ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

BASI ORTONORMALI NEGLI SPAZI DI HILBERT

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ERMANNO LANCONELLI

Presentata da:
ROBERTA LORENZI

Sessione III
Anno Accademico 2013 - 2014

Alle persone che,
credendo nelle mie capacità e caparbietà,
mi hanno permesso di raggiungere
questo traguardo
e di trasformare in realtà
i miei obiettivi.

Indice

Introduzione

Questo elaborato presenta gli elementi di base della Teoria degli Spazi di Hilbert, con particolare attenzione al Teorema della Proiezione sui convessi e ai sistemi ortonormali completi.
La tesi è organizzata nel modo seguente:

il primo capitolo contiene alcune nozioni preliminari che verranno utilizzate (ed, in alcuni casi, modificate) nei capitoli successivi.

Nel secondo capitolo diamo la definizione di Spazio di Hilbert e dimostriamo che gli spazi L^2 e lo spazio ℓ^2 sono completi. Questa proprietà fa sì che essi siano esempi di Spazi di Hilbert.

L'argomento principale del terzo capitolo è il Teorema della Proiezione sui sottoinsiemi convessi. Da esso seguono notevoli risultati.

Nel quarto capitolo mostriamo con un esempio che il Teorema di Bolzano-Weierstrass non vale negli spazi di Hilbert di dimensione infinita. In questi spazi il Teorema di Bolzano-Weierstrass ha un surrogato che richiede la nozione di convergenza debole.

Infine, nel quinto capitolo vengono riportati teoremi che garantiscono condizioni necessarie e sufficienti affinchè un sistema ortonormale sia completo.
Concludiamo il capitolo mostrando alcune applicazioni: i sistemi trigonometrici negli spazi di Hilbert $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ e $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ e le basi spettrali.

Nella prsentazione degli argomenti ci siamo riferiti principalmente ai testi indicati in bibliografia.

Capitolo 1

Preliminari

Per tutte le dimostrazioni di questo capitolo si veda
Primi Elementi della Teoria degli Spazi di Hilbert, E. Lanconelli, Pitagora Editrice Bologna 1996

1.1 Spazi vettoriali

Definizione 1.1 (**Campo**). Sia $\mathbb{K}$ un insieme su cui sono definite le due equazioni

$$\begin{array}{rl} + \ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ (x,y) \longmapsto x+y \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} \cdot \ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ (x,y) \longmapsto xy \end{array}$$

$\mathbb{K}$ è un campo se valgono le seguenti proprietà:

1. *proprietà associativa*: a+(b+c)=(a+b)+c e a(b+c)=(ab)c $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$
2. *proprietà commutativa*: a+b=b+a e ab=ba $\forall a, b \in \mathbb{K}$
3. *proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma*: a(b+c)=ab+ac
4. *esistenza dell'elemento neutro*: a+0=0 $\forall a \in \mathbb{K}$ e $a\,1 = a \quad \forall a \in \mathbb{K}$
5. *esistenza dell'opposto*: $\forall a \in \mathbb{K}$, $\exists a' \in \mathbb{K}$ tale che $a + a' = 0$ (a' si indica con -a)
6. se $\forall a, b \in \mathbb{K}, ab = 0$, allora $a = 0$ oppure $b = 0$
7. $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\exists\ a'$ tale che $aa' = 1$

Definizione 1.2 (**Spazio vettoriale**). Sia V un insieme e sia $\mathbb{K}$ un campo.
Diciamo che V è uno spazio vettoriale nel campo $\mathbb{K}$ se è definita una funzione

$$\begin{array}{rl} \Phi \ : \mathbb{K} \times V \to V \\ (a,x) \longmapsto a\,x \end{array}$$ tale che valgano le seguenti proprietà:

1. $\forall a \in \mathbb{K}, \forall x, y \in V, a(x + y) = ax + ay$

2. $\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall x \in V, (a+b)x = ax + bx$
3. $\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall x \in V, (ab)x = a(bx)$
4. 1 x=x $\forall x \in V$ (1 è l'unità di $\mathbb{K}$)

Gli elementi di V si chiamano *vettori* e gli elementi di $\mathbb{K}$ si chiamano *scalari.*

Definizione 1.3 (**Insieme di generatori**). Siano $v_1, ..., v_n$ vettori di uno spazio vettoriale V e sia $\mathbb{K}$ un campo. L'insieme delle combinazioni lineari dei vettori $v_1, ..., v_n$ è un sottospazio vettoriale generato dai vettori $v_1, ..., v_n$, cioè
$W = Span(v_1, ..., v_n) = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n | a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}\}$
In questo caso diciamo che $v_1, ..., v_n$ è un insieme di generatori di V.

Definizione 1.4 (**Vettori linearmente indipendenti**). Sia V uno spazio vettoriale e $\mathbb{K}$ un campo. I vettori $v_1, ..., v_n \in V$ si dicono linearmente indipendenti quando, per ogni combinazione lineare $a_1\, v_1 + ... + a_n\, v_n = (0, ..., 0)$, si ha $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$ $(a_1, ..., a_n \in \mathbb{K})$.

Definizione 1.5 (**Base di uno spazio vettoriale**). Sia V uno spazio vettoriale. Se esiste un insieme finito $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ tale che

1. $\{v_1, ..., v_n\}$ è un insieme di generatori di V
2. i vettori $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti

allora si dice che $\{v_1, ..., v_n\}$ è una base. In questo caso si parla di base di dimensione finita. La dimensione dello spazio dipende dal numero di vettori ma non dalla scelta dei vettori.

Esempio 1.1.1. *Base canonica di* $\mathbb{R}^n$
Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ consideriamo i vettori

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$$

detti *vettori della base canonica* di $\mathbb{R}^n$. Essi generano $\mathbb{R}^n$ perchè un vettore generico di $\mathbb{R}^n$ si scrive

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\, e_1 + ... + x_n\, e_n$$

Inoltre $e_1, ..., e_n$ sono linearmente indipendenti perchè $x_1\, e_1 + ... + x_n\, e_n = 0$ solo quando $x_1 = ... = x_n = 0$.
In definitiva, i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$ formano una base di $\mathbb{R}^n$.

1.2 Spazi con prodotto interno (sistemi ortonormali)

Definizione 1.6 (**Prodotto interno**)**.** Sia H uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Si chiama prodotto interno in H ogni applicazione $\langle , \rangle\ : H\ \times\ H \to \mathbb{K}$ con le seguenti proprietà:

1. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \forall x, y, z \in H$
2. $\langle \lambda\, x, y\rangle = \lambda\, \langle x, y\rangle \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in H$
3. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ dove $\overline{\langle y, x\rangle}$ indica il coniugato di $\langle y, x\rangle$ (se $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$).
4. $\langle x, x\rangle \geq 0\, \forall x \in H, \langle x, x\rangle = 0$ se e solo se $x = 0$.

Prendiamo $y = x$, allora per la proprietà (3) si ha $\langle x, x\rangle = \overline{\langle x, x\rangle}$. Perciò sia nel caso reale che in quello complesso, il prodotto interno $\langle x, x\rangle$ è un numero reale, qualunque sia $x \in H$. Dunque $\langle x, x\rangle \geq 0\, \forall x \in H$ è formalmente corretta.

Definizione 1.7 (**Spazio con prodotto interno**)**.** Se $\langle , \rangle$ è un prodotto interno nello spazio vettoriale H, diremo che $(H, \langle , \rangle)$ è uno spazio con prodotto interno.

Esempio 1.2.1. Lo spazio euclideo reale N-dimensionale $\mathbb{R}^n$ è un esempio di spazio con prodotto interno reale.
Se $x = (x_1, ..., x_N)$ e $y = (y_1, ..., y_N)$ appartengono a $\mathbb{R}^n$, il prodotto interno di x per y è $\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{N} x_j\, y_j$.

Esempio 1.2.2. Lo spazio vettoriale complesso N-dimensionale $\mathbb{C}^n$ ha una struttura di spazio con prodotto interno complesso.
Se $x = (x_1, ..., x_N)$ e $y = (y_1, ..., y_N)$ appartengono a $\mathbb{C}^n$, il prodotto interno di x per y è $\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{N} x_j \, \bar{y_j}$.

Rimandiamo successivamente ad un esempio di spazio infinito dimensionale.

Definizione 1.8 (Norma indotta). Sia $(H, \langle, \rangle)$ uno spazio con prodotto interno e sia $x \in H$. Allora

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

si chiama norma indotta da prodotto interno $\langle, \rangle$.

Proposizione 1.2.1. *$\forall x, y \in H$ e $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ si ha:*

1. $\| x \| \geq 0$ *e* $\| x \| = 0$ *se e solo se* $x = 0$
2. $\| \lambda \, x \| = |\lambda| \; \| x \|$
3. *disuguaglianza triangolare:* $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$
4. *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:* $\| \langle x, y\rangle \| \leq \| x \| \, \| y \|$.

Osservazione 1. Se $x, y \in H$ risulta $\| \langle x, y\rangle \| = \| x \| \, \| y \|$ se e solo se x e y sono linearmente dipendenti (cioè $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ non entrambi nulli tali che $\lambda \, x + \mu \, y = 0$). Quindi vale l'uguale nella disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

In uno spazio vettoriale con prodotto interno si può definire un concetto di ortogonalità:

Definizione 1.9 (Vettori ortogonali). Due vettori x e y si dicono ortogonali se $\langle x, y\rangle = 0$. Si scrive $x \perp y$.

Definizione 1.10 (Spazio ortogonale). Sia X un sottoinsieme non vuoto di H. Si chiama spazio ortogonale a X l'insieme

$$X^{\perp} = \{u \in H | u \perp x \quad \forall x \in X\}.$$

Si verifica che $X^{\perp}$ è uno spazio vettoriale di H.

Definizione 1.11 (**Sistema ortogonale**)**.** Se U una famiglia di vettori non nulli di H, si dice che U è un sistema ortogonale se $u \perp v \quad \forall u, v \in U, u \neq v$.

Definizione 1.12 (**Sistema ortonormale**)**.** U è un sistema ortonormale se è un sistema ortogonale e se $\| u \| = 1 \quad \forall u \in U$.
Da un qualunque sistema ortogonale U si può dedurre un sistema ortonormale ponendo

$$U^* = \{\tfrac{u}{\|u\|} | u \in U\}.$$

Definizione 1.13 (**Base ortonormale in uno spazio finito dimensionale**)**.** Se V è uno spazio finito dimensionale con prodotto interno, il sistema ortonormale U si dice base ortonormale se i vettori di U formano una base di H.
Una famiglia di basi ortonormali è anche un sistema linearmente indipendente.

Vediamo un primo esempio di spazio infinito dimensionale con prodotto interno: Sia $C(\pi)$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue dall'intervallo $[-\pi, \pi]$ a $\mathbb{C}$. Per ogni $u, v \in C(\pi)$ definiamo

$$\langle u, v \rangle := \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\, \overline{v(t)}\, dt.$$

1. L'applicazione $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$ è un prodotto interno di $C(\pi)$.

   Dimostrazione. Dimostriamo solo che $\langle u, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} u(t)\, \overline{v(t)}\, dt$ verifica la proprietà (4) del prodotto interno.

   i. Poichè $\langle u, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} |u(t)|^2\, dt$, allora $\langle u, v \rangle \geq 0 \; \forall u \in C(\pi)$.

   ii. Se $\langle u, v \rangle = 0$, allora $|u(t)|^2 = 0$ q.d. in $[-\pi, \pi]$. Pertanto, poichè u è una funzione continua, $u \equiv 0$.

   □

2. $C(\pi)$ ha dimensione infinita.

   Dimostrazione. Dimostriamo che $C(\pi)$ ha dimensione infinita facendo vedere che contiene un sistema ortonormale infinito numerabile.
   Per ogni k $\in \mathbb{Z}$ poniamo $v_k : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}, v_k(t) = e^{ikt}$ e $U = \{v_k, k \in \mathbb{Z}\}$.
   Allora $U \subset C(\pi)$ e $card(U) = card\mathbb{Z}$.
   Inoltre $\langle v_k, v_h \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\, \overline{e^{iht}}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-h)t}\, dt = 0$ e

$\| v_k \|^2 = \langle v_k, v_k \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi$.
Quindi $v_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$, perciò U è un sistema ortogonale infinito numerabile.
Quindi $C(\pi)$ ha dimensione infinita.
Normalizzando gli elementi di U si ottiene il sistema ortonormale
$U^* = \{\frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} | k \in \mathbb{Z}\}$. □

Definizione 1.14 (**Sistema trigonometrico complesso**)**.** L'insieme

$$U = \{e^{ikt}, k \in \mathbb{Z}\}$$

si chiama sistema trigonometrico complesso.

Definizione 1.15 (**Sistema trigonometrico complesso ortonormale**)**.** Normalizzando gli elementi di U si ottiene il sistema trigonometrico complesso ortonormale

$$U^* = \{\frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} | k \in \mathbb{Z}\}.$$

Notazione

Indichiamo con $T_n(\mathbb{C})$ il sottospazio vettoriale di $C(\pi)$ generato dalle funzioni e^{ikt} con $k = \pm 1, \pm 2, ..., \pm n$. Osserviamo che $dim(T_n(\mathbb{C}) = 2n + 1$.

Definizione 1.16 (**Polinomio trigonometrico complesso**)**.** Un polinomio trigonometrico complesso di grado $\leq n \quad (p \in T_n(\mathbb{C}))$ è della forma

$$p(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad c_k \in \mathbb{C}.$$

Osservazione 2. Lo spazio $R(\pi)$ è la versione reale dello spazio $C(\pi)$.
$R(\pi)$ è costituito dalle funzioni continue da $[-\pi, \pi]$ a $\mathbb{R}$.
Per ogni $u, v \in \mathbb{R}$ definiamo il prodotto interno

$$\langle u, v \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} u(t)\, v(t)\, dt.$$

Definizione 1.17 (**Sistema trigonometrico reale**)**.** Al sistema trigonometrico complesso corrisponde il sistema trigonometrico reale

$$U = \{1, \cos(kt), \sin(kt), \quad k = 1, ..., n\}.$$

Normalizzando gli elementi di U si ottiene il sistema ortonormale

$$U^* = \{\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \tfrac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}}, \tfrac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}}, \quad k = 1, ..., n\}.$$

Notazione

Per analogia con il caso complesso, indichiamo con $T_n(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale dei polinomi trigonometrici reali di grado $\leq n$.

Definizione 1.18 (**Coefficienti di Fourier**). Ogni $p \in T_n(\mathbb{R})$ si scrive nel modo seguente:

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

e i coefficienti si caratterizzano in termini integrale. Precisamente:

$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t)\, dt,$

$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \cos(kt)\, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \sin(kt)\, dt, \quad k = 1, .., n.$

Le costanti $a_0, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ si chiamano anche coefficienti di Fourier di p.

Capitolo 2

Spazi di Hilbert

Definizione 2.1 (**Distanza generata da un prodotto interno**)**.** Sia $(H, \langle, \rangle)$ uno spazio con prodotto interno e sia $\| \quad \|$ la norma generata da $\langle, \rangle$. La funzione

$$(x, y) \to d(x, y) = \| x - y \|$$

è una distanza su H e viene chiamata metrica indotta da $\langle, \rangle$.

Definizione 2.2 (**Successione di Cauchy**)**.** Una successione (x_n) in H si dice di Cauchy in (H,d) se $\forall \epsilon > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x_m) < \epsilon \quad \forall n, m > \bar{n}$.

Definizione 2.3 (**Successione convergente**)**.** Una successione (x_n) è convergente in (H,d) se esiste $x \in H$ tale che $d(x, x_n) \to 0$ per $n \to \infty$.

Definizione 2.4 (**Spazio di Hilbert**)**.** Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale H munito di un prodotto interno $\langle u, v \rangle$ che è completo rispetto alla norma $\| u \|_H = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.
Più esplicitamente, sia $(H, \langle, \rangle)$ uno spazio con prodotto interno e sia d la metrica indotta da $\langle, \rangle$. Si dice che $(H, \langle, \rangle)$ è uno spazio di Hilbert se ogni successione di Cauchy in (H,d) è convergente in (H,d).

Esempio 2.0.3. Gli spazi euclidei $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ sono completi rispetto alla distanza indotta dai loro prodotti interni. Perciò $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ sono spazi di Hilbert.

Definizione 2.5 (**Spazio di dimensione infinita**)**.** Uno spazio V si dice avere dimensione infinita quando non ha dimensione finita, cioè quando, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni n-pla di vettori $v_1, ..., v_n$ in V, risulta $Span(v_1, ..., v_n) \neq V$.

Teorema 2.0.2. *Se H ha dimensione infinita, allora esiste in H un sistema ortonormale numerabile.*

Dimostrazione. Poichè per ipotesi H ha dimensione infinita, possiamo determinare una famiglia numerabile $X = \{v_n, n \in \mathbb{N}\}$ tale che, per ogni fissato $n \in \mathbb{N}$, i vettori $v_1, ..., v_n$ siano linearmente indipendenti.
Partendo da X, utilizziamo il metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt per costruire il sistema ortonormale $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$:

$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$;

$\hat{u}_2 = v_2 - u_1 \langle u_1^T, v_2 \rangle, \quad u_2 = \frac{\hat{u}_2}{\|\hat{u}_2\|}$;

$\hat{u}_3 = v_3 - u_1 \langle u_1^T, v_3 \rangle - u_2 \langle u_2^T, v_3 \rangle, \quad u_3 = \frac{\hat{u}_3}{\|\hat{u}_3\|}$;

e, in generale, per ricorrenza,

$\hat{u}_{n+1} = v_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k \langle u_k^T, v_{n+1} \rangle, \quad u_{n+1} = \frac{\hat{u}_{n+1}}{\|\hat{u}_{n+1}\|}$. □

2.1 Spazi $\mathbf{L}^2$

Definizione 2.6 (**Spazio** $L^2[-\pi, \pi]$). Consideriamo l'intervallo $[-\pi, \pi] \subseteq \mathbb{R}$. Definiamo

$$L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C}) = \{u : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} \quad | \quad u \text{ misurabile e } \int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^2 \, dx \ < \infty\}.$$

Conveniamo di identificare due funzioni u e v di $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ quando $u(x) = v(x)$ q.d. in $[-\pi, \pi]$.

Definizione 2.7 (**Prodotto interno di** $\mathbf{L}^2$). Siano $u, v \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, poniamo

$$\langle u, v \rangle_2 = \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \, \overline{v(x)} \, dx$$

come prodotto interno di $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$.

Dimostrazione. Se $u = v$, allora
$\langle u, u \rangle_2 = \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \, \overline{u(x)} \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^2 \, dx$.
Supponiamo che $\langle u, u \rangle_2 = 0$. Poichè $|u(x)|^2 \geq 0 \quad \forall x$, allora $u(x) = 0$ q.d. su $[-\pi, \pi]$, quindi$u = 0$. Perciò $\langle u, v \rangle_2$ è un prodotto interno. □

Osservazione 3. $C(\pi)$ è un sottospazio di $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ (per definizione di $C(\pi)$). Inoltre $U^* = \{\frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} | k \in \mathbb{Z}\}$ è un sistema ortonormale di $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$.

Definizione 2.8 (**Norma indotta dal prodotto interno di** $\mathbf{L}^2$). La norma indotta dal prodotto interno $\langle u, v\rangle_2$ si scrive

$$\| u \|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Più in generale, se A è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$ si pone

$$L^2(A) := \{u : A \to \mathbb{C} \,|\, u \textit{ misurabile e tale che } |u|^2 \in L^1(A)\}$$

$L^2(A)$ è uno spazio vettoriale e, convenendo di identificare due funzioni uguali quasi dappertutto,

$$\langle u, v\rangle := \int_A u(x)\, \overline{v(x)}\, dx$$

risulta essere un prodotto interno in $L^2(A)$.
Indichiamo ancora con $\| \quad \|_2$ la norma associata a questo prodotto interno.

Teorema 2.1.1 (**di Fischer-Riesz**). *Lo spazio $L^2(A)$, con $A \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile, è completo.*

Dimostrazione. Sia (u_n) una successione di Cauchy in $L^2(A)$ tale che $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists n_k \in \mathbb{N}$ tale che $\| u_n - u_m \|_2 \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall n, m \geq n_k$. Possiamo supporre $n_k < n_{k+1}$. Consideriamo la sottosuccessione $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Allora

$$\| u_{n_k} - u_{n_{k+1}} \|_2 \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Poniamo

$$\begin{aligned} v &= |u_{n_1}| + |u_{n_2} - u_{n_1}| + ... + |u_{n_{k+1}} - u_{n_k}| + ... = \\ &= |u_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |u_{n_{k+1}} - u_{n_k}|. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Per il teorema di Beppo Levi si ha:

$$\begin{aligned} \int_A v^2 &= \lim_{p\to\infty} \int_A \left(u_{n_1} + \sum_{k=1}^{p} (u_{n_{k+1}} - u_{n_k}) \right)^2 dx = \\ &= \text{(Definizione 2.8) } (\lim_{p\to\infty} \| u_{n_1} + \textstyle\sum_{k=1}^{p} (u_{n_{k+1}} - u_{n_k}) \|_2)^2 \leq \\ &\leq \text{(per la disuguaglianza triangolare) } (\lim_{p\to\infty} \| u_{n_1} \|_2 + \textstyle\sum_{k=1}^{p} \| u_{n_{k+1}} - u_{n_k} \|_2)^2 \leq \\ &\leq \left(\| u_n \|_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right)^2 < \infty \quad \text{(perchè per ipotesi } (u_n) \text{ è di Cauchy).} \end{aligned}$$

Quindi $v \in L^2$ (per Definizione 2.6) e $v^2 < \infty$ q.d. Ma questo è come dire che $v < \infty$ q.d. Cioè, per l'equazione 2.1,

$$|u_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |u_{n_{k+1}} - u_{n_k}| < \infty \tag{2.2}$$

q.d. in A. Allora

$$u_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (u_{n_{k+1}} - u_{n_k}) \tag{2.3}$$

converge (assolutamente) q.d. Ma questa serie è la successione (u_{n_k}).
Abbiamo quindi dimostrato che $(u_{n_k}(x))$ converge q.d. in A.
Poniamo

$$u = \lim_{k \to \infty} u_{n_k}. \tag{2.4}$$

Allora:

$$\begin{aligned} |u| \ &\leq \text{(per definizione) } |u_{n_1}| + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} |u_{n_{k+1}} - u_{n_k}| = \\ &= v \quad \text{(per l'equazione 2.1)}, \end{aligned}$$

quindi

$$|u| \ \leq \ v. \tag{2.5}$$

Ma $v \in L^2$, perciò anche $u \in L^2$.
Dimostriamo che $\| \ u_n - u \ \|_2 \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$. Con questo avremo completato la dimostrazione.
Ora:

$$\| \ u_n - u \ \|_2 \leq \| \ u_n - u_{n_k} \ \|_2 + \| \ u_{n_k} - u \ \|_2$$

dove $\| \ u_n - u_{n_k} \ \|_2 \longrightarrow 0$ per $n, n_k \to \infty$ (perchè (u_n) è una successione di Cauchy).
D'altra parte,

$$\begin{aligned} \lim_{k \to \infty} \| \ u_{n_k} - u \ \|_2^2 = \text{(Definizione 2.8)} \lim\nolimits_{k \to \infty} \textstyle\int_A |u_{n_k} - u|^2 \, dx = \\ \stackrel{?}{=} \int_A \lim_{k \to \infty} |u_{n_k} - u|^2 \, dx = 0 \text{ (per l'equazione 2.4)}. \end{aligned}$$

Quindi $\| \ u_n - u \ \|_2 \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$, perciò $L^2(A)$ è completo.
Giustifichiamo il passaggio al limite sotto il segno di integrale:
$|u_{n_k} - u|^2 \ \leq \ (|u_{n_k}| + |u|)^2 \ \leq$ (per le equazioni 2.1 e 2.5) $(2v)^2 \in L^1$ (perchè $v \in L^2$). Perciò la convergenza è dominata e si può applicare il *Teorema della convergenza dominata di Lebesgue.* □

In definitiva, $L^2(A)$ è uno spazio di Hilbert.

Osservazione 4. La versione reale dello spazio $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ è lo spazio

$$L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R}) = \{u : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \quad | \quad u \textit{ misurabile e } \int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^2 \, dx \ < \infty\}.$$

Il prodotto interno in $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ è

$$\langle u,v\rangle_2 = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)\,v(x)\,dx.$$

Anche $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ è uno spazio di Hilbert. Inoltre $R(\pi)$ è un sottospazio di $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ e $U^* = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}}, \quad k=1,...,n\}$ è un sistema ortonormale in $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$.

2.2 Spazio ℓ^2

Definizione 2.9 (**Spazio** ℓ^2). Indichiamo con $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle successioni in $\mathbb{C}$ e poniamo

$$\ell^2(\mathbb{C}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\} :$$

versione discreta dello spazio L^2.

Se $x = (x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\forall p \in \mathbb{N}$ denotiamo

$$\| \; x \; \|_p = \left(\sum_{n=1}^{p} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Allora $\| \; x \; \|_p$ è la norma euclidea del vettore $(x_1,...,x_p)$ e
$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} |x_n|^2 = \lim_{p\to\infty} \| \; x \; \|_p^2$,
perciò si può scrivere

$$\ell^2(\mathbb{C}) = \{(x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{p\to\infty} \| \; x \; \|_p < \infty\}.$$

Siano $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni in $\mathbb{C}$ e sia $\lambda \in \mathbb{C}$. Allora definiamo $x + y := (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\lambda\, x := (\lambda\, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Con queste due operazioni $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.

Dimostrazione. Dimostriamo che $\ell^2(\mathbb{C})$ è un sottospazio di $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Se $x, y \in \ell^2(\mathbb{C})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, per le proprietà delle norme euclidee si ha
$\| \; x+y \; \|_p \leq \| \; x \; \|_p + \| \; y \; \|_p$ e $\| \; \lambda\, x \; \|_p = |\lambda| \; \| \; x \; \|_p \quad \forall p \in \mathbb{N}$. Allora
$\lim_{p\to\infty} \| \; x+y \; \|_p \leq \lim_{p\to\infty} \| \; x \; \|_p + \lim_{p\to\infty} \| \; y \; \|_p$ (perchè $x, y \in \ell^2(\mathbb{C})$) e
$\lim_{p\to\infty} \| \; \lambda\, x \; \|_p = |\lambda| \; \lim_{p\to\infty} \| \; x \; \|_p < \infty$.
Perciò $x + y$ e $\lambda\, x$ appartengono a $\ell^2(\mathbb{C})$. Quindi $\ell^2(\mathbb{C})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. $\square$

Lemma 2.2.1. *Se $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ appartengono a $\ell^2(\mathbb{C})$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ è assolutamente convergente.*

Dimostrazione. Usando la disuguaglianza $|a\,b| \leq \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$ si ottiene: $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n \overline{y_n}| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\,|y_n| \leq \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2) < \infty$ (perchè per ipotesi (x_n) e $(y_n) \in \ell^2$). Quindi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ è assolutamente convergente. □

Definizione 2.10 (Prodotto interno di $\ell^2(\mathbb{C})$). Se $x = (x_n), y = (y_n) \in \ell^2(\mathbb{C})$ poniamo

$$\langle x, y \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

come prodotto interno di $\ell^2(\mathbb{C})$. Questa definizione è ben posta grazie al lemma precedente.

Dimostriamo che $\langle x, x \rangle = 0$ implica $x = 0$.

Dimostrazione. Se $x = (x_n) \in \ell^2(\mathbb{C})$ e $\langle x, x \rangle = 0$, allora per definizione di prodotto interno si ha:
$0 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{x_n} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$, quindi $|x_n| = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, cioè $x = 0$. □

Osservazione 5. Per ogni $p \in \mathbb{N}$ e per ogni $x = (x_n), y = (y_n) \in \ell^2(\mathbb{C})$, definiamo

$$\langle x, y \rangle_p := \sum_{n=1}^{p} x_n \overline{y_n}.$$

Allora $\langle x, y \rangle = \lim_{p \to \infty} \langle x, y \rangle_p$, cioè il prodotto interno di $\ell^2(\mathbb{C})$ è il limite per $p \to \infty$ del prodotto interno di $\mathbb{C}^p$.

Definizione 2.11 (Norma indotta dal prodotto interno di $\ell^2(\mathbb{C})$). La norma indotta dal prodotto interno di un vettore $x = (x_n) \in \ell^2(\mathbb{C})$ è

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$$

Dimostriamo che $\ell^2(\mathbb{C})$ è uno spazio completo:

Teorema 2.2.2. *Se $(x^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\ell^2(\mathbb{C})$, allora esiste $x \in \ell^2(\mathbb{C})$ tale che $\lim_{m \to \infty} \| x^{(m)} - x \| = 0$, cioè $\ell^2(\mathbb{C})$ è completo.*

Dimostrazione. Poichè per ipotesi $(x^{(m)})$ è una successione di Cauchy, $\forall\epsilon > 0$, $\exists\bar{m} \in \mathbb{N}$ tale che $\| x^{(m)} - x^{(r)} \| < \epsilon \quad \forall m, r > \bar{m}$. Allora

$$\sum_{n=1}^{p} \| x_n^{(m)} - x_n^{(r)} \|^2 \leq \| x^{(m)} - x^{(r)} \|^2 \leq \epsilon^2 \tag{2.6}$$

$\forall m, r > \bar{m}, \forall p \in \mathbb{N}$. Da questa si trae $\| x_n^{(m)} - x_n^{(r)} \| < \epsilon \quad \forall m, r > \bar{m}, \forall n \in \mathbb{N}$. Quindi $(x_n^{(r)})_{r\in\mathbb{N}}$, la successione delle n-esime coordinate dei vettori $(x^{(r)})$, è di Cauchy in $\mathbb{C}$. Perciò, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in \mathbb{C}$ tale che $\lim_{r\to\infty} x_n^{(r)} = x_n$.
Poniamo $x = (x_n), x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

i. Dimostriamo che $x \in \ell^2(\mathbb{C})$.
Per la disuguaglianza triangolare si ha:

$$\begin{aligned}\| x \|_p &\leq \| x - x^{(m)} \|_p + \| x^{(m)} \|_p = \lim_{r\to\infty} \| x^{(m)} - x^{(r)} \|_p + \| x^{(m)} \|_p \leq \\ &\leq \epsilon + \| x^{(m)} \|_p \,.\end{aligned}$$

Se $m > \bar{m}, \lim_{p\to\infty} \| x \|_p \leq \epsilon + \lim_{p\to\infty} \| x^{(m)} \|_p = \epsilon + \| x^{(m)} \| < \infty$. Perciò $x \in \ell^2(\mathbb{C})$.

ii. Dimostriamo che $\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x$.
Se $m > \bar{m}$ e $p \in \mathbb{N}$ si ha:
$\| x - x^{(m)} \|_p^2 = \sum_{n=1}^{p} \| x_n^{(m)} - x_n \|^2 = \lim_{r\to\infty} \sum_{n=1}^{p} \| x_n^{(m)} - x_n^{(r)} \|^2 \leq \epsilon^2$ (per l'equazione 2.1).
Per $p \to \infty$ si trae $\| x - x^{(m)} \| \leq \epsilon \quad \forall m > \bar{m}$, cioè $\lim_{m\to\infty} \| x^{(m)} - x \| = 0$.
Perciò $\ell^2(\mathbb{C})$ è completo.

$\square$

In definitiva, $\ell^2(\mathbb{C})$ è uno spazio di Hilbert.

Capitolo 3

Proiezione sui convessi

Sia A un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Allora esiste almeno un punto $y \in A$ tale che

$$|x-y| = dist(x,A) := inf\ \{|x-z|\,|z \in A\}.$$

Definizione 3.1 (Proiezione). Se y è un punto di A che verifica $|x-y| = dist(x,A) := inf\ \{|x-z|\,|z \in A\}$, diciamo che y è *una* proiezione di x su A.

Un analogo risultato non vale negli spazi di Hilbert infinito dimensionale. Mostriamo che, in un qualunque spazio di Hilbert H, se A oltre che chiuso è anche convesso, allora la proiezione su A esiste ed è unica. Ciò segue, come vedremo, dalla completezza di H e dalla seguente *Identità del parallelogramma.*

Proposizione 3.0.3 (Identità del parallelogramma). *Se x e y sono due elementi di uno spazio vettoriale H, risulta*

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2\,(|x|^2 + |y|^2).$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}|x+y|^2 + |x-y|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \\ &= 2\,|x|^2 + 2\,|x|^2.\end{aligned}$$

□

Definizione 3.2 (Insieme convesso). Un sottoinsieme C di uno spazio di Hilbert H si dice convesso se

$$t\,x + (1-t)\,y \in C \quad \forall x, y \in C, \quad \forall t \in [0,1].$$

In particolare, se $t = \frac{1}{2}$ si ha $\frac{x+y}{2} \in C \quad \forall x, y \in C$.

Teorema 3.0.4 (della proiezione). *Sia H uno spazio di Hilbert e sia C un suo sottoinsieme non vuoto chiuso e convesso. Allora per ogni $x \in H$, esiste un unico punto $y \in C$ tale che*

$$|x - y| = dist(x, C).$$

Dimostrazione. Sia (y_n) una successione in C tale che

$$\lim_{n\to\infty} |x - y_n| = dist(x, C) \equiv d. \tag{3.1}$$

Dimostriamo che (y_n) è di Cauchy in H:

$$\begin{aligned}
0 \le\ & |y_n - y_m|^2 = |(y_n - x) - (y_m - x)|^2 = |y_n - x|^2 + |y_m - x|^2 - |y_n + y_m - 2\,x|^2 = \\
&=\text{(per l'identità del parallelogramma) } 2\,(|y_n - x|^2 + |y_m - x|^2) - |y_n + y_m - 2\,x \\
&= 2\,(|y_n - x|^2 + |y_m - x|^2) - 4\left|\frac{y_n + y_m}{2} - x\right|^2 \le \\
&\text{(perchè } \tfrac{y_n + y_m}{2} \in C\text{, allora } |\tfrac{y_n + y_m}{2} - x| \ \ge d) \\
&\le\ 2\,(|y_n - x|^2 + |y_m - x|^2) - 4\,d^2 \longrightarrow \text{(per l'equazione 3.1) } 2\,(d^2 + d^2) - 4\,d^2 =
\end{aligned}$$

Perciò $|y_n - y_m|^2 \longrightarrow 0$ per $n, m \to \infty$, quindi (y_n) è di Cauchy.
Poichè per ipotesi H è uno spazio di Hilbert, allora è completo, perciò esiste un punto $y \in H$ tale che $y_n \to y$ per $n \to \infty$. Inoltre C è chiuso e $y_n \in C$, perciò anche $y \in C$.
In definitiva, $y \in C$ e $|x - y| = \lim_{n\to\infty} |x - y_n| =$ (per l'equazione 3.1) $dist(x, C)$.

Dimostriamo ora l'unicità del punto $y \in C$ tale che $|x - y| = dist(x, C)$.
Supponiamo per assurdo che esistano $y, y' \in C$, $y \neq y'$ tali che

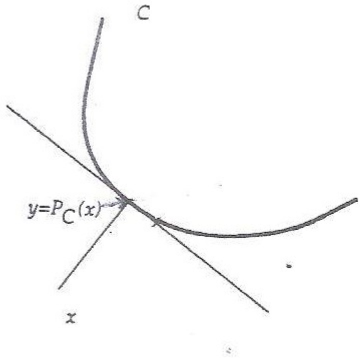
$$|x - y'| = |x - y| = dist(x, C). \tag{3.2}$$

Poichè C è convesso, il punto $z = \frac{y+y'}{2} \in C$, allora $|x - z| \ \ge\ dist(x, C)$. Perciò

$$\begin{aligned}
dist(x, C)\ &\le\ |x - z| = \left|x - \frac{y + y'}{2}\right| = \left|\frac{2\,x - y - y'}{2}\right| = \left|\frac{x - y + x - y'}{2}\right| = \left|\frac{x - y}{2} + \frac{x - y'}{2}\right| \le \\
&\le\ \frac{|x - y|}{2} + \frac{|x - y'|}{2} = \frac{1}{2}\,dist(x, C) + \frac{1}{2}\,dist(x, C) = dist(x, C).
\end{aligned}$$

Poichè il primo e l'ultimo termine della catena sono uguali, allora
$|\frac{x-y}{2} + \frac{x-y'}{2}| = \frac{|x-y|}{2} + \frac{|x-y'|}{2}$. Perciò deve essere $x - y = t\,(x - y')$ oppure
$x - y' = t\,(x - y)$ per un opportuno $t \ge 0$. Ma abbiamo supposto che
$|x - y'| = |x - y|$ (per l'equazione 3.2), perciò $t = 1$. Allora $x - y = x - y'$, cioè $y = y'$, ma avevamo supposto $y \neq y'$: assurdo. Perciò $y \in C$ è unico. $\square$

Notazione L'unico punto $y \in C$ che verifica $|x - y| = dist(x, C)$ si chiama *proiezione di x su C* e si indica $P_C(x)$.



Osservazione 6. Se $x \in C$, allora $|x - x| = 0 = dist(x, C)$, perciò $P_C(x) = x$.

Consideriamo uno spazio di Hilbert reale. Per la proiezione su C di un punto $x \notin C$ vale la seguente proposizione:

Proposizione 3.0.5. *Sia H uno spazio di Hilbert e C un suo sottoinsieme chiuso e convesso. Siano $x \in H$ e $y \in C$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

1. $y = P_C(x)$
2. $\Re(\langle x - y, z - y\rangle) \ \leq\ 0 \quad \forall y \in C$

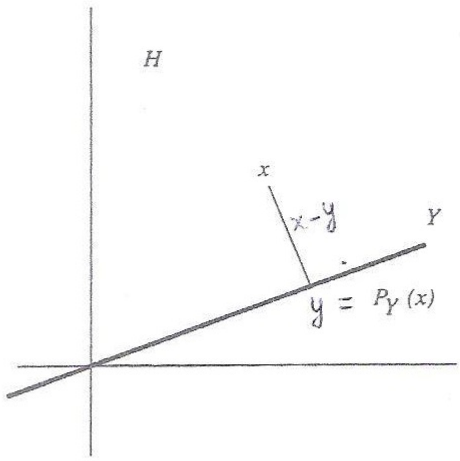
Dimostrazione. a) $1 \Rightarrow 2$
Fissiamo $z \in C$ e poniamo $w = y + t\,(z - y)$. Poichè per ipotesi C è convesso, $w \in C \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq t \leq 1$ (perchè $y, z \in C$ per ipotesi). Allora, poichè per ipotesi $y = P_C(x)$, si ha $|x - w|^2 \ \geq\ |x - y|^2$. D'altra parte,
$|x - w|^2 = |(x - y) + (y - w)|^2 = |x - y|^2 + |y - w|^2 + 2\,\Re(\langle x - y, y - w\rangle)$. Allora $|y - w|^2 + 2\,\Re(\langle x - y, y - w\rangle) \ \geq\ 0$. In questa disuguaglianza sostituiamo w con la sua espressione $w = y + t\,(z - y)$:
$|y - y - t\,(z - y)|^2 + 2\,\Re(\langle x - y, y - y - t\,(z - y)\rangle) \ \geq\ 0$, perciò
$t^2\,|z - y|^2 - 2\,t\,\Re(\langle x - y, z - y\rangle) \ \geq\ 0$, cioè $t\,|z - y|^2 - 2\,\Re(\langle x - y, z - y\rangle) \ \geq\ 0$.
Per $t \to 0$ si ottiene: $\Re(\langle x - y, z - y\rangle) \ \leq\ 0$, cioè la tesi.

b) $2 \Rightarrow 1$
Sia $z \in C$. Per ipotesi $\Re(\langle x - y, z - y\rangle) \ \leq\ 0$, perciò
$|x - z|^2 = |(x - y) + (y - z)|^2 = |x - y|^2 + |y - z|^2 + 2\,\Re(\langle x - y, y - z\rangle) \ \geq\ |x - y|^2$.
Allora $|x - y|^2 = min_{x \in C}|x - z|^2$. Questo dimostra che $y = P_C(x)$.

□

Corollario 3.0.6. *Sia H uno spazio di Hilbert e Y un suo sottospazio vettoriale chiuso. Siano $x \in H$ e $y \in Y$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

1. $y = P_Y(x)$
2. $x - y \perp Y$



Dimostrazione. a) $1 \Rightarrow 2$

Fissiamo $z \in Y$. Per la proposizione precedente si ha: $\Re(\langle x - y, z - y\rangle) \leq 0 \quad \forall y \in Y$. Inoltre, poichè $y, z \in Y$ e Y è uno spazio vettoriale, si ha $\Re(\langle x - y, w\rangle) \leq 0 \quad \forall w \in Y$. Allora anche $\Re(\langle x - y, \lambda w\rangle) \leq 0 \quad \forall w \in Y$ e $\forall \lambda \in \mathbb{K}$. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ è tale che $\Re(\bar{\lambda} \langle x - y, w\rangle) = |\langle x - y, w\rangle|$, allora $|\langle x - y, w\rangle| \leq 0 \quad \forall w \in Y$. Perciò $\langle x - y, w\rangle = 0 \quad \forall w \in Y$, cioè $x - y \perp Y$.

b) $2 \Rightarrow 1$

Poichè per ipotesi $x - y \perp Y$, allora $\Re(\langle x - y, w\rangle) = 0 \quad \forall w \in Y$, perciò $\Re(\langle x-y, z-y\rangle) = 0 \quad \forall z \in Y$. Per la proposizione precedente, questo implica $y = P_Y(x)$.

□

Per le proiezioni ortogonali su un sottospazio di dimensione finita vale il seguente corollario:

Corollario 3.0.7. *Sia $\{u_1, ..., u_n\}$ un sistema ortonormale in H e sia $Y = Span(u_1, ..., u_n)$. Per ogni $x \in H$ risulta $P_Y(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j\rangle \, u_j$.*

Dimostrazione. Poichè

$$\langle u_j, u_k \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{se } j \neq k \end{cases} \qquad per j, k = 1, ..., n,$$

allora: $\langle x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j \rangle u_j, u_k \rangle = \langle x, u_k \rangle - \langle x, u_k \rangle \langle u_k, u_k \rangle = 0$.
Perciò $x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j \rangle u_j$ è ortogonale ad ogni elemento u_k della base di Y, quindi $x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j \rangle u_j$ è ortogonale a Y. Allora per il corollario precedente si ha: $\sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j \rangle u_j = P_Y(x)$. □

Definizione 3.3 (Somma diretta). Siano S_1 e S_2 due sottospazi vettoriali. Se ogni vettore della somma $S_1 + S_2$ si scrive in modo unico come somma di un vettore di S_1 e di un vettore di S_2, allora si dice che la somma è diretta e si scrive $S_1 \oplus S_2$.

Teorema 3.0.8. *Sia H è uno spazio di Hilbert e V è un suo sottospazio chiuso. Allora, se $V \neq H, H = V \oplus V^{\perp}$ dove $V^{\perp}$ è lo spazio ortogonale a V (Definizione 1.10).*

Dimostrazione. Poichè V è chiuso e diverso da H, allora $V^{\perp} \neq \emptyset$ per il teorema della proiezione (Teorema 3.0.4).
Sia $x \in H$ e x' la proiezione di x su V. Allora possiamo scrivere $x = (x - x') + x'$ dove $x' \in V$ e $x - x'$ è ortogonale a V, perciò $x - x' \in V^{\perp}$. Quindi possiamo scrivere $H = V \oplus V^{\perp}$. □

Capitolo 4

Compattezza debole

Negli spazi di Hilbert di dimensione finita vale il *Teorema di Bolzano-Weierstrass*:

Teorema 4.0.9 (di Bolzano-Weierstrass). *Da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente.*

Facciamo vedere con un esempio che il Teorema di Bolzano-Weierstrass non vale negli spazi di Hilbert di dimensione infinita:

Esempio 4.0.1. Sia $(H, \langle , \rangle)$ uno spazio di Hilbert di dimensione infinita. Per il teorema 2.0.2, esiste il sistema ortogonale numerabile $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Definiamo $x_n = \frac{u_n}{\| u_n \|}$. Poichè $\| x_n \| = 1$, allora la successione (x_n) è limitata. Inoltre, $x_n \perp x_m$ se $n \neq m$, perciò per il teorema di Pitagora si ha:
$\| x_n - x_m \|^2 = \| x_n \|^2 + \| x_m \|^2 = 2$, perciò $d(x_n, x_m) = \sqrt{2}$ per ogni $n \neq m$. Allora dalla successione (x_n) non si può estrarre nessuna sottosuccessione convergente in H.
In definitiva, il teorema di Bolzano-Weierstrass non è verificato in H.

Definizione 4.1 (Successione convergente in senso forte). Sia (x_n) una successione in uno spazio di Hilbert H. Diciamo che (x_n) converge ad un punto $x \in H$ in senso forte se

$$\| x_n - x \| \longrightarrow 0 \text{ per } n \to \infty.$$

Si scrive $x_n \longrightarrow x$.

Osservazione 7. Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare e $x = (x_1, ..., x_N)$ un vettore di $\mathbb{R}^N$. Allora $x = \sum_{j=1}^{N} x_j \, e_j$ e per la linearità di f, $f(x) = \sum_{j=1}^{N} x_j \, f(e_j)$.
Ponendo $\alpha = (f(e_1), ..., f(e_n))$, $f(x) = \sum_{j=1}^{N} x_j \, f(e_j)$ diventa

$$f(x) = \langle x, \alpha \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Un risultato analogo vale in ogni spazio di Hilbert.

Definizione 4.2 (Successione debolmente convergente). Una successione (x_n) in uno spazio di Hilbert $(H, \langle , \rangle)$ si dice debolmente convergente ad un punto $x \in H$ se

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, \alpha \rangle = \langle x, \alpha \rangle \quad \forall \alpha \in H.$$

In questo caso scriviamo $x_n \stackrel{d}{\to} x$.

Proposizione 4.0.10. *Sia $(H, \langle , \rangle)$ uno spazio di Hilbert e (x_n) una successione in H. Se $\| x_n - x \| \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$, allora $x_n \stackrel{d}{\to} x$ (cioè la convergenza forte implica quella debole).*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $|\langle x_n, \alpha \rangle - \langle x, \alpha \rangle| \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$.
Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (Proposizione 1.2.1) si ha:
$|\langle x_n, x \rangle - \langle x, \alpha \rangle| \;=\; |\langle x_n - x, \alpha \rangle| \;\leq \| x_n - x \| \; |\alpha| \longrightarrow 0$ per $n \to \infty \quad \forall \alpha \in H$
(perchè per ipotesi $\| x_n - x \| \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$). Perciò $x_n \stackrel{d}{\to} x$. □

Osservazione 8. Se H ha dimensione finita vale anche il viceversa. Cioè la convergenza debole implica quella forte.

Dimostrazione. Sia (x_n) una successione in H debolmente convergente ad x, cioè tale che $|\langle x_n, \alpha \rangle - \langle x, \alpha \rangle| \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$. Sia inoltre $\{u_1, ..., u_N\}$ una base ortonormale di H. Allora

$\| x_n - x \|^2$ =(perchè $\{u_1, ..., u_N\}$ è una base ortonormale)

$$\sum_{k=1}^{N} |\langle x_n - x, u_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{N} |\langle x_n, u_k \rangle - \langle x, u_k \rangle|^2 \longrightarrow 0 \text{ per } n \to \infty \text{ (per ipotesi).}$$

Perciò $\| x_n - x \|^2 \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$, cioè x_n converge ad x in senso forte. □

Vedremo fra poco che l'osservazione precedente non è vera per uno spazio di Hilbert infinito dimensionale.

In uno spazio di Hilbert di dimensione infinita vale la *disuguaglianza di Bessel*:

Proposizione 4.0.11 (disuguaglianza di Bessel). *Sia H uno spazio di Hilbert di dimensione infinita e sia $\{u_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale numerabile. Allora*

$$\sum_{k=1}^{N} |\langle x, u_k\rangle|^2 \ \leq \| x \|^2 \quad \forall x \in H.$$

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $Y_n = Span(u_1, ..., u_n)$. Per il Corollario 3.0.7 il vettore $z = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k\rangle \, u_k$ è la proiezione ortogonale di x su Y_n. Allora $x - z$ è ortogonale a Y_n ed, in particolare, $x - z$ è ortogonale a z.
Per il Teorema di Pitagora si ha:

$$\| x \|^2 = \| (x - z) + z \|^2 = \| x - z \|^2 + \| z \|^2 \geq \| z \|^2 . \tag{4.1}$$

Ma $\| z \|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, u_k\rangle|^2$ (per definizione di z), perciò
$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, u_k\rangle|^2 \ \leq \| x \|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (per l'equazione 4.1).
Per $n \to \infty$ si ottiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, u_k\rangle|^2 \ \leq \| x \|^2 .$$

$\square$

Osservazione 9. Se vale l'uguale nella disuguaglianza di Bessel, cioè se

$$\sum_{k=1}^{N} |\langle x, u_k\rangle|^2 = \| x \|^2 \quad \forall x \in H$$

allora, per definizione, $\{u_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ è un sistema ortonormale completo.

Osservazione 10. In uno spazio di Hilbert di dimensione infinita, la convergenza debole non implica quella forte.

Dimostrazione. Sia $U = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale. Allora, per la disuguaglianza di Bessel (Proposizione 4.0.12) si ha: $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \alpha, u_n\rangle|^2 \ < \infty$
$\forall \alpha \in H$. Quindi $\langle \alpha, u_n\rangle \longrightarrow 0 \quad \forall \alpha \in H$. Allora, per definizione, $u_n \xrightarrow{d} 0$.
Ma $u_n \in U$, perciò $\| u_n \| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, perciò $u_n \nrightarrow 0$. $\square$

Definizione 4.3 (Insieme denso). Sia H uno spazio di Hilbert. Un sottoinsieme D di H si dice denso in H se $\bar{D} = H$.

Abbiamo visto che il teorema di Bolzano-Weierstrass non vale negli spazi di Hilbert di dimensione infinita (esempio 4.0.1). In questi spazi il teorema di Bolzano-Weierstrass ha un surrogato che richiede la nozione di convergenza debole. Premettiamo il seguente lemma:

Lemma 4.0.12. *Sia (x_n) una successione limitata in H e sia D un insieme denso in H. Sia $d \in D$ fissato. Se la successione $(\langle x_n, d\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente in un campo $\mathbb{K}$, allora esiste $x \in H$ tale che $x_n \xrightarrow{d} x$ per $n \to \infty$.*

Dimostrazione. Per prima cosa proviamo che la successione $(\langle x_n, \alpha\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente in $\mathbb{K}$ qualunque sia $\alpha \in H$.
Poichè per ipotesi (x_n) è limitata, $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\| x_n \| \leq \; M \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Fissiamo $\epsilon > 0$. Poichè D è denso in H, $\exists d \in D$ tale che $|\alpha - d| < \epsilon$. Inoltre, la successione $(\langle x_n, d\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente per ipotesi, perciò $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$|\langle x_n - x_m, d\rangle| < \epsilon \quad \forall n, m > \bar{n}. \tag{4.3}$$

Allora:

$$\begin{aligned} |\langle x_n - x_m, \alpha\rangle| \; &\leq \; |\langle x_n - x_m, d\rangle| + |\langle x_n - x_m, d - \alpha\rangle| \; \leq \text{(per l'equazione 4.3)} \\ &\leq \epsilon + (\| x_n \| + \| x_m \|)\, |d - \alpha| \; \leq \text{(per l'equazione 4.2)} \; \epsilon\,(1 + 2\,M) \quad \forall n, m > \bar{n}. \end{aligned}$$

Perciò la successione $(\langle x_n, \alpha\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, quindi è convergente in $\mathbb{K}$.
Poniamo ora

$$f \;: H \to \mathbb{K},\; f(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, \alpha\rangle, \tag{4.4}$$

f è lineare. Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (Proposizione 1.2.1) si ha:

$$|f(\alpha)| \leq \; sup_n \; \| x_n \| \; |\alpha| \; \leq \text{(per l'equazione 4.2)} \; M\,\alpha. \tag{4.5}$$

Dimostriamo che f è continua: se $\alpha_n \to \alpha$, allora
$|f(\alpha_n) - f(\alpha)| = |f(\alpha_n - \alpha)| \leq$(per l'equazione 4.5) $M\,|\alpha_n - \alpha| \longrightarrow 0$
per $n \to \infty$. Quindi f è continua.
Poichè f è lineare e continua, per il teorema di rappresentazione di Riesz (Teorema 4.0.10), esiste $x \in H$ tale che $f(\alpha) = \langle x, \alpha\rangle \quad \forall \alpha \in H$. Allora per definizione di f (equazione 4.4) abbiamo che $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, \alpha\rangle = \langle x, \alpha\rangle \quad \forall \alpha \in H$. Quindi $x_n \xrightarrow{d} x$ per $n \to \infty$. □

Definizione 4.4 (Insieme separabile). Uno spazio H si dice separabile se esiste un sottoinsieme D di H numerabile e denso in H.

Teorema 4.0.13 (di Bolzano-Weierstrass debole). *Da ogni successione limitata in uno spazio di Hilbert separabile si può estrarre una sottosuccessione debolmente convergente.*

Dimostrazione. Sia (x_n) una successione limitata in H (per ipotesi) e sia $M \in \mathbb{R}$ tale che $\| x_n \| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Poichè per ipotesi H è separabile, esiste un insieme $D = \{d_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ numerabile e denso in H.
Consideriamo la successione $(\langle x_n, d_1\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$. Allora
$|\langle x_n, d_1\rangle| \leq \| x_n \| \ |d_1| \leq M\,|d_1| \quad \forall n \in \mathbb{N}$, perciò $(\langle x_n, d_1\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in $\mathbb{K}$. Perciò per il teorema di Bolzano-Weierstrass (Teorema 4.0.9), esiste $(x_{n_1})_{n\in\mathbb{N}}$ sottosuccessione di (x_n) tale che $(\langle x_{n_1}, d_1\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente in $\mathbb{K}$.
$|\langle x_{n_1}, d_2\rangle| \leq \| x_{n_1} \| \ |d_2| \leq M\,|d_2| \quad \forall n \in \mathbb{N}$, perciò la successione $(\langle x_{n_1}, d_2\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in $\mathbb{K}$. Allora esiste $(x_{n_2})_{n\in\mathbb{N}}$ sottosuccessione di (x_{n_1}) tale che $(\langle x_{n_2}, d_2\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente in $\mathbb{K}$.
Iterando questo procedimento, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si costruisce una successione $(x_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $(x_{n_{k+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di $(x_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\langle x_{n_{k+1}}, d_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente in $\mathbb{K}$.
Poniamo $y_n = x_{n_n}, n \in \mathbb{N}$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, la successione $(\langle y_n, d_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di $(\langle x_{n_k}, d_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ la quale è convergente per costruzione. Allora anche $(\langle y_n, d_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente in $\mathbb{K}$. Perciò la successione (y_n) verifica le ipotesi del lemma precedente. Allora esiste $y \in H$ tale che $y_n \xrightarrow{d} y$ per $n \to \infty$. Cioè da ogni successione limitata (x_n) si può estrarre una sottosuccessione (y_n) debolmente convergente. □

Capitolo 5

Esempi di basi numerabili

Definizione 5.1 (Serie in uno spazio di Hilbert). Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in H e chiamiamo serie di termine generale x_n la successione delle somme parziali $(\sum_{n=1}^{p} x_n)_{p\in\mathbb{N}}$. Indichiamo questa successione con la notazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Definizione 5.2 (Serie convergente in uno spazio di Hilbert). Sia $x \in H$. Diciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge ad x in H (cioè che $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \overset{H}{=} x$) se e solo se

$$\left\| \sum_{n=1}^{p} x_n - x \right\| \longrightarrow 0 \quad \textit{per } p \to \infty.$$

Poichè H è uno spazio di Hilbert, allora è completo per definizione. Perciò possiamo enunciare il *Teorema di Cauchy* in uno spazio di Hilbert:

Teorema 5.0.14 (di Cauchy). *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge in H se e solo se* $\forall \epsilon > 0, \exists \bar{p} \in \mathbb{N}$ *tale che* $\| \sum_{n=p}^{q} x_n \| < \epsilon \quad \forall p, q > \bar{p}$.

Dimostrazione. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = (\sum_{n=1}^{p} x_n)_{p\in\mathbb{N}}$ è convergente se e solo se la successione $(\sum_{n=1}^{p} x_n)_{p\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, cioè $\forall \epsilon > 0, \exists \bar{p} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left\| \sum_{n=1}^{q} x_n - \sum_{n=1}^{p-1} x_n \right\| < \epsilon \quad \forall p, q \in \mathbb{N}, p, q >$$

(Definizione 2.2). Se $q \geq p$, allora $\sum_{n=1}^{q} x_n - \sum_{n=1}^{p-1} x_n = \sum_{n=p}^{q} x_n$. Perciò

$$\left\| \sum_{n=p}^{q} x_n \right\| < \epsilon \quad \forall p, q > \bar{p}.$$

□

Definizione 5.3 (**Base ortonormale in uno spazio di Hilbert**)**.** Sia $U = \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ un sistema numerabile ortonormale in H. U è una base ortonormale di H se:

1. $u_n \perp u_m \quad \forall n \neq m, \| u_n \| = 1$
2. $\forall x \in H$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle \, u_n = x$.

Definizione 5.4 (**Serie di Fourier**)**.** Se H ha dimensione infinita, $x \in H$ e $U = \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ è un sistema numerabile ortonormale in H, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle \, u_n$ si chiama serie di Fourier di x rispetto al sistema U.

Sia $U = \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale nello spazio di Hilbert H. Per la disuguaglianza di Bessel (Proposizione 4.0.12) si ha: $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle|^2 < \infty$, perciò la serie di Fourier $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle \, u_n$ è convergente, cioè esiste $y \in H$ tale che $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle \, u_n = y$.

Dimostriamo che $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle \, u_n$ è convergente.

Dimostrazione. Per il teorema di Cauchy, $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle \, u_n$ è convergente se e solo se $\| \sum_{n=p}^{q} \langle x, u_n \rangle \, u_n \| \longrightarrow 0$ per $p, q \to \infty$, perciò anche $\| \sum_{n=p}^{q} \langle x, u_n \rangle \, u_n \|^2 \longrightarrow 0$ per $p, q \to \infty$. Allora dimostriamo che $\| \sum_{n=p}^{q} \langle x, u_n \rangle \, u_n \|^2 \longrightarrow 0$ per $p, q \to \infty$.
Per la disuguaglianza di Bessel (Proposizione 4.0.12) sappiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle|^2 \leq \| x \| < \infty$, perciò anche $\sum_{n=p}^{q} |\langle x, u_n \rangle|^2 \longrightarrow 0$ per $p, q \to \infty$.

Allora

$$\| \sum_{n=p}^{q} \langle x, u_n \rangle \, u_n \|^2 = \text{(per il Teorema di Pitagora)} \sum_{n=p}^{q} |\langle x, u_n \rangle|^2 \longrightarrow 0$$

per $p, q \to \infty$, perciò $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle \, u_n$ è convergente. □

Pertanto, il sistema ortonormale $U = \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ è una base di H se e solo se $y = x$.

Un sistema ortonormale non sempre è una base. Ad esempio consideriamo il sistema ortonormale $U = \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. $(u_n)_{n \geq 2}$ rimane un sistema ortonormale, ma u_1 non si esprime come somma della serie $\sum_{n=2}^{\infty} \langle x, u_n \rangle \, u_n$.
Il teorema seguente fornisce alcune condizioni necessarie e sufficienti affinchè un sistema ortonormale sia una base in uno spazio di Hilbert.

Teorema 5.0.15. *Sia $U = \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale nello spazio di Hilbert $(H, \langle , \rangle)$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

1. *U è una base di H*
2. *$\| x \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle|^2 \quad \forall x \in H$ (cioè vale l'uguale nella disuguaglianza di Bessel)*
3. *Se $x \in H$ e $x \perp u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, allora $x = 0$.*

Dimostrazione. a) $1 \Leftrightarrow 2$

Sia P_q l'operatore di proiezione ortogonale sullo spazio $Span(u_1, ..., u_q)$. Per il Corollario 3.0.7 si ha
$P_q(x) = \sum_{n=1}^{q} \langle x, u_n \rangle u_n$ e $x - P_q(x) \perp P_q(x) \quad \forall x \in H$.
Allora

$$\| x \|^2 = (per\ il\ Teorema\ di\ Pitagora)$$
$$= \| x - P_q(x) \|^2 + \| P_q(x) \|^2 = \| x - P_q(x) \|^2 + \sum_{n=1}^{q} |\langle x, u_n \rangle|^2$$

Perciò $\lim_{q\to\infty} \| x - P_q(x) \|^2 = 0$ se e solo se $\| x \|^2 = \lim_{q\to\infty} \sum_{n=1}^{q} |\langle x, u_n \rangle|^2$, cioè

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle\, u_n \text{ se e solo se } \| x \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle|^2.$$

b) $1 \Rightarrow 3$

Poiché per ipotesi U è una base di H e $x \in H$ è tale che $x \perp u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, allora

$$x = \text{(Definizione 5.3) } \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n = 0.$$

c) $3 \Rightarrow 1$

Sia $x \in H$ e poniamo $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n$. Allora $\langle y, u_n \rangle = \langle x, u_n \rangle$, cioè $\langle y - x, u_n \rangle = 0$. Quindi $y - x \perp u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, allora $y - x = 0$ per ipotesi. Perciò $y = x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n$, cioè U è una base di H (Definizione 5.3).

□

Teorema 5.0.16. *In uno spazio di Hilbert H sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

1. *H ha una base ortonormale finita o numerabile*
2. *H è separabile.*

Dimostrazione. a) $1 \Rightarrow 2$

Supponiamo che H sia uno spazio di Hilbert reale.

Sia $U = \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormale di H; poniamo

$$D_p = \left\{ \sum_{n=1}^{p} \lambda_n \, u_n \,|\lambda_n \in \mathbb{Q}, n = 1, ..., p \right\} \quad e \quad D = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} D_p.$$

Poichè D_p è equipotente a $\mathbb{Q}^p$, allora è numerabile. Perciò anche D è numerabile essendo unione numerabile di insiemi numerabili.

Proviamo ora che D è denso in H.

Poichè U è una base di H, per ogni $x \in H$ si ha $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, u_k \rangle \, u_k$ (per Definizione 5.3). Quindi $\forall \epsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{p} \langle x, u_k \rangle \, u_k \right\| < \frac{\epsilon}{2} \tag{5.1}$$

(per Definizione 5.2).

Inoltre, per la densità di $\mathbb{Q}^p$ in $\mathbb{R}^p$, esistono $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{Q}$ tali che

$$\sum_{k=1}^{p} |\langle x, u_k \rangle - \lambda_k| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{5.2}$$

Di conseguenza, posto $y = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, u_k$, risulta $y \in D$ (per definizione di D) e

$$\begin{aligned} \| \, x - y \, \| &= \left\| x - \sum_{k=1}^{p} \langle x, u_k \rangle \, u_k + \sum_{k=1}^{p} \langle x, u_k \rangle \, u_k - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, u_k \right\| = \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^{p} \langle x, u_k \rangle \, u_k + \sum_{k=1}^{p} (\langle x, u_k \rangle - \lambda_k) \, u_k \right\| \leq \\ &\leq \left\| x - \sum_{k=1}^{p} \langle x, u_k \rangle \, u_k \right\| + \sum_{k=1}^{p} |\langle x, u_k \rangle - \lambda_k| < \\ &< \; (\textit{per le equazioni } 5.1 \textit{ e } 5.2) \; \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

In definitiva, $\forall x \in H, \forall \epsilon > 0, \exists y \in D$ tale che $\| \, x - y \, \| < \epsilon$. Questo dimostra che D è denso in H. Allora, poichè D è numerabile e denso, H è separabile.

b) $2 \Rightarrow 1$

Sia $D = \{d_n \,|n \in \mathbb{N}\}$ un sottoinsieme di H denso in H. Per ogni $p \in \mathbb{N}$ poniamo $X_p = Span(d_1, ..., d_p)$ e ogni X_p ha dimensione finita. Poniamo inoltre $n_p = dim X_p$. Poichè $X_p \subseteq X_{p+1}$, allora $n_p \leq n_{p+1}$ e $X = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} X_p$ è anch'esso un sottospazio di H. Poichè $D \subseteq X \subseteq H$ e $\bar{D} = H$ (perchè per ipotesi D è denso in H), allora anche $\bar{X} = H$, cioè X è denso in H.

Sia $U = \{u_n\}$ un sistema ortonormale finito o numerabile tale che $\{u_1, ..., u_{n_p}\}$ sia una base di X_p per ogni $p \in \mathbb{N}$. Determiniamo il sistema U: fissiamo $q \in \mathbb{N}$ in modo che $n_q := dim X_q > 0$, allora $\{u_1, ..., u_{n_q}\}$ è una base ortonormale

di X_q. Per successive estensioni si costruisce U a partire da $\{u_1, ..., u_{n_q}\}$. Questo procedimento termina dopo un numero finito di passi se e solo se X ha dimensione finita.
Proviamo ora che U è una base di H ragionando per assurdo.
Per il Teorema 5.0.16 (punto 3), esiste un vettore non nullo $v \in H$ ortogonale a ogni u_n. Inoltre, poichè X è denso in H, esiste una successione $(x_n) \in H$ tale che $x_n \longrightarrow v$ per $n \to \infty$. Allora

$$|\langle x_n, v\rangle - \langle v, v\rangle| = |\langle x_n - v, v\rangle| \leq \| x_n - v \| \| v \| \longrightarrow 0 \quad per \quad n \to \infty,$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, v\rangle = \langle v, v\rangle = \| v \|^2 \neq 0. \tag{5.3}$$

Ma $x_n \in X = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} X_p$, allora $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in X_p$.
Poiché abbiamo detto che v è ortogonale a tutti i vettori di una base di X_p, allora

$$\langle x_n, v\rangle = 0. \tag{5.4}$$

La contraddizione tra le equazioni 5.3 e 5.4 prova che U è una base di H.

$\square$

Teorema 5.0.17. *Lo spazio di Hilbert $L^2(A)$, con $A \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile, è separabile.*

Dimostrazione. Per un noto teorema, lo spazio $\{u_{|A} \,|\, u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)\}$ è denso in $L^2(A)$ (dove $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) = \{f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, f \in C^\infty \,|\, supp(f)$ è compatto $\}$).
Allora posso approssimare ogni funzione $u \in L^2(A)$ con una funzione $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, cioè $\forall u \in L^2(A)$ e $\forall \epsilon > 0, \exists v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\| u - v \|_{L^2(A)} < \epsilon. \tag{5.5}$$

Poniamo $K = supp(v)$ compatto. Allora, per il Teorema di Weierstrass, $\forall \sigma > 0$, esiste un polinomio p a coefficienti razionali ($p \in P(\mathbb{R}^N)$) tale che

$$sup_K|v - p| < \sigma. \tag{5.6}$$

Allora $\| u - p\,\chi_K \|_{L^2(A)} \leq \| u - v \|_{L^2(A)} + \| v - p \|_{L^2(A)}$
dove

$$\| v - p \|_{L^2(A)} = \int_{-\pi}^{\pi} (v(t) - p(t))^2 \, dt \ \leq \ sup_K|v - p| \, |K|^{\frac{1}{2}} \tag{5.7}$$

($|K|$ indica la misura di K).
Perciò

$$\begin{aligned} \| u - p\,\chi_K \|_{L^2(A)} &\leq (\text{per le equazioni 5.7 e 5.9}) \ \epsilon + sup_K|v - p| \, |K|^{\frac{1}{2}} < \\ &< (\text{per l'equazione 5.8}) \ \epsilon + \sigma \, |K|. \end{aligned}$$

Possiamo scegliere σ in modo tale che $\sigma \, |K| < \epsilon$, perciò $\| u - p\,\chi_K \|_{L^2(A)} < 2\epsilon$.
In definitiva, ogni $u \in L^2(A)$ si può approssimare con un polinomio $p \in P(\mathbb{R}^N)$.

χ_K indica la *funzione indicatrice* di K: $\chi_K(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in K \\ 0, & \text{se } x \notin K. \end{cases}$ $\square$

Applicazioni

5.1 Sistema trigonometrico in $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$

Consideriamo lo spazio di Hilbert $H = L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ con il prodotto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} u(t)\, v(t)\, dt$$

e il sistema ortonormale

$$\{u_k\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(t)}{\sqrt{\pi}}, ..., \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}}, ... \right\}$$

dove $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, u_2 = \frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}, u_3 = \frac{\sin(t)}{\sqrt{\pi}}$, ecc... (Osservazione 4 del Paragrafo 2.1).

Dimostriamo che $\{u_k\}$ è una base:

$\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\ \pi} \int_{-\pi}^{\pi} cos(kt)\, dt = 0$

$\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\ \pi} \int_{-\pi}^{\pi} sin(kt)\, dt = 0$

$\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\, dt = \frac{1}{2\pi}\, 2\pi = 1$

$$\langle \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(ht)}{\sqrt{\pi}}\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\, \cos(ht)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(k+h)\, t + \cos(k-h)\, t}{2}\, dt =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{se } k = h \\ 0, & \text{se } k \neq h \end{cases}$$

$\langle \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(ht)}{\sqrt{\pi}}\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\, \sin(ht)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(k+h)\, t + \sin(k-h)\, t}{2}\, dt = 0$

$$\langle \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(ht)}{\sqrt{\pi}}\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\, \sin(ht)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(k-h)\, t - \cos(k+h)\, t}{2}\, dt =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{se } k = h \\ 0, & \text{se } k \neq h \end{cases}$$

Teorema 5.1.1. *Sia* $u \in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ *e* $u \perp u_k \quad \forall k$, *allora* $u = 0$ *q.d.*

Dimostrazione. $u \perp u_k \quad \forall k$ significa

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} u(x)\,dx = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} u(x)\cos(kx)\,dx = 0 \quad \forall k \\ \int_{-\pi}^{\pi} u(x)\sin(kx)\,dx = 0 \quad \forall k \end{cases}$$

Poichu $\in L^2$, allora la serie di Fourier rispetto ad $\{u_k\}$ è

$$u(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)).$$

Per ipotesi $u \in L^2$, in particolare $u \in L^1$, perciò per il Teorema 4.5 [2] si ha:

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta}\frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))\,dx \quad \forall\alpha,\beta \in [-\pi,\pi]$$

(l'integrale è ben definito perché $u \in L^1$).
Poiché per ipotesi $u \perp u_k$, allora u ha tutti i coefficienti di Fourier nulli, perciò

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x)\,dx = 0 \quad \forall\alpha,\beta \in [-\pi,\pi].$$

In particolare,

$$\int_{0}^{y} u(x)\,dx = 0 \quad \forall y \in [-\pi,\pi].$$

Allora

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_0^y u(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} u(y) \text{ q. d. per il teorema di Lebesgue} \\ 0 \text{ per quanto sopra} \end{cases}$$

Un definitiva, $u = 0$ q.d. Perciò $\{u_k\}$ è una base di $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ (per il Teorema 5.0.16). □

5.2 Sistema trigonometrico in $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$

Consideriamo lo spazio di Hilbert $H = L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ e il sistema ortonormale

$$\{u_k\} = \left\{\frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Dimostriamo che $\{u_k\}$ è una base:

Teorema 5.2.1. *Sia $u \in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ e $u \perp u_k \quad \forall k$, allora $u = 0$ q.d.*

Dimostrazione. Poichè $u \perp u_k \quad \forall k$, allora $\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\, \frac{e^{ikt}}{2\pi}\, dt = 0 \quad \forall k$.
Poichè $u \in L^2$, in particolare $u \in L^1$ e la sua serie di Fourier è

$$u(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)).$$

La serie di Fourier si può riscrivere utilizzando le identità

$$\cos(kt) = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} \quad e \quad \sin(kt) = \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i}$$

nel modo seguente:

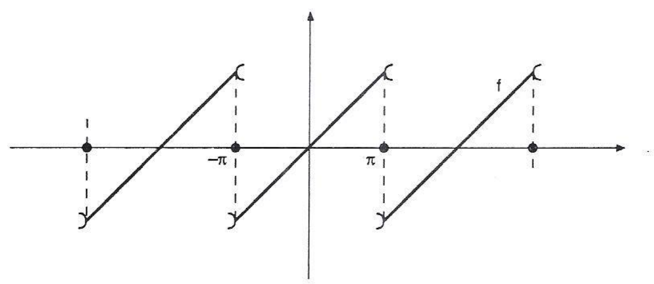
$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} + b_k \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i} \right) e^{ikt} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i} \right) e^{-ikt} = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - ib_k}{2} \right) e^{ikt} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k + ib_k}{2} \right) e^{-ikt}. \end{aligned}$$

Questa è la serie di Fourier di u rispetto al sistema ortonormale $\left\{ \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} \right\}$.
Si conclude la dimostrazione in maniera analoga al caso reale. □

Osservazione 11. Una interessante applicazione dell'identità di Bessel relativa al sistema trigonometrico è il calcolo della somma della serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (noto come *Problema di Basilea*).

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, 2\pi$ - periodica,

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t = -\pi \\ t, & \text{se } t \in]-\pi, \pi[\end{cases}$$



e la sua serie di Fourier è

$$f(t) \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}}.$$

Quindi gli unici coefficienti di Fuorier di f non nulli sono $b_k = \frac{2(-1)^{k-1}}{k} \sqrt{\pi}$.
Per l'Osservazione 4 del Paragrafo 2.1 sappiamo che

$$\| f \|^2_{L^2([-\pi,\pi])} = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=-\pi}^{t=\pi} = \frac{2}{3} \pi^3. \tag{5.8}$$

Poiché il sistema trigonometrico è ortonormale e completo (cioè è una base), per l'identità di Bessel si ha:

$$\| f \|^2_{L^2([-\pi,\pi])} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\pi}{k^2}. \tag{5.9}$$

Uguagliando le equazioni 5.5 e 5.6 si ottiene $4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{2}{3} \pi^3$, perciò

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

dove $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ è la *serie armonica generalizzata.*

5.3 Basi spettrali

5.3.1 Il sistema $\left\{\frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}\right\}$

Teorema 5.3.1. *Consideriamo lo spazio di Hilbert $L^2([0,\pi])$. Allora il sistema $\{u_k\} = \left\{\frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ è completo.*

Dimostrazione. Sia $u \in L^2([0,\pi])$ tale che $u \perp u_k \quad \forall k$. Dimostriamo che $u = 0$. In questo modo avremo dimostrato che il sistema $\{u_k\}$ è completo (per il Teorema 5.0.16).
Prolunghiamo u in maniera dispari:

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } 0 \le x \le \pi \\ -u(-x), & \text{se } -\pi \le x \le 0, \end{cases}$$

$\hat{u} \in L^2([-\pi,\pi])$.
Consideriamo il sistema completo $\{\cos(kx), 1, \sin(kx)\}$. Si ha:

$\langle \hat{u}, \cos(kx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{u} \, \cos(kx) \, dx = 0$ (perchè $\hat{u}$ e $\cos(kx)$ sono due funzioni dispari);

$\langle \hat{u}, 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{u} \, dx = 0$ (perchè $\hat{u}$ è una funzione dispari);

$\langle \hat{u}, \sin(kx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{u} \, \sin(kx) \, dx = 0$ (perchè per ipotesi $u \perp u_k$).

Quindi $\hat{u} \perp \{\cos(kx), 1, \sin(kx)\}$. Allora $\hat{u} = 0$ q.d., quindi anche $u = 0$ q.d.. In definitiva $\{u_k\}$ è completo. □

Allora una funzione $\varphi \in L^2([0, \pi])$ si scrive nella maniera seguente:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} \quad con \quad x \in]0, \pi[$$

dove b_k sono i coefficienti di Fourier. Consideriamo

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 \, t} \, b_k \, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}$$

con $(x, t) \in \Omega :=]0, \pi[$ x $]0, T[$. La serie converge in L^2, ma anche in senso puntuale, e si può derivare termine a termine. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \, u(x,t) = -\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 \, t} \, k^2 \, b_k \, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \, u(x,t) = -\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 \, t} \, k^2 \, b_k \, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}$$

Quindi

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right) u = 0 \ in \ \Omega.$$

Inoltre,

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} = \varphi(x)$$

e

$$u(0,t) = u(\pi, t) = 0 \quad \forall t.$$

In definitiva, u è soluzione del problema al contorno

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right) u = 0 \ in \ \Omega \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

5.3.2 Basi di autofunzioni dell'operatore di Laplace in $\mathbb{R}^N$

Sia O un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ e sia

$$\Delta = \textit{operatore di Laplace in } \mathbb{R}^N = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

Il problema di autovalori

$$\begin{cases} \Delta\varphi = -\lambda\,\varphi, & \text{in } O \\ \varphi_{|\partial O} = 0 \end{cases} \tag{5.10}$$

ha una successione $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di autovalori strettamente positivi, tali che $\lambda_k \longrightarrow \infty$ per $k \to \infty$. Possiamo supporre

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots. \le \lambda_k \le \ldots.$$

Gli autospazi corrispondenti ai singoli λ_k sono tutti di dimensione finita e sono mutuamente ortogonali se $\lambda_k \neq \lambda_h$.
Sia $\{\varphi_h \,|\, h \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale di autofunzioni, esaustivo nel modo seguente: ogni autofunzione è combinazione lineare finita di elementi di $\{\varphi_h \,|\, h \in \mathbb{N}\}$.
Allora $\{\varphi_h \,|\, h \in \mathbb{N}\}$ è un sistema ortonormale completo in $L^2(O)$.

Nel caso particolare di $O =]0,\pi[$ possiamo prendere

$$\{\varphi_h \,|\, h \in \mathbb{N}\} = \left\{ \frac{\sin(hx)}{\sqrt{\pi}} \,\middle|\, h \in \mathbb{N} \right\}.$$

Infatti, la funzione $x \mapsto \frac{\sin(hx)}{\sqrt{\pi}}$ è soluzione del problema di autovalori

$$\begin{cases} u'' = -h^2\,u, & \text{in }]0,\pi[\\ u_{|\partial\,]0,\pi[} = 0 \end{cases}$$

Si ritrova così il sistema ortonormale considerato nel paragrafo precedente.
Procedendo ora come in quel paragrafo, poniamo

$$u(x,t) = \sum_{h=1}^{\infty} e^{-\lambda_h\,t}\,\varphi_h(x).$$

Poichè $\{\varphi_h \,|\, h \in \mathbb{N}\}$ è un sistema ortonormale completo in $L^2(O)$, allora la serie converge in $L^2(O)$. Derivandola termine a termine si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\,u(x,t) = \sum_{h=1}^{\infty} -\lambda_h\,e^{-\lambda_h\,t}\,\varphi_h(x)$$

e

$$\Delta_x\,u(x,t) = \sum_{h=1}^{\infty} e^{-\lambda_h\,t}\,\Delta\,\varphi_h(x) =$$
$$=\text{(per l'equazione 5.10) } \textstyle\sum_{h=1}^{\infty} -\lambda_h\,e^{-\lambda_h\,t}\,\varphi_h(x)$$

Pertanto, almeno formalmente, la funzione u risolve il problema al contorno seguente:

$$\begin{cases} Hu = 0 & \text{in } \mathrm{O}\times\,]0,T[,\ \forall T > 0 \\ u_{|\partial O\times]0,T[} = 0 \\ u_{|t=0} = \varphi \end{cases}$$

ove

$$H = \Delta_x - \frac{\partial}{\partial t}$$

è *l'operatore del calore* in R^N.

Bibliografia

[1] Lanconelli E., *Primi Elementi della Teoria degli Spazi di Hilbert*, Pitagora Editrice Bologna (1996)

[2] Lanconelli E., *Lezioni di Analisi Matematica 2. Seconda Parte*, Pitagora Editrice Bologna (1997)

[3] Rudin W., *Analisi Reale e Complessa*, Bollati Boringhieri Editore (1974)