Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

INSEGNANTI VS POLINOMI: UN CAROSELLO TRA APPUNTI E LIBRI DI TESTO

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Giorgio Bolondi

Presentata da:
Serena Lo Monaco

III Sessione
A.A. 2013/2014

a mamma e papà . . .

Mio Signore, io purtroppo sono un povero ignorante
e del suo discorso astratto ci ho capito poco o niente,
ma anche ammesso che il coraggio mi cancelli la pigrizia,
riusciremo noi da soli a riportare la giustizia?
F. Guccini

Introduzione

Il mio lavoro di tesi parte dall'idea di voler indagare su quanto fatto in una normale azione d'aula nel momento in cui vengono presentati i polinomi, ovvero nel momento in cui si presenta agli studenti quello che comunemente viene chiamato "calcolo letterale".

Questo argomento costituisce di certo un passo importante e delicato nella formazione, in ambito matematico, dell'allievo essendo il primo passo che egli compie verso il calcolo formale vero e proprio, il primo passo verso un certo livello di astrazione e generalizzazione. E' il primo momento in cui l'allievo si lascia alle spalle l'aritmetica col suo approccio operazionale, per andare incontro all'algebra e al suo approccio strutturale.

In questo passaggio, un ruolo fondamentale è quello rivestito dagli insegnanti, oltre che dai libri di testo, e per questo ho deciso di seguire come i primi affrontano l'argomento polinomi in classe: come e se questi vengono definiti, e se le definizioni utilizzate sono delle vere e proprie definizioni formali, o seguono altri schemi.

Quello che ci si chiede allora è cosa e come va insegnato affinché un certo argomento sia significativo per gli alunni, affinché questi siano motivati ad apprenderlo. E ancora, come un insegnante possa svolgere al meglio una delle funzioni principali della sua professione, ovvero quella di mediatore del sapere.

In altre parole, ci si chiede come il sapere matematico, accademico diventi sapere da insegnare, sapere insegnato. Questo processo è quello che in Didattica della matematica viene catalogato sotto il nome di "trasposizione

didattica", ovvero quel processo grazie al quale il sapere accademico viene filtrato e ristrutturato al fine di acquisire una forma "scolastica" adeguata ad essere insegnata e appresa, al fine di poter essere compreso da un pubblico di non esperti.
Ho strutturato quindi il mio lavoro vedendo come il tema della trasposizione didattica fosse stato affrontato da alcuni autori e come poi tale processo fosse fondamentale nella trattazione dell'argomento polinomi in classe.
Nel primo capitolo è illustrato come prima Bruner e poi Chevallard si siano occupati di questo tema, seppure il termine "trasposizione didattica" sia stato introdotto per la prima volta da Chevallard, ho ritenuto opportuno vedere come anche Bruner, in maniera indiretta, sia venuto a contatto con questo concetto. Nella sezione dedicata a Chevallard ho poi centrato l'attenzione sul famoso schema a lui attribuito, il triangolo di Chevallard, appunto, analizzando le sue componenti.
Nel secondo capitolo ho analizzato l'articolo di Bolondi, Ferretti, Maffia [Bolondi G. et al.(unpublished)], da cui prende spunto il mio lavoro, in cui si evidenziano le differenze tra i vari schemi di definizione presenti nei libri di testo.
Nel terzo capitolo presento alcuni approcci con cui è possibile presentare i polinomi, illustrando le difficoltà che si possono riscontrare seguendo questi nel proporre tale argomento. Riportando poi il capitolo dedicato ai polinomi in un testo universitario [Artin M. 1997] ho messo in evidenza le motivazioni per cui è necessario fare della trasposizione didattica.
Nel quarto capitolo, infine, riporto quanto è emerso dal mio lavoro di raccolta dati, in classe accanto ai docenti. Dopo aver esaminato come l'argomento polinomi è trattato nel libro di testo adottato da questi insegnanti, ho riportato quanto è venuto fuori dalle interviste che ho proposto a loro e come, dopo, hanno trattato l'argomento in classe.

Indice

Capitolo 1

Il concetto di trasposizione didattica

1.1 Jerome S. Bruner

Nonostante il termine “trasposizione didattica” sia ufficialmente attribuito ad Yves Chevallard, che lo introdusse per la prima volta negli anni ’80 indicando quel processo di trasformazione del sapere “sapiente” in sapere insegnato, già all’inizio degli anni ‘60 Jerome S. Bruner dichiarava che «il primo e più ovvio problema è costruire programmi che possano essere insegnati da maestri comuni ad alunni comuni e che nello stesso tempo riflettano chiaramente i principi basilari delle varie discipline» [Bruner 1978, p. 43]. L’indagine di Bruner è dunque centrata sul «modo in cui una cultura viene trasmessa – con le sue forme di abilità, i suoi valori, il suo stile, la sua tecnologia, la sua saggezza – e il modo in cui attraverso tale trasmissione essa permette di formare esseri umani più capaci e più attivi» [Bruner 1978, p. 43]. Dunque, secondo Bruner, da un lato c’è il problema di come insegnare e dall’altro quello del cosa insegnare ai fini della formazione intellettuale degli alunni, e per fare ciò è necessario l’aiuto di «chi aveva un alto grado di conoscenza e di competenza» in quell’ambito [Bruner 1978, p. 43]. E’ necessario quindi che fin dalla prima istruzione, gli alunni imparino a pensare secondo una data disciplina, non solo acquisendo le leggi fondamentali di questa, che nel caso della matematica sono, ad esempio «i teoremi della conservazione, o gli assiomi della geometria» [Bruner 1978, p. 243], ma anche manipolando questi elementi per generarne altri che abbiano stessa struttura ma contenuti differenti. Il fine ultimo è quello di acquisire la "metodologia di pensiero" della disciplina in questione. Bruner si chiede allora come fare e chiama tale questione «problema della conversione» [Bruner 1978, p. 235].

La teoria dell'istruzione che elabora Bruner, parte dalla stimolazione iniziale del discente: è necessario che si crei in lui un interesse ad apprendere ciò che l'insegnante vuole che apprenda; va attivato in lui uno stimolo iniziale, va poi mantenuto vivo l'interesse e infine va reso chiaro lo scopo di ciò che si studia e la direzione perseguita per il raggiungimento di tale scopo. Questo però non è sufficiente all'apprendimento da parte del discente dei contenuti della disciplina: questi vanno prima ristrutturati; secondo Bruner, infatti, «ogni idea, ogni problema o insieme di cognizioni possono essere presentati in termini sufficientemente semplici da consentire ad ogni scolaro di comprenderli» [Bruner 1978, p. 79].

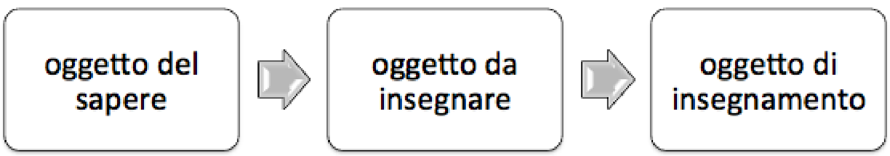
A questo punto Bruner si chiede quale sia il modo ottimale di presentare i contenuti da apprendere e vede l'apprendimento come un momento di ricerca e di scoperta.

Per lo psicologo è necessario che il docente dia delle indicazioni correttive, di cui un discente dovrebbe servirsi per organizzare il suo modo di lavorare, per dare a questo una direzione; dice che «l'apprendimento riceve un forte stimolo dalla conoscenza dei risultati, a patto che tale conoscenza sia offerta in momenti e in circostanze in cui può essere utilizzata come mezzo correttivo» [Bruner 1978, p. 86]. Se lo studente sa cosa ci si aspetta da lui, può sfruttare tale indicazione come guida per il lavoro che deve affrontare; la difficoltà è capire quando fare questa mossa: inutile ad esempio sarebbe farla a lavoro ultimato.

Tuttavia la ricerca di Bruner non è incentrata tanto nel modo di far apprendere dei contenuti, ma piuttosto nel come condurre i discenti ad acquisire il modo di pensare proprio di una disciplina: «se noi insegniamo una determinata disciplina, non è certo allo scopo di creare piccole biblioteche viventi su tale disciplina, ma piuttosto allo scopo di portare uno studente a pensare per proprio conto in termini matematici, a valutare determinati fatti, così come fa uno storico, a partecipare al processo di creazione del sapere. Conoscere è un processo, non un prodotto» [Bruner J. S. 1999, p. 114].

1.2 Yves Chevallard

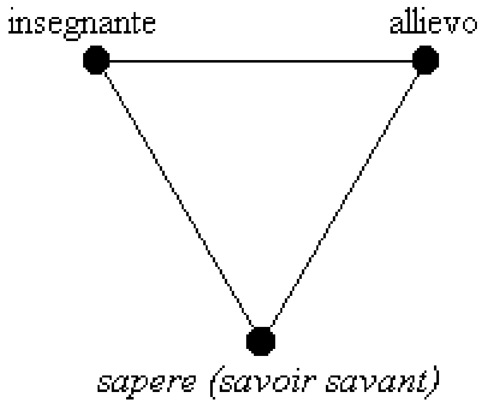
Nel 1985, Yves Chevallard, scrive "La trasposizione didattica. Dal sapere sapiente al sapere insegnato", in cui introduce il termine "trasposizione didattica" attribuendogli il significato di «lavoro che di un oggetto del sapere da insegnare fa un oggetto di insegnamento» [Chevallard Y. 1985, p. 39].
La trasposizione didattica è presentata da Chevallard come un processo di trasformazione, in cui un oggetto di sapere viene identificato come un oggetto da insegnare per poi diventare, nella pratica didattica, un oggetto di insegnamento, in base alle esigenze sociali. Sono dunque tre i passaggi fondamentali nel processo di trasposizione didattica, che possiamo riassumere nel seguente schema:



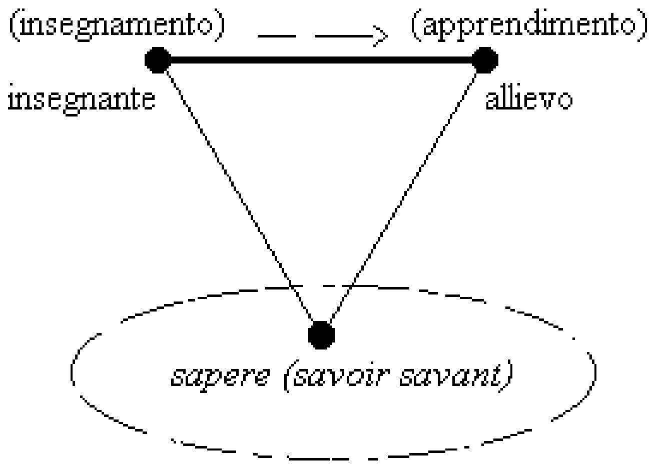
in cui vengono evidenziati il passaggio dall'implicito all'esplicito, dalla pratica alla teoria, dal precostruito al costruito. Questo passaggio, per nulla semplice, entra a far parte di un diagramma triangolare, dovuto proprio a Chevallard, che ha come "vertici": l'allievo, l'insegnate e il sapere.

1.2.1 Il triangolo didattico

Nel triangolo di Chevallard vengono schematizzate le interazioni tra quelli che abbiamo chiamato "vertici", ovvero le interazioni tra insegnate e allievo rispetto ad un determinato sapere, in una situazioni di insegnamento-apprendimento che supera il modello verticale della sola relazione insegnante-allievo, in cui l'attività dell'allievo viene considerata indipendente dal sapere insegnato.



Questo diagramma, pertanto, deve essere adeguatamente interpretato, studiando tutte le possibili interazioni tra i suoi vertici; in particolare, bisogna porre una certa attenzione al termine "sapere", quello che lo studioso chiama *savoir savant*, il sapere accademico, nel nostro caso il sapere matematico, che nasce dalla ricerca. Già la collocazione che viene data al sapere nel triangolo, fa pensare ad un sapere che sta al di fuori del rapporto diretto tra insegnante e allievo, un sapere che sta al di fuori dell'insegnamento e dell'apprendimento e che pertanto va adeguatamente trattato, manipolato, mediato.



A tal proposito in Cornu e Vergnioux facendo riferimento al sapere viene detto che «nel triangolo didattico, l'attività del verbo "sapere" è stata come trasformata in "sostanza", o dotata di un ruolo autonomo. Ora, per materializzato che sia in libri o in macchine, "il sapere" non è "oggettivato" che dall' "attività" di scambio critico degli esseri umani. Il sapere non è nei libri, è nella comprensione del libro. Se si considerano i risultati scientifici, si ammetterà generalmente che chi li sa enunciare senza rendersene ragione non li sa» [Cornu L., Vergnioux A. 1992] .
Per D'Amore si considera «questo schema solo come una semplice allusione a tre soggetti (enti, poli, idee) che entrano (qualche volta fisicamente, qualche volta metaforicamente) in contatto tra loro al momento dell'azione didattica» [D'Amore B. 1999]. Bisogna quindi prenderlo a modello, come già accennato, per analizzare i possibili rapporti che si possono instaurare tra i tre soggetti che stanno ai vertici del triangolo. Ciò che, in particolare, definisce l'insegnante e l'allievo come tali è il passaggio da uno stato iniziale ad uno stato finale nei confronti del sapere, stati tutti caratterizzati dalle varie relazioni che hanno insegnate e allievo col sapere.
Analizziamo ora i singoli vertici e le relazioni tra questi.

1.2.2 Il sapere

Come già accennato, il termine "sapere" è molto generico, infatti Chevallard fa una distinzione tra:

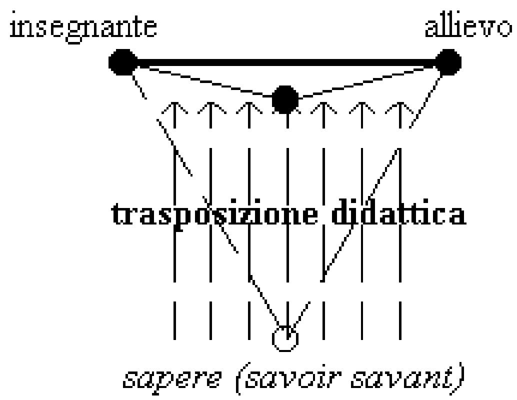
- sapere sapiente;
- sapere da insegnare;
- sapere insegnato.

Il *sapere sapiente*, o *savoir savant*, è l'oggetto del sapere, quel sapere matematico prodotto dalla comunità accademica, dai ricercatori. L'attività del ricercatore è proprio il punto di partenza della costruzione di questo sapere, è un'attività personalizzata perché è proprio lui a scegliere di quale problema occuparsi e che strada seguire per affrontarlo, passando per errori e ripensamenti, e tutto ciò è racchiuso dentro un percorso ben contestualizzato che il ricercatore fa. Una volta elaborata la teoria si passa quindi al momento della comunicazione di questa alla comunità scientifica, ed è qui che il ricercatore deve trasformare il suo elaborato affinché possa essere reso pubblico, ovvero utilizzabile dai membri di questa comunità. A tal proposito sono due le fasi cruciali a cui va sottoposto il lavoro del ricercatore: "depersonalizzazione" e "decontestualizzazione". Con la prima viene soppresso tutto quel che riguarda le motivazioni personali, le riflessioni, gli errori che sono stati fatti durante l'elaborazione della teoria. Con la seconda il contesto di partenza viene fatto fuori per renderlo il più generale possibile. Se da un lato questi due processi sono necessari per la comunicazione del sapere, dall'altro si rischia di far scomparire quasi del tutto il contesto della ricerca, rendendo il sapere misterioso e quasi privo di senso.
A questo punto si potrebbe pensare che il passaggio da *sapere sapiente* a *sapere da insegnare* sia compito dell'insegnante, ma la cosa non è così banale! Un lavoro essenziale precede quello dell'insegnante. Il sistema di insegnamento va infatti considerato come un sistema in cui vi è una costante interazione con l'ambiente sociale, ovvero con le famiglie e con la comunità scientifica, e

pertanto questo sistema ha un quadro da seguire. A tal proposito Chevallard usa il termine *noosfera* per identificare quella zona di confine tra l'aula e la società circostante, in cui si articolano i possibili scambi tra i due sistemi.
E' proprio compito della *noosfera* effettuare il passaggio da *sapere sapiente* a *sapere da insegnare*: «da una parte il sapere insegnato deve essere visto dai "sapienti" stessi come sufficientemente vicino al sapere sapiente..., d'altra parte il sapere insegnato deve apparire come sufficientemente lontano dal sapere dei "genitori", cioè dal sapere banalizzato dalla società (e banalizzato soprattutto dalla scuola)» [Chevallard Y. 1985]
E' a questo punto che entra in gioco quello che Prodi chiama «processo di elementarizzazione» [Prodi G. 1982] del sapere sapiente, fenomeno che influenza la trasposizione didattica nel passaggio da sapere sapiente a sapere da insegnare e che rende più elementari quelle teorie proprie della comunità scientifica. Tale processo, proprio per il posto che occupa nella riformulazione del sapere, dovrebbe essere messo in atto da insegnanti che collaborano con gruppi di ricercatori di didattica.

1.2.3 L'insegnante

L'insegnante, come già detto, interviene principalmente nel delicatissimo passaggio dal *sapere da insegnare* a *sapere insegnato*.
Secondo, appunto, Bruno D'Amore, «la trasposizione didattica consisterebbe, dal punto di vista dell'insegnante, nel costruire le proprie lezioni attingendo dalla fonte dei saperi, tenendo conto delle orientazioni fornite dalle istruzioni e dai programmi (sapere da insegnare) per adattarli alla propria classe: livello degli allievi, obiettivi perseguiti.» [D'Amore B. 1999, p. 224].



Il compito dell'insegnante si divide, in particolare, in due processi: il processo di devoluzione e il processo di istituzionalizzazione delle conoscenze.
La devoluzione è quella fase in cui l'insegnante trasferisce all'allievo la responsabilità di risolvere un problema e deve fare in modo che quest'ultimo si assuma tale responsabilità: il problema che prima era dell'insegnante è ora dell'allievo.
Inizialmente il compito dell'insegnante è quello di compiere un lavoro inverso rispetto a quello del ricercatore, ovvero ricontestualizzare e ripersonalizzare il sapere da insegnare; proponendo dei problemi che diano un senso alle nozioni da insegnare deve fare in modo che il lavoro dell'allievo assomigli a quello del ricercatore.
«L'insegnante non ha come missione quella di ottenere degli alunni che apprendono, ma piuttosto quella di fare in modo che essi possano apprendere. Egli ha come compito non la presa in carico dell'apprendimento (che rimane fuori dal suo potere) ma la presa in carico della creazione delle condizioni di possibilità dell'apprendimento» [Chevallard Y. 1986].
Nel processo di istituzionalizzazione, complementare alla devoluzione, l'insegnante riassume la sua posizione rispetto al sapere, riconoscendo l'adeguatezza del sapere acquisito e prodotto, con impegno personale, dagli alunni. Secondo Brousseau: «l'istituzionalizzazione del compito è l'atto sociale attraverso il quale il maestro e l'allievo riconoscono la devoluzione»

[Brousseau G. 1994].
Pur nella migliore riuscita della fase di devoluzione, una volta che l'allievo ha trovato la soluzione al problema posto, non ha la consapevolezza di aver prodotto una conoscenza adeguata, idonea ad essere utilizzata in situazioni differenti da quella appena affrontata. Il compito dell'insegnante è allora quello di aiutare gli alunni a trasformare questa soluzione, questa nuova conoscenza acquisita, in sapere attraverso un processo di ridecontestualizzare e ridepersonalizzare, in modo da poter dare al loro lavoro un carattere universale, riutilizzabile in altre situazioni.
Bisognerebbe inoltre mettere l'allievo nelle condizioni di capire, non solo cosa sta facendo, ma anche perché e perché in quel determinato modo.
Il matematico e psicologo Richard Skemp [Skemp R. R. 1976] distingue a tal proposito la competenza dalla comprensione, intendendo la prima come l'abilità del "saper fare" e l'altra come l'abilità del "sapere cosa fare e perché", la prima è quindi conoscenza strumentale, l'altra relazionale. Considerato che a scuola prevale l'approccio strumentale, sia tra gli insegnanti che tra i libri di testo, Skemp esamina i due approcci per capirne i vantaggi.
Riguardo alla matematica strumentale dice che questa sia più facile da imparare, ha risultati più immediati che gratificano gli studenti e richiede meno conoscenze. La matematica relazionale invece è più adattabile ai nuovi compiti, ai nuovi problemi e seppur più difficile da apprendere, è più facile da ricordare perché, una volta note le relazioni tra le varie regole, è più facile vederle come parte di un tutto collegato [Godino J. 2003].

1.2.4 L'allievo

Lo scopo dell'allievo è quello di apprendere. L'apprendimento non va però inteso semplicemente come un passaggio di informazioni che provengono dall'insegnante, ma come un qualcosa prodotto dall'allievo stesso in seguito ad un lavoro simile a quello fatto dal ricercatore.
«Conoscere la matematica non significa solamente apprendere delle definizioni e dei teoremi, per riconoscere l'occasione di utilizzarli e di applicarli;

sappiamo bene che fare della matematica implica che ci si occupi di problemi. Non si fa della matematica se non occupandosi di problemi, ma ci si dimentica a volte che risolvere un problema è solo una parte del lavoro; trovare delle buone questioni è importante tanto quanto trovare delle soluzioni. Una buona riproduzione di un'attività scientifica da parte dell'allievo esige che si tratti, che si formuli, che si provi, che si costruiscano dei modelli, dei linguaggi, dei concetti, delle teorie, che egli li scambi con altri, che riconosca quelli che sono conformi alla cultura, che egli prenda a prestito quelli che gli sono utili, etc.... Per rendere possibile una tale attività, il professore deve dunque immaginare e proporre agli allievi delle situazioni che essi possano vivere e nelle quali le conoscenze appaiano come la soluzione ottimale che si può scoprire attraverso i problemi posti» [Brousseau G. 1986].
Deve essere quindi l'insegnante a provocare negli allievi degli adattamenti adeguati attraverso un'opportuna selezione di situazioni da proporre a questi, in modo da creare le condizioni adeguate per permettere che gli alunni possano apprendere.
Affinché l'alunno faccia propria una certa conoscenza in seguito alla risoluzione di un problema, l'insegnante non può svelargli in anticipo la risposta che si aspetta da questo: «deve fare in modo che questi accetti la responsabilità di cercare di risolvere problemi o esercizi di cui ignora la risposta» [Brousseau G. 1997, p. 41].
Ed è qui che rientra in gioco il concetto di devoluzione, ovvero «l'atto attraverso cui l'insegnante fa accettare all'alunno la responsabilità di una situazione di apprendimento o di un problema e accetta lui stesso le conseguenze di questo transfert» [Brousseau G. 1997, p. 41].
Come Brousseau sottolinea l'atto di devoluzione implica la motivazione degli studenti; bisogna pertanto creare delle situazioni che determinino la devoluzione degli alunni. Questo è un tipico caso di situazione a-didattica, ovvero una situazione «di apprendimento in cui il maestro è riuscito a far sparire la sua volontà [...] in termini di indicazioni di ciò che l'alunno deve fare» [Brousseau G. 1997, p. 47], in questa situazione ideale, l'insegnante mette

l'allievo nelle condizioni in cui questo possa plasmare le proprie conoscenze in risposta ad esigenze reali, e non in risposta a quanto richiesto dall'insegnante stesso. Da qui nasce il principale paradosso della devoluzione: l'insegnante non vuole che l'allievo dia al problema la soluzione che darebbe lui, ma vuole che questa venga fuori da una scelta personale dell'alunno. Se l'insegnante dice all'alunno ciò che vuole non può ottenerlo, così se l'allievo «accetta che l'insegnante gli insegni il risultato, non lo stabilisce da solo e quindi non impara la matematica, non se ne appropria. Se, al contrario, rifiuta qualunque informazione da parte del maestro, allora la relazione didattica è rotta. Apprendere implica per l'alunno che egli accetti la relazione didattica ma che la consideri come provvisoria e che si sforzi di confutarla» [Brousseau G. 1986, p. 66]. Tuttavia l'insegnante «ha il dovere sociale di volere che l'alunno dia la risposta giusta» [Brousseau G. 1997, p. 41], dovrà dunque comunicare questo sapere senza svelarlo del tutto.

Col paradosso delle devoluzione fa coppia quella della credenza:

«Credetemi, ma non credete, imparate a sapere che cos'è sapere [. . .] abbiate fiducia in me per non dover più avere fiducia in me, ma nella vostra ragione.» [Clanché P. 1994, p. 146].

Lo scopo della relazione didattica è quindi l'«istituzionalizzazione» [Brousseau G. 1997, p. 48], ovvero «la presa in conto ufficiale, da parte dell'alunno, dell'oggetto di conoscenza e da parte dell'insegnante dell'apprendimento dell'alunno» [Brousseau G. 1997, p. 48].

Capitolo 2

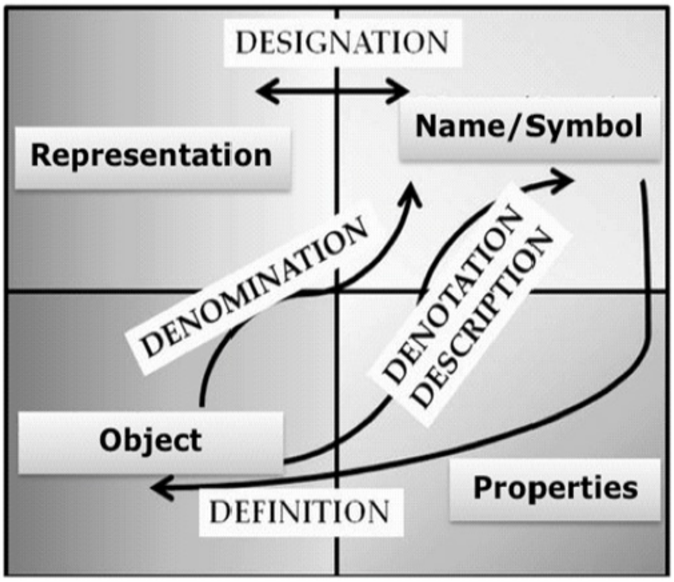
Definizioni vs. schemi di definizione

L'argomento "polinomi" è presente nella nostra educazione matematica già nella scuola secondaria di primo grado ed in seguito in quella di secondo grado, e come spesso accade, per introdurre un oggetto con determinate caratteristiche, in matematica si fa ricorso alle definizioni. Associare un nome ad un oggetto matematico è un processo assai diffuso in molte situazioni di classe.
Nella prassi scolastica, però, molte azioni vengono etichettate col nome di *definizione*, pur essendo molto differenti da quelle che sono le definizioni formali intese dai matematici.
Se da un lato si usano le definizioni per spiegare il significato di un termine matematico, dall'altro queste sono regolate da norme ben specifiche. Oltre a costituire una base per la derivazione logica di determinate proprietà appartenenti ad un oggetto, costituiscono una base per la creazione di nuove proprietà, ed è questo duplice ruolo che ci fa capire quanto la conoscenza di un tipo di definizione sia fondamentale per la costruzione di una nuova definizione all'interno della stessa teoria matematica.
Questo è quanto definito da A. Sfard come un paradosso:
«For a future mathematist the self-generating nature of mathematical di-

scourse creates a paradoxical situation: one's familiarity with what the discourse is all about seems to be a precondition for participation in the discourse, but, at the same time, such familiarity can only emerge from this participation!» [Sfard A. 2008, p. 130]
(Per un futuro matematista la natura autogenerante di un discorso matematico crea una situazione paradossale: la propria familiarità con ciò di cui tratta il discorso sembra essere una condizione preliminare per la partecipazione al discorso, ma, allo stesso tempo, questa familiarità può emergere solo da questa partecipazione!)
Il processo di *definizione* diventa allora alquanto delicato, in particolare quando viene utilizzato per introdurre oggetti di base di una nuova teoria, e ancor più delicato quando questa teoria è ad un livello elevato di astrazione, come nel caso dei polinomi. Se da un lato sarebbero necessarie definizioni formali in senso strettamente matematico, dall'altro non dobbiamo dimenticare che questo sapere deve essere "scolarizzabile", deve passare attraverso il "processo" di trasposizione didattica.
Nella ricerca matematica non vi è, comunque, un comune accordo su come procedere in questo senso; vi sono però accordi sulle caratteristiche essenziali che una definizione matematica deve avere: non contraddittorietà, non circolarità, precisione nella terminologia, essenzialità [Borasi R. 1991], non ambiguità, equivalenza logica ad altre definizioni, invarianza al cambiare di rappresentazioni [Zaslavsky O., Shir K. 2005].
Va notato però che vi sono altre possibili azioni tramite cui si associa un nome ad un oggetto matematico che però non soddisfano i criteri prima elencati: si tratta ad esempio di quelle definizioni usate da insegnanti o libri di testo che hanno ormai acquisito un "status formale".

2.1 Designazione, denotazione, descrizione, denominazione, definizione

Partendo ora dal lavoro fatto da Bolondi, Ferretti e Maffia [Bolondi G. et al.(unpublished)] sulla definizione di monomi e polinomi, vediamo come vengono caratterizzate queste altre azioni: si descrivono cinque diversi tipi di schema di definizione, che ovviamente possono variare di volta in volta in base al contesto e che non necessariamente connotano una definizione in senso strettamente matematico.
Come già fatto da D'Amore e Fandiño Pinilla [D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. 2012] verranno distinti designazione, denotazione, descrizione, denominazione e definizione, riassunte in figura.



2.1.1 Designazione

Si parla di *designazione* quando non è possibile comprendere cos'è l'oggetto da definire senza fare un riferimento diretto ad una sua rappresentazione. «La designazione è un fatto relativo e non assoluto»

[D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. 2012] ed è strettamente legata al contesto in cui si è. «Designare un oggetto matematico è un espediente comunicativo utile per poter far sì che emittente e ricevente si intendano.» [D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. 2012].

2.1.2 Denotazione

Si è in presenza di una *denotazione* quando viene descritto qualcosa attraverso alcune delle sue proprietà, necessarie ma non sufficienti e pertanto non caratterizzanti l'oggetto, come nel caso di una vera e propria definizione.

2.1.3 Descrizione

Il termine *descrizione* è usato quando si fa riferimento ad un certo oggetto elencandone delle proprietà, sufficienti ma non necessarie e, non di rado, sovrabbondanti.

2.1.4 Denominazione

E' il caso in cui due o più oggetti già noti sono *denominati* con lo stesso nome. Le proprietà dell'oggetto non sono espresse esplicitamente, ma sintetizzate in singole parole.

2.1.5 Definizione

Una *definizione* è una frase esaustiva in cui definiendum (termine che si deve definire) e definiens (ciò che serve a definire) sono chiaramente identificabili; «se nel definiens ci sono parole sconosciute, la definizione serve a poco» [D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. 2012].
«Una definizione serve a identificare, a circoscrivere, a indicare, a scegliere, a designare, a denominare, a denotare, perfino a connotare.»
[D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. 2012].

Come vedremo, spesso però, non è semplice fare una distinzione netta tra i vari schemi di definizione.

Capitolo 3

I Polinomi del sapere sapiente!

Oggetto del mio studio è, come già detto, il polinomio. Se si volesse fare un inquadramento teorico di questo lavoro, sarebbe richiesta l'introduzione dei polinomi attraverso un modello formale o un modello vettoriale o ancora un modello funzionale.
Di certo, questi approcci, così come li presenterò qui di seguito, sono impraticabili, dal punto di vista didattico, con i ragazzi di una classe prima di un liceo. Vediamo quindi, dopo averli classificati, quali sono i punti critici o gli eventuali punti di forza di ognuno di questi e come bisognerebbe procedere per trattarli in classe.

Modello formale: i polinomi visti come rappresentanti della chiusura algebrica di un insieme, ottenuto come estensione di un anello commutativo unitario A, o di un campo K, con uno o più elementi trascendenti, detti "indeterminate".

Modello vettoriale: dato un anello commutativo unitario A, o un campo K, i polinomi vengono definiti come n-uple ordinate di elementi di A, o di K, dando così luogo all'insieme di tutti gli oggetti del tipo $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, con $a_i \in A$, o $a_i \in K$, per ogni $i \in \mathbb{N}$, ottenuti al variare di n in $\mathbb{N}$.

Modello funzionale: dato un anello commutativo unitario A, o un campo K, i polinomi vengono interpretati come funzioni f, di una o più variabili, da A^n in A, o da K^n in K, che alla n-upla di valori $x = (x_1, \dots, x_n)$ associano un elemento $f(x)$, dato dalla somma algebrica finita di termini della forma $c \cdot x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{m_n}$, con $c \in A$, o $c \in K$. Tale elemento, nel caso di funzioni ad una variabile, si scrive come $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$.

Seguendo la prima di queste tre strade si correrebbe il rischio di far risultare la trattazione di questa nozione alquanto astratta; il polinomio è visto come un'entità alfanumerica a cui è difficile attribuire un significato seppure la sua manipolazione è rigorosamente guidata dalle relazioni formali che regolano la struttura algebrica di anello.
Altrettanto astratto risulta il modello vettoriale, se infatti da un lato si ha il vantaggio di trattare il polinomio senza dover introdurre il concetto di indeterminata, dall'altro si ha una definizione di prodotto poco intuitiva. Questo approccio è fondato sull'identificazione, attraverso un isomorfismo, di oggetti del tipo $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, con le n-uple ordinate $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ dei coefficienti. Seguire questa trattazione porta a definire soltanto i polinomi in una sola indeterminata affrontati nel primo anno del biennio e potrebbe avvantaggiare l'introduzione alla programmazione: affiancare esercitazioni in un laboratorio di informatica alle lezioni tradizionali di algebra, servirebbe di certo a fare acquisire una maggiore consapevolezza del linguaggio algebrico, attraverso cambi di registro.
Se invece si sceglie di adottare il modello funzionale, si avrà di certo un approccio più intuitivo e il vantaggio di rendere più concreto il concetto di polinomio, ad esempio, già la verifica di operazioni come somma e prodotto diventa più agevole. Qualche problema si ha invece quando si deve introdurre la nozione di grado. Come a noi ben noto, infatti, per introdurre tale concetto, è necessario, in questo caso, fare ricorso al "Principio di identità dei polinomi" valido solo se l'anello (o il campo) considerato ha una struttura di dominio infinito. Bisognerà, pertanto, stare attenti a sottolineare il fatto che, affinché la definizione di grado sia univoca, l'anello considerato non può

essere un dominio finito, e questo passaggio risulta essere molto delicato soprattutto in un primo anno di scuola secondaria superiore.
In ogni caso, tutti e tre gli approcci richiedono una certa padronanza di conoscenze teoriche non facenti parte del bagaglio culturale di uno studente di questa età. I primi due modelli si basano su concetti avanzati di algebra, come ad esempio la nozione di anello o campo. Il modello funzionale, seppur più vicino alla linea seguita dai programmi di scuola secondaria superiore, non trova un'ottima collocazione nel programma di una prima classe.
Sulla base di quanto osservato, un'introduzione troppo formale dei polinomi nella scuola non è di certo da incoraggiare, se non dando una nuova organizzazione all'intero curriculum scolastico: ma questa è una storia lunga che ci porterebbe da un'altra parte.
E' qui che entra in gioco quanto detto in precedenza sulla trasposizione didattica, va cercato un compromesso tra "sapere sapiente", sapere scientifico, accademico e "sapere da insegnare" che deve tener conto dei limiti cognitivi degli studenti a cui è rivolto, e di tutto quello che concerne la *noosfera*.

A tal proposito vediamo com'è trattato l'argomento "polinomi" in un libro di testo accademico, per renderci effettivamente conto degli ostacoli, delle difficoltà a cui si andrebbe incontro se tale argomento fosse presentato così ad una classe di primo anno di scuola secondaria superiore. Ho deciso di prendere in esame il testo di Michael Artin, "Algebra", perché l'unico tra quelli consultati che parla di monomi.
Nel testo, l'autore comincia col presentare i polinomi seguendo il modello funzionale, servendosi poi del modello vettoriale quando deve definire le operazioni tra questi.
Riporto, qui di seguito, l'intero paragrafo del testo dedicato all'anello dei polinomi.

3.1 L'anello dei polinomi nel testo di Michael Artin

Possiamo definire un *polinomio* a coefficienti in un anello R arbitrario come una combinazione lineare di potenze della variabile:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{3.1}$$

con $a_i \in R$. Tali espressioni vengono chiamate spesso *polinomi formali*, per distinguerli dalle funzioni polinomiali. Ogni polinomio formale a coefficienti reali individua una funzione polinomiale sui numeri reali.
La variabile x che compare in (3.1) è un simbolo arbitrario, e i monomi x^i sono considerati indipendenti. Ciò significa che se

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \tag{3.2}$$

è un altro polinomio a coefficienti in R, allora $f(x)$ e $g(x)$ sono uguali se e soltanto se $a_i = b_i$ per ogni $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Il *grado* di un polinomio non nullo è il più grande intero k tale che il coefficiente a_k di x^k sia diverso da zero. (Il grado del polinomio nullo è considerato indeterminato). Il coefficiente di grado massimo di un polinomio non nullo è chiamato il suo *coefficiente direttore*, e un polinomio *monico* è un polinomio con coefficiente direttore 1.
La possibilità che alcuni coefficienti di un polinomio siano nulli dà luogo a qualche seccatura. Occorre trascurare i termini con coefficienti nulli: per esempio, $x^2 + 3 = 0x^3 + x^2 + 3$. Pertanto il polinomio $f(x)$ possiede più di una rappresantazione (3.1). Un modo per ottenere una notazione standard è quello di scrivere soltanto i coefficienti non nulli, ossia, di omettere tutti i termini $0x^i$ nell'espressione (3.1). Ma i coefficienti nulli possono comparire nel corso dei calcoli, e dovranno essere scartati. Un'altra possibilità è quella di richiedere che il coefficiente del polinomio di grado massimo a_n di (3.1)

sia diverso da zero e di scrivere tutti i termini di grado più basso, ma anche qui si presenta lo stesso problema. Pertanto tali convenzioni richiedono una discussione di casi particolari nella descrizione della struttura di anello. Ciò è un po' irritante, poiché l'ambiguità causata dai coefficienti nulli non è un punto interessante.
Un modo per aggirare il problema delle notazioni è quello di scrivere i coefficienti di *tutti* i monomi, siano essi nulli oppure no. Ciò non va bene per i calcoli, ma permette di verificare in modo efficiente gli assiomi di un anello. Per definire le operazioni di un anello scriveremo un polinomio nella forma canonica:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots, \tag{3.3}$$

dove i coefficienti a_i appartengono tutti all'anello R e *soltanto un numero finito di essi sono diversi da zero*. Formalmente, il polinomio (3.3) è individuato dal suo vettore (o successione) dei coefficienti a_i:

$$a = (a_0, a_1, \dots) \tag{3.4}$$

dove gli a_i appartengono ad R e ad eccezione di un numero finito, sono tutti nulli. Ogni vettore siffatto corrisponde a un polinomio. Nel caso in cui R è un campo questi vettori infiniti formano lo spazio vettoriale Z con la base infinita e_i. Il vettore e_i corrisponde al *monomio* x^i, e i monomi formano una base dello spazio di tutti i polinomi.
L'addizione e la moltiplicazione di polinomi imitano fedelmente le operazioni ben note sulle funzioni polinomiali reali. Sia $f(x)$ come sopra e sia

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots, \tag{3.5}$$

un altro polinomio a coefficienti nello stesso anello R, individuato dal vettore $b = (b_0, b_1, \dots)$. La *somma* di f e g è:

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots = \\ = \sum_k (a_k + b_k)x^k, \tag{3.6}$$

che corrisponde alla somma di vettori $a + b = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$.
Il *prodotto* di due polinomi f, g si calcola con la moltiplicazione termine a termine e raccogliendo i coefficienti dei monomi che hanno lo stesso grado in x. Se sviluppiamo il prodotto utilizzando la proprietà distributiva, ma senza raccogliere i termini otteniamo

$$f(x)g(x) = \sum_{i,j} a_i b_j x^{i+j}. \tag{3.7}$$

Si noti che vi è soltanto un numero finito di coefficienti non nulli $a_i b_j$. Questa è una formula corretta, ma il secondo membro non è espresso nella forma canonica (3.3), poiché lo stesso monomio x^n compare più volte, precisamente una per ciascuna coppia i, j di indici tali che $i + j = n$. Occorre dunque raccogliere i termini in modo da riscrivere il secondo membro in forma canonica. Siamo così condotti alla definizione:

$$f(x)g(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots,$$

dove

$$p_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0 = \sum_{i+j=k} a_i b_j. \tag{3.8}$$

Nel corso dei calcoli, può essere preferibile rinviare per un po' la raccolta dei termini di ugual grado.

Proposizione 1. *Esiste un'unica struttura di anello commutativo sull'insieme dei polinomi $R[x]$ con le seguenti proprietà:*

1. *L'addizione di polinomi è l'addizione di vettori (3.6).*

2. La moltiplicazione di polinomi è data dalla regola (3.8).

3. L'anello R è un sottoanello di $R[x]$, quando gli elementi di R sono identificati con i polinomi costanti.

I polinomi sono di importanza fondamentale per la teoria degli anelli, e dobbiamo considerare anche i polinomi in più variabili, come ad esempio $x^2y^2+4x^3-3x^2y-4y^2+2$. Non vi sono cambiamenti di rilievo nelle definizioni. Siano $x_1, \ldots, x_n$ delle variabili. Dicesi *monomio* ogni prodotto del tipo

$$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n},$$

dove gli esponenti i_ν sono interi non negativi. La n-upla $(i_1, \ldots, i_n)$, detta *multi-indice*, individua il monomio. Particolarmente conveniente è la notazione vettoriale $i = (i_1, \ldots, i_n)$, con la quale possiamo scrivere il monomio simbolicamente nella forma:

$$x^i = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}. \tag{3.9}$$

Il monomio x^0, dove $0 = (0, \ldots, 0)$, si indica con 1.
Un *polinomio* a coefficienti in un anello R è una combinazione lineare finita di monomi a coefficienti in R. Utilizzando la notazione abbreviata (3.9), ogni polinomio $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ può essere scritto in uno e un sol modo nella forma

$$f(x) = \sum_i a_i x^i \tag{3.10}$$

dove i varia nell'insieme di tutti i multi-indici $(i_1, \ldots, i_n)$, i coefficienti a_i appartengono a R, e soltanto un numero finito di essi sono diversi da zero. Un polinomio che sia poi il prodotto di un monomio per un elemento non nullo di R è chiamato anch'esso *monomio*. Così

$$m = rx^i \tag{3.11}$$

è un monomio, se $r \in R$ è diverso da zero e x^i è come nella (3.9). Un monomio può essere considerato come un polinomio che ha esattamente un solo coefficiente non nullo.
Utilizzando la notazione dei multi-indici, le formule (3.6) e (3.8) definiscono l'addizione e la moltiplicazione di polinomi in più variabili, e inoltre vale l'analogo della proposizione (1).
L'anello dei polinomi a coefficienti in R si denota con uno dei simboli:

$$R[x_1, \dots, x_n] \quad \text{oppure} \quad R[x], \tag{3.12}$$

dove il simbolo x si intende riferito all'insieme delle variabili $(x_1, \dots, x_n)$. Se non è stato introdotto nessun insieme di variabili, la notazione $R[x]$ si riferisce all'anello dei polinomi in una variabile x.

3.2 Bisogna fare Trasposizione...

A questo punto ci si chiede cosa va insegnato e come affinché sia significativo per gli alunni. Risulta di certo alquanto difficile definire quale sia il giusto grado di rigore da proporre e da pretendere da loro. E' quindi necessario comprendere come un insegnante possa svolgere al meglio il ruolo di mediatore del sapere, funzione non di poco conto della sua professione.
E' qui che entra in gioco il processo di trasposizione didattica, ovvero «quel lavoro che di un oggetto del sapere da insegnare fa un oggetto di insegnamento» [Chevallard Y. 1985, p. 39], tramite cui contenuti disciplinari vengono scelti per essere insegnati e vengono manipolati per dar loro una forma insegnabile e apprendibile, «scolarizzabile»[Chevallard Y. 1985, p. 39].
Vista la definizione di trasposizione didattica, come trasformazione di un oggetto in un altro, lo stesso Chevallard si chiede quanto l'oggetto di insegnamento differisca dall'oggetto del sapere da cui deriva. Il disciplinarista arriva a concludere che a volte l'oggetto di insegnamento è il risultato di una «creazione didattica» [Chevallard Y. 1985, p. 41], ammettendo il verificarsi di situazioni di «vera sostituzione didattica di oggetti» [Chevallard Y. 1985,

p. 41], ed il tema polinomi ne è un tipico esempio.
Pertanto gli oggetti di insegnamento, trattati da insegnanti e allievi, potendo essere plasmati *ad hoc* per essere insegnati possono risultare altro rispetto agli oggetti del sapere a cui si riferiscono.
La complessità e l'astrattezza degli oggetti matematici, polinomi tra questi, rende necessario un intervento di trasposizione affinché tali oggetti possano essere compresi da un pubblico di non esperti, non ancora in grado di ricevere questi oggetti nella forma originaria.
Gli oggetti matematici non possono essere percepiti attraverso i sensi, così mentre nelle altre scienze si hanno a disposizione prove empiriche, in matematica si ha a che fare con oggetti mentali, pure idee. Per trattare con questi oggetti bisogna pertanto ricorrere a delle loro rappresentazioni semiotiche, le uniche atte ad essere maneggiate e manipolate [D'Amore B. 2009].
Il rischio è allora che il soggetto che sta apprendendo possa confondere la rappresentazione con l'oggetto che essa designa, se questa è l'unico modo di accedere a quell'oggetto. Pertanto occorre poter disporre di vari registri di rappresentazione, almeno due, ed essere capaci di cambiare registro quando ciò si rivela necessario, al fine di comprendere la differenza tra oggetto e sua rappresentazione [Duvall R. 1999].
Bruner, come già detto, parlava del «problema di conversione» del sapere [Bruner J. S. 1999] e sosteneva che per risolvere tale problema era necessario essere a conoscenza tanto della struttura del sapere da insegnare, quanto delle modalità di apprendimento degli allievi, bisogna capire «come adeguare le difficoltà dei contenuti di studio alle varie capacità degli alunni di classi diverse ...» [Bruner 1978].
Essere a conoscenza della struttura del sapere, ovvero di ciò di cui tratta quel sapere e delle leggi che ne sono alla base, nonché dell'ordine in cui questo deve essere presentato affinché venga considerato valido, serve a dargli un senso e a renderlo significativo a chi dovrà apprenderlo, l'ordine progressivo in cui l'allievo entra in contatto con la disciplina ha grosse influenze sulle sue difficoltà di apprendimento.

Il senso del sapere insegnato dipende da come il docente crea il legame col sapere "sapiente" da cui questi insegnamenti provengono; Astolfi a tal proposito dice che, affinché ciò accada i saperi scolastici devono essere dotati di «sapore» [Astolfi J. P. 2008] .
Altro criterio che secondo Bruner caratterizza il modo di strutturare un sapere per far sì che questo possa essere appreso è l'economia, ovvero la «quantità di informazioni che bisogna ricordare ed elaborare per il raggiungimento della comprensione [Bruner 1978, p. 81]. Lo psicologo sostiene che una maggiore quantità di informazioni da ricordare implica che i passaggi da fare per arrivare ad una certa conclusione sono numerosi, e pertanto l'economia risulterà minore.
Altro nodo cruciale di una disciplina riguarda il fatto che uno stesso oggetto riguardante una determinata disciplina può essere studiato dagli scienziati seguendo approcci diversi che implicano che alla base ci siano sistemi conoscitivi differenti. A questo proposito, oltre alle scelte fatte dalla comunità e dalle istituzioni riguardo al modo di trattare una determinata disciplina, anche il ruolo dell'insegnante ha un certo peso.
Entriamo ora nel merito del mio lavoro e sottolineiamo quali sono, nel caso dei polinomi, l'oggetto del sapere "sapiente" e l'oggetto del sapere da insegnare, per vedere poi qual è in realtà quello che viene insegnato.
Quello che si fa a scuola è partire da un approccio aritmetico per svolgere calcoli, per risolvere problemi, per poi arrivare, attraverso delle generalizzazioni a quello che è l'approccio algebrico. La presentazione dell'algebra come una semplice generalizzazione dell'aritmetica, in cui con gli stessi segni e le stesse proprietà si passa da un approccio procedurale a un approccio relazionale, non è d'immediata comprensione per gli studenti.
Il passaggio è spesso traumatico e si risolve con un'accettazione passiva da parte degli allievi delle varie regole di calcolo, con una conseguente perdita del controllo dei significati su cui tali regole si basano. Principale causa delle difficoltà riscontrate dagli studenti in questa fase, è l'insegnamento dell'aritmetica come sequenza di processi di calcolo in cui si rivolge poca attenzio-

ne agli aspetti relazionali o strutturali dell'aritmetica che stanno alla base dell'algebra elementare. Privilegiare gli algoritmi di calcolo o concepire le espressioni aritmetiche come una serie di operazioni da eseguire per ottenere un certo risultato è tipico di un approccio puramente aritmetico, che si discosta da quello algebrico in cui prevale lo studio delle rappresentazioni simboliche come oggetto matematico.
Appare ovvio che gli alunni prediligano risolvere i problemi facendo appello alle loro conoscenze in campo aritmetico, essendo questo un campo più controllabile dal punto di vista semantico: una cosa è manipolare numeri, tutt'altra manipolare lettere.
Risolvere un esercizio, in maniera operativa, è quello che gran parte degli alunni prediligono: nella stragrande maggioranza dei casi, tutto si risolve con un semplice confronto dei risultati numerici ottenuti a sinistra e a destra dell'uguaglianza.
La difficoltà sta principalmente nell'accettare la "mancanza di chiusura" di espressioni come $7 + a$ o più in generala $a + b$, proprio perché in aritmetica espressioni come $5 + 3$ non sono viste come rappresentanti il numero 8 ma esclusivamente come procedimento da eseguire per ottenere tale numero [Malara N. 1997].
L'algebra appare quindi come un elemento di discontinuità, di rottura tra la conoscenza operativa a livello aritmetico e il livello più alto della conoscenza di tipo algebrico.
«L'apprendimento dell'algebra, a nostro avviso, richiede nell'allievo il passaggio consapevole dal procedurale allo strutturale ma purtroppo tale passaggio è spesso ignorato nell'insegnamento perché di fatto ignorato nei libri di testo su cui generalmente l'insegnamento si basa. Ad esempio le espressioni algebriche vengono trattate come generalizzazioni di espressioni aritmetiche e si opera su esse senza mettere in luce le diversità nelle due situazioni, i polinomi vengono introdotti facendo ricorso a variabili nel campo dei coefficienti ed evitando il concetto di indeterminata.» [Malara N. 1996].
Nel capitolo riportato dal testo di Michael Artin, "Algebra", vediamo che,

ovviamente, i polinomi vengono trattati come elementi di un certo insieme, l'anello R, mentre il polinomio presentato a scuola sembra essere un oggetto con una sua forma e certe caratteristiche che non hanno niente a che vedere con gli elementi di un qualche insieme, tanto meno di un anello. Per indirizzare gli studenti verso questa idea si potrebbe far notare l'analogia che c'è tra l'insieme degli interi, a loro noto, e un anello, e far vedere quest'ultimo come una generalizzazione del primo, magari tramite degli esercizi specifici in cui vengono esaminate le proprietà di un anello.

A livello di scuola secondaria, la maggior parte delle attività relative all'algebra riguarda manipolazioni di espressioni simboliche o, come si è soliti dire a scuola, il "calcolo letterale". Il principio fondamentale che sta alla base di ciò è l'idea di relazione di equivalenza tra espressioni letterali intese come processi di calcolo, ovvero la trasformazione di espressioni algebriche con altre a queste equivalenti attraverso dei processi di sostituzione.

Nel passaggio da calcolo numerico a calcolo letterale, però, gli studenti non vedono chiaramente l'analogia che vi sta dietro. Seppure i docenti e i libri di testo insistano molto sul concetto di valore di un'espressione letterale, non è immediata l'accettazione del fatto che i calcoli del mondo delle lettere abbiano una corrispondenza con quelli fatti con i numeri. Con le lettere si accetta (forse) di aver dimostrato che tramite l'uso di proprietà si passa da una espressione ad un'altra equivalente, con i numeri si verifica l'uguaglianza tra risultati.

Far principalmente uso del termine *lettera*, piuttosto che del termine *variabile* non aiuta i ragazzi a rendersi contro che il dimostrare l'equivalenza tra due scritture è il corrispettivo del verificare l'uguaglianza tra due risultati ottenuti nel calcolo di due espressioni numeriche.

Bisogna rendere gli studenti consapevoli del fatto che la verifica diretta è generalmente impraticabile: non si può pensare di dover eseguire infinite sostituzioni per calcolare ogni volta il valore delle espressioni numeriche ottenute. Bisogna staccarsi dall'approccio puramente aritmetico e dal pensare il segno di "=" come simbolo di esecuzione di operazioni, invece che simbolo

di equivalenza tra due espressioni.
Nel caso dei polinomi, poi, insistere sul valore che questo può assumere sostituendo alle lettere dei numeri, senza fissare bene il concetto di variabile continua a lasciare i ragazzi legati ad un ragionamento puramente operativo e non formale, e non aiuta a costruire un ambito teorico su cui basare il significato di calcolo letterale, mantenendo ancora troppo stretto il legame al calcolo numerico [Mariotti M. A. Cerulli M. 2003].
Anche se il testo di Michael Artin, "Algebra", parla di *monomi* e lo fa in modo molto simile a quanto fatto a scuola, di certo una trattazione di questo tipo risulta ostica per qualunque studente alle prime armi con un approccio astratto e formale alla disciplina.
Quello che mi chiedo a questo punto è, allora, come vengono trattati i polinomi in classe? Quanto gli insegnanti sono consapevoli del gap che c'è tra il polinomio intenso nel senso strettamente matematico e quello che loro presentano in classe? Se ne sono consapevoli, fanno qualcosa per renderlo minimo?
Da qui nasce l'idea di proseguire il lavoro fatto da Bolondi, Ferretti, Maffia [Bolondi G. et al.(unpublished)] osservando alcuni insegnanti in azione. Prima di seguire quanto questi facessero in classe, ho prodotto un'intervista per vedere cosa questi dicono riguardo al loro operato, per poi fare un confronto con quello che realmente fanno in aula.

Capitolo 4

La sperimentazione

4.1 Presentazione del progetto

Il mio lavoro di tesi parte dall'idea di vedere come in una classe di prima liceo vengono introdotti e definiti i polinomi. Questo tema è stato già trattato nell'articolo di Bolondi, Ferretti e Maffia [Bolondi G. et al.(unpublished)], in cui si esamina come questi oggetti vengano trattati sui libri di testo.
Ho così pensato di seguire dei professori direttamente in classe per vedere dal vivo come questi affrontano tale argomento.
Come già detto in precedenza, spesso la fase di accoppiamento di un nome ad un oggetto matematico non segue le regole della definizione formale intesa dai matematici, ma segue quegli schemi di definizione che ho elencato e descritto, ovvero designazione, denotazione, denominazione e descrizione. Ognuno di queste operazioni ha una sua precisa funzione che influenza il processo di apprendimento della teoria da parte degli alunni. Ci si è accorti, infatti, che eventuali insuccessi dell'apprendimento in matematica, più che essere legati alla mancata comprensione della disciplina, sono legati alla comprensione del linguaggio, delle azioni semiotiche, che vi ruotano attorno [D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. 2012].
Prima di entrare in classe, ho proposto agli insegnati un'intervista strutturata in cui, con poche e semplici domande ho cercato di capire che percorso

seguissero e se si attenessero o meno all'approccio abbracciato dal libro di testo adottato.
Fatta l'intervista ho chiesto loro di contattarmi nel momento in cui avrebbero introdotto i polinomi in classe, con l'intenzione di capire se il lavoro coi ragazzi fosse coerente con quanto mi era stato precedentemente dichiarato.
I primi problemi sono nati ancora prima di iniziare! Quando ho chiesto loro di contattarmi per poter seguire in classe, le lezioni in cui venivano introdotti i polinomi sono stata "fraintesa". Avevo dato per scontato, parlando con dei docenti, che il mio dire "introdurre polinomi" sottintendesse, neanche troppo velatamente, che dovevo stare in classe con loro già quando venivano trattati i monomi, ma la cosa non è andata così!
Inizialmente avevo contattato cinque professori di due scuole diverse di Bologna, tre di loro del Liceo Scientifico Niccolò Copernico e gli altri due del Liceo Scientifico Albert Bruce Sabin. Alla fine, però, ho collaborato soltanto coi professori del Liceo Scientifico Niccolò Copernico.
Nonostante questi non fossero entrati in contatto tra loro, una cosa li ha accomunati: tutti mi hanno contattato quando, avendo già introdotto e quasi concluso la parte relativa ai monomi, stavano per iniziare il capitolo sui polinomi. Capitolo, sì!! Anzi, nel mio caso, dovrei dire paragrafo!! La cosa mi ha stranito alquanto, e all'inizio anche un po' scoraggiato. Non credevo possibile che a parlare con degli esperti in materia potessi trovarmi in una situazione del genere! La cosa che più mi ha turbato è stata che, per quanto il campione di docenti da me contattati fosse piccolo, tutti avessero inteso la stessa cosa: "introduzione dei polinomi" equivale a dire "aprire il libro al capitolo sui polinomi".
Insegnare/imparare la matematica per capitoli pare invece sia quasi una consuetudine tra i docenti della scuola. Pare infatti che nella pratica scolastica, ricorra spesso la tendenza a seguire la sequenza lineare dei libri di testo, costruendo così una matematica artificiale che segue una costruzione temporale basata su un prima e un dopo.
Alla fine, non avendo altra scelta, mi sono dovuta adeguare alla situazione

e sono rimasta in contatto soltanto coi docenti del Liceo Scientifico Niccolò Copernico, che ho prima intervistato e poi seguito in classe.
L'analisi che ho condotto parte da un primo esame sul libro di testo adottato da questi docenti, soffermandomi sia sulla parte dedicata alla teoria che su quella dedicata agli esercizi. In seguito, sono state messe a confronto le interviste realizzate ai docenti e infine viene esaminato quanto fatto in classe da ognuno di loro.

Qualunque sia l'approccio adottato, prima di arrivare alla presentazione della definizione di polinomio, vengono introdotti vari termini, come ad esempio *variabile, espressione algebrica, espressione letterale, somma algebrica, monomi*, necessari alla costruzione del concetto di polinomio. E' stato pertanto fondamentale vedere anche come questi fossero stati presentati, sempre seguendo il quadro esposto in precedenza.
Alla luce di tutto ciò, iniziamo ad analizzare il libro di testo adottato dai professori del Liceo Scientifico Niccolò Copernico, ovvero "Competenze Matematiche 1, Algebra" di "Re Fraschini, Grazzi [Fraschini M., Grazzi G. (2014)].

4.2 Il libro di testo

Un libro di testo, in particolare nella scuola secondaria di primo grado, dovrebbe essere uno strumento in mano dell'insegnante, e non un libro di matematica dal quale apprendere dogmi; compito dell'insegnante dovrebbe essere quello di dare una lettura critica a tale testo e decidere quale possa essere l'uso migliore in base al proprio contesto di classe, dovrebbe quindi valutare se necessario integrare le lezioni con materiale aggiuntivo, preso da altri libri o creato personalmente. Non di rado capita che il docente segua meticolosamente il libro di testo, dandogli piena fiducia e presentando alla classe definizioni ed esempi come proposti da questo, rischiando di incappare in qualcosa di non propriamente corretto.
Come si osserva in Arrigo, D'Amore e Sbaragli :

«occorrerebbe chiarire le finalità di un libro di testo, che è il risultato di una trasposizione didattica scelta dagli Autori e che non va quindi interpretato dall'insegnante come un libro di matematica scientificamente significativo a parte rarissime occasioni, dal quale si possono apprendere concetti corretti e certi. Il sapere dovrebbe già essere dominato dall'insegnante nel momento in cui adotta un libro di testo e queste conoscenze dovrebbero essere semplicemente rilette e reinterpretate nella trasposizione didattica scelta dall'Autore, per poi accettarle *in toto* o riadattarle personalmente nel particolare contesto-classe» [Arrigo G. et al. 2010, p. 190].
Alla luce di queste considerazioni, andiamo ora a vedere come l'argomento polinomi viene trattato nel libro di testo adottato dai docenti con cui ho collaborato.
Nell'analizzare il testo, ricordo che seguirò in parte lo schema stilato in D'Amore, Fandiño Pinilla [D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. 2012] e ripreso in Bolondi, Ferretti e Maffia [Bolondi G. et al.(unpublished)] .
Il capitolo preso in esame si intitola "Monomi e polinomi", e presenta subito l'elenco di obiettivi che si propone di perseguire durante questa trattazione. Li riporto di seguito:

- *riconoscere monomi e polinomi e saperne individuare le caratteristiche*
- *operare con monomi e polinomi applicando le regole sui prodotti notevoli*
- *padroneggiare l'uso delle lettere come puro simbolo e come variabile*
- *stabilire la divisibilità fra polinomi*

Nonostante tra gli obiettivi si parli di "padroneggiare l'uso delle lettere come puro simbolo e come variabile", in tutto il capitolo non viene mai menzionata la parola **variabile**, ma si fa uso esclusivo del termine **lettera**, anche quando si studiano i polinomi come funzioni.
Il capitolo è aperto da una scheda intitolata "Matematica e realtà"; pur se nel titolo si enfatizza il legame tra questi due mondi, gli esempi presentati non hanno niente a che vedere con la realtà propriamente detta, o con un eventuale matematizzazione di questa: sono degli esempi "matematici", magari già visti nei capitoli precedenti, in cui ai numeri vengono sostituite le

lettere.
Si comincia quindi col dare la definizione di *espressione algebrica letterale*, dicendo che:
*«Un'**espressione algebrica letterale** è un'espressione nella quale alcuni numeri sono rappresentati da lettere»*
Si era già parlato nel capitolo "Gli insiemi N e Z" di *espressione* ed *espressione algebrica* dicendo che:
*«per **espressione** si intende una serie di numeri legati fra loro dai simboli di operazione. Se l'espressione coinvolge numeri relativi, si chiama **espressione algebrica**.»*
Notiamo quindi che il testo fa una distinzione tra *espressione algebrica* e *espressione algebrica letterale*, sottolineando che in quest'ultima sono presenti anche delle lettere. Questa però non è una definizione, bensì una **denotazione** essendo le condizioni date necessarie ma non sufficienti; secondo questa definizione infatti una espressione del tipo:

$$D + f - m6 : -)8($$

potrebbe essere classificata come una espressione algebrica letterale.
Nel seguito della trattazione, non viene più usata l'intera dicitura *espressione algebrica letterale*, ma talvolta si usa solo *espressione letterale*, più spesso solo *espressione algebrica*. Nei primi esempi che seguono la definizione si parla di *espressioni algebriche*, ma vengono solo riportate *espressioni algebriche letterali*, essendo sempre presenti lettere oltre che numeri.
In conclusione, quindi, l'*espressione letterale* non viene mai definita, ma viene sempre correlata a quella *algebrica*. Inoltre tutti i termini, oltre a non essere propriamente definiti, sembrano confondersi e sovrapporsi, sia nella sezione riguardante la teoria che poi in quella riguardante gli esercizi.
Si passa dopo alla definizione di monomi e si dice che:
*«Un **monomio** è un'espressione algebrica letterale nella quale:*

- *gli esponenti delle lettere sono solo numeri naturali*

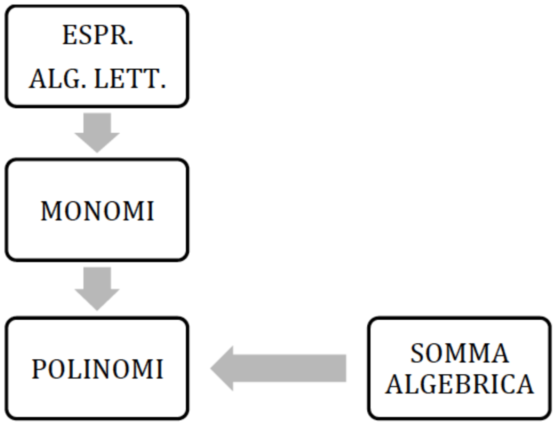
- *fra le lettere ci sono solo operazioni di moltiplicazione. »*

Anche in questo caso non siamo davanti ad una vera e propria definizione, ma ad una **descrizione**, trattandosi stavolta di una condizione sufficiente, ma non necessaria. Facendo infatti riferimento a questa definizione e a quella di espressione letterale algebrica precedentemente data, verrebbero esclusi da questa classe sia i numeri che le lettere con esponente pari a 1, pertanto elementi come "3" e "b" non potrebbero essere considerati monomi senza fare ulteriori specificazioni.
A conferma del fatto che questi casi non vengono presi in considerazione basta guardare la definizione di *forma normale* di un monomio:
*«Diciamo che un monomio è scritto in **forma normale** se è il prodotto di un coefficiente numerico per una o più lettere, ciascuna con il proprio esponente e tutte diverse tra loro.»*
Un accenno al caso di numero come monomio viene fatto quando parlando di grado del monomio si dice:
«Anche un numero, come per esempio 7 *o* $-3/4$*, si può considerare come un monomio di grado zero.»*
Il caso della sola lettera con esponente 1 non viene mai citato, non appare neanche nella "Verifica di comprensione" che viene proposta alla fine del paragrafo. E' certo che tralasciare o, comunque, non dare la giusta importanza a casi come questi non è affatto banale, risulta anzi necessario tenerne conto affinché la definizione di polinomio, data in seguito, abbia un senso.
Dopo aver definito, grado, monomi simili e monomi opposti, si passa a parlare di operazioni con i monomi, e per prima cosa viene trattata l'*addizione*, di cui si enuncia la seguente regola:
*«La **somma di due monomi simili** è un monomio simile a quelli dati il cui coefficiente numerico è la somma algebrica dei coefficienti dei due monomi.»*
Nelle note a lato viene poi detto:
«Per eseguire l'addizione di monomi simili: 1) si sommano i coefficienti, 2) si mantiene la parte letterale»

e ancora:
«L'addizione fra due monomi è ancora un monomio solo se i due monomi sono simili»
Vanno pertanto fatte due considerazioni: la prima sull'uso improprio dei termini somma e addizione, e la seconda sul concetto di somma algebrica.
Una prima questione da porsi è «perché introdurre una regola di addizione dei monomi simili» quando questa non è altro che «una conseguenza della proprietà distributiva» [Impedovo M. 1993]. Certo è che l'aspetto operativo risulta essere quello privilegiato, descrivendo i passi da compiere per portare a termine l'algoritmo: l'addizione non viene pertanto definita e viene inoltre confusa con il suo risultato, la somma. Si parla infatti indistintamente di somma e addizione, trattandoli come uno stesso oggetto.
Il concetto di somma algebrica, in precedenza era stato presentato in una nota a lato, quando nel capitolo "Gli insiemi N e Z si parlava di differenza tra due numeri interi. La nota diceva:
«Poiché ogni sottrazione, può essere trasformata in un'addizione, si parla in generale di ***somma algebrica****.»*
E la stessa osservazione viene ripresa alla fine del paragrafo riguardante la sottrazione dei monomi in cui si dice ancora una volta che:
«una sottrazione può essere trasformata in una addizione; per questo, per indicare la somma o la differenza di due monomi, si parla generalmente di ***somma algebrica*** *di monomi».*
In entrambi i capitoli, quando si parla di *somma algebrica* non viene data una definizione, ma una **denominazione**, facendo riferimento ad operazioni già note, e unificandole in uno stesso nome. Stessa cosa verrà fatta quando saranno introdotte le operazioni tra polinomi.
Riprendendo quanto dice Sfard, si può dire che questo è un processo di "*saming*" (uguagliamento), che si ottiene:
«by assigning one signifier (giving one name) to a number of things that, so far, have not been considered as in any way "the same" but are mutually replaceable in a certain closed set of narratives» [Sfard A. 2008, p. 170].

(assegnando un significante (dando un nome) ad un certo numero di cose che, fino ad ora, non sono state considerate in alcun modo la stessa, ma sono reciprocamente intercambiabili in un certo insieme chiuso di narrazioni).
Tornando un attimo al capitolo sui relativi, credo che la trattazione dell'operazione di addizione crei dei problemi ai ragazzi nella comprensione di tale concetto: tra le proprietà dell'addizione infatti non si parla né di elemento neutro dell'operazione, né di elemento inverso, in questo caso opposto, rispetto all'operazione. Introducendo da subito questi due concetti si potrebbe da un lato semplificare, e dall'altro rendere più precisa e rigorosa la trattazione di questo tema. Si ridurrebbero i «fastidi che si incontrano nella presentazione [...] dei vari significati che il segno " - " ha nella tradizionale notazione matematica. Precisamente: 1) il segno " - " si impiega, come il segno " + ", per "orientare" i numeri assoluti: $-3, +5, \ldots$; 2) il segno " - " si impiega per l'operazione di "opposto": $-a, \ldots$; 3) il segno " - " si impiega per indicare l'operazione di sottrazione: $3-5, a-b$» [Prodi G. 1977, p. 139].
Prodi sottolinea il fatto che una volta introdotta l'operazione di addizione e la proprietà dell'opposto nei numeri relativi, «la scrittura $a - b$ viene intesa come un'abbreviazione della scrittura $a + (-b)$» [Prodi G. 1977, p. 139], senza dover così fare troppi giri di parole sull'operazione di sottrazione.
Sempre riguardo al concetto di elemento neutro e alle difficoltà riscontrate dagli studenti nella comprensione di questo, Impedovo dice:
«Il concetto di elemento neutro non è di immediata comprensione, forse perché non appartiene alla cultura occidentale; lo zero è stato importato dall'oriente perché in Europa non si è ritenuto per secoli di dare un nome ad un concetto che appunto contraddistingue il nulla; non è raro che uno studente ci dica che $3 - 3$ dà come risultato niente.» [Impedovo M. 1993].
Un'adeguata riflessione su questi concetti durante la trattazione dei numeri relativi, a mio avviso, ridurrebbe le varie difficoltà incontrate quando si introducono le operazioni tra monomi.
Tutto questo per dire che non mi è chiaro il motivo per cui nel libro di testo preso in esame, nel capitolo sui monomi si torni a parlare di sottrazione

dando la seguente regola:
«Per sottrarre due monomi si somma il primo con l'opposto del secondo.»
Mi chiedo allora che senso avesse enunciare la regola della somma parlando di somma algebrica e perché non potesse essere tutto rimandato alla trattazione di questi concetti nel capitolo dei numeri relativi.
Infine, viene data la definizione di polinomio:
«Si chiama ***polinomio*** *la somma algebrica di più monomi simili.»*
Questa è una vera e propria **definizione**, in quanto è una condizione necessaria e sufficiente, ma ovviamente fa riferimento alle definizioni date in precedenza.
Nell'analisi dei vari libri di testo riportata nell'articolo di Bolondi, Ferretti, Maffia [Bolondi G. et al.(unpublished)] , si legge che questa è la definizione di polinomio che viene usata dalla maggior parte dei libri di testo italiani, mentre in un libro di testo adottato negli USA, "Gantert - Integrated Algebra 1" si legge:
«A monomial or the sum of monomials is called a polynomial.»
La differenza sostanziale tra le due definizioni è che in quest'ultima viene evidenziato il fatto che i monomi sono polinomi. Nella maggior parte dei libri di testo italiani, invece la classificazione di monomi come polinomi viene giustificata considerando la somma del monomio dato e del monomio nullo.
Il libro di testo da me preso in analisi non fa mai nessuna osservazione di questo genere!
Altra caratteristica che differenzia il modo in cui vengono trattati i polinomi nei vari libri di testo, è data dal percorso seguito per definire tali oggetti. Spesso trovare lo stesso *definiendum* non vuol dire trovare gli stessi *definiens*. Nell'articolo di Bolondi, Ferretti, Maffia [Bolondi G. et al.(unpublished)] a tal proposito viene condotta un'altra analisi che schematizza il percorso che i vari libri di testo seguono. Riassumo nella tabella che segue lo schema proposto dal libro di testo preso da me in analisi:



Seppure il testo sembra seguire uno schema alquanto lineare, si è già visto quante insidie ci sono dietro al processo di definizione del polinomio, già dall'inizio della trattazione. Sia la definizione di espressione algebrica letterale che quella di somma algebrica infatti, senza i dovuti accorgimenti fatti da parte del docente, potrebbero influenzare l'allievo in maniera non costruttiva. Se poi ci mettiamo, ad esempio, nei panni di uno studente che si è trasferito da una classe ad un'altra, cambiando così anche il libro di testo, ci rendiamo subito conto di quanto il solo utilizzo del libro di testo per affrontare lo studio dei polinomi non sia sufficiente. L'uso ambiguo di certe definizioni porterebbe di certo il ragazzo in confusione: un esempio è il termine somma algebrica usato talvolta per parlare di somma tra i coefficienti dei monomi, talvolta come operazione sull'insieme dei monomi. Aggirare questo problema, forse, può essere possibile facendo il giusto uso di esempi, controesempi ed esercizi. Sfard [Sfard A. 2008] sostiene che nel rapporto tra pratica e teoria sta la soluzione al paradosso presentato in precedenza, "la pratica prima della teoria" potrebbe essere la formula che riassume la soluzione a tale problema [Bolondi G. et al.(unpublished)] .
Guardiamo allora che tipo di esempi ed esercizi riporta il libro di testo preso in analisi, e cerchiamo di capire che uso ne vuole fare.
Partendo dagli esempi fatti all'interno del capitolo, notiamo come non ci sia continuità nell'utilizzo che si fa dei vari termini fino ad allora introdotti. Sia

negli esempi e che nei primi esercizi proposti nelle “Verifiche di comprensione”, nel paragrafo in cui è stata definita l’*espressione algebrica letterale*, si parla sempre e solo di *espressione algebrica*.
Gli esempi proposti mostrano come si passi dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico, traducendo delle espressioni verbali in espressioni algebriche; attraverso poi le sostituzioni delle lettere con i numeri, si mostra come varia il valore dell’espressione al variare dei numeri attribuiti alle lettere: in quest’ultimo tipo di esercizi poteva essere introdotto il concetto di *variabile*, ma il testo non lo fa. Stesso approccio viene usato nella parte relativa agli esercizi.
Nel paragrafo sui monomi, coerentemente con quanto non osservato dopo averli definiti, non compaiono mai numeri e lettere con esponente pari a 1 tra gli esempi di monomi. Nella parte relativa agli esercizi, però, il primo esercizio di “Comprensione” dice:
«Indica quali tra i seguenti sono monomi»
e tra le scelte proposte compare un « 4 »!!! Ovviamente questo è un monomio, e anche nelle soluzioni a questi esercizi ovviamente viene considerato tale. Mi chiedo allora come possa fare uno studente a saperlo, se in tutta la trattazione di questo argomento questa osservazione non è stata mai fatta! Magari con questo unico esercizio si potrebbe insinuare in lui il dubbio che anche un numero è un monomio.
Negli esercizi in cui vengono proposte espressioni di monomi da semplificare o di cui calcolare il valore, compaiono sia numeri che lettere con esponente pari a 1.
Negli esempi sulle operazioni tra monomi si fa un abbondante uso delle parentesi, sottolineando forse la differenza tra segno del monomio e segno dell’operazione: passaggio di certo utile quando lo studente entra in contatto per la prima volta con questi oggetti, ma che, a mio avviso, andrebbe presto abbandonato per dare più spazio al concetto di *somma algebrica*.
Nella sezione di esercizi riguardante questo paragrafo, negli esercizi sulla sottrazione viene chiesto:

«Dopo aver indicato la differenza fra le seguenti coppie di monomi simili, trasformala in addizione operando gli opportuni cambiamenti di segno. Infine esegui il calcolo.»

Anche qui, come nella trattazione teorica, si parla di addizione e sottrazione come due operazioni distinte, senza mai menzionare il termine *somma algebrica* e parlando addirittura di trasformazione di un'operazione nell'altra.

Tra gli esercizi di "Comprensione" sui polinomi, in un esercizio di "Vero o Falso" si trova la seguente affermazione:

«-15 *è un polinomio di grado zero*»

ovviamente vera. Ma nel testo, oltre a non esser sottolineato il fatto che un numero è un monomio, non viene neanche osservato che un monomio è un polinomio.

Nella sezione in cui si studiano i polinomi come funzioni, figura per la prima volta il termine *variabile*, senza dare alcuna definizione e senza averlo mai menzionato nella parte teorica.

Quanto fatto con le operazioni tra monomi, viene ripreso per quelle tra polinomi, ovvero si continua ancora a parlare di trasformazione della sottrazione in addizione. In un "Esercizio guida", si mostrano i vari passaggi per attuare questa trasformazione sottolineando il fatto che il segno "$-$" davanti alle parentesi fa cambiare tutti i segni al suo interno.

Il libro propone in questo capitolo più di 800 esercizi, di questi meno di 20 sono problemi. Si insiste sempre sulle stesse tipologie di esercizio, operazioni da eseguire, espressioni da calcolare o da semplificare, che pertanto risultano poco stimolanti e causano scarsa motivazione e scarso interesse nei confronti della materia di studio. Inoltre la risoluzione dei problemi, pochissimi tra l'altro, è proposta soltanto dopo questa miriade di esercizi di calcolo, come a dire che il consolidamento del calcolo è la sola abilità indispensabile per la risoluzione di questi.

L'eccessiva insistenza nell'applicare formule e algoritmi risolutivi, spesso senza le dovute motivazioni, porta di certo i ragazzi a meccanicizzare certi passaggi e ad affidare la risoluzione di esercizi e problemi alla sola memoria.

4.3 Le interviste

Il mio lavoro con i docenti è iniziato, come già accennato, col proporre loro un'intervista strutturata al fine di capire quale fosse il loro modo di introdurre e trattare i polinomi in classe.
Ho ritenuto utile proporre l'intervista prima di seguirli in classe per ottenere delle risposte il più possibile oggettive, e per avere poi modo di verificare se vi fosse una corrispondenza di intenti, e quindi coerenza, tra quanto dichiarato nell'intervista e quanto effettivamente svolto in classe.
Altro scopo del questionario è quello di capire che uso fanno i docenti del libro di testo: quanto sono condizionati da questo nel seguire l'ordine e il modo in cui presentare determinati argomenti, se vi ripongono un'eccessiva fiducia o se lo seguono col dovuto spirito critico, e in tal caso, in che modo ne integrano le eventuali mancanze.
Già dalle risposte date nell'intervista speravo di potere avere un'idea del fatto che i docenti avessero o meno consapevolezza dell'esistenza degli schemi di definizione analizzati nell'articolo di Bolondi, Ferretti, Maffia [Bolondi G. et al.(unpublished)] e di come quindi affrontassero la questione "definizione" dei vari oggetti matematici in questione.

I docenti intervistati sono stati tre, tutti insegnano al biennio del Liceo Scientifico Niccolò Copernico. Ho fissato con loro degli incontri separati, durante i quali ho posto un paio di domande, registrando quanto ci dicevamo in modo da non perdere neanche i commenti detti a mezza voce. La scelta di intervistarli singolarmente è stata dettata dal fatto che, a mio avviso, l'argomento è alquanto delicato e, in un certo senso, personale e ho temuto che da un'intervista di gruppo sarebbero venute fuori delle risposte falsate, o quanto meno influenzate dalla presenza degli altri colleghi. L'intervista singola è stata molto interessante, perché nella riservatezza dell'incontro individuale i docenti si sono sentiti liberi di esprimere opinioni e osservazioni senza troppe riserve; inoltre hanno avuto la possibilità di divagare un po' dalle domande che avevo posto loro, tirando fuori anche spunti interessanti.

Riporto di seguito le domande poste nell'intervista:

1. Come arriva a parlare di polinomi? Come li introduce? Come motiva tale introduzione?

2. Nel parlare di polinomi segue il percorso del libro di testo? Come? Solo per la teoria o anche per gli esercizi? Perché?

Inizialmente ho fatto le domande a cascata, cercando di non dare loro troppi dettagli, ma lasciandoli parlare liberamente e intervenendo soltanto nel caso in cui non approfondivano troppo le risposte; in tal caso, chiedevo anche:

i) Cosa introduce prima monomi o polinomi? Perché?

ii) Nel farlo parla di "espressione algebrica" o "espressione letterale"?

iii) In che modo parla di "somma algebrica"?

Chiamerò i professori A, B e C per questioni di riservatezza.
Tutti, alla prima domanda, hanno risposto che il calcolo letterale segue l'excursus fatto sugli insiemi numerici. Solo il professore B, dice fare *"una piccola introduzione storica, per cercare di incuriosirli e fargli capire che il nostro modo di rappresentare monomi e polinomi è una conquista a cui siamo arrivati dopo un sacco di tempo"*. Il professore B, a questo punto, parla di significato delle lettere e della possibilità di sostituire alle lettere dei numeri e dice *"quindi con quella lettera rappresento un'infinità di oggetti"*, lasciando trapelare una possibilità di generalizzazione.
Il professore A, sottolinea il passaggio da espressione numerica a espressione letterale facendo notare il legame tra i due oggetti, dice di introdurre l'uso delle lettere mostrando degli esempi presi dalla geometria come il calcolo dell'area o del perimetro di un rettangolo, e fa notare che sostituendo dei valori alle lettere si ottengono le già note espressioni numeriche.
Durante l'intervista usa sia il termine *espressione algebrica* che il termine *espressione letterale*, ma alla mia domanda esplicita su quale dei due utilizza in classe, lui ci tiene a precisare che è solito dire *espressione letterale*, e da

questo momento, nel corso di tutta l'intervista, sta molto attento ad usare questo termine.
Il professore C introduce il calcolo letterale mettendo in evidenza quale sia *"l'esigenza di sostituire dei numeri con le lettere, un'esigenza di generalizzare ... generalizzare una classe di problemi"*, e sulla scia di quanto afferma, a differenza del professore A, parte da un esempio concreto, misurare l'area o il perimetro della cattedra, e sostenendo che questo risolve un problema e non una categoria di problemi, sottolinea appunto l'esigenza della generalizzazione.
Da subito, si nota la differenza di approccio dei tre docenti, il professore B preferisce incuriosire i ragazzi con un'introduzione storica, il professore A lega un concetto noto con uno ancora da definire, il professore C punta all'importanza della generalizzazione in una classe di problemi. Tutti e tre insistono sul concetto di valore della lettera o dell'espressione.
Il professore B non divaga molto, mentre i professori A e C, cominciano col descrivere passo per passo quello che fanno in classe.
Il professore A, dopo aver fatto vedere agli studenti che già nelle formule di geometria erano entrati in contatto con i monomi, racconta come li definisce: *"il monomio"*, dice, *"è un'espressione letterale nella quale compaiono solo le operazioni di moltiplicazione e quindi anche la potenza con esponente naturale"*. Dice essere solito dare ai suoi alunni delle schede scritte da lui, in cui oltre alle definizioni, presenta una serie di esempi, controesempi ed esercizi di comprensione per fissare al meglio i vari concetti di base, senza tralasciare i casi particolari. Ad esempio, durante l'intervista, si sofferma tanto a parlare degli esponenti nulli delle lettere che non compaiono nei monomi, ovvero dice: *"quando io definisco il monomio, per esempio, x, non si sta a scrivere $xy^0z^0t^0$, perché altrimenti dovrei porre y, z e t diversi da zero, quindi si sottintende, in tal caso sì, gli esponenti sono zero, però devo stare attento che se x diventa zero , 0^0 sarebbe privo di significato"* .
Completamente diverso è l'approccio descritto dal professore C. Parlando di definizioni, in generale, dice: *"io cerco ovviamente le definizioni di non*

dargliele come un qualcosa di precostituito, ma intanto di farle tirare fuori a loro, per cui scrivo qualche espressione alla lavagna ... e mi baso sui loro ricordi". Dice ancora: *"il problema, in prima, è quello di saper definire.... La definizione non deve essere qualcosa di imparato a memoria, ma deve essere un qualcosa che ci esprime in maniera sintetica, non equivoca, una situazione ... e fatico, accolgo gli errori, le definizioni errate in modo da sottolineare, e poi dopo ovviamente salta fuori la definizione giusta ... cerco di fargli capire che la definizione, anche questa è una convenzione, bisogna metterci d'accordo"*.

Alla domanda sull'uso che fanno del libro di testo le risposte differiscono, soprattutto quando motivano la scelta compiuta.

Il professore B dice di seguire fondamentalmente il percorso del libro di testo, perché ritiene *"che i ragazzi abbiano bisogno di un appoggio a casa, qualcosa su cui guardare"*.

Il professore A, come già accennato, distribuisce agli alunni delle schede che produce personalmente, il motivo principale, dice, è dato dal fatto che *"il libro di testo che abbiamo ora in adozione non è molto rigoroso"*, pertanto preferisce affidarsi al libro soltanto nella parte relativa agli esercizi, stando però sempre attento ad eventuali mancanze di rigore. Ci tiene infatti a sottolineare che in tutti gli esercizi quando *"compaiono le* x^n *o* x^{n+1}, x^{n-1}*, lui non scrive mai «con* $n \in \mathbb{N}^+$*, con* $n \in \{n \geq 2\}$*», perché se c'è* $n = 1$ *cosa succede se n è zero? Ecco questi aspetti bisognerebbe un attimo curarli secondo me, soprattutto quando c'è l'n"*.

Il professore C dice di seguire il libro, ma *"fino a un certo punto, cioè non ci mettiamo mai, quasi mai a leggere il libro di testo e poi voglio che prendano gli appunti perché loro poi devono avere la doppia ... quindi poi una cosa se non la capite bene dagli appunti avete la possibilità di guardarla nel libro di testo"*.

A questo punto, con nessuno dei tre era venuto fuori se facessero o meno uso del termine *somma algebrica*, quindi l'ho chiesto a tutti in maniera esplicita. Il professore B risponde con un sì secco e non approfondisce. I professori A

e C, invece, dopo aver confermato che ne fanno uso colgono l'occasione per entrare più nel dettaglio.
Il professore A dice: *"parlo di somma algebrica, intendendo che quindi è possibile l'addizione e la sottrazione contemporaneamente"*.
Il professore C lo lega al discorso fatto poco prima sulla scelta tra *espressione algebrica* o *espressione letterale* dicendo che parla di più di: *"espressione letterale perché algebrica è anche legata più al discorso del segno. E poi parlo di somma algebrica. Io gli faccio vedere sia l'addizione che la sottrazione tra monomi e polinomi però gli dico, però ovviamente lavorando con numeri relativi voi capite bene che si fa fatica a distinguere qual era un'addizione e qual era una sottrazione, non ha più tanto senso, se si parla di numeri relativi, ha più senso parlare di somma algebrica"*.
Tutti e tre i professori, parlano di *variabile*, il professore B lo fa parlando di polinomi come funzioni, mentre i professori A e C lo fanno mettendo in relazione la variabile come particolare oggetto utilizzato di certo in un corso di informatica, e sottolineando ancora una volta quanto sia importante generalizzare per passare da un singolo problema ad una classe di problemi.
Durante l'intervista, più volte, sia il professore A che il professore C, tengono a ribadire che tra le difficoltà dei ragazzi c'è la tendenza a lavorare in maniera meccanica, senza avere consapevolezza di come si stia operando. Il professore A dice a tal proposito: *"siccome i ragazzi alle medie sono abituati solo ad operare in modo pragmatico con questi enti, e quindi loro meccanicamente, senza leggere il testo, si vedono un'espressione davanti e non guardano la consegna, ... loro partono, e quando tu gli chiedi di definire questo concetto e del perché certe operazioni sono lecite o meno ... loro queste cose non se le chiedono e quindi vanno un po' ... io faccio dei test, loro cadono nel Vero o Falso ... mancanza anche di studio."*. Se da un lato quindi i ragazzi si portano dietro le cattive abitudini acquisite nella scuola secondaria di primo grado, dall'altro la mancanza di studio incide sul non colmare eventuali mancanze e lacune.
Il professore C, dopo aver raccontato quanto insista a chiedere ai ragazzi qua-

li sono le proprietà coinvolte quando svolgono determinate operazioni, dice: *"piuttosto che fare solo così esercizi ... per acquisire un meccanismo ... la consapevolezza di quello che stanno facendo, perché poi è questo, la consapevolezza. Poi dico non ho delle scimmiette da ammaestrare, ma siete dei ragazzi pensanti e quindi devono sapere il perché lo fanno"*.
Da quanto dichiarato nelle interviste, a parte il professore B che per lo più si affida al libro di testo, i professori A e C sembrano essere abbastanza critici nei confronti di questo.
Il professore A, con le sue schede, cerca di dare un certo rigore alla trattazione dei vari argomenti.
Il professore C porta i ragazzi a costruire le definizioni dando molta importanza all'atto del saper definire e per questo invita i ragazzi a prendere appunti durante la lezione, vuole renderli partecipi nel costruire il proprio sapere.
Sia il professore A che il professore C ci hanno tenuto a precisare quanto i ragazzi siano propensi a svolgere gli esercizi solo attraverso una serie di processi meccanici, senza troppo soffermarsi a riflettere sulle richieste fatte dalla consegna, forse per mancanza di studio accurato, forse per abitudini acquisite nei percorsi scolastici precedenti.

4.4 Le lezioni

La fase successiva a quella dell'intervista è stata quella di seguire in classe i docenti per assistere dal vivo a come questi trattassero l'argomento polinomi. Ho potuto seguire soltanto due dei tre docenti intervistati, i professori A e B, e soltanto sulla parte riguardante i polinomi, perché, come già accennato, non era stato capito che "introdurre i polinomi" comprendesse anche la parte sui monomi. Non ho potuto seguire il professore C perché questo, a differenza degli altri, aveva quasi concluso la parte sui polinomi.
Ho seguito circa tre ore di lezione con ogni professore; con il professore A ho assistito alle lezioni in due classi diverse, mentre con il professore B sono stata sempre nella stessa classe.

Il professore A fornisce agli studenti delle schede prodotte da lui, in cui, pur seguendo l'ordine di esposizione degli argomenti del libro di testo, sistema alcune definizioni e propone una serie di esempi, controesempi ed esercizi di comprensione che non figurano nel libro di testo.
Il professore B, invece, come già dichiarato nell'intervista, segue il libro di testo sia nell'ordine di presentazione degli argomenti, sia nel modo di enunciare definizioni e proprietà e spesso utilizza gli stessi esempi che riporta il libro.
Seppur non ho potuto seguire il professore A nella trattazione dei monomi, questo mi ha fornito la scheda portata in classe su questo argomento, pertanto inizierò il prossimo paragrafo analizzando per prima quanto fatto da questo docente.

4.4.1 Il professore A

La scheda fornita dal professore A dà subito la definizione di *monomio*:
*«Un **monomio** è un'espressione letterale in cui l'unica operazione tra le lettere è la moltiplicazione (quindi anche la potenza con esponente naturale).»*
Questa altro non è che una parafrasi della definizione data nel libro di testo, e pertanto risulta essere anch'essa una **descrizione**, e non una definizione, essendo una condizione sufficiente ma non necessaria. Da questa, non è ben chiaro se tra i monomi sono anche compresi i numeri e le lettere con esponente pari a 1: i primi potrebbero essere pensati come espressioni letterali in cui le lettere hanno tutte esponente zero, mentre le altre come moltiplicazioni tra una lettera con esponente pari a 1 ed altre con esponente pari a zero. Non sono però certa che una tale osservazione possa essere facilmente colta dai ragazzi senza alcun suggerimento da parte dell'insegnante.
Sicuramente il professore avrà fatto notare che anche un numero è un monomio perché negli esercizi di comprensione che seguono la definizione, in cui viene chiesto di individuare quali tra le espressioni letterali elencate sono monomi vi compaiono "3" e "0" e alla fine di questi, viene proposto un

quesito di Vero o Falso in cui si chiede esplicitamente se *«ogni numero è un monomio»*. Non viene fatto alcun riferimento alle lettere esponente pari a 1. Probabilmente arrivati al caso del monomio "0" il professore avrà parlato di *monomio nullo*, visto che non viene mai menzionato nel corso della scheda.
Avendo anche dato la definizione di *forma normale*, *coefficiente* e *parte letterale*, nella parte relativa alla verifica di comprensione viene anche chiesto, nel caso in cui si fosse in presenza di un monomio, di dire se scritto in forma normale e in caso contrario di scriverlo in tale forma, di distinguere quale sia il coefficiente e quale la parte letterale.
Interessanti sono, a mio avviso, i casi come x/y e $-2/3a^3b^5$ con cui si vuole far notare che non è possibile avere l'operazione di divisione tra le lettere, ma è possibile averla nel coefficiente, o anche $\sqrt{5x}$ e $3a^4b^{-2}c$ con cui si sottolinea che l'esponente della x deve essere un numero naturale.
Seguono dunque le definizioni di *grado* e *grado rispetto alla lettera*, presentate in ordine opposto a quello del libro di testo, e vengono così rese indipendenti l'una dall'altra infatti, mentre nel libro di testo viene prima detto che:
*«l'esponente con cui ciascuna lettera compare in un monomio è il **grado** di quella lettera»*
e poi
*«la somma dei gradi delle lettere è il **grado (complessivo) del monomio**»*.
Il professore A nella sua scheda dice:
*«il **grado** di un monomio è la somma di tutti gli esponenti delle lettere. L'esponente di ciascuna lettera è detto **grado rispetto alla lettera**»*
lasciando quasi slegati i due concetti.
Anche qui viene proposta una tabella con esercizi di verifica sui concetti appena esposti, in cui figurano tra i monomi un numero e il monomio nullo, e subito dopo in un esercizio di Vero o Falso viene chiesto se:
«ogni numero diverso da zero è un monomio di grado zero»
che porterà magari alla riflessione sul grado del monomio nullo.
Nella definizione di *monomi simili*, a differenza di quanto fatto nel libro di testo, si rimarca il fatto che i polinomi devono essere in forma normale. An-

che questa definizione è accompagnata da esercizi di comprensione.
La definizione di monomi opposti ricalca quella del libro di testo. Nella tabella di esercizi di comprensione che segue si propongono dei polinomi e viene chiesto se sono simili e se sono opposti. A rimarcare la relazione tra questi due concetti ci pensa l'esercizio di Vero o Falso, con le due seguenti affermazioni:
«Se due monomi sono simili, allora sono opposti.»
«Se due monomi sono opposti, allora sono simili.»
Passiamo ora ad esaminare quello quello che è avvenuto durante le ore seguite da me in classe nelle lezioni sui polinomi.
Anche questa volta il professore A ha fornito una scheda agli alunni.
Durante tutta la lezione i ragazzi, a turno, erano chiamati a leggere quanto riportato in questa. Il professore interveniva per sottolineare alcuni concetti, per fare delle osservazioni ed eventualmente per fare domande sui concetti trattati nelle lezioni precedenti, che venivano ripresi nella scheda.
Si comincia subito col dare la definizione di *polinomio*:
«Un polinomio è una somma o differenza di monomi.»
Questa, essendo una condizione necessaria e sufficiente, è una **definizione** formale, ma, mentre il libro di testo parla da subito di somma algebrica tra monomi, in classe il professore lo fa a commento della definizione appena data.
Seguono dunque la definizione di *termini*, non presente sul libro di testo, e quella di *forma normale*, e degli esempi.
Tramite l'esercizio di Vero o Falso si fa notare che un monomio è un particolare polinomio. L'esercizio presenta due quesiti:
«Ogni monomio è un polinomio.
Ogni polinomio è un monomio.»
Alla lettura del primo quesito, si apre un piccolo dibattito perché alcuni dei ragazzi hanno risposto "Falso". Il professore chiede se tutti sono d'accordo e uno di loro interviene dicendo che:
"Perché ad esempio $5x^2$ *è come se fosse il termine di un polinomio . . . più*

zero"

Il professore sembra non essere totalmente d'accordo e infatti suggerisce di fare un altro esempio in cui il monomio $5x^2$ venga visto come risultato di un'operazione, come ad esempio la somma $2x^2 + 3x^2$ e giustifica tale affermazione dicendo:

"$2x^2 + 3x^2$ *questo è un polinomio ... non è in forma normale, ma è un polinomio ... di conseguenza il monomio risultato lo è effettivamente, la somma di due monomi, e quindi ogni monomio può essere pensato come se fosse un polinomio. Abbiamo capito l'osservazione? Ovviamente se uno dice sommo più zero, beh se sommo più zero può essere anche quello giusto, però magari facciamo vedere la somma o la differenza di monomi simili che sommati restituiscono un monomio."*

Se poi si rileggono con attenzione le parole del professore, sembra quasi che la somma, suggerita dallo studente, tra un monomio e lo zero, non potesse essere considerata un polinomio. Allora alla domanda del professore *"Abbiamo capito l'osservazione?"* mi viene da rispondere con un no secco! Non riesco a capirne il senso! A mio avviso, la risposta del ragazzo era più che pertinente, anzi forse anche troppo: è davvero raro trovare tra gli studenti qualcuno che già consideri lo zero come l'elemento neutro dell'addizione nei naturali, ancora più raro trovarne uno che lo consideri elemento neutro, per questa operzione, nell'insieme dei monomi.

Cito Impedovo per commentare questo episodio:

«Le difficoltà con gli elementi neutri 0 e 1 nascono spesso dal fatto che solitamente con questi numeri non si opera; espressioni come le seguenti: $1x, 0x, 0 + x, x/1$ sono generalmente vietate. Sembra che ci sia una sorta di tabù che ci fa indietreggiare di fronte alle operazioni con 0 e 1. È bene invece che gli studenti scrivano (e dicano) $1x, 0 + x$, perché solo così 1 e 0 diventeranno numeri come gli altri, perché si opera con essi.» [Impedovo M. 1993].

Per quanto riguarda la falsità della seconda affermazione, *«ogni polinomio è un monomio»*, il professore chiede ai ragazzi il perché e fa notare che per dimostrarlo è sufficiente determinare un controesempio, pratica tutt'altro che

banale e immediata.
Si passa poi alla definizione di *grado del polinomio* e quindi di *polinomio omogeneo*, mettendo in evidenza, il fatto che il polinomio deve essere in forma normale, cosa che il libro non fa.
Non viene invece data la definizione di *grado di un polinomio rispetto ad una sua lettera*, riportata dal libro.
Nel dare la definizione di *grado di un polinomio*, il professore si sofferma molto su quello che lui chiama l'*"algoritmo risolutivo"*, in particolare nel dire che ciò che va calcolato è il massimo dei gradi dei monomi e non, come spesso erroneamente si fa, la somma di questi. Ribadisce ancora che va calcolato il massimo e non il maggiore, perché potrebbe succedere che vi siano monomi di grado uguale.
Anche queste definizioni sono seguite da una tabella di esercizi di comprensione in cui vengono proposti dei polinomi in forma normale di cui viene chiesto il numero di termini, la classificazione in base al numero di questi, il grado dei termini del polinomio, il grado del polinomio e se il polinomio è o meno omogeneo. I casi interessanti sono quelli in cui viene proposto come polinomio il numero -5 e per cui il docente sottolinea che:
"è un monomio come abbiamo detto, ed è un particolare monomio, è un numero, la parte letterale è costituita se vogliamo da tutte lettere con esponente zero . . . per convenzione si pone omogeneo"
e il caso come «$x - 2y$» in cui, essendo il polinomio omogeneo, il docente ricorda, ancora una volta, che va fatto il massimo e non il maggiore.
L'esercizio di Vero o Falso presentato dopo la tabella dice:
«*Il polinomio* $7x^4 + x^3 - 2x^4 + 10x - 5x^4 - 9$ *è di 4° grado*»
Gli studenti, all'unisono, rispondono che l'affermazione è vera. Va ricordato allora quanto il professore A aveva detto durante l'intervista, ovvero che il più delle volte i ragazzi risolvono gli esercizi senza leggere bene la consegna, rispondendo in maniera meccanica: gli esercizi proposti precedentemente non richiedevano di portare i polinomi in forma normale, quindi loro non si aspettano che stavolta la modalità di risoluzione sia cambiata. E' da apprezzare

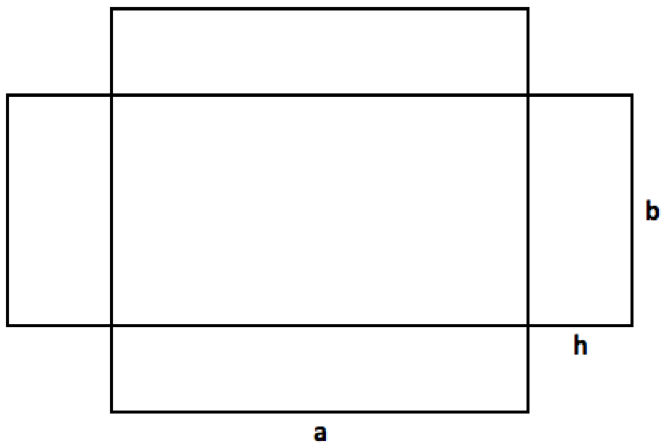
quindi la proposta di questo esercizio, utile a non abituare gli studenti a procedere in maniera automatica, ma portandoli a ragionare e riflettere ogni volta che viene proposto un esercizio nuovo.
Il professore A, non parla di polinomi come funzione, pertanto a differenza di quanto proposto nel libro di testo, per definire l'*uguaglianza* tra due polinomi non ricorre al *Principio di identità* dei polinomi, ma dà la seguente definizione:
«Due polinomi, ridotti in forma normale, si dicono ***uguali*** *se sono formati dagli stessi termini».*
In questa definizione si utilizza il termine "*formati*", mai definito in precedenza, che sta ad indicare che i due polinomi in questione hanno gli stessi addendi, facendo così riferimento esplicito alla loro rappresentazione. Il termine "*formare*", nel linguaggio naturale, viene usato per indicare una composizione mediante l'unione di più elementi, e ovviamente presentato così non esprime che relazioni intercorrono tra questi, ma fa riferimento soltanto a quello che si vede, senza rimarcare le proprietà e la struttura che vi stanno dietro.
A questa seguono le definizioni di *polinomi opposti*, *polinomio nullo*, *polinomio ordinato* e *polinomio completo rispetto ad una lettera*.
Come lo stesso professore precisa, la definizione di *polinomio ordinato* è molto rigorosa, dice infatti:
«Un polinomio in forma normale con almeno due termini si dice ***ordinato*** *in modo* ***crescente (decrescente) rispetto a una lettera****, se leggendolo da sinistra verso destra, gli esponenti di quella lettera sono tutti diversi e crescono (decrescono)».*
Il rigore sta nel precisare che gli esponenti dei termini devono essere tutti diversi, puntualizzazione che manca nel libro e che il docente mette in evidenza proponendo poi un esercizio che porta i ragazzi a rispondere erroneamente, avendo il polinomio considerato due termini di grado uguale.
Il docente tende spesso dei tranelli di questo tipo ai ragazzi, portandoli, come già appurato in precedenza, a ragionare e non rispondere maniera istintiva, e punta il dito sulla questione delle definizioni o delle domande mal poste: svol-

gendo un esercizio sulla completezza del polinomio rispetto ad una lettera, dice che non si può, appunto, parlare di completezza se non si è specificato a quale lettera ci si riferisce.
Nell'ultimo esercizio della scheda chiede:
«Scrivi un trinomio in forma normale, di quarto grado, non omogeneo, nelle lettere x, y, z, completo rispetto alla lettera x, ordinato in modo crescente e non completo rispetto alla lettera y e tale che i coefficienti dei suoi termini siano uguali a 1»
obbligando così i ragazzi a leggere bene la consegna, discutendo sulla giusta importanza che ha la punteggiatura ed evidenziando che ognuno di loro può arrivare ad un risultato diverso, ma comunque esatto.
Nella lezione successiva, il professore A introduce le operazioni con i polinomi. La seconda lezione che ho seguito col professore A è stata in una classe diversa dalla prima ed erano state già introdotte le operazioni di addizione tra polinomi e di moltiplicazione di un polinomio per un monomio; si comincia quindi col trattare la divisione di un polinomio per un monomio.
Questa volta il professore non ha fornito una scheda alla classe, ma procedendo seguendo il percorso proposto dal libro di testo, ha comunque approfondito i vari argomenti e proposto una serie di esempi ed esercizi non presenti nel libro, pertanto i ragazzi sono stati invitati a prendere appunti.
Il docente enuncia la regola per calcolare il quoziente tra un polinomio e un monomio ed esplicita ogni singolo passaggio da compiere per portare a termine l'algoritmo risolutivo: elenca ogni proprietà utilizzata, sottolinea l'importanza delle parentesi, suggerisce delle strategie per evitare di commettere errori e a tal proposito consiglia, almeno in una fase iniziale, di non saltare dei passaggi per poter avere un maggiore controllo sugli errori e ridurre così la probabilità di compierne.
Al momento di svolgere gli esercizi da lui proposti alla classe, chiede ai ragazzi quando non è possibile effettuare la divisione tra un polinomio e un monomio. Nell'esporre l'argomento, aveva semplicemente detto che questa operazione non è sempre possibile, senza però motivare tale affermazione.

Probabilmente era sua intenzione portare la classe a fare questa considerazione in maniera quasi autonoma; alla fine di un esercizio chiede pertanto un esempio di divisione in cui il risultato non fosse un polinomio. I ragazzi rispondono prontamente sostituendo il monomio divisore con un altro di grado superiore a quello del polinomio dividendo. Il risultato avrà quindi esponente intero negativo, e quindi non sarà un monomio.
Alla fine di ogni esercizio svolto in classe, il professore interroga i ragazzi sulle nozioni presentate nelle lezioni precedenti, in modo da fissare bene i concetti di base fondamentali.
Dopo aver spiegato anche l'algoritmo per moltiplicare due polinomi, il docente propone alla classe degli esercizi semplici, ma mirati, per capire come i ragazzi affrontano certe situazioni particolari.

4.4.2 Il professore B

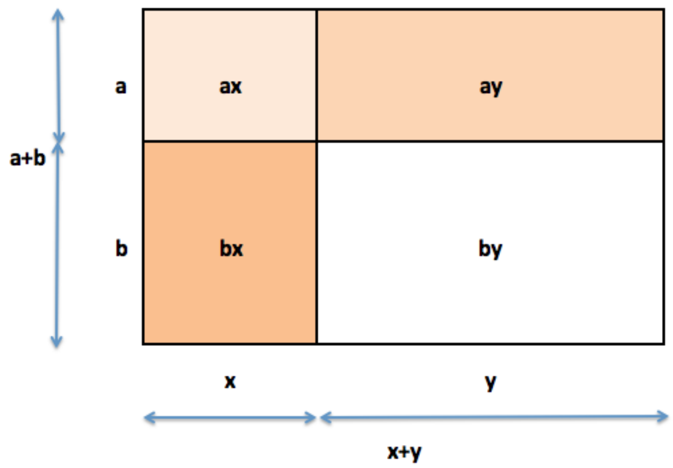
Il professore B inizia la lezione sui polinomi ricordando che la somma di monomi è possibile solo nel caso in cui questi sono simili e riallacciandosi ad un esercizio assegnato per casa, in cui veniva chiesto di calcolare area e perimetro di un rettangolo formato dall'accostamento di quadrati di lato x, propone il seguente problema:
"se voi avete una scatola senza coperchio e la stendete su un piano (fa il disegno alla lavagna, come in figura)... State immaginando una scatola aperta, spiaccicata. Allora i lati si chiameranno a e b e l'altezza della scatola la chiamiamo h. Allora se io voglio trovare la superficie di questa scatola dovrò fare l'area di tutti questi rettangoli e quindi l'area del fondo della scatola è ab, l'area di questi due lati lunghi sarà data da ah per 2 però, e l'area dei due lati corti sarà bh per 2. Ora come vedete questo oggetto che abbiamo scritto $ab + 2ah + 2bh$ è una somma di monomi, ma siccome non sono simili è una somma che con le conoscenze attuali non possiamo fare. Allora quest'oggetto nuovo si chiama polinomio."



Presenta quindi l'oggetto polinomio facendo uso del registro geometrico per passare poi a quello algebrico, e seppure durante l'intervista aveva dichiarato di seguire il libro di testo, per questo esempio non lo fa.
Cerca allora di costruire la definizione di polinomio insieme alla classe chiedendo direttamente a questa cosa fosse e ottenendo come risposta:
"Una somma tra due monomi non simili."
Corregge quindi gli studenti, precisando che la somma è una somma algebrica e che i monomi possono essere più di due. La definizione che viene proposta è una **definizione** nel senso proprio, essendo una condizione necessaria e sufficiente.
Nel parlare dei *termini* del polinomio, e quindi dei monomi che lo costituiscono, il docente fa notare alla classe che:
"il monomio non è altro che un particolarissimo polinomio, nel quale tutti termini sono simili, io li ho sommati e mi è venuto alla fine un monomio solo, un termine solo"
anche il professore B, non considera quindi il monomio come la somma di questo col monomio nullo.
Nel dare le definizioni di polinomio in *forma normale* e *grado del polinomio* fa riferimento alle definizioni date nel caso dei monomi, mantenendo quindi un continuo legame tra vecchio e nuovo; nel corso della trattazione, propone qualche esempio alla lavagna per chiarire meglio i concetti appena definiti

insieme alla classe.
Altra definizione costruita insieme agli studenti, è quella di *polinomi opposti*, alla domanda del professore su quando due polinomi si dicono opposti, i ragazzi rispondono:
"quando hanno la stessa parte letterale, ma ... hanno opposto coefficiente numerico"
il professore li invita allora a correggere la definizione cercando di usare un minor numero di parole, scrive allora un polinomio alla lavagna, chiede qual è il suo opposto e poi specifica che quest'ultimo
"è l'opposto del primo perché i suoi termini hanno coefficienti opposti".
Le restanti definizioni seguono quelle del libro di testo.
Ancora seguendo il percorso del libro di testo, il professore B parla di *polinomio come funzione* dando particolare importanza al valore che tale oggetto assume una volta assegnato un valore alla x. In particolare, dice:
"Allora il nostro polinomio noi lo consideriamo una funzione delle variabili che vi compaiono ... se io lo devo calcolare dovrò darvi un valore per la x e uno per la y, allora il valore che ha il polinomio quando voi al posto delle variabili mettere un numero ... si chiama valore del polinomio in quel punto. ... Questo perché è una funzione."
Dunque l'unico motivo per cui il polinomio viene visto come funzione è per assegnarvi un valore e poter poi fare un veloce accenno a quello che sono gli *zeri* di un polinomio. L'approccio funzionale non viene neanche utilizzato per definire l'uguaglianza tra due polinomi tramite il Principio di identità, nonostante questo è quanto proposto nel libro di testo. Uguaglianza che tra l'altro il professore non definirà.
Mediante un esempio, enuncia la regola della *addizione* tra polinomi e ricorrendo alla regola già usata per i monomi fa notare ai ragazzi che sono già in grado di fare tale operazione.
Anche il professore B, come il libro di testo, parla di *differenza* tra monomi, sottolineando l'importanza delle parentesi, nonostante avesse già parlato di somma algebrica. Inoltre nel suggerire un modo per non dimenticare termini

quando si esegue una somma tra polinomi consiglia di sottolineare i monomi simili e poi:
"una cosa che non dovete fare è cancellarli; li cancellate solo se sono opposti" rischiando così di far perdere il senso al concetto di opposto, nonché al concetto di elemento neutro dell'operazione.
Nella lezione successiva, il professore B presenta le altre operazioni coi monomi: moltiplicazione e divisione di un polinomio per un monomio, moltiplicazione tra polinomi. Segue di pari passo il percorso del libro, riprendendo da questo anche gli esempi che propone alla classe, e fornisce ai ragazzi dei suggerimenti nelle modalità di calcolo per velocizzare la risoluzione degli esercizi e non rischiare di commettere errori banali.
Come suggerito dal libro di testo, il professore B propone un approfondimento sull'*Interpretazione geometrica del prodotto di due polinomi*, dice:
"Qual è l'interpretazione geometrica di tutto ciò? E' quella di calcolare l'area di rettangoli, e cioè supponete di avere un rettangolo la cui base sia la somma di due segmenti (fa il disegno alla lavagna, come in figura), per esempio questo primo pezzo si chiama x e questo secondo pezzo si chiama y, e l'altezza anche quella la divido in due segmenti, per esempio uno si chiama a e uno si chiama b. Quindi se io voglio calcolare l'area del rettangolo devo prendere la base che è $x + y$ e moltiplicarla per l'altezza che è $a + b$. Ok? $(x + y)(a + b)$ *... Mi fate il calcolo per favore? ... Adesso se voi dividete il rettangolo seguendo i segmenti che abbiamo indicato, allora quella che abbiamo scritto è l'area del rettangolo e avete visto che avete ottenuto 4 termini. Questi 4 termini sono le aree di questi piccoli rettangolini."*



In questo modo, ancora una volta il professore B attua un cambio di registro, passando stavolta dal registro algebrico a quello geometrico, di certo molto utile per arricchire il significato, la conoscenza, la comprensione dell'oggetto preso in analisi.
Da un lato gli appunti forniti dal professore A, dall'altro il libro di testo a cui il professore B resta alquanto fedele.
Il professore A punta molto al rigore. Di certo si rende conto delle difficoltà che hanno i ragazzi nell'adoperarlo, così creando un ambiente interattivo, li coinvolge di continuo proponendo vari esercizi di comprensione con lo scopo di favorire in questi l'acquisizione di criticità e consapevolezza e allo stesso tempo presta una particolare attenzione nel correggere ogni errore o frase scorretta pronunciati dai ragazzi.
Al professore B va il merito di provare il più possibile a coordinare diversi registri semiotici, cercando così di non proporre ai ragazzi soltanto un approccio, soltanto formule e regole preconfezionate, ma dando a tutti la possibilità di meglio avvicinarsi all'argomento con una rappresentazione piuttosto che con un'altra.

Conclusione

A conclusione del mio lavoro di tesi, vorrei solo citare una frase del matematico George Polya, ripresa da D'Amore [D'Amore B. 1999], che racchiude un po' quello che dovrebbe essere fatto in classe:
«Un insegnante di matematica ha una grande possibilità. Ovviamente, se egli impiegherà le sue ore di lezione a far eseguire dei calcoli ai suoi studenti, finirà per soffocare il loro interesse, arrestare il loro sviluppo mentale e sciupare l'opportunità che gli si presenta. Invece, se risveglierà la curiosità degli alunni proponendo problemi di difficoltà proporzionale alle conoscenze della scolaresca e li aiuterà a risolvere le questioni proposte con domande opportune, egli saprà ispirare in loro il gusto di un ragionamento originale».
Le modalità per attuare un tale percorso, spero siano un po' venute fuori da quanto ho analizzato in questa tesi.
Un ultimo commento va al titolo che ho scelto, e che mi è stato ispirato dopo aver fatto l'esperienza diretta in classe: "Insegnanti vs polinomi: un carosello tra appunti e libri di testo". Mi auguro che questa sfida non porti né vincitori né vinti, ma che grazie ad un lavoro di collaborazione tra i docenti e i ricercatori in Didattica della matematica, si possano superare le difficoltà che gli studenti incontrano su questo argomento, in modo da far giungere a questi la soddisfazione della completa padronanza della materia.

Bibliografia

[Arrigo G. et al. 2010] Arrigo G. D'Amore B. e Sbaragli S. (2010),*Infiniti infiniti*, Trento, Erickson

[Artin M. 1997] Artin M. (1997), *Algebra*, Torino : Bollati Boringhieri

[Astolfi J. P. 2008] Astolfi J. P. (2008),*La saveur des savoirs*, ESF Editeur, Issy-les-Moulineaux

[Bolondi G. et al.(unpublished)] Bolondi G., Ferretti F., Maffia A. (unpublished), *Monomials and polinomials: the long march towards a definition*

[Borasi R. 1991] Borasi R. (1991),*Learning mathematics through inquiry*, Portsmouth, Heinemann Educational Books

[Brousseau G. 1986] Brousseau G. (1986), *La relation didactique: le milieu*, in Actes de la IVème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, IREM Paris 7

[Brousseau G. 1986] Brousseau G. (1986), *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*, Recherche en Didactique des Mathématiques, vol.7 n°2, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble

[Brousseau G. 1994] Brousseau G. (1994), *Perspectives pour la didactique des mathématiques*in M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavignot (Eds): Vingt ans de Didactique des mathématiques en France, La pensée Sauvage ; Grenoble

[Brousseau G. 1997] Brousseau G. (1997), *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, edito e tradotto da N. Balacheff, M. Cooper, R. Shuterland e V. Warfield, Kluwer

[Bruner 1978] Bruner J. S. (1978), *Dopo Dewey. Il processo di apprendimento nelle due culture*, Armando Editore, Roma. Trad. it. di Antonello Armando, The process of education, Harvard University Press Cambridge

[Bruner J. S. 1999] Bruner J. S. (1999), *Verso una teoria dell'istruzione*, Armando, Roma. Trad. it. di G. B. Flores d'Arcais e P. Massimi, Toward a Theory of Instruction, The Belknap Press of Harward University Press Cambridge – Massachusetts

[Chevallard Y. 1985] Chevallard Y. (1985),*La transposition didactique. Du savoir enseignant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble

[Chevallard Y. 1986] Chevallard Y. (1986),*Les programmes et la transposition didactique - Illusions, contraintes et possibles*, Conférence prononcée le 24 octobre 1985 aux Journées de l'APMEP (Port-Barcarès, 24-26 octobre 1985). Texte paru dans le Bulletin de l'APMEP

[Clanché P. 1994] Clanché P., (1994), *L'enfant et le contrat didactique dans les derniers textes de Wittgenstein*, Hannoun H., Drouin-Hans A. M.

[Cornu L., Vergnioux A. 1992] Cornu L.,Vergnioux A. (1992), *La didactique en questions*, Paris, Hachette

[D'Amore B. 1999] D'Amore B. (1999), *Elementi di Didattica della Matematica*, Bologna: Pitagora

[D'Amore B. 2009] D'Amore B. (2009),*Matematica, stupore e poesia*, Firenze; Milano: Giunti

[D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. 2012] D'Amore B, Fandiño Pinilla M. I. (2012), *Su alcune D in didattica della matematica: designazione, denotazione, descrizione, definizione, dimostrazione. Riflessioni matematiche e didattiche che possono portare lontano*, Bollettino dei docenti di matematica. Bellinzona, Svizzera

[Duvall R. 1999] Duval R. (1999),*L'apprendimento in matematica richiede un funzionamento cognitivo specifico?*, La matematica e la sua didattica. Bologna: Pitagora

[Gantert 2007] Gantert (2007)*Integrated Algebra 1*, AMSCO school publications

[Godino J. 2003] Godino J. (2003), *Competenza e comprensione matematica: che cosa sono e come si ottengono*, La matematica e la sua didattica. Bologna: Pitagora

[Harel G. et al. 2006] Harel G., Selden A., Selden J. (2006), *Advanced mathematical thinking: some PME perspectives*, in Gutierrez A. and Boero P. (eds.), Handbook of research on the psychology of mathematics education, Rotterdam, Sense Publishers.

[Impedovo M. 1993] Impedovo M. (1993),*Che cosa è davvero importante del calcolo letterale?*, Periodico Mathesis Milano n°7

[Malara N. 1996] Malara N. (1996), *Il Pensiero Algebrico: come promuoverlo sin dalla scuola dell'obbligo limitandone le difficoltà*, L'educazione Matematica

[Malara N. 1997] Malara N. (1997), *Problemi di insegnamento-apprendimento nel passaggio dall'aritmetica all'algebra*, La matematica e la sua didattica. Bologna: Pitagora

[Mariotti M. A. Cerulli M. 2003] Mariotti M. A., Cerulli M. (2003), *Espressioni numeriche ed espressioni letterali: continuità o rottura?*, La matematica e la sua didattica. Bologna: Pitagora

[Prodi G. 1977] Prodi G. (1977), *Guida al progetto d'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie superiori proposto da G. Prodi : esperienze di nuclei di ricerca didattica 1*, Messina ; Firenze : D'Anna

[Prodi G. 1982] Prodi G. (1982), *Tendenze attuali nell'insegnamento della Matematica*, Accademia Nazionale delle Scienze dette dei XL

[Fraschini M., Grazzi G. (2014)] Re Fraschini M., Grazzi G. (2014), *Competenze Matematiche 1. Algebra 1*, ATLAS

[Sfard A. 2008] Sfard A. (2008), *Thinking as Communicating: Human development, the growth of discourse, and mathematizing*, Cambridge University Press

[Skemp R. R. 1976] Skemp R. R. (1976), *Relational understanding and instrumental understanding*, Mathematics teaching in the Middle School

[Zaslavsky O., Shir K. 2005] Zaslavsky O., Shir K. (2005), *Students' conceptions of a mathematical definition*, Journal for Research in Mathematics Education

Appendice A

Professore A

A.1 Prima lezione

PA: Tutti hanno la scheda?

R: Sì prof

PA: Allora... Diamo la definizione di polinomio, definiamo cos'è un polinomio, cos'è un termine e che cosa significa un polinomio... e diciamo quando un polinomio è in forma normale. Martina legge...

R: (dalla scheda) Un polinomio è una somma o differenza di monomi.

PA: Allora possiamo dire quindi che è una somma algebrica di monomi. Roberta, quando diciamo quindi somma algebrica intendiamo che all'interno del polinomio ci può essere... le operazioni sono la somma e la sottrazione tra monomi, ok?

R: (dalla scheda) I monomi che costituiscono un polinomio si chiamano termini del polinomio.

PA: Quindi quando dirò quanti termini ha il polinomio intenderò quanti monomi costituiscono il polinomio. Termini e monomi nei polinomi sono sinonimi. Ok? R: Un polinomio è in forma normale se non contiene termini simili.

PA: Quindi un polinomio è in forma normale, quando non sono presenti monomi simili.

R: (dalla scheda) Esempio:

- Il polinomio $4x^2 - 3x - 7$ è in forma normale
- Il polinomio $2x^2 - 3xy - 5x + 10xy$ non è in forma normale (perché contiene due termini simili: $-3xy$ e $10xy$
  $2x^2 + 7xy - 5x$ ora è in forma normale)

PA: Notate quello è costituito da 4 termini, ok? il secondo e il quarto ovviamente si vede che sono monomi simili, quindi quel polinomio non è in forma normale. Siamo d'accordo? Bene! Per portarlo in forma normale sarà sufficiente sommare i termini simili, va bene? E quindi dal polinomio costituito da 4 termini non in forma normale si arriva al trinomio costituito da 3 termini, non simili tra loro e in forma normale. Ci sono dei dubbi fino a qua? Allora Martina, Vero o Falso.
R: (dalla scheda) Vero o Falso:

- Ogni monomio è un polinomio
  PA: Secondo te, ogni monomio può essere considerato un polinomio?
  R: No!
  PA: Perché no? Siamo tutti d'accordo?? R2 non è d'accordo... Perché non sei d'accordo??
  R: Perché...
  PA: Ad esempio
  R: Perché ad esempio $5x^2$ è come se fosse il termine di un polinomio.
  PA: (scrive alla lavagna) ossia. . .
  R: Più zero.
  PA: Più zero, allora però, possiamo vederlo come... Fammi un altro esempio di operazioni in modo tale che ottenga $5x^2$
  R: $2x^2 + 3x^2$
  PA: (lo scrive alla lavagna) $2x^2 + 3x^2$ questo è un polinomio, lo è. . . non è in forma normale, ma è un polinomio. . . quindi questo ovviamente è un polinomio e di conseguenza il monomio risultato lo è effettivamente, la somma di due monomi, e quindi ogni monomio può essere pensato

come se fosse un polinomio. Abbiamo capito l'osservazione? Ovviamente se uno dice sommo più zero, beh se sommo più zero può essere anche quello giusto, però magari facciamo vedere la somma o la differenza di monomi simili che sommati restituiscono un monomio.

- Ogni polinomio è un monomio
  R: La prima è vera, questa è falsa
  PA: Controesempio... Non c'entra nulla, può essere anche vera la seconda o possono essere entrambe false.. Allora ogni polinomio è un monomio, tu mi hai detto che è falso, perché? Controesempio.
  R: Perché $4x^2 - 3x - 7$ non è un monomio
  PA: (scrive alla lavagna) Perché $4x^2 - 3x - 7$ è un polinomio, ma non è un monomio. Questo è il controesempio che va bene. Quindi cosa basta per dire che è falsa? Basta almeno un esempio: $x - y$, $a + b$, ok? Basta semplicemente fare che cosa? Basta sommare o sottrarre due monomi non..
  R: Uguali
  PA: Non uguali?!?! Non simili!!!

PA: Bene!! Grado Polinomio Omogeneo
R: (dalla scheda) Il grado di un polinomio in forma normale è il massimo dei gradi dei suoi termini.
PA: Allora, riguardiamo un attimo la definizione: il grado di un polinomio che deve essere in forma normale, cioè non deve contenere termini simili, è il massimo dei gradi dei monomi che lo formano. Allora come faccio a trovare il grado di un polinomio?? L'algoritmo risolutivo qual è?
R: Vado a vedere qual è il più alto
PA: Trovo il grado di ciascun termine, facendo cosa? Faccio la somma degli esponenti delle lettere (insieme ad R) e li memorizzo in qualche parte del cervello o me li scrivo, 7, 40, 29, 18... Una volta ottenuti che cosa? I gradi di ciascun termine, ne faccio il max... di grado 40... L'errore che si fa di solito

qual è? Non di fare il max, ma di sommare tutti gli esponenti di tutte le lettere presenti (insieme ad R). Ad esempio dire che questo trinomio in forma normale (alla lavagna)$4x^2 - 3x - 7$ (e indicando i monomi) essendo questo di grado 2, essendo questo di grado 1 ed essendo questo di grado zero dire che ha grado 3. Sbagliato, perché io faccio la somma. L'operazione di somma va fatta solo tra gli esponenti delle lettere di ciascun monomio, e voglio farci il max, ok? Meglio dire max che maggiore, perché possono succedere che cosa? Che ci siano dei monomi di grado uguale.
Allora.. (dalla scheda):

- PA: -5 E' un polinomio in forma normale?
  R: Sì
  PA: Quanti termini ha il polinomio -5? Un termine, bene! E' un monomio come abbiamo detto, ed è un particolare monomio, è un numero, la parte letterale è costituita se vogliamo da tutte lettere con esponente zero. Allora in tal caso, grado dei termini, ce n'è solo uno, che grado ha -5?
  R: Zero.
  PA: Zero, ce n'è solo uno, bene! Il massimo visto che ne ho uno solo. Sapete che mi sono dimenticato la definizione di polinomio omogeneo che adesso leggiamo... Quindi grado del polinomio zero. Attenzione: grado del polinomio, in tal caso grado del monomio.

PA: Allora scusate mi sono dimenticato questa definizione: Un polinomio in forma normale si dice omogeneo se tutti i monomi che lo costituiscono hanno lo stesso grado.
Allora Roberta, per convenzione il monomio, siccome ce n'è uno solo, io dovrei confrontare che cosa? Zero con altri gradi, ma non faccio il confronto in tal caso per convenzione si pone che è omogeneo, ok?

- PA: Roberta $7/2a^2bc$ quanti termini?
  R: Uno.
  PA: Si chiama monomio. Grado dei termini?

R: 4.

PA: Grado del polinomio?

R: 4

PA: Il polinomio è omogeneo?

R: mmm...

PA: Se abbiamo detto che per convenzione il monomio è omogeneo, è omogeneo. Proseguiamo Roberta...

- R: (dalla scheda, riferendosi a $5a^2 + 3a$) Allora qui ce ne sono 2 di termini.

  PA: Due termini, quando ho due termini si chiama binomio.

  R: Il grado...

  PA: Il grado di $5a^2$

  R: 2

  PA: Il grado di $3a$

  R: 1

  PA: Bene. Qual è il grado del polinomio?

  R: 3

  TUTTI: 2

  PA: Cosa devo fare Roberta, la somma o devo fare il max?

  R: Il massimo

  PA: E' un binomio di secondo grado. Roberta i termini del polinomio hanno lo stesso grado??

  R: No, perché uno ne ha 1 e uno ne ha 2.

  P: Quindi non è omogeneo. Giulia...

- R: (dalla scheda) $x - 2y$ numero dei termini 2, grado dei termini del polinomio 1

  PA: Solo uno ce n'è? Quanti termini ha? Dovrai indicarmene 2 di gradi...dice, non grado del polinomio, dice grado dei termini. Allora x che grado ha?

R: 1

PA: $2y$ o $-2y$?

R: 1

PA: Quindi che grado ha?

R: 1

PA: Ha grado 1, perché il max è 1, siam d'accordo tutti??

TUTTI: Sì

PA: E' omogeneo, Giulia?

R: Si

PA: Perché?

R: Perché hanno lo stesso grado

PA: Hanno lo stesso grado. Ludovica...

- R: (dalla scheda) $4x^2 - 7 - 8x$

  PA: Quanti termini ha?

  R: 3

  PA: Si chiama trinomio, mi dici quali sono i gradi

  R: 2, 0 ,1

  PA: Ludovica, grado del polinomio?

  R6: 2

  PA: Omogeneo?

  R: No!

  PA: Anche il prossimo, Ludovica...

- R: (dalla scheda) $a^2 - 5ab + 7b^2$, numero dei termini 3, gradi 2, 2, 2

  PA: Grado del polinomio?

  R: 2

  PA: E' omogeneo?

  R: Sì

  PA: Omogeneo. Francesco...

- R:(dalla scheda)$-5a + b^2 - b + 2b^3$ numero di termini 4

  PA: Quadrinomio

R: Grado dei termini del polinomio 1,2,1 e 3, grado del polinomio 3, il polinomio è omogeneo? No!
PA: Ultimo Francesco...

- R:(dalla scheda) $3xy - xy^3 - 8 + 7x^3y^2 - 4y^2$ numero di termini 5
  PA: Allora quando si va dai 5 termini in poi non è che si chiamino pentanomio, esanomio, ettanomio, ottanomio, si chiama semplicemente polinomio. Quindi monomio, binomio, trinomio e quadrinomio, fino a 4 hanno il nome specifico, per gli altri semplicemente polinomio. Francesco, gradi?
  R: 2, 4, 0, 5 e 2, grado del polinomio 4
  PA: Non ho capito
  R: Grado del polinomio 4
  PA: Allora mi ripeti i gradi, Francesco?
  R: 2, 4, 0, 5 e 2... ah è 5
  PA: Grado 5
  R: Non è omogeneo.

PA: Allora, Alessandro...
R: (dalla scheda) Vero o Falso: il polinomio $7x^4 + x^3 - 2x^4 + 10x - 5x^4 - 9$ è di 4° grado? Vero
PA: Vero! Tutti d'accordo?!
R: No| Perché non è in forma normale
PA: Non è in forma normale, non possiamo dare la risposta, indaghiamo ulteriormente, potrebbe essere sì, ma chissà... Allora andiamo a vedere. Qual è il problema? Che se lo mettiamo in forma normale, Alessandro, mi dici il polinomio in forma normale come ti risulta?
R: $7x^4 + x^3$ ...
PA: Sì, ma se lo mettiamo in forma normale magari sommiamo i monomi simili. Se me lo ridici...
R: beh sono $-2 - 5$
R: C'è $7x^4$...
PA: Allora $7x^4 2x^4 - 5x^4$ quanto fa?

R: Fa zero
PA: Fa $0x^4$, quindi quelli li elidete, perché si semplificano, proprio potete fare (alla lavagna)... potete fare questa operazione, nel senso che viene polinomio nullo di quarto grado.. non fate croci per cortesia, ma fate il simbolo di elisione, vuoi dire che i termini si annullano, e quindi morale...
R: Rimane $x^3 + 10x - 9$
PA: Bene. Domanda: è in forma normale?
R: Sì
PA: Che grado ha?
R: Grado 3.
PA: Quindi falso. Scrivete questa motivazione: il polinomio in forma normale diventa $x^3 + 10x - 9$ che è di terzo grado. Bene!
Queste definizioni sembrano abbastanza semplici ma sono alla base di un qualcosa di molto importante quando a un certo punto si farà qualcosa con i parametri. Allora definizione di polinomi uguali. Davide
R: (dalla scheda) Due polinomi, ridotti in forma normale, si dicono uguali se sono formati dagli stessi termini.
PA: Se hanno gli stessi termini e devono essere in forma normale
R: (dalla scheda) Esempio: i polinomi$3a^2b - 5ab + 2$ e $-5ab + 2 + 3a^2b$ sono uguali
PA: Davide, mi dici che polinomio ha il polinomio, è lo stesso.
R: 3
PA: Sì, è omogeneo?
R: ehm no!
PA: Perché?
R: Perché non tutti i termini hanno lo stesso grado
PA: Precisamente? Mi dici i gradi dei monomi che lo costituiscono?
R: 3, 2, 0
PA: Leggi Davide...
R: (dalla scheda) Definizione di polinomi opposti: Due polinomi, ridotti in forma normale, si dicono opposti se sono formati da termini opposti. Esem-

pio: I polinomi $3a^2b - 5ab + 2$ e $5ab - 3a^2b - 2$ sono opposti
PA: Attenzione! La definizione è ben posta perché io so che cosa è un polinomio, che cosa vuol dire essere ridotto a forma normale, e so cosa vuol dire che quando 2 monomi sono opposti.. Perché due monomi sono opposti quando??
R: Due monomi sono opposti se hanno... (non si capisce ma sbaglia)
PA: Martina?
R: Se i due coefficienti sono opposti
PA: Prima devi dire un'altra cosa. Eleonora??
R: Due monomi sono opposti quando hanno la parte letterale uguale e i coefficienti opposti.
PA: Allora. . . in avere la parte letterale, sarebbe meglio dire due monomi sono opposti se sono SIMILI (tutti insieme) e hanno i coefficienti opposti
Allora dobbiamo aggiungere due parole. Definizione di polinomio ordinato rispetto a una lettera e polinomio completo rispetto a una lettera.
R: Non abbiamo detto il polinomio nullo.
PA: Allora il polinomio nullo è il monomio nullo. Ok? Il monomio nullo è praticamente il polinomio nullo. Va bene?
Ascoltate. . . Le due definizioni di ordine e di completezza, sono due concetti l'uno indipendente dall'altro. Nel senso che non c'è correlazione tra l'uno e l'altro e la cosa fondamentale della definizione è che si parla di ordine o di completezza rispetto a una lettera. Se io dico il polinomio, e poi ve lo dico, è completo? voi mi dite: lei mi ha fatto una domanda mal posta, perché mi deve dire rispetto a quale lettera. In modo analogo se io vi dico, il polinomio è ordinato? Mal posta, perché vi devo dire rispetto a quale lettera. E' logico che se c'è una sola lettera si sottointende che la lettera che si considera è quella.
Allora (dalla scheda) un polinomio in forma normale con almeno 2 termini. Davide. . .
R: (continua dalla scheda) Si dice ordinato in modo crescente (o decrescente) rispetto a una lettera, se leggendolo da sinistra verso destra, gli esponenti di

quella lettera sono tutti diversi e crescono (o decrescono).
PA: E' una definizione molto restrittiva che abbiamo dato perché potrebbe succedere che sia 2, 2, 3, molto restrittiva.
Allora, guardiamo un attimo... Leggendo intanto dobbiamo orientare la lettura, nel senso che per poter stabilire un ordine dobbiamo orientare la lettura, da sinistra verso destra. Gli esponenti di quella lettera sono tutti diversi e crescono oppure decrescono. Attenzione! Mi concentro sulla lettera che ho battezzato, le altre lettere le ignoro. Se ovviamente non vi sono delle lettere, uno dice allora, tipo... Poi prendiamo degli esempi. Invece Davide...
R: (dalla scheda) Un polinomio in forma normale...
PA: Facciamo sempre con almeno due termini, anche se qua forse non sarebbe necessario, potrei dire che un monomio è sempre completo. Un polinomio in forma normale, con almeno due termini...
R: (continua dalla scheda)... si dice completo rispetto a una lettera, se gli esponenti di quella lettera sono tutti presenti, dal grado 0 al grado massimo della lettera.
PA: Senza tener conto dell'ordine in cui si presentano e possono presentarsi anche esponenti uguali, ok? Dal grado zero, ovvero vuol dire che la lettera sembra che non ci sia, al grado massimo. Vediamo se abbiamo capito.
Luca prendiamo il primo polinomio...
R: (dalla scheda)$2x^5 - 3x^4 + x^2 - 9$
PA: Mi elenchi gli esponenti della x , attenzione, leggendolo da sinistra verso destra.
R: 5, 4, 2 e 0
PA: Detto questo, Luca, il polinomio, ovviamente, è ordinato rispetto alla x? Potevo non dirlo perché ho una sola lettera
R: Sì
PA: Bene! In che ordine? 5,4, 2, 0
R: Decrescente
PA: Sì, in ordine decrescente. E' completo Luca, rispetto alla x?
R: No

PA: No, perché? Spiegami...

R: Mancano il grado 3 e il grado 1

PS: Non ci poniamo la domanda rispetto alla y, rispetto alla z, rispetto alla t, perché quelle sono tutte lettere ad esponente (tutti) zero. Allora ne dovrei prendere infinite, farmi infinite domande. Guardo solo la presenza delle lettere. Procedi, Luca...

R: (dalla scheda)$9x^2 + x^3 - 4 - 8x$. Esponenti della x 2, 3, 0 e 1. Il polinomio è ordinato rispetto alla lettera x? No. Il polinomio è completo rispetto alla lettera x? Sì

PA: 2,3,0,1 Sì! Notate che quindi un polinomio può essere ordinato ma non completo, né ordinato né completo, completo non ordinato o entrambi. Vediamo Luca l'ultimo esempio in cui compaiono 2 lettere.

R: (dalla scheda) $x^6 - x^2y + 4xy - x^3y^2 - 8xy^3$

PA: Allora concentrati solo sugli esponenti della x

R: 6, 2,1 ,3, 1. Il polinomio è ordinato rispetto alla lettera x? No. Il polinomio è completo rispetto alla lettera x? No.

PA: No, perché?

R: Perché mancano il grado 4, il grado 5.

PA: Il grado 4, il grado 5 e forse il grado 0 anche...

R: Ah sì. Esponenti della y: 1...

PA: Ahia! Da dove parti?

R: Zero!

PA: Perché zero?

R: Perché c'è x^6

PA: Perché c'è x^6 sottinteso y^0

R: 1, 1, 2, 3. Il polinomio è ordinato rispetto alla lettera y? Sì

PA: Sì. Attenzione leggi la definizione molto rigorosa! R: Un polinomio in forma normale con almeno 2 termini si dice ordinato in modo crescente (o decrescente) rispetto a una lettera, se leggendolo da sinistra verso destra, gli esponenti di quella lettera sono tutti diversi e crescono (o decrescono).

PA: Sono tutti diversi. Quindi diciamo No! E' completo rispetto alla y?

R: Sì
PA: Adesso ognuno di voi, senza guardare quello che fa il compagno, perché le soluzioni possono essere più di una, mi scrive (dalla scheda) un trinomio, in forma normale, di quarto grado, non omogeneo, nelle lettere x, y, z - che non vuol dire che ciascun termine le deve contenere tutte, ok? può succedere che si salti anche una lettera, però la lettera x, la lettera y, la lettera z da qualche parte devono avere come minimo esponente 1, che sia completo rispetto alla lettera x, ordinato in modo crescente e non completo rispetto alla lettera y e tale che i coefficienti dei suoi termini siano tutti uguali a 1. Fate 5 minuti, poi cominciamo a vedere cosa avete fatto.
Viene alla lavagna Michele, mi raccomando devono essere le condizioni vere tutte contemporaneamente. Purtroppo in questo tipo di esercizio, o è fatto bene o no, nel compito se vale 3 pt, non dico vabbè le ha prese quasi tutte.. o Tutte o niente!
(alla lavagna)
R: y^3, x, y
PA: Non devi scrivere i termini, devi scrivere tutto il polinomio
R: y^3xy
PA: Qui c'è tutto per... Questo qua è tutto un monomio... O mettete "+" o potete mettere anche "-" perché è somma algebrica
R:$y^3z + xy + x^2z - x^3$
PA: Allora, andiamo a vedere... No trinomio no!
R:$y^3z + xy + x^2z$
PA: Proviamo: trinomio, forma normale, quarto grado, non omogeneo, nelle lettere x, y, z completo rispetto alla lettera x, ordinato in modo crescente e non completo rispetto alla lettera y... il problema è che qua hai 3,1,0 No! Non è ordinato bene! Non rispetta la consegna. Simone...
R: $yz + xy^2 + x^2y^2$
P: Trinomio, forma normale, quarto grado, non omogeneo, nelle lettere x, y, z completo rispetto alla lettera x, non c'era vincolo che fosse ordinato o meno, quindi lui può farlo ordinato o non ordinato rispetto alla x, ordinato in modo

crescente rispetto alla lettera y... ordinato in modo crescente 1, 2 , 2... non dovrebbero essere tutti diversi rispetto alla nostra definizione? No anche quello. Questo per farvi capire che dobbiamo leggere bene! Jiao...
R: $xyz + x^2y^2 + y^3z$
PA: Trinomio, forma normale, quarto grado, non omogeneo, nelle lettere x, y, z completo rispetto alla lettera x, 1, 2, 0, ordinato in modo crescente e non completo rispetto alla lettera y, manca grado zero, e tale che i coefficienti dei suoi termini siano tutti uguali a 1. Questo va bene. Lorenzo...
R: $yz - xy^2z + xy^4z$
PA: Rispondo già, purtroppo... Mi dici tu il perché... Fino a dove va bene, guarda, dov'è che non torna.
(il ragazzo aumenta gli esponenti nell'ultimo termine, poi cancella, ma lascia quello di partenza) Guarda bene, scrivi un trinomio e fin qua ci siamo, in forma normale e qua ci siamo, guarda dove crolla un po' tutto l'apparato. A che grado siamo così? Questo monomio ha grado 2, questo monomio ha grado 4 e fin qua ci saremmo, perché il max si mantiene... qua siamo andati a finire a grado 7. No! Facciamo l'ultimo. Roberta. Notate ragazzi che su 4 per ora ne va bene uno solo!
R: $yz + x^2y^2 + xy^3$
P: Trinomio, forma normale, quarto grado, non omogeneo, per colpa del primo termine non è omogeneo, nelle lettere x, y, z completo rispetto alla lettera x 0, 2, 1, certo! Ordinato in modo crescente 1, 2, 3 e non completo rispetto alla y. Va bene! Perfetto!
Ascoltate leggete bene dove metto le virgole!

A.2 Seconda lezione

PA: Divisione di un polinomio per un monomio
(prof legge) Allora.. Il quoziente tra un polinomio ed un monomio, non é sempre un polinomio.
Vediamo qual é l'algoritmo per fare la divisione: se noi abbiamo un monomio

e lo vogliamo dividere per un polinomio cosa facciamo? Dividiamo ciascun termine del polinomio per il monomio. Quindi si divide ciascun termine del polinomio per il monomio. Quindi il nostro problema dopo si rifà a fare che cosa? La divisione tra 2 monomi. Se il nostro polinomio ha 5 termini, ovviamente il nostro monomio ne ha 1, dovremmo fare 5 volte la divisione tra 2 monomi e poi vedere se ciò che otteniamo è un polinomio. Allora:
Esercizio: Semplifica la seguente espressione e classifica il risultato
(alla lavagna) Prendiamo il polinomio:

$$(21/10x^5 - 12x^3 + 8/3x^2) : (-3/5x^2) =$$

Attenzione! Apro parentesi, perché apro parentesi??? Perché se no divido solo...
R: Per il coefficiente
PA: Quindi mi raccomando!! A parte il fatto che questa qua non è lecita perché c'è un diviso e un meno. Ma se io scrivo così $(21/10x^5 - 12x^3 + 8/3x^2) : (-3/5)x^2$ E' diverso per come ve l'ho scritto. Perché cosa faccio? Divido questo polinomio per $-3/5$ e ciò che ottengo lo moltiplico per x^2. Ok? Bene! L'algoritmo dice: abbiamo un trinomio, dice, dobbiamo dividere ciascun termine, quindi questo monomio lo dividiamo per questo monomio, adesso ovviamente facciamo tutti i passaggi poi vedremo magari come fare più avanti, poi dividiamo questo monomio per il monomio divisore e infine l'ultimo monomio per il monomio divisore:

$$= 21/10x^5 : (-3/5x^2) - 12x^3 : (-3/5x^2) + 8/3x^2 : (-3/5x^2) =$$

Quindi abbiamo scomposto il nostro problema in 3 sottoproblemi, perché adesso noi sappiamo fare la divisione tra 2 monomi. Allora, siccome c'è una divisione faccio il prodotto tra il coefficiente del primo termine e il reciproco, ricordando che c'è la divisione devo fare x^5 diviso x^2 quindi faccio la differenza degli esponenti, stessa cosa 12 per $-5/3$, poi faccio x^3 diviso x^2 che fa x, infine

8/3 per $-5/3$, ovviamente x^2 diviso x^2, fa 1! (intanto scrive alla lavagna)

$$21/10 : (-5/3)x^3 - 12 : (-5/3)x + 8/3 : (-5/3)x =$$

R: 0, cioé x^0.
PA: Bene, ora possiamo semplificare in croce i coefficienti, quindi

$$= -7/2x^3 + 20x - 40/9$$

Mi raccomando semplifichiamo in croce, non facciamo 12 per 5 e poi lo dividiamo per 3, facciamo 12 diviso 3, facciamo prima! Nell'ultimo non c'è nulla da semplificare quindi moltiplichiamo tra loro i numeratori e i denominatori. Allora, classificazione Viola...
R: E' un trinomio, di terzo grado, non completo...
PA: Diciamo prima se è omogeneo o non omogeneo...
R: Non omogeneo, non completo e non ordinato rispetto alla lettera x
PA: Ordinato o no?
R: No
PA: Viola mi dai la definizione di polinomio ordinato rispetto ad una lettera?
R: Ah sì sì, è ordinato perché non devono essere per forza tutti gli esponenti della lettera
PA: Mi dai un attimo la definizione di polinomio ordinato rispetto ad una lettera...
R: Un polinomio è ordinato rispetto a una lettera quando sono presenti gli esponenti della lettera ordinati in ordine crescente o decrescente...
PA: ...e tutti diversi da loro. Questo è ordinato, in che modo?
R: In ordine decrescente.
PA: Va bene. In ordine o in modo decrescente, è equivalente. Perché non è completo?
R: Perché non sono presenti tutti gli esponenti.
PA: Precisamente quali mancano?
R: x^2

PA: Va bene. Ovviamente se c'è una sola lettera, lo mettiamo fra parentesi, che siccome c'è una sola lettera diciamo non sarebbe necessario specificare.
R: Prof, nella divisione qual è il passaggio che possiamo saltare? Il secondo?
PA: Bravo! Io direi che quando abbiamo preso un po' la mano, il secondo lo possiamo saltare!
R: Passiamo direttamente al terzo!
PA: Sì
R: Posso già scrivere direttamente il risultato?
PA: Ascoltami un attimo. Ti dico questo cosa: se tu $21/10 : (-5/3)$ mi scrivi direttamente $-7/2$ io non ho niente da dire, nel senso che se me lo hai fatto correttamente... Il problema è che io ad esempio mi trovo subito da qua a qua $-7/3$ allora io non ho capito se è una distrazione, se non sai moltiplicare o dividere due frazioni tra loro, allora io ti consiglierei di farlo perché tanto per bene tuo, se il risultato è corretto io non dico nulla, ma se non va bene, io non so trovar l'errore! E' il solito discorso... E' logico che quando andrete, negli anni successivi queste cose si fanno in automatico, ma io adesso vorrei un attimo controllare perché gli errori possono essere di vario tipo.
Allora secondo voi quand'è che il risultato non è un polinomio? Mi fate un esempio? Mi sostituite qua il divisore qua con qualcosa in modo che il risultato non sia un polinomio?!?
R:$-3/5x^7$
PA:x^7 Già x^7 qua cosa vado a fare? Vado a fare x^5 meno x^7 mi viene x^{-2} esponente non intero, intero negativo, scusate! Ok? E quindi quello ci si ferma e si dice che quello non è un monomio.State attenti in quell'esercizio che mi avevate sottoposto l'altro giorno, vi ricordate che l'avevamo corretto e non era un monomio, quello lì è una frazione algebrica. Te lo faccio vedere. Guarda! Siamo non nelle frazioni algebriche, siamo nei monomi. (esercizio proposto dal libro, espressione con monomi e il prof dice che non lo sono, e dà cmq come risultato un monomio)

$$[(4/5abz^2)^0 \cdot (-a^3b^2z^4)]^2 : (1/2a^3b^2z^4) : [(-az^2)^2 : b] \textit{ risultato } (2ab^3)$$

(non è un'espressione tra monomi perché $[(-az^2)^2 : b]$ non si può fare!) Questo $[(-az^2)^2 : b]$ non è un monomio e mi dà comunque risultato un monomio, secondo me questo è un errore gravissimo. Fossimo nelle frazioni algebriche...
R: Forse lo ha fatto apposta
PA: No no! Se no avrebbe scritto: Attenzione! Se come risultato ti mette un monomio... perché la doppia divisione fa ovviamente andar su...
Allora... Moltiplicazione tra polinomi.
Ecco nel caso in cui il risultato non è un polinomio, è una frazione algebrica, è una somma di frazioni algebriche che si vedranno più avanti.
Quindi... Moltiplicazione tra polinomi
Secondo voi come si fa a moltiplicare due polinomi? Francesco...
R: Moltiplico i termini di ciascun polinomio...
PA: Moltiplico ciascun...
R: Moltiplico ciascun termine del primo polinomio per ciascun termine del secondo.
PA: Quindi se il primo polinomio ha 7 termini e il secondo ne ha 3, il polinomio prodotto quanti termini ha?
R: Cioè dipende da...
PA: Non ho mica detto in forma normale. Una volta che lo hai esteso...
R: 21
PA: 21! Ovviamente non sarà in forma normale e quindi potrà avere da 21 termini a zero termini perché potrebbe semplificarsi tutto!
Allora... E' il polinomio in cui ogni termine è il prodotto tra ciascun termine del primo polinomio e ciascun termine del secondo polinomio. Allora cominciamo ovviamente con: Semplifica le seguenti espressioni, dopo questo ci fermiamo e non andiamo più avanti.

$$(x^2 - 3x + 2) \cdot (2x - 5)$$

Allora... Semplifica la seguente espressione e vediamo dopo anche di classificare anche il risultato. Il primo è un trinomio e devo controllare ovviamente,

Riccardo, se all'interno di ciascuna parentesi il polinomio è ridotto in forma normale,lo è?
R: Sì
PA: Bene! Comincio a fare tutti i possibili casi. Allora adesso faccio il passaggio che salteremo dopo, però voi lo fate, per cortesia, perché quando studierete la regola, dall'esempio che vi faccio capirete meglio. Allora faccio

$$= x^2 \cdot (2x) + x^2 \cdot (-5) - 3x \cdot (2x) - 3x \cdot (-5) + 2 \cdot (2x) + 2 \cdot (-5) =$$

Allora questo qua lo potremo saltare, questo passaggio e quindi passare subito al terzo, però vi consiglio di scriverlo perché questo qua è proprio la applicazione della regola dell'algoritmo risolutivo. Allora

$$= 2x^3 - 5x^2 - 6x^2 + 15x + 4x - 10 =$$

Come ci aveva detto Francesco, abbiamo in questo caso 3 per 2, 6 termini, però il polinomio non è ridotto in forma normale, allora andiamo un attimo a cercare di scrivere il risultato in forma normale, la prassi per non dimenticarsi delle potenze è di ordinarli in modo decrescente, così siamo sicuri che non perdiamo nulla
R: Già fatto!
PA: Allora è quasi già fatto. Sono vicini, vedete, questi qua sono ordinati in modo decrescente, quando avviene ciò, il risultato è molto facile da semplificare perché quelli vicini sono diciamo semplificabili, infatti

$$= 2x^3 - 11x^2 + 19x - 10$$

Classificazione, Viola
R: Quadrinomio non omogeneo ed è ordinato...
PA: Diciamo di che grado è
R: Di terzo grado ed è ordinato e completo rispetto alla lettera
PA: Ordinato in modo?

R: Decrescente
PA: Ed è completo rispetto alla x. Secondo esempio

$$(a^2 + 2a - 4a + 2a^2)(ab - b + 3ab - 4b)$$

Allora, nota bene: prima di eseguire la moltiplicazione, verificare se i polinomi fattori sono in forma normale. Mi raccomando! Siccome non lo sono, li portiamo in forma normale. Riccardo, perché è consigliabile, se non diciamo quasi obbligatorio fare ciò? Me lo spieghi il motivo?
R: Perché se no dovresti fare troppi termini
PA: Sì, ho capito, alla fine ci verrebbero fuori, se noi non semplificassimo quanti termini?
R: 16
PA: 16, ovviamente cosa succede? Aumenta (tutti) la probabilità di errore. E' logico che il calcolatore non ragiona come noi! Lui fa miliardi di operazioni in pochissimo tempo, lui non ha problemi di tempo e di errori, noi invece siamo esseri umani e sbagliamo! E quindi ecco il motivo, per cui si preferisce... Facciamoci furbi, quindi

$$(3a^2 - 2a)(4ab - 5b) =$$

Notate che abbiamo notevolmente abbassato il numero di calcoli, di prodotti tra monomi. Riusciamo adesso a farlo senza scrivere l'operazione, ma cioè scrivendo già il risultato? Perché adesso basterà moltiplicare questo monomio per questo monomio ottenendo

$$= 12a^3b - 15a^2b - 8a^2b + 10ab =$$

allora osserviamo che ci sono 2 termini simili e risultato, che adesso Viola ci classifica è questo

$$= 12a^3b - 23a^2b + 10ab$$

Allora Viola...

R: E' un trinomio di quarto grado, non omogeneo...

PA: Poi, cominciamo rispetto alla lettera a

R: Completo e ordinato in modo decrescente.

PA: Viola mi dai la definizione di polinomio completo?

R: Ah no! Non è completo. Quando sono presenti tutti gli esponenti della lettera, ma qua non ci sono.

PA: Cosa manca?

R: a^2

PA: Quindi dal grado zero al grado massimo. Ordinato in modo?

R: Decrescente e non completo rispetto alla lettera a. E non ordinato e non completo rispetto alla lettera b.

PA: Va bene!

$$(2x-1)(3-x)(5x+3) =$$

PA: Viola cosa mi consigli?

R: Di iniziare a moltiplicare $2x$ per 3

PA: No, cosa vuol dire $2x$ per 3, è ovvio! Qua cosa abbiamo? Un prodotto di 3 polinomi, giusto? Allora che cosa facciamo? Facciamo ad esempio Viola non so ascoltami un attimo! Faccio subito $2x$ per 3 per $-5x$ poi magari... cioè moltiplico tutti i primi??? Quindi quale proprietà applico, Viola? Quando ho un prodotto di almeno 3 fattori? Allora.. Associativa! Quindi... Attenzione, che quando faremo i prodotti notevoli bisognerà starci attenti, qua è ininfluente partire da questo prodotto (1° per 2°) o da questo (2° per 3°) o magari applicando la commutativa il primo per il terzo. Siccome diciamo siamo generalmente abituati a leggere da sinistra verso destra, ci occupiamo del primo prodotto, leggendolo da sinistra verso destra. E quindi

$$(6x-2x^2-3+x)(5x+3)$$

Attenzione quello è il risultato diciamo parziale.

R: Ci va la tonda?

PA: Eh si, perché se noi non mettiamo la tonda...
R: Facevo x per...
PA: Esatto, perché se noi omettiamo alcune tonde moltiplichiamo solamente alcuni. Diventa una moltiplicazione magari o tra due monomi o tra un polinomio e un monomio. L'errore che non dobbiamo fare è di iniziare a moltiplicare. Attenzione forma normale! Non è in forma normale il primo! Allora siccome diciamo ha una sola lettera, ordiniamolo! Così ripeto non perdiamo per strada dei monomi!

$$(-2x^2 + 7x - 3)(5x + 3) =$$
$$= -10x^3 - 6x^2 + 35x^2 + 21x - 15x - 9 =$$

Vedete che sono vicini quelli simili?!?! Sono furbate, sono delle strategie di ordinarlo, così quelli vicini sono simili e sono sicuro di non sbagliare. Nessuno vieta di non ordinarlo, perché tanto viene lo stesso. Però ripeto, se possiamo diminuire la possibilità di errore, perché non farlo?? Allora qua viene

$$= -10x^3 + 29x^2 + 6x - 9$$

Cioè la cosa si potrà applicare iterativamente se ne ho più di 3. Stiamo attenti che quando avremo i prodotti notevoli bisognerà un attimo guardare se moltiplicare davvero il primo per il secondo, o fare prima il secondo per il terzo,per applicare i prodotti notevoli, quindi stiamoci attenti quando avremo quelli magari... E' come quando si applicano le proprietà delle potenze che è meglio applicarle stando attenti all'ordine. Allora...

$$(a^n + 3)(a^n - 8) \; con \; n \in \mathbb{N}^+$$

Domanda: bisogna applicare le proprietà delle potenze, in questo caso io cosa devo fare? Devo fare a^n per a^n. Allora a^n per a^n...
R: a^{2n}
PA: Ecco, allora è a^{2n}, molto bene, perché sarebbe a^{n+n} supponendo di dire

di applicare la proprietà del prodotto di potenze con la stessa base, in questo caso avrebbero anche lo stesso esponente. Avete detto giusto! State attenti a non scrivere a^{n^2} perché devo... in questo caso, è il prodotto che ha per base la stessa base, per esponenti la somma degli esponenti. Poi abbiamo

$$= a^{2n} - 8a^n + 3a^n - 24 =$$

Allora a^{2n}, questi due sono simili

$$= a^{2n} - 5a^n - 24$$

Allora... Classificazione. State attenti! $a^{2n} - 5a^n - 24$, n appartiene ad $\mathbb{N}^+$
Facciamo un attimo alcuni esempi. Allora qual è il minimo valore che può assumere n? (tutti) 1.
Se $n = 1$ ottengo il trinomio... ditemi (tutti)

$$a^2 - 5a - 24$$

Va bene.
Se $n = 2$ (tutti)

$$a^4 - 5a^2 - 24$$

Bene. Se facciamo $n = 3$, e poi ci fermiamo... (tutti)

$$a^6 - 5a^3 - 24$$

Bene! Domanda! Secondo voi, guardando un po' come stanno andando le cose, se $n = 1$, è un polinomio, è un trinomio di secondo grado, non omogeneo, (tutti) ordinato in modo decrescente e completo. Bene! Se $n = 2$, se $n = 3$, se $n = 4$ allora... Se $n = 2$ è un trinomio di (tutti) quarto grado, non omogeneo o omogeneo? (tutti) non omogeneo, ordinato in modo decrescente, ma non completo. Quindi attenzione, quando andiamo a fare la classificazione,visto che per $n = 1$ è anche come? (tutti) completo, ma da n da 2 in poi non lo è allora bisogna distinguere 2 casi:

- se $n = 1$ allora trinomio di secondo grado, non omogeneo, ordinato in modo decrescente e completo, direi no rispetto alla...;
- se invece $n \geq 2$ è un trinomio di che grado??
  R: Quarto
  PA: Quarto, beh dipende! Se $n = 2$ è di quarto, se $n = 50$ è di grado 100. Quindi di che grado sarà? Domanda: che grado ha questo monomio (a^{2n}) quando n è generico? (tutti) $2n$. Che grado ha questo monomio ($-5a^n$)?(tutti) n. Questo (-24)? (tutti) zero. Bene! Come faccio a trovare il massimo? Seh... Come faccio a trovare il grado del trinomio?
  R: (tutti) Faccio il massimo.
  PA: Il massimo tra $2n$, n e zero?
  R: (tutti) $2n$. PA: Siam d'accordo tutti quindi che è di grado $2n$?. Allora il trinomio di grado $2n$, domanda: anche se n sarà uno dei valori che non abbiamo qua, secondo voi è omogeneo o no? non lo sarà mai omogeneo, quindi non omogeneo, é ordinato in modo decrescente anche se n... ordinato in modo decrescente ma stavolta non completo, perché lo salto.

E' completo solo se $n = 1$.
Allora, facciamo questa espressione, è molto semplice, ma voglio vedere come affrontate un passaggio (gestione del segno meno). Abbiamo praticamente finito la parte del compito.

$$2(x + 1)(y - 3) - 3(x - 2)(y + 1) =$$

Viola vieni alla lavagna. Viola adesso tu mi spieghi come pensi di semplificare questa espressione
R: Prima moltiplico questo (scrive):

$$= 2x + 2(y - 3) - 3x + 6(y + 1) =$$

PA: Ferma Viola. Ah... sta modificando
R: $(2x+2)(y-3)(-3x+6)(y+1)$
PA: Allora, io analizzerei la prima cosa che avevi fatto. Allora il primo passaggio, Viola, quindi facciamo fino a qua ($(2x+2)(y-3)$), direi che ci siamo. Allora, Viola aveva dimenticato le parentesi, l'omettere le parentesi era un errore, perché? Perché in tal caso moltiplicavamo solo il 2 per questo ($(y-3)$), giusto? Bene! Poi cosa ha fatto Viola? Ha fatto entrare il -3, giustamente dice, facendo $-3x+6$. Ecco! Purtroppo c'è un errore qua! Perché lei mi ha trasformato adesso in un prodotto tra quattro polinomi. Dov'è l'errore?
R: Il meno va fuori
PA: Ah me va bene anche così se qua mettiamo il segno neutro +: Mi può andar bene, oppure come ha detto qualcuno, lasciamo il meno fuori, cioè...
R: $(2x+2)(y-3)-(3x-6)(y+1)$.
PA: Va bene! Allora domanda: avete capito che qua diventa più, meno.. Domanda: alla medie vi hanno insegnato prima quale metodo? Nessuno dei due... Quello di destra... A me va bene tutto, basta che si metta o il segno più o il segno meno. Viola vai avanti con quello che vuoi.
R: Se il -3 fosse stato tra parentesi avrei dovuto moltiplicare
PA: Bravo! Certo!
R: (Viola continua a fare l'esercizio alla lavagna) $= -xy - 9x + 8y$
PA: Io non salterei inizialmente tanto i passaggi. Siccome qui abbiamo due lettere uno li ordina come vuole. Viola me lo classifichi per come lo hai scritto tu. State attenti che voi potrete averlo scritto in altro ordine.
R: E' un trinomio, di secondo grado, non omogeneo.
PA: Fin qua tutti dovete avere diciamo la stessa risposta, poi vediamo adesso se l'avete scritto in modo diverso, in ordine diverso, non è detto che...
R: Ordinato e non completo rispetto alla x
PA: Ordinato?
Guarda un attimo... Ascolta gli esponenti della x mi dici come sono?
R: Cioè si ripetono, quindi non è ordinato

PA: Eh eh... Secondo la nostra definizione di ordine, che è molto restrittiva, devono essere tutti diversi gli esponenti!
R: Non ordinato e non completo..
PA: Non completo, dici... Grado 1, grado 1, e allora?
R: Completo rispetto alla x, poi... Non ordinato e completo rispetto alla y
PA: Va bene. Allora Viola adesso ti faccio qualche domanda di geometria. Anzi prima ti detto io l'esercizio che c'era da fare per casa, era quello senza soluzione

$$-3a^2b(-1/4a^n)^2 - (-3/4a^nb)^2a^2 : b + (3/2a^n)^2a^2b$$

bene... ci sono le varie possibilità, con $n \in \mathbb{N}^+$, Viola dove potremmo mettere le parentesi lo facciamo, siccome la consegna non diceva applicare dove possibile le proprietà delle potenze, allora puoi fare quello che vuoi, non vi obbligo, se no se vi obbligavo lo dovevate fare. State attenti a una cosa, fermati Viola e ascoltate tutti la domanda che faccio a Viola: tu non ti puoi già fermare e dire che questo non può essere un monomio perché c'è quella divisione lì $(a^2 : b)$, ti ricordi quello del libro?
R: cioè sì
PA: Quindi ti puoi già fermare e dire: quello non è monomio! Chiedo: siete tutti d'accordo?? R: No no.
PA: Perché io devo eseguire le operazioni nell'ordine e quindi chissà cosa viene qua! Chiaro? State attenti!!!
R: Se ci fosse stata la parentesi $(a^2 : b)$ non è un monomio...
PA: Sì, in quel caso come nel libro... si hai ragione...
(proseguendo nei calcoli alla lavagna, Viola risolve così il prodotto

$$-3/16a^2 \cdot a^{2n} \cdot b$$

Viola scrive

$$-3/16a^{4n}b)$$

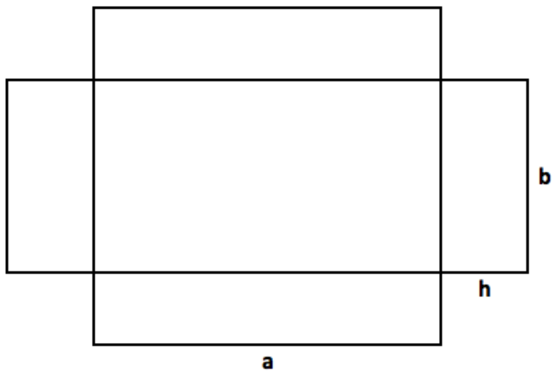
PA: Facciamo un Nota Bene tutti qui! Allora Viola, prodotto di due potenze con la stessa base, mi dici un attimo che cosa ottieni? Quella potenza che ha... dimmi prima la regola.
R: Quella potenza che ha come base la stessa base, come esponente la somma degli esponenti
PA: E tu cosa hai fatto invece lì?? Mi raccomando!! Questo lo fate sempre... Non va fatto il prodotto, è la somma degli esponenti, stateci attenti! Quindi Viola?? $2 + 2n$
(continuando a risolvere, il risultato è $3/2a^{2+2n}b$) PA: Il risultato dell'espressione: è un monomio?
R: Sì
PA: E' un monomio con coefficiente $-3/2$?
R: No
PA: E' un monomio di grado $2n + 3$?
R: Sì
PA: Proviamo a calcolarlo. Come si fa a calcolare il grado di quel monomio??
R: Dobbiamo sommare i gradi delle lettere
PA: Gli esponenti...
R: Gli esponenti delle lettere, quindi 2 più $2n$ più 1
P: Quanto fa, Viola, 2 più $2n$ più 1?
R: $3 + 2n$
PA: Terza risposta (dell'esercizio). Purtroppo c'era l'inghippo perché la quarta era $3/2a^{4n}b$ che il 90% ha segnato perché purtroppo $2 + 2n$ è $4n$, invece no!

Appendice B

Professore B

B.1 Prima lezione

PB: Dunque avete visto lavorando sui monomi, che cosa succedeva? Succedeva che, quando noi sommiamo i monomi, possiamo farlo soltanto in un caso: quando sono simili. Allora uno dice: quando non sono simili che cosa succede? Per esempio, se voi avete, riallacciandomi a quell'esercizio che avevate per casa che mi hanno appena fatto correggere, il 350, no? Dove c'è il rettangolo formato da quadrati...
Se voi avete una scatola, senza coperchio, e la stendete su un piano (disegnando alla lavagna) questa sarebbe la base della scatola e questi sarebbero i lati della scatola. State immaginando una scatola aperta, spiaccicata.. Allora i lati si chiameranno a e b e l'altezza della scatola la chiamiamo h.



Allora se io voglio trovare la superficie di questa scatola dovrò fare l'area di tutti questi rettangoli e quindi l'area del fondo della scatola è ab, l'area di questi due lati lunghi sarà data da ah per 2 però, e l'area dei due lati corti sarà bh 2 volte. Ora come vedete, quest'oggetto che abbiamo scritto (alla lavagna) $ab+2ah+2bh$ è una somma di monomi, ma siccome non sono simili è una somma che con le conoscenze attuali non possiamo fare. Ok? Allora quest'oggetto nuovo si chiama polinomio. Quindi che cos'è un polinomio?
R: Una somma tra due monomi non simili.
PB: Tra due è un po' riduttivo. E' una somma, con somma vi ricordo che naturalmente quando diciamo somma intendiamo sempre algebrica, quindi addizione algebrica, di monomi...
R: ... non simili
PB: Sì, diciamo di monomi. Se ce ne fossero in mezzo alcuni simili. Per esempio se io devo fare (alla lavagna) $ab + 2ab + 2bh$, cosa faccio? Beh quelli simili li sommo tra loro e quindi mi riconduco sempre a un polinomio in cui i monomi non sono simili (alla lavagna, proseguendo) $= 3ab + 2bh$.
I monomi che costituiscono il nostro polinomio si chiamano i termini, quindi si dice i termini del polinomio non sono simili. Questo ragionamento però vi fa anche pensare ad un'altra cosa, che il monomio non è altro che un particolarissimo polinomio, nel quale tutti i termini sono simili, io li ho sommati, e mi è venuto alla fine un monomio solo, un termine solo. Ok? Quindi i monomi li possiamo considerare come un caso particolare dei polinomi. Va

bene?
Allora quindi, quando noi abbiamo parlato del monomio vi ricordate che abbiamo fatto la distinzione tra il monomio, così com'è, tout court, e il monomio in forma normale. E qui anche la stessa cosa, (dalla lavagna) questo $ab + 2ab + 2bh$ è un polinomio, questo $3ab + 2bh$ è il polinomio in forma normale, cioè in cui tutti i termini non sono simili, lo abbiamo sistemato. D'accordo? Quindi d'ora in poi noi diamo per scontato di scriverlo sempre in forma normale. Se ci fossero dei termini simili li mettiamo assieme. Ok?
Allora un po' di nomenclatura: (alla lavagna)
il polinomio nullo è quello i cui termini hanno tutti coefficiente (tutti) zero $0ab + 0x^2$, questo sarebbe il polinomio nullo, poi il binomio si ha quando i termini sono (tutti) due, il trinomio quando sono tre e il quadrinomio quando sono quattro, non si dice pentanomio o esanomio, si dice polinomio a 5 termini, a 6 termini...
R: Si può dire anche tetanomio
PB: anche icosanomio allora... R: cosa sarebbe?
PB: quello con 20...
Un po' di nomenclatura, quindi, il grado. Allora attenzione qua a non fare dei pasticci. Anche qui ci sono due tipi di grado come per il monomio: c'è il grado rispetto ad una lettera e il grado senza nessun aggettivo che sarebbe il grado complessivo. Prendiamo questo polinomio (alla lavagna) $3/2x^2y^3 - 1/4xy^7 + 5z$. Allora io vi posso chiedere qual è il grado rispetto alla lettera, e vi dico la lettera, rispetto alla lettera x per esempio. Allora voi dovete dirmi il grado massimo, l'esponente massimo che ha quella lettera. Quindi rispetto alla lettera x il grado è 2, va bene? Se vi chiedo il grado rispetto alla y mi dite 7, il grado rispetto a z ovviamente è 1, e il grado rispetto a w ovviamente è zero perché w non c'è. Ok? Quello è il grado rispetto ad una lettera, quindi è l'esponente massimo. Il grado complessivo o semplicemente grado, si fa prendendo il massimo tra i gradi dei termini, quindi cosa vuol dire... (alla lavagna, riprendendo il polinomio scritto prima) $3/2x^2y^3 - 1/4xy^7 + 5z$ prendiamo questo primo termine, questo primo

monomio, che grado ha?
R: 5
PB: Prendiamo quest'altro che grado ha?
R: 8
PB: Questo che grado ha?
R:1
PB: Qual è il grado massimo? 8. Questo è un polinomio di grado 8. Ok? Tutto chiaro? Quindi mi raccomando è il massimo dei gradi dei termini.
R: Quindi questo è il grado complessivo?
PB: Che poi non si dice complessivo si dice grado, qual è il grado del polinomio? Se no ti dovrei dire qual è il grado rispetto alla lettera? Ok?
Allora poi che altro? Un polinomio si dice omogeneo quando tutti i suoi termini hanno lo stesso grado. Per esempio (alla lavagna) $2a^2b^2 + 3/2ab^3$ è omogeneo di grado (tutti) 4. Ci siete?
R: No, non ho capito!
PB: Omogeneo se i termini hanno tutti lo stesso grado. Omo-geneo: Uguale Grado! Se io ci metto qua $+1/3 \ldots 2a^2b^2 + 3/2ab^3 + 1/3$
R: No
PB: No perché questo 1/3 ha grado?
R: Zero
PB: Zero, quindi non è omogeneo. Quindi via (e lo cancella!)
Poi che altro... Un polinomio può essere ordinato, ordinato bisogna dire in che senso, cioè se in senso crescente o decrescente, e rispetto a quale lettera. Vuol dire che i suoi termini sono ordinati in senso crescente o decrescente in base a quella lettera. Per esempio quello che ho appena scritto qua $2a^2b^2 + 3/2ab^3$ rispetto alla lettera a è ordinato in senso decrescente, rispetto alla lettera b è ordinato in senso crescente. Va bene? Quindi ordinato vuol dire che i suoi termini li metto in ordine rispetto a quello che viene richiesto: in un senso, nell'altro con la lettera che viene richiesta. Poi un polinomio infine può essere anche completo rispetto ad una lettera, sempre, se a partire dal grado massimo di quella lettera ci sono tutti i termini fino al grado

zero. Per esempio questo $2a^2b^2 + 3/2ab^3$, parliamo della lettera a, c'è a^2, a^1 ma non c'è a^0, se ci fosse stato $1/3$ allora sì, perché qui è sottinteso un a^0. D'accordo? Quindi sarebbe stato ordinato rispetto ad a ed anche completo. Due caratteristiche, va bene? Vi torna la cosa? Rispetto alla b c'è b^3, c'è b^2, anche se $1/3$ ci fosse rimasto questo è un b^0 ma mi manca un b^1, quindi non sarebbe stato completo, ok?
R: Prof, per essere completo tutte le lettere devono essere complete o basta una?
PB: No, si dice rispetto a quale lettera deve essere, tu dici una lettera e in base a quella fai...
R: Se ho un polinomio che ha a^7 per essere completo deve avere anche $a^6, a^5, a^4, \ldots$
PB: Tutto da 7 fino a 0. Ok? Dal grado massimo che ha quella lettera, fino allo zero.
Allora un polinomio come questo $a^3b + a^2b^2 + ab^3$, posso evitare di mettere i coefficienti perché tanto quello che mi interessa è la parte letterale... Ecco un polinomio fatto così, è omogeneo, di grado (tutti) 4, poi rispetto alla lettera a è ordinato in senso (tutti) decrescente, rispetto alla lettera b (tutti) crescente, non è completo perché rispetto ad a c'ha a^3, a^2, a^1, manca a^0 e rispetto a b neanche perché c'è b, b^2, b^3 ma manca b^0. Va bene?
Allora due polinomi sono opposti, quando? Immaginate...
R: Hanno la stessa parte letterale, ma...
PB: Sì, con meno parole...
R: Hanno lo stesso coefficiente numerico, no... hanno opposto coefficiente numerico...
PB: Allora (alla lavagna) $2x - y$ è un polinomio, l'opposto di questo chi è?
R: $-2x + y$
PB: Perché, come lo scopro che sono l'opposto? Vado a vedere i coefficienti, quindi questo secondo polinomio che ho scritto è l'opposto del primo perché i suoi termini hanno coefficienti opposti, ok? Va bene, allora...
Un polinomio lo possiamo considerare come abbiamo detto parlando dei mo-

nomi, sono tutte espressioni letterali, no? I monomi, i polinomi... Quindi il polinomio lo possiamo considerare come una funzione delle lettere che vi compaiono, se poi voi vedrete scrivere così: $P(x) = x^2 + 3x - 2$ questo è un polinomio, scrivendo $P(x)$ che cosa vogliamo dire? Vogliamo dire che questa è funzione, cioè dipende dal valore che noi diamo alla x, si può scrivere anche... il vostro libro usa questa scrittura, ma potete scrivere anche $f(x) = x^2 + 3x - 2$, se volete mettere in evidenza il fatto che è una funzione e quindi che cosa vuol dire che è una funzione, vuol dire che è una funzione che prende x e lo trasforma in quel modo lì $f : x \to x^2 + 3x - 2$. Ok? Allora vi ricordate che cosa vuol dire $f(1)$?(tutti)Vuol dire che al posto di x ci metto 1, quindi mi farò il calcolo e sarà $f(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 2$ e mi faccio il calcolo, e quindi cosa mi vien fuori qua? non voglio sapere il risultato, ma viene fuori comunque un... (tutti) un numero! Ok?
Allora il nostro polinomio noi lo consideriamo una funzione delle variabili che vi compaiono, qui ce n'è una sola, potevo anche scrivervi un polinomio con due variabili, quello di prima $P(x, y) = x - 2y$ è un polinomio in due variabili, se io lo devo calcolare dovrò darvi un valore per la x e (tutti) uno per la y, allora il valore che ha il polinomio quando voi al posto delle variabili mettete un numero, per esempio nel primo abbiamo messo 1, $P(1)$ o qua se mettiamo due valori $P(1, 0)$ questo che dà come risultato un numero si chiama valore del polinomio nel punto 1, (1,0) o quello che è. Allora valore di un polinomio in un punto è un...
R: Numero
PB: Numero, esattamente, bravo... Che si ottiene facendo che cosa? Come lo ottengo questo numero? Mettendo al posto delle variabili che ho, una, due o centomila...
R: Dei numeri...
PB: Dei numeri che mi vengono assegnati. Ok? Questo perché è una funzione.
Allora in generale se io scrivo $P(a)$ questo significa (scrive alla lavagna) valore del polinomio, che naturalmente intendo come $P(x)$ nel punto a. Ok?

Ora che cosa può succedere che a volte questo numerino che viene fuori qui, $P(a) = 0$ è zero. Qui veniva 2, qui 1, può succedere che venga zero.
Prendete questo polinomio $P(x) = 2x^2 + 5x - 12$ e calcolate $P(3/2)$. Forza, fate i conti... Vi viene zero?
Scusate eh... $P(3/2) = 2(3/2)^2 + 5(3/2) - 12 = 2(9/4) + 15/2 - 12 = 0$ Ci siete? Allora abbiamo trovato uno zero di questo polinomio. Come si faccia a trovare, questo poi è un argomento successivo, ok? Mentre se voi fate, che ne so $P(-1)$, fa? (quasi tutti) -15, ok? ci siete? Allora ci sono dei valori che mi danno uno zero e altri valori che non me lo danno. Quindi se (alla lavagna) $P(a) = 0$ allora si dice che a è uno zero del polinomio. Ok?
R: In quel caso si direbbe $3/2$ è uno zero...
PB: E' uno zero di quel polinomio lì, esatto!
Allora, poi un'altra cosa che vi dico... Un polinomio nella lettera x ordinato di grado n pensateci un attimo, quello che ho appena cancellato, era un polinomio nella x di grado? (tutti) 2, lo avevo anche ordinato, ed era anche completo. Quanti termini ha?
R: 3
PB: Allora un polinomio di grado n, ordinato e completo, quanti termini avrà?
R:(quasi tutti) infiniti!
PB: Non ho capito, scusate?!?!
R: Di grado n avrà $n + 1$ termini
PB: Allora faremo il primo coefficiente elevato alla n, il secondo coefficiente sarà elevato a... (la prof dice coefficiente elevato, ma sbaglia... voleva dire esponente?!?)
R: (alcuni) $n + 1$,
PB: no!
R: $n - 1$
PB: $n - 1$ stiamo andando in giù... Poi quello dopo cosa si scriverà? Come coefficiente... a_2x^{n-2}, vi torna la cosa?
(alla lavagna scrive $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a^2x^{n-2} + \ldots$ E quindi andiamo

in fondo, il penultimo che sarà?
R: (confusione)
PB: Il penultimo che coefficiente avrà?
R: (confusione)
PB: Scusa io dicevo il pedice... la x ok... e qui (pedice) ci metterò... Allora guardate un attimo, prendete questo esponente $n-1$ gli sommate questo (1), fa?
R: n
PB: E così gli altri... Allora il totale deve fare n. Qui c'è 1...
R: $n-1$
PB: Ok? L'ultimo c'avrà x^0, non scrivo x,
R: Scrivo a alla n
PB: Ma non "alla" è un pedice!
(continuando a scrivere alla lavagna) $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a^2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$)
Ce l'abbiamo fatta, ok?? Questa è la forma generale di un polinomio. Quello di prima che aveva 3 termini, vedete che è fatto allo stesso modo?? Cioè a parte i nomi che ho dato a questi (i coefficienti) voi avete dei numeri, questi a sono dei numeri, d'accordo?
Allora solo una cosa velocissima... Voi dovete sommare due polinomi. Prendiamo 2 polinomi, facciamo una cosa veloce.

$$(2a^2 - 3x) + (-5a^2 + x)$$

Questi sono due polinomi, quella parentesi che ho messo è assolutamente inutile perché per sommare siccome sono formati da monomi, noi facciamo una somma tra monomi, cosa che sappiamo già fare no? E quindi sommiamo fra di loro
R: $2a^2 - 5a^2$
PB: Sì, cioè quelli simili, per cui questa parentesi non la vedrete perché non la metteremo mai più, sommeremo i termini simili, quindi le a^2 mi danno $-3a^2$ e le x mi danno $-2x$. Allora quindi noi non le scriveremo quelle parentesi,

ma lo scriveremo sempre in questo modo

$$2a^2 - 3x + -5a^2 + x$$

(la prof non toglie subito il $+$)
quindi la somma di polinomi è sempre un (tutti) polinomio, invece la somma di monomi non si può fare sempre, la somma di polinomi sì. E se invece della somma io volessi fare una differenza, allora mi ci vuole la parentesi

$$2a^2 - 3x - (-5a^2 + x)$$

e come sempre la differenza vuol dire che io sommo il primo polinomio con l'opposto del secondo quindi immaginiamo il + questo $-5a^2+x$ lo trasformiamo nel suo (tutti) opposto quindi i segni cambiano $5a^2 - x$ dopodiché questo + come sempre (tutti) scompare e quindi non è altro che una semplice somma di monomi, per cui la sappiamo fare benissimo

$$(\dots)(5a^2 - x)$$

ok?

B.2 Seconda lezione

PB: Siamo a pag. 87, e dobbiamo fare le altre operazioni. Abbiamo fatto l'addizione algebrica, cioè la somma e la sottrazione, e adesso facciamo le altre operazioni, quindi cominciamo dalla moltiplicazione e dalla divisione e cominciamo a moltiplicare o a dividere il polinomio, perché il soggetto è il polinomio, per un monomio. Ok?
Allora, moltiplicazione e divisione di un polinomio per un monomio.
Allora supponiamo di avere questo monomio (alla lavagna) che moltiplica quest'altro polinomio $2x(x^2 - xy + 1/2ax)$. Allora che cosa facciamo? Utilizziamo la proprietà distributiva, ricordate la proprietà distributiva? La scrivo

qua sotto $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, adesso ho messo in mezzo il puntino del prodotto per evidenziare quello che stiamo facendo, no? Questa è la proprietà distributiva e ci troviamo esattamente in questa situazione: qua c'è una somma, qui ci sono 3 termini, e quindi che cosa faremo? Moltiplicheremo il monomio per ognuno dei termini del polinomio (fa le freccette che collegano il monomio con ogni termine del polinomio), quindi se il polinomio ha 3 termini ne dovremo trovare 3 anche noi. Ora, queste moltiplicazioni le sapete fare perché sono moltiplicazioni tra un monomio e un altro monomio, d'accordo? Quindi è tutta roba che sappiamo fare, calcolatelo pure, non avete mica bisogno di niente!
Quindi vi viene $2x^3 + 2x^2y - ax^2$, va bene? Ecco, di solito, quando si moltiplica un monomio per un polinomio il monomio viene messo davanti, ma la cosa, cioè, non è una regola, posso metterlo anche in fondo. Il vostro libro vi fa un esempio in cui questo succede: $(x - 2y)2ab$ vuol dire che questo monomio $2ab$ lo devo moltiplicare (e fa le frecce) sia per uno che per l'altro, d'accordo? Anche se è scritto dopo non cambia nulla! Va bene? Fatemi il calcolo per favore. Essendo il polinomio formato da 2 termini il risultato che ottengo sarà formato da 2 termini, d'accordo? Queste son tutte robette semplici. Ci siete? Quindi mi viene $2abx - 4aby$. Quando scrivete i monomi cercate di mettere le lettere in ordine alfabetico perché vi aiuta. Avete capito perché vi aiuta o no?
R: Per riconoscere quelli simili
PB: Per riconoscere quelli simili, esattamente. Se io ho $2ab$ e poi da un'altra parte ho $-7/2ba$ potrei non cogliere al volo che sono simili, se invece voi li scrivete tutti e due ab lo cogliete al volo che sono simili. Ok? Quindi vi aiuta, non è un errore, ma vi aiuta.
Allora, dopo aver fatto la moltiplicazione proviamo a fare una divisione. Proviamo a fare questo: dunque avete un polinomio diviso per un monomio. Proviamo a fare questo (dal libro) $(9x^2y - 18xy^2 + 2xy)$ diviso, e qui ci vuole la parentesi, vi ho già detto che quando si fa la divisione la parentesi ci vuole sempre qui poi a maggior ragione perché ho un meno

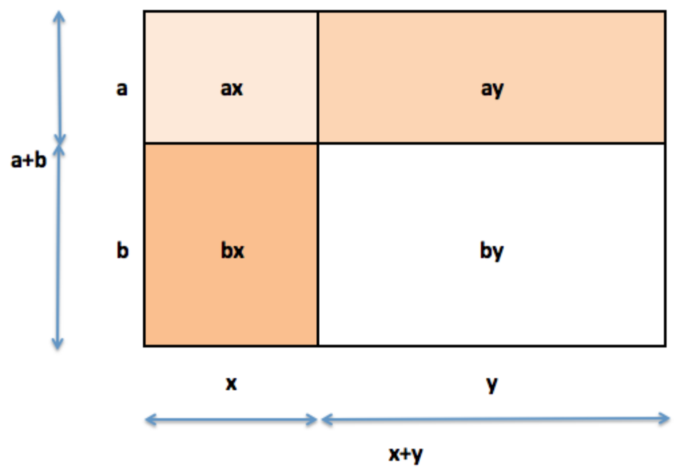
$3xy$ col segno negativo, ma anche fosse stato positivo la parentesi ci vuole. $(9x^2y - 18xy^2 + 2xy) : (-3xy)$. Allora usiamo la proprietà distributiva che vale anche per la divisione e quindi facciamo la divisione di tutti i termini per il monomio che abbiamo. Ovviamente quindi noi stiamo dividendo un monomio per un altro monomio: questa divisione si deve poter fare, altrimenti tutta la divisione la lasceremo lì, non si fa, d'accordo? Quindi $9x^2y$ diviso $(-3xy)$ si può fare, $(-18xy^2)$ si può fare, quindi appurato questo facciamo tutti i calcoli, ok?
Quindi il primo termine che viene sarà coefficiente? (tutti) -3 e x, d'accordo? Poi il secondo termine sarà (tutti) $+6y$ e il terzo temine sarà (tutti) $-2/3$ e basta! Allora se uno volesse provare, perché non si fida di quello che ha fatto, vuol provare se ha fatto bene, cosa fa? Moltiplica questo polinomio risultato, quoziente, per questo polinomio e deve risultare il dividendo. Non fatelo, però nel caso uno avesse dei dubbi... Provate quest'altra:

$$(10a^2bx + 25ab - 15a^3b^2 + 5ab^2) : (5ab)$$

Allora si può fare? Dunque il primo si può fare, il secondo anche, il terzo pure e il quarto anche, quindi la divisione si può fare! Quindi uguale...
R: (tutti) $2ax + 5 - 3a^2b + b$
PB: Ok? Tutto chiaro?
R: (tutti) Sì!
PB: Ecco, naturalmente se in questa divisione il divisore fosse stato $5ab^2$, non si poteva fare già la prima divisione, quindi non si fa niente, ok? Quella sarà una cosa di cui ci occuperemo più avanti.
Sul vostro libro, a pag. 87, dove siamo adesso, c'è un paragrafo intitolato "Il raccoglimento a fattor comune", ora il raccoglimento a fattor comune è una cosa che ci servirà più avanti e quindi la faremo più avanti, per adesso la saltiamo. D'accordo? La saltiamo e passiamo a quella successiva che riguarda il prodotto di due polinomi. Quindi noi per adesso abbiamo fatto il prodotto di un polinomio per un monomio, adesso passiamo al caso più generale, prodotto tra due polinomi.

Allora prendiamo un esempio (dal libro), prendiamo questo qua $(3x - 1)$ che moltiplica $(2x + 3)$. Dunque intanto una cosa le parentesi ci vogliono assolutamente perché se io scrivessi così $(3x - 1)2x + 3$ cosa vorrebbe dire? (tutti rispondono) che $(3x - 1)$ lo devo moltiplicare per $2x$ e poi al risultato aggiungere 3. Ok? Quindi le parentesi, mi raccomando, sono fondamentali. Allora che cosa facciamo applichiamo la proprietà distributiva per tutti i termini dei polinomi, quindi questo $3x$ lo dobbiamo moltiplicare per i due termini che ci sono nel polinomio successivo e la stessa cosa devo fare per il -1, lo devo moltiplicare per i due termini successivi. Quindi il primo polinomio ha 2 termini, il secondo ne ha 2, il risultato ne avrà (tutti) 4, ok? Fatelo. Dunque, l'ordine con cui decidete di fare la moltiplicazione è a vostra scelta ovviamente, solo ricordatevi di farle tutte e 4. E quando avrete scritto, avete 4 termini, però vi ricordo che i polinomi abbiamo detto li dobbiamo sempre mettere in forma normale. Quindi a quel punto se ci sono dei termini simili, e direi che ce ne sono, li sommate e vi viene un polinomio che di termini ne ha 3, ok? Quindi vi è venuto?
R: $6x^2 + 7x - 3$
PB: Va bene? Naturalmente se avete un polinomio con 3 termini, uno con 2, ne verranno fuori 6. Quindi avete $(x + a)(x^2 - 3ax + 1)$ ve ne devono venire 6, inizialmente, dopo sommerete quelli simili se ci sono. Quindi provate. Le prime volte se avete delle difficoltà, fatele queste freccette perché aiutano, aiutano a non dimenticare dei termini. Dopo che avete visto che sono 6, guardate se ci sono dei termini simili, e sembra che ce ne siano... Quando la ricopiate, che state sommando i termini simili, dategli un ordine, del tipo non so... Scrivo il termine di grado più alto, in modo da non perdere dei pezzi per strada.
Ecco una cosa. Scusate vi faccio un attimo il calcolo e poi vi dico una cosa. Allora $x^3 - 3ax^2 + x + ax^2 - 3a^2x + a$. Adesso questo x^3 non ha termini simili, ecco, e me lo ricopio, poi c'è un $-3ax^2$ e ce n'è un altro che è simile, quindi lo segno in un altro modo. Una cosa che non dovete fare è cancellarli. Li cancellate solo se sono opposti. D'accordo?

Allora il vostro testo, non so se avete scaricato l'approfondimento, a pag. 89, c'è un approfondimento che dice "qual è l'interpretazione geometrica di tutto ciò?" ed è quella di calcolare l'area di rettangoli e cioè, supponete di avere un rettangolo la cui base sia la somma di due segmenti, per esempio, questo primo pezzo si chiama x e questo secondo pezzo si chiama y, e l'altezza anche quella la divido in due segmenti, per esempio uno si chiama a e uno si chiama b. Quindi se io voglio calcolare l'area del rettangolo devo prendere la base che è $x+y$ e moltiplicarla per l'altezza che è $a+b$. Ok? $(x+y)(a+b)$ e avendo imparato come si fa, mi fate il calcolo per favore. Ci siete, ok? Adesso se voi dividete il rettangolo seguendo i segmenti che abbiamo indicato, allora quella che abbiamo scritto è l'area del rettangolo e avete visto che avete ottenuto 4 termini. Questi 4 termini sono le aree di questi piccoli rettangolini, perché questo rettangolino qui avrà come area ax la base è x e l'altezza è a, questo ha la base y e l'altezza è a quindi è ay, questo qua ha l'altezza che è b e la base che è x quindi è bx, questo ha l'altezza che è b e la base che è y, quindi è by.



Per cui possiamo pensare semplicemente all'area di questo rettangolo formata da 4 rettangolini. Ovviamente se uno dei due o tutti e due fossero formati da più elementi, cioè se questo fosse $x+y+z$, non cambia niente, troverei altri 2 rettangoli in più all'interno. E questo è quello che dice il

vostro libro.
A questo punto voi siete in grado di fare una qualunque espressione con i polinomi e quindi adesso andate. A scusate non vi ho detto una cosa ma immagino che la sappiate benissimo. Se io devo fare un prodotto con 3, eh.. se devo fare questo prodotto? $(x+y)(a+b)(2xy-1+y)$, cioè con 3 polinomi, invece che con 2?
R: E' la stessa cosa.
PB: E' la stessa cosa perché? Cosa posso fare, o faccio il prodotto dei primi due e il risultato lo moltiplico per il terzo, o faccio il prodotto degli ultimi due e il risultato lo moltiplico per il primo. E questo perché? Perché vale (tutti) la proprietà associativa. Questo è un prodotto come se fosse abc, no? Quindi sappiamo che possiamo fare $(ab)c = a(bc)$. In realtà però sappiamo anche qualcosa in più, cioè sappiamo anche che vale la proprietà commutativa, per cui se volessimo potremmo anche moltiplicare il primo con l'ultimo pensando di averlo spostato, ovviamente, no? E poi il risultato per il secondo e quindi in questa moltiplicazione quanti ne verranno? Questo (il 1*) con questo (il 2°) me ne danno 4, e con questo (il 3°) 4 per 3, 12. Allora va bene... Questo era quanto.
Mi fate, ora, a pag.368 il numero 596. Quindi qui non ci sono parentesi superflue come negli esercizi che avete fatto per casa, le parentesi sono già state eliminate. D'accordo?