Alma Mater Studiorum
Università di Bologna

SCUOLA di SCIENZE
Corso di Laurea Triennale in Matematica

ALCUNI RISULTATI SULLA CONVERGENZA IN MISURA

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ANDREA BONFIGLIOLI

Presentata da:
FRANCESCO DI FABIO

Sessione III
Anno Accademico 2013-2014

Indice

Introduzione

In questa Tesi verrà studiata la nozione di **convergenza in misura**, un particolare tipo di convergenza per successioni di funzioni misurabili; forniremo poi alcuni risultati complementari e un confronto con altri tipi di convergenze.

Illustriamo brevemente come, capitolo per capitolo, è stato svolto l'elaborato.

Propedeuticamente ai successivi capitoli, nel Capitolo 1 vengono richiamati elementi di teoria della misura, integrazione di funzioni, gli spazi L^p e relative convergenze: si parte dalla definizione di funzione misurabile e quella di convergenza μ-quasi dappertutto; si passa poi alla costruzione dell'integrale, concludendo con la definizione degli spazi L^p con $p \in [1, \infty]$. Viene fornito un importante esempio di successione di funzioni caratteristiche su intervalli, che servirà da utile controesempio per capire che la convergenza in misura non implica la convergenza puntuale. Il prerequisito fondamentale è il Teorema di Severini-Egorov (che dimostriamo in pieno dettaglio vista la sua rilevanza per i temi della Tesi): tale teorema assicura, su spazi di misura finita, la cosiddetta **convergenza μ-quasi uniforme** (introdotta nel Capitolo 3) per tutte le successioni convergenti μ-quasi dappertutto.

Nel Capitolo 2 analizzeremo in profondità i temi cruciali. Daremo la definizione di **convergenza in misura** a cui è collegato in modo naturale il concetto di **successione di Cauchy in misura**. Proveremo poi che la convergenza in L^p implica la convergenza in misura (ma non il viceversa). Dimostreremo, come risultato cardine di tutta la Tesi, il fondamentale **Teorema di Completezza** (da alcuni attribuito a Weyl e Riesz) che sancisce la proprietà di "completezza" in misura secondo cui tutte e sole le successioni convergenti in misura sono le successioni di Cauchy in misura. Come corollario si prova che da tutte le successioni convergenti in misura si può estrarre una sottosuccessione sia convergente μ-quasi dappertutto sia μ-quasi uniformemente. Mediante il Teorema di Severini-Egorov si può poi provare che una successione convergente μ-quasi dappertutto su uno spazio di misura finita converge anche in misura.

Il Capitolo 3 fornisce alcuni approfondimenti: esso apre con la importante proposizione che dimostra l'esistenza, per lo spazio delle funzioni misurabili su un insieme Ω di misura finita, di una metrica per cui la convergenza è equivalente alla convergenza in misura (si può così concludere che l'insieme delle funzioni misurabili su Ω è uno spazio metrico completo rispetto alla convergenza in misura). Il Capitolo 3 chiude, infine, con la definizione di **convergenza μ-quasi uniforme**, e con il confronto tra questo concetto e quello di convergenza in misura.

Capitolo 1

Alcune Premesse

In questo capitolo verranno trattati teoremi e definizioni che serviranno come base teorica per il capitolo successivo. A partire da un piccolo richiamo sulla teoria della misura, si passerà alla introduzione degli spazi L^p e relative norme e convergenze.

1.1 Alcuni richiami di Teoria della Misura

Definizione 1.1.1 (**σ-algebra**). *Dato un insieme Ω, si definisce σ-algebra una famiglia Γ di sottoinsiemi di Ω tale che:*

- $\Omega \in \Gamma$,
- *se* $\Lambda \in \Gamma$ *allora* $\Omega \setminus \Lambda \in \Gamma$,
- *se* $\{\Lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *è una famiglia numerabile in* Γ *allora* $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i \in \Gamma$.

Definizione 1.1.2 (**Misura**). *Sia Ω un insieme munito di una σ-algebra Γ. Una misura su Γ è una funzione μ: $\Gamma \longrightarrow [0,1]$ tale che:*

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- *se* $\{\Omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *è una successione di insiemi disgiunti in* Γ*, allora*

$$\mu\Bigg(\bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j\Bigg) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\Omega_j).$$

La seconda proprietà della Definizione 1.1.2 è chiamata **additività numerabile**.

Definizione 1.1.3 (**Spazio di misura**). *Siano Ω un insieme, Γ una σ-algebra e μ una misura su Γ; la terna (Ω, Γ, μ) è chiamata spazio di misura.*

Nel seguito, potrebbe essere sottinteso la σ-algebra Γ dello spazio di misura (Ω, Γ, μ); in tal caso scriveremo (Ω, μ).

Definizione 1.1.4 (**Funzione misurabile**). *Siano (Ω, Γ, μ) e (Ω', Γ', μ') spazi misurabili. Si dice funzione misurabile da (Ω, Γ) a (Ω', Γ') ogni funzione $f : \Omega \to \Omega'$ tale che:*

$$A' \in \Gamma' \Longrightarrow f^{-1}(A') \in \Gamma.$$

Esempio 1.1.5. Siano Ω un insieme non vuoto e Γ_1, Γ_2 due qualsiasi σ-algebre in Ω. Se $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$ allora la funzione identità $i_\Omega : \Omega \longrightarrow \Omega$ è misurabile da $(\Omega, \Gamma_1, \mu_1)$ a $(\Omega, \Gamma_2, \mu_2)$ (qualunque siano le misure μ_i sui Ω_i, per $i = 1, 2$).

Esempio 1.1.6. Siano (Ω, Γ, μ) e (Ω', Γ', μ') due spazi di misura. Sia $\omega' \in \Omega'$ fissato; la funzione costante

$$C : \Omega \longrightarrow \Omega', \quad \omega \mapsto \omega'$$

è misurabile; infatti per ogni $A' \subseteq \Omega'$ si ha:

$$C^{-1}(A') = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } \omega' \notin A' \\ \Omega, & \text{se } \omega' \in A'. \end{cases}$$

Sia A un insieme, sia $f_n : A \to \mathbb{C}$ una successione di funzioni e sia $f : A \to \mathbb{C}$. Ricordiamo che si dice che $\{f_n\}_n$ converge puntualmente a f se, per ogni $x \in A$, la successione complessa $\{f_n(x)\}_n$ converge (nella usuale topologia metrica di $\mathbb{C}$) a $f(x)$. Inoltre, si dice che $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a $f(x)$ se

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Definizione 1.1.7 (**Convergenza μ-q.d.**). *Dato uno spazio di misura (Ω, Γ, μ), diciamo che la successione di funzioni f_n converge ad una f μ-q.d. e scriviamo*

$$f_n \longrightarrow f \ \mu\text{-}q.d.,$$

se esiste $D \in \Gamma$ tale che:

- $f_n \longrightarrow f$ *su D,*
- $\mu(\Omega \setminus D) = 0.$

1.2 Integrazione di funzioni non negative

Definizione 1.2.1 (**Funzione semplice**). *Sia (Ω, Γ, μ) uno spazio di misura; una funzione semplice su Ω è una combinazione lineare finita, a coefficienti complessi, di funzioni caratteristiche di sottoinsiemi di Γ; tale funzione non può assumere i valori $\pm\infty$. Equivalentemente, diciamo che una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è semplice se f è misurabile ed l'insieme immagine di f è un sottoinsieme finito di $\mathbb{C}$. La seguente scrittura:*

$$f = \sum_{j=1}^{n} z_j \chi_{E_j},$$

con $E_j = f^{-1}(\{z_j\})$ e $f(\Omega) = \{z_1, ..., z_n\}$, è chiamata rappresentazione standard di f, e caratterizza f come combinazione lineare, a coefficieni distinti, di funzioni caratteristiche su insiemi disgiunti la cui unione è Ω.

Definizione 1.2.2 (**Integrale**). *Nelle notazioni precedenti, se*

$$f : \Omega \to [0, +\infty[\,,$$

è una funzione semplice con la seguente rappresentazione standard

$$f = \sum_{j=1}^{n} z_j \chi_{E_j},$$

definiamo l'integrale di f rispetto alla misura μ (con la convenzione $0 \cdot \infty = 0$)

$$\int f \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} z_j \mu(E_j).$$

Osservazione 1.2.3. Sempre nelle notazioni precedenti, se $A \in \Gamma$, si ha che $f\chi_A$ é ancora una funzione semplice con la seguente rappresentazione standard

$$f\chi_A = \sum_{j=1}^{n} z_j \chi_{A \cap E_j};$$

si definisce integrale su A la scrittura

$$\int_A f \, d\mu = \int f\chi_A \, d\mu.$$

In definitiva, quindi, abbiamo le seguenti uguaglianze:

$$\int_A f \, d\mu = \int_A f = \int f\chi_A \, d\mu.$$

Definizione 1.2.4 (**Spazio L^+**)**.** *Sia (Ω, Γ, μ) uno spazio di misura; definiamo*

$$L^+ = \{f : \Omega \to [0, +\infty] : f \text{ misurabile}\}.$$

Possiamo estendere la nozione di integrale a tutte le funzioni $g \in L^+$, definendo:

$$\int g \, d\mu = \sup \left\{ \int f \, d\mu : 0 \leq \; f \leq \; \gamma \text{ e } f \text{ semplice} \right\}.$$

Quando μ è sottintesa, scriveremo anche semplicemente $\int f$ al posto di $\int f \, d\mu$.

1.3 Integrazione di funzioni complesse

Continuando a lavorare su spazi di misura (Ω, Γ, μ), la Definizione 1.2.4 di integrale per funzioni in L^+ può essere estesa a funzioni misurabili a valori reali.

Definizione 1.3.1. *Chiamiamo f^+ e f^- rispettivamente la parte positiva e negativa della funzione misurabile f; supponiamo che uno dei seguenti integrali sia finito:*

$$\int f^+, \qquad \int f^-.$$

Allora definiamo:

$$\int f = \int f^+ - \int f^-.$$

Osservazione 1.3.2. Se $\int f^+$ e $\int f^-$ sono entrambi finiti, la funzione f è detta **integrabile**; essendo $|f| = f^+ + f^-$, è chiaro che f è integrabile se e solo se

$$\int |f| < +\infty.$$

Definizione 1.3.3 (**Funzione integrabile**). *Siano* (Ω, Γ, μ) *uno spazio di misura e* f *una funzione misurabile a valori complessi; diciamo che* f *è integrabile se:*

$$\int |f| < +\infty.$$

Più in generale, se $E \in \Gamma$, f *è integrabile su* E *se:*

$$\int_E |f| < +\infty.$$

Osservazione 1.3.4. Sia f una funzione misurabile a valori complessi; poichè:

$$|f| \leq \ |\mathrm{Re}(f)| + |\mathrm{Im}(f)| \leq \ 2|f|,$$

f si dice integrabile se e solo se $\mathrm{Re}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ sono integrabili; in questo caso vale:

$$\int f = \int \mathrm{Re}(f) + i \int \mathrm{Im}(f).$$

Teorema 1.3.5 (**Lemma di Fatou**). *Sia* (Ω, Γ, μ) *uno spazio di misura.*

Supponiamo che $\{f_n\}$ *sia una successione in* L^+*; allora:*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \ \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

1.4 Gli spazi $L^p(\Omega, \mu)$

Definizione 1.4.1 (**Spazio** $L^1(\Omega, \mu)$). *Sia* (Ω, μ) *uno spazio misurabile. Si definisce lo spazio di funzioni* $L^1(\Omega, \mu)$ *(o brevemente* $L^1(\Omega)$ *quando* μ *è sottointesa, o* L^1 *quando anche* Ω *è sottointeso) lo spazio delle funzioni integrabili da* Ω *a valori complessi.*[1]

Lo spazio L^1 *è dotato di una norma definita nel modo seguente:*

$$\|f\|_{L^1} = \int |f|\, d\mu.$$

Scriveremo anche brevemente $\|f\|_1$ *al posto di* $\|f\|_{L^1}$*.*

Definizione 1.4.2 (**Spazio** $L^p(\Omega, \mu)$). *Sia* (Ω, μ) *uno spazio misurabile. Sia* $p \in \mathbb{R}$ *con* $1 < p < \infty$*; definiamo*

$$L^p(\Omega, \mu) = \Big\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} :\ f \text{ è misurabile e } |f|^p \in L^1(\Omega) \Big\}.$$

Su $L^p(\Omega, \mu)$ *(scritto anche brevemente* $L^p(\Omega)$ *o* L^p*) utilizzeremo la nota norma definita da:*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p},$$

che denoteremo anche brevemente con $\|f\|_p$*.*

[1] In alcuni casi, si può rimpiazzare $\mathbb{C}$ con $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Definizione 1.4.3 (**Convergenza in L^p**). *Sia (Ω,μ) uno spazio misurabile. Siano $f_n, f \in L^p(\Omega,\mu)$; diciamo che f_n tende ad f in L^p se*

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \, d\mu = 0.$$

Osservazione 1.4.4. Sia (Ω,Γ,μ) uno spazio di misura e consideriamo una successione di funzioni f_n tale che:

- $f_n \longrightarrow f$ puntualmente su Ω;
- $f_n \longrightarrow g$ in $L^p(\Omega,\mu)$.

Allora $f = g$ μ-q.d. Questo segue immediatamente dal Lemma di Fatou:

$$0 \le \int |f-g|^p \, d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} |f_n - g|^p \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int |f_n - g|^p \, d\mu = 0.$$

Nonostante la precedente osservazione, in generale convergenza in L^p e convergenza puntuale “hanno poco in comune”, come mostrano i seguenti esempi.

Esempio 1.4.5. Indichiamo i numeri naturali $n \ge 2$ mediante due parametri naturali k e m nel modo seguente:

$$n = 2^k + m \quad \text{con } k \ge 1 \text{ e } 0 \le m \le 2^k - 1.$$

Per ciascuno di tali n (scritto in maniera unica attraverso k e m), definiamo

$$E_n = \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k} \right[,$$

e consideriamo la successione delle funzioni caratteristiche, definite su $[0,1]$,

$$f_n = \chi_{E_n}.$$

Come spazio di misura, consideriamo l'usuale spazio delle funzioni misurabili secondo Lebesgue. Se $[\cdot]$ denota la funzione parte intera, si ha

$$\int_{[0,1]} |f_n(x)|^p \, dx = \int_{E_n} 1^p \, dx = \frac{1}{2^{[\log_2(n)]}}.$$

La seguente tabella riporta alcuni valori di k, m, n, E_n:

k	m	n	E_n
1	0	2	$\left[0\,,\,\frac{1}{2}\right[$
	1	3	$\left[\frac{1}{2}\,,\,1\right[$
2	0	4	$\left[0\,,\,\frac{1}{4}\right[$
	1	5	$\left[\frac{1}{4}\,,\,\frac{2}{4}\right[$
	2	6	$\left[\frac{2}{4}\,,\,\frac{3}{4}\right[$
	3	7	$\left[\frac{3}{4}\,,\,1\right[$

Quindi f_n tende a zero nell'usuale spazio $L^p([0,1])$ per ogni $p \geq 1$.

Non é difficile convincersi che la successione $\{f_n\}_n$ *non converge puntualmente su nessuno dei punti dell'intervallo* $[0,1)$.

Esempio 1.4.6. Consideriamo la seguente successione:

$$f_n = n\,\chi_{]0,\frac{1}{n}[}.$$

Si ha che

$$f_n \longrightarrow 0 \quad \text{puntualmente},$$

ma non converge in L^p.

Definizione 1.4.7 (Spazio $L^\infty(\Omega,\mu)$). *Sia* (Ω,μ) *uno spazio misurabile. Definiamo*

$$L^\infty(\Omega,\mu) = \Big\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} :\ f \text{ misurabile ed esiste } C > 0 \text{ t.c. } |f(x)| \leq\ C\ \mu\text{-q.d. su } \Omega \Big\}.$$

Su $L^\infty(\Omega,\mu)$ *(scritto anche brevemente* $L^\infty(\Omega)$ *o* L^∞*) utilizzeremo la nota norma*

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \Big\{ C \geq 0 :\ |f(x)| \leq\ C\ \ \mu\text{-q.d. su } \Omega \Big\},$$

che denoteremo anche brevemente con $\|f\|_\infty$.

È ben noto che lo spazio L^p è uno spazio di Banach, per ogni $p \in [1,\infty]$.

Teorema 1.4.8 (Convergenza Dominata). *Sia* (Ω,Γ,μ) *uno spazio di misura e consideriamo una successione* $\{f_n\}$ *in* L^1 *tale che:*

- $f_n \longrightarrow f$ μ*-q.d.,*

- *esiste una funzione non negativa $g \in L^1$ tale che $|f_n| \leq g$ μ-q.d. per ogni n.*

Allora $f \in L^1$ e

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Di più, $f_n \longrightarrow f$ in L^1.

Di rilievo con gli argomenti di questa Tesi è senza dubbio il seguente classico Teorema di Severini-Egorov, di cui riportiamo la dimostazione per la sua somiglianza con certi argomenti che useremo nel Capitolo 2.

Teorema 1.4.9 (Severini-Egorov). *Sia (Ω,Γ,μ) uno spazio di misura e supponiamo che:*

- $\mu(\Omega) < +\infty$,
- *$f, f_1, f_2, \dots$ siano funzioni misurabili a valori complessi su Ω tali che $f_n \longrightarrow f$ μ-q.d.*

Allora, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $E_\epsilon \subseteq X$ tale che:

- $\mu(E_\epsilon) < \epsilon$,
- *$f_n \longrightarrow f$ uniformemente su $\Omega \setminus E_\epsilon$.*

Prima di dare la prova del Teorema di Severini-Egorov, forniamo alcune osservazioni:

(a) L'ipotesi $\mu(\Omega) < \infty$ può essere rimpiazzata con l'ipotesi per cui esiste $g \in L^1(\Omega,\mu)$ tale che

$$|f_n| \leq g \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

come vedremo nella Proposizione 1.4.10.

(b) L'ipotesi $\mu(\Omega)$ finita è essenziale; ad esempio, la successione

$$f_n = \chi_{[n,n+1]}$$

converge puntualmente a 0 su $\mathbb{R}$ (con la misura di Lebesgue); tuttavia, se A è un insieme illimitato, è facile riconoscere che esiste una successione crescente n_k tale che

$$\sup_A |f_{n_k}| = 1, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Dunque f_n non può convergere a 0 uniformemente su nessun insieme illimitato A; ne segue che l'insieme E_ϵ di cui sopra deve avere complementare limitato, e quindi non può valere $\mu(E_\epsilon) < \epsilon$.

Dimostrazione del Teorema 1.4.9. Forniamo una dimostrazione dettagliatissima e commentata ad ogni passo, visto che l'idea contenuta in questo teorema ritornerà nel fondamentale Teorema 2.2.1 di Completezza per la convergenza in misura.

Senza perdere di generalità (scartando eventualmente da tutto l'argomento l'insieme di μ-misura nulla su cui f_n non converge puntualmente a f), supponiamo che

$$f_n \longrightarrow f \text{ su } \Omega\,.$$

Per definizione di convergenza puntuale si ha che per ogni fissato $x \in \Omega$ e per ogni fissato $\epsilon > 0$, esiste $n(x, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall\, n \geq n(x, \epsilon).$$

Si ha convergenza uniforme su qualche insieme B ogniqualvolta (qualunque sia $\epsilon > 0$ piccolo) lo stesso $n(x, \epsilon)$ va bene per tutti gli x in B. L'idea è dunque quella di mettere in uno stesso insieme i punti x che ammettono lo stesso indice n:

$$(\bigstar) \qquad \{x : |f_m(x) - f(x)| < \epsilon \text{ per ogni } m \geq n\} = \bigcap_{m=n}^{+\infty} \{x : |f_m(x) - f(x)| < \epsilon\}\,.$$

Per definizione di convergenza puntuale, l'unione (rispetto a n) degli insiemi in ($\bigstar$) esaurisce tutto Ω (per ogni ϵ). Osserviamo anche che al crescere di n gli insiemi in ($\bigstar$) diventano più grandi. Di più, possiamo "discretizzare" la variabile ϵ utilizzando al suo posto $1/k$ con $k \in \mathbb{N}$. Giacché vogliamo provare che l'insieme su cui *non* sussiste convergenza uniforme è "piccolo", passiamo poi a considerare il complementare dell'insieme in ($\bigstar$) (che quindi decrescerà al crescere di n fino a "svuotarsi"). Questa è l'idea che andiamo ora a formalizzare.

Consideriamo $k, n \in \mathbb{N}$ e sia

$$E_n(k) := \bigcup_{m=n}^{+\infty} \{x : |f_m(x) - f(x)| \geq 1/k\}\,.$$

Si noti che

$$B_n(k) := \Omega \setminus E_n(k) = \bigcap_{m=n}^{+\infty} \{x : |f_m(x) - f(x)| < 1/k\}\,,$$

e quindi l'insieme $B_n(k)$ fornisce un insieme candidato su cui avere convergenza uniforme, poiché

$$x \in B_n(k) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(|f_m(x) - f(x)| < 1/k \;\; \forall\, m \geq n\Big).$$

Sia $k \in \mathbb{N}$ fissato. L'insieme $E_n(k)$ decresce al crescere di n e (giacché $\{f_n(x)\}_n$ converge a $f(x)$ su Ω) è facile riconoscere che

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n(k) = \emptyset\,;$$

quindi, poiché per ipotesi $\mu(\Omega) < +\infty$, concludiamo che

$$\mu(E_n(k)) \longrightarrow 0 \text{ per } n \to +\infty\,.$$

Abbiamo dunque una "matrice infinita" di insiemi

$$\begin{pmatrix} B_1(1) & B_2(1) & B_3(1) & \cdots \\ B_1(2) & B_2(2) & B_3(2) & \cdots \\ B_1(3) & B_2(3) & B_3(3) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix},$$

in cui gli insiemi su ogni riga "tendono a diventare" Ω e al crescere delle colonne cresce la vicinanza della successione $\{f_n\}$ a f sui vari insiemi che appaiono nella matrice. L'idea è di prendere, con un *procedimento di tipo diagonale*, una famiglia di questi insiemi in cui cresca sia l'indice di riga sia di colonna, e intersecarli tutti. In modo del tutto complementare, abbiamo anche la matrice

$$\begin{pmatrix} E_1(1) & E_2(1) & E_3(1) & \cdots \\ E_1(2) & E_2(2) & E_3(2) & \cdots \\ E_1(3) & E_2(3) & E_3(3) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix},$$

in cui ogni riga "tende a svuotarsi" e al crescere delle colonne diminuisce la lontananza della successione $\{f_n\}$ da f sui vari insiemi che appaiono nella matrice. In termini di questi insiemi, l'idea chiave è di prendere, con lo stesso *procedimento di tipo diagonale*, una famiglia di insiemi in cui cresca sia l'indice di riga sia di colonna, e unirli tutti. Formalizziamo quanto appena detto:

Dati $\epsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ scegliamo n_k (che dipende anche da ϵ) tale che

$$\mu(E_{n_k}(k)) < \epsilon\, 2^{-k}.$$

Si noti un argomento di tipo *diagonale*, ove lo stesso k quantifica la "lontananza" della successione $\{f_n\}$ dal suo limite (lontananza che diminuisce al crescere di k), e al contempo quantifica la piccolezza dell'insieme su cui sussiste questa lontananza.

Poniamo poi

$$E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_{n_k}(k), \quad B := \bigcap_{k=1}^{+\infty} B_{n_k}(k).$$

Allora

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_{n_k}(k)\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon.$$

Inoltre, si ha

$$B = \Omega \setminus E = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \Omega \setminus E_{n_k}(k) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} B_{n_k}(k) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{m=n_k}^{+\infty} \{x : |f_m(x) - f(x)| < 1/k\}.$$

Dunque $x \notin E$ (i.e., $x \in B$) equivale a dire che per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale

$$|f_m(x) - f(x)| < 1/k \quad \forall\, m \ge n_k.$$

Questo prova che $f_n \longrightarrow f$ uniformemente sul complementare di E, ossia su B. □

Proposizione 1.4.10. *Nel Teorema 1.4.9 di Severini-Egorov l'ipotesi $\mu(\Omega) < \infty$ può essere rimpiazzata dalla ipotesi*

$$\exists\, g \in L^1(\Omega,\mu) : \quad |f_n| \le g \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione. Come abbiamo già visto nella dimostrazione del teorema di Severini-Egorov, possiamo assumere che $f_n \longrightarrow f$ su Ω. Poniamo ancora, per $k, n \in \mathbb{N}$,

$$E_n(k) := \bigcup_{m=n}^{\infty} \left\{x : |f_m(x) - f(x)| \ge k^{-1}\right\},$$

e, per k fissato si ha che $E_n(k)$ decresce al crescere di n e $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(k) = \emptyset$. Utilizziamo, ora, la nuova ipotesi; poiché $|f_n - f| \leq 2|g|$, posto

$$A(k) := \left\{x : 2|g(x)| \geq k^{-1}\right\}$$

ne viene che

$$E_1(k) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{x : |f_m(x) - f(x)| \geq k^{-1}\right\} \subseteq A(k).$$

Ma è ovvio che

$$+\infty > 2\int_{\Omega} |g| \geq \int_{A(k)} 2|g| \geq k^{-1}\mu(A(k)),$$

e, quindi, concludiamo che

$$\mu(E_1(k)) \leq \mu(A(k)) < \infty.$$

Si procede poi come nella dimostrazione del Teorema di Severini-Egorov. □

Capitolo 2

Convergenza in misura

In questo capitolo viene trattato il tema della convergenza in misura e le relazioni che essa ha con gli altri tipi di convergenza (convergenza in L^p, puntuale, uniforme e q.d.) richiamate nel precedente capitolo. Nel seguito, potrebbe essere sottinteso lo spazio di misura (Ω, Γ, μ) su cui opereremo; se, invece, è ben nota solo la σ-algebra Γ dello spazio di misura (Ω, Γ, μ), scriveremo (Ω, μ).

Per la trattazione abbiamo seguito G.B. Folland in [1] (e in parte anche le note di A. Villani, [3]).

2.1 Convergenza in misura

Consideriamo (Ω, Γ, μ) uno spazio di misura; se f_n è una successione di funzioni a valori complessi su Ω, la sua convergenza può essere studiata in diversi modi; abbiamo, ovviamente, che convergenza uniforme implica la convergenza puntuale la quale, a sua volta, implica la convergenza quasi dappertutto (in generale non vale il contrario); tuttavia, queste convergenze non implicano (in generale) la convergenza in L^1.

Esempio 2.1.1. Ecco riportati alcuni brevi esempi (su $\mathbb{R}$ con la misura di Lebesgue) che esemplificano quanto appena detto.

- Consideriamo la seguente successione
$$f_n = n^{-1}\chi_{(0,n)};$$
si ha che $f_n \longrightarrow 0$ puntualmente, uniformemente e q.d., ma $f_n \nrightarrow 0$ in L^1.
- Si consideri la successione $\{f_n\}$ nell'Esempio 1.4.5. Essa converge in L^1, ma non converge puntualmente in alcun punto di $[0, 1]$.

D'altra parte se f_n è una successione di funzioni tale che:

- $f_n \longrightarrow f$ q.d.,
- esiste una funzione $g \in L^1$ tale che $|f_n| \leq g$ per ogni n,

allora $f_n \longrightarrow f$ in L^1 (dal Teorema 1.4.8 di Convergenza Dominata).

Mostreremo, in seguito, che se una successione converge in L^1 allora ne esiste una sottosuccessione che converge q.d.

Introduciamo ora la definizione centrale di questa Tesi.

Definizione 2.1.2 (**Convergenza in Misura**). *Si dice che una successione* $\{f_n\}$ *di funzioni misurabili a valori complessi sullo spazio di misura* (Ω, Γ, μ)*:*

- *è di* ***Cauchy in misura*** *se, per ogni fissato* $\epsilon > 0$*, si ha*

$$\lim_{n,m\to\infty} \mu\Big(\Big\{x : |f_n(x) - f_m(x)| > \epsilon\Big\}\Big) = 0;$$

questo significa che per ogni $\epsilon > 0$ *e per ogni* $\delta > 0$ *esiste* $k(\epsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$\mu\Big(\Big\{x : |f_n(x) - f_m(x)| > \epsilon\Big\}\Big) < \delta, \quad \forall\, n, m \geq k(\epsilon, \delta);$$

- ***converge in misura*** *ad una funzione misurabile* f *se, per ogni fissato* $\epsilon > 0$*, si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\Big(\Big\{x : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\Big\}\Big) = 0;$$

questo significa che per ogni $\epsilon > 0$ *e per ogni* $\delta > 0$ *esiste* $k(\epsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$\mu\Big(\Big\{x : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\Big\}\Big) < \delta, \quad \forall\, n \geq k(\epsilon, \delta).$$

Il seguente risultato fornisce l'unicità (μ-q.d.) del limite in misura.

Proposizione 2.1.3. *Se* $f_n \to f$ *in misura e* $f_n \to g$ *in misura, allora* $f = g$ μ*-q.d.*

Dimostrazione. Per la disuguaglianza triangolare, segue subito che

$$\{x : |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\} \subseteq \{x : |f(x) - f_n(x)| \geq \epsilon/2\} \cup \{x : |f_n(x) - g(x)| \geq \epsilon/2\}.$$

Visto che le μ-misure di entrambi gli insiemi al secondo membro tendono a 0 per $n \to \infty$, risulterà che

$$\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\}) = 0,$$

da cui deduciamo che $f = g$ μ-q.d. □

Osservazione 2.1.4. Banalmente, se f_n è una successione convergente ad una f in misura, allora la stessa cosa è vera per ogni sua sottosuccessione.

Proposizione 2.1.5. *Se* f_n *converge in misura allora* $\{f_n\}$ *è di Cauchy in misura.*

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che, se f_n converge in misura, allora si ha anche

$$\lim_{n,m\to\infty} \mu\Big(\Big\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\Big\}\Big) = 0;$$

Ora, per la disuguaglianza triangolare abbiamo che

$$|f_n - f_m| \leq |f_n - f| + |f_m - f|,$$

e dunque

$$\begin{aligned}&\mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\})\\ &\quad \leq \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon/2\}) + \mu(\{x : |f_m(x) - f(x)| \geq \epsilon/2\}).\end{aligned}$$

Il secondo membro è, per ipotesi, piccolo se n, m sono grandi, da cui la tesi. □

Forniamo un primo semplice risultato di confronto tra convergenze.

Proposizione 2.1.6. *Sia $p \in [1, \infty]$. Se $f_n \longrightarrow f$ in $L^p(\Omega, \mu)$ allora $f_n \longrightarrow f$ in misura.*

Dimostrazione. Definiamo $E(n, \epsilon) := \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$; vogliamo dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E(n, \epsilon)) = 0,$$

il che implicherà, per definizione, che $f_n \longrightarrow f$ in misura. Distinguiamo due casi:

- $p \in [1, \infty)$: Abbiamo che:

$$\int |f_n - f|^p \geq \int_{E(n,\epsilon)} |f_n - f|^p \geq \epsilon^p \, \mu(E(n, \epsilon));$$

di conseguenza

$$\mu(E(n, \epsilon)) \leq \epsilon^{-p} \int |f_n - f|^p.$$

Poichè per ipotesi $f_n \longrightarrow f$ in L^p, ne segue che $\int |f_n - f|^p \longrightarrow 0$; dunque, grazie alle maggiorazioni precedenti

$$\mu(E(n, \epsilon)) \longrightarrow 0 \quad \text{per} \quad n \to \infty,$$

che è quanto occorreva dimostrare.

- $p = \infty$: Sia $\epsilon > 0$; da $f_n \to f$ in $L^\infty(\Omega, \mu)$ segue che la disuguaglianza

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

è vera μ-q.d., per tutti gli $n \geq n(\epsilon)$; ne segue

$$\mu(E(n, \epsilon)) = 0, \quad \forall \, n \geq n(\epsilon),$$

da cui la tesi. □

Esempio 2.1.7. Consideriamo la seguente successione di funzioni su $\mathbb{R}$

$$f_n = n \, \chi_{]0, \frac{1}{n}[}.$$

Si ha che $f_n \longrightarrow 0$ puntualmente su $\mathbb{R}$, ma non converge a 0 in L^p poiché

$$\int |f_n|^p = n^{p-1}.$$

Tuttavia si ha che $f_n \to 0$ in misura poiché (per ogni $\epsilon < 1$)

$$E(n, \epsilon) = \{x : |f_n(x)| > \epsilon\} = (0, 1/n) \quad \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

Forniamo un esempio esplicito di convergenza in misura.

Esempio 2.1.8. Sia (Ω, μ) lo spazio di misura dato da $\Omega = \mathbb{N}$ e μ uguale alla misura del contare.[1] Allora $f_n \longrightarrow f$ in misura se e solo se $f_n \longrightarrow f$ uniformemente.

[1] Cioè $\mu(B) = \text{card}(B)$ per ogni $B \subseteq \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Dimostriamo dapprima la seguente implicazione

$$(f_n \longrightarrow f \text{ in misura}) \Rightarrow (f_n \longrightarrow f \text{ uniformemente}).$$

Sappiamo che, per ogni $\epsilon > 0$, si ha $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) \to 0$ per $n \to \infty$. Tuttavia, per come è definita la μ-misura, la seguente successione

$$\Big\{\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\})\Big\}_{n\in\mathbb{N}}$$

è a valori interi e, se ha limite nullo, deve accadere che esiste $m > 0$ tale che

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) = 0, \quad \text{per } n \geq m,$$

da cui $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ μ-q.d. Per come è definita la μ-misura, si ha quindi che per ogni $n \geq m$ risulta

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad \forall\, x \in \mathbb{N}.$$

Questa è esattamente la convergenza uniforme di f_n a f sull'insieme $\mathbb{N}$. L'implicazione opposta si prova in modo del tutto analogo. □

2.2 Teorema di Completezza

Il seguente fondamentale teorema sancisce una proprietà di "completezza" per la convergenza in misura. Chiariremo meglio questo nel Capitolo 3, ove sarà costruito un opportuno spazio metrico modellato sulla convergenza in misura.

Teorema 2.2.1 (Weyl-Riesz). *Supponiamo che $\{f_n\}$ sia una successione di Cauchy in misura sullo spazio di misura (Ω, μ); allora:*

- *esiste f misurabile su Ω tale che $f_n \longrightarrow f$ in misura;*
- *esiste una sottosuccessione $\{f_{n_j}\}_j$ di $\{f_n\}_n$ con le seguenti proprietà:*
  1. *$f_{n_j} \longrightarrow f$ μ-q.d. per $j \to \infty$;*
  2. *$f_{n_j} \longrightarrow f$ in misura per $j \to \infty$;*
  3. *per ogni $\sigma > 0$ esiste B_σ misurabile tale che $\mu(\Omega \setminus B_\sigma) < \sigma$ e $f_{n_j} \longrightarrow f$ uniformemente su B_σ per $j \to \infty$.*

Dimostrazione. Dalla definizione di successione di Cauchy in misura, per ogni $j \in \mathbb{N}$ fissato si ha che

$$\lim_{n,m\to\infty} \mu\Big(\Big\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq 2^{-j}\Big\}\Big) = 0.$$

Per ogni $j \in \mathbb{N}$, esiste dunque $n_j \in \mathbb{N}$ tale che

$$n, m \geq n_j \quad \Longrightarrow \quad \mu\Big(\Big\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq 2^{-j}\Big\}\Big) \leq 2^{-j}. \tag{2.1}$$

[Si osservi l'argomento di tipo diagonale già discusso nella prova del Teorema di Severini-Egorov.]

Possiamo supporre che sia $n_j < n_{j+1}$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Ne risulta dunque ben definita la sottosuccessione

$$\{g_j\} = \{f_{n_j}\}$$

di $\{f_n\}$, la quale verifica (per costruzione, e come caso particolare di (2.1))

$$\mu(E_j) \le 2^{-j}, \qquad \text{ove} \quad E_j := \Big\{x : |g_j(x) - g_{j+1}(x)| \ge 2^{-j}\Big\}.$$

[Intuitivamente, le funzioni $g_1, g_2, \dots$ sono consecutivamente lontane solo su insiemi via via più piccoli, ossia esse sono consecutivamente vicine su insiemi grandi.]

Poniamo, per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato

$$F_k := \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j,$$

dunque

$$\mu(F_k) \le \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} = 2^{1-k}. \tag{2.2}$$

Si noti che $F_k \supseteq F_{k+1}$ e $\mu(F_k) \to 0$ per $k \to \infty$; ne segue che, posto

$$F := \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k,$$

allora (poiché $\mu(F_1) < \infty$)

$$\mu(F) = \lim_{k\to\infty} \mu(F_k) = 0. \tag{2.3}$$

Ora, se $x \notin F_k$, si ha

$$|g_j(x) - g_{j+1}(x)| < 2^{-j}, \quad \text{per ogni } j \ge k.$$

Di conseguenza, se $i \ge j \ge k$ (usando inoltre un argomento di telescopia),

$$\begin{aligned} |g_i(x) - g_j(x)| &= \left| \sum_{m=j}^{i-1} (g_{m+1}(x) - g_m(x)) \right| \le \sum_{m=j}^{i-1} |g_{m+1}(x) - g_m(x)| \\ &\le \sum_{m=j}^{i-1} 2^{-m} \le \sum_{m=j}^{\infty} 2^{-m} = 2^{1-j}, \qquad \forall\, x \in \Omega \setminus F_k. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Questo dimostra che, per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \Omega \setminus F_k$, la successione reale $\{g_j(x)\}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$. Allora (per la completezza di $\mathbb{R}$) $\{g_j\}$ converge puntualmente su $\Omega \setminus F_k$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Di conseguenza, $\{g_j\}$ converge puntualmente su tutto

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (\Omega \setminus F_k) = \Omega \setminus \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k = \Omega \setminus F.$$

Tenendo conto di (2.3), abbiamo provato che la sottosuccessione $\{g_j\}$ di $\{f_n\}$ converge puntualmente su Ω μ-q.d.

È dunque naturale definire

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{j\to\infty} g_j(x) & \text{se } x \notin F, \\ 0 & \text{se } x \in F. \end{cases}$$

Si noti che f è misurabile. Vogliamo dimostrare che $g_j \longrightarrow f$ in misura per $j \to \infty$. A tal fine, da (2.4) segue che, per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato, si ha

$$|g_i(x) - g_j(x)| \leq \ 2^{1-j}, \qquad \text{per ogni } x \in \Omega \setminus F_k \text{ e ogni } i \geq j \geq k.$$

Facendo il limite $i \to \infty$ (e notando che $\Omega \setminus F_k \subseteq \Omega \setminus F$) si ha

$$|f(x) - g_j(x)| \leq \ 2^{1-j}, \qquad \text{per ogni } x \in \Omega \setminus F_k \text{ e ogni } j \geq k. \tag{2.5}$$

Fissiamo ora $\epsilon > 0$, e consideriamo

$$\{x : |f(x) - g_j(x)| \geq \ \epsilon\} = \{x \in F_k : |f(x) - g_j(x)| \geq \ \epsilon\} \cup \{x \notin F_k : |f(x) - g_j(x)| \geq \ \epsilon\}\,,$$

con k da scegliersi. Il primo dei due insiemi al secondo membro è un sottoinsieme di F_k e ha dunque μ-misura minore o uguale a $\mu(F_k)$. Fissato allora $\delta > 0$, posso scegliere $k \gg 1$ tale che $\mu(F_k) < \delta$. Sul secondo insieme teniamo in considerazione (2.5): essa dimostra che tale secondo insieme è vuoto, non appena $j > 1 - \log_2 \epsilon$. Scegliamo dunque un $\overline{k} = k(\epsilon, \delta) \gg 1$ tale che

$$\mu(F_{\overline{k}}) < \delta \quad \text{e} \quad \overline{k} > 1 - \log_2 \epsilon.$$

Se $j \geq \overline{k}$, segue

$$\mu\Big(\Big\{x : |f(x) - g_j(x)| \geq \ \epsilon\Big\}\Big) < \delta,$$

ossia (per la definizione di limite)

$$\lim_{j\to\infty} \mu\Big(\Big\{x : |f(x) - g_j(x)| \geq \ \epsilon\Big\}\Big) = 0,$$

come volevamo dimostrare.

Ci proponiamo ora di dimostrare che $f_n \longrightarrow f$ in misura. A tal fine, fissato $\epsilon > 0$, osserviamo che (per ogni $j \in \mathbb{N}$)

$$\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \ \epsilon\} \subseteq \{x : |f_n(x) - g_j(x)| \geq \ \epsilon/2\} \cup \{x : |g_j(x) - f(x)| \geq \ \epsilon/2\}\,.$$

Sia ora $\delta > 0$. Da quanto precede, si può trovare $\overline{j} = \overline{j}(\epsilon, \delta) \gg 1$ in modo la μ-misura del secondo insieme al secondo membro sia $< \delta/2$. Se scelgo anche $\overline{j} = \overline{j}(\epsilon) \gg 1$ tale che $2^{-\overline{j}} < \epsilon/2$, si ha che il primo insieme al secondo membro è contenuto in

$$\Big\{x : |f_n(x) - g_{\overline{j}}(x)| \geq 2^{-\overline{j}}\Big\}\,.$$

Scegliendo ulteriormente $\overline{j} = \overline{j}(\delta) \gg 1$ tale che $2^{-\overline{j}} < \delta/2$, e scegliendo $m = n_{\overline{j}}$ e $n \geq n_{\overline{j}}$ in (2.1), si ha che la misura di quest'ultimo insieme è $< \delta/2$. Abbiamo dunque provato che per ogni ϵ e δ positivi, esiste $\overline{n} = \overline{n}(\epsilon, \delta) = n_{\overline{j}}$, tale che

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \ \epsilon\}) < \delta,$$

per ogni $n \geq \overline{n}$. Questa è esattamente la definizione di $f_n \longrightarrow f$ in misura.

Per finire, consideriamo la questione della convergenza uniforme di $\{g_j\}$. Osserviamo che (2.4) prova che, per ogni fissato $k \in \mathbb{N}$, vale

$$|g_i(x) - g_j(x)| \leq \frac{2}{2^j}, \quad \forall\, i \geq j \geq k, \quad \forall\, x \in \Omega \setminus F_k.$$

Se facciamo il limite $i \to \infty$ (e ricordiamo che $\lim_{i\to\infty} g_i = f$ su $\Omega\setminus F = \bigcup_k \Omega\setminus F_k$), otteniamo

$$\sup_{x\in\Omega\setminus F_k} |f(x) - g_j(x)| \leq \frac{2}{2^j}, \quad \forall\, j \geq k. \tag{2.6}$$

Per ogni fissato $k \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni $\{g_j\}_j$ converge dunque uniformemente a f su $\Omega \setminus F_k$. Conseguentemente, per ogni fissato $\sigma > 0$, se si sceglie $k = k(\sigma) \gg 1$ tale che $2^{1-k} < \sigma$ e se si pone $B_\sigma := \Omega \setminus F_k$, segue

$$\mu(\Omega \setminus B_\sigma) = \mu(F_k) \overset{(2.2)}{\leq} 2^{1-k} < \sigma;$$

inoltre da (2.6) si evince che $\{g_j\}_j$ converge uniformemente a f su B_σ, che è quanto rimaneva da provare. $\square$

Corollario 2.2.2. *Se $f_n \longrightarrow f$ in L^p (con $p \in [1,\infty]$), esiste una sottosuccessione $\{f_{n_j}\}$ tale che $f_{n_j} \longrightarrow f$ μ-q.d.*

Dimostrazione. Dalla Proposizione 2.1.6 sappiamo che se $f_n \longrightarrow f$ in L^p allora $f_n \longrightarrow f$ in misura; infine si applica il Teorema 2.2.1. $\square$

Nel Teorema 2.2.1 è chiaramente contenuto il seguente fatto (poichè convergenza in misura implica la condizione di Cauchy, vedasi Proposizione 2.1.5):

Corollario 2.2.3. *Se $f_n \longrightarrow f$ in misura, esiste una sottosuccessione $\{f_{n_j}\}$ convergente a f μ-q.d.*

Questo risultato può essere dimostrato autonomamente, estrapolando dalla prova del Teorema 2.2.1 il seguente argomento cruciale (che riportiamo per comodità di lettura e per la sua analogia con l'argomento nella prova del Teorema di Severini-Egorov):

Dimostrazione. Per ipotesi $f_n \longrightarrow f$ in misura, dunque possiamo trovare degli n_k naturali con $n_1 < n_2 < \cdots$ tali che

$$\text{per ogni } n \geq n_k \text{ si ha} \quad \mu\left(\left\{|f_n - f| > \frac{1}{k}\right\}\right) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Definiamo

$$E_k := \left\{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}\right\} \qquad \text{e} \qquad H_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} E_k;$$

allora abbiamo che

$$\mu(E_k) < \frac{1}{2^k} \qquad \text{e} \qquad \mu(H_m) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{2}{2^m}.$$

Poniamo ora
$$Z = \bigcap_{m=1}^{\infty} H_m,$$
allora $\mu(Z) \leq \mu(H_m) \leq 2^{1-m}$ per ogni m da cui deduciamo che $\mu(Z) = 0$. Se $x \notin Z$, allora $x \notin H_m$ per almeno un m e, quindi, $x \notin E_k$ per $k \geq m$, da cui si ricava
$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \text{ per } k \geq m.$$
Quindi $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ per ogni $x \notin Z$. Poichè, da quanto visto in precedenza, $\mu(Z) = 0$, abbiamo, in definitiva
$$f_{n_k} \longrightarrow f\,,\ \text{puntualmente}\,\mu\text{-q.d.}$$
Questo conclude la prova. □

Osservazione 2.2.4. L'estrazione di una sottosuccessione nel Corollario 2.2.3 è indispensabile: infatti, la successione $\{f_n\}$ nell'Esempio 1.4.5 converge in misura alla funzione $f \equiv 0$ (poiché, a fortiori, $f_n \to 0$ in L^1); tuttavia f_n non converge q.d. alla funzione nulla poiché non converge puntualmente in nessun punto. Si noti che in questo esempio, lo spazio ambiente $[0, 1]$ ha misura finita.

Proposizione 2.2.5. *Se $f_n \to g$ in misura e se $f_n \to f$ μ-q.d., allora $f = g$ μ-q.d.*

Questo risultato dice che il limite in misura di una successione è da ricercarsi nell'eventuale limite puntuale della successione (*se quest'ultimo esiste!*).

Dimostrazione. Per il Corollario 2.2.3, esiste una sottosuccessione $\{f_{n_j}\}$ convergente a g μ-q.d.; visto che, per ipotesi, $f_n \to f$ μ-q.d., ne segue in particolare che $\{f_{n_j}\}$ convergente anche a f μ-q.d. In conclusione $f = g$ μ-q.d. □

Osservazione 2.2.6. Non è detto, in generale, che se $f_n \longrightarrow f$ μ-q.d., segua $f_n \longrightarrow f$ in misura; consideriamo ad esempio (su $\mathbb{R}$ con la misura di Lebesgue) la successione
$$f_n = \chi_{(-n,n)};$$
essa converge a $f \equiv 1$ su $\mathbb{R}$, ma f_n non converge ad f in misura, infatti (per ogni $\epsilon < 1$):
$$\mu(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - 1| \geq \epsilon\}) = \mu(\mathbb{R} \setminus (-n, n)) = +\infty.$$
Un altro esempio è dato da
$$f_n = \chi_{[n,n+1[},$$
il cui limite puntuale è 0, ma
$$\mu(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| \geq \epsilon\}) = 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Tuttavia la convergenza μ-q.d. implica la convergenza in misura nel caso in cui lo spazio ambiente ha misura finita, come mostra la seguente proposizione.

Proposizione 2.2.7. *Supponiamo che (Ω, μ) sia uno spazio di misura tale che $\mu(\Omega) < \infty$. Supponiamo che f_n, f siano funzioni misurabili su Ω tali che $f_n \to f$ μ-q.d. Allora $f_n \to f$ in misura.*

Dimostrazione. Dal Teorema di Severini-Egorov sappiamo che per ogni $\delta > 0$ esiste $E_\delta \subseteq \Omega$ tale che

$$\mu(\Omega \setminus E_\delta) < \delta \quad \text{e} \quad f_n \longrightarrow f \text{ uniformemente su } E_\delta.$$

Allora, per ogni $\epsilon > 0$ fissato, esiste $n(\epsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sup_{x \in E_\delta} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon, \quad \forall\, n \geq n(\epsilon, \delta).$$

Ne segue che

$$\{x : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\} \subseteq \Omega \setminus E_\delta, \quad \forall\, n \geq n(\epsilon, \delta).$$

Quindi, per ogni $n \geq n(\epsilon, \delta)$ si ha

$$\mu\big(\,\{x : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}\,\big) \leq \mu(\Omega \setminus E_\delta) < \delta,$$

da cui la tesi, vista l'arbitrarietà di ϵ e δ. □

Si noti che l'ipotesi $\mu(\Omega) < \infty$ viene usata solo per applicare il Teorema di Severini-Egorov, ossia solo per avere la seguente condizione **(U)**:

(U): *per ogni $\delta > 0$ esiste $E_\delta \subseteq \Omega$ tale che*

$$\mu(\Omega \setminus E_\delta) < \delta \quad \textit{e} \quad f_n \longrightarrow f \textit{ uniformemente su } E_\delta.$$

Per il resto, l'argomento di cui sopra mostra che **(U)** implica la convergenza in misura di f_n a f, senza l'ipotesi $\mu(\Omega) < \infty$. Parleremo della condizione **(U)** nel prossimo Capitolo.

Per concludere il capitolo diamo una semplice applicazione:

Esempio 2.2.8. Sia (Ω, μ) uno spazio di misura. Supponiamo che $\{E_n\}_n$ sia una successione di insiemi misurabili tali che $\mu(E_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e tali che χ_{E_n} converge ad una qualche funzione f in $L^1(\Omega, \mu)$ (o, più in generale, in misura). Allora f è uguale alla funzione caratteristica di un insieme misurabile.

Dimostrazione. Per ipotesi $\chi_{E_n} \longrightarrow f$ in L^1; allora $\chi_{E_n} \longrightarrow f$ in misura, da cui segue che esiste una sottosuccessione $\chi_{E_{n_k}}$ tale che

$$\chi_{E_{n_k}} \longrightarrow f \;\; \mu\text{-q.d.};$$

dunque, per quasi ogni $x \in \Omega$

$$\lim_{k \to \infty} \chi_{E_{n_k}}(x) = f(x).$$

Ma $\chi_{E_{n_k}}(x)$ vale 0 o 1 e quindi $f(x)$ vale 0 o 1 μ-q.d. Se definiamo $E := \{x \in \Omega : f(x) = 1\}$, allora $f = \chi_E$ μ-q.d. □

Capitolo 3

Alcuni ulteriori risultati

In questo capitolo verranno mostrati alcuni risultati che approfondiscono la nostra trattazione della convergenza in misura.

Alcuni di questi risultati sono proposti come esercizi in [1]; altri sono tratti dal libro di C. George, [2].

3.1 Metrica della Convergenza in Misura

Mostriamo anzitutto, tramite la seguente proposizione, che esiste una metrica sullo spazio delle funzioni misurabili rispetto a cui la convergneza equivale alla convergenza in misura.

Proposizione 3.1.1. *Sia (Ω, Γ, μ) uno spazio di misura con $\mu(\Omega) < +\infty$; siano f, g due funzioni misurabili a valori complessi e definiamo*

$$d(f,g) = \int_\Omega \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, d\mu. \tag{3.1}$$

Allora d è una metrica sullo spazio delle funzioni misurabili se identifichiamo le funzioni che sono uguali μ-q.d.; inoltre la convergenza rispetto alla metrica d equivale alla convergenza in misura.

Dimostrazione. Dimostriamo dapprima che $d(f,g)$ è una metrica:

1. d è a valori finiti, infatti
$$d(f,g) = \int_\Omega \underbrace{\frac{|f-g|}{1+|f-g|}}_{\leq 1}\, d\mu \leq \int_\Omega d\mu = \mu(\Omega) < +\infty;$$

2. $d(f,g) = 0$ se e solo se $f = g$ q.d. (ovvio);

3. $d(f,g) = d(g,f)$ (ovvio);

4. la disuguaglianza triangolare viene dalla seguente disuguaglianza[1]
$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|};$$

[1]La prima disuguaglianza segue dalla crescenza di $r \mapsto F(r) := \frac{r}{1+r}$ (la cui derivata è $\frac{1}{(1+r)^2} \geq 0$); la seconda disuguagliaza segue dalla proprietà di subadditività di F (ossia $F(A+B) \leq F(A) + F(B)$ per ogni $A, B \geq 0$) che è semplice da provare.

dunque (posto $a = f - h$ e $b = -(g - h)$)

$$\frac{|f-g|}{1+|f-g|} = \frac{|(f-h)-(g-h)|}{1+|(f-h)-(g-h)|} \leq \frac{|f-h|}{1+|f-h|} + \frac{|g-h|}{1+|g-h|},$$

da cui segue immediatamente $d(f,g) \leq d(f,h) + d(g,h)$.

Ora facciamo vedere che la convergenza nel senso della metrica d è equivalente alla convergenza in misura: poniamo, per ogni $\epsilon > 0$, $X_\epsilon = \{x : |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\}$. Si ha che:

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\,\mu(X_\epsilon) &\leq \int_{X_\epsilon} \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\,d\mu \\
&\leq \int_{X_\epsilon} \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\,d\mu + \int_{\Omega\setminus X_\epsilon} \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\,d\mu \\
&= d(f,g) \\
&= \int_{X_\epsilon} \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\,d\mu + \int_{\Omega\setminus X_\epsilon} \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\,d\mu \\
&\leq \mu(X_\epsilon) + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\mu(\Omega \setminus X_\epsilon) \leq \mu(X_\epsilon) + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\mu(\Omega).
\end{aligned}$$

[Qui abbiamo usato due volte la monotonia crescente di $r \mapsto \frac{r}{1+r}$.] Ne segue

$$\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\,\mu(X_\epsilon) \leq d(f,g) \leq \mu(X_\epsilon) + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\mu(\Omega).$$

Da qui segue facilmente (per l'arbitrarietà di ϵ) quanto volevamo provare sulla equivalenza delle convergenze in misura e rispetto a d. □

Mettendo assieme la Proposizione 3.1.1 e il Teorema 2.2.1 si deduce:

Corollario 3.1.2. *Sia (Ω, Γ, μ) uno spazio di misura con $\mu(\Omega) < +\infty$. Allora, lo spazio $M(\Omega)$ delle funzioni misurabili su Ω con la metrica (3.1) è uno spazio metrico completo, in cui la convergenza rispetto a d è equivalente alla convergenza in misura.*

3.2 Convergenza μ-quasi uniforme

Definiamo anzitutto un particolare tipo di convergenza, già intravisto nel teorema di Severini-Egorov nonché nell'enunciato del Teorema 2.2.1 di Weyl-Riesz.

Definizione 3.2.1 (Convergenza μ-quasi uniforme). *Sia (Ω, μ) uno spazio di misura e siano f_n, f (con $n \in \mathbb{N}$) funzioni misurabili su Ω; diciamo che f_n converge a f μ-quasi uniformemente, e scriviamo*

$$f_n \longrightarrow f \ \mu\text{-q.u.},$$

se, per ogni $\delta > 0$ esiste $B_\delta \subseteq \Omega$ misurabile tale che:

- *$\mu(\Omega \setminus B_\delta) < \delta$;*
- *$f_n \longrightarrow f$ uniformemente su B_δ.*

Tale convergenza ha delle relazioni con la convergenza in misura. Inoltre, con questo concetto, si può riformulare il Teorema 1.4.9 di Severini-Egorov nel modo seguente:

Se $\mu(\Omega) < \infty$ e se $f_n \to f$ μ-q.d., allora $f_n \to f$ μ-quasi uniformemente.

Osservazione 3.2.2. Ovviamente, se $f_n \longrightarrow f$ μ-q.u. e se $f_n \longrightarrow g$ μ-q.u., allora $f = g$ μ-q.d.

Proposizione 3.2.3. *Sia (Ω, μ) uno spazio di misura e siano f_n, f (con $n \in \mathbb{N}$) funzioni misurabili. Se $f_n \longrightarrow f$ μ-quasi uniformemente, allora $f_n \longrightarrow f$ in misura.*

Dimostrazione. Dato $\epsilon > 0$ poniamo, al solito,

$$E(n, \epsilon) = \{x : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}.$$

Per ipotesi, abbiamo che, per ogni $\delta > 0$, esiste B_δ misurabile tale che f_n converge uniformemente a f su tale insieme e tale che $\mu(\Omega \setminus B_\delta) < \delta$. Allora, per ogni $\epsilon > 0$ fissato, esiste $n(\epsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sup_{x \in B_\delta} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon, \quad \forall\, n \geq n(\epsilon, \delta).$$

Ne segue che

$$E(n, \epsilon) \subseteq \Omega \setminus B_\delta, \quad \forall\, n \geq n(\epsilon, \delta).$$

Quindi, per ogni $n \geq n(\epsilon, \delta)$ si ha

$$\mu(E(n, \epsilon)) \leq \mu(\Omega \setminus B_\delta) < \delta,$$

da cui la tesi, vista l'arbitrarietà di ϵ e δ. □

Della Proposizione 3.2.3 non vale, ovviamente, il viceversa, poiché la convergenza in misura non implica nemmeno la convergenza puntuale (μ-q.d.), come mostra l'Osservazione 2.2.4. Tuttavia, si può dimostrare una *caratterizzazione* della convergenza in μ-misura mediante la convergenza μ-quasi uniforme: si veda il Teorema 3.2.6 più sotto. Per fare questo ci serve un lemma.

Lemma 3.2.4. *Sia (Ω, μ) uno spazio di misura e siano f_n, f (con $n \in \mathbb{N}$) funzioni misurabili. Se f_n converge in μ-misura a f, allora si può estrarre da $\{f_n\}_n$ una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}_k$ convergente a f μ-quasi uniformemente.*

Dimostrazione. Segue direttamente dal Teorema 2.2.1 di Weyl-Riesz. □

Osservazione 3.2.5. Ovviamente la condizione espressa nella tesi del Lemma 3.2.4 non implica la convergenza in misura: ad esempio la successione di funzioni in $\mathbb{R}$

$$f_n = \begin{cases} \chi_{[-n,n]}, & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1, & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

è tale che si può estrarre una sottosuccessione che converge a 1 in misura (precisamente, $\{f_{2k+1}\}_k$) ma f_n non tende a 1 in misura, poiché ciò dovrebbe essere vero anche per la sua sottosuccessione $\{f_{2k}\}_k$, il che non è vero.

Teorema 3.2.6. *Sia (Ω, μ) uno spazio di misura e siano f_n, f (con $n \in \mathbb{N}$) funzioni misurabili. Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione f_n converga in μ-misura a f è che da ogni sottosuccessione $\{f_{n_k}\}_k$ di $\{f_n\}_n$ se ne possa estrarre una ulteriore $\{f_{n_{k_r}}\}_r$, convergente a f μ-quasi uniformemente.*

Dimostrazione. La necessità segue da questo argomento: se $f_n \longrightarrow f$ in misura allora ogni sottosuccessione $\{f_{n_k}\}_k$ converge ancora a f in misura; grazie al Lemma 3.2.4 si può estrarre da $\{f_{n_k}\}_k$ una ulteriore sottosuccessione che converge a f μ-q.u.

Dimostriamo ora la condizione sufficiente: supponiamo, per assurdo, che la successione f_n non converga in μ-misura a f; esiste, allora, un $\epsilon > 0$ tale che

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) \nrightarrow 0 \text{ per } n \to \infty;$$

conseguentemente, esiste un $\delta > 0$ ed una sottosuccessione f_{n_k} di f_n tale che

$$\mu(\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \epsilon\}) \geq \delta, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Ne segue, ovviamente, che nessuna sottosuccessione estratta da f_{n_k} può convergere in μ-misura a f, quindi a fortiori nemmeno μ-quasi uniformemente alla funzione f (vedasi Proposizione 3.2.3), ma ciò è in contraddizione con l'ipotesi. □

Per una caratterizzazione della convergenza quasi uniforme che ne mette in luce le analogie con la convergenza in misura, si veda la seguente sezione.

3.3 Ulteriori Risultati

Per completezza, forniamo una galleria di risultati ulteriori sulla convergenza in misura, senza fornire le dimostrazioni (ma solo qualche cenno di prova). Il lettore interessato può consultare ad esempio [2, da pag. 129].

In quanto segue, (Ω, μ) è uno spazio di misura.

(a) *Se $\{f_n\}_n$ sono misurabili e non negative, tali che $f_n \to f$ in misura e tali che*

$$\exists\, M > 0 : \qquad \int_\Omega f_n \, d\mu \leq M \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

allora

$$\int_\Omega f \leq M.$$

Segue direttamente estraendo una sottosuccessione che converge puntualmente a f (vedasi Corollario 2.2.3) ed applicando il classico Lemma di Fatou.

(b) **Lemma di Fatou per la convergenza in misura:** *Se $\{f_n\}_n$ sono misurabili e non negative e tali che $f_n \to f$ in misura, allora*

$$\int_\Omega f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Basta estrarre da $\{f_n\}_n$ usa sottosuccessione in modo che

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_{n_k} \, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu,$$

ed estrarre ulteriormente una sottosuccessione che converge puntualmente a f μ-q.d. (e applicare il classico Lemma di Fatou).

(c) **Convergenza Dominata per la convergenza in misura:** *Supponiamo che* $\{f_n\}_n$ *siano misurabili, che* $f_n \to f$ *in misura e che esista* $g \in L^1(\Omega, \mu)$ *tale che*

$$|f_n| \leq g \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Allora $f_n \to f$ *in* $L^1(\Omega, \mu)$.

(d) **Generalizzazione della Convergenza Dominata per la convergenza in misura:** *Supponiamo che* $\{f_n\}_n$ *siano non negative e in* $L^1(\Omega, \mu)$, *e supponiamo che* $f_n \to f$ *in misura, con* $f \in L^1(\Omega, \mu)$. *Se vale*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu,$$

allora (e solo allora) $f_n \to f$ *in* $L^1(\Omega, \mu)$.

(e) **Caratterizzazione della convergenza μ-quasi uniforme** *Sia* (Ω, μ) *uno spazio di misura e siano* f_n, f *(con* $n \in \mathbb{N}$*) funzioni misurabili. Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione* f_n *converga* μ*-quasi uniformemente a* f *è che si abbia quanto segue: fissato* $\epsilon > 0$, *si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x : \sup_{k\geq n} |f_k(x) - f(x)| > \epsilon\right\}\right) = 0;$$

questo significa che per ogni $\epsilon > 0$ *e per ogni* $\delta > 0$ *esiste* $n(\epsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$\mu\left(\left\{x : \sup_{k\geq n} |f_k(x) - f(x)| > \epsilon\right\}\right) < \delta, \quad \forall\, n \geq k(\epsilon, \delta).$$

Osserviamo che

$$\left\{x : \sup_{k\geq n} |f_k(x) - f(x)| > \epsilon\right\} = \bigcup_{k\geq n} \left\{x : |f_k(x) - f(x)| > \epsilon\right\} = \bigcup_{k\geq n} E(k, \epsilon).$$

Bibliografia

[1] G.B. Folland: *Real analysis. Modern techniques and their applications.* Second edition. Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[2] C. George: *Exercises in Integration.* Problem Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1984.

[3] A. Villani: *Istituzioni di Analisi Superiore.* Note del Corso disponibili online all'url: `http://www.dmi.unict.it/~villani/`