

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Corso di Laurea in Fisica

# IL METODO DEL BEAM-FORMING ACUSTICO

Relatore:  
Prof. Fabio Ortolani

Presentata da:  
Lorenzo Ferri

Sessione I  
Anno Accademico 2014/15



# Indice

<b>Elenco delle figure</b>	<b>3</b>
<b>Abstract</b>	<b>4</b>
<b>1 Teoria acustica</b>	<b>5</b>
1.1 Campo acustico ed equazione delle onde . . . . .	5
1.1.1 Equazione di Eulero . . . . .	6
1.1.2 Equazione di continuità . . . . .	7
1.1.3 Equazione relativa a trasformazioni adiabatiche . . . . .	8
1.1.4 Soluzione dell'equazione delle onde acustiche . . . . .	10
1.2 Cenni sull'impedenza acustica . . . . .	11
1.3 Potenza ed intensità sonora . . . . .	13
1.4 Concetto di Near-field e di Far-field . . . . .	14
<b>2 Teoria su trasduttori e array microfonici</b>	<b>17</b>
2.1 Trasduttori microfonici . . . . .	17
2.2 Pattern, direttività e microfoni differenziali di ordine 0 e 1 . . . . .	18
2.2.1 Microfoni differenziali di ordine N-esimo . . . . .	20
2.3 Array microfonico . . . . .	21
<b>3 Dominio dei tempi, delle frequenze e Fourier</b>	<b>23</b>
3.1 Trasformata e antitrasformata di Fourier . . . . .	23
3.2 Shift temporale e traslazione circolare delle frequenze . . . . .	24
3.3 DFT e IDFT . . . . .	25
<b>4 Beam-forming</b>	<b>27</b>
4.1 Delay and sum nel dominio del tempo . . . . .	27
4.1.1 Delay and sum di un segnale cosinusoidale . . . . .	31
4.2 Delay and sum nel dominio della frequenza . . . . .	32
4.2.1 Impiego concettuale della trasformata di Fourier . . . . .	33
4.2.2 Impiego della trasformata di Fourier attraverso la DFT . . . . .	34

<b>5</b>	<b>Beam-pattern ed elaborazione della mappa acustica</b>	<b>36</b>
5.1	Costruzione del Beam-pattern . . . . .	37
5.2	Mappa acustica 2D . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Limiti e problemi del Beam-forming</b>	<b>43</b>
	<b>Conclusioni</b>	<b>46</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>47</b>

# Elenco delle figure

2.1	Pattern di ordine zero e uno . . . . .	19
2.2	Tabella dei coefficienti $a_n$ in base al Pattern. . . . .	21
2.3	Array a croce . . . . .	22
4.1	Array microfonico e sorgente . . . . .	28
4.2	Apparato di Beam-forming nel dominio del tempo . . . . .	31
4.3	Apparato di Beam-forming nel dominio delle frequenze. . . . .	35
5.1	Beam-pattern in coordinate polari e cartesiane. . . . .	37
5.2	Diagramma rappresentante main, side e back-lobe. . . . .	38
5.3	Mappa acustica 2D . . . . .	41
6.1	Pattern al variare della distanza, dell'angolo di incidenza, dalla frequenza e della lunghezza dell'array. . . . .	45

# Abstract

Nel corso di questa tesi si svilupperà il metodo del Beam-forming acustico, uno dei più semplici algoritmi di elaborazione segnale che permette di isolare spazialmente un suono proveniente da una precisa direzione decisa da noi, creando quindi un microfono super-direzionale orientabile a partire da un array microfonico di caratteristiche note.

Inoltre si implementerà in modo pratico l'algoritmo per descrivere il livello sonoro emesso da ogni punto di una sorgente sonora estesa in modo da mappare l'intensità di quest'ultima in un'immagine 2D da sovrapporre all'immagine stessa dell'oggetto.

Volendo schematizzare in breve questa tesi, essa è composta da una prima parte teorica contenente gli argomenti che ci servono per descrivere lo spazio acustico e le onde acustiche, una seconda parte riguardante i microfoni e i suoi vari parametri, una terza parte riguardante la teoria sull'elaborazione segnale nel dominio del tempo e delle frequenze e in particolare cenni sulla trasformata di Fourier.

Nella parte successiva verranno descritti i due principali metodi di Beam-forming acustico trattando sia gli apparati di misura sia i due algoritmi, facendo sempre riferimento alle parti di teoria necessarie alla spiegazione del metodo.

Infine nell'ultima parte della tesi verrà discusso in primo luogo la creazione del microfono virtuale, in particolare parleremo della sua sensibilità in funzione della direzione avvalendoci di uno schema che in letteratura viene denominato Beam-pattern, in secondo luogo parleremo di come creare la mappa 2D dove effettivamente possiamo vedere l'intensità sonora dell'onda proveniente da ogni punto dell'oggetto preso in considerazione.

# Capitolo 1

## Teoria acustica

In questo primo capitolo verrà trattata la parte più teorica riguardante l'acustica in quanto l'apparato che descriveremo nella seconda parte di questa tesi dovrà essere immerso in un campo acustico e captare onde acustiche con certe caratteristiche che dobbiamo conoscere in modo da sviluppare il problema nel modo più corretto.

Premetto anche che tutto ciò che è stato trattato in questo capitolo è stato preso in riferimento al manuale di acustica [1].

### 1.1 Campo acustico ed equazione delle onde

Il primo passo da compiere per capire cos'è un'onda sonora e la sua modalità di propagazione è conoscere lo spazio in cui essa stessa vive, cioè il campo acustico.

Il campo acustico è definito come quella porzione di spazio (o più propriamente spazio acustico) in cui ogni punto è associato un valore scalare di pressione.

Esso non è da confondere con il campo di pressione di altre discipline (ad esempio meteorologia) in quanto in queste prime conta il valore di pressione in un punto, invece la cosa che interessa a noi è la variazione di pressione in funzione dello spazio e del tempo data dall'equazione delle onde (vedi equazione 1.17) ricavata in questo capitolo, quindi in parole povere, che il campo sia veicolo di onde sonore.

Quindi, non resta che ricavarci la vera e propria equazione delle onde per un campo acustico e per farlo bisogna introdurre alcune approssimazioni molto importanti senza le quali non sarebbe possibile formularla.

Le approssimazioni riguardano lo spazio e di conseguenza il campo di pressione, che deve essere:

- Omogeneo: le leggi fisiche che regolano l'evoluzione del fenomeno sono le stesse in tutto lo spazio.
- Isotropo: non esistono direzioni privilegiate.
- Elastico: si assume che non ci siano forze dissipative (più nello specifico, che la variazione di pressione al passare dell'onda segua una legge adiabatica).

Ora per procedere, passiamo a definire le vere e proprie equazioni che ci servono per la trattazione del problema.

### 1.1.1 Equazione di Eulero

L'equazione di Eulero, sostanzialmente, coincide con la seconda legge della dinamica di Newton e definisce il bilancio delle forze agenti su un cubo di fluido del campo acustico.

Consideriamo un cubo di lati  $dx, dy, dz$  e di volume  $V_0$ , allo scorrere della perturbazione all'interno del cubo si creeranno due forze rispettivamente sulle due facciate perpendicolari alla direzione di propagazione della perturbazione stessa (assumo la direzione di propagazione  $x$ ).

Queste forze che indicherò entrambe con  $f_x$  non hanno il medesimo valore in quanto, ipotizzando che durante il passaggio della perturbazione, la densità volumetrica a ridosso della seconda facciata aumenti localmente, si avrà una forza agente su quest'ultima leggermente maggiore.

Infatti indicando con  $p$  la pressione sonora (da non confondersi con la pressione totale data dalla somma di  $p$  con la pressione atmosferica, in quanto quest'ultima agendo nella totalità del volume è già controbilanciata) ed indicando con  $s$  la superficie tangente alla coordinata  $x$ , posso definire la forza agente a sinistra e la forza agente a destra rispettivamente come:

$$f_x = p \cdot s \qquad f_x = \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) \cdot s \qquad (1.1)$$

Ora facendo la sommatoria delle 2 forze si ha che i termini in  $p$  si eliminano lasciando solo il termine con la derivata prima, quindi posso correttamente scrivere l'equazione :

$$f_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot (dydz) = -\frac{\partial p}{\partial x} \cdot V_0 \qquad (1.2)$$

Affermando che  $V_0 = dx dy dz$  in quanto il volume è un cubo e  $s = dy dz$ .



Ora non ci rimane altro che ricavarci la forza non più tramite la relazione pressione-superficie sfruttata in precedenza, ma tramite la classica formula della dinamica  $\vec{f} = m \cdot \vec{a}$  nel seguente modo.

L'accelerazione delle particelle  $a_x$  la consideriamo come la derivata prima  $\frac{du_x}{dt}$  della velocità delle particelle  $u_x$  sulla componente  $x$  rispetto al tempo e consideriamo la massa  $m$  come la massa dell'intero cubo data da  $m = \rho \cdot V_0$  quindi posso scrivere la forza come:

$$f_x = \rho V_0 \frac{du_x}{dt} \quad (1.3)$$

Ora basta mettere insieme le due formule 1.2 e 1.3 assumendo che la densità vari in modo trascurabile rispetto  $\rho_0$  (cioè che  $\rho = \rho_0$ ) e che la velocità dipenda solo dal tempo e non dallo spazio (come in realtà accadrebbe), infine si prenda in considerazione il Nabla  $\vec{\nabla}$  al posto della derivata spaziale in questo modo:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{du_x}{dt} \Rightarrow \vec{\nabla} p = -\rho_0 \frac{d\vec{u}}{dt} \quad (1.4)$$

La seconda parte dell'equazione 1.4 è detta Equazione di Eulero per i fluidi.

### 1.1.2 Equazione di continuità

Questa equazione regola il flusso di materia che entra o esce dal volume in seguito all'aumento o diminuzione di densità di quest'ultimo.

Prendiamo il solito volume  $V_0$  di fluido, esso in seguito alla perturbazione si sposta di  $s_x$  nella direzione  $x$  ma, essendo che la densità locale nella seconda faccia del cubo aumenta, si avrà una risultante del flusso di materia nel cubo diversa da 0 e ammettendo un gradiente del tipo  $\frac{\partial s_x}{\partial x}$  posso scrivere il bilancio di massa in questo modo:

$$\rho s_x (dydz) - \rho (s_x + \frac{\partial s_x}{\partial x} dx) (dydz) = -\rho \frac{\partial s_x}{\partial x} dx (dydz). \quad (1.5)$$

Dove ogni termine corrisponde dimensionalmente ad una massa.

Ora abbiamo che nell'equazione 1.5 solo la parte con la derivata parziale non viene controbilanciata quindi essa è responsabile dell'afflusso di materia nel cubo.

Questo fatto può essere interpretato scrivendo la differenza di densità prima e dopo lo spostamento moltiplicata per il volume del cubo stesso in questo modo (itero il procedimento per tutte le coordinate spaziali):

$$\rho \frac{\partial s_x}{\partial x} dx(dydz) + \rho \frac{\partial s_y}{\partial y} dy(dxdz) + \rho \frac{\partial s_z}{\partial z} dz(dxdy) = -(\rho - \rho_0)dxdydz \quad (1.6)$$

Possiamo poi per un fatto di comodità, definire la variazione relativa di densità del mezzo come:

$$\delta = \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \approx \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \quad (1.7)$$

Quindi la relazione 1.6 può assumere riscritta nella seguente forma (indico con  $div \vec{s}$  la divergenza del vettore spostamento  $\vec{s}$ ):

$$\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial s_z}{\partial z} = -\delta \quad \Rightarrow \quad \delta = -div \vec{s} \quad (1.8)$$

Infine non essendo interessati allo spostamento ma alla velocità, deriviamo rispetto al tempo entrambi i membri della seconda parte dell'equazione 1.8 ottenendo così l'equazione di continuità per i fluidi.

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = -div \vec{u} \quad (1.9)$$

### 1.1.3 Equazione relativa a trasformazioni adiabatiche

Ragioniamo su quello che avviene in una trasformazione termodinamica provocata da una perturbazione.

In sostanza verranno a crearsi regioni con più alta pressione e di conseguenza innalzamento di temperatura e regioni con più bassa pressione e di conseguenza abbassamento di temperatura, quindi è ragionevole pensare che si crei un flusso termico in tali regioni ma che la propagazione di questo flusso sia molto più lenta della propagazione dell'onda giustificando il fatto che si può trattare questa trasformazione come se fosse adiabatica.

Partiamo dalla conosciuta formula della trasformazione adiabatica  $p_0 V_0^\gamma = p V^\gamma$  dove  $\gamma$  non sarà altro che il rapporto tra calori specifici del gas, posso riscriverla in funzione di  $p$  nei due seguenti modi:

$$p = p_0 \left( \frac{V_0}{V} \right)^\gamma \quad oppure \quad p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (1.10)$$

Esprimo ora l'ultima relazione in forma differenziale.

$$dp = \gamma p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} \frac{d\rho}{\rho_0} \approx \gamma p_0 \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \quad (1.11)$$

Ricordando la definizione di  $\delta$  vista nel paragrafo precedente, l'equazione 1.11 posso riscriverla in questo modo:

$$p = \gamma p_0 \delta \quad (1.12)$$

Deriviamo ora rispetto al tempo ricavandoci così l'equazione che regola il comportamento termodinamico di un fluido in condizioni di adiabaticità.

$$\frac{1}{p_0} \frac{\partial p}{\partial t} = \gamma \frac{\partial \delta}{\partial t} \quad (1.13)$$

~ ♦ ~

Ricavate le tre equazioni che regolano la fisica della nostra perturbazione, non ci resta altro che arrivare a una formulazione generale dalla quale possiamo ricavare come soluzione un'onda.

Il procedimento per trovare l'equazione delle onde si ricava prendendo tutte e tre le equazioni descritte prima e combinandole in modo da avere una formula in cui compaia solo la pressione che varia rispetto al tempo e allo spazio, partiamo con riassumere le tre equazioni.

$$\begin{cases} \vec{\nabla} p = -\rho_0 \frac{d\vec{u}}{dt} & (1) \\ \frac{\partial \delta}{\partial t} = -div \vec{u} & (2) \\ \frac{1}{p_0} \frac{\partial p}{\partial t} = \gamma \frac{\partial \delta}{\partial t} & (3) \end{cases} \quad (1.14)$$

Per prima cosa, unisco l'equazione (3) e l'equazione (2) e derivo tutto rispetto al tempo:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\gamma p_0 div \vec{u} \Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\gamma p_0 div \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \quad (1.15)$$

Ora applico l'operatore divergenza all'equazione (1) che posso scrivere anche in maniera più compatta introducendo l'operatore Laplaciano  $\nabla^2$  come  $\nabla^2 p = div (\vec{\nabla} p)$ .

$$-div (\vec{\nabla} p) = -\nabla^2 p = \rho_0 div \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \quad (1.16)$$

Non ci rimane altro che prendere le seconde parti delle equazioni 1.15 e 1.16 e unirle ottenendo così la seguente legge:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (1.17)$$

L'equazione 1.17 prende il nome di equazione delle onde sonore e rappresenta lo sviluppo di una perturbazione di pressione nello spazio e nel tempo, essa è valida solo per perturbazioni infinitesime e per trasformazioni adiabatiche del gas.

Nell'equazione inoltre,  $c$  è la velocità di propagazione dell'onda sonora nel fluido detta più comunemente velocità del suono, ed è definita come:

$$c = \sqrt{\gamma \left( \frac{p_0}{\rho_0} \right)} \quad (1.18)$$

Prendendo valori di pressione, densità e costante adiabatica in condizioni standard, la velocità del suono vale circa 331,6 m/s.

#### 1.1.4 Soluzione dell'equazione delle onde acustiche

Cominciamo innanzitutto con dire che ogni legge che descrive un comportamento ondulatorio del campo di pressione che soddisfa l'equazione 1.17 è una soluzione accettabile e che una soluzione possibile (considero lo sviluppo solo lungo la coordinata  $x$  in quanto assumo che la perturbazione si sviluppi solo lungo questa direzione) si può scrivere in questo modo:

$$p = f \left( t - \frac{x}{c} \right) + g \left( t + \frac{x}{c} \right) \quad (1.19)$$

L'equazione 1.19 descrive una qualsiasi forma d'onda che si propaga sia nel verso positivo della coordinata  $x$  sia quello negativo, ora la cosa più logica è considerare solo la forma d'onda uscente e per fare questo basterà porre il termine  $g = 0$  nell'equazione precedente.

Sappiamo poi, come conosciamo dalla teoria ondulatoria, che una soluzione in natura molto frequente è quella di un oscillatore armonico di frequenza  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ , infatti ogni sorgente sonora per farci percepire un suono agisce come un oscillatore armonico, cioè si sposta dalla sua posizione di equilibrio (spostando di conseguenza l'aria in cui è immersa) ritornando nel punto iniziale solo dopo un tempo  $t = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$  dove  $\omega$  è associato all'oscillazione di quest'ultima che corrisponderà anche la pulsazione dell'onda

di pressione prodotta.

Quindi la relazione 1.19 viene riscritta sotto le condizioni appena imposte come una forma d'onda cosinusoidale variabile nel tempo e nello spazio che si propaga dalla sorgente verso l'infinito.

$$p = \bar{p} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) + \phi_0 \right] = \bar{p} \cos (\omega t - k_x x + \phi_0) \quad (1.20)$$

Dove  $\bar{p}$  è il valore massimo che assume la pressione in un intero ciclo,  $k_x$  è il numero d'onda sulla componente  $x$  e  $\phi_0$  è lo sfasamento iniziale della perturbazione.

La soluzione 1.20 ci descrive delle onde progressive piane (questo concetto ci servirà nei paragrafi successivi), infatti ora bisogna affrontare il fatto che la nostra sorgente, che noi ammettiamo puntiforme, emetta un fronte d'onda sferico, quindi doveremo trovare sempre una soluzione del tipo 1.20 partendo dall'equazione 1.17.

Questo si fa considerando il Laplaciano in coordinate polari e assumendo i termini in cui compaiono gli angoli nulli, in quanto abbiamo simmetria sferica dei fronti d'onda:

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} \quad (1.21)$$

Che sostituita alla 1.17 viene riscritta in questo modo:

$$\frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2} \quad (1.22)$$

Ed avrà una soluzione del tipo:

$$p = \frac{\bar{p}}{r} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + \phi_0 \right] = \frac{\bar{p}}{r} \cos (\omega t - k_r r + \phi_0) \quad (1.23)$$

## 1.2 Cenni sull'impedenza acustica

Ora facciamo un passo indietro, abbiamo che l'equazione di Eulero 1.4 ci dà informazioni sulla relazione che c'è tra pressione e velocità delle particelle coinvolte nel fenomeno, prima però non riuscivamo ad esplicitare entrambe le variabili in quanto non sapevamo la soluzione generale 1.19, ora che sappiamo quest'ultima possiamo riprendere in mano l'equazione di Eulero e interpretarla in questo modo:

$$\rho_0 \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c} f' \left( t - \frac{x}{c} \right) \quad (1.24)$$

Dalla quale ricaviamo trovando una primitiva di  $\frac{\partial u_x}{\partial t}$  la seguente equazione:

$$u_x = \frac{1}{\rho_0 c} f\left(t - \frac{x}{c}\right) \Rightarrow u_x = \frac{1}{\rho_0 c} p \quad (1.25)$$

Quindi, in analogia con altre branche della fisica, introduco l'impedenza acustica  $Z$  come:

$$Z = \frac{p}{u_x} = \rho_0 c = R + iX \quad (1.26)$$

Le cose importanti da notare sono che l'impedenza acustica è caratteristica solo del fluido (nel nostro caso circa  $1,48 \times 10^6 \text{ Pa}\cdot\text{s}/\text{m}$ ) e soprattutto, cosa più importante, è che l'impedenza in generale è descritta come una parte reale indicata con  $R$  detta resistenza acustica e una parte immaginaria  $X$  detta reattanza acustica, mi spiego meglio:

In generale sia la pressione che la velocità delle particelle possono essere espresse da equazioni del tipo 1.20 o da 1.23 ma non è detto che entrambe le grandezze abbiano la stessa fase iniziale  $\phi$ , infatti supponendo che queste due fasi siano diverse la formula dell'impedenza si può riscrivere in questo modo:

$$Z = \frac{\bar{p} \cos(\omega t - k_x x + \phi_0)}{\bar{u}_x \cos(\omega t - k_x x + \phi')} = \frac{\bar{p} e^{i(\omega t - k_x x + \phi_0)}}{\bar{u}_x e^{i(\omega t - k_x x + \phi')}} = \frac{e^{i\phi_0} \bar{p}}{e^{i\phi'} \bar{u}_x} = \frac{\bar{p}}{\bar{u}_x} e^{i(\phi_0 - \phi')} \quad (1.27)$$

Vediamo così che utilizzando la formula di De Moivre [3], posso vedere l'ultimo esponenziale in formula 1.27 come un numero immaginario di questo tipo:

$$Z = \frac{\bar{p}}{\bar{u}_x} [\cos(\phi_0 - \phi') + i \text{sen}(\phi_0 - \phi')] \quad (1.28)$$

Giustificando l'assunzione prima fatta.

Questo fa sì che quando l'impedenza  $Z$  è interamente descritta solo attraverso la resistenza  $R$  abbiamo che pressione e velocità sono solo scalate ma in fase, in caso contrario abbiamo che se  $Z$  è descritta anche da una parte immaginaria e che quindi pressione e velocità della particella oltre che essere scalate sono anche sfasate il che da problemi ai nostri scopi futuri in quanto parte della potenza sonora non viene trasmessa (si veda analogia circuiti elettrici RC, LC o RLC in regime alternato [2]).

Un ultimo appunto ma non ultimo in importanza è che  $Z$  è puramente reale per onde progressive piane, mentre è anche immaginario per onde progressive sferiche, questo punto contribuirà alla separazione delle regioni del campo acustico.

### 1.3 Potenza ed intensità sonora

Prima di partire con la spiegazione di questo paragrafo è indispensabile definire che cos'è il decibel.

Il decibel  $[dB]$  è un numero adimensionale espresso in scala logaritmica di un rapporto tra una grandezza presa in considerazione e una grandezza di riferimento, dando così l'indicazione di quanto il valore di nostro interesse è aumentato o diminuito rispetto al valore preso come punto di partenza.

$$I [dB] = 10 \log \left( \frac{I [\frac{W}{m^2}]}{I_{ref} [\frac{W}{m^2}]} \right) \quad (1.29)$$

$$p [Pa] = 20 \log \left( \frac{p [Pa]}{p_{ref} [Pa]} \right)$$

Come si può vedere posso scegliere il riferimento più comodo, nel senso che fissata la grandezza di riferimento, si avrà che tutti i valori che si aggirano vicino a quest'ultima risulteranno vicino ai 0  $dB$  ottenendo così una specie di normalizzazione.

Inoltre, come riportato nelle equazioni 1.29, si ha che per quanto riguarda grandezze quali intensità, potenze ed energie si usa un fattore 10 come da definizione di decibel, invece per quanto riguarda grandezze quali pressioni, velocità, forze si usa un fattore 20 in quanto le prime grandezze descritte sono proporzionali al quadrato delle ultime in questo senso:

$$I [dB] = 10 \log \left( \frac{I [\frac{W}{m^2}]}{I_{ref} [\frac{W}{m^2}]} \right) = 10 \log \left( \frac{p^2 [Pa]}{p_{ref}^2 [Pa]} \right) = 10 \log \left( \frac{p [Pa]}{p_{ref} [Pa]} \right)^2 = 20 \log \left( \frac{p [Pa]}{p_{ref} [Pa]} \right) \quad (1.30)$$

Ora passiamo alla spiegazione vera e propria di questo paragrafo; in fisica un'intensità è una grandezza che determina l'energia passante in una superficie in un'unità di tempo, questo concetto possiamo applicarlo anche al nostro flusso di materia introducendo l'intensità sonora istantanea come:

$$I(x, t) = p(x, t) u(x, t) \quad (1.31)$$

Dimensionalmente posso giustificare l'equazione 1.31 in quanto:

$$p(x, t) u(x, t) \Rightarrow \left[ \frac{N}{m^2} \cdot \frac{m}{s} \right] = \left[ \frac{J}{m \cdot m^2} \cdot \frac{m}{s} \right] = \left[ \frac{J}{m^2 \cdot s} \right] \Rightarrow I(x, t) \quad (1.32)$$

Ma a noi interessa una media temporale  $\langle I \rangle$  dell'intensità sonora in un lasso di tempo  $T$  generato da una sorgente puntiforme che può essere espressa nel seguente modo:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(x, t) u(x, t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{p^2(x, t)}{\rho_0 c} dt \quad (1.33)$$

Ora passiamo alla potenza sonora, prendiamo una superficie sferica  $S$  che circondi interamente la sorgente, come usuale in casi di onde sferiche definiamo la potenza acustica erogata dalla sorgente puntiforme come:

$$W = \int_S \langle I \rangle dS \quad (1.34)$$

Che risolto viene:

$$W = 4\pi r^2 \langle I \rangle \Rightarrow 4\pi r^2 \frac{1}{T} \int_0^T \frac{p^2(r, t)}{\rho_0 c} dt \quad (1.35)$$

La cosa importante che traiamo dalle formule 1.33 e 1.35 sono che nel caso dell'intensità di una sorgente puntiforme, essa cala come  $\frac{1}{r^2}$  quindi cala come 6 dB ogni raddoppio della distanza, mentre nell'espressione della potenza il raggio si cancella quindi quest'ultima da solo l'informazione di quanta energia sonora produce la sorgente in un secondo.

## 1.4 Concetto di Near-field e di Far-field

I concetti di Near-field (campo vicino) e Far-field (campo lontano) sono due aspetti di estrema importanza per il caso che dobbiamo trattare, in quanto non abbiamo a che fare con una semplice sorgente puntiforme che produce un'onda sferica ma abbiamo a che fare con una sorgente estesa di dimensioni non trascurabili formata da infinite sorgenti sonore (essendo lo spazio acustico continuo) e non uguali l'una dalle altre.

Quindi per riuscire a studiare appropriatamente il caso che ci siamo proposti, dobbiamo necessariamente affrontare questi argomenti.

Supponiamo di essere in condizioni di campo libero (cioè in un campo acustico dove non ci sono riflessioni da parte dell'onda sonora, il che nella realtà è un caso irrealizzabile, ma accettabile per lo sviluppo del nostro metodo) e di avere una sorgente lineare finita.

Definisco ora il seguente rapporto adimensionale:

$$\frac{L^2}{r\lambda} \quad (1.36)$$



Dove  $\lambda$  sarebbe la lunghezza d'onda con valore più elevato (che corrisponde al suono più grave emesso),  $L$  la larghezza della sorgente sonora lineare e  $r$  il raggio a cui ci poniamo dalla sorgente stessa.

Definisco Near-field il campo acustico per cui abbiamo valori di  $r$  che soddisfano la condizione  $\frac{L^2}{r\lambda} \gg 1$

Ovviamente definisco Far-field come il campo acustico per cui abbiamo valori di  $r$  che soddisfano la condizione  $\frac{L^2}{r\lambda} \ll 1$

Da manuale assumeremo la distanza di transizione tra le due regioni di spazio ad:

$$r = \frac{3\pi L^2}{2\lambda} \quad (1.37)$$

Per i nostri scopi la sorgente sonora non sarà lineare ma sarà tridimensionale, noi però per semplicità mapperemo la sorgente in sole 2 dimensioni quindi dovremo prendere il parametro  $L$  come la dimensione maggiore che intercorre tra gli estremi della sorgente estesa.

Dopo aver introdotto i due concetti è importante discutere le proprietà di questi due campi e il perché è stata fatta questa suddivisione:

Nella regione di Near-field abbiamo che:

- Il fronte d'onda risultante visto da un punto all'interno del campo è una sovrapposizione di fronti d'onda sferici generati da ogni punto della sorgente sonora estesa, quindi di andamento non ben definito.
- L'impedenza acustica risulta immaginaria quindi parte della potenza acustica è immaginaria con ripercussioni sull'intensità sonora.
- L'intensità sonora cala repentinamente quindi l'intensità sonora di due sorgenti relativamente distanti è molto diversa.

Invece nella regione di Far-field abbiamo che:

- Il fronte d'onda risultante è essenzialmente piano, in quanto la distanza tra sorgente estesa e il punto in considerazione è molto maggiore della lunghezza d'onda del suono.

- L'impedenza acustica risulta essenzialmente reale (corrisponde circa a  $\rho_0 c$ ) quindi la potenza acustica è reale e di conseguenza l'intensità sonora è la maggiore disponibile.
- L'intensità sonora cala linearmente di  $6 \text{ dB}$  a ogni raddoppio della distanza quindi l'intensità sonora di due sorgenti relativamente distanti è circa la stessa.

Inoltre in regione di Far-field abbiamo che vediamo la sorgente estesa nella sua totalità (quindi non dobbiamo dipendere dalle dimensioni della sorgente stessa) in quanto i suoni provenienti dal centro o dai bordi di quest'ultima hanno lo stesso peso (il concetto assomiglia molto a quello di un dipolo elettrico visto da vicino o da lontano).

# Capitolo 2

## Teoria su trasduttori e array microfonici

In questo capitolo affronteremo il funzionamento e i tipi di microfoni in quanto come già accennato con una serie di essi dovremo creare un singolo microfono virtuale con certe caratteristiche, quindi risulta indispensabile sapere che cos'è questo trasduttore, le sue caratteristiche e non per ultimo cos'è un array microfonico.

### 2.1 Trasduttori microfonici

Le informazioni di questo paragrafo sono state prese in [6].

I microfoni nella loro concetto più basilare ed estendibile ad ogni tipologia di costruzione sono dei trasduttori di segnale che trasformano una grandezza di tipo meccanico in una grandezza di tipo elettrico, più nello specifico traducono una variazione del campo di pressione (o campo acustico) in cui sono immersi in una variazione di potenziale elettrico il quale riproduce più o meno fedelmente il segnale di ingresso.

Il fenomeno fisico che sta dietro alla trasduzione del segnale acustico dipende dalla tecnologia di realizzazione del microfono stesso.

Il più classico tipo di microfono usato è il microfono a condensatore, esso è una tipologia di trasduttore elettrostatico a capsula microfonica composto da un condensatore dove un'armatura funge da membrana vibrante a contatto con il fronte sonoro, il circuito di uscita invece è costituito da una resistenza di alto valore posti in serie alla capsula microfonica e alimentato da un generatore di tensione continua esterna.

Il principio di funzionamento che sta alla base di ogni microfono a condensatore è la variazione di capacità di quest'ultimo in funzione dell'aumento o meno della distanza fra le armature  $C = \frac{\epsilon S}{d}$  provocato dal fronte d'onda sonoro.

Il condensatore normalmente essendo forzato ad avere una differenza di potenziale ai capi delle armature fisso dato dall'alimentazione esterna, variando la capacità, si noterà una variazione della carica secondo la legge  $Q = VC$  ma essendo che il periodo  $T$  dell'onda sonora è molto minore della costante di tempo caratteristico  $\tau$  del circuito  $RC$ , la tensione si trova costantemente in regime transitorio con legge  $V = \frac{Q}{C} = \frac{Qd}{\epsilon S}$ .

Quindi per prelevare il segnale di uscita si può collegare l'amplificatore sia ai capi della resistenza prelevando quindi l'effettivo  $\Delta V$  del segnale di uscita oppure prelevando la tensione dal condensatore il quale prenderà il valore della componente continua dell'alimentazione (che poi verrà tagliata da un opportuno condensatore) meno il  $\Delta V$  effettivo del segnale.

## 2.2 Pattern, direttività e microfoni differenziali di ordine 0 e 1

Tutto questo paragrafo fa riferimento alla tesi in acustica applicata [4].

Una delle caratteristiche più importanti dei microfoni è la direttività, essa è espressa attraverso una funzione  $\Gamma(\theta)$  che indica la sensibilità del trasduttore in base all'angolo di incidenza del suono, prendendo come riferimento  $0 \text{ dB}$  la sensibilità nell'asse principale del microfono.

Questa funzione viene rappresentata in un grafico in coordinate polari costituito da cerchi concentrici dove a ogni cerchio è assegnato un valore di attenuazione in  $\text{dB}$  della sensibilità originale.

La figura che si viene a creare in questo diagramma si chiama Pattern, esso è caratteristico del microfono e ne indica in maniera visuale la sensibilità in base all'angolo.

Abbiamo diversi Pattern possibili:

Se la funzione non dipende in questo caso dall'angolo ma è della forma  $\Gamma(\theta) = a_0$  allora avremo un Pattern omnidirezionale.

Concretamente questa situazione si crea con un microfono che ha esposto il diaframma al fronte sonoro, senza particolari accorgimenti.

Trasduttori di questo tipo vengono detti microfoni differenziali di ordine zero.

Se invece la funzione dipende dall'angolo in questo modo  $\Gamma(\theta) = a_1 \cos(\theta)$  allora avremo un Pattern bidirezionale.

Questa situazione si crea con un microfono che ha entrambe le facciate del diaframma esposte al fronte sonoro, badando bene a creare appositi condotti acustici che convogliano la pressione sonora.

Trasduttori di questo tipo vengono detti microfoni differenziali del primo ordine e ne abbiamo una rappresentazione dei Pattern principali in figura 2.1.

Due cose importanti da dire riguardo i Pattern sono che essi sono sensibili alla frequenza in quanto lo sfasamento del segnale frontale e posteriore produce effetti differenti nella membrana in funzione della lunghezza d'onda e quindi della frequenza.

La seconda cosa da dire è che i Pattern sono normalizzati, cioè si pone come massimo della sensibilità del microfono il valore 1, mentre tutti gli altri valori staranno nell'intervallo tra 0 (sensibilità nulla) e 1 (sensibilità massima), inoltre questi valori vanno riportati in scala di decibel normalizzata a 0 dB assegnato al valore massimo e assegnando valori negativi crescenti man mano che la sensibilità cala.

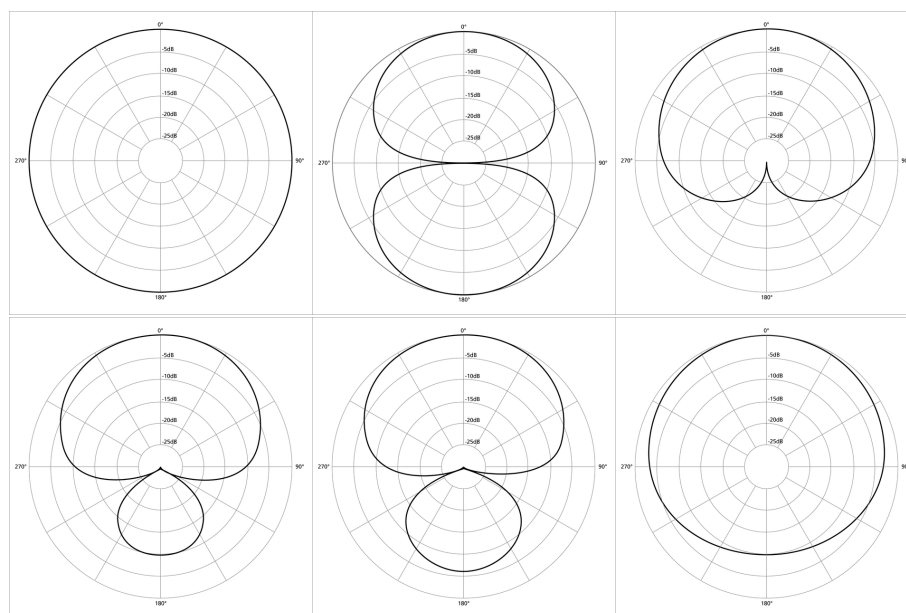


Figura 2.1: Pattern di ordine zero e uno

In figura 5.1 troviamo rispettivamente da in alto a sinistra:  
 Pattern omnidirezionale (microfono di ordine 0)(prima figura)  
 Pattern bidirezionali: a otto, cardioide, ipercardioide, supercardioide, subcardioide (microfoni del primo ordine).

### 2.2.1 Microfoni differenziali di ordine N-esimo

Estendiamo ora la funzione  $\Gamma$  in questo modo:

$$\Gamma(\vec{a}, \theta) = a_0 + a_1 \cos(\theta) + a_2 \cos^2(\theta) + \dots + a_N \cos^N(\theta) \quad (2.1)$$

Essa descrive Pattern più o meno complicati a seconda dell'ordine  $N$  cui terminiamo la serie, quindi in letteratura un microfono che genera un Pattern descrivibile tramite la funzione  $\Gamma(\vec{a}, \theta)$  che viene troncata all'ordine  $N$  – *esimo* verrà detto microfono differenziale di ordine  $N$ .

Microfoni di ordine zero e primo possono essere ottenuti realizzandoli fisicamente attraverso opportune specifiche, invece per quanto riguarda microfoni di secondo ordine e superiori, essi dovranno essere ottenuti elaborando segnali provenienti da più microfoni di ordine 0 e/o 1 al fine di creare un unico microfono virtuale (cioè fittizio) di caratteristiche desiderate.

Il motivo per cui si esprime la sensibilità come una combinazione descritta in 2.1 è che i costruttori realizzano microfoni in modo da esporre entrambe le facciate del diaframma al fronte sonoro che, se incide perpendicolarmente a quest'ultimo, non provoca nessuna sollecitazione della membrana, quindi il fatto che a multipli di 90 gradi la sensibilità si azzeri spiega il motivo per cui si usa la funzione coseno

Ora supponiamo di immergere un qualsiasi microfono in uno spazio acustico isotropo che abbia simmetria cilindrica, fatta questa assunzione possiamo definire il parametro Fattore di direttività (directivity factor)  $Q(\vec{a})$  come:

$$Q(\vec{a}) = \frac{|\Gamma(0, \vec{a})|^2}{\frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\Gamma(\theta, \vec{a})|^2 d\theta} \quad (2.2)$$

La formula rappresenta il rapporto tra la sensibilità massima del microfono normalizzata a 1 e la media della sensibilità normalizzata dello stesso posto in un campo sonoro diffuso.

In tabella 2.2.1 troviamo i principali valori del vettore  $\vec{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_N)$  per cui otteniamo i Pattern più usuali.

Pattern	N	Pattern coefficients $[a_0, \dots, a_N]$	$Q(\mathbf{a})$ dB	$F(\mathbf{a})$ dB
Omnidirectional	0	[1]	0	0
Figure of eight	1	[0, 1]	3.0	0
Subcardioid	1	[0.7, 0.3]	2.7	4.8
Cardioid	1	$[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$	4.3	11
Cardioid-A	2	$[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$	5.6	18
	3	$[\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}]$	6.5	25
Cardioid-B	2	$[0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$	6.6	18
	3	$[0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$	7.6	22
Hypercardioid	1	$[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$	4.8	11
	2	$[-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}]$	7.0	11
	3	$[-\frac{1}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{4}{7}, \frac{8}{7}]$	8.4	14
Supercardioid	1	[0.414, 0.586]	4.6	13
	2	[0.103, 0.484, 0.413]	6.3	26
	3	[0.022, 0.217, 0.475, 0.286]	7.2	40

Figura 2.2: Tabella dei coefficienti  $a_n$  in base al Pattern.

Da notare che il fattore di direttività è espresso in decibel con valore di riferimento la sensibilità normalizzata del microfono omnidirezionale.

## 2.3 Array microfonico

Questo paragrafo, salvo diverse indicazioni, è tratto da [5].

Per array microfonico si intende una serie di microfoni di caratteristiche opportune disposti spazialmente in modo da riuscire a fare alcuni rilevamenti acustici mirati (in particolare acquisizione simultanea di segnale) in base alla conformazione dell'apparato in discussione.

Ora essendo appunto una serie di microfoni posti in uno spazio, dovremo descrivere come questi ultimi sono disposti.

I tre tipi di disposizioni possibili sono:

- Array lineare: cioè costituito da microfoni posti a una certa distanza su di una retta; questo tipo di array è in grado di offrire solo risoluzione in direzione parallela all'asse dei microfoni.

- Array piano: cioè costituito da microfoni allocati in un piano (di geometria molto variabile) in grado di offrire risoluzione in un piano parallelo al piano dei microfoni.
- Array sferico: cioè con microfoni disposti in numero variabile in una sfera, esso permette risoluzione in ogni direzione dello spazio in cui è immerso.

La dislocazione dei microfoni nella griglia piana di collocamento è molto variabile, le principali configurazioni sono:

- Disposizione irregolare: i microfoni sono posizionati in maniera random sulla griglia.
- Disposizione regolare: la disposizione dei microfoni segue alcune geometrie ben definite in base al caso a cui si vuole applicare.

In particolare, le geometrie più utilizzate sono: array a griglia, array casuale, array a spirale, array a ruota, array a mezza ruota e array a croce; quest'ultima è la più semplice configurazione che offre risoluzione in 2D, ne possiamo aver un esempio qui sotto.

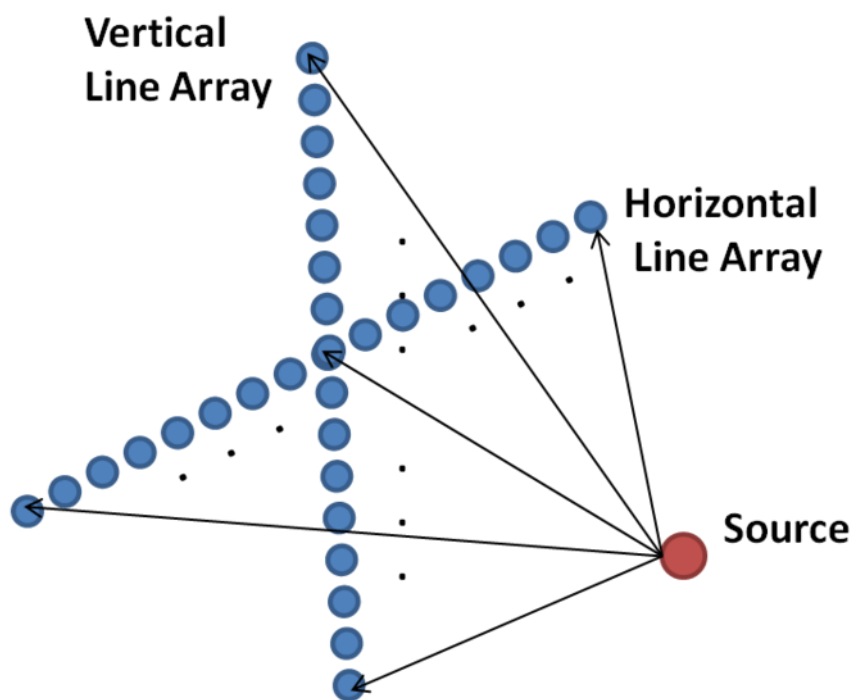


Figura 2.3: Array a croce



## Capitolo 3

# Dominio dei tempi, delle frequenze e Fourier

Nello sviluppo di questa tesi, incontreremo una fase dove dovremo elaborare dei segnali sia lavorando sul dominio del tempo, sia lavorando sul dominio delle frequenze, infatti in questo capitolo tratteremo la teoria che ci serve per passare da un dominio all'altro.

Le informazioni necessarie alla trattazione del capitolo sono state prese da [8].

Giustificiamo il fatto di poter lavorare con il dominio delle frequenze: in generale un segnale, posso graficarlo ed esprimerlo per mezzo della variabile tempo ma, di solito essendo quest'ultimo un segnale periodico (in quanto un segnale acustico è periodico), possiamo vederlo come una moltitudine di segnali cosinusoidali di varie frequenze sovrapposti.

Quindi possiamo ripensare il segnale iniziale come se si evolvesse anche nelle frequenze oltre che dal tempo, infatti possiamo rappresentarlo anche nel dominio delle frequenze dove possiamo vedere quali di queste funzioni cosinusoidali sono presenti e in che ammontare nel segnale originale.

Ora capito questo concetto bisognerà affrontare la matematica che ti permette di passare da un dominio all'altro e viceversa.

### 3.1 Trasformata e antitrasformata di Fourier

In matematica, per trasformata di Fourier si intende un'operazione appartenente alle trasformate integrali (quindi lineare) che, nel nostro caso, prende una funzione nel dominio del tempo e ne associa un'altra funzione nel dominio delle frequenze in questo modo:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{i\omega t} dt \quad (3.1)$$

Noi la descriviamo applicandola a un segnale con parametro il tempo, ma in generale la trasformata si può applicare anche ad altre variabili.

Volendo spiegare brevemente come agisce questo operatore, esso non fa altro che prendere il segnale in funzione del tempo  $f_t$  che viene moltiplicato per la funzione armonica di tipo sinusoidale generata dal fattore  $e^{i\omega t}$  a  $\omega$  fissato, poi viene integrata sul tempo la funzione risultante dalla operazione precedente dando un singolo valore che indica quanto peso ha quella determinata frequenza nel segnale originario.

Questo procedimento viene iterato per tutte le frequenze dando così in uscita una funzione  $F(\omega)$  chiamata spettro in frequenza della funzione  $f(t)$ .

Una trasformata molto simile invece si applica quando vogliamo tornare indietro, cioè quando vogliamo passare da una funzione  $F(\omega)$  nel dominio delle frequenze a una  $f(t)$  nel dominio dei tempi, questa operazione è l'antitrasformata di Fourier che si scrive in questo modo:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \quad (3.2)$$

Questa invece moltiplica ogni onda di frequenza  $\omega$  per il rispettivo peso dipendente dalla stessa frequenza.

Ora spiegato brevemente cosa si intende per trasformata e antitrasformata di Fourier, descriveremo una sua proprietà che per i nostri scopi risulta fondamentale.

## 3.2 Shift temporale e traslazione circolare delle frequenze

Riprendiamo in mano la formula 3.1, nulla ci vieta di poter prendere come coordinata temporale della  $f(t)$  un variabile  $t' = t + \alpha$ , quindi adoperando il cambio di variabile appena accennato, possiamo riscrivere la formula 3.1 in questo modo:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t' - \alpha) \cdot e^{i\omega(t' - \alpha)} dt' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t' - \alpha) \cdot e^{i\omega t'} \cdot e^{-i\omega\alpha} dt' \quad (3.3)$$

Portando poi il fasore  $e^{-i\omega\alpha}$  nella parte della  $F(\omega)$  risulta che:

$$F(\omega) \cdot e^{i\omega\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t' - \alpha) \cdot e^{i\omega t'} dt' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{i\omega(t+\alpha)} dt \quad (3.4)$$

Quindi dalla formula 3.4 si vede che se voglio inserire uno shift temporale  $t' = t + \alpha$  nei tempi, tramite la trasformata di Fourier devo adoperare una traslazione circolare  $e^{i\omega\alpha}$  nelle frequenze, cioè sfasare attraverso un fasore dipendente dallo shift temporale la trasformata del segnale iniziale.

Logicamente ora conoscendo il meccanismo, posso applicare lo stesso ragionamento all'antitrasformata immettendo già nell'integrale il fasore in questo modo:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\omega\alpha} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega(t+\alpha)} d\omega \quad (3.5)$$

Si vede immediatamente dalla formula 3.5 che se moltiplico per il fasore come appena accennato, la funzione  $f(t)$  data dall'antitrasformata viene shiftata in questo modo:

$$f(t + \alpha) = f(t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\omega\alpha} d\omega \quad (3.6)$$

### 3.3 DFT e IDFT

L'algoritmo più usato per eseguire la trasformata di Fourier e l'analoga antitrasformata è senz'altro la discrete Fourier transformation DFT e la rispettiva inverse discrete Fourier transformation IDFT le quali operano su campioni di tempo e di frequenze discrete e così facendo possono essere implementate nei calcolatori in quanto non riusciamo ad elaborare tempi e frequenze come variabili continue.

Cominciamo campionando il segnale  $f(t)$  su cui applicare l'algoritmo in una successione  $f_t$  con lunghezza  $N$  i cui elementi variano a seconda di che valore assuma il parametro tempo  $t$  anch'esso discreto, associamo a quest'ultima un'altra successione  $F_\omega$  anch'essa con lunghezza  $N$  i cui valori variano secondo il parametro  $\omega$  anch'esso discreto.

Introduciamo quindi la DFT come una funzione che permette questo nel seguente modo:

$$DFT : f_t \rightarrow F_\omega$$

$$F_\omega = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f_t e^{i\frac{\omega}{N}t} \quad t, \omega = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.7)$$

E la relativa IDFT come una funzione che fa l'esatto opposto in questo modo:

$$DFT : F_\omega \rightarrow f_t$$

$$f_t = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} F_\omega e^{-i\frac{t}{N}\omega} \quad t, \omega = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.8)$$

# Capitolo 4

## Beam-forming

Il Beam-forming è una delle quattro tecniche utilizzate per la localizzazione spaziale di una sorgente sonora, essa può essere fatta sia per sorgenti sonore in movimento in cui il piano delle locazioni (cioè la griglia immaginaria che è solidale con l'oggetto puntato) rimane fermo, sia per sorgenti dinamiche, ma l'implementazione di quest'ultimo fattore complica di molto l'algoritmo quindi prenderò in considerazione il caso statico.

Per quanto riguarda l'intero capitolo, le nozioni necessarie al suo sviluppo sono state prese da [7] per poi essere sviluppate in modo autonomo.

Questa tecnica come già detto si avvale di array piani e lineari collocati esclusivamente in regione di Far-field (vedremo nel capitolo 6 il perchè) e composti da microfoni omnidirezionali cioè che non presentano attenuazione del segnale in base all'angolo di incidenza del suono, descritti quindi, dalla funzione  $\Gamma(\vec{a}, \theta) = \text{const}$  (2.1) e un directivity factor  $Q(a) = 1$  (2.2).

Per spiegare il metodo comincerò con l'algoritmo per l'array lineare regolare per poi parlare di esempi concreti di mappe 2D ottenute tramite array piani (in quanto quello lineare offre risoluzione solo in 1D).

### 4.1 Delay and sum nel dominio del tempo

Cominciamo con il descrivere l'apparato che ci permette di applicare l'algoritmo:

Consideriamo un array lineare di larghezza  $D$  composto da  $m$  microfoni omnidirezionali disposti ad intervalli regolari  $d$  (dove la distanza è considerata misurando dall'asse centrale di ogni microfono), a ognuno di essi sarà collegato in uscita un blocco che ha la funzione di delay temporale (non specifico che tipo di blocco in quanto basta che attui

una traslazione nel tempo del segnale in ingresso), infine le uscite di tutti i blocchi saranno collegati a un sommatore di segnale che darà in uscita il segnale elaborato (vedi figura 4.2).

Consideriamo ora una sorgente estesa di energia sonora collocata a distanza  $L$  dal nostro array microfonico, ponendoci in regione di Far-field (cioè  $L > r$  con  $r$  definita in 1.37), possiamo schematizzarla come se essa fosse costituita da un'infinità di sorgenti poste in modo ordinato per tutta la lunghezza della sorgente, quindi ogni microfono capterà la sovrapposizione dei segnali provenienti da ogni angolo  $\theta$  ai quali sono posti rispettivamente i punti costituenti la sorgente sonora estesa.

Inizialmente, per motivi di semplicità, consideriamo solo un segnale proveniente da un solo angolo  $\theta$  fissato per poi implementarlo per ogni angolo.

Inoltre per l'intera durata del capitolo 4 assumo che i fronti d'onda visti dall'array siano piani e che l'attenuazione dell'intensità dello stesso segnale captato da due microfoni differenti sia trascurabile (vedi paragrafo 1.4).

La cosa importante mettendoci in Far-field è che i fronti d'onda emessa da una singola sorgente incidono con lo stesso angolo  $\theta$  in ogni microfono dell'array e quindi in base alla posizione della sorgente rispetto l'asse centrale di quest'ultimo, lo stesso segnale verrà captato da ogni microfono con un ritardo temporale dipendente dall'angolo  $\theta$ .

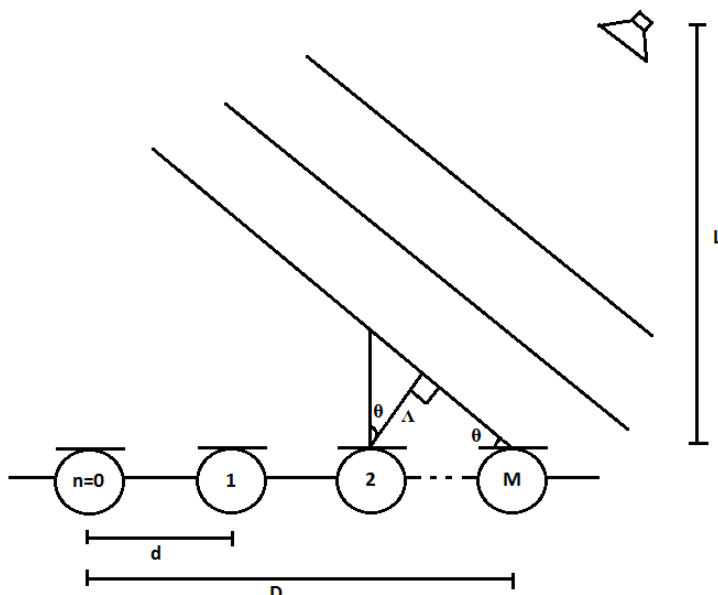


Figura 4.1: Array microfonico e sorgente

Questo ritardo  $\Delta$  può essere calcolato trigonometricamente conoscendo la velocità di propagazione delle onde (velocità del suono  $c$ ) e la distanza  $d$  tra ogni microfono in questo modo:

$$\Delta(\theta) = \frac{d \cdot \text{sen}(\theta)}{c} \Rightarrow \Delta_n(\theta) = \frac{d \cdot \text{sen}(\theta)}{c} n \quad (4.1)$$

Dove  $\Delta_n(\theta)$  è il ritardo dato del segnale nel  $n$  -esimo microfono rispetto al segnale del microfono  $n = 0$ , da notare che il delay è dipendente dall'angolo di incidenza del fronte sonoro ed è qui che sta il trucco in quanto poi capiremo l'importanza del legame tra tempo di delay e angolo di incidenza.

Per comodità esplicitiamo l'altra variabile (ci servirà in futuro) che sarebbe la base da cui partiamo per calcolare la formula 4.1 in questo modo:

$$\Lambda(\theta) = d \cdot \text{sen}(\theta) \Rightarrow \Lambda_n(\theta) = d \cdot \text{sen}(\theta) n \quad (4.2)$$

Ora immaginiamo un segnale  $f(x, t) = s_{\theta_0} \left( \frac{x}{c} - t \right)$  che dico essere proveniente da una sorgente all'angolo  $\theta_0$ , lo stesso segnale verrà captato dal  $n$  -esimo microfono relativamente come:

$$r_{n, \theta_0}(x, t) = s_{\theta_0} \left( \frac{x + \Lambda_n(\theta_0)}{c} - t \right) \quad (4.3)$$

Il segnale in uscita dai trasduttori viaggerà nella linea fino ai blocchi di delay con un  $\Delta_n(\theta)$  impostato e dato dalla seconda parte della formula 4.1 (da notare che il blocco di delay è impostato solo in relazione a un certo angolo e nessun altro).

Al momento che ogni segnale incontra il proprio blocco di delay, ognuno verrà traslato temporalmente in modo che all'uscita dei blocchi tutti i segnali risulteranno temporalmente allineati in questo modo:

$$t_{n, \theta_0}(x, t) = s_{\theta_0} \left( \frac{x + \Lambda_n(\theta_0)}{c} - (t + \Delta_n(\theta_0)) \right) \quad (4.4)$$

Successivamente ogni segnale incontrerà il blocco sommatore che provvederà ad unirli ed, essendo tutti allineati, verrà fuori un segnale rafforzato in maniera considerevole del tipo:

$$y_{\theta_0}(x, t) = \sum_{n=1}^m s_{\theta_0} \left( \frac{x + \Lambda_n(\theta_0)}{c} - (t + \Delta_n(\theta_0)) \right) \quad (4.5)$$

Ora consideriamo invece che oltre questa prima sorgente ce ne sia un'altra a un angolo  $\theta' \neq \theta_0$ , questa produrrà sui microfoni dei nuovi segnali che subiranno lo stesso processo

descritto prima con l'unica differenza che quando incontreranno i blocchi di delay questi ultimi, essendo impostati in relazione all'angolo  $\theta_0$ , gli trasleranno in maniera tale che arrivati al sommatore non sono più allineati e che, una volta sommati, andranno a creare del rumore di fondo con intensità molto bassa in questo modo:

$$y_{\theta'}(x, t) = \sum_{n=1}^m s_{\theta'} \left( \frac{x + \Lambda_n(\theta')}{c} - (t + \Delta_n(\theta_0)) \right) \quad (4.6)$$

Ecco quindi come, conoscendo la traslazione temporale che producono i blocchi di delay, posso conoscere a che angolo  $\theta_0$  arriva il segnale che viene amplificato (nell'esempio di sopra è il primo) attraverso la formula 4.1.

Ora non consideriamo più due singole sorgenti, ma un'infinità di esse che sono poste ognuna ad un angolo  $\theta$  compreso tra  $\theta_{min}$  e  $\theta_{max}$ , facendo questo passo non posso più mettere il pedice  $\theta_0$  nella funzione  $s$  ma dovrò ometterlo in quanto l' $n$ -esimo microfono capta direttamente un segnale  $s_n$  che è già la somma dei segnali provenienti da tutti gli angoli  $\theta \rightarrow \theta_{min} < \theta < \theta_{max}$ .

Quindi non possiamo specificare con il pedice da che angolo proviene il segnale captato, di conseguenza la definizione di  $\Lambda_n(\theta)$  (4.2) risulta sbagliata e inutile, infatti dovrà essere anch'essa omessa dando come risultato la seguente formula:

$$r_n(x, t) = s_n \left( \frac{x}{c} - t \right) \quad (4.7)$$

Quindi andando in cascata abbiamo che la formula 4.6 viene modificata nel modo più generale possibile in questo modo:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^m s_n \left( \frac{x}{c} - (t + \Delta_n(\theta_0)) \right) \quad (4.8)$$

La cosa importante da notare è che ogni microfono dell'array capta i segnali provenienti da ogni direzione ma, in uscita, la funzione  $y(x, t)$  qui sopra costituisce in buona approssimazione solo il segnale proviene da  $\theta_0$ .

Un'immagine che chiarisce bene il tutto la troviamo in figura 4.2.



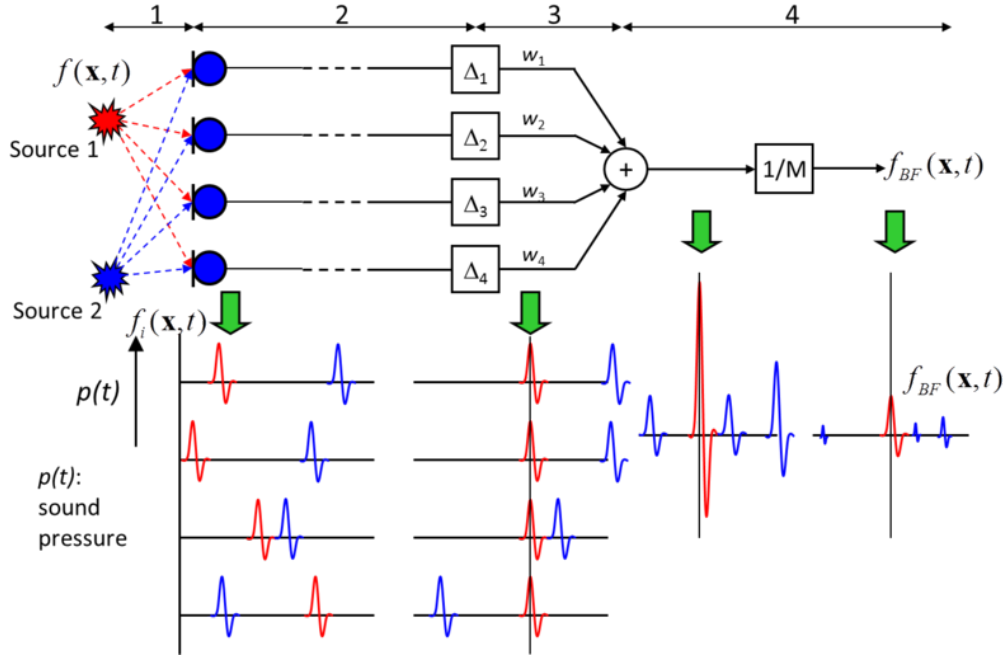


Figura 4.2: Apparato di Beam-forming nel dominio del tempo

### 4.1.1 Delay and sum di un segnale cosinusoidale

In questo paragrafo a differenza degli altri del capitolo 4 non considererò segnali generici  $s$  di cui non conosco la composizione ma userò segnali di tipo cosinusoidale in quanto un suono è composto da sovrapposizioni di questi ultimi, quindi si dovrà specificare, per giustificare la notazione assunta in seguito, che tutti i segnali cosinusoidali scritti sia in forma trigonometrica sia esponenziale siano identici e che il coefficiente di moltiplicazione che indica l'ampiezza massima di ogni segnale sia unitario.

Conoscendo la notazione fasoriale, è più facile rappresentare l'onda come un esponenziale complesso nel seguente modo:

$$f(x, t) = \cos(k_0 x - \omega_0 t) = \Re e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \quad (4.9)$$

Ora conoscendo l'evoluzione del segnale in equazione 4.9, scrivo il segnale proveniente da  $\theta_0$  e captato dal  $n$ -esimo microfono dell'array come:

$$r_n(x, t) = \Re e_{\theta_0}^{i(k_0(x + \Lambda_n(\theta_0)) - \omega_0 t)} \quad (4.10)$$

Ogni segnale viaggia shiftato, ma dal momento che essi passeranno nel blocco di delay che gli shifterà temporalmente in questo modo:

$$r_n(x, t) \Rightarrow t_n(x, t) = \Re e_{\theta_0}^{i(k_0(x+\Lambda_n(\theta_0))-\omega_0(t+\Delta_n(\theta_0)))} \quad (4.11)$$

Viaggeranno allineati solo i segnali che soddisferanno la condizione imposta da 4.1.

Infine il nostro segnale di uscita dal sommatore sarà la somma dei segnali  $t_n(x, t)$ .

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \Re \sum_{n=1}^m e_{\theta_0}^{i(k_0(x+\Lambda_n(\theta_0))-\omega_0(t+\Delta_n(\theta_0)))} = \\ &= \sum_{n=1}^m \cos_{\theta_0}(k_0(x + \Lambda_n(\theta_0)) - \omega_0(t + \Delta_n(\theta_0))) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Per semplicità e compattezza posso riscrivere la prima parte dell'equazione 4.12 introducendo due vettori e uno scalare in questo modo:

$$q = \{q_n = e_{\theta_0}^{i(k_0(x+\Lambda_n(\theta_0)))} ; n = 0, 1, 2, 3, \dots, m ; q_n = q_0, q_1, q_2, q_3, \dots, q_m\} \quad (4.13)$$

$$w = \{w_n = e_{\theta_0}^{i(\omega_0(t+\Delta_n(\theta_0)))} ; n = 0, 1, 2, 3, \dots, m ; w_n = w_0, w_1, w_2, w_3, \dots, w_m\}$$

Scrivendo semplicemente il prodotto scalare tra il primo vettore e l'aggiunto del secondo vettore in questo modo:

$$y(x, t) = q \cdot w^\dagger \quad (4.14)$$

Se siamo invece nel caso (come nel paragrafo 4.1) in cui ogni microfono non capta un solo segnale da un'unica direzione ma capta un segnale composto da più onde di più direzioni, allora non ha senso esplicitare il pedice  $\theta_0$  e neanche inserire il fattore  $\Lambda_n(\theta)$  ma, come da paragrafo precedente, riscriverò l'equazione 4.12 in questo modo:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^m \cos_n(k_0 x - \omega_0(t + \Delta_n(\theta_0))) \quad (4.15)$$

## 4.2 Delay and sum nel dominio della frequenza

Uno dei miglioramenti che si possono effettuare per aumentare l'efficacia dell'algoritmo è quello di non lavorare più nel dominio dei tempi, ma quello di lavorare nel dominio delle frequenze con quello che viene definito frequency domain Beam-forming.

Questo si fa perchè in realtà non abbiamo un semplice segnale sinusoidale (o sinusoidale) ma abbiamo un segnale che copre uno spettro molto più ampio in frequenza (di solito si prende lo spettro dell'udibile cioè  $20 - 20000 \text{ Hz}$ ) quindi la cosa più intuitiva da fare è cercare di dividere questa banda in tutte le sue frequenze e lavorare singolarmente su ognuna di esse, cosa impossibile in quanto avremmo infinite frequenze infatti si adoperava una finestratura discreta che comprenda una larghezza di banda finita.

## 4.2.1 Impiego concettuale della trasformata di Fourier

Per prima cosa consideriamo il caso in cui nel nostro sistema abbiamo un blocco che fa la trasformata di Fourier, introduco così il paragrafo perchè in realtà non esiste nessun blocco analogico che restituisce la funzione quindi ragioneremo introducendo una strada prettamente teorica per poi nel prossimo paragrafo mostrare come implementare la trasformata di Fourier in maniera digitale con la discrete Fourier transformation DFT.

Cominciamo con dire che l'unica cosa che cambia dall'algoritmo spiegato in precedenza è che facciamo la trasformata di Fourier (vedi formula 3.1) dei segnali  $r_n(x, t)$  in modo da trovare lo spettro in frequenza  $R_n(x, \omega)$  di ogni  $n$ -esimo segnale proveniente dal corrispondente microfono in questo modo:

$$R_n(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} r_n(x, t) \cdot e^{i\omega t} dt \quad (4.16)$$

Ora si provvede a fare la traslazione circolare per attuare il delay temporale (vedi paragrafo 3.4.2) dei segnali  $R_n(x, \omega)$  in questo modo:

$$T_n(x, \omega) = R_n(x, \omega) \cdot e^{i\omega \Delta_n(\theta_0)} \quad (4.17)$$

A questo punto si sommeranno le funzioni  $T_n(x, \omega)$  in uscita al blocco di traslazione:

$$Y(x, \omega) = \sum_{n=1}^m R_n(x, \omega) \cdot e^{i\omega \Delta_n(\theta_0)} \quad (4.18)$$

Infine si applicherà l'antitrasformata a  $Y(x, \omega)$  per riavere il segnale in uscita nel dominio del tempo:

$$y(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(x, \omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^m R_n(x, \omega) \cdot e^{-i\omega(t - \Delta_n(\theta_0))} d\omega \quad (4.19)$$

## 4.2.2 Impiego della trasformata di Fourier attraverso la DFT

Ci rendiamo conto ora che è impossibile implementare l'algoritmo descritto appena sopra in quanto non esiste dispositivo in grado di effettuare la trasformata e l'antitrasformata di Fourier come definita nel paragrafo 3.1 ma dobbiamo utilizzare gli algoritmi DFT e IDFT introdotti nel paragrafo 3.3 in questo modo:

Per prima cosa l'algoritmo DFT funziona solo con segnali discreti quindi prendiamo ogni segnale  $r_n(x, t)$  e lo campio in modo da avere un segnale discreto:

$$r_n(x, t) = s_n\left(\frac{x}{c} - t\right) \Rightarrow r_{n,x,t} = s_{n,x,t} \quad (4.20)$$

Ora gli  $m$  segnali provenienti dai microfoni incontreranno  $m$  blocchi che attuano la DFT e in uscita a questi ultimi si avranno  $N$  segnali per ciascun blocco dove a ognuno corrisponderà una frequenza  $\omega$  diversa:

$$R_{n,x,\omega} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} r_{n,x,t} \cdot e^{i\frac{\omega}{N}t} = \quad (4.21)$$

Poi ciascun  $\omega$  –esimo segnale proveniente dall' $n$  –esimo DFT incontrerà un blocco che aggiungerà una fase  $\omega\Delta_n(\theta_0)$  per effettuare la traslazione circolare introdotta nel paragrafo 3.2.

$$T_{n,x,\omega} = R_{n,x,\omega} \cdot e^{i\omega\Delta_n(\theta_0)} \quad (4.22)$$

Verranno poi sommati gli  $n$  segnali con la stessa  $\omega$  in questo modo:

$$Y_{x,\omega} = \sum_{n=1}^m R_{n,x,\omega} \cdot e^{-i\omega\Delta_n(\theta_0)} \quad (4.23)$$

Infine verrà applicata la IDFT (equazione 4.24) per poi ripassare da un segnale discreto a uno continuo (4.25) ottenendo il segnale  $y(x, t)$ .

$$y_{x,t} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\omega=0}^{N-1} Y_{x,\omega} \cdot e^{-i\frac{t}{N}\omega} = \quad (4.24)$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\omega=0}^{N-1} \sum_{n=1}^m R_{n,x,\omega} \cdot e^{-i\omega\left(\frac{t-\Delta_n(\theta_0)}{N}\right)} \quad (4.25)$$

$$y_{x,t} \Rightarrow y(x, t)$$

In figura 4.3 troviamo un schema che rende molto semplice quanto scritto in questo paragrafo.

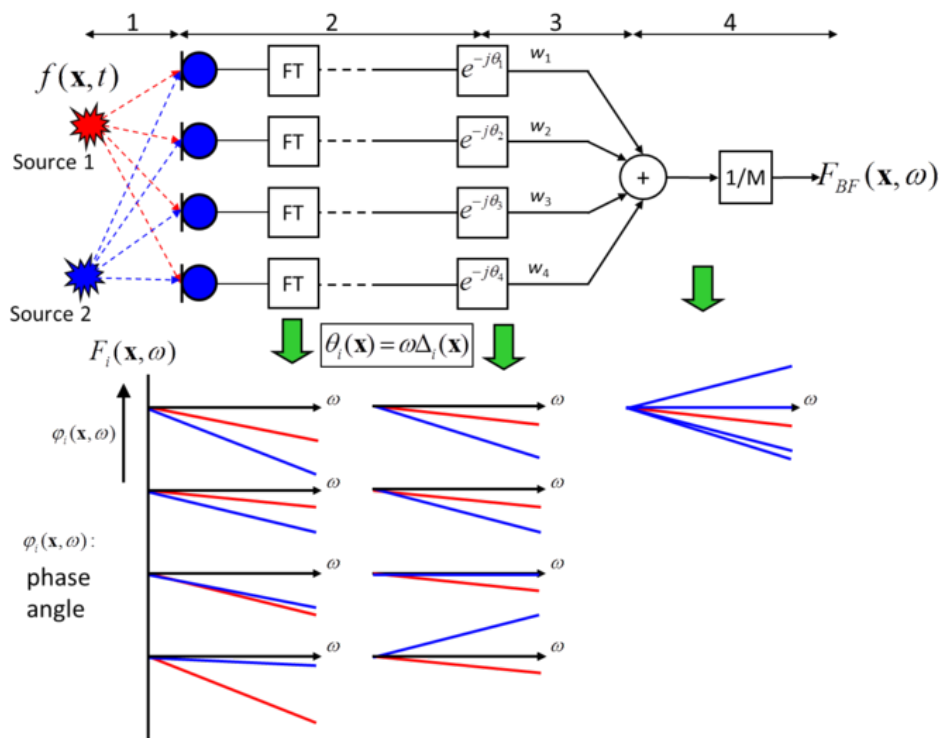


Figura 4.3: Apparato di Beam-forming nel dominio delle frequenze.

## Capitolo 5

# Beam-pattern ed elaborazione della mappa acustica

Cominciamo con il ribadire il perchè è stato sviluppato il metodo del Beam-forming, in sostanza esso esiste perchè vogliamo creare un singolo microfono virtuale a partire da un'array di  $m$  microfoni reali uguali, cosa che non riusciremmo a fare costruendolo fisicamente in quanto si riesce solo a costruire microfoni del primo ordine ma non di ordine superiore (vedi capitolo 2.2).

Prendiamo ora in esame questo microfono, ci sono due cose importanti da dire su di esso:

La prima è che esso viene chiamato virtuale in quanto realmente non esiste ma potendo associare la funzione  $y(x, t)$  a un suo ipotetico output, per noi è come se realmente esistesse.

La seconda è che esso dovrà avere delle caratteristiche ben precise che dovranno soddisfare due condizioni: massimizzare il fattore di direttività  $Q(\vec{a})$  (vedi equazione 2.2) e restituire un segnale il più pulito e nitido possibile massimizzando un fattore che chiamerò guadagno dell'array (rappresenta il rapporto tra il segnale di uscita e il rumore di fondo).

Quindi lo scopo di questo metodo è quello di raggiungere due obiettivi posti dalle due condizioni appena citate, in questo capitolo infatti, descriveremo come verificare che l'algoritmo crei un microfono super-direzionale verificando le condizioni e descriveremo come utilizzare quest'ultimo per creare una mappa sonora 2D dello spazio acustico da sondare.

Le informazioni per lo sviluppo di questo capitolo sono state prese in [5] e [7] per poi essere sviluppate autonomamente.

## 5.1 Costruzione del Beam-pattern

Immaginiamo di prendere il nostro array microfonico e di porlo in un campo acustico in cui generiamo un'onda sonora  $s_{test}(x, t)$  di intensità conosciuta  $I_{test}$  proveniente solamente da un'unica direzione e che incide nel nostro array con angolo  $\theta_{test}$ .

L'array microfonico capterà questo segnale e darà in uscita una funzione  $y_{\theta_{test}}(x, t)$  di una certa intensità  $I_{\theta_{test}}$  (calcolata con l'equazione 1.33).

La cosa notare bene è che questa funzione è come se la desse come output il nostro microfono virtuale.

Ora rigenereremo lo stesso segnale  $s_{test}(x, t)$  proveniente però da un angolo  $\theta'_{test}$  e calcoleremo di nuovo l'intensità  $I_{\theta'_{test}}$  associata all'output  $y_{\theta'_{test}}(x, t)$ .

Iteriamo il ragionamento a tutti gli angoli continui compresi tra  $-180^\circ$  e  $+180^\circ$  in modo da conoscere l'intensità sonora  $I(\theta)$  in uscita dal microfono virtuale in funzione dell'angolo di incidenza del suono, provvederemo poi a tradurre in decibel tutti questi valori per una più facile comprensione (NB. normalizzeremo la scala logaritmica con  $0 \text{ dB}$  associato all'intensità massima  $I_{max}(\theta)$  calcolata) tramite la formula:

$$I(\theta) [dB] = 10 \cdot \log \left[ \frac{I(\theta) [\frac{W}{m^2}]}{I_{max}(\theta) [\frac{W}{m^2}]} \right] \quad (5.1)$$

Ora non ci rimane altro che graficare la nostra  $I(\theta) [dB]$  in un diagramma polare in cui sono riportate le varie direzioni  $\theta$  e valori dell'intensità in scala logaritmica in questo modo:

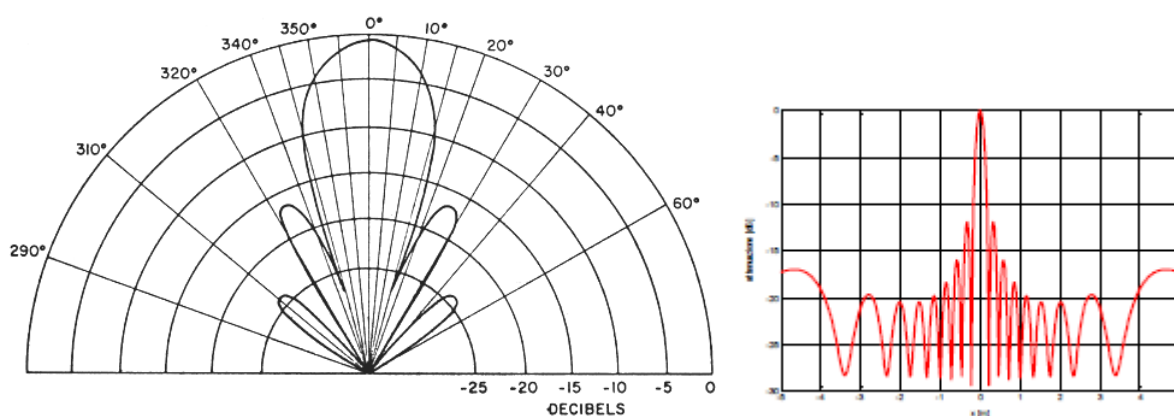


Figura 5.1: Beam-pattern in coordinate polari e cartesiane.

Questo tipo di grafico associato al microfono virtuale si chiama Beam-pattern ed è l'esatto analogo di un diagramma polare per un microfono reale, contiene inoltre le stesse identiche informazioni sulla sensibilità del microfono in base all'angolo di incidenza.

Ora quello che si cerca di fare è riuscire a trovare il miglior Beam-pattern che verifica le due condizioni che ci siamo prefissati, in quanto:

Massimizzando il fattore di direttività creiamo un main lobe il più stretto e piccolo possibile (vedi figura 5.2) e riusciamo a puntare il più possibile in una singola direzione.

Massimizzando invece il guadagno dell'array riusciamo ad avere a parità di livello di rumore di fondo un segnale in uscita del microfono virtuale molto rinforzato rispetto a quello che uscirebbe da un microfono reale, quindi, ad avere un segnale più pulito e nitido possibile.

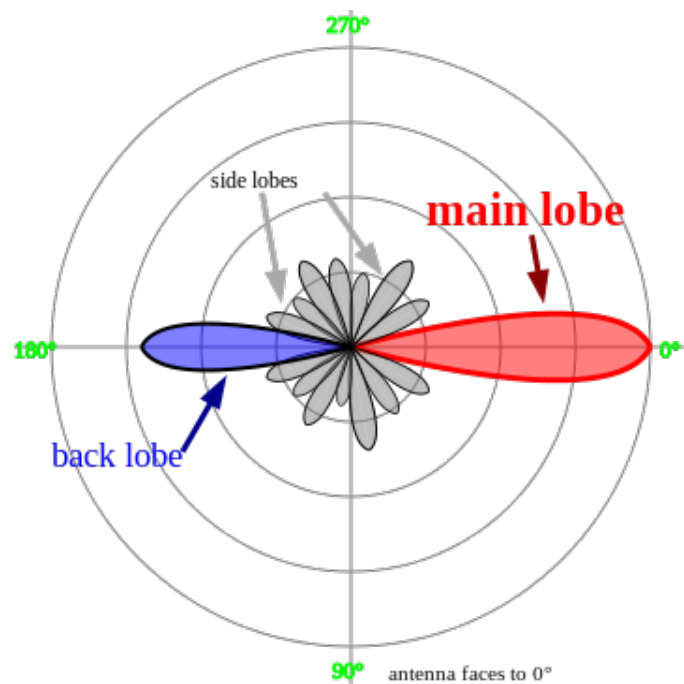


Figura 5.2: Diagramma rappresentante main, side e back-lobe.

Nel diagramma polare 5.2 sono presenti oltre il main lobe che sarebbe la porzione di spazio per cui il microfono è il più sensibile possibile, i side-lobe e il back-lobe:

I side-lobe sono parte del risultato del Beam-forming e sono ineliminabili, si tende soltanto a renderli il più piccoli possibili massimizzando il guadagno dell'array e il fattore



di direttività.

Invece il back-lobe è il risultato del fatto che i microfoni di cui è costituito l'array sono omnidirezionali quindi captano specularmente sia suoni provenienti sia da davanti che da dietro, modi possibili per eliminare il back-lobe sono collocare materiale fonoassorbente dietro l'array o comporre quest'ultimo di microfoni di Pattern cardioide al posto che omnidirezionali.

Ora bisogna discutere di un aspetto davvero importante per quanto riguarda il Beam-pattern, infatti per semplificare le cose, in figura 2.2 è stato graficato soltanto una sezione dell'intero grafico in quanto per ricavarci quello che dovrebbe essere il vero diagramma bisognerebbe far ruotare la figura lungo l'asse inferiore, il risultato ci da indicazioni sul fatto che se posizioniamo il nostro array parallelo al terreno, esso non ci da informazioni sul fatto che il segnale acustico venga da davanti o dietro, o dall'alto o dal basso.

## 5.2 Mappa acustica 2D

Cominciamo con il procedimento per creare la mappa acustica prima in una dimensione, per poi implementarla in 2D.

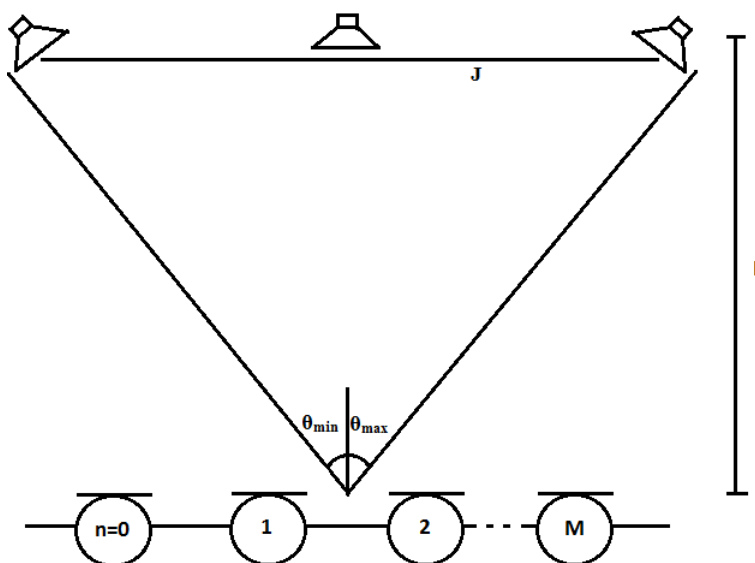
Consideriamo che dallo studio del Beam-pattern spiegato in precedenza, maggior parte del segnale  $y(x, t)$  in uscita dal microfono virtuale è composto da ciò che capta in direzione del main-lobe in quanto il microfono presenta la maggior sensibilità in questa direzione attenuando ciò che arriva dalle altre direzioni (per i nostri scopi assumeremo che la totalità del segnale sia composta da ciò che capta il microfono in direzione del main-lobe).

Ora facciamo una considerazione importante, consideriamo l'equazione  $\Delta_n(\theta_0)$  (4.1), abbiamo che essa è in funzione solo dell'angolo  $\theta_0$  quindi i blocchi di delay impostati con questo preciso delta temporale daranno come risultato il fatto che il microfono virtuale punti proprio in questa direzione, o più precisamente l'asse principale che passa attraverso il main-lobe sia proprio posto all'angolo  $\theta_0$  rispetto l'asse principale del microfono virtuale.

Se poi impostiamo il delay temporale all'angolo  $\theta'$  il main-lobe come risultato dell'algoritmo si sposterà e punterà in questa direzione, iteriamo il procedimento per un angolo continuo compreso tra  $\theta_{min}$  e  $\theta_{max}$  vedremo che il main-lobe si sposterà di conseguenza e che il microfono capterà principalmente il segnale proveniente dalla direzione  $\theta$  assunta in quel preciso momento.

Ipotizziamo ora di dover mappare un'oggetto unidimensionale (cioè un'oggetto che si sviluppa solo sulla sua lunghezza  $J$ ) posto a una distanza  $L$  dall'array, prendendo come  $\theta = 0^\circ$  l'angolo per cui il main-lobe punta verso il centro dell'oggetto è facile impostare come:

$$\theta_{min} = -\arctan \frac{J/2}{L} \quad \theta_{max} = \arctan \frac{J/2}{L} \quad (5.2)$$



Ora non si farà altro che calcolare l'intensità sonora per ogni angolo compreso tra  $\theta_{min}$  e  $\theta_{max}$  applicando la formula 1.33 in questo modo:

$$\langle I(\theta) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{y^2(x, t, \theta)}{\rho_0 c} dt \quad (5.3)$$

Qui bisogna fare attenzione in quanto ho messo come variabile  $\theta$  all'interno della funzione  $y$  di uscita del microfono virtuale in quanto assumiamo che per un determinato angolo esso capti solo il segnale proveniente da quella specifica direzione e che quindi per direzioni differenti capti segnali differenti.

Invece la variabile  $x$  non viene più considerata in quanto non trattiamo più onde che viaggiano nello spazio.

Ora non rimane altro che implementare lo stesso ragionamento fatto però con un'array planare a forma di croce (cross array) composto da due bracci contenenti ognuno  $m$  microfoni in modo da fornire come elaborato una mappa 2D che è più compatibile con la realtà, questo è il metodo più semplice per estendere il concetto di Beam-forming in due dimensioni in quanto ce ne sarebbero altri con array di varie forme ma sono troppo

complicati e presentano troppe considerazioni per questa elaborazione teorica.

Supponiamo di posizionare il nostro cross array con un braccio perpendicolare al terreno e uno parallelo ad esso, il primo braccio per quanto detto prima offrirà risoluzione solo sulla componente  $y$  perpendicolare al suolo, il secondo invece solo sulla componente  $x$  parallela ad esso.

Tutto quello che c'è da fare quindi è collegare il secondo braccio dell'array microfonico a un apparato esattamente identico a quello collegato al primo spiegato nel corso di questa tesi, così facendo si creeranno ben due microfoni virtuali le cui uscite dovranno essere sommate in modo da avere un unico segnale  $y(x, t, \theta, \alpha)$  dipendente dagli angoli  $\theta$  e  $\alpha$  (questi due sono gli angoli con cui è impostato relativamente il primo e il secondo banco di delay dei due apparati di Beam-forming).

Quindi settando bene entrambi i banchi di delay avremo che il Beam-pattern associato all'ultimo segnale descritto sarà semplicemente la somma dei Beam-pattern dei due microfoni virtuali da cui è composto, così facendo questo metodo offrirà risoluzione sia sull'asse  $x$  che sull'asse  $y$  dando come risultato un mappa sonora 2D della seguente forma:

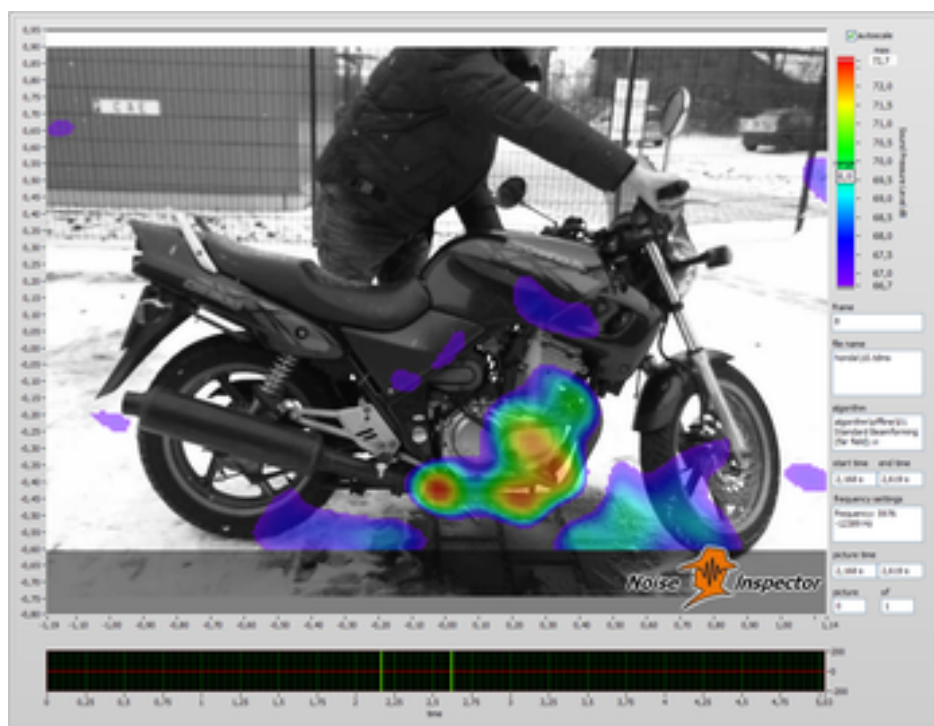


Figura 5.3: Mappa acustica 2D

La prima cosa importante da notare è che viene graficata l'intensità media  $\langle I(\theta, \alpha) \rangle$  come una scala a colori in modo da poter visualizzare l'intensità sonora in modo chiaro e univoco, la seconda è che non vengono posti i due angoli come coordinate ma conoscendo la distanza  $J$  dell'oggetto è facile fare un cambio di coordinate per visualizzare la mappa in relazione alle dimensioni dell'oggetto stesso.

## Capitolo 6

# Limiti e problemi del Beam-forming

La tecnica spiegata in questa tesi presenta però limiti fisici intrinseci che non è possibile eliminare completamente in quanto bisognerebbe adottare altri algoritmi di natura diversa, i principali problemi sono legati al posizionamento dell'array e dalla risoluzione del Beam-pattern.

Per cominciare descriviamo il primo problema, infatti come già accennato possiamo utilizzare questo metodo solo posizionando l'array microfonico in una regione Far-field (vedi condizione nel paragrafo 1.4) rispetto la sorgente sonora estesa in quanto abbiamo fatto l'assunzione che le onde captate dai microfoni siano onde piane con un'intensità sonora che si attenua di 6 *dB* ogni raddoppio della distanza, inoltre come accennato nel capitolo 1.4 l'impedenza acustica è espressa tramite un coefficiente reale il che esclude qualsiasi sfasamento tra pressione e velocità delle particelle dando così una potenza acustica attiva.

Il problema appena descritto è insormontabile in quanto se ci mettessimo in regione di Near-field tutte le nostre ipotesi cadrebbero rendendo vano tutto il ragionamento che sta alla base dell'algoritmo del Beam-forming.

Ora passiamo al secondo problema: esso riguarda la risoluzione del Beam-pattern definita come la minima distanza per cui 2 sorgenti possono essere considerate separate (quanto segue è stato trattato prendendo le informazioni da [5]).

Una stima della risoluzione è data dalla formula di Rayleigh:

$$R = \frac{L \cdot \lambda}{D \cdot \cos^3(\theta)} \quad (6.1)$$

Con  $L$  distanza tra array e sorgente estesa,  $\lambda$  lunghezza d'onda del suono incidente,  $D$  larghezza dell'array,  $\theta$  angolo in cui punta il microfono virtuale.

Il parametro  $R$  invece una distanza e va vista essenzialmente come l'inverso della risoluzione.

E' semplice vedere che al crescere della distanza a cui è posto l'array la risoluzione diminuisce, quindi intuitivamente si cercherà di metterlo il più vicino possibile rispettando però la condizione di Far-field imposta in precedenza.

Per quanto riguarda l'angolo e la frequenza dell'onda incidente, la risoluzione diminuisce man mano che il main-lobe punta verso l'esterno cioè che si allontana dalla direzione indicata dall'asse principale del microfono virtuale;

Invece parlando della frequenza, più l'onda incidente è di frequenza bassa più la risoluzione peggiorerà per questi problemi non ci sono soluzioni in quanto non possiamo agire sui parametri della sorgente.

Ora passiamo alla larghezza dell'array, maggiore é il valore  $D$  maggiore sarà la risoluzione, essa aumenterà anche aumentando il numero di microfoni e la relativa distanza  $d$  tra di essi.

Gli schemi riportati in figura 6.1 danno una visione più immediato di quello appena spiegato.

Quindi l'ideale sarebbe un'array di grande dimensione composto da molti microfoni molto distanziati l'uno dall'altro, l'unica cosa è che bisogna valutare molto bene quest'ultimo parametro in quanto  $d$  è strettamente legata alla frequenza  $f_{max}$  oltre la quale si verificherebbero problemi di aliasing spaziale, cerchiamo di fare luce su questo fenomeno:

L'aliasing spaziale in questo caso si tratta guardando la distanza  $d$  tra due microfoni posti consecutivamente, consideriamo un treno di fronti d'onda da cui è composto il suono incidente, quando un fronte incide sul primo microfono lo fa con una certa fase dipendente dal tempo, se in quel preciso momento il fronte d'onda che lo precedeva incide nel secondo microfono con la stessa fase di cui ho parlato allora l'algoritmo non capisce se il suono proviene da una direzione per cui i due fronti d'onda nei due microfoni distano  $n\lambda$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

L'unico modo per risolvere questo problema è porre come frequenza massima  $f_{max}$  che l'algoritmo può elaborare la seguente:

$$f_{max} = \frac{c}{d \cdot \text{sen}(\theta)} \quad (6.2)$$

Queste sono le principali problematiche e limitazioni del Beam-forming nelle quali si può intervenire in maniera limitata come descritto sopra, l'ultimo appunto da dire è che la risoluzione aumenta di molto se si usa l'algoritmo nel dominio della frequenza in quanto altera il Beam-pattern abbassando di molto l'altezza dei side-lobe rispetto quanto farebbe l'algoritmo nel dominio del tempo.

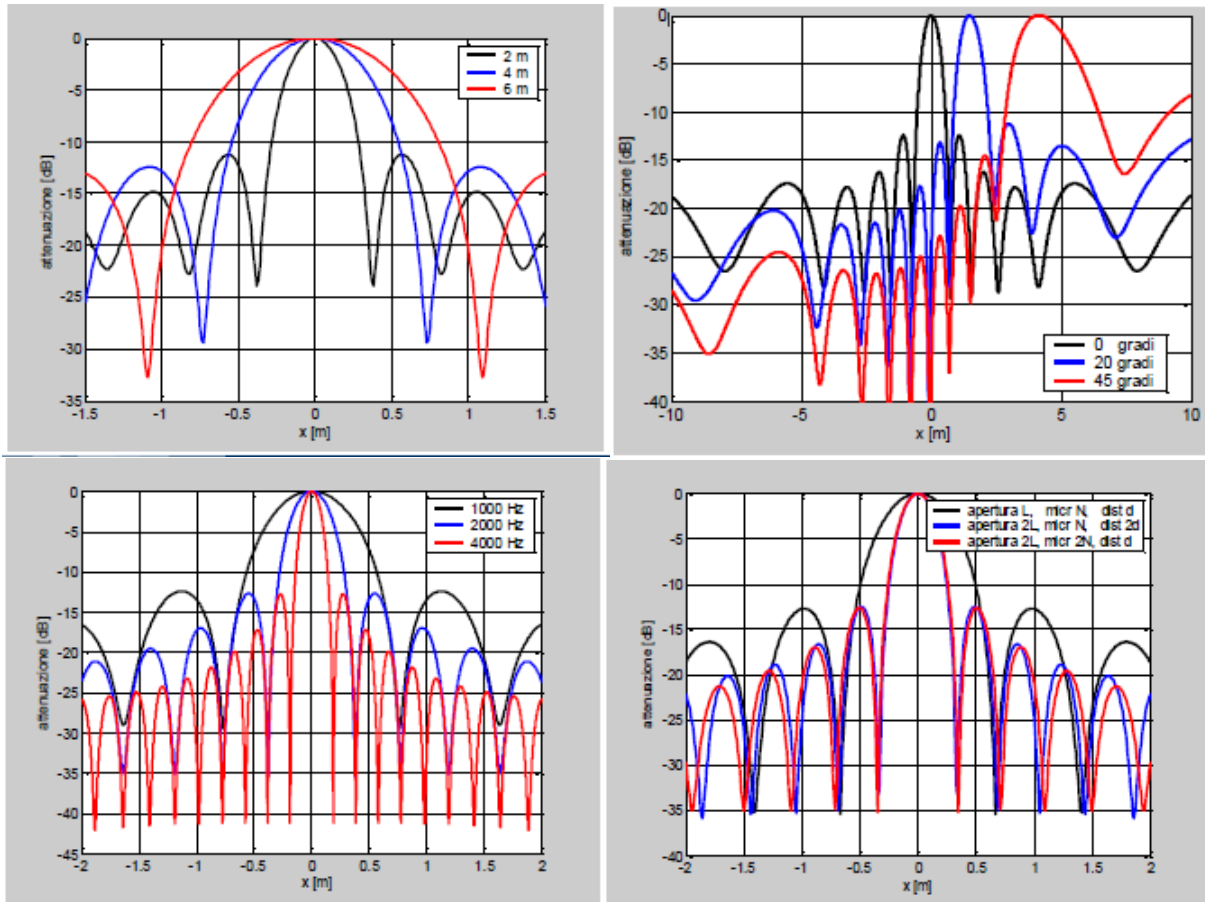


Figura 6.1: Pattern al variare della distanza, dell'angolo di incidenza, dalla frequenza e della lunghezza dell'array.

# Conclusioni

In conclusione non resta che ribadire quello che è stato fatto portando all'elaborazione del Beam-forming.

In sostanza partendo da semplici considerazioni su singoli microfoni di caratteristiche conosciute, si è implementato il tutto in un array composto sempre da questi trasduttori ma con la particolarità che elaborando il segnale in uscita da esso, con l'algoritmo stesso del Beam-forming, si è potuto creare un microfono virtuale super-direzionale orientabile nello spazio.

Fatto questo ci si è soffermati sulle caratteristiche direzionali attraverso il Beam-pattern del microfono virtuale, inoltre, sfruttando quest'ultimo, si è potuto capire a quanto ammontava l'intensità sonora di ogni parte costituente una sorgente estesa presa in considerazione, mappando così questi valori in una mappa 2D dalla semplice comprensione.

Questo metodo quindi si può applicare in tutte le situazioni in cui si ha la necessità di comprendere com'è fatto una porzione di campo sonoro (quindi anche di captare le vibrazioni di oggetti) o più in generale si può implementare dove ci sia la necessità di sondare un oggetto come mezzo di indagine un'onda sonora.

Come ultima cosa, si ha la possibilità di usare l'algoritmo del Beam-forming non solo in campo acustico ma in ogni applicazione che abbia a che fare con onde che si propagano nel tempo e nello spazio, un esempio può essere dato dalle onde elettro-magnetiche in cui, usando antenne come trasduttori, il Beam-forming permette di localizzare un sorgente di onde elettro-magnetiche o addirittura di essere l'apparato stesso una fonte di onde direzionali.

Quindi come si può capire in questa tesi si sono gettate le basi teoriche e pratiche per la costruzione dell'algoritmo, ma per raggiungere risultati migliori l'argomento merita di essere ampliato e studiato in modo più consono applicando conoscenze che esulano dallo scopo e dagli obiettivi di questa tesi.



# Bibliografia

- [1] Renato spagnolo, *Manuale di acustica*, Utet libreria, Torino 2001.
- [2] David Halliday, Robert Resnick, Kenneth S. Krane, *Fisica 2*, quarta edizione, casa editrice Ambrosiana, Milano 2004.
- [3] Fabio Ortolani, *Metodi matematici per la fisica*.
- [4] Tesi di Enzo de Sena, *Analysis, Design and Implementation of Multichannel Audio Systems*, King's college London Luglio 2013.
- [5] [http://misure.mecc.polimi.it/homepage\\_corsi/TMA\\_Vanali/Lezioni/008\\_lez\\_acustica01\\_v2.pdf](http://misure.mecc.polimi.it/homepage_corsi/TMA_Vanali/Lezioni/008_lez_acustica01_v2.pdf)
- [6] <http://www.studiosoundservice.com/materiale didattico/Microfoni1.pdf>
- [7] [http://digilander.libero.it/simodg/delay\\_and\\_sum\\_beamforming.htm](http://digilander.libero.it/simodg/delay_and_sum_beamforming.htm)
- [8] <http://www.mat.unimi.it/users/gaeta/FM2/FT.pdf>