

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**IL METODO DELLA PARAMETRICE  
PER EQUAZIONI  
INTEGRO-DIFFERENZIALI**

Tesi di Laurea in Equazioni Differenziali Stocastiche

**Relatore:**  
Chiar.mo Prof.  
Andrea Pascucci

**Presentata da:**  
Giulia Galaffi

**III Sessione  
Anno Accademico 2013/2014**



*Il valore di un problema non sta tanto nel trovarne la soluzione,  
quanto nelle idee che fa sorgere in chi lo affronta e nei tentativi  
messi in atto per la sua soluzione.*

*I.N. Herstein*



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Densità del processo somma</b>	<b>1</b>
1.1 Generatori infinitesimali . . . . .	6
1.1.1 Generatore del processo di Poisson . . . . .	6
1.1.2 Generatore del processo di Wiener . . . . .	6
1.2 Applicazione del metodo della parametrica . . . . .	8
<b>2 Applicazione del metodo della parametrica a equazioni stocastiche lineari</b>	<b>13</b>
2.1 Equazioni stocastiche lineari . . . . .	13
2.2 Applicazione del metodo della parametrica . . . . .	15
2.2.1 Esempio: equazione di Langevin . . . . .	16
<b>A Processi di Poisson e di Wiener</b>	<b>21</b>
A.1 Il processo di Poisson . . . . .	21
A.1.1 Processo di Poisson composto . . . . .	26
A.2 Il processo di Wiener . . . . .	30
<b>Bibliografia</b>	<b>35</b>



# Introduzione

In questa tesi è esposta un'applicazione del metodo della paramettrice a equazioni integro-differenziali.

In generale il metodo della paramettrice, definito da Eugenio Elia Levi nel 1907, consiste nell'approssimazione, mediante un processo iterativo, della soluzione fondamentale di una equazione differenziale.

In questo lavoro è stato trattato il caso di operatori integro-differenziali, studiato da M. G. Garroni e L. J. Menaldi nel 1992. Nel primo capitolo viene considerato il processo stocastico dato dalla somma di un processo di Poisson e di un processo di Wiener. In questo caso, utilizzando il metodo della paramettrice, è stata calcolata la densità di transizione di tale processo, ovvero la soluzione fondamentale associata all'operatore integro-differenziale relativo al processo somma. Nel secondo capitolo il metodo viene applicato a equazioni differenziali stocastiche lineari. Anche in questo caso viene calcolata la soluzione fondamentale dell'operatore dato dalla differenza tra l'operatore associato a una equazione stocastica lineare e l'operatore caratteristico del processo di Poisson. In particolare è stata calcolata esplicitamente la soluzione fondamentale relativa ad una versione semplificata dell'equazione di Langevin.

Infine in un'appendice si possono trovare i risultati fondamentali utilizzati nella tesi.



# Capitolo 1

## Densità del processo somma

In questo capitolo utilizzeremo il metodo della parametrica per calcolare la densità del processo dato dalla somma di un processo di Poisson e di un processo di Wiener.

Consideriamo due processi nello spazio  $\mathbb{R}^d$ ,  $(W_t, t \geq 0)$  e  $(P_t, t \geq 0)$ . Il primo è un processo di Wiener sullo spazio canonico delle funzioni continue  $C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$  e il secondo è un processo di Poisson standard sullo spazio canonico  $D([0, \infty), \mathbb{R}^d)$  delle funzioni continue a destra da  $[0, \infty)$  in  $\mathbb{R}^d$  e limitate a sinistra. Denotiamo con  $P$  la misura di probabilità sullo spazio di probabilità  $C([0, \infty), \mathbb{R}^d) \times D([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ . Supponiamo che i due processi siano indipendenti rispetto a  $P$ .

Si ha

$$E[f(x + W_t)] = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma^*(0, x, t, y) f(y) dy, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \quad (1.1)$$

dove

$$\Gamma^*(0, x, t, y) = \begin{cases} (2\pi t)^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right) & t > 0, x \in \mathbb{R}^d \\ 0 & t < 0, x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \text{ e}$$

$$E[f(x + P_t)] = \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} f(x + kj), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d \quad (1.2)$$

dove i parametri  $\lambda, j$  rappresentano rispettivamente l'intensità e l'ampiezza dei salti del processo di Poisson. Consideriamo il processo  $(W_t + P_t, t \geq 0)$  dato dalla somma dei due processi considerati. Pertanto stiamo sommando un processo a traiettorie continue con uno a traiettorie discrete. È possibile simulare tale processo con il programma Mathematica. Consideriamo un processo di Wiener di parametri  $\mu = 0.3, \sigma = 0.5$  e un processo di Poisson di parametro  $\lambda = 2$  e ampiezza dei salti unitaria. Implementando il seguente codice

```
data_w = RandomFunction[WienerProcess[.3,.5],{0,10.01}]
data_p = RandomFunction[PoissonProcess[2],{0,10.01}]
ListLinePlot[data_w]
ListLinePlot[data_p]
```

otteniamo i seguenti grafici

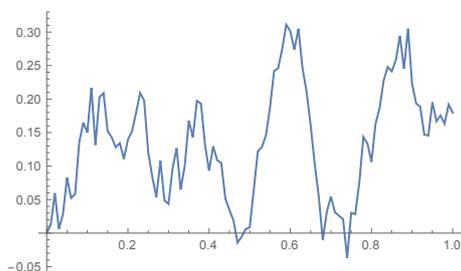


Figura 1.1: Processo di Wiener  $W_t$ :  
 $\mu = 0.3, \sigma = 0.5$

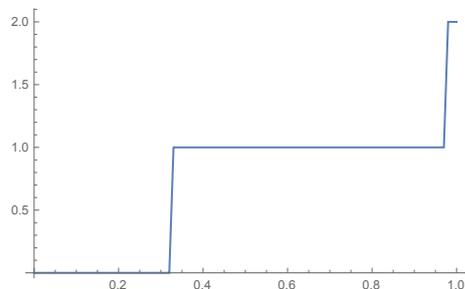


Figura 1.2: Processo di Poisson  $P_t$ :  
 $\lambda = 2$

Estraiamo dai dati i valori assunti dai due processi

```
valori_w = data_w[[1,2]][[1,1]]
valori_p = data_p[[1,2]][[1,1]]
ListLinePlot[valori_w + valori_p]
```

e otteniamo il grafico del processo dato dalla somma dei due processi iniziali

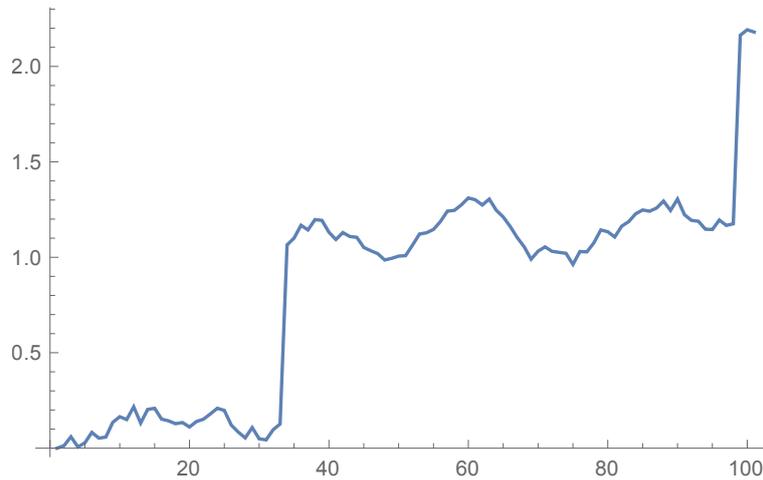


Figura 1.3:  $W_t + P_t$

Calcoliamone la densità.

$$\begin{aligned} E[f(x + W_t + P_t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} E[f(x + W_t + P_t) | P_t = kj] P(P_t = kj) \\ &= \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma^*(0, x + kj, t, z) f(z) dz \end{aligned}$$

Dato che la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$  converge uniformemente a  $e^{-\lambda t}$  possiamo applicare il teorema di integrazione per serie

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \Gamma^*(0, x + kj, t, z) f(z) dz \quad (1.3)$$

Questo prova che la funzione di densità di transizione del processo  $(W_t + P_t)$  è:

$$\Gamma(0, x, t, z) = \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \Gamma^*(0, x + kj, t, z) \quad (1.4)$$

Equivalentemente è possibile calcolare la densità di  $(W_t + P_t)$  a partire dalla funzione di ripartizione. Per semplicità effettuiamo il calcolo per  $d = 1$ , ovvero per  $W_t, P_t$  a valori reali.

$$\begin{aligned} F(z) &= P(W_t + P_t \in ] - \infty, z]) \\ &= P\left(\bigcup_k (P_t = kj) \cap (W_t + kj) \in ] - \infty, z]\right) \end{aligned}$$

Per la  $\sigma$ -additività di  $P$  si ha

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P((P_t = kj) \cap (W_t \in ] - \infty, z - kj])) \quad (1.5)$$

Per l'indipendenza dei due processi si ha

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left( P(P_t = kj) \int_{-\infty}^{z-kj} \Gamma^*(0, x, t, s) ds \right) \quad (1.6)$$

Derivando in  $z$  otteniamo la densità del processo  $(W_t + P_t)$

$$\begin{aligned} \Gamma(0, x, t, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(P_t = kj) \Gamma^*(0, x + kj, t, z) \\ &= \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \Gamma^*(0, x + kj, t, z), \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

che coincide con il risultato ottenuto precedentemente.

Supponiamo ora di voler confrontare graficamente la funzione di densità precedentemente calcolata con una funzione di densità ottenuta dai processi simulati. Simuliamo mille traiettorie di un processo di Wiener standard e mille traiettorie di un processo di Poisson, di parametro  $\lambda = 2$ .

Fissiamo poi un tempo  $t = 1$  e raccogliamo i dati delle traiettorie al tempo  $t = 1$ .

```

L = Table[0, 1000];
L1 = Table[0, 1000];

For[i = 1, i <= 1000,
data = RandomFunction[WienerProcess[], 0, 1, .01],
L[[i]] = data[[1, 2]][[1, 1]][[1000]]; i ++]

For[i = 1, i <= 1000,
data = RandomFunction[PoissonProcess[2], 0, 1, .01],
L1[[i]] = data[[1, 2]][[1, 1]][[1000]]; i ++]

```

Utilizziamo poi la funzione *HistogramDistribution* che rappresenta la distribuzione di probabilità corrispondente ad un istogramma di valori dati.

```

ProbDist = HistogramDistribution[L + L1]

```

Infine produciamo i grafici della funzione di densità calcolata nella precedente sezione e della densità dei processi simulati.

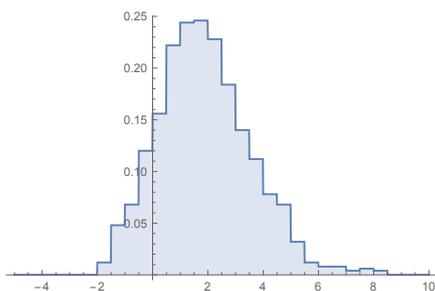


Figura 1.4: Funzione di densità simulata

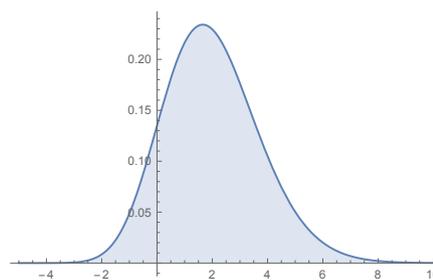


Figura 1.5: Funzione di densità teorica

Si osserva che all'aumentare del numero di traiettorie simulate si ottiene un

risultato più preciso. Tuttavia se volessimo ripetere questi calcoli per piccole varianti del processo di Wiener e di Poisson troveremmo alcune difficoltà. Per questo è conveniente trovare un'espressione esplicita per la densità di transizione del processo  $(W_t + P_t)$ .

## 1.1 Generatori infinitesimali

Il generatore infinitesimale di un processo stocastico è un operatore che contiene alcune informazioni sul processo.

**Definizione 1.1.1.** *Sia  $X : [0, \infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un processo stocastico definito sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Si dice che il processo  $X$  ha un generatore infinitesimale  $A$  se esiste il seguente limite*

$$Af(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{E[f(X_t)] - f(x)}{t}, \quad f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d. \quad (1.7)$$

### 1.1.1 Generatore del processo di Poisson

Calcoliamo il generatore di un processo di Poisson  $P_t$  di intensità  $\lambda$  e con salti di ampiezza  $j$ . Sia  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d$ .

$$\begin{aligned} I_j f &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{E[f(x + P_t)] - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{\exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} f(x + kj) - f(x)}{t} \\ &= \lambda(f(x + j) - f(x)) \end{aligned}$$

Pertanto

$$I_j f = \lambda(f(x + j) - f(x)). \quad (1.8)$$

### 1.1.2 Generatore del processo di Wiener

Calcoliamo il generatore di un processo di Wiener. Sia  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d$  e  $W_t$  un moto browniano  $d$ -dimensionale. Applichiamo la formula di Taylor

con resto di Lagrange a  $f$

$$f(x + W_t) = f(x) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) W_t^i + \frac{1}{2!} \left[ \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) (W_t^i)^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) W_t^i W_t^j \right] + R_3(W_t)$$

dove

$$R_3(W_t) = \frac{1}{3!} \sum_{|\alpha|=3} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(W_t)^\alpha \quad (1.9)$$

con  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  multi-indice.

Per l'indipendenza tra le componenti del moto browniano multidimensionale si ha

$$= f(x) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) W_t^i + \frac{1}{2!} \left[ \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) (W_t^i)^2 \right] + \frac{1}{3!} \sum_{i=0}^d \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}(x) (W_t^i)^3. \quad (1.10)$$

Applichiamo il valore atteso

$$\begin{aligned} E[f(x) + W_t] &= E \left[ f(x) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) W_t^i + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) (W_t^i)^2 + \frac{1}{3!} \sum_{i=0}^d \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}(x) (W_t^i)^3 \right] \\ &= f(x) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) E[(W_t^i)^2] \\ &= f(x) + \frac{t}{2} \Delta f \end{aligned}$$

Calcoliamo, quindi, il generatore infinitesimale di  $W_t$

$$\begin{aligned}
Af &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{E[f(x + W_t)] - f(x)}{t} \\
&= \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x) + t\frac{1}{2}\Delta f - f(x)}{t} \\
&= \frac{1}{2}\Delta f
\end{aligned}$$

Pertanto

$$Af = \frac{1}{2}\Delta \quad (1.11)$$

## 1.2 Applicazione del metodo della parametrica

Cerchiamo ora di ricavare la densità a partire da un problema di Cauchy, utilizzando il metodo della parametrica.

La funzione  $\Gamma(0, x, t, y)$  risolve il seguente problema

$$\begin{cases}
(\partial_t - \frac{1}{2}\Delta - I)\Gamma = \delta & \text{in } \mathbb{R}^d \times (-\infty, \infty) \\
\Gamma = 0 & \text{in } \mathbb{R}^d \times (-\infty, 0).
\end{cases}$$

dove  $\delta$  è la misura di Dirac nell'origine in  $\mathbb{R}^d \times (-\infty, \infty)$ . Pertanto  $\Gamma$  è la soluzione fondamentale relativa all'operatore  $(\partial_t - \frac{1}{2}\Delta - I)$ . La condizione iniziale indica che la soluzione fondamentale  $\Gamma$  ha il suo supporto in  $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ . Ricaviamo un'espressione esplicita per  $\Gamma$  risolvendo il suddetto problema di Cauchy. Sappiamo che  $\Gamma^*$ , data da (1) soddisfa il problema

$$\begin{cases}
(\partial_t - \frac{1}{2}\Delta)\Gamma^* = \delta & \text{in } \mathbb{R}^d \times (-\infty, \infty) \\
\Gamma^* = 0 & \text{in } \mathbb{R}^d \times (-\infty, 0).
\end{cases}$$

Supponiamo che la soluzione che cerchiamo sia della forma

$$\Gamma = \Gamma^* + \Gamma^* * F, \quad (1.12)$$

dove  $*$  denota la seguente operazione in  $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ , i.e.

$$(\Gamma^* * F)(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma^*(s, y, t, x) F(y, s) dy ds. \quad (1.13)$$

In (1.12), la funzione  $F$  e di conseguenza la funzione  $\Gamma$  sono sconosciute. Calcoliamo

$$\begin{aligned} & (\partial_t - \frac{1}{2}\Delta - I)\Gamma \\ &= (\partial_t - \frac{1}{2}\Delta - I)(\Gamma^* + \Gamma^* * F) \\ &= (\partial_t - \frac{1}{2}\Delta)\Gamma^* + (\partial_t - \frac{1}{2}\Delta)(\Gamma^* * F) - I\Gamma \\ &= \delta + ((\partial_t - \frac{1}{2}\Delta)(\Gamma^*)) * F - I\Gamma \\ &= \delta + \delta * F - I\Gamma \\ &= \delta + F - I\Gamma \end{aligned}$$

Vogliamo che

$$(\partial_t - \frac{1}{2}\Delta - I)\Gamma = \delta \quad \text{i.e.} \quad \delta + F - I\Gamma = \delta \quad (1.14)$$

Pertanto

$$F = I\Gamma \quad (1.15)$$

che insieme alla (1.12) fornisce un'equazione integrale di Volterra del secondo tipo per la funzione  $\Gamma$

$$\Gamma = \Gamma^* + \Gamma^* * I\Gamma \quad (1.16)$$

In modo simile troviamo una formula iterativa anche per  $F$ . Per i calcoli effettuati precedentemente si ha

$$F = I\Gamma = I\Gamma^* + I\Gamma^* * F \quad (1.17)$$

Pertanto

$$F = I\Gamma^* + I\Gamma^* * F \quad (1.18)$$

Per risolvere (1.16) e (1.18) poniamo

$$\Gamma = \Gamma^* + \Gamma_1 + \dots + \Gamma_k + \dots$$

$$\Gamma_1 = \Gamma^* * I\Gamma^*, \quad \Gamma_{k+1} = \Gamma_k * I\Gamma^*, \quad k = 1, 2, \dots$$

e

$$F = F_0 + F_1 + \dots + F_k + \dots$$

$$F_0 = I\Gamma^*, \quad F_{k+1} = F_k * I\Gamma^*, \quad k = 1, 2, \dots$$

**Lemma 1.2.1.** *Sia  $L$  l'operatore del second'ordine*

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N c_{jk} \partial_{x_j x_k} + \sum_{j=1}^N b_j \partial_{x_j} - \partial_t, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{N+1}. \quad (1.19)$$

*Supponiamo che  $L$  soddisfi le seguenti ipotesi*

- *i coefficienti  $c_{ij} = c_{ij}(t, x)$ ,  $b_i = b_i(t, x)$  sono funzioni a valori reali. La matrice  $C(t, x) = (c_{ij}(t, x))$  è simmetrica e semi-definita positiva.*
- *Esiste una costante  $M$  tale che*

$$|c_{ij}(t, x)| \leq M, \quad |b_i(t, x)| \leq M(1 + |x|) \quad (1.20)$$

*per ogni  $(t, x)$  in  $[0, T] \times \mathbb{R}^N$  e  $i, j = 1, \dots, N$ .*

- *l'operatore  $L$  ha una soluzione fondamentale  $\Gamma$ . Inoltre, fissata una costante positiva  $\lambda$ , definiamo*

$$\Gamma_\lambda(t, x) = \frac{1}{(2\pi\lambda t)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\lambda t}\right), \quad t, s > 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^N \quad (1.21)$$

Allora supponiamo che esista una costante  $\lambda > 0$  tale che per ogni  $T > 0, k = 1, \dots, N, t \in ]s, s + T[, e x, y \in \mathbb{R}^N$ , valga la seguente affermazione:

$$\frac{1}{M} \Gamma_{\frac{1}{\lambda}}(t - s, x - y) \leq \Gamma(s, y, t, x) \leq M \Gamma_{\lambda}(t - s, x - y) \quad (1.22)$$

$$|\partial_{y_k} \Gamma(s, y, t, x)| \leq \frac{M}{\sqrt{t - s}} \Gamma_{\lambda}(t - s, x - y) \quad (1.23)$$

con  $M$  costante positiva dipendente da  $T$ .

Allora la soluzione fondamentale soddisfa la **proprietà di riproduzione o del semigrupp**

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(t_0, y, t, \eta) \Gamma(t, \eta, T, x) d\eta = \Gamma(t_0, y, T, x) \quad (1.24)$$

per ogni  $t_0 \leq t \leq T, x, y \in \mathbb{R}^N$ .

**Osservazione 1.** Si ottiene

$$\Gamma_1 = t I \Gamma^*, \Gamma_2 = \frac{t^2}{2!} I^2 \Gamma^*, \dots, \Gamma_k = \frac{t^k}{k!} I^k \Gamma^* \quad (1.25)$$

dove

$$I^k \phi(x) = \lambda^k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \phi(x + ij) \quad (1.26)$$

*Dimostrazione.* Dimostriamolo per induzione su  $k$ . Per  $k = 1$  calcoliamo esplicitamente  $\Gamma_1$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \Gamma^* * I \Gamma^* \\ &= I \Gamma^* * \Gamma^* \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} I \Gamma^*(s, y, t, z) \Gamma^*(0, x, s, y) dy ds \\ &= \int_0^t I \left( \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma^*(s, y, t, z) \Gamma^*(0, x, s, y) dy \right) ds \\ &= \int_0^t I \Gamma^*(0, x, t, z) ds \\ &= t I \Gamma^* \end{aligned}$$

Supponiamo allora che l'asserto sia vero per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \leq k$  e dimostriamo per  $n = k + 1$ .

$$\begin{aligned}
\Gamma_{k+1} &= \Gamma_k * I\Gamma^* \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(t-s)^k}{k!} I^k \Gamma^*(s, y, t, z) I\Gamma^*(0, x, s, y) dy ds \\
&= \int_0^t \frac{(t-s)^k}{k!} I^{k+1} \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma^*(s, y, t, z) \Gamma^*(0, x, s, y) dy ds \\
&= \int_0^t \frac{(t-s)^k}{k!} I^{k+1} \Gamma^*(0, x, t, z) \\
&= \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} I^{k+1} \Gamma^*
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\Gamma(0, x, t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \Gamma^*(0, x + ij, t, z) \quad (1.27)$$

che equivale alla formula ottenuta precedentemente.  $\square$

## Capitolo 2

# Applicazione del metodo della parametrica a equazioni stocastiche lineari

È possibile applicare il metodo visto nel precedente capitolo a operatori a coefficienti variabili. In questo capitolo prendiamo in considerazione una importante classe di equazioni stocastiche, ovvero le equazioni lineari, in cui i coefficienti sono funzioni lineari della soluzione.

### 2.1 Equazioni stocastiche lineari

**Definizione 2.1.1.** *Consideriamo la seguente equazione in  $\mathbb{R}^N$*

$$dX_t = (b(t) + B(t)X_t)dt + \sigma(t)dW_t \quad (2.1)$$

dove

- $b$  è una funzione  $L_{loc}^\infty$  nello spazio delle matrici  $(N \times 1)$ -dimensionali
- $B$  è una funzione  $L_{loc}^\infty$  nello spazio delle matrici  $(N \times N)$ -dimensionali
- $\sigma$  è una funzione  $L_{loc}^\infty$  nello spazio delle matrici  $(N \times d)$ -dimensionali

e  $W$  è un moto browniano  $d$ -dimensionale, con  $d \leq N$ .

La soluzione a questa equazione esiste ed è unica. Inoltre nel caso delle equazioni lineari è possibile determinare una espressione esplicita per la soluzione. Denotiamo con  $\Phi(t)$  la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \Phi'(t) = B(t)\Phi(t) \\ \Phi(t_0) = I_N \end{cases} \quad (2.2)$$

dove  $I_N$  è la matrice identità  $N \times N$ .

**Proposizione 2.1.2.** *La soluzione dell'equazione (2.1) con condizioni iniziali  $X_0^x = x$  è data da*

$$X_t^x = \Phi(t) \left( x + \int_0^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\sigma(s)dW_s \right) \quad (2.3)$$

Inoltre  $X_t^x$  ha una distribuzione multinormale di media

$$E[X_t^x] = \Phi(t) \left( x + \int_0^t \Phi^{-1}(s)ds \right) \quad (2.4)$$

e matrice di covarianza

$$Cov(X_t^x) = \Phi(t) \left( \int_0^t (\Phi^{-1}(s)\sigma(s))(\Phi^{-1}(s)\sigma(s))^* \right). \quad (2.5)$$

*Dimostrazione.* Utilizziamo le seguenti notazioni

$$m_x(t) = E[X_t^x] \quad C(t) = Cov(X_t^x) \quad (2.6)$$

Usiamo la formula di Ito. Poniamo

$$Y_t = x + \int_0^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\sigma(s)dW_s. \quad (2.7)$$

Si ha

$$dX_t^x = d(\Phi(t)Y_t) = \Phi'(t)Y_t dt + \Phi(t)dY_t = (B(t)X_t^x + b(t))dt + \sigma(t)dW_t. \quad (2.8)$$

Visto che  $X_t^x$  è dato dalla somma di integrali di funzioni deterministiche ha una distribuzione multinormale con media e matrice di covarianza date

rispettivamente da (2.4) e (2.5). Si ottiene

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_t^x) &= E[(X - m_x(t))(X - m_x(t))^*] \\ &= \Phi(t)E\left[\int_0^t \Phi^{-1}(s)\sigma(s)dW_s \left(\int_0^t \Phi^{-1}(s)\sigma(s)dW_s\right)^*\right]\Phi^*(t) \end{aligned}$$

Per l'isometria di Ito si ottiene

$$= \Phi(t) \left( \int_0^t (\Phi^{-1}(s)\sigma(s))(\Phi^{-1}(s)\sigma(s))^* \right). \quad (2.9)$$

□

Osserviamo che in generale, per  $d \leq N$ , la matrice  $C(t)$  è semi-definita positiva. Se  $C(t)$  è semi-definita positiva  $X_t^x$  ha densità  $y \mapsto \hat{\Gamma}(0, x; t, y)$  dove

$$\hat{\Gamma}(0, x; t, y) = \frac{(2\pi)^{-N/2}}{\sqrt{\det(C(t))}} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle C(t)(y - m_x(t)), (y - m_x(t)) \rangle\right) \quad (2.10)$$

per  $x, y \in \mathbb{R}^N$  e  $t > 0$ . Inoltre  $\hat{\Gamma}$  è la soluzione fondamentale dell'operatore differenziale in  $\mathbb{R}^{N+1}$  associato all'equazione lineare

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N c_{ij}(t) \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \sum_{i=1}^N \left( b_i(t) \partial_{x_i} + \sum_{j=1}^N B_{ij}(t) x_j \partial_{x_i} \right) + \partial_t \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N c_{ij}(t) \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \langle b(t) + B(t)x, \nabla \rangle + \partial_t \end{aligned}$$

dove  $c_{ij} = \sigma \sigma^*$  e  $\nabla = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_N})$ .

## 2.2 Applicazione del metodo della parametrica

Consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} (L - I)\Gamma = \delta & \text{in } \mathbb{R}^d \times (-\infty, \infty) \\ \Gamma = 0 & \text{in } \mathbb{R}^d \times (-\infty, 0). \end{cases}$$

dove  $L$  indica l'operatore dato da (2.1) e  $I$  l'operatore caratteristico del processo di Poisson. Sappiamo che  $\hat{\Gamma}$ , data da (2.10), soddisfa il problema

$$\begin{cases} L\hat{\Gamma} = \delta & \text{in } \mathbb{R}^d \times (-\infty, \infty) \\ \hat{\Gamma} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^d \times (-\infty, 0). \end{cases}$$

Supponiamo che la soluzione che cerchiamo sia della forma

$$\Gamma = \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} * F, \quad (2.11)$$

dove  $*$  denota la seguente operazione in  $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ , i.e.

$$(\hat{\Gamma} * F)(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\Gamma}(s, x, t, y) F(y, s) dy ds. \quad (2.12)$$

Applichiamo il metodo visto nel precedente capitolo e otteniamo anche in questo caso

$$\Gamma = \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} * I\Gamma; \quad (2.13)$$

$$F = I\Gamma = I\hat{\Gamma} + I\hat{\Gamma} * F. \quad (2.14)$$

Effettuando i calcoli opportuni si ottiene

$$\Gamma(0, x, t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \hat{\Gamma}(0, x + ij, t, z) \quad (2.15)$$

Applichiamo ora il risultato ottenuto ad alcuni processi.

### 2.2.1 Esempio: equazione di Langevin

Consideriamo la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} dX_t^1 = dW_t \\ dX_t^2 = X_t^1 dt \end{cases}$$

o in forma integrale

$$\begin{cases} X_t^1 = W_t \\ X_t^2 = \int_0^t X_s^1 ds \end{cases}$$

Si tratta della versione semplificata dell'equazione di Langevin che descrive il moto di una particella nello spazio delle fasi:  $X_1$  e  $X_2$  rappresentano rispettivamente la velocità e la posizione della particella. Simuliamo una traiettoria di tale processo con Mathematica

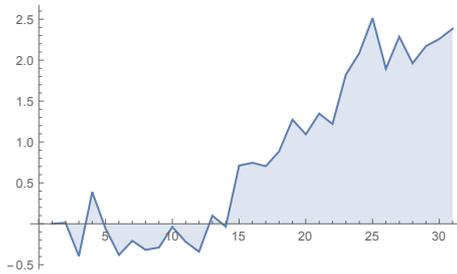


Figura 2.1:  $X^1$

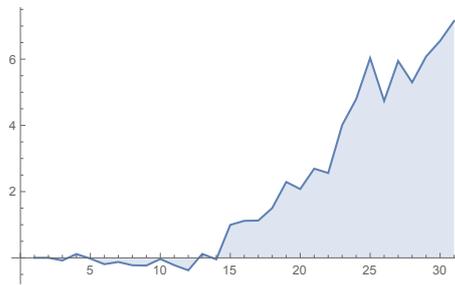


Figura 2.2:  $X^2$

In questo caso abbiamo  $d = 1, N = 2$  e

$$b = 0, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Osserviamo che la matrice  $B$  è nilpotente poichè  $B^2 = 0$ . Pertanto si ha

$$e^{tB} = I + tB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Inoltre se poniamo  $x = (x_1, x_2)$  abbiamo

$$m_x(t) = e^{tB}x = (x_1x_2 + tx_1)$$

$$C(t) = \int_0^t e^{sB} \sigma \sigma^* e^{sB*} ds = \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} t & \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3} \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che  $C(t)$  è definita positiva per ogni  $t > 0$  e allora l'operatore differenziale associato

$$L = \frac{1}{2} \partial_{x_1 x_1} + x_1 \partial_{x_2} + \partial_t \tag{2.18}$$

ha la seguente soluzione fondamentale

$$\hat{\Gamma}(x, t, T, y) = \frac{\sqrt{3}}{\pi(T-t)^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle C^{-1}(T-t)(y - e^{(T-t)B}x), (y - e^{(T-t)B}x) \rangle\right) \tag{2.19}$$

per ogni  $x, y \in \mathbb{R}^2$  e  $t < T$ , dove

$$C^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{4}{t} & \frac{-6}{t^2} \\ \frac{-6}{t^2} & \frac{12}{t^3} \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

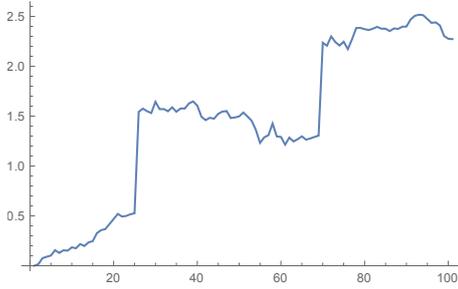
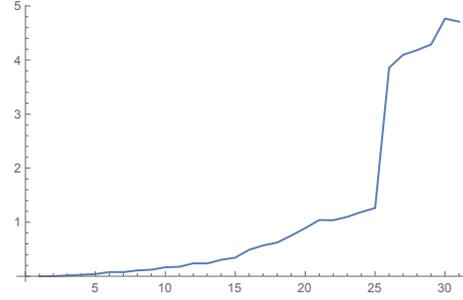
Più esplicitamente abbiamo

$$\hat{\Gamma}(x, t, T, y) = \frac{\sqrt{3}}{\pi(T-t)^2} \exp\left(-\frac{(y_1 - x_1)^2}{2(T-t)} - \frac{3(2y_2 - 2x_2 - (T-t)(y_1 + x_1))^2}{2(T-t)^3}\right). \tag{2.21}$$

Consideriamo dunque il processo dato dalla somma di un processo relativo dall'equazione di Langevin  $X_t$  e di un processo di Poisson  $P_t$ . Pertanto si tratta del processo stocastico

$$\begin{cases} X_t^1 = W_t + P_t \\ X_t^2 = \int_0^t (W_s + P_s) ds \end{cases}$$

Simuliamo una traiettoria di tale processo con Mathematica

Figura 2.3:  $X^1$ Figura 2.4:  $X^2$ 

Calcoliamo la densità di transizione di un processo di questo tipo. Sapendo che la funzione  $\hat{\Gamma}$  risolve il problema

$$\begin{cases} L\hat{\Gamma} = \delta \text{ in } \mathbb{R}^2 \times (-\infty, \infty) \\ \hat{\Gamma} = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2 \times (-\infty, 0) \end{cases}$$

dove  $L$  è dato da 2.18, otteniamo la soluzione fondamentale associata all'operatore  $L - I$ , dove con  $I$  indichiamo il generatore infinitesimale del processo di Poisson:

$$\begin{aligned} \Gamma(0, x, t, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \hat{\Gamma}(0, x + ij, t, z) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} \\ &\quad \exp\left(-\frac{(z_1 - x_1 + ij)^2}{2t} - \frac{3(2z_1 - 2(x_2 + ij) - t(z_1 + x_1 + ij))^2}{2t^3}\right) \end{aligned}$$

Questo calcolo non va oltre ma ci da un modo per affrontare il problema studiando la struttura della funzione  $\Gamma$ .



# Appendice A

## Processi di Poisson e di Wiener

### A.1 Il processo di Poisson

Il processo di Poisson è un esempio fondamentale di processo stocastico con andamento discontinuo. Per costruire il processo di Poisson consideriamo una successione  $(\tau_n)_{n \geq 1}$  di variabili casuali indipendenti, ognuna con distribuzione esponenziale di parametro  $\lambda > 0$ :

$$\tau_n \sim \text{Exp}_\lambda \quad n \geq 1 \tag{A.1}$$

Consideriamo un modello dove i salti si verificano in maniera casuale e l'ampiezza dei salti è unitaria.

Indichiamo con  $\tau_n$  la distanza temporale dell'n-mo salto dal precedente. Quindi, il primo salto si verifica al tempo  $\tau_1$ , il secondo si verifica  $\tau_2$  unità di tempo dopo  $\tau_1$  e così via. Allora per ogni  $n \in \mathbb{N}$ :

$$T_n = \sum_{k=1}^n \tau_k \tag{A.2}$$

è il tempo in cui si verifica l'n-mo salto. Per le proprietà della distribuzione esponenziale si ha:

$$E[T_n - T_{n-1}] = E[\tau_n] = \frac{1}{\lambda} \tag{A.3}$$

ovvero la distanza media tra un salto e l'altro è  $\frac{1}{\lambda}$ . In altri termini ci aspettiamo  $\lambda$  salti in un intervallo di tempo unitario. Per questo  $\lambda$  è anche chiamato parametro di intensità.

**Lemma A.1.1.** *Per  $n \in \mathbb{N}$  la variabile  $T_n$  ha densità di probabilità data da una distribuzione gamma di parametro  $\lambda, n$ :*

$$f_{T_n}(t) = \lambda e^{\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(t) \quad (\text{A.4})$$

*Dimostrazione.* Proviamo la tesi per induzione sul numero di variabili  $n$ . Per  $n = 1$  la distribuzione gamma coincide con la distribuzione esponenziale:

$$f_{T_n}(t) = f_{\tau_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(t) \quad (\text{A.5})$$

Supponiamo l'enunciato vero per  $n$  e dimostriamolo per  $n + 1$ .

$$f_{T_{n+1}} = f_{T_n + \tau_{n+1}}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{T_n}(s) f_{\tau_{n+1}}(t-s) ds \quad (\text{A.6})$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda(t-s)} \mathbb{1}_{\{t-s > 0\}} ds \quad (\text{A.7})$$

$$= \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \int_0^t s^{n-1} ds \quad (\text{A.8})$$

$$= \lambda e^{\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{(n)!} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(t) \quad (\text{A.9})$$

□

**Definizione A.1.2** (Processo di Poisson). *Il processo di Poisson con intensità  $\lambda$ , definito su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , è il processo:*

$$N_t = \sum_{n \geq 1} n \mathbb{1}_{[T_n, T_{n+1}[}(t) \quad (\text{A.10})$$

con  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Il processo di Poisson  $N_t$  conta il numero di salti che si verificano prima del tempo  $t$  e al tempo  $t$ . In particolare  $N_t$  assume solo valori interi non negativi. Osserviamo che per definizione le traiettorie di  $N$  sono funzioni continue a destra:

$$N_t = N_t^+ = \lim_{s \downarrow t} N_s \quad (\text{A.11})$$

Vediamo ora alcune proprietà del processo di Poisson. In primo luogo è bene evidenziare la differenza tra continuità delle traiettorie di un processo stocastico e continuità stocastica.

**Definizione A.1.3.** Sia  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di variabili aleatorie su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Diciamo che  $X_n$  converge in probabilità a  $X$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0 \quad (\text{A.12})$$

**Teorema A.1.4.** Sia  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di variabili aleatorie su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Se  $X_n$  converge quasi sicuramente a  $X$  allora  $X_n$  converge in probabilità a  $X$

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad (\text{A.13})$$

**Proposizione A.1.5.** Sia  $(N_t)_{t \geq 0}$  un processo di Poisson. Allora:

1. Le traiettorie  $t \rightarrow N_t(\omega)$  sono continue a destra e limitate a sinistra. Questo equivale a dire che  $N$  è un **processo càdlàg**
2.  $\forall t \geq 0$ , quasi tutte le traiettorie in  $t$  sono continue, ovvero

$$N_t = N_{t-} = \lim_{s \uparrow t} N_s \quad (\text{A.14})$$

3.  $N$  è stocasticamente continuo, ovvero per ogni  $\epsilon > 0$  e per ogni  $t \geq 0$  abbiamo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} P(|N_{t+h} - N_t| > \epsilon) = 0 \quad (\text{A.15})$$

*Dimostrazione.* La prima proprietà segue dalla definizione di processo di Poisson.

Dimostriamo la seconda proprietà. I punti di discontinuità di  $N$  corrispondono ai tempi di salto  $T_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Per il Lemma A.1.1 per ogni  $t > 0$  abbiamo

$$P(T_n = t) = 0. \quad (\text{A.16})$$

Pertanto, con probabilità uno,  $t$  non è un punto di discontinuità.

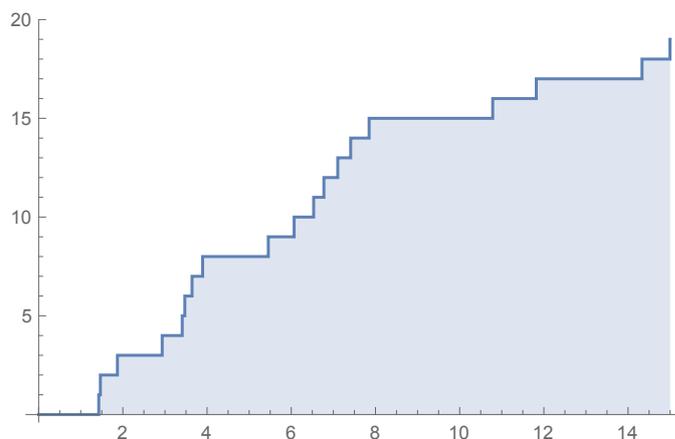
L'ultima proprietà segue dalla seconda per il Teorema A.1.4.

□

È possibile simulare un processo di Poisson con il programma Mathematica, mediante il seguente codice

```
data =
RandomFunction[PoissonProcess[1.3], 0, 15]
ListLinePlot[data, InterpolationOrder -> 0,
Filling -> Axis]
```

Si tratta di un processo di Poisson di parametro  $\lambda = 1.3$ . Si ottiene il seguente grafico



Studiamo ora la distribuzione del processo di Poisson.

**Proposizione A.1.6.** *Sia  $(N_t)_{t \geq 0}$  un processo di Poisson di intensità  $\lambda$ . Allora*

1. per ogni  $t > 0$ ,  $N_t$  ha una distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda t$

$$P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{A.17})$$

e in particolare

$$E[N_t] = \lambda t, \quad \text{var}(N_t) = \lambda t; \quad (\text{A.18})$$

2.  $N$  ha incrementi indipendenti ovvero per ogni  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$  le variabili aleatorie  $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$  sono indipendenti.

3.  $N$  ha incrementi stazionari, ovvero

$$N_t - N_s := N_{t-s} \quad t \geq s \geq 0. \quad (\text{A.19})$$

*Dimostrazione.* Per la definizione di processo di Poisson si ha

$$P(t \geq T_{n+1}) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!} ds \quad (\text{A.20})$$

$$= - \left[ e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!} \right]_{s=0}^{s=t} + \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} ds \quad (\text{A.21})$$

$$= -e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} + P(t \geq T_{n+1}) \quad (\text{A.22})$$

Pertanto

$$P(N_t = n) = P(t \geq T_n) - P(t \geq T_{n+1}) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} E[N_t] &= \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[N_t] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - (\lambda t)^2 \\ &= \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} - (\lambda t)^2 \\ &= \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} - (\lambda t)^2 \\ &= (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 \\ &= \lambda t \end{aligned}$$

La seconda e la terza proprietà sono conseguenze della proprietà di assenza di memoria della distribuzione esponenziale.  $\square$

### A.1.1 Processo di Poisson composto

**Definizione A.1.7** (Processo di Poisson composto). *Sia  $N$  un processo di Poisson di intensità  $\lambda$  e assumiamo che  $Z = (Z_n)$  sia una successione di variabili aleatorie i.i.d. in  $\mathbb{R}^d$  con distribuzione  $\eta$ , i.e  $Z_n \sim \eta$ ,  $n \geq 1$  e indipendenti da  $N$ . Il processo di Poisson composto è definito nel seguente modo*

$$X_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n, \quad t \geq 0. \quad (\text{A.24})$$

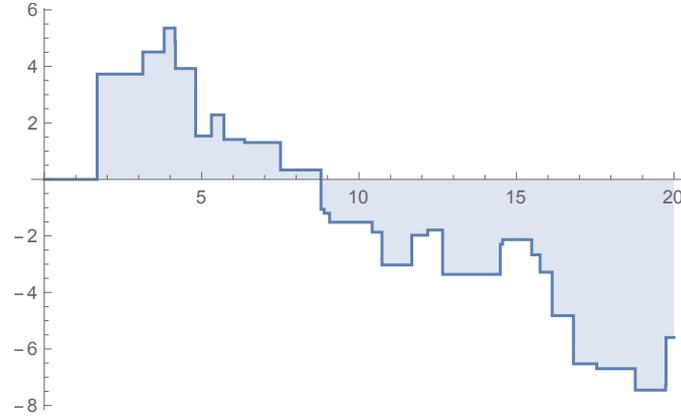
I salti del processo di Poisson composto  $X$  si verificano con la stessa frequenza dei salti di  $N$  e  $X$  è un processo càdlàg. Tuttavia i salti del processo  $N$  sono di ampiezza fissata uguale a uno, mentre i salti di  $X$  hanno ampiezza aleatoria con distribuzione  $\eta$ .

Il processo di Poisson composto è pertanto una generalizzazione del processo di Poisson. È possibile simulare un processo di Poisson composto con il programma Mathematica, mediante il seguente codice

```

P=CompoundPoissonProcess[2,
  NormalDistribution[0, 1]];
data = RandomFunction[[P], 20]
ListLinePlot[data, InterpolationOrder -> 0,
  Filling -> Axis]
```

Si tratta di un processo di Poisson composto di parametro  $\lambda = 2$  e in cui le variabili  $Z_n$  hanno distribuzione normale standard. Si ottiene il seguente grafico



**Lemma A.1.8.** *Siano  $X, Y$  variabili aleatorie a valori interi definite sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Vale il seguente risultato*

$$\text{Var}(X) = P(\text{Var}(X|Y)) + \text{Var}(P(X|Y)) \quad (\text{A.25})$$

*Dimostrazione.* Calcoliamo

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= P((X - P(X))^2) = P((X - P(X|Y) + P(X|Y) - P(X))^2) \\ &= P((X - P(X|Y))^2) + P((P(X|Y) - P(X))^2) + \\ &\quad + 2P((X - P(X|Y))(P(X|Y) - P(X))) \end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned} P((X - P(X|Y))^2) &= P(P(X - P(X|Y))^2|Y) = P(\text{Var}(X|Y)) \\ P((P(X|Y) - P(X))^2) &= \text{Var}(P(X|Y)) \\ P((X - P(X|Y))(P(X|Y) - P(X))) &= P(P((X - P(X|Y))(P(X|Y) - P(X))|Y)) \\ &= P((P(X|Y) - P(X))(P(X - P(X|Y))|Y)) = 0 \end{aligned}$$

Ne segue

$$\text{Var}(X) = P(\text{Var}(X|Y)) + \text{Var}(P(X|Y)) \quad (\text{A.26})$$

□

**Proposizione A.1.9.** *Sia  $X$  un processo di Poisson composto definito come nella (A.24). Poniamo*

$$\mu = E[Z_1] \in \mathbb{R}^d, \quad \sigma^2 = \text{Var}(Z_1) \quad (\text{A.27})$$

allora si ha

$$E[X_t] = \mu\lambda t, \quad \text{Var}(X_t) = \lambda t(\mu^2 + \sigma^2) \quad (\text{A.28})$$

*Dimostrazione.* Calcoliamo

$$E[X_t] = \sum_{n \geq 1} E \left[ \mathbb{1}_{\{N_t=n\}} \sum_{k=1}^n Z_k \right] \quad (\text{A.29})$$

Per l'indipendenza di  $N$  e di  $Z$ :

$$\begin{aligned} &= \sum_{n \geq 1} n P(N_t = n) E[Z_1] \\ &= \mu e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 1} \frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!} \\ &= \mu \lambda t \end{aligned}$$

Per il lemma A.1.8

$$\text{Var}(X_t) = P(\text{Var}(X_t|N_t)) + \text{Var}(P(X_t|N_t)) \quad (\text{A.30})$$

Per l'indipendenza di  $N$  e di  $Z$ :

$$\begin{aligned} &= \sigma^2(P(N_t)) + \text{Var}(\mu N_t) \\ &= \lambda t \sigma^2 + \mu^2 \lambda t = \lambda t(\mu^2 + \sigma^2) \end{aligned}$$

□

**Definizione A.1.10.** *Sia  $N$  un processo di Poisson semplice di parametro  $\lambda$ . Consideriamo una successione di variabili aleatorie costanti  $(Z_n)$ , indipendenti da  $N$ , di valore  $j$ . Definiamo quindi il processo di Poisson con salti*

di ampiezza  $j$  nel seguente modo

$$P_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k = \sum_{k=1}^{N_t} j = \sum_{k \geq 1} kj \mathbb{1}_{[T_k, T_{k+1}[}(t) \quad (\text{A.31})$$

Si tratta, dunque, di un processo di Poisson composto in cui le variabili  $Z_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , sono costanti.

**Osservazione 2.** Per ogni  $t > 0$ ,  $P_t$  ha la seguente distribuzione

$$P(P_t \in H) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \delta_{x+kj}(H) \quad (\text{A.32})$$

dove  $\delta$  indica la Delta di Dirac e  $x \in \mathbb{R}$  il punto di partenza del processo. Di conseguenza

$$P(P_t = x + nj) = e^{\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \quad (\text{A.33})$$

Si ha inoltre

$$E[P_t] = \lambda jt, \quad \text{Var}(P_t) = \lambda j^2 t \quad (\text{A.34})$$

*Dimostrazione.* Calcoliamo

$$\begin{aligned} P(P_t \in H) &= P(P(P_t \in H | N(t))) \\ &= P\left(\sum_{k=0}^{N_t} \delta_{x+kj}(H)\right) \\ &= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \delta_{x+kj}(H) \end{aligned}$$

Le altre proprietà relative al valore atteso e alla varianza seguono direttamente da (A.28).

□

## A.2 Il processo di Wiener

Il processo di Wiener, conosciuto anche come moto browniano, è un processo stocastico gaussiano a tempo continuo con incrementi indipendenti.

**Definizione A.2.1.** *Un processo di Wiener definito su uno spazio di probabilità con filtrazione  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$  è caratterizzato dalle seguenti condizioni*

1.  $W_0 = 0$  *q.s.*
2. *il processo è continuo e adattato alla filtrazione considerata*
3. *il processo ha incrementi gaussiani, ovvero per ogni  $t \geq s \geq 0$*

$$W_t - W_s \sim \mathcal{N}_{0,h} \quad (\text{A.35})$$

*e  $W_t - W_s$  è indipendente da  $\mathcal{F}_s$ .*

Vediamo ora alcune proprietà del moto Browniano.

**Proposizione A.2.2.** *Il moto Browniano gode delle seguenti proprietà, che sono dirette conseguenze della (A.35)*

1.  $E[W_t] = 0$ , per ogni  $t \geq 0$
2.  $E[W_t^2] = \text{Var}(W_t) = t$  per ogni  $t \geq 0$ . *Pertanto la distanza, al tempo  $t$ , dal punto di partenza di una particella che si muove di moto casuale è  $\sqrt{t}$ .*
3. *Per ogni fissato  $H \in \mathcal{B}$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} P(W_t \in H) = \delta_0(H) \quad (\text{A.36})$$

*Intuitivamente questo significa che al decrescere del tempo la probabilità che la particella sia lontana dall'origine decresce.*

**Definizione A.2.3.** Sia  $W$  un moto Browniano sullo spazio  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ . Per un  $x$  fissato  $\in \mathbb{R}$  e  $t \geq 0$  il processo stocastico  $W^{t,x}$ , definito da

$$W_T^{t,x} = x + W_T - W_t, \quad T \geq t \quad (\text{A.37})$$

si chiama moto Browniano di punto iniziale  $(t, x)$ . Si ha

- i)  $W_t^{t,x} = x$ ;
- ii)  $W^{t,x}$  è un processo stocastico continuo e adattato
- iii)  $t \leq T \leq T + h$  la variabile aleatoria  $W_{T+h}^{t,x} - W_T^{t,x}$  ha una distribuzione normale  $\mathcal{N}_{0,h}$  ed è indipendente da  $\mathcal{F}_T$ .

**Osservazione 3.** Come conseguenza delle proprietà precedenti si ha

$$W_T^{t,x} \sim \mathcal{N}_{x, T-t}, \quad T \geq t. \quad (\text{A.38})$$

Allora per  $x$  fissato e  $T > t$  la densità di  $W_T^{t,x}$  è

$$y \mapsto \Gamma^*(t, x; T, y), \quad (\text{A.39})$$

dove

$$\Gamma^*(t, x; T, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2(T-t)}\right). \quad (\text{A.40})$$

**Definizione A.2.4.** La funzione  $\Gamma^*(t, x, T, y)$  è chiamata densità di transizione del moto Browniano dal punto iniziale  $(t, x)$  al tempo finale  $T$ .

**Osservazione 4.**  $\Gamma^*$  coincide con la soluzione fondamentale dell'equazione del calore. Pertanto si ha

- $E[\phi(W_T^{t,x})] = \int_{\mathbb{R}} \Gamma^*(t, x; T, y) \phi(y) dy$ , con  $\phi \in C_b(\mathbb{R})$
- D'altra parte

$$\int_{\mathbb{R}} \Gamma^*(t, x; T, y) \phi(y) dy = u(t, x) \quad (\text{A.41})$$

dove  $u(t, x)$  risolve

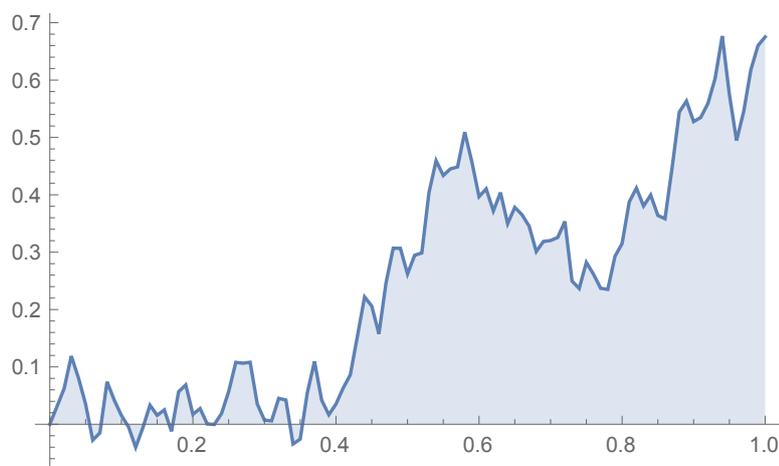
$$\begin{cases} (\frac{1}{2}\partial_{xx} + \partial_t)u(t, x) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}, t < T \\ u(T, x) = \phi(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

È possibile simulare un processo di Wiener con il programma Mathematica, mediante il seguente codice

```
data = RandomFunction[WienerProcess[.3,
    .5], 0, 1, 0.01]
ListLinePlot[%, Filling -> Axis]
```

Si tratta di un processo di Wiener di parametri  $\mu = 0.3, \sigma = 0.5$ .

Si ottiene il seguente grafico



Estendiamo ora la definizione di moto Browniano al caso multidimensionale

**Definizione A.2.5** (Moto Browniano d-dimensionale). *Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$  uno spazio di probabilità con filtrazione. Un moto Browniano d-dimensionale è un processo stocastico  $W = (W_t)_{t \in [0, \infty[}$  in  $\mathbb{R}^d$  tale che*

1.  $W_0 = 0$  *P*-q.s

2.  $W$  è un processo stocastico continuo e adattato alla filtrazione  $\mathcal{F}_t$
3. per  $t > s > 0$ , la variabile  $W_t - W_s$  ha una distribuzione multinormale  $N_0, (t - s)Id$ , dove  $Id$  è la matrice identità  $d \times d$ , ed è indipendente da  $\mathcal{F}_s$ .

Il seguente teorema riguarda alcune conseguenze immediate della definizione di moto Browniano multidimensionale.

**Teorema A.2.6.** *Sia  $W = (W_1, \dots, W_d)$  un moto Browniano  $d$ -dimensionale su  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ . Allora per ogni  $i = 1, \dots, d$  si ha*

1.  $W^i$  è un moto Browniano reale su  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ .
2. Le variabili aleatorie  $W_{t+h}^i - W_t^i$  e  $W_{t+h}^j - W_t^j$  sono indipendenti per  $i \neq j$  e  $t, h \geq 0$ .

*Dimostrazione.* Ciò che vogliamo provare segue dal fatto che, per  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  e  $h > 0$ , abbiamo

$$\Gamma(h, x) := (2\pi h)^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2h}\right) = \prod_{i=1}^d (2\pi h)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2h}\right) \quad (\text{A.42})$$

Proviamo la prima proprietà per  $i = 1$ . È sufficiente provare che

$$W_{t+h}^1 - W_t^1 \sim \mathcal{N}_{0,h} \quad (\text{A.43})$$

Dato  $H \in \mathcal{B}$  e  $h > 0$  abbiamo

$$\begin{aligned} P((W_{t+h}^1 - W_t^1) \in H) &= P((W_{t+h} - W_t) \in H \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}) \\ &= \int_H (2\pi h)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2h}\right) dx_1 \prod_{i=2}^d \int_{\mathbb{R}} (2\pi h)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2h}\right) dx_i \\ &= \int_H (2\pi h)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2h}\right) dx_1 \end{aligned}$$

La seconda proprietà è una diretta conseguenza della (A.42) in quanto, in generale, se due variabili aleatorie ammettono come densità congiunta

con il prodotto tra le densità delle due variabili, allora tali variabili sono stocasticamente indipendenti.  $\square$

# Bibliografia

- [1] M.G., Garroni, J.L., Menaldi, *Green functions for second order parabolic integro-differential problems*. Longman Scientific and Technical, 1992.
- [2] E.E., Levi, *Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche a derivate parziali* in *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1907.
- [3] A., Pascucci, *PDE and marthingale methods in option pricing*. Springer-Verlag, 2001.
- [4] Bernt K. Øksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer, 2003.
- [5] M., Ross, *Introduction to probability models*, Decima Edizione. Elsevier, 2010.