (3.1) segue che $f'(z)e^{f(z)} = 1$ e quindi che

$$f'(z) = \frac{1}{z}$$

in $\mathbb{C} - \{0\}$. Da questo segue che D non puó coincidere con $\mathbb{C} - \{0\}$, poiché, se cosí fosse, data una curva γ che gira una volta attorno all' origine ($\gamma(a) = \gamma(b)$) avremmo

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \int_\gamma f'(z)\, dz = f(\gamma(a)) - f(\gamma(b)) = 0,$$

mentre sappiamo che

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i.$$

Quindi non esiste un unico ramo del logaritmo. Infatti se su una regione D ne esiste uno allora ne esistono infiniti, poiché se f è un ramo del logaritmo anche $f_n(z) = f(z) + 2\pi i n$ lo è per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Indichiamo con $\log_{(n)} z$ i vari rami, tutti definiti in D. I diversi rami si distinguono, ad esempio, per il loro valore in un punto di D. Se D è $\mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$ allora possiamo distinguerli per i loro valori in $z = 1$. Tutte le possibilitá sono $\log_{(n)} 1 = 2\pi i n$. Per convenzione denotiamo $\log z := \log_{(0)} z$. Usando la rappresentazione esponenziale dei numeri complessi $z = \rho e^{i\theta}$, con l' angolo $-\pi < \theta < \pi$, abbiamo che

$$\log z = \log \rho + i\theta.$$

Dalla (3.1) possiamo anche dare un' altra definizione di ramo del logaritmo. Infatti sia $D = \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$ e sia $\gamma_{1,z}$ una curva dentro D che collega 1 ad un punto z. Allora si ha che

$$\log_{(n)} z = \int_{\gamma_{1,z}} \frac{d\xi}{\xi} + 2\pi n i.$$

Questa definizione è indipendente dalla scelta della curva γ, poiché D è semplicemente connesso. Da questa definizione, inoltre, si nota che $\log_{(n)} z$ è olomorfa e ha per derivata $\frac{1}{z}$. Si osserva anche che

$$e^{\log_{(n)} z} = z \tag{3.2}$$

Infatti, ponendo $g(z) = z e^{-\log_{(n)} z}$, si calcola che $g'(z) = 0$. Quindi g è costante e poiché $g(1) = 1$ si ha $g \equiv 1$. Ovvero vale la (3.2). La scelta di 1 come punto di partenza non è obbligatoria, si potrebbe prendere un qualsiasi punto z_0, che non stia sulla semiretta $\mathbb{R}_{\leq 0}$, e porre

$$\log_{(n)} z = \int_{\gamma_{z_0,z}} \frac{d\xi}{\xi} + \log_{(n)} z_0.$$

Se $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$, con $-\pi < \theta_0 < \pi$ abbiamo

$$\log_{(n)} z = \log \rho_0 + i\theta_0 + 2\pi n i.$$

Osserviamo che con le scelte fatte, non è possibile estendere per continuitá $\log_{(n)} z$ alla semiretta $\mathbb{R}_{\leq 0}$. Infatti dato $a < 0$, denotiamo con $\lim_{z\to a^+}$ (rispettivamente $\lim_{z\to a^-}$) il limite al tendere di z ad a *da sopra* (rispettivamente *da sotto*), ovvero assumendo $\mathrm{Im} z > 0$ (rispettivamente $\mathrm{Im} z < 0$). Si ha allora, da un lato

$$\lim_{z\to a\ (\mathrm{Im} z>0)} \log_{(n)} z = \int_{\gamma_1} \frac{d\xi}{\xi} + 2\pi n i = \log(-a) + \pi i + 2\pi n i,$$

mentre dall' altro

$$\lim_{z\to a\ (\mathrm{Im} z<0)} \log_{(n)} z = \int_{\gamma_2} \frac{d\xi}{\xi} + 2\pi n i = \log(-a) - \pi i + 2\pi n i,$$

dove abbiamo integrato lungo due curve γ_1 e γ_2 come in figura(3.4).

Questo fatto non sorprende poiché percorrendo γ_2 al contrario e poi

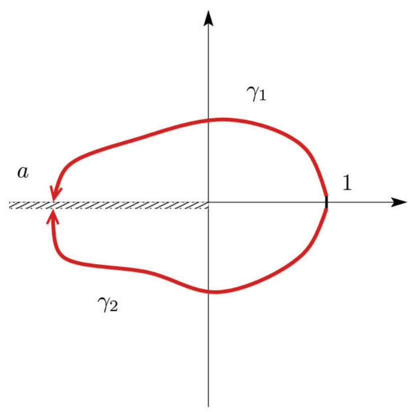

Figura 3.4: Discontinuitá di un ramo di logaritmo attraverso l' integrazione lungo le due curve γ_1 e γ_2.

proseguendo lungo γ_1 otteniamo

$$\int_{-\gamma_2+\gamma_1} \frac{d\xi}{\xi} = -\int_{\gamma_2} \frac{d\xi}{\xi} + \int_{\gamma_1} \frac{d\xi}{\xi} = 2\pi i.$$

Anche la scelta fatta del dominio D non è obbligatoria, infatti potevamo scegliere, per esempio, $D = \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\geq 0}$ e definire $\log(-1) = i\pi$. In questo caso avremmo $\log z = \log \rho + i\theta$, con $0 < \theta < 2\pi$, e $\log z$ non

sarebbe estendibile con continuitá alla semiretta $\mathbb{R}_{\geq 0}$. In generale, si puó prendere $D = \mathbb{C} - \{\text{semiretta dall' origine}\}$, nel qual caso non potremmo estendere $\log z$ alla semiretta. La soluzione di questo fatto *fastidioso* è stata fornita da Bernhard Riemann(1826-1866) e si basa sull' osservazione che il dominio D è inadeguato alla definizione di log e che in realtá possiamo costruire uno *spazio* piú ampio sul quale il logaritmo è definito, olomorfo e non presenta discontinuitá *fastidiose*. Questo spazio , che denotiamo con S, è un esempio di superficie di Riemann e viene detto superficie di Riemann del logaritmo. Questa superficie è omeomorfa a $\mathbb{C}$. Esistono funzioni $\phi : S \to \mathbb{C}$ e $\psi : S \to \mathbb{C} - \{0\}$ tali che $e^{\phi} = \psi$. La funzione ϕ è la *giusta* definizione del logaritmo e, per questa funzione, vale la formula $\phi(ab) = \phi(a) + \phi(b)$. La superficie S è ottenuta incollando fra loro infinite copie della regione D. La funzione ϕ, ristretta a ciascuna di queste copie, è proprio un ramo del logaritmo.
Consideriamo $\mathbb{C} - \{0\}$ e applichiamo la seguente trasformazione continua

$$\tau : \rho e^{i\theta} \to (2 - e^{-\rho})e^{i\theta}.$$

Questa è un omeomorfismo tra $\mathbb{C} - \{0\}$ e la corona $C = \{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < 2\}$. Si noti che τ identifica la regione $D = \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$, con la corona tagliata $E := C - L$, dove L è l' intervallo $(-2, -1)$. É chiaro che E è omeomorfo a $\mathbb{C}$.
Prendiamo ora infinite copie di E e di L e denotiamo ciascuna con $E_{(n)}$ e $L_{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$. Chiamiamo $E := E_{(0)}$ e $L := L_{(0)}$. Immaginando di aprire la $E_{(n)}$ lungo il taglio $L_{(n)}$, notiamo che $E_{(n)}$ ha due bordi corrispondenti uno al lato di L dove $\mathrm{Im}z > 0$, che chiamiamo $\mathrm{L}^{+}_{(n)}$, e l' altro al lato dove $\mathrm{Im}z < 0$, che chiamiamo $L^{-}_{(n)}$. Ora consideriamo l' insieme S ottenuto da $\bigcup_{-\infty}^{+\infty} E_{(n)}$ incollando $L^{+}_{(n)}$ a $L^{-}_{(n+1)}$. Visualizzando tutto in $\mathbb{R}^3$ otteniamo una spirale infinita che si avvolge lungo l' asse verticale (figura 3.5).

Proiettando la spirale sul piano orizzontale abbiamo una mappa $\pi : S \to C$, che componendo con τ^{-1} possiamo considerare come una mappa $\psi : S \to \mathbb{C} - \{0\}$. Ogni punto di $\mathbb{C} - \{0\}$ è l' immagine di infiniti punti di S rispetto a ψ, ovvero ha infiniti punti di S sopra di lui. Possiamo ora definire

$$\phi(s) = \log_{(n)} \tau^{-1}(s), \qquad \text{con} \quad s \in E_{(n)}.$$

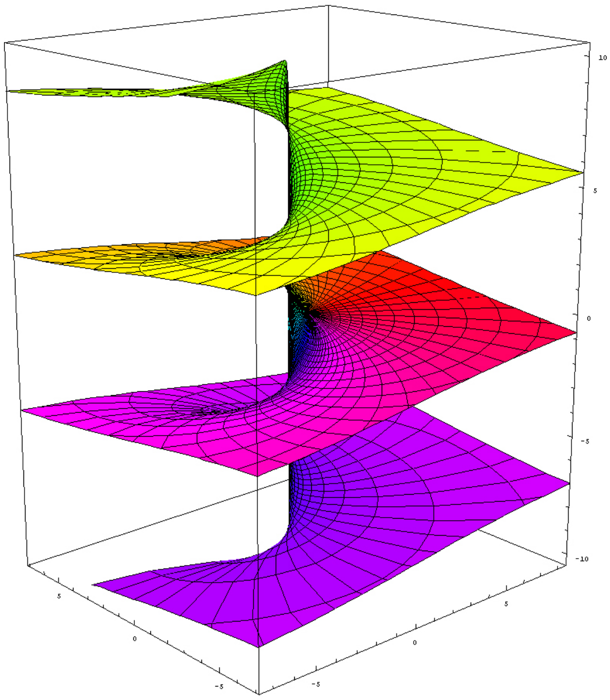

Figura 3.5: Grafico del logaritmo complesso. L' altezza descrive la parte immaginaria del logaritmo, mentre l' angolo è determinato dal colore.

In conclusione possiamo quindi definire il logaritmo complesso come un' estensione della funzione logartimo al campo dei numeri complessi dato che per i numeri reali vale la seguente relazione

$$y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^{y} \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{R}^{+}, y \in \mathbb{R}$$

che puó essere utilizzata per estendere il logaritmo al campo complesso:

$$\omega = \ln(z) \Leftrightarrow z = e^{\omega} \quad \text{con} \quad \omega, z \in \mathbb{C}.$$

Con l' unica condizione $z \neq 0$. Scrivendo z in forma esponenziale si ha

$$z = \rho e^{i\theta}$$

perció possiamo scrivere

$$\rho e^{i\theta} = z = e^{\omega} = e^{u+iv} = e^{u} \cdot e^{iv}$$

dove u e v rappresentano, rispettivamente, parte reale e immaginaria dell' incognita $\ln(z)$. Dalla precedente catena di uguaglianze seguono le seguenti relazioni che determinano u e v:

$$|z| = \rho = e^{u} \Rightarrow u = \ln|z|$$

$$e^{i\theta} = e^{iv} \Rightarrow v = arg(z).$$

Si puó quindi scrivere

$$\ln(z) = \ln|z| + iarg(z).$$

Come avevamo giá detto il logaritmo complesso assume infiniti valori dato che $arg(z)$ contiene tutti i numeri del tipo $\theta + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Per tale motivo esso non è propriamente una funzione ma una funzione polidroma, cioé una funzione che puó avere piú valori. Per poter considerare il logaritmo complesso come una funzione è necessario definire il suo valore principale:

$$\ln(z) = \ln|z| + iarg(z) \quad \text{con} \quad -\pi < arg(z) < \pi$$

Esso è analitico su tutto $\mathbb{C}$ escluso l' origine (dove il logaritmo non è definito) e il semiasse reale negativo (dove l' argomento ha un salto di discontinuitá pari a 2π).

Capitolo 4

Applicazioni dei logaritmi

4.1 La scala logaritmica

Nel 1620 il matematico inglese Edmund Gunter(1581-1626) ideó una diversa rappresentazione grafica dei numeri reali positivi, la scala logaritmica, una particolare scala graduata rappresentata in figura (4.1). Sull' asse prescelto (ad esempio l' asse x) si rappresenta il punto di

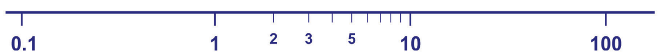

Figura 4.1: Scala Logaritmica.

ascissa $1 = 10^0$; nella direzione positiva si rappresentano uguali fra di loro , i punti di ascissa $10^1, 10^2, 10^3 \ldots$; nella direzione negativa i punti di ascissa $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \ldots$; i valori intermedi tra una potenza di 10 e la successiva sono posizionati ai valori dei rispettivi logaritmi decimali. Infatti i numeri non sono equidistanti ma si addensano verso destra in modo tale che la distanza dall' origine di ciascun numero sia proporzionale al suo logaritmo in base 10. Ad esempio, la distanza d del numero 4 dall' origine (figura 4.2) è pari a $d = \log(4) = 0.60205\ldots$, mentre la distanza del numero 10 è pari a $\log(10) = 1$.

Come accennato sopra la scala logaritmica non continua ad addensarsi man mano che si procede con i numeri successivi ma quando si

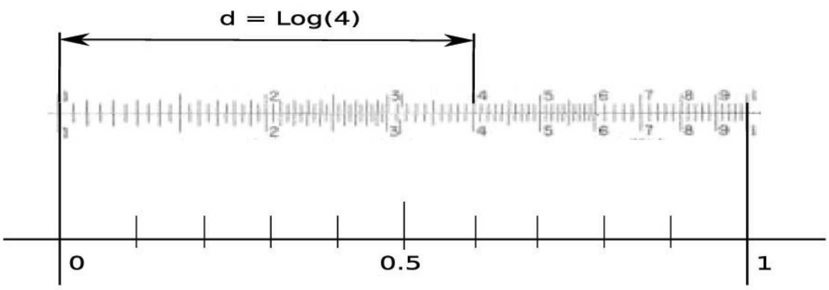

Figura 4.2: Rappresentazione del $\log 4$ nella scala logaritmica.

giunge al numero 10 (e ad ogni sua potenza), la scala si ripete identica (figure 4.3). Ciascuna delle tacche equidistanziate tra due potenze consecutive di 10 non corrisponde a lunghezze uguali ma alla moltiplicazione per un fattore costante (pari a $10^{1/6}$).

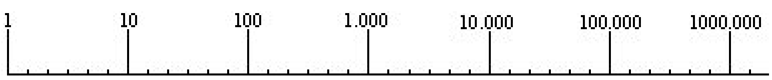

Figura 4.3: Disposizione delle prime potenze di 10 su una scala logaritmica. La distanza $1 - 10$ è la stessa delle distanza $10 - 100$.

Se, ad esempio, volessimo rappresentare i numeri 12 e 150 basterebbe considerare che

$$d = \log(12) = \log(1.2 \cdot 10) = \log(1.2) + \log(10) = 1 + \log(1.2)$$

$$d = \log(150) = \log(1.5 \cdot 100) = \log(1.5) + \log(100) = 2 + \log(1.5)$$

Quindi per rappresentare il numero 12 bisognerebbe aggiungere una nuova scala logaritmica identica alla (4.2) a distanza $1 = \log(10)$ dall' origine degli assi e misurare il numero 12 su di essa, come rappresentato in figura (4.4).

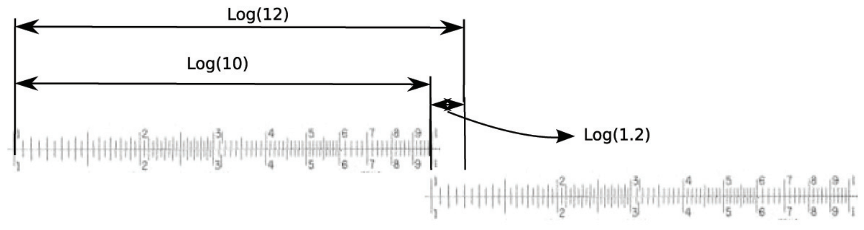

Figura 4.4: Due decine in scala logaritmica.

Per il numero 150 bisognerebbe giustapporre tre scale logaritmiche.

Oltre a rappresentare numeri positivi con ordini di grandezza molto diversi fra loro la scala logaritmica ha anche altre applicazioni:

- Linearizzare funzioni esponenziali $y = K \cdot a^x$ (*scale semilogaritmiche*)
  Data la funzione esponenziale

  $$y = K \cdot a^x$$

  passando ai logaritmi decimali e utilizzando le proprietá dei logaritmi si ottiene:

  $$\log_{10} y = \log_{10} [K \cdot a^x] \Rightarrow \log_{10} y = \log_{10} K + x \cdot \log_{10} a$$

  dove attraverso una trasformazione di variabili:

  $$X = x \qquad Y = \log_{10} y$$

  si ha

  $$Y = \log_{10} K + X \cdot \log_{10} a$$

  che è l' equazione di una retta $y = mx + q$ con coefficiente angolare $m = \log_{10} a$ e intercetta $q = \log_{10} K$.
  Per esempio se volessimo rappresentare la funzione

  $$y = 10000(0.5)^x$$

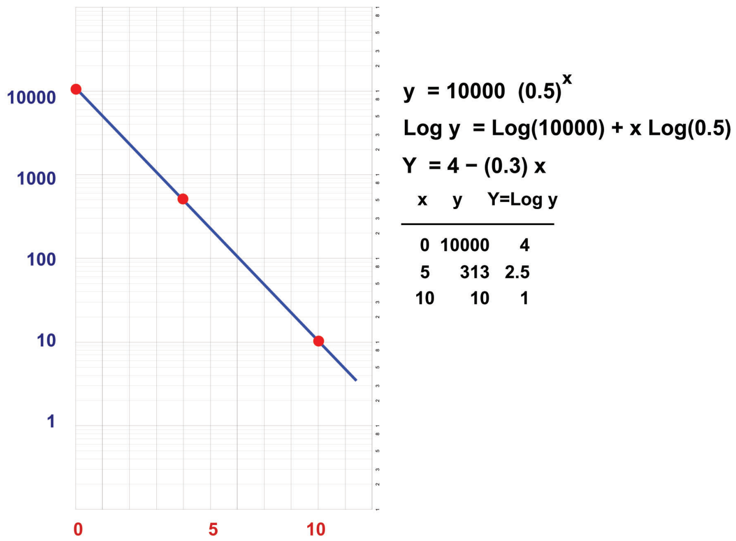

Figura 4.5: Rappresentazione della funzione $y = 10000(0.5)^x$ su carta semilogaritmica.

potremmo utilizzare la carta semilogaritmica (figura 4.5), formata da una scala lineare sull' asse delle ascisse X e da una scala logaritmica sull' asse delle ordinate Y, o viceversa.

- Linearizzare funzioni potenza $y = A \cdot x^b$ (*scale logaritmiche*)
  Data la funzione potenza

$$y = A \cdot x^b$$

passando hai logaritmi decimali e utilizzando le proprietá dei logaritmi si ottiene:

$$\log_{10} y = \log_{10} [A \cdot x^b] \Rightarrow \log_{10} y = \log_{10} A + b \cdot \log_{10} x$$

dove attraverso una trasformazione di variabili:

$$X = \log_{10} x \qquad Y = \log_{10} y$$

si ha

$$Y = \log_{10} A + b \cdot X$$

che è l' equazione di una retta $y = mx + q$ con coefficiente angolare $m = b$ e intercetta $q = \log_{10} A$.
Per esempio se volessimo rappresentare le funzioni

$$y = x^2; \qquad y = x; \qquad y = x^{0.5}$$

potremmo utilizzare la carta logaritmica (figura 4.6), formata da una scala logaritmica sull' asse delle ascisse X e da una scala logaritmica sull' asse delle ordinate Y.

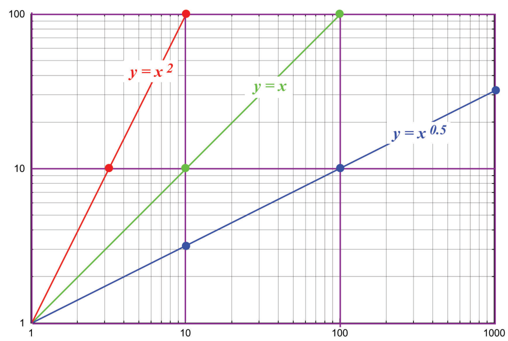

Figura 4.6: Rappresentazione delle funzioni $y = x^2$, $y = x$ e $y = x^{0.5}$ su carta logaritmica.

- L' utilizzo della scala logaritmica è inoltre alla base del funzionamento del *regolo calcolatore*.
  Il regolo calcolatore è una delle piú antiche ed utilizzate applicazioni dei logaritmi. Consiste in un righello (o regolo) che possiede diverse scale graduate (a seconda del modello) che possono scorrere l' una rispetto all' altra, consentendo di effettuare moltiplicazioni, divisioni ed elevamenti a potenza con una facilitá straordinaria, superata solo dalle moderne calcolatrici. É stato inventato nel 1622 dal pastore anglicano William Oughtred(1574-1660) e fu utilizzato fino al 1975, con l'avvento delle calcolatrici

elettroniche. Fu utilizzato con successo per progettare e costruire grandi opere architettoniche come l'Empire State Building e la diga Hoover, e accompagnó le missioni Apollo nei loro viaggi verso la Luna.
Si compone di tre parti:

1. un corpo su cui si trovano delle scale fisse;
2. un' asta scorrevole con delle scale mobili, alcune davanti, altre dietro;
3. un cursore con una o piú linee di riferimento.

Le scale si riconoscono da una lettera scritta sulla sinistra e mentre alcune di queste sono presenti in tutti i regoli, altre solo su regoli destinati ad operazioni particolari. Le principali sono:

- A: scala fissa dei quadrati sul corpo del regolo;
- B: scala mobile dei quadrati sull'asta;
- C: scala mobile dei numeri sull'asta;
- Ci: scala dell' inverso dei numeri sull'asta;
- D: scala fissa dei numeri sul corpo;
- K: scala fissa dei cubi sul corpo;
- L: scala fissa dei logaritmi decimali sul corpo;
- S: scala dei seni, di solito è una scala mobile sull'asta, a volte una scala fissa sul corpo;
- ST: scala dei seni e delle tangenti per angoli piccoli, di solito è una scala mobile sull'asta, a volte una scala fissa sul corpo;
- T: scala delle tangenti, di solito è una scala mobile sull'asta,a volte una scala fissa sul corpo.

I modelli piú semplici di regolo calcolatore riportano solo alcune di queste scale. É da sottolineare il fatto che le scale dei numeri non indicano dei valori in senso assoluto, ma soltanto le cifre significative della notazione scientifica. Sta all'utente interpretare ogni numero aggiungendo il corretto ordine di grandezza.
Vediamo ora come svolgere alcune operazioni principali:

- Moltiplicazione
  Il prodotto di due numeri x e y puó essere ottenuto calcolando i rispettivi logaritmi, e sommando fra loro

  $$z = \log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$$

  Si porta l' origine della scala C in corrispondenza del primo fattore cioé x sulla scala D (figura(4.7)). Il prodotto si legge sulla scala D in corrispondenza del secondo fattore, y, sulla scala C.

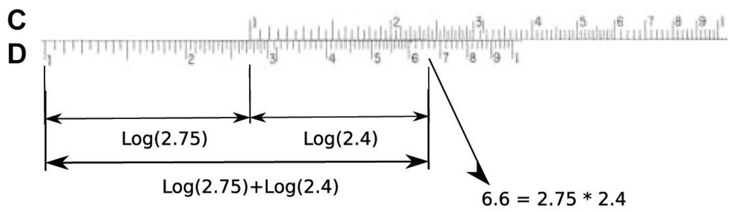

Figura 4.7: Il prodotto usando le scale logaritmiche.

- Divisione
  Per la divisione si procede in maniera inversa. Si sfrutta la proprietá dei logaritmi

  $$z = \log\left(\frac{y}{x}\right) = \log(y) - \log(x) \quad \rightarrow \quad \log(y) = z + \log(x)$$

  Bisogna quindi ripetere la procedura usata per il prodotto in maniera conrtraria, dal momento che il numero finale sulla scala D è giá noto. Si allinea il dividendo sulla scala D con il divisore sulla scala C. Il risultato si legge sulla scala D in corrispondenza dell' origine della scala C, come illustato in figura (4.8).

- Quadrato, cubo e logaritmo decimale
  Sul corpo del regolo, in corrispondenza di un numero x sulla scala D si trovano:

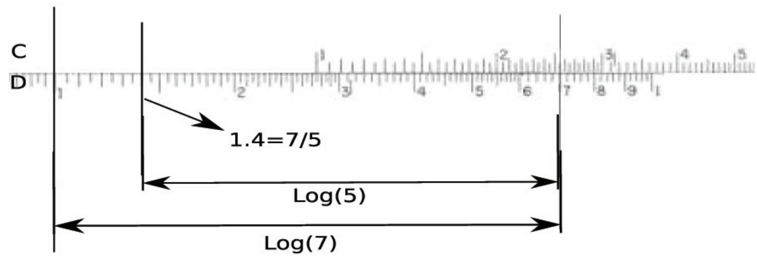

Figura 4.8: La divisione usando le scale logaritmiche.

1. il suo quadrato x^2 sulla scala A;
2. il suo cubo x^3 sulla scala K;
3. il suo logaritmo decimale $\log_{10}(x)$ sulla scala lineare L.

Sull' asta scorrevole del regolo, in corrispondenza di un numero y sulla scala C si trova il suo quadrato y^2 sulla scala B.
Usando all'inverso queste scale, il regolo fornisce la radice quadrata, la radice cubica e l'esponenziale di base 10 di un numero.

Un esempio di semplice regolo calcolatore per principianti è mostrato in figura (4.9) dove la scala logaritmica C è situata su una striscia centrale che puó scorrere rispetto al corpo principale, su cui è situata la scala D. Sono anche presenti la scala A e B, quadrati rispettivamente della D e della C.
Ma come giá spiegato sopra sono stati commercializzati diver-

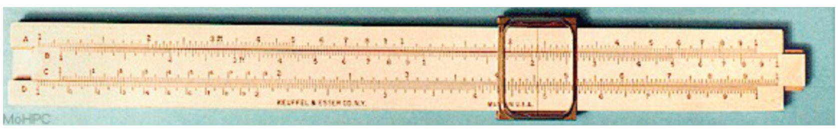

Figura 4.9: Modello semplice di regolo calcolatore.

si modelli anche molto piú complicati che, grazie alla presenza di svariate scale graduate, permettevano di effettuare molte piú operazioni, come il modello di figura (4.10).

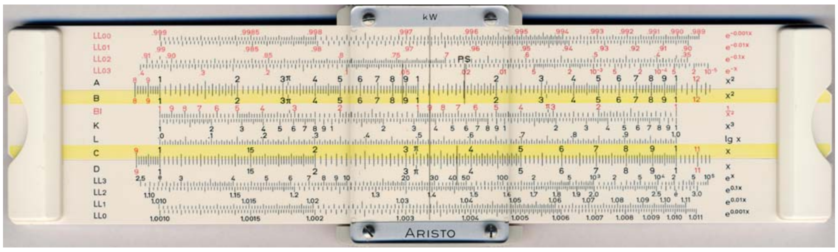

Figura 4.10: Modello piú complicato di regolo calcolatore. Regolo Calcolatore Aristo.

4.2 Applicazioni dei logartimi in altre discipline

Abbiamo giá detto come l' introduzione delle calcolatrici abbia tolto importanza ai logaritmi come strumento di calcolo, ma le funzioni esponenziali e logaritmiche, e le rispettive nozioni di potenza ad esponente reale e di logaritmo, hanno assunto un ruolo importante in matematica e trovano numerose applicazioni non solo nell' ambito matematico o fisico ma anche in campi molto diversi tra loro, dove capita di dover trattare grandezze che presentano ampie variazioni su un intervallo di diversi ordini di grandezza. Vediamo diversi campi di applicazione.

- Lo *spettro elettromagnetico* varia su diversi ordini di grandezza e tutte le bande di frequenza possono essere rappresentate soltanto con l' uso di una scala logaritmica. Consideriamo per esempio le seguenti frequenze:

	Frequenza	log
Onde radio	1MHz=10^6Hz	6
Ottico	500THz=$5 \cdot 10^{14}$Hz	14,7
Ultravioletti	10 PHz=10^{16} Hz	16
Gamma	1YHz=10^{24}Hz	24

Come si vede la radiazione Gamma ha una frequenza molto alta. Il problema della rappresentazione grafica si risolve con una scala logaritmica: ad esempio con unitá pari ad 1 cm riusciamo a sistemare queste frequenze su un asse lungo 24 cm (figura 4.11).

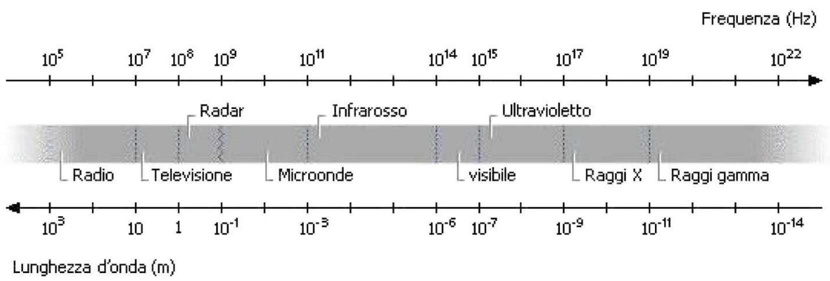

Figura 4.11: Spettro elettromagnetico.

- In *sismologia* per descrivere gli effetti di un terremoto si usa la scala Richter, in base alla quale si calcola la magnitudo del terremoto con la formula:

$$M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$$

  dove E, in Joule, è l' energia totale sviluppata dal terremoto ed E_0 è la minima energia rilevata in un terremoto. É importante sapere che la scala usata è logaritmica perché un terremoto di magnitudine 4 non è doppiamente piú energico di uno di magnitudine 2, ma 1000 volte di piú.

- In *astronomia* la luminositá delle stelle, o magnitudine, viene calcolata in scala logaritmica. Un astro di magnitudine 0 come Vega, nella costellazione della Lira, che viene preso come valore di riferimento, è 100 volte piú luminoso di uno di magnitudine 5, ció significa che si utilizza come base per i logaritmi la radice quinta di 100 cioé $10^{0,4}$. I numeri utilizzati per la magnitudo sono perció gli esponenti a cui occorre elevare tale base per calcolare

la luminositá di una stella.
Cambiando la base e usando i piú comodi logaritmi decimali, la magnitudo è data da:

$$M = -2,5 \log \frac{F}{V}$$

dove F è il flusso di luce della stella, V la luminositá di Vega e

$$2,5 = \frac{1}{0,4} = \frac{1}{\log 10^{0,4}}.$$

- In *chimica* il calcolo del pH è l' opposto del logaritmo in base 10 della concentrazione degli ioni idrogeno $[H^+]$. Tale concentrazione permette di definire il grado di aciditá o basicitá della soluzione che puó assumere dei valori appartenenti generalmente all' intervallo $[10^{-1}; 10^{-14}]$ che copre ben 14 ordini di grandezza. In questo caso anziché esprimere direttamente il valore della concentrazione si è preferito definire una nuova grandezza, indicata dal simbolo pH e definita dalla relazione:

$$pH = -\log [H^+] = \log \frac{1}{[H^+]}.$$

  Ne segue che il pH della maggior parte delle soluzioni che si incontrano in pratica è compreso tra 1 e 14 e che quanto piú è basso il pH tanto piú è acida la soluzione.

- In *acustica* l' intensitá fisica del suono si misura in W/m^2, ma esiste anche una intensitá fisiologica del suono misurata in decibel (dB) e per passare da una misurazione all' altra si utilizza una formula logaritmica. Assunto convenzionalmente come intensitá di riferimento il valore $I_0 = 10^{-12}\text{watt}/cm^2$ che è la soglia di udibilitá dell' orecchio umano, la misura in decibel del livello dell' intensitá sonora I è data da:

$$10 \log \frac{I}{I_0}.$$

  Quindi l'aumento di $1dB$ corrisponde a un aumento di energia per m^2 pari a un fattore $10^{\frac{1}{10}} \approx 1,26$; questo corrisponde all'incirca al raddoppio ogni 3 dB.

- In *musica* le note si distinguono l' una dall' altra per la frequenza; tra una nota musicale e la successiva, l' aumento di frequenza dell' onda sonora segue un andamento logaritmico crescente. L' ottavo suono di una scala musicale ha un numero di vibrazioni doppio rispetto a quello del primo suono, perció usando i logaritmi in base 2, il numero risultante dalla differenza dei logaritmi delle frequenze di due note è l' intervallo tra le note espresso in ottave, perché 2 è il rapporto di frequenza dell' ottava. Se i logaritmi sono invece in base $2^{\frac{1}{12}}$ il numero risultante è l' intervallo espresso in semitoni.

- In *fisica* la legge del decadimento di un corpo radioattivo ha una equazione esponenziale. Le sostanze radioattive sono dei composti chimici costituiti da atomi che si decompongono spontaneamente in altri atomi non radioattivi. Se N è il numero degli atomi di una sostanza radioattiva all' istante t ed N_0 la quantitá iniziale al tempo $t = 0$, la legge con cui varia è $N = N_0 e^{-\lambda t}$, dove λ è una costante detta costante di decadimento. Il tempo di dimezzamento $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ è una grandezza nota e puó variare da pochi milionesimi di secondo ($10^{-6}s$) fino a circa $4,5$ miliardi di anni per l' uranio.

- In *geologia*, scelta una sostanza con un tempo di dimezzamento dell' ordine di ere geologiche, come per esempio l' uranio-238 o l' uranio-235, è possibile, utilizzando questa legge, risalire al tempo trascorso dalla formazione delle rocce misurando le abbondanze relative a questi isotopi e del prodotto finale del decadimento.

- Analogamente in *archeologia*, dove la scala temporale è dell' ordine dei millenni, scegliendo un isotopo con tempo di dimezzamento piú opportuno come il carbonio-14 ($T_{1/2} = 5730$ anni) che è presente nei tessuti di ogni organismo vivente, è possibile datare materiali di origine organica come ossa, legno, fibre tessili, semi, carboni di legno.

- In *aeronautica* gli altimetri della navigazione aerea sono basati sul fatto che all' aumentare della quota h diminuisce la pressione atmosferica p. Per determinare la quota h, dopo aver rilevato la pressione p, occorre tener presente che p dipende anche dalla temperatura T dell' aria, secondo la legge:

$$h = (30T + 8000) \ln \frac{p_0}{p}$$

dove la quota è misurata in metri, la pressione in cmHg, la temperatura in $°C$ e p_0 indica la pressione sul livello del mare.

- In *economia finanziaria* alcuni regimi applicano formule esponenziali e logaritmiche per il calcolo dei tassi d' interesse. Se si investe un capitale ad interesse composto, alla fine di ogni anno l' interesse accumulato va ad aggiungersi al capitale e produce anch' esso interessi. Se si indica con C il capitale iniziale, dopo n anni il montante accumulato è

$$M = C(1 + i)^n.$$

- La funzione esponenziale è utile anche nello studio dei modelli che simulano la *crescita di popolazioni* di individui il cui numero dipende dal tempo. Se le risorse di vita sono illimitate si ottiene un andamento crescente della popolazione secondo una legge del tipo $N = N_0 e^{\lambda t}$ con N numero di individui al tempo t e λ il tasso netto di crescita per individuo. Questo modello è noto come *modello di Malthus* ed è stato uno dei primi modelli di dinamica delle popolazioni.

- Un' ultima interessante applicazione è in *fotografia*. Tra le nozioni che è necessario conoscere per scattare una buona foto ci sono quelle relative all' apertura del diaframma. Si tratta di uno dei meccanismi utilizzati da tutte le fotocamere per regolare la quantitá di luce che va ad impressionare il sensore e, di conseguenza, a generare l' immagine scattata. Esso è un sistema composto da un numero variabile di lamelle posizionate a ventaglio inverso, che puó muoversi in modo da allargare o restringere il foro posizionato al suo interno. Il valore relativo al diaframma è indicato con la sigla $f/$ seguita da un valore numerico. La sequenza di questi *numeri f* è rappresentata proprio da una progressione geometrica di ragione $\sqrt{2}$, che corrisponde a circa $1,4$, in quanto considera il diametro equivalente dell' apertura relativa, invece della superficie e comprende i seguenti intervalli(figura 4.12):

$$f/1 - f/1,4 - f/2 - f/2,8 - f/4 - f/5,6 - f/8 - f/11 - f/16 - f/22 \ldots$$

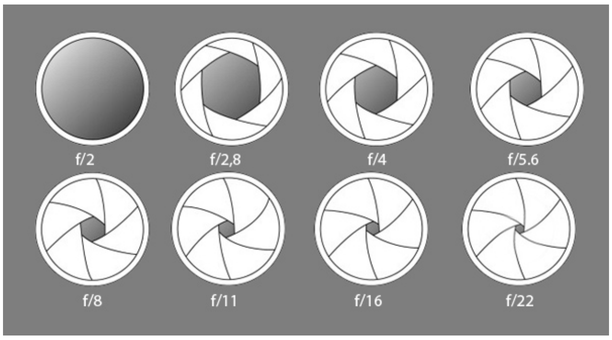

Figura 4.12: La scala dei diaframmi. A $f/2$ corrisponde un diaframma molto aperto: passerá molta loce. A $f/22$ corrisponde un diaframma molto chiuso:passerá poca luce.

Figura 4.13: Scala logaritmica che si trova tipicamanete sugli obiettivi delle macchine fotografiche.

Le macchine fotografiche manuali dispongono di un anello graduato sul quale, a distanze uguali, sono indicati i valori 2; $2,8$; 4;... che corrispondono a una scala logaritmica in quanto ciascun incremento (rotazioni) di ampiezza pari a uno scatto corrisponde alla moltiplicazione per 2 (o per $\frac{1}{2}$) della luce trasmessa all' apparato sensibile, tenendo fisso il tempo di esposizione (figura 4.13).

Bibliografia

[1] R. Rosso - *L' insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate 34B: Appunti di Storia dei logaritmi.I: i prodromi* - febbraio 2011

[2] R. Rosso - *L' insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate 34B: Appunti di Storia dei logaritmi.II: I logaritmi di Nepero* - aprile 2011

[3] R. Rosso - *L' insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate 35B: Appunti di Storia dei logaritmi.IV: logaritmi e geometria* - aprile 2012

[4] R. Rosso - *L' insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate 37B: Appunti di Storia dei logaritmi.V: logaritmi e serie* - ottobre 2014

[5] R. Rosso, Appunti sulla storia dei logaritmi - http://www.dimat.unipv.it/rosso/storialog.pdf

[6] R. Rosso, Appunti sulla storia dei logaritmi- http://www.dimat.unipv.it/rosso/logaritmi.pdf

[7] B. Jannamorelli - *Strumenti di calcolo aritmetico ingenui...ma ingegnosi* - Qualevita, Torre dei Nolfi, Aquila, 1995

[8] R. Catenacci, D. Matessi - *Complementi di Teoria delle Funzioni di Variabile Complessa* - dicembre 2015

[9] A. Torre, *Matematica con Elementi di Statistica: Scale Logaritmiche* - 2010-11

[10] Appunti sul Regolo Calcolatore - http://it.wikipedia.org/wiki/RegoloCalcolatore

[11] Appunti sulle applicazioni dei logaritmi- http://spuntieappunti.altervista.org/appunti/logaritmi/applicazioni.shtml.

Ringraziamenti

Anche se non sono mai stata brava a scrivere riguardo me stessa e forse anche in generale dato che ho sempre preferito fare verifiche di matematica piuttosto che temi scritti, proveró a scrivere due parole riguardo questi cinque anni per ringraziare tutte le persone che mi hanno accompagnato in questo percorso.
Sicuramente come prima persona voglio ringraziare il mio caro professore Paolo Negrini per la sua disponibilitá. È stato la mia ancora di salvezza. Passando poi alla mia famiglia vorrei ringraziare sicuramente mia mamma per tutti i massaggini ai piedi e per avermi sopportato nei miei scleri giornalieri, mio babbo per avermi accompagnato con il caro furgone a tutti gli esami per tutti questi 5 anni, mia nonna perché probabilmente la faranno santa, mia zia e tutti gli altri parenti che mi sono stati vicini.
Poi devo assolutamente ringraziare tutti i miei amici che sono stati, chi piú e chi meno, presenti in questo periodo. Partiamo dall'universitá: i miei compagni pendolari come Riccardo, compagno di treno e di informatica; i miei compagni della triennale, in particolare Davidone, Giulione e Gaggia; i miei nuovi compagni della specilistica Fabio, Fede, Carlotta e in particolare la mia cara amica Lucia che ho imparato a conoscere e rimarrá sempre una delle persone piú determinate che io abbia mai incontrato.
Poi tocca a tutti i miei amici al di fuori della facoltá a partire dalle mie Clavisse: la mia sorella maggiore Fiore; l'artista Giulietta; la rossa ballerina Monic; la dura Simona; le gemelle spotrive pattinatrici Giulia e Chiara, la futura mamma Angela, la mia roccia Sarina, e una delle ragazze piú buone (ed anche esperta guidatrice) Clavissa.
Poi ovviamente tocca al mio consigliere e gazzettino personale Dennis, al mio ciotolino che sta diventando un ciotolo Samuuu, al mio

vaskonvolto preferito Bissi e alla sua dolce metá (oltre che insegnante di grammatica) Ilaria, al mio amico d' infanzia giramondo Piccolo Piccolo Neri, ai miei super studenti ed in particolare, anche se ormai piú amica che studentessa, Alessia, alle mie compagne di danza e pallavolo, alle mie professoresse del liceo che mi hanno fatto appassionare di questa strana materia e in ultimo ma sicuramente non per importanza vorrei tanto ringraziare il mio meraviglioso moroso Mirko e la sua bellissima famiglia. In questi anni è stato veramente il ragazzo migliore che io potessi mai desiderare, buono, dolce a modo suo, sempre presente quando avevo bisogno e paziente in diversi miei momenti di sclero pre-esami. Tutte le persone che ho citato sanno che in questi anni ho passato i momenti piú belli e purtroppo anche i piú brutti della mia vita ma grazie al loro sostegno a fianco alla mia frase rappresentativa *ció che non ti uccide ti fortifica* posso dire che è proprio vero che *da soli si va piú veloce ma insieme si va piú lontano.*