

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

UN MODELLO DI
ASSET ALLOCATION STRATEGICA

Tesi di Laurea in Finanza Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Pascucci

Presentata da:
Marco Vita

III Sessione
Anno Accademico 2013/2014

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è mettere a frutto alcune conoscenze classiche di più settori della Matematica per affrontare in maniera rigorosa lo studio di un problema relativamente moderno di Finanza Matematica: l'Asset Allocation Strategica.

Letteralmente "allocazione del patrimonio", per AAS intendiamo un processo di ripartizione ottimale delle risorse tra diverse attività finanziarie presenti sul mercato.

Il primo vero teorico dell'ottimizzazione di un portafoglio è l'economista americano Harry Markowitz (Chicago, 24 agosto 1927). Grazie ai suoi "*contributi pionieristici nell'ambito dell'economia finanziaria*" vinse il Nobel per l'economia nel 1990, ma già negli anni cinquanta aveva dimostrato capacità notevoli. Dopo essersi interessato all'economia dell'incertezza - di cui si parlerà - proposta da John Von Neumann e Oskar Morgenstern, Markowitz sviluppò la teoria del portafoglio efficiente, dimostrando ciò che per gli economisti era una verità solamente empirica: l'importanza della diversificazione.

Il modello di Asset Allocation che verrà presentato consiste proprio nell'applicazione dei risultati di Markowitz, che saranno quindi ricostruiti fedelmente alla sua teoria.

Quali strumenti matematici sono necessari? Nonostante appartengano a branche diverse della Matematica, verranno sfruttati risultati di Teoria della Probabilità, Analisi Matematica, Calcolo Differenziale nonché Algebra Lineare. Come spesso accade, più concetti matematici apparentemente scorrelati si dimostrano colonne portanti di risultati di altre scienze, perfino di quelle non esatte come l'economia.

L'argomento di questa tesi sintetizza piacevolmente molti ambiti di interesse personale, a partire dalla Finanza Matematica, uno dei rami più fertili della Matematica Applicata. Inoltre, il metodo di ottimizzazione di un portafoglio che verrà presentato è un perfetto argomento di Teoria delle Decisioni (nota anche come Ricerca Operativa), che ho avuto modo di approfondire nel mio percorso di studi. La finalità di quest'altra branca della Matematica Applicata, che ha innumerevoli applicazioni negli ambiti economico, informatico, logistico e nella progettazione di servizi e sistemi di trasporto, è fornire strumenti matematici di supporto alle attività decisionali in cui è necessario coordinare risorse al fine di massimizzare o minimizzare una funzione obiettivo, il tutto formalizzando il problema in un modello matematico.

Indice

1	Elementi di finanza matematica	3
1.1	Mercati discreti e portafogli	3
1.2	Classi di titoli: assets e opzioni	5
1.3	Rischio di un portafoglio	7
2	Asset Allocation Strategica	10
2.1	Diversificazione e correlazione	11
2.2	Caso di un portafoglio con due titoli	13
2.3	La teoria di Markowitz	18
2.3.1	Passo I: Impostazione del modello	18
2.3.2	Passo II: Calcolo della frontiera efficiente	20
2.3.3	Passo III: Scelta del portafoglio ottimale	24
3	Un esempio di applicazione	26
3.1	Caso di studio 1: dati storici a 5 anni	28
3.2	Caso di studio 2: dati storici a 10 anni	32
3.3	Caso di studio 3: analisi delle performance	36
A	Requisiti matematici	39
A.1	Elementi di teoria della probabilità	39
A.1.1	Spazi di probabilità e distribuzioni	39
A.1.2	Variabili aleatorie e processi stocastici	41
A.1.3	Misure di sintesi di fenomeni aleatori	42
A.2	Funzione di utilità e modelli media-varianza	44
A.3	Problema di minimo vincolato	49
	Bibliografia	52

Capitolo 1

Elementi di finanza matematica

In questo capitolo vengono introdotti semplici concetti dal risvolto economico che, con il supporto di costruzioni matematiche opportune, costituiscono un modello funzionale allo studio dei principali problemi di Finanza Matematica. Definita la nozione di mercato discreto è possibile parlare di titoli, portafogli, rendimenti e rischi, concetti basilari per sviluppare la teoria dell'AAS.

I requisiti matematici di teoria della probabilità si trovano nell'appendice A.1.

1.1 Mercati discreti e portafogli

Un mercato finanziario è un luogo, ideale, in cui avviene la compravendita di strumenti finanziari di varia natura che chiamiamo titoli. Per formalizzare questo concetto ci limitiamo a considerare dei modelli di mercati discreti in cui, cioè, le contrattazioni dei titoli possono avvenire in un numero finito di momenti t_k (per semplicità equidistribuiti) all'interno di un intervallo temporale $[0, T]$.

Un insieme di titoli, omogenei o diversificati, all'interno del mercato costituisce un portafoglio. Quantità positive indicano attività, cioè acquisto di titoli, mentre quantità negativa indicano passività, vendita di titoli. Formalizzando si ha:

Definizione 1.1. Dati d titoli a valori in Ω , un *modello di mercato discreto* è un processo stocastico multidimensionale $S = (S^0, \dots, S^d)$ sullo spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) . Definito S , una *strategia di investimento (o portafoglio)* è un processo stocastico in \mathbb{R}^{d+1} :

$$\alpha = (\alpha_n^0, \dots, \alpha_n^d)_{n=0, \dots, N},$$

dove α_n^i rappresenta il numero di titoli i -esimi in portafoglio al tempo t_n .

Definizione 1.2. Il *valore* del portafoglio α è il processo stocastico:

$$V_n(\alpha) = \alpha_n \cdot S_n := \sum_{i=0}^n \alpha_n^i S_n^i, \quad n \in [0, N]. \quad (1.1)$$

Si osservi che, in generale, i valori degli α_n^i possono anche essere negativi: ciò accade in presenza di vendite allo scoperto. E' tuttavia ragionevole richiedere che il portafoglio abbia un valore complessivo non negativo.

Come generalmente accade in finanza, ci limitiamo a considerare la particolare famiglia \mathcal{A} delle strategie autofinanzianti e predicibili, specificando che:

- α è *autofinanziante* se ad ogni contrattazione si reinveste solamente quanto finora guadagnato dalla strategia stessa. Formalmente: $V_{n-1} = \alpha_n S_{n-1}, \quad \forall n \geq 1$.
- α è *predicibile* se viene costruita in base alle informazioni sul mercato disponibili al momento, senza conoscere il futuro.

Osservazione 1.3. Se $\alpha \in \mathcal{A}$ allora, dalla condizione di autofinanziamento si deduce che il *valore iniziale* della strategia è $V_0(\alpha) = \alpha_1 S_0 = \sum_{i=0}^d \alpha_1^i S_0^i$.

Sfruttando l'espressione del valore iniziale, il valore di una strategia autofinanziante e predicibile può essere caratterizzata nel modo seguente:

Osservazione 1.4. Se $\alpha \in \mathcal{A}$, il valore del portafoglio è dato da $V_n(\alpha) = V_0(\alpha) + R_n(\alpha)$

$$\text{dove } R_n(\alpha) := \sum_{k=1}^n (\alpha_k (S_k - S_{k-1})) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^d \alpha_k^i S_{k-1}^i \mu_k^i \right). \quad (1.2)$$

Definizione 1.5. L'espressione $R_n(\alpha)$ nella (1.2) è il *rendimento* del portafoglio α .

Si è pertanto mostrato che il valore finale di una strategia autofinanziante è data dal suo valore iniziale e dal suo rendimento.

Per concludere la costruzione del modello di mercato è importante porre delle condizioni che garantiscano la correttezza delle operazioni finanziarie che vi si compiono. Si vuole, in particolare, escludere la presenza di possibili *arbitraggi*, ovvero delle strategie a costo zero che producono un profitto privo di rischio. Se nella realtà dei mercati finanziari gli arbitraggi esistono, in ambito teorico è logico escludere queste possibilità per costruire un modello sensato. Formalmente si ha:

Definizione 1.6. In un mercato discreto S su (Ω, \mathcal{F}, P) , un *arbitraggio* è una strategia $\alpha \in \mathcal{A}$ tale che:

1. $V_0(\alpha) = 0$;
2. $V_N(\alpha) \geq 0$ P - *quasi sempre*;
3. $P(V_N(\alpha) > 0) > 0$.

Il *Principio di assenza di arbitraggi* afferma che se si ha la certezza che due titoli avranno lo stesso valore in una data futura, allora anche attualmente i due titoli devono avere lo stesso prezzo. Ovviamente, se così non fosse, basterebbe vendere il titolo più costoso e comprare quello meno costoso per avere certezza di guadagno. Formalizzando il principio:

Proposizione 1.7. In un mercato discreto che non ammette strategie di arbitraggio, se $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ e vale $V_N(\alpha) = V_N(\beta)$ P - *q.s.* allora:

$$V_n(\alpha) = V_n(\beta) \quad P - q.s. \quad \forall n = 0, \dots, N.$$

1.2 Classi di titoli: assets e opzioni

Nei mercati finanziari si possono effettuare investimenti su una vasta gamma di prodotti a cui corrispondono, tipicamente, diversi profili di rischio-rendimento. Due grandi categorie principali di titoli (*assets*) sono Azioni e Obbligazioni.

Le *azioni* sono un diritto di proprietà di quote di una società e, pertanto, acquistando parte del suo capitale si diventa partecipi del rischio economico della stessa società. Ne consegue che, generalmente, le azioni non hanno una scadenza finita.

Le *obbligazioni* invece sono titoli rappresentativi di un debito della società emittente (uno Stato o un ente privato) nei confronti del sottoscrittore. Chi acquista un'obbligazione ha il diritto di percepire, normalmente ad una scadenza contrattualmente stabilita, gli interessi del debito e il rimborso del capitale prestato.

Azioni e obbligazioni sono esempi di strumenti finanziari primari, il cui valore non dipende da quello di altri titoli. Notoriamente il mercato azionario, a fronte di rendimenti potenzialmente maggiori, è in generale più rischioso rispetto a quello obbligazionario. Il valore di un'azione è infatti legato all'andamento economico e alle prospettive di crescita della società emittente e, quindi, soggetto a maggiori oscillazioni; il rischio di mancato rimborso nel caso di un'obbligazione è tendenzialmente molto inferiore poiché vincolato al fallimento dell'ente debitore.

Nei mercati si possono inoltre acquistare direttamente anche quote di fondi comuni di investimento, materie prime, titoli monetari e altri tipi di assets. Sono poi presenti strumenti, detti *titoli derivati*, che non sono oggetti direttamente acquistabili sul mercato,

ma sono contratti il cui valore dipende da uno o più titoli primari detti beni *sottostanti*. L'esempio più comune di titolo derivato è l'*opzione*: un contratto che conferisce al possessore il diritto di acquistare (*opzione Call*) o vendere (*opzione Put*) il bene sottostante ad una data futura (*scadenza*) e ad un prezzo (*strike*) prefissati. Il ricavo effettivo che ne deriva è denominato *payoff*. La caratteristica peculiare delle opzioni è che acquistare o vendere il sottostante è un diritto ma non un obbligo, che quindi viene esercitato solo in presenza di un'effettiva convenienza economica.

Si parla di *opzione Europea* se il diritto può essere esercitato solo alla scadenza, mentre un'opzione *Americana* permette l'esercizio in qualunque momento entro la scadenza.

Analizziamo, come esempio, il caso di un'opzione Call Europea che ha i seguenti dati:

- S_t è il prezzo del sottostante al tempo $t \in [0, T]$
- T è la scadenza dell'opzione
- K è lo strike

Alla scadenza T se $S_T < K$ logicamente il diritto di acquistare il sottostante al prezzo dello strike non viene esercitato, per cui il payoff è nullo. Se invece $S_T \geq K$ posso comprare S_T al prezzo più conveniente K , per cui il payoff è $S_T - K$. In definitiva il guadagno di una Call Europea è pari a:

$$\text{payoff} = (S_T - K)^+ = \max\{S_T - K, 0\}.$$

Dal punto di vista finanziario i derivati rappresentano il principale strumento di gestione del rischio. Ad esempio possedere un'opzione Call sul prezzo di una materia prima è una garanzia di acquisto del bene allo strike prefissato, risultando immuni dal rischio di crescita eccessiva del prezzo di mercato. Analogamente una Call su un mutuo bancario a tasso variabile è una assicurazione sul tetto massimo di interesse da pagare.

Per affrontare lo studio dei derivati, oltre a sfruttare l'approccio modellistico-matematico esposto nella sezione 2.1, si utilizzano gli strumenti di Teoria della Probabilità presentati nell'Appendice A.1. Dal ragionamento precedente si evince che una opzione è univocamente determinata dal suo payoff il quale, chiaramente, non è noto al momento dell'acquisto. Trattandosi di un fenomeno casuale appare naturale far ricorso al concetto di variabile aleatoria. Considerando un mercato discreto libero da arbitraggi sullo spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) si hanno le seguenti definizioni:

Definizione 1.8. Un *derivato Europeo* è una variabile aleatoria X sullo spazio (Ω, \mathcal{F}, P) . X rappresenta il payoff dell'opzione con scadenza T .

Definizione 1.9. Un *derivato Americano* è un processo stocastico $(X_n), n \in [0, T]$ su (Ω, \mathcal{F}, P) . X_n rappresenta il payoff dell'opzione se questa viene esercitata al tempo t_n .

La Finanza Matematica si è occupata della costruzione di un modello matematico semplice ma allo stesso tempo realistico, capace di descrivere le proprietà dei titoli finanziari e di affrontare con un approccio razionale lo studio dei derivati. In particolare sono stati presi in considerazione i seguenti problemi che si riportano per completezza del discorso, pur tralasciando la costruzione dei risultati:

- *Valutazione: come stabilire razionalmente un prezzo ragionevole per una opzione?* Questo problema è risolvibile: è sempre possibile determinare un prezzo, detto *neutrale al rischio* che garantisce l'assenza di arbitraggi.
- *Copertura: l'emittente di un titolo derivato come deve investire per assicurarsi di poter coprire il payoff?* In altre parole si tratta di costruire una strategia (detta *replicante*) che assuma a scadenza lo stesso valore del payoff: questo problema è risolvibile solo in determinate condizioni.
- *Tempo d'esercizio ottimale nel caso di un'Opzione USA: come stabilire quando esercitare un derivato americano?* In base all'evoluzione delle informazioni si possono impostare delle condizioni che determinino quando arrestare il processo, dato che è possibile farlo ad ogni istante precedente la scadenza.

1.3 Rischio di un portafoglio

Dopo il rendimento, l'altra caratteristica finanziaria fondamentale di un portafoglio è il *rischio*. L'accezione del termine è comunemente negativa e sembra far riferimento solo a situazioni che posso dar luogo ad una riduzione dei profitti o a delle perdite.

Più precisamente, invece, il rischio è una misura dell'incertezza delle previsioni sui rendimenti attesi; pertanto un maggior livello di rischio sta ad indicare una maggiore probabilità di aumento delle passività ma, allo stesso, anche una maggiore probabilità di riportare guadagni più elevati. Di conseguenza un investitore razionale, avverso al rischio (vedi A.13), è disposto ad investire su titoli più rischiosi solo se tale maggiore assunzione di rischio viene compensata da un maggiore rendimento atteso.

Appare dunque necessario un metodo quantitativo per stimare le prospettive di redditività di un portafoglio: rendimento e rischio. I modelli finanziari, come approfondito in Appendice A.2, fanno ricorso ai parametri caratteristici delle distribuzioni di probabilità: *media* e *varianza*. Ricordando le proprietà di queste misure di sintesi (vedi A.1.3), se la media rappresenta il valore centrale delle possibili variazioni di prezzo, la varianza indica la variabilità, cioè la possibilità di scostamento dalla media. Ai fini pratici è spesso preferibile usare la *deviazione standard* o *volatilità* (radice quadrata della varianza), essendo una misura di variabilità espressa nella stessa dimensione della media.

Intuitivamente la volatilità sembra una valida misura del rischio: è bene però tenere a mente che, in questo contesto, il concetto di “rischio” non indica la maggiore probabilità di perdita ma la tendenza a discostarsi dal valore medio. Il caso seguente chiarisce l’importanza di questa precisazione:

Esempio 1.10. Consideriamo due banali distribuzioni di probabilità asimmetriche, una verso destra (la probabilità di valori sotto la media è maggiore di quella di valori sopra la media) e una verso sinistra, dove avviene la situazione inversa.

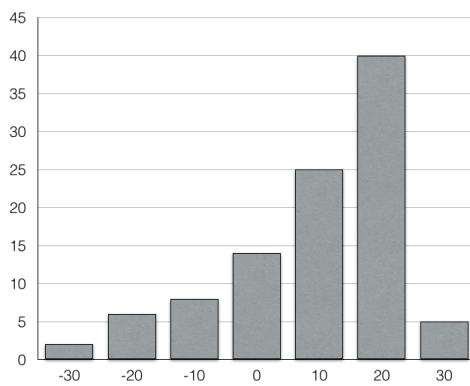


Figura 1.1: distribuzione di probabilità asimmetrica verso destra

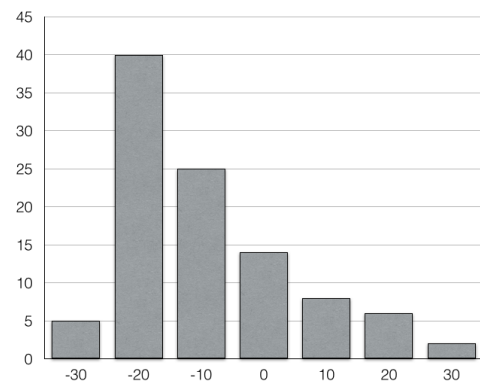


Figura 1.2: distribuzione di probabilità asimmetrica verso sinistra

Le due distribuzioni hanno valori medi esattamente opposti (-9.4 e $+9.4$ rispettivamente) mentre la volatilità è la stessa per entrambi ed è pari a 13.8 . Ciò significa che, per la definizione che abbiamo dato, i due titoli hanno esattamente lo stesso rischio. Stando invece al comune e poco rigoroso utilizzo del termine “rischio” dovremmo aspettarci che il titolo relativo alla figura 1.2 risulti più rischioso, poiché la probabilità di perdita è decisamente più elevata.

Introduciamo ora con un esempio l’approccio media-varianza (di cui si faceva riferimento alla fine del capitolo 1.2) che sta alla base di partenza dell’AAS.

Esempio 1.11. Supponiamo di selezionare 5 mercati finanziari: obbligazioni a breve termine, obbligazioni a medio-lungo termine, azioni europee, azioni americane e azioni giapponesi. Per ognuno di questi abbiamo due indici di riferimento validi per tutti i titoli del mercato stesso: il rendimento atteso $\mu_i = E(R_i)$ (calcolato per esempio attraverso una serie storica) e la volatilità $\sigma_i = \sqrt{E[(R_i - \mu_i)^2]}$.

Classi di attività	Rendimento	Volatilità
Obbligazioni a breve	4.79%	1.39%
Obbligazioni a medio-lungo	5.77%	3.27%
Azioni Europa	5.47%	17.18%
Azioni USA	7.82%	19.39%
Azioni Giappone	4.21%	21.08%

I valori di rendimento medio atteso e volatilità riportati nella tabella precedente sono rappresentati nel *grafico rischio-rendimento* in figura 1.3. Sulla base di questi dati l'investitore deve determinare il suo portafoglio ottimale cercando di massimizzare il rendimento atteso e di minimizzare la volatilità. Il solo primo criterio porterebbe ad investire il 100% del capitale in azioni americane (con il più alto rendimento indipendentemente dalla volatilità) mentre il solo secondo spingerebbe a preferire le obbligazioni a breve termine per il loro minimo rischio.

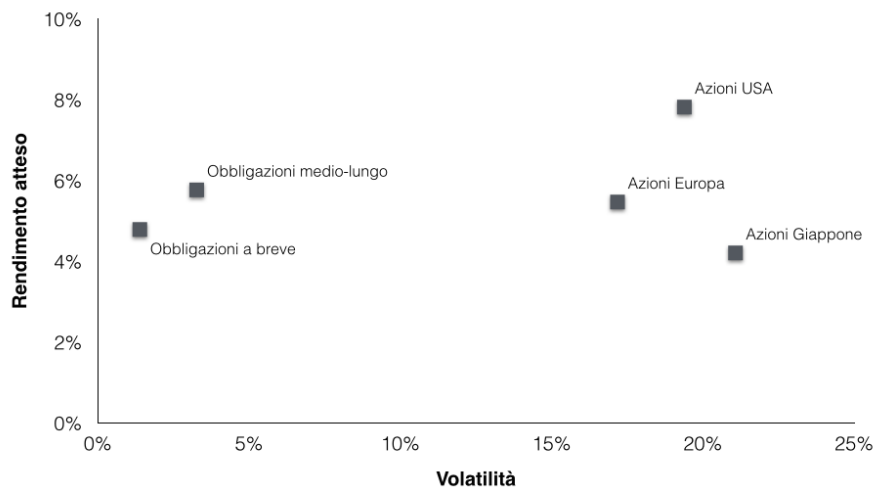


Figura 1.3: Grafico rischio-rendimento

La soluzione corretta è invece costruire razionalmente un portafoglio che contemperi i due criteri. Ovvio è che a parità di rendimento viene scelta l'attività finanziaria con il rischio più basso mentre a parità di rischio è preferito il titolo con il rendimento più alto. Il punto cruciale è che ciò che conta non sono rendimento e volatilità dei singoli titoli ma dell'intero mix di assets: il portafoglio migliore non è quello costituito dai titoli singolarmente meno rischiosi. Ciò è dovuto al fatto che, se il rendimento di un portafoglio è dato dalla media ponderata dei rendimenti dei singoli titoli, il rischio totale non è affatto il rischio medio ponderato delle attività. Matematicamente è l'effetto della *correlazione* che rispecchia perfettamente il fenomeno finanziario della *diversificazione*.

Capitolo 2

Asset Allocation Strategica

Per Asset Allocation, letteralmente “allocazione del patrimonio”, si intende il processo di suddivisione delle quote di ricchezza da investire tra i vari titoli finanziari presenti su uno o più mercati. L’obiettivo è quello di raggiungere un prefissato rendimento atteso e, contemporaneamente, assicurarsi di rendere minima la differenza tra le attese e i risultati effettivi. La teoria di Markowitz fornisce un metodo razionale per stabilire una ripartizione ottimale di ciascuna attività finanziaria all’interno di un portafoglio, puntando al raggiungimento del miglior rapporto rischio-rendimento.

Come discusso in precedenza e approfondito nell’Appendice A.2, il problema può essere affrontato mediante l’approccio media-varianza che ci permette di fare riferimento solamente ai dati di media e variabilità; quest’ultima sarà utile esprimerla in molteplici misure: varianza, volatilità o correlazione.

Ancora prima di entrare nel vivo del procedimento di AAS sono necessarie due operazioni preliminari:

- la scelta dell’*orizzonte temporale* di investimento. Il periodo di allocation è cruciale in relazione agli obiettivi dell’investitore: a breve termine (3, 6 o 12 mesi), ad esempio, le azioni possono avere forte variabilità al contrario delle notoriamente tranquille obbligazioni. A lungo termine (ordine di anni), invece, anche le obbligazioni assumono rischi di controparte come l’inflazione. L’orizzonte di investimento è strettamente legato alle caratteristiche del soggetto: età, disponibilità economica, situazione lavorativa, prospettive future, situazione familiare, ect.
- l’*insieme dei mercati* su cui l’investitore ritiene di investire. Anche questa è un’operazione preliminare di fondamentale importanza: la performance finale di un investimento dipende molto di più dalla tipologia di mercato o di asset class in cui si è deciso di investire, piuttosto che dalla scelta dei singoli titoli da inserire in portafoglio. Ad esempio potrebbe essere funzionale limitarsi a mercati di certi paesi o piuttosto escludere quelli in cui sono presenti vincoli giuridici o situazioni

correnti sfavorevoli. E' interessante notare che, se si è in possesso di sufficienti informazioni, allora può essere utile inserire anche mercati meno abituali, demandando l'eventuale esclusione al processo di allocation che produrrà dei pesi nulli in caso di sfavorevole rapporto rischio-rendimento.

Fissati orizzonte temporale e mercati di riferimento, il modello di Markowitz di selezione ottimale del portafoglio stabilisce il peso da assegnare a ciascun asset. Suddividiamo il processo di AAS in tre passi:

- *l'impostazione del modello* attraverso la stima di media e variabilità dei mercati di riferimento.
- La costruzione della *frontiera efficiente*, una curva nel piano volatilità-media che rappresenta il luogo geometrico dei portafogli che risultano ottimali in termini di minimo rischio per dato rendimento e di massimo rendimento per minimo rischio.
- *La scelta del portafoglio ottimale* tra tutti quelli della frontiera efficiente. Questa operazione avviene in base alle preferenze soggettive dell'investitore in termini di propensione al rischio.

Il processo di Asset Allocation Strategica, tipicamente adottato secondo un orizzonte temporale di medio/lungo periodo, potrebbe necessitare di alcuni adattamenti alla luce di situazioni di mercato contingenti. Per sfruttare dei particolari trend di mercato nel breve periodo, l'allocation degli investimenti viene modificata attraverso il processo di Asset Allocation Tattica. Quest'operazione, seppur finalizzata a variazioni temporanee, deve comunque rispettare un sufficiente livello di coerenza con la strategia globale.

2.1 Diversificazione e correlazione

Uno degli errori più frequenti negli investimenti finanziari è l'eccessiva concentrazione sulle singole opportunità di profitto sottovalutando il profilo di rischio/rendimento complessivo del portafoglio. Come già detto infatti, massimizzare il rendimento o minimizzare il rischio in termini assoluti non rappresenta una intelligente asset allocation. L'accurata suddivisione degli investimenti deve tener conto non solo di media e volatilità dei mercati, ma anche della loro interdipendenza.

A tal proposito risulta naturale fare ricorso agli indicatori statistici di covarianza e correlazione, definiti rigorosamente dalle A.15 e A.17. Nell'Appendice si chiarisce anche che il coefficiente di correlazione σ , essendo il valore della covarianza standardizzata dal prodotto delle deviazioni standard, è un valore che appartiene all'intervallo $[-1, +1]$: i casi estremi si ottengono se e solo se esiste una perfetta relazione lineare tra le due variabili (decrescente o crescente); il valore $\sigma = 0$ rappresenta il caso di non correlazione. Esaminiamo nell'esempio seguente un caso di correlazione negativa tra due titoli azionari:

Esempio 2.1. La figura 2.1 mostra l'andamento in borsa dal 2008 ad oggi dei titoli di due colossi mondiali della tecnologia: la *Apple, Inc.* e la *Sony Corporation*. Il grafico rispecchia esattamente le nostre aspettative: il fatto che negli ultimi anni la Apple abbia dominato sulla concorrenza non rappresenta di certo una novità.

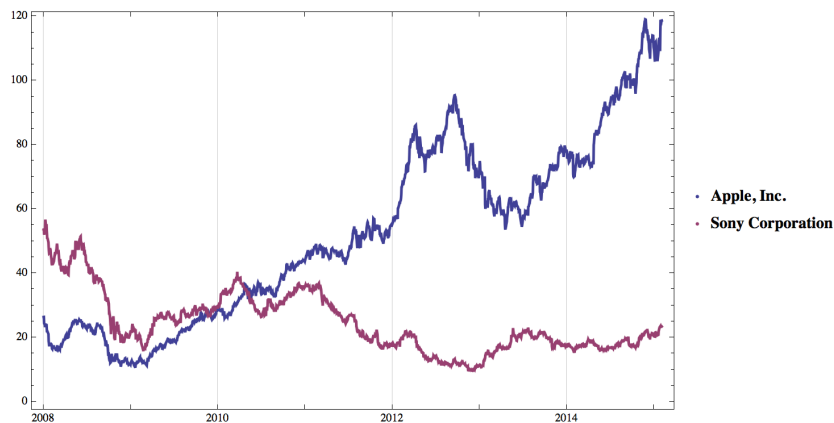


Figura 2.1: Andamento azioni Apple e Sony dal 2008 ad oggi

La figura 2.2 costituisce il grafico di dispersione dei due titoli: i punti indicano le coppie dei rendimenti nel periodo considerato e mostrano una netta contro-tendenza, cioè al crescere del titolo Apple, la quotazione della Sony è gradualmente diminuita. La *retta di regressione* disegnata nel grafico indica la migliore sintesi dei punti osservati: la sua inclinazione negativa corrisponde alla contro-tendenza dei rendimenti. Calcolando la correlazione dei due titoli si ottiene infatti il valore -0.635 .

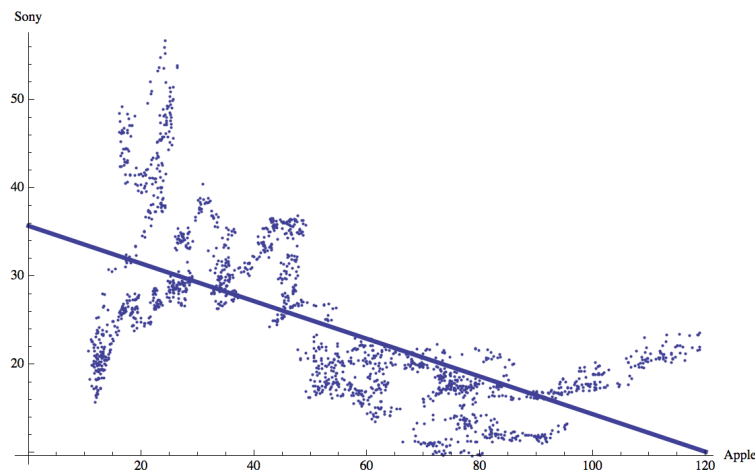


Figura 2.2: Correlazione negativa tra i due titoli

2.2 Caso di un portafoglio con due titoli

Per comprendere il procedimento generale di AAS è utile partire dal caso semplificato della costruzione di un portafoglio con solo due titoli, che ora analizziamo nel dettaglio.

In un mercato discreto siano dati due titoli 1, 2 con rendimenti R_1, R_2 , medie m_1, m_2 e volatilità σ_1, σ_2 , rispettivamente. Assumiamo inoltre che $m_1 < m_2$ e $\sigma_1 < \sigma_2$. Posto $\alpha \in [0, 1]$ costruiamo un portafoglio suddividendo il nostro capitale con una quota percentuale $1 - \alpha$ del titolo 1 e una quota α del titolo 2, ottenendo così un rendimento complessivo:

$$R_P = \alpha R_2 + (1 - \alpha)R_1$$

Calcoliamo valore atteso m_P e varianza σ_P^2 del portafoglio P:

$$\begin{aligned} m_P &= E[R_P] = E[\alpha R_2 + (1 - \alpha)R_1] \\ &= \alpha E[R_2] + (1 - \alpha)E[R_1] \\ &= E[R_1] + \alpha(E[R_2] - E[R_1]) \\ &= m_1 + \alpha(m_2 - m_1) \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= Var(R_P) = Var(\alpha R_2 + (1 - \alpha)R_1) \\ &= \alpha^2 Var(R_2) + (1 - \alpha)^2 Var(R_1) + 2\alpha(1 - \alpha)Cov(R_1, R_2) \\ &= \alpha^2 \sigma_2^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{12} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ricordando la (A.8), è utile sostituire la covarianza con la formula contenente il coefficiente di correlazione tra i due titoli, che denotiamo con ρ :

$$\sigma_{12} = \rho\sigma_1\sigma_2$$

per cui la varianza del portafoglio diventa:

$$\sigma_P^2 = \alpha^2 \sigma_2^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\rho\sigma_1\sigma_2 \tag{2.3}$$

La varianza del portafoglio dipende quindi sia da α , un parametro decisionale dell'investitore, sia dal coefficiente di correlazione ρ , che è invece legato alle caratteristiche dei due titoli. Studiamo ora l'andamento della varianza in funzione di questi due parametri.

Caso $\rho = 1$.

Nel caso in cui esista una perfetta correlazione lineare positiva tra le due variabili di rendimento, dalla (2.3) il valore della varianza diventa:

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= \alpha^2 \sigma_2^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_1\sigma_2 \\ &= [\alpha\sigma_2 + (1 - \alpha)\sigma_1]^2 \\ &= [\sigma_1 + \alpha(\sigma_2 - \sigma_1)]^2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Essendo $\sigma_1 < \sigma_2$ possiamo togliere il quadrato da entrambi i membri e determinare la volatilità del portafoglio:

$$\sigma_P = \sigma_1 + \alpha(\sigma_2 - \sigma_1) \quad (2.5)$$

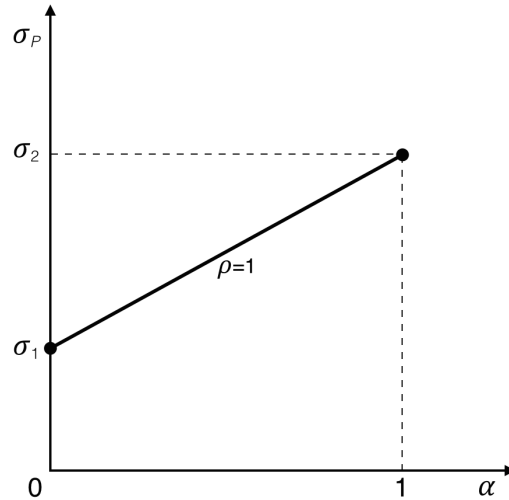


Figura 2.3: volatilità del portafoglio con due titoli con $\rho = 1$

Il risultato stabilisce che la volatilità del portafoglio è funzione lineare del parametro α , come mostrato nella figura 2.3. In presenza, quindi, di correlazione pari a 1 la volatilità del portafoglio cresce al crescere della ricchezza investita nel titolo 2, senza alcun effetto di diversificazione.

Caso $\rho = -1$.

Se la correlazione tra i due titoli è perfettamente negativa, sostituendo $\rho = -1$ nella (2.3) si ottiene:

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= \alpha^2 \sigma_2^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_1^2 - 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_1\sigma_2 \\ &= [\alpha\sigma_2 - (1 - \alpha)\sigma_1]^2 \\ &= [\alpha(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_1]^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

L'espressione dentro la parentesi quadra non è più sempre positiva, pertanto per ricavare il valore della volatilità abbiamo:

$$\sigma_P = |\alpha(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_1| = \begin{cases} \alpha(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_1, & \text{se } \alpha \geq \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \\ \sigma_1 - \alpha(\sigma_1 + \sigma_2), & \text{se } \alpha < \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \end{cases} \quad (2.7)$$

Abbiamo così ottenuto due relazioni lineari corrispondenti ai segmenti in figura 2.4 che si intersecano nel punto $\alpha^* = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$ dove la volatilità del portafoglio è nulla.

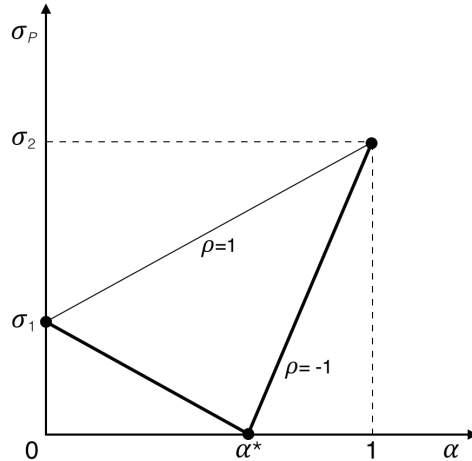


Figura 2.4: volatilità del portafoglio con due titoli con $\rho = -1$

Si deduce quindi che, disponendo di due titoli rischiosi correlati tra loro in modo perfettamente negativo, è possibile annullare completamente la volatilità combinando i due titoli nel portafoglio individuato dall'investimento α^* .

Tutte le possibili combinazioni dei due titoli, per qualsiasi valore di ρ tra -1 e +1, sono rappresentabili all'interno del triangolo mostrato in figura 2.4, tra cui quella del caso di correlazione nulla che affrontiamo di seguito.

Caso $\rho = 0$.

Se la correlazione tra i due titoli è nulla, sostituendo $\rho = 0$ nella (2.3), la varianza del portafoglio diventa:

$$\sigma_P^2 = \alpha^2 \sigma_2^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_1^2 \quad (2.8)$$

Si tratta di una funzione quadratica in α della quale possiamo determinare gli estremi attraverso il calcolo dei valori critici tramite la derivata prima:

$$\frac{\partial \sigma_P^2}{\partial \alpha} = 2\alpha \sigma_2^2 - 2(1 - \alpha) \sigma_1^2 = 0$$

da cui ricaviamo il punto $\alpha^{**} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. Attraverso il metodo delle derivate

successive, osservando che la derivata seconda $\frac{\partial^2 \sigma_P^2}{\partial \alpha^2} = 2\sigma_2^2 + 2\sigma_1^2$ è sempre positiva, possiamo affermare che α^{**} è un punto di minimo.

Da notare che se il punto α^{**} minimizza la varianza, allora minimizza anche la sua radice quadrata, cioè la volatilità. La figura 2.5 rappresenta graficamente la relazione tra volatilità σ_P e quota di investimento α .

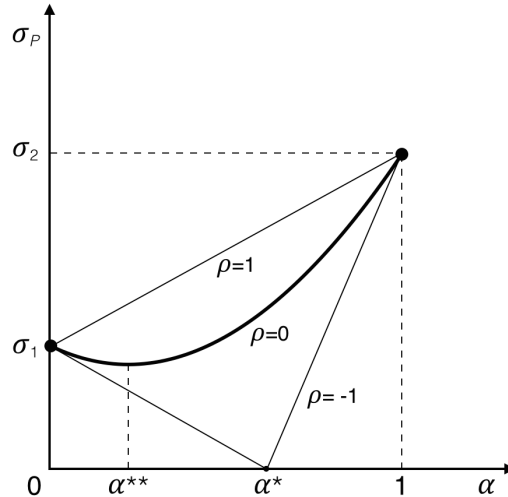


Figura 2.5: volatilità del portafoglio con due titoli con $\rho = 0$

Si osserva pertanto che esiste una combinazione dei due titoli determinata dal valore α^{**} per la quale la volatilità del portafoglio costruito è minore della più bassa volatilità presente sul mercato, cioè σ_1 .

Il risultato appena ottenuto è noto come *principio della diversificazione di portafoglio*: se le correlazioni tra i titoli sono sufficientemente basse, allora la volatilità del portafoglio è minore della volatilità dei singoli titoli.

Trasferiamo ora tutti i risultati appena descritti dal piano (α, σ_P) al piano volatilità-rendimento medio (σ_P, m_P) . Dalla (2.1) sappiamo che il valore atteso del rendimento è $m_P = m_1 + \alpha(m_2 - m_1)$, pertanto c'è una dipendenza lineare tra α e m_P .

Come nel ragionamento precedente, andiamo a considerare i casi limite della correlazione:

Caso $\rho = 1$.

Nel caso di perfetta correlazione lineare positiva, dalla (2.5) ricaviamo:

$$\alpha = \frac{\sigma_P - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}$$

Sostituendo questo valore nella (2.1) otteniamo la relazione lineare tra il rendimento medio di portafoglio e la sua volatilità:

$$m_P = m_1 + \frac{\sigma_P - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}(m_2 - m_1) \tag{2.9}$$

Al variare di α otteniamo quindi un segmento nel piano volatilità-rendimento medio, come mostrato in figura 2.6. Gli estremi di questo segmento sono (σ_1, m_1) e (σ_2, m_2) che si ottengono rispettivamente quando α vale 0 o 1, cioè investendo solo sul titolo meno rischioso o sul titolo più rischioso.

Caso $\rho = -1$.

Nel caso di correlazione $\rho = -1$ abbiamo in precedenza mostrato che esiste un valore di α che annulla la volatilità del portafoglio.

Sostituendo questo valore $\alpha^* = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$ nella relazione (2.1) otteniamo:

$$m_P^* = m_1 + \alpha^*(m_2 - m_1) \quad (2.10)$$

Per gli altri valori di α , ripetendo lo studio del valore assoluto della (2.7) abbiamo:

$$m_P = \begin{cases} m_1 + \frac{\sigma_P + \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}(m_2 - m_1), & \text{se } \alpha \geq \alpha^* \\ m_1 - \frac{\sigma_P - \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}(m_2 - m_1), & \text{se } \alpha < \alpha^* \end{cases} \quad (2.11)$$

Anche nel piano media-volatilità, come in figura 2.6, abbiamo due segmenti che si intersecano nel punto di minima volatilità, che corrisponde al portafoglio α^* .

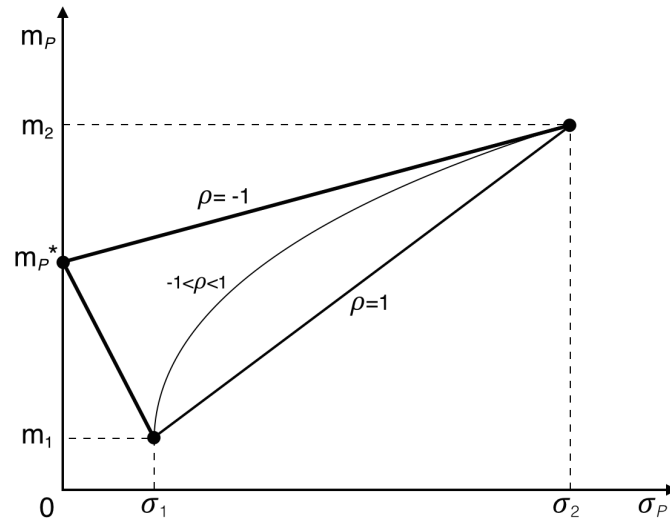


Figura 2.6: relazione tra media e volatilità al variare di α

Nello spazio (σ_P, m_P) ritroviamo lo stesso triangolo del precedente risultato: tutte le combinazioni possibili dei due titoli si trovano all'interno del triangolo. In particolare, per ogni valore della correlazione $\rho \in]-1, 1[$ si viene a definire una curva, detta *frontiera efficiente* che esprime la relazione tra volatilità e rendimento di un portafoglio.

2.3 La teoria di Markowitz

2.3.1 Passo I: Impostazione del modello

In una fase preliminare sono stati definiti l'orizzonte temporale e l'insieme dei mercati di investimento. Entriamo ora nel vivo dell'Asset Allocation definendo i dati del problema, siano quindi:

- N titoli finanziari inseriti nel portafoglio P , indicizzati da $i = 1, \dots, N$,
- R_i i rendimenti di ciascun titolo,
- m_i le medie, σ_i^2 le varianze e σ_i le volatilità dei rendimenti di ogni titolo $i = 1, \dots, N$,
- σ_{ij} la covarianza tra i titoli i e j ,
- W_0 la ricchezza iniziale dell'investitore.

L'obiettivo del problema è quello di determinare il vettore (w_1, \dots, w_N) dei pesi da assegnare ad ogni titolo, costruendo così un portafoglio in modo da massimizzare l'utilità attesa della ricchezza a fine periodo. Siano quindi:

- $W = W_0 \left(1 + \sum_{i=1}^N w_i R_i\right) \equiv W_0 (1 + R_P)$ la ricchezza futura,
- $U : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di utilità cardinale quadratica (si veda A.2).

Il problema di massimizzazione diventa pertanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{w_1, \dots, w_N} E[U(W)] \\ W = W_0 (1 + R_P) \\ \sum_{i=1}^N w_i = 1 \end{array} \right.$$

che, dalla definizione di ricchezza futura, si può riscrivere in maniera equivalente come:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{w_1, \dots, w_N} E[U(R_P)] \\ R_P = \sum_{i=1}^N w_i R_i \\ \sum_{i=1}^N w_i = 1 \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Sfruttiamo ora l'ipotesi di funzione quadratica: come illustrato nell'Appendice A.2, l'utilità attesa si semplifica in una funzione detta utilità indiretta media-varianza:

$$E[U(R_P)] = \Psi(+m_P, -\sigma_P^2)$$

dove m_P e σ_P^2 sono rispettivamente media e varianza del rendimento del portafoglio P .

Per risolvere il problema è utile introdurre i vettori ausiliari

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ \dots \\ m_N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

(i cui trasposti saranno indicati usando l'apice ') e la matrice di covarianza

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \dots & \sigma_{NN} \end{bmatrix} = [\sigma_{ij}]_{i,j=1,\dots,N}.$$

Come dimostrato dalla (A.16), la matrice $\mathbf{\Gamma}$ è simmetrica e semidefinita positiva. Per semplicità introduciamo l'ipotesi aggiuntiva che $\mathbf{\Gamma}$ sia definita positiva.

Esprimiamo ora in forma vettoriale rendimento, media e varianza del portafoglio:

$$R_P = \sum_{i=1}^N w_i R_i = \mathbf{R}'\mathbf{w}, \quad (2.13)$$

$$m_P = \sum_{i=1}^N w_i m_i = \mathbf{m}'\mathbf{w}, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= Var(R_P) = Cov\left(\sum_{i=1}^N w_i R_i, \sum_{j=1}^N w_j R_j\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^N Cov(R_i, R_j) w_i w_j \\ &= \sum_{i,j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j = \mathbf{w}'\mathbf{\Gamma}\mathbf{w}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

In definitiva possiamo riscrivere il sistema 2.12 di massimizzazione dell'utilità attesa nel modo seguente:

$$\begin{cases} \max_{w_1, \dots, w_N} \Psi(+m_P, -\sigma_P^2) \\ m_P = \mathbf{m}'\mathbf{w} \\ \sigma_P^2 = \mathbf{w}'\mathbf{\Gamma}\mathbf{w} \\ \mathbf{1}'\mathbf{w} = 1 \end{cases} \quad (2.16)$$

2.3.2 Passo II: Calcolo della frontiera efficiente

Per risolvere il sistema 2.16 è necessario sfruttare la proprietà dell'utilità indiretta media-varianza per la quale la media ha un effetto positivo sull'utilità mentre a varianza maggiore corrisponde un minore livello di benessere. Ciò si traduce nel fatto pratico che, a parità di media, l'investitore sceglie logicamente il portafoglio di minima varianza.

Sia quindi m^* il valore fissato della media del portafoglio P : risolvere il problema di massimizzazione 2.16 equivale pertanto a risolvere il sotto-problema di minimizzazione vincolato seguente:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{w}} \frac{1}{2} \mathbf{w}' \mathbf{\Gamma} \mathbf{w} \\ \mathbf{m}' \mathbf{w} = m^* \\ \mathbf{1}' \mathbf{w} = 1 \end{cases} \quad (2.17)$$

dove il coefficiente $1/2$ è aggiunto per comodità di calcolo.

Esiste cioè, ed è la soluzione del problema, un vettore dei pesi $\mathbf{w}(m^*)$ che minimizza la varianza del portafoglio e dipende dal valore noto m^* .

Tale soluzione del problema di minimo vincolato si determina utilizzando il teorema dei moltiplicatori di Lagrange (presentato nell'Appendice A.3) mediante la lagrangiana:

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \mathbf{w}' \mathbf{\Gamma} \mathbf{w} - \lambda_1 (\mathbf{1}' \mathbf{w} - 1) - \lambda_2 (\mathbf{m}' \mathbf{w} - m^*) \quad (2.18)$$

Un vettore che minimizza la funzione $\mathbf{w}' \mathbf{\Gamma} \mathbf{w}$ va ricercato tra i punti critici della lagrangiana \mathcal{L} , pertanto impostiamo il seguente sistema di condizioni del primo ordine:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}} = \frac{1}{2} 2 \mathbf{\Gamma} \mathbf{w} - \lambda_1 \mathbf{1} - \lambda_2 \mathbf{m} = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = \mathbf{1}' \mathbf{w} - 1 = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = \mathbf{m}' \mathbf{w} - m^* = 0 \quad (2.21)$$

Osserviamo che le condizioni (2.20) e (2.21) impongono esattamente i vincoli del sistema (2.17) e che la derivata parziale di \mathcal{L} rispetto a \mathbf{w} ci permette di determinare il valore ottimale dei pesi del portafoglio in funzione dei parametri lagrangiani λ_1 e λ_2 , attraverso il seguente procedimento:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma} \mathbf{w} &= \lambda_1 \mathbf{1} + \lambda_2 \mathbf{m} \\ \mathbf{w} &= \lambda_1 \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{1} + \lambda_2 \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{m} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Da notare che $\mathbf{\Gamma}^{-1}$ esiste poiché abbiamo supposto $\mathbf{\Gamma}$ definita positiva, quindi invertibile.

Moltiplicando a sinistra entrambi i membri della (2.22) rispettivamente per i vettori $\mathbf{1}'$ e \mathbf{m}' , sfruttando le condizioni (2.20) e (2.21) si ottiene il sistema in due equazioni e due incognite λ_1 e λ_2 :

$$\begin{cases} \mathbf{1}'\mathbf{w} = 1 = \lambda_1\mathbf{1}'\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{1} + \lambda_2\mathbf{1}'\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{m} \\ \mathbf{m}'\mathbf{w} = m^* = \lambda_1\mathbf{m}'\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{1} + \lambda_2\mathbf{m}'\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{m} \end{cases} \quad (2.23)$$

Definiamo, per comodità di calcolo, le seguenti quantità (scalari) che dipendono soltanto dai parametri noti \mathbf{m} e $\mathbf{\Gamma}$:

$$A = \mathbf{1}'\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{1}; \quad B = \mathbf{1}'\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{m}; \quad C = \mathbf{m}'\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{m}; \quad \Delta = AC - B^2.$$

Osservazione 2.2. Risulta utile osservare le seguenti proprietà:

- Avendo supposto che la matrice di covarianza $\mathbf{\Gamma}$ sia definita positiva, $\mathbf{\Gamma}$ è invertibile e la sua inversa è anch'essa definita positiva. Pertanto $A > 0$ e $C > 0$.
- Per la simmetria di $\mathbf{\Gamma}^{-1}$ si ha che $\mathbf{m}'\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{1} = \mathbf{1}'\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{m} = B$.
- La quantità Δ risulta strettamente positiva, infatti:

$$0 < (\mathbf{A}\mathbf{m} - B\mathbf{1})'\mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{m} - B\mathbf{1}) = A^2C - 2AB^2 + B^2A = A(AC - B^2)$$

da cui, essendo $A > 0$, viene che $AC - B^2 > 0$.

Possiamo quindi riscrivere il sistema (2.23) nella semplice forma:

$$\begin{cases} A\lambda_1 + B\lambda_2 = 1 \\ B\lambda_1 + C\lambda_2 = m^* \end{cases} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m^* \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

da cui si ricavano le soluzioni:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ m^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} C & -B \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{C - m^*B}{\Delta} \\ \frac{m^*A - B}{\Delta} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Sostituendo i valori di λ_1 e λ_2 nella (2.22) si ottiene il vettore ottimale dei pesi:

$$\mathbf{w} = \frac{C - m^*B}{\Delta}\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{1} + \frac{-B + m^*A}{\Delta}\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{m} \quad (2.26)$$

Occorre precisare che, alla luce delle condizioni imposte nel problema di minimizzazione, l'unico vincolo sul vettore dei pesi è che la sommatoria delle sue componenti sia 1, ovvero

che tutta la ricchezza a disposizione venga investita. Non essendoci alcuna condizione sul segno dei pesi significa che questi possono anche essere negativi cioè, in altri termini, sono ammesse vendite allo scoperto, anche se nella realtà dei mercati finanziari questa possibilità è molto spesso esclusa.

Fissata la media m^* , la minima varianza del portafoglio P è dunque:

$$\begin{aligned}
 \sigma_P^2 &= \mathbf{w}'\mathbf{\Gamma}\mathbf{w} \\
 &= \frac{1}{\Delta^2} ((C - m^*B)\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{1} + (m^*A - B)\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{m})' ((C - m^*B)\mathbf{1} + (m^*A - B)\mathbf{m}) \\
 &= \frac{1}{\Delta^2} ((C - m^*B)^2A + 2(C - m^*B)(m^*A - B)B + (m^*A - B)^2C) \\
 &= \frac{1}{\Delta^2} ((A^2C - AB^2)m^{*2} + (2B^3 - 2ABC)m^* + AC^2 + B^2C) \\
 &= \frac{1}{\Delta} (Am^{*2} - 2Bm^* + C)
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Si tratta di una funzione del parametro m^* e dei dati \mathbf{m} e $\mathbf{\Gamma}$.

Nello spazio media-varianza la (2.27) descrive chiaramente una parabola, mentre nello spazio media-volatilità (σ_P, m^*) la stessa equazione descrive un'iperbole, infatti:

$$A\sigma_P^2 = \frac{1}{\Delta}(A^2m^{*2} - 2ABm^* + AC + B^2 - B^2) = \frac{1}{\Delta}((Am^* - B)^2 - \Delta) = \frac{(Am^* - B)^2}{\Delta} + 1$$

da cui: $A\sigma_P^2 - \frac{(Am^* - B)^2}{\Delta} = 1$.

Il punto di minima volatilità (che corrisponde al punto di minima varianza) si calcola facilmente annullando la derivata rispetto a m^* dell'espressione (2.27), ottenendo:

$$\frac{\partial \sigma_P^2}{\partial m^*} = \frac{2}{\Delta}(Am^* - B), \quad \text{da cui } m_{min}^* = \frac{B}{A}; \tag{2.28}$$

$$\sigma_{min}^2 = \frac{B^2/A - 2B^2/A + C}{\Delta} = \frac{1}{A}, \quad \text{da cui } \sigma_{min} = \sqrt{\frac{1}{A}}. \tag{2.29}$$

Si tratta effettivamente di un punto di minimo, poiché $\frac{\partial^2 \sigma_P^2}{\partial m^{*2}} = \frac{2}{\Delta}A > 0$.

Sostituendo i valori ottenuti nelle equazioni (2.25), si ricavano i pesi del portafoglio corrispondente al punto di minima volatilità:

$$\begin{cases} \lambda_{1_{min}} = \frac{C - B^2/A}{\Delta} = \frac{1}{A} \\ \lambda_{2_{min}} = \frac{B - B}{\Delta} = 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

che determinano il vettore $\mathbf{w}_{min} = \frac{1}{A}\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{1}$.

Dell'iperbole ottenuta ci interessa solamente la parte di grafico in cui la volatilità è positiva, rappresentata in figura 2.7: tutti i punti della curva determinano i portafogli di minima varianza per data media m^* . Notiamo che per ogni valore di $m^* \neq B/A$ esistono due di questi portafogli: come già detto, però, un soggetto razionale sceglierà, a parità di volatilità, la media più elevata. Pertanto la *frontiera efficiente*, data dal ramo superiore dell'iperbole, costituisce il luogo geometrico dei punti (portafogli) che hanno massima media per data volatilità e minima volatilità per data media.

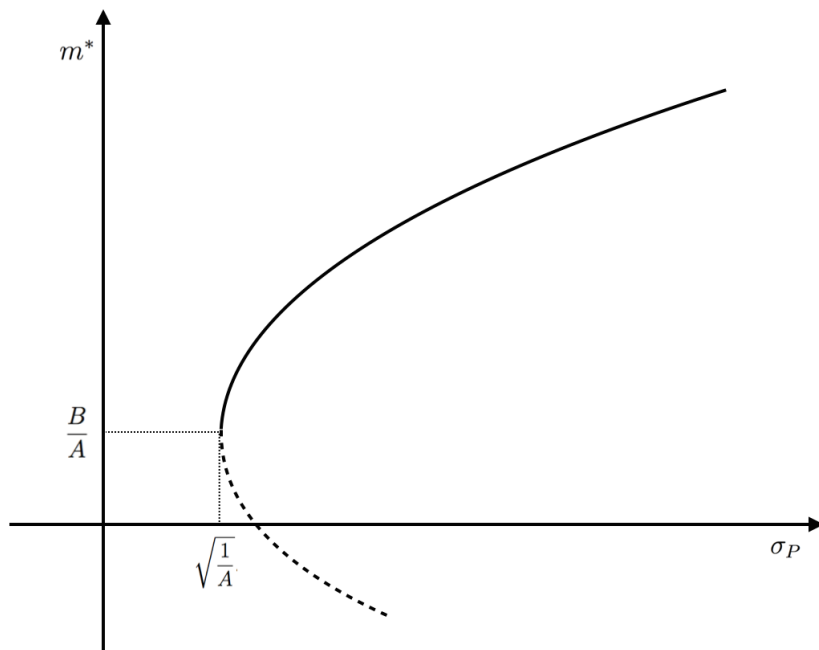


Figura 2.7: frontiera efficiente nello spazio media-volatilità

Un investitore razionale con preferenza per la media e avversione per la volatilità sceglierà un portafoglio appartenente alla frontiera efficiente: i punti che stanno sopra tale curva rappresentano portafogli impossibili poiché, per costruzione, per data media non esistono portafogli con volatilità inferiore a quella espressa sulla frontiera. I punti sotto l'iperbole, invece, sono portafogli possibili ma non ottimali, poiché esiste sempre un portafoglio sulla frontiera con minor rischio o con maggior rendimento medio.

2.3.3 Passo III: Scelta del portafoglio ottimale

Nei passaggi precedenti abbiamo costruito la frontiera efficiente, luogo geometrico dei portafogli con minima volatilità per data media. Su tale curva sono però presenti infiniti punti: il nostro obiettivo è determinare un unico portafoglio ottimale che rappresenti la scelta migliore per un investitore, in base alle sue caratteristiche.

A tale scopo ricordiamo l'originario problema di massimizzazione dell'utilità attesa che avevamo formalizzato nella (2.16):

$$\begin{cases} \max_{w_1, \dots, w_N} \Psi(+m_P, -\sigma_P^2) \\ m_P = \mathbf{m}'\mathbf{w} \\ \sigma_P^2 = \mathbf{w}'\mathbf{\Gamma}\mathbf{w} \\ \mathbf{1}'\mathbf{w} = 1 \end{cases}$$

dove $\Psi(+m_P, -\sigma_P^2)$ è la funzione di utilità indiretta media-varianza.

Nello spazio (σ_P, m^*) andiamo a costruire le *curve di isoutilità*, ovvero i luoghi geometrici dei punti (portafogli) le cui combinazioni di media e volatilità determinano lo stesso valore di utilità Ψ per l'investitore.

Per il calcolo delle curve di isoutilità, affinché $\Psi(+m_P, -\sigma_P^2) = k \in \mathbb{R}$, è necessario imporre che il differenziale della funzione di utilità sia nullo:

$$d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial m_P} dm_P + \frac{\partial\Psi}{\partial \sigma_P} d\sigma_P = 0$$

Sfruttando il fatto che rendimento medio e volatilità hanno rispettivamente un effetto positivo e negativo sull'utilità (cioè $\partial\Psi/\partial m_P > 0$ e $\partial\Psi/\partial \sigma_P < 0$), si deduce che il valore dell'inclinazione della curva in ogni punto è positiva:

$$\frac{\partial m_P}{\partial \sigma_P} = \frac{-\partial\Psi/\partial \sigma_P}{\partial\Psi/\partial m_P} > 0 \quad (2.31)$$

Il valore ricavato nella (2.31) è detto *saggio marginale di sostituzione*: tale quantità indica di quanto deve aumentare il rendimento, a fronte di un aumento unitario di volatilità, affinché il soggetto mantenga inalterato il proprio livello di benessere.

Il carattere crescente delle curve di isoutilità (rappresentate in figura 2.8) indica che a maggiore volatilità deve corrispondere una sorta di *premio soggettivo al rischio*, ovvero un maggior rendimento atteso.

Ogni investitore ha le proprie soggettive preferenze in termini di rischio e rendimento e, di conseguenza, le proprie curve di isoutilità. Vi sono vari metodi per esplicitare, più o meno

analiticamente, l'avversione al rischio di un soggetto economico: spesso si utilizzano dei questionari diretti sul comportamento dell'investitore di fronte a rischi finanziari, oppure si utilizzano modelli che sfruttano le condizioni socio-demografiche quali età, reddito, condizione familiare, impiego, ect.

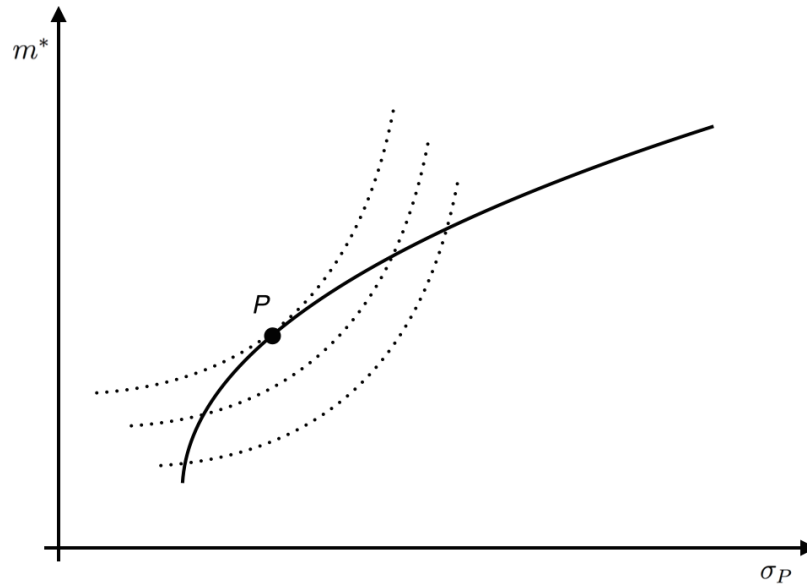


Figura 2.8: curve di isoutilità e frontiera efficiente nello spazio media-volatilità

In definitiva, le informazioni provenienti dai mercati ci permettono di costruire la frontiera dei portafogli efficienti, mentre le informazioni sulle preferenze dell'investitore consentono la determinazione delle curve di isoutilità. L'unione di tali informazioni individuano, finalmente, il risultato del problema di Markowitz: il portafoglio ottimo è individuato dal punto di intersezione della frontiera efficiente con la più alta curva di isoutilità. Tale portafoglio è la soluzione del problema di Asset Allocation Strategica.

Capitolo 3

Un esempio di applicazione

Presentiamo ora un esempio pratico di applicazione del modello di ottimizzazione di un portafoglio costruito nelle sezioni precedenti. Per ricavare dati storici, manipolarli e risolvere il problema di Asset Allocation è stato utilizzato il software *Wolfram Mathematica*, un notevole ambiente di calcolo simbolico nonché potente linguaggio di programmazione.

Ricordiamo di aver definito due operazioni preliminari:

- la scelta dell'insieme dei mercati su cui investire: per semplificare il problema ci limitiamo a considerare 10 titoli azionari di alcune delle principali aziende quotate nella borsa americana, riportati nella tabella di seguito. Ognuno di essi appartiene ad un settore diverso, anche se alcuni possono essere raggruppati in macroaree di investimento, come l'informatica per i primi 5 titoli o l'alimentare per gli ultimi 2.

Titolo	Codice	Nome	Settore
1	MSFT	Microsoft Corporation	Application Software
2	AAPL	Apple, Inc.	Personal Computers
3	IBM	International Business Machines	Diversified Computer System
4	SNE	Sony Corporation	Electronic Equipment
5	YHOO	Yahoo, Inc.	Internet Information Providers
6	DIS	Walt Disney Company	Entertainment Diversified
7	AXP	American Express Company	Credit Service
8	AMZN	Amazon.com, Inc.	Catalog and Mail Order House
9	KO	Coca-Cola Company	Beverages Soft Drinks
10	MCD	McDonald's Corporation	Restaurants

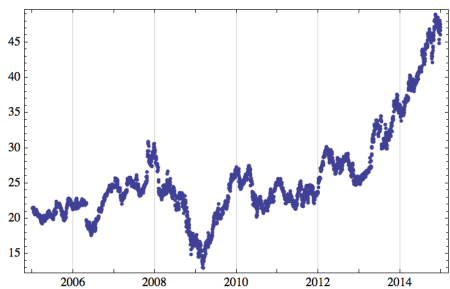
- la scelta dell'orizzonte temporale di investimento: trattandosi di titoli azionari è ragionevole evitare la forte variabilità a breve termine e collocarci quindi nel

CAPITOLO 3. UN ESEMPIO DI APPLICAZIONE

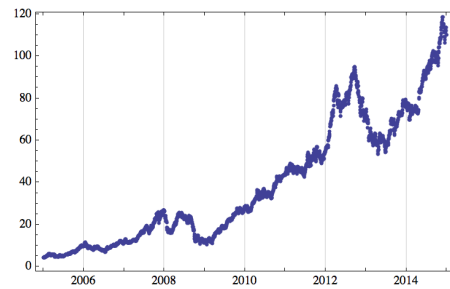
medio-lungo periodo. Per evidenziare il forte impatto di questa scelta, affrontiamo lo stesso problema di allocazione considerando dati storici relativi a due periodi differenti: in primo luogo calcoliamo rendimenti medi e variabilità attraverso le quotazioni di 5 anni, precisamente nel periodo dal 1 gennaio 2005 al 1 gennaio 2010. Successivamente ripetiamo lo stesso algoritmo per determinare un portafoglio efficiente dopo 10 anni di analisi storica (dal 2005 al 2015).

Tramite gli strumenti di Mathematica, di cui si riportano i codici per completezza, tracciamo i grafici dell'andamento dei titoli che abbiamo preso in considerazione, direttamente nel periodo 2005 - 2015. Per confrontare dati e risultati del primo caso di studio, sarà quindi sufficiente far riferimento visivamente alla prima metà di ciascun grafico.

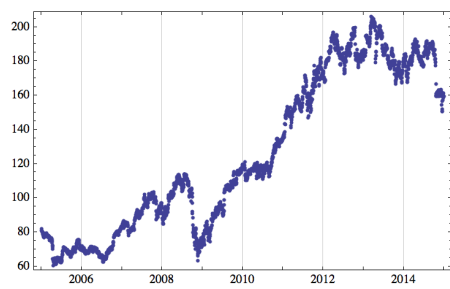
```
x = {"MSFT", "AAPL", "IBM", "SNE", "YHOO", "DIS", "AXP", "AMZN", "KO", "MCD"};  
For[i = 1, i < 11, i++,  
Print[DateListPlot[FinancialData[x[[i]], {{2005}, {2015}}],  
PlotLegends -> {FinancialData[x[[i]], "Name"}]]]
```



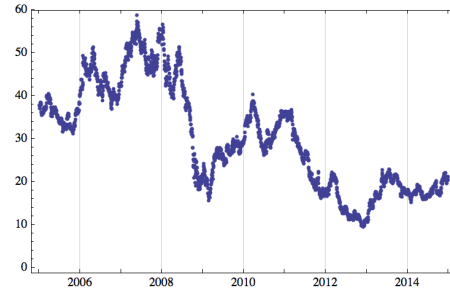
• Microsoft Corporation



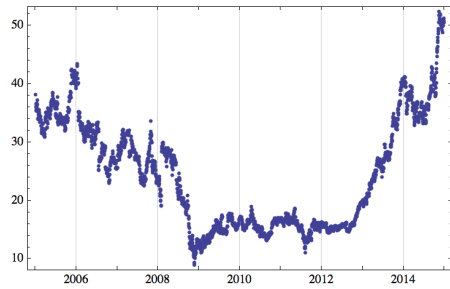
• Apple, Inc.



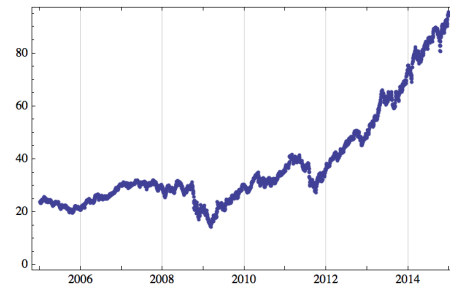
• International Business Machines Corp



• Sony Corporation

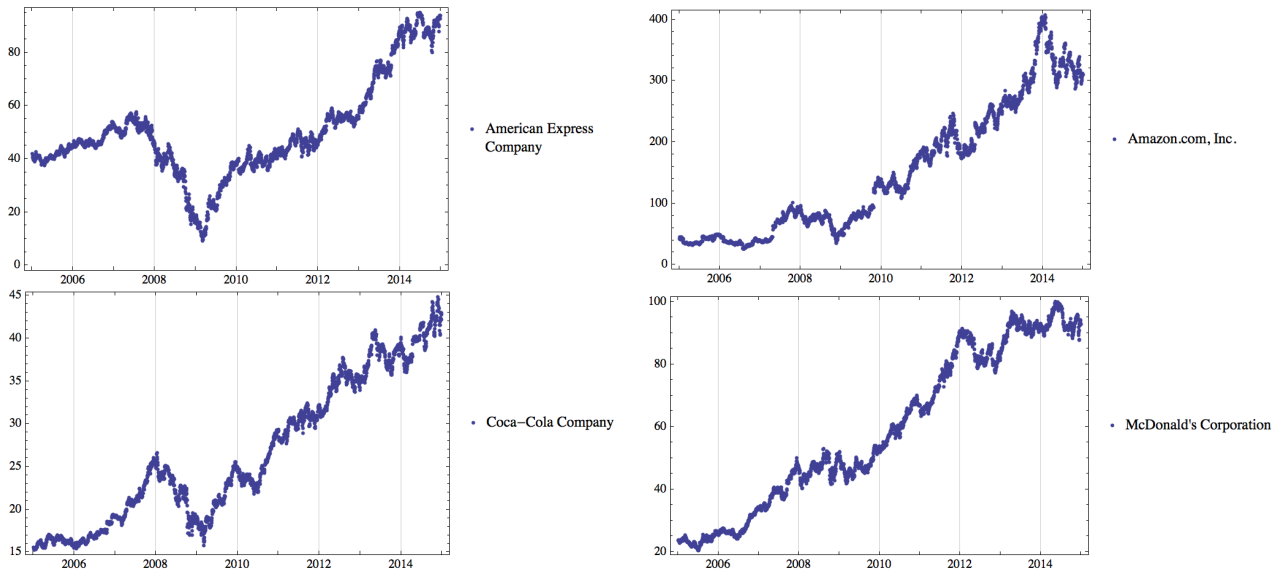


• Yahoo, Inc.



• Walt Disney Company

3.1. Caso di studio 1: dati storici a 5 anni



3.1 Caso di studio 1: dati storici a 5 anni

Analizziamo nel dettaglio il procedimento nel primo caso di studio, cioè sfruttando i dati storici del periodo 2005-2010.

Per ciascuno dei 10 titoli calcoliamo i rendimenti con cadenza mensile (in questo modo si assorbono variazioni giornaliere fuori dallo standard) attraverso la funzione *FinancialData* di Mathematica. Dopodiché, seguendo i passi della teoria di Markowitz, ricaviamo il vettore dei rendimenti attesi, il vettore delle volatilità e la matrice di covarianza.

```
For[k = 1, k < 11, k++,
  data1 = FinancialData[x[[k]], {{2005}, {2010}, "Month"}]; L1 = Length[data1];
  R1[[k]] = Table[100 Log[ $\frac{\text{data1}[[i + 1]][[2]]}{\text{data1}[[i]][[2]]}$ ], {i, L1 - 1}]

For[k = 1, k < 11, k++, mediel[[k]] = Mean[R1[[k]]]; volatilità[[k]] = StandardDeviation[R1[[k]]]]

"Vettore delle medie dei rendimenti"
mediel * "%"
"Vettore delle volatilità"
volatilità * "%"
"Matrice di covarianza"
covarianze1 = Covariance[Transpose[R1]];
MatrixForm[covarianze1]
```

L'output del codice precedente ci fornisce medie, volatilità e covarianze del rendimenti dei titoli. Da precisare che medie e volatilità appaiono come vettori riga ma, nel linguaggio Mathematica, sono in realtà vettori colonna come previsto dalla nostra teoria.

3.1. Caso di studio 1: dati storici a 5 anni

Vettore delle medie dei rendimenti

```
{0.388944 %, 2.88404 %, 0.696797 %, -0.377274 %, -1.25617 %, 0.345627 %, -0.107359 %, 1.92442 %, 0.778696 %, 1.33823 %}
```

Vettore delle volatilità

```
{7.35973 %, 12.3798 %, 6.48466 %, 10.3824 %, 11.3891 %, 6.74186 %, 12.648 %, 13.9675 %, 4.94619 %, 5.27005 %}
```

Matrice di covarianza

```
( 54.1656 41.4871 13.2294 29.5034 12.3682 20.4172 43.8252 39.8303 17.5765 17.8357
 41.4871 153.259 32.3951 64.5551 32.8757 29.5251 68.6847 62.4674 14.8752 31.317
 13.2294 32.3951 42.0508 24.5221 22.9673 22.312 28.9722 46.8745 10.8507 11.9298
 29.5034 64.5551 24.5221 107.795 36.3459 42.3001 62.9795 40.7192 12.5398 14.9923
 12.3682 32.8757 22.9673 36.3459 129.712 27.5955 18.8632 34.5124 17.1866 11.7077
 20.4172 29.5251 22.312 42.3001 27.5955 45.4527 58.1622 21.0378 15.3973 15.9298
 43.8252 68.6847 28.9722 62.9795 18.8632 58.1622 159.971 46.0732 20.4062 17.1837
 39.8303 62.4674 46.8745 40.7192 34.5124 21.0378 46.0732 195.09 16.0066 25.4289
 17.5765 14.8752 10.8507 12.5398 17.1866 15.3973 20.4062 16.0066 24.4648 14.9163
 17.8357 31.317 11.9298 14.9923 11.7077 15.9298 17.1837 25.4289 14.9163 27.7735)
```

Come visto nel capitolo 2.3.2, il calcolo della frontiera efficiente consiste, di fatto, nella risoluzione di un problema di minimizzazione (2.17). Applicando il teorema di Lagrange e introducendo per comodità di calcolo le quantità $A = \mathbf{1}'\Gamma^{-1}\mathbf{1}$, $B = \mathbf{1}'\Gamma^{-1}\mathbf{m}$, $C = \mathbf{m}'\Gamma^{-1}\mathbf{m}$, $\Delta = AC - B^2$, abbiamo determinato l'equazione della frontiera efficiente nel piano volatilità-media. Riproducendo fedelmente i risultati ottenuti con il software si ha:

```
gammal = Inverse[covarianzel];
uno = {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1};
al = uno.gammal.uno;
bl = uno.gammal.mediel;
cl = mediel.gammal.mediel;
deltal = al * cl - bl^2;
"Portafogli nel piano volatilità-media:"
X1 = Table[{volatilità[[i]], mediel[[i]]}, {i, 10}]
"Equazione del ramo di iperbole che costituisce la frontiera efficiente:"
S1[t_] = (1/al) * (bl + Sqrt[deltal * (al * t^2 - 1)])
mmin1 = bl/al; omin1 = Sqrt[1/al];
"Punto di minima volatilità e minima media:"
{omin1, mmin1}
Show[Plot[S1[t], {t, 2, 14}, PlotRange -> {-1.5, 6}, PlotStyle -> Thick],
ListPlot[Table[{volatilità[[i]], mediel[[i]]}, {i, 10}], PlotMarkers -> Automatic],
AxesLabel -> {σ, m}, ImageSize -> Large]
```

Portafogli nel piano volatilità-media:

```
{{7.35973, 0.388944}, {12.3798, 2.88404}, {6.48466, 0.696797}, {10.3824, -0.377274}, {11.3891, -1.25617},
{6.74186, 0.345627}, {12.648, -0.107359}, {13.9675, 1.92442}, {4.94619, 0.778696}, {5.27005, 1.33823}}
```

Equazione del ramo di iperbole che costituisce la frontiera efficiente:

$$17.009 \left(0.0366962 + 0.0977043 \sqrt{-1 + 0.0587925 t^2} \right)$$

Punto di minima volatilità e minima media:

```
{4.12419, 0.624164}
```

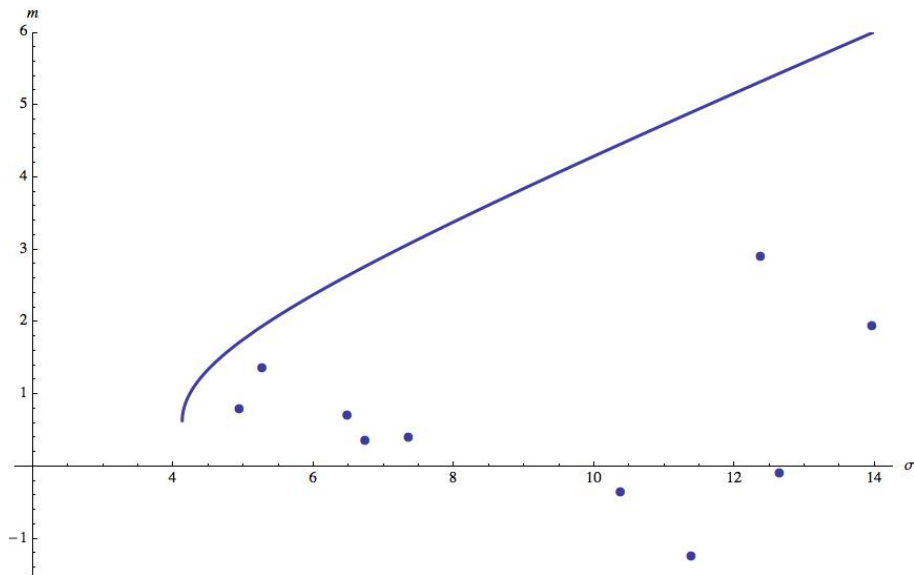


Figura 3.1: frontiera efficiente nel caso di studio 1

Oltre a rappresentare la frontiera efficiente, fissando un valore m^* per il rendimento atteso, siamo in grado di determinare il vettore ottimale dei pesi \mathbf{w} , ricavato teoricamente nella (2.26). Come detto, abbiamo ammesso la possibilità di vendite allo scoperto, ovvero pesi negativi nell'allocazione della ricchezza tra i vari titoli.

E' interessante notare che è possibile ottenere lo stesso risultato applicando l'algoritmo di minimizzazione di Mathematica all'originario problema: $\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}'\Gamma\mathbf{w}$.

Si riportano di seguito i due procedimenti e un loro esempio, fissando $m^* = 1.5\%$

```
"Vettore dei pesi costruito seguendo i passi della teoria; sono ammesse vendite allo scoperto:"
w1 = (1/delta1) * (c1 - 1.5 * b1) * gamma1.uno + (1/delta1) * (-b1 + 1.5 * a1) * gamma1.medie1
"Stesso vettore calcolato impostando con Mathematica il problema di minimizzazione:"
vars = Map[Subscript[y, #] &, {"MSFT", "AAPL", "IBM", "SNE", "YHOO", "DIS", "AXP", "AMZN", "KO", "MCD"}];
vars = Map[Subscript[y, #] &, {"MSFT", "AAPL", "IBM", "SNE", "YHOO", "DIS", "AXP", "AMZN", "KO", "MCD"}];
FindMinimum[{vars.covarianze1.vars, Total[vars] == 1 && vars.medie1 == 1.5}, vars][[2]]

Vettore dei pesi costruito seguendo i passi della teoria; sono ammesse vendite allo scoperto:
{-0.0201873, 0.101252, 0.199544, -0.0621204, -0.102836, 0.169867, -0.116512, 0.00158502, 0.464725, 0.364683}

Stesso vettore calcolato impostando con Mathematica il problema di minimizzazione:
{YMSFT -> -0.0201873, YAAPL -> 0.101252, YIBM -> 0.199544, YSNE -> -0.0621204, YHOO -> -0.102836,
YDIS -> 0.169867, YAXP -> -0.116512, YAMZN -> 0.00158502, YKO -> 0.464725, YMCD -> 0.364683}
```

Il vettore ottenuto stabilisce quindi che, volendo ottenere un portafoglio con un rendimento atteso pari a 1.5%, occorre vendere allo scoperto, come era prevedibile, i titoli 4 (-0.06%), 5 (-0.10%) e 7 (-0.12%) poiché hanno media negativa. Anche il titolo 1 va venduto (-0.02%) poiché ha una volatilità troppo elevata in relazione al suo scarso

rendimento. Il resto dei titoli vanno invece acquistati con i pesi indicati: ad esempio, i titoli da inserire in percentuale maggiore sono *Coca-Cola* e *McDonald's* per via della loro bassa rischiosità. Le loro medie non solo tra le più alte, ma sono comunque i titoli più vantaggiosi poiché il rendimento m^* da raggiungere non è molto elevato.

Nella tabella 3.1 sono riportati i vettori ottimali dei pesi in funzione di alcuni valori di rendimento atteso m^* , partendo dal minimo valore previsto dalla frontiera efficiente. Si noti come, aumentando il valore di m^* , è necessario allocare sempre più ricchezza sul titolo *Apple*, cioè il più redditizio (ma anche tra i più rischiosi). Per ottenere il minimo rendimento il titolo va addirittura venduto, mentre se si vuole costruire un portafoglio che renda almeno il 2.5% è necessario investirci quasi il 30% del capitale.

Titolo	Codice	$m_{\min}^* = 0.62$	$m^* = 1$	$m^* = 1.5$	$m^* = 2$	$m^* = 2.5$
1	MSFT	10.84%	5.32%	-2.02%	-9.36%	-16.70%
2	AAPL	-7.14%	0.27%	10.13%	19.98%	29.83%
3	IBM	28.68%	24.94%	19.95%	14.97%	9.99%
4	SNE	5.23%	0.32%	-6.21%	-12.75%	-19.28%
5	YHOO	1.68%	-3.45%	-10.28%	-17.11%	-23.94%
6	DIS	-0.05%	7.26%	16.99%	26.71%	36.43%
7	AXP	-3.14%	-6.79%	-11.65%	-16.50%	-21.36%
8	AMZN	-6.21%	-3.48%	0.16%	3.80%	7.44%
9	KO	34.50%	39.64%	46.47%	53.30%	60.14%
10	MCD	35.61%	35.98%	36.47%	36.96%	37.45%

Tabella 3.1: pesi percentuali dei titoli con vendite allo scoperto

Nonostante il modello di AAS presentato contempli la possibilità di vendite allo scoperto, è interessante studiare la soluzione del problema di minimizzazione (sfruttando il software) imponendo il vincolo aggiuntivo di non negatività dei pesi dei vari titoli.

Di seguito il calcolo del nuovo vettore dei pesi, fissando ancora $m^* = 1.5\%$. Trattandosi di un metodo numerico, il valore 0 non sarà mai raggiunto; ogni valore espresso in notazione scientifica con esponente negativo è da intendersi nullo.

```
"Vettore dei pesi senza vendite allo scoperto:"
vars = Map[Subscript[y, #] &, {"MSFT", "AAPL", "IBM", "SNE", "YHOO", "DIS", "AXP", "AMZN", "KO", "MCD"}];
vars = Map[Subscript[y, #] &, {"MSFT", "AAPL", "IBM", "SNE", "YHOO", "DIS", "AXP", "AMZN", "KO", "MCD"}];
FindMinimum[{vars.covarianzel.vars,
  Total[vars] == 1 && vars.mediel > 1.5 && Apply[And, Thread[GreaterEqual[vars, 0]]]}, vars][[2]]
```

Vettore dei pesi senza vendite allo scoperto:

```
{yMSFT → 3.65605 × 10-6, yAAPL → 0.17014, yIBM → 0.00144252, ySNE → 1.80645 × 10-6, yYHOO → 1.30045 × 10-6,
yDIS → 7.75822 × 10-6, yAXP → 1.74308 × 10-6, yAMZN → 0.0287552, yKO → 0.20936, yMCD → 0.590286}
```


La tabella seguente è l'analogo della 3.1 nel caso in cui non ci sia possibilità di short selling. Imponendo che i pesi di ciascun titolo siano non negativi otteniamo altri vettori ottimali di allocazione: essi sono riportati in funzione degli stessi valori di rendimento atteso m^* al fine di compararli con quelli precedentemente ottenuti.

Titolo	Codice	$m_{\min}^* = 0.62$	$m^* = 1$	$m^* = 1.5$	$m^* = 2$	$m^* = 2.5$
1	MSFT	3.58%	0.12%	0%	0%	0%
2	AAPL	0%	0.23%	17.01%	40.82%	72.32%
3	IBM	20.61%	19.62%	0.14%	0%	0%
4	SNE	1.03%	0.02%	0%	0%	0%
5	YHOO	1.08%	0%	0%	0%	0%
6	DIS	2.10%	0.05%	0%	0%	0%
7	AXP	0%	0%	0%	0%	0%
8	AMZN	0%	0%	2.88%	5.24%	7.49%
9	KO	42.02%	38.23%	20.94%	0%	0%
10	MCD	29.58%	41.73%	59.03%	53.94%	20.19%

Tabella 3.2: pesi percentuali dei titoli in assenza di vendite allo scoperto

3.2 Caso di studio 2: dati storici a 10 anni

Tutto il procedimento visto nel primo caso di studio viene ripetuto con l'aggiunta di altri 5 anni di dati storici, cioè basandosi sulle quotazioni degli stessi titoli nel periodo 2005-2015. Essendo la costruzione analoga a quella precedente, si riportano direttamente i risultati ottenuti. Diversi titoli del nostro paniere presentano una migliore configurazione di media-volatilità, come si può osservare dai punti in figura 3.2: solo un titolo ha ancora rendimento medio negativo e più di uno ha ridotto notevolmente la propria volatilità.

Portafogli nel piano volatilità-media:

$\{(6.66759, 0.657519), (10.0886, 2.56741), (5.5963, 0.59684), (10.9083, -0.479771), (9.67636, 0.303228), (6.27834, 1.12889), (9.75869, 0.705249), (11.2532, 1.65664), (4.52618, 0.838276), (4.37668, 1.13868)\}$

Equazione del ramo di iperbole che costituisce la frontiera efficiente:

$$12.6092 \left(0.0612626 + 0.0925132 \sqrt{-1 + 0.0793072 t^2} \right)$$

Punto di minima volatilità e minima media:

$\{3.55094, 0.772473\}$

Questo miglioramento era sicuramente nelle nostre aspettative: più ci si sposta dal medio al lungo termine, notoriamente, più la stabilità dell'andamento di un titolo azionario aumenta; per di più, l'intervallo temporale del caso di studi 1 comprende al suo

interno l'inizio della crisi economica del 2008 che ha avuto impatto fortemente negativo sull'andamento di quasi tutte le nostre azioni (si vedano i grafici ad inizio capitolo 4).

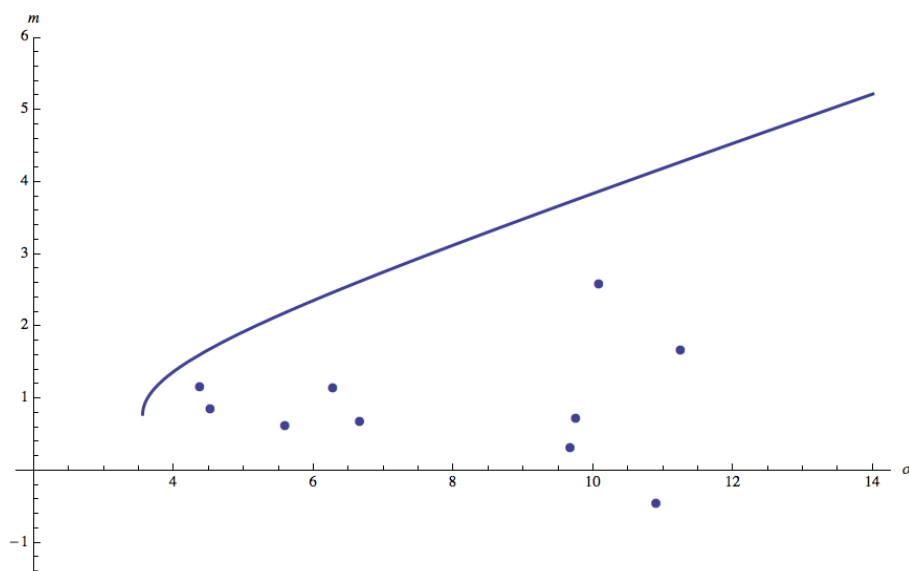


Figura 3.2: frontiera efficiente nel caso di studio 2

Come in precedenza, fissiamo alcuni valori di rendimento medio che si intendono raggiungere e, per ognuno di questi, determiniamo il vettore dei pesi del portafoglio efficiente secondo la teoria di Markowitz. Facciamo questa operazione sia ammettendo la possibilità di vendite allo scoperto, sia imponendo che i pesi di ciascun titolo siano non negativi.

Titolo	Codice	$m_{\min}^* = 0.77$	$m^* = 1$	$m^* = 1.5$	$m^* = 2$	$m^* = 2.5$
1	MSFT	10.36%	7.17%	0.17%	-6.83%	-13.82%
2	AAPL	-3.40%	2.16%	14.38%	26.59%	38.80%
3	IBM	27.94%	22.40%	10.20%	-1.98%	-14.16%
4	SNE	-1.09%	-4.66%	-12.52%	-20.37%	-28.22%
5	YHOO	2.77%	0.56%	-4.30%	-9.15%	-14.01%
6	DIS	2.43%	10.76%	29.08%	47.39%	65.70%
7	AXP	-2.20%	-4.87%	-10.72%	-16.58%	-22.44%
8	AMZN	-5.99%	-3.67%	1.42%	6.52%	11.61%
9	KO	29.67%	28.45%	25.76%	23.07%	20.37%
10	MCD	39.51%	41.70%	46.53%	51.34%	56.17%

Tabella 3.3: pesi percentuali dei titoli con vendite allo scoperto

Titolo	Codice	$m_{\min}^* = 0.77$	$m^* = 1$	$m^* = 1.5$	$m^* = 2$	$m^* = 2.5$
1	MSFT	5.64%	1.06%	0%	0%	0%
2	AAPL	0%	3.00%	26.24%	58.61%	93.11%
3	IBM	22.44%	16.53%	0%	0%	0%
4	SNE	0.01%	0%	0%	0%	0%
5	YHOO	1.75%	0.03%	0%	0%	0%
6	DIS	1.67%	6.81%	10.28%	0.07%	0%
7	AXP	0%	0%	0%	0%	0%
8	AMZN	0%	0%	2.46%	4.62%	5.99%
9	KO	30.99%	28.65%	8.45%	0%	0%
10	MCD	37.50%	43.92%	52.57%	36.70%	0.90%

Tabella 3.4: pesi percentuali dei titoli in assenza di vendite allo scoperto

Anche nella composizione dei portafogli efficienti ritroviamo il fatto che alcuni titoli hanno migliorato il loro rapporto media-volatilità, acquisendo così maggior peso nella allocation rispetto al caso di studio 1.

Per bassi valori di rendimento atteso, ad esempio, il titolo da acquistare in maggior quantità è ora *McDonald's* poiché, nonostante un calo di media (da 1.33% a 1.13%), è divenuto il titolo meno rischioso (volatilità da 5.27% a 4.38%), superando anche il titolo *Coca-Cola*. Ad alti valori di rendimento atteso, invece, il titolo *Apple* è sempre più predominante in quanto, rimanendo il titolo più redditizio, ha anche ridotto la sua volatilità, scesa di 2 punti percentuali.

E' interessante notare quanto incida il vincolo di non negatività dei pesi: ammettendo la possibilità di short selling, ad esempio, il titolo *Walt Disney Company* è sempre inserito, positivamente, all'interno del portafoglio, avendo addirittura il peso predominante se $m^* = 2.5$. D'altra parte, la necessità di raggiungere un più alto rendimento senza poter vendere allo scoperto alcuni assets, fa sì che lo stesso titolo non venga nemmeno inserito in portafoglio.

Per concludere questo caso di studio, diamo un esempio dell'utilizzo delle curve di isoutilità per determina in maniera univoca un portafoglio ottimale sulla frontiera efficiente, come si è visto nel passo III della teoria di Markowitz.

Assumiamo che un metodo qualitativo basato sulle condizioni socio-demografiche di un gruppo di agenti economici abbia determinato una funzione di utilità indiretta media-varianza $\Psi(+m_P, -\sigma_P^2)$ e che le relative curve di isoutilità (imponendo che $\Psi = k$ con k parametro reale) siano quelle rappresentate graficamente in figura 3.3.

Dalla teoria sappiamo che il portafoglio ottimale \tilde{P} è individuato dal punto di intersezione tra la frontiera efficiente e la più alta curva di isoutilità, cioè dal punto di tangenza tra la frontiera e il fascio di curve.

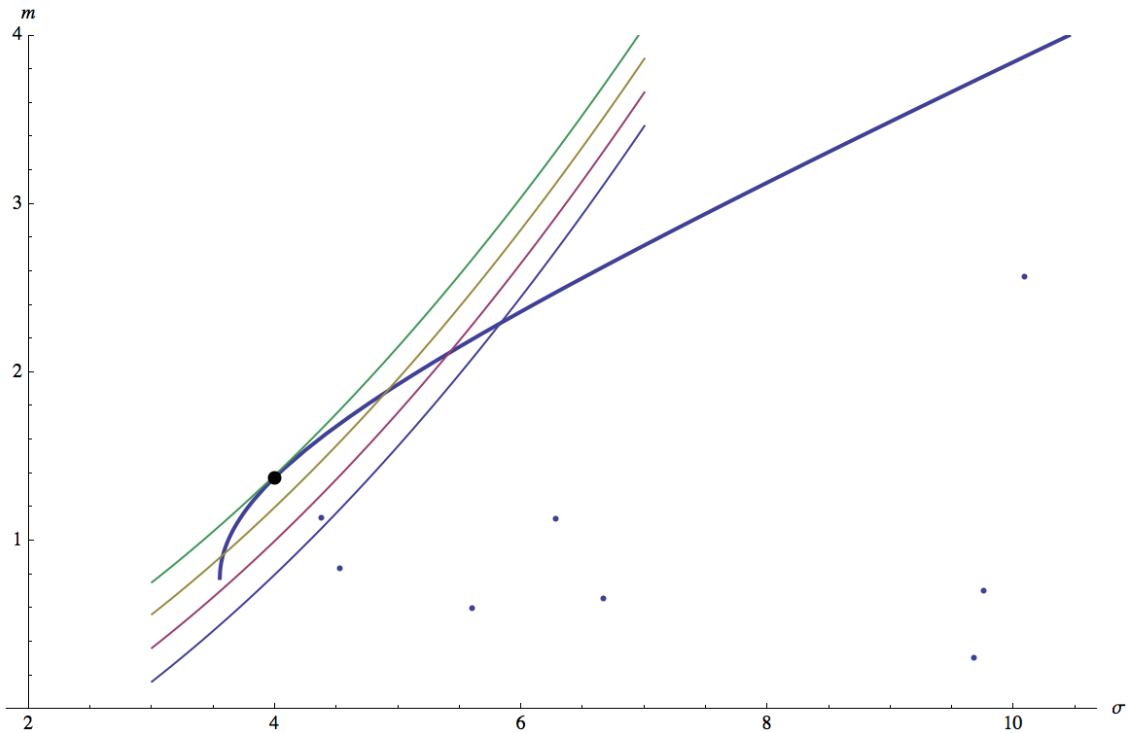


Figura 3.3: determinazione del portafoglio ottimale tramite curve di isoutilità

Numericamente calcoliamo le coordinate del punto, che nel nostro caso sono:

$$\tilde{\sigma} = 4.01; \quad \tilde{m} = 1.36.$$

Il risultato ottenuto stabilisce che il portafoglio ottimale va calcolato in corrispondenza di un rendimento atteso pari a 1.36%.

Fissato \tilde{m} calcoliamo i vettori dei pesi, sia con vendite allo scoperto sia con il vincolo di non negatività. Applicando l'algoritmo si ottiene:

Vettore dei pesi con vendite allo scoperto:

$$\{y_{MSFT} \rightarrow 0.0213141, y_{AAPL} \rightarrow 0.109532, y_{IBM} \rightarrow 0.136167, y_{SNE} \rightarrow -0.103168, y_{YHOO} \rightarrow -0.0293729, \\ y_{DIS} \rightarrow 0.239479, y_{AXP} \rightarrow -0.0908282, y_{AMZN} \rightarrow -0.0000399883, y_{KO} \rightarrow 0.265146, y_{MCD} \rightarrow 0.45177\}$$

Vettore dei pesi senza vendite allo scoperto:

$$\{y_{MSFT} \rightarrow 0.0000164929, y_{AAPL} \rightarrow 0.186494, y_{IBM} \rightarrow 0.00021386, y_{SNE} \rightarrow 3.13382 \times 10^{-6}, y_{YHOO} \rightarrow 0.0000119631, \\ y_{DIS} \rightarrow 0.111275, y_{AXP} \rightarrow 6.90159 \times 10^{-6}, y_{AMZN} \rightarrow 0.0159391, y_{KO} \rightarrow 0.173599, y_{MCD} \rightarrow 0.512441\}$$

In definitiva, potendo vendere allo scoperto alcuni titoli, il miglior portafoglio previsto dalla teoria di Markowitz si costruisce investendo il capitale nel modo seguente:

MSFT	AAPL	IBM	SNE	YHOO	DIS	AXP	AMZN	KO	MCD
2.13%	10.95%	13.62%	-10.32%	-2.94%	23.95%	-9.08%	0%	26.51%	45.18%

Se escludiamo la possibilità di pesi negativi, la soluzione ottima è invece:

MSFT	AAPL	IBM	SNE	YHOO	DIS	AXP	AMZN	KO	MCD
0%	18.65%	0.02%	0%	0%	11.13%	0%	1.59%	17.36%	51.24%

3.3 Caso di studio 3: analisi delle performance

Nelle due sezioni precedenti si è affrontato, con esempi concreti, il problema di ottimizzazione di un portafoglio tramite la frontiera efficiente. Per cogliere completamente l'utilità di questo processo è infine necessario mostrare che costruire un portafoglio sulla base dei risultati della teoria si riveli davvero conveniente. In altri termini, l'intento è quello di verificare che la performance di un portafoglio determinato dal nostro algoritmo rispecchi, con buona probabilità, le aspettative di rendimento.

A tal scopo, consideriamo lo stesso paniere di titoli dei casi di studio 1 e 2 e i relativi dati storici nel periodo 2005 - 2015. Dopodiché eseguiamo i seguenti passaggi, sempre con l'ausilio del software *Mathematica*.

Sfruttando le quotazioni storiche settimanali dei primi due anni (2005 e 2006) applichiamo l'algoritmo di ottimizzazione fissando un rendimento atteso settimanale dello 0.5%, ammettendo le vendite allo scoperto (il ragionamento è del tutto analogo impedendo lo short selling). Otteniamo così un portafoglio efficiente, univocamente determinato dai pesi percentuali dei singoli titoli.

Vettore dei pesi (con vendite allo scoperto):

{0.0425985, 0.152675, -0.416885, -0.0439634, -0.0893305, 0.10132, 0.28224, 0.0106662, 0.61053, 0.35015}

Al fine di valutare la performance del portafoglio ottenuto, calcoliamo il suo rendimento a cadenza settimanale in tutto l'anno successivo, cioè il 2007. Si tratta di un'operazione molto semplice, avendo a disposizione le quotazioni di ogni titolo e ricordando che il rendimento del portafoglio non è altro che la media ponderata dei singoli rendimenti.

Analizziamo graficamente i risultati ottenuti: in figura 3.4 sono rappresentati, per ogni settimana del 2007, i rendimenti del portafoglio costruito in precedenza. L'istogramma in figura 3.5 mostra come la loro distribuzione abbia un andamento approssimativamente gaussiano proprio intorno a 0.5, valore del rendimento atteso per il portafoglio.

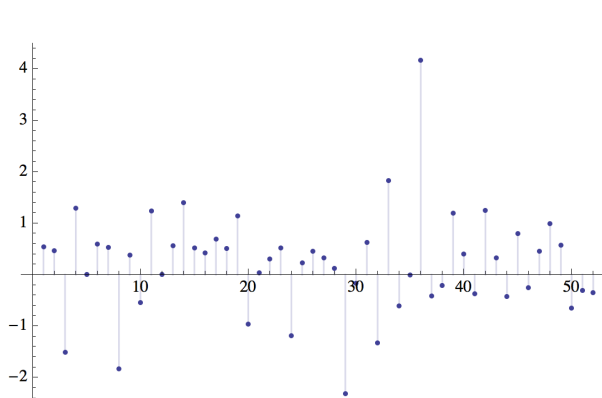


Figura 3.4: Plot dei rendimenti nel 2007

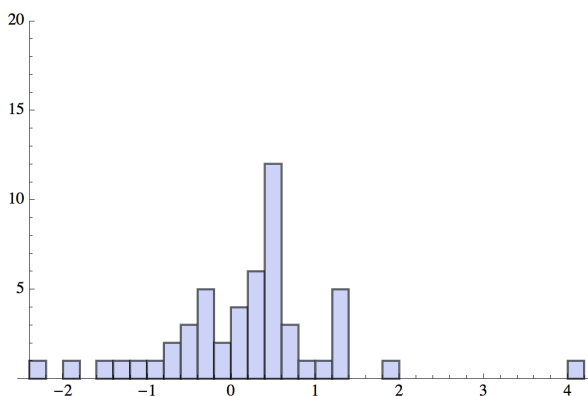


Figura 3.5: Distribuzione dei rendimenti

Come già visto nel caso di studi 2, aumentare l'orizzonte temporale porta generalmente con sé un aumento di stabilità del titolo; per questo motivo vogliamo estendere progressivamente la durata delle serie storiche e costruire, almeno teoricamente, portafogli più affidabili. Per fare ciò, aggiungiamo anche l'anno 2007 nei nostri dati, in modo da aver un totale di 3 anni di quotazioni settimanali dei rendimenti dei nostri titoli.

In base a questo nuovo set di dati possiamo aggiornare la composizione del nostro portafoglio, bilanciando nuovamente i pesi da assegnare a ciascun titolo per raggiungere il miglior rapporto rischio-rendimento, avendo sempre fissato il valore atteso dello 0.5%. A questo punto, calcolando i rendimenti settimanali del portafoglio nell'anno 2008 e aggiungendoli ai valori precedenti, possiamo di nuovo rappresentarli graficamente: ci si attende di apprezzare una performance ancora migliore della nostra asset allocation.

Ripetendo lo stesso ragionamento di anno in anno, possiamo man mano valutare l'efficacia del nostro portafoglio nel corso del tempo. L'idea di aspettarsi una performance sempre più corrispondente alle aspettative iniziali non deriva solo dall'utilizzo di una serie storica progressivamente di maggiore ampiezza, ma soprattutto dal fatto che ad ogni inserimento di un nuovo anno di quotazioni all'interno del set di dati storici, il processo di ottimizzazione viene aggiornato, quindi i pesi dei singoli titoli vengono ridistribuiti in relazione ai nuovi trend di mercato. Di fatto, si sta compiendo un'operazione di *Asset Allocation Tattica*.

Riportiamo quindi i risultati grafici di quanto illustrato, selezionando alcuni step del procedimento. Ad esempio, dopo aver aggiunto nella serie storica le quotazioni di 2007 e

2008 e modificato tatticamente l'allocazione della ricchezza alla fine di entrambi gli anni, valutiamo la performance del portafoglio nel periodo 2007 - 2009, ottenendo la seguente distribuzione (nel plot dei rendimenti è rappresentato il valore fissato di 0.5%):

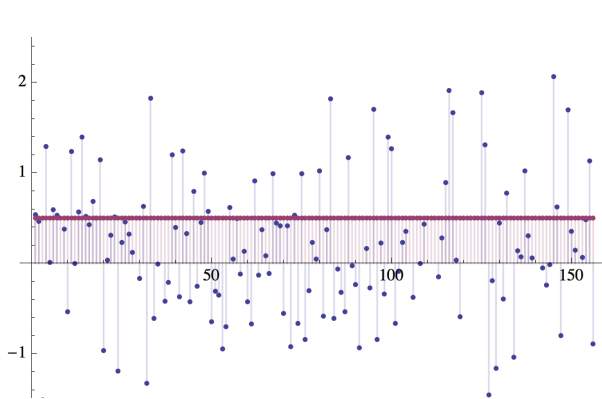


Figura 3.6: Plot dei rendimenti 2007-2009

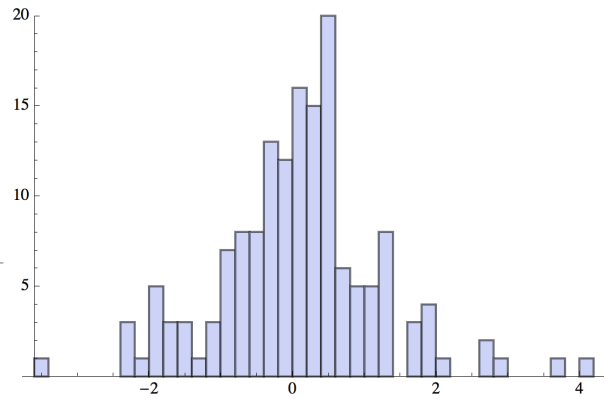


Figura 3.7: Distribuzione dei rendimenti

Eseguendo la stessa operazione per ogni anni successivo, alla fine del 2014 aggiorniamo per l'ultima volta la composizione del nostro portafoglio e, finalmente, possiamo valutare la performance globale del nostro portafoglio aggiungendo la quotazione dei rendimenti settimanali nell'anno 2015. Come si vede dal plot complessivo in figura 3.8 e ancora meglio dall'istogramma in figura 3.9, il valore del rendimento del portafoglio, al susseguirsi delle quotazioni settimanali, si distribuisce effettivamente con un picco attorno allo 0.5%, presentando un andamento assimilabile ad una distribuzione normale.

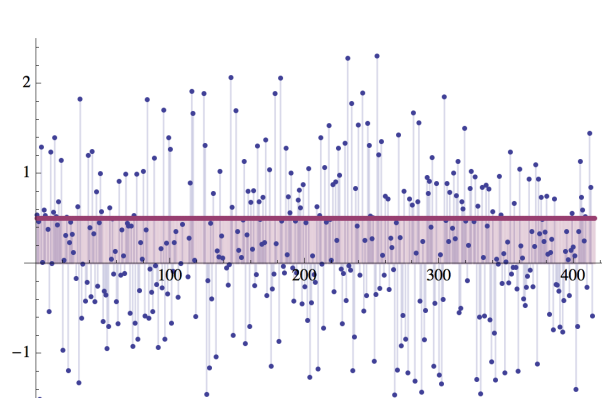


Figura 3.8: Plot dei rendimenti 2007-2015

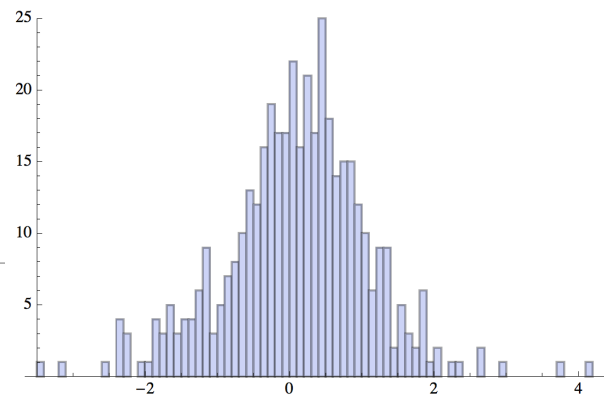


Figura 3.9: Distribuzione dei rendimenti

Appendice A

Requisiti matematici

In questa appendice vengono presentati i principali concetti matematici utilizzati come strumenti nella costruzione della teoria del portafoglio. Il primo requisito è costituito dagli elementi basilari di Probabilità, colonna portante della Finanza Matematica.

Per definire l'Asset Allocation Strategica è poi necessario formalizzare i concetti empirici di "scelta" e "preferenza": a tale scopo facciamo riferimento ai concetti teorici di funzione di utilità e di utilità indiretta media-varianza.

Infine, per la costruzione di una frontiera di portafogli che soddisfino un criterio razionale di efficienza, si utilizza l'approccio lagrangiano: dopo aver fissato un valore atteso si intende minimizzare il rischio, risolvendo un problema di minimo vincolato attraverso il metodo dei moltiplicatore di Lagrange, importante risultato di Analisi Matematica.

A.1 Elementi di teoria della probabilità

A.1.1 Spazi di probabilità e distribuzioni

Definizione A.1. Uno *spazio di probabilità* è una terna (Ω, \mathcal{F}, P) dove:

- Ω è un insieme non vuoto detto *spazio campione* che contiene i possibili stati del fenomeno aleatorio. I suoi elementi $\omega \in \Omega$ sono detti *eventi elementari*.
- \mathcal{F} è una σ -algebra: un sottoinsieme delle insiemi delle parti $\mathcal{P}(\Omega)$ tale che:
 - i. $\emptyset \in \mathcal{F}$;
 - ii. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C := (\Omega \setminus A) \in \mathcal{F}$;
 - iii. per ogni successione $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di \mathcal{F} , $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

- P è una misura di probabilità, ossia una funzione $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ tale che:
 - i. $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$;
 - ii. $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di \mathcal{F} , a due a due disgiunti, vale : $P(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n \geq 1} P(A_n)$.

Esempio A.2. La σ -algebra dei Borelliani $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ è la σ -algebra generata dalla topologia Euclidea di \mathbb{R}^N . Se $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è la più piccola σ -algebra che contiene gli intervalli aperti $]a, b[$, ossia $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{I})$ con $\mathcal{I} = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

Definizione A.3. Una misura di probabilità sui Borelliani $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B})$ è detta *distribuzione*.

Dalla teoria dell'integrazione di Lebesgue segue direttamente il risultato seguente:

Proposizione A.4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione \mathcal{B} -misurabile (ossia $f^{-1}(H) \in \mathcal{B}$ per ogni $H \in \mathcal{B}$), tale che $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$. Allora si definisce in modo naturale una distribuzione P definita da:

$$P(H) = \int_H f(x)dx, \quad H \in \mathcal{B}. \quad (\text{A.1})$$

Definizione A.5. Nelle condizioni di (A.1) la f è detta *densità di P rispetto alla misura di Lebesgue*.

Esempio A.6 (Distribuzione uniforme). Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, denotata con $\mathbb{1}_{[a,b]}$ la funzione indicatrice (vale 1 su $[a, b]$, 0 fuori da $[a, b]$), la distribuzione uniforme sull'intervallo $[a, b]$ è determinata dalla densità:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \quad (\text{A.2})$$

Indicando con \mathcal{L} la misura di Lebesgue sui Borelliani, si ha che:

$$P(H) = \int_{H \cap [a,b]} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \mathcal{L}(H \cap [a,b]), \quad \text{per } H \in \mathcal{B}.$$

Intuitivamente, P attribuisce la stessa probabilità a tutti i punti dell'intervallo $[a, b]$.

Esempio A.7 (Delta di Dirac). Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ la distribuzione Delta di Dirac concentrata in x_0 è definita da:

$$\delta_{x_0}(H) = \begin{cases} 1, & x_0 \in H, \\ 0, & x_0 \notin H, \end{cases} \quad \text{per } H \in \mathcal{B}.$$

Osservando che $\delta_{x_0}(\{x_0\}) = 1$ ma $\mathcal{L}(\{x_0\}) = 0$ si deduce che δ_{x_0} non ammette densità.

Esempio A.8 (Distribuzione normale reale). Dati i parametri reali μ e $\sigma > 0$, la distribuzione normale o di Gauss in \mathbb{R} , denotata con $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$, è determinata dalla densità:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{A.3})$$

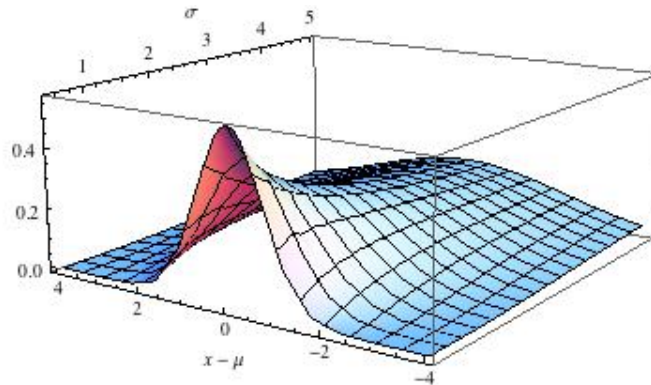


Figura A.1: Grafico della densità Gaussiana

A.1.2 Variabili aleatorie e processi stocastici

Definizione A.9. Una *variabile aleatoria* sullo spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) è una funzione misurabile

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N \quad \text{t.c.} \quad X^{-1}(H) \in \mathcal{F} \quad \forall H \in \mathcal{B}.$$

La condizione richiesta è che la controimmagine di un Borelliano sia un evento.

Definizione A.10. Data la *v.a.* X ha senso scrivere $P(X^{-1}(H)) =: P(X \in H)$, $H \in \mathcal{B}$. Si definisce quindi l'applicazione

$$P^X : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1], \quad P^X(H) = P(X \in H)$$

che risulta essere una misura di probabilità sui Borelliani, cioè una distribuzione, detta *distribuzione (o legge) della v.a. X*.

Dalla costruzione di questa distribuzione si deduce, intuitivamente, che è sempre possibile “trasferire” ogni spazio di probabilità sui Borelliani.

Definizione A.11. Un *processo stocastico discreto* è una famiglia $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ di variabili aleatorie definite su uno spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) .

E' lecito interpretare un processo stocastico come una funzione a due variabili:

$$X: (\mathbb{N} \cup \{0\}) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad X(n, \omega) = X_n(\omega)$$

Si può affermare che un processo stocastico è la versione “dinamica” di una variabile aleatoria. Questi due concetti sono basilari nel campo della finanza matematica: dal punto di vista finanziario, infatti, X_n rappresenta il prezzo di un titolo al tempo n mentre il processo stocastico X costituisce l'evoluzione temporale del titolo sul mercato. Poiché l'indice temporale $n \in \mathbb{N}_0$ si parla di processo stocastico a tempo discreto.

A.1.3 Misure di sintesi di fenomeni aleatori

Si introducono ora alcune fondamentali nozioni relative alle variabili aleatorie.

Il *valore atteso* (chiamato anche *media* o *speranza matematica*) formalizza l'idea intuitiva di “valore medio” di un fenomeno aleatorio e, in generale, non ha nulla a che vedere con il valore più probabile della variabile casuale. Per la definizione rigorosa si deve far riferimento al concetto di integrale di una variabile aleatoria nello spazio di probabilità: esso rispecchia fedelmente la costruzione dell'integrale di Lebesgue in \mathbb{R}^N .

Definizione A.12. Sia X una *v.a.* sullo spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) . Il *valore atteso* di X è definito come l'integrale di X rispetto alla misura di probabilità P su Ω :

$$E[X] := \int_{\Omega} X dP.$$

Distinguiamo quindi due casi particolari in cui possiamo esplicitare il valore atteso:

i. Se X è una *v.a.* discreta: $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_N\}$ quindi, posto $A_k = X^{-1}(\{x_k\})$, si ha che $X = \sum_{k=1}^N x_k \mathbb{1}_{A_k}$. In questo caso:

$$E[X] = \int_{\Omega} X dP = \sum_{k=1}^N x_k P(A_k). \tag{A.4}$$

ii. Se X è una *v.a.* continua che ammette densità f , la definizione diventa:

$$E[X] = \int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}^N} x f(x) dx. \tag{A.5}$$

La *varianza* fornisce una misura dell'instabilità dei valori di una variabile casuale, in particolare di quanto essi si discostano quadraticamente dal valore atteso. La sua radice quadrata fornisce la *deviazione standard* o *volatilità*.

Definizione A.13. La *varianza* di una *v.a.* X è definita da:

$$\text{var}(X) := E[(X - E[X])^2]. \quad (\text{A.6})$$

Definizione A.14. La *deviazione standard* di X è definita da $\sigma_X := \sqrt{\text{var}(X)}$.

La *covarianza* di due variabili aleatorie è una stima della loro dipendenza, cioè fornisce una misura di quanto le due varino assieme. Due variabili aleatorie indipendenti hanno pertanto covarianza nulla.

Definizione A.15. La *covarianza* di due *v.a.* reali X, Y è definita da:

$$\text{cov}(X, Y) := E[(X - E[X])(Y - E[Y])]. \quad (\text{A.7})$$

Nel caso in cui $X = (X_1, \dots, X_N)$ sia una *v.a.* a valori in \mathbb{R}^N la covarianza si esprime in forma matriciale: $\text{Cov}(X) = E[(X - E[X])(X - E[X])^*]$.

Quindi la *matrice di covarianza* di X è:

$$\text{Cov}(X) = (c_{ij}) \quad \text{con} \quad c_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j), \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Osservazione A.16. Nelle notazioni precedenti $\text{Cov}(X)$ è simmetrica e presenta lungo la diagonale principale i valori delle varianze. Inoltre è una matrice semidefinita positiva.

Dimostrazione. La simmetria di $\text{Cov}(X)$ viene dalla simmetria dell'operatore covarianza:

$$c_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j) = \text{cov}(X_j, X_i) = c_{ji} \quad i, j = 1, \dots, N$$

e, banalmente:

$$c_{ii} = \text{cov}(X_i, X_i) = \text{var}(X_i) \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Verifichiamo poi la condizione di non negatività di una matrice: sia $v = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned} v^T \text{Cov}(X) v &= \sum_{i,j=1}^N \text{Cov}(X_i, X_j) v_i v_j = \sum_{i,j=1}^N \text{Cov}(v_i X_i, v_j X_j) \\ &= \text{Cov} \left(\sum_{i=1}^N v_i X_i, \sum_{j=1}^N v_j X_j \right) = \text{var} \left(\sum_{i=1}^N v_i X_i \right) \geq 0 \end{aligned}$$

□

La *correlazione* è una covarianza standardizzata che esprime l'eventuale dipendenza lineare tra le due variabili aleatorie. Essa è definita come il rapporto tra la covarianza e il prodotto delle deviazioni standard: si ottiene pertanto un valore normalizzato della correlazione, cioè sempre compreso tra -1 e +1.

Definizione A.17. La *correlazione* di due *v.a.* reali X, Y è:

$$\text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}. \quad (\text{A.8})$$

In particolare si ha che: $\text{corr}(X, X) = 1$, $\text{corr}(X, -X) = -1$ e se X, Y sono due *v.a.* indipendenti allora $\text{cov}(X, Y) = 0$.

In caso di più variabili aleatorie reali X_1, \dots, X_N , come nel caso della covarianza, si ottiene la *matrice di correlazione*:

$$\text{Corr}(X) = \left(\frac{c_{ij}}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}} \right) \quad \text{con } c_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j), \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Si tratta di una matrice simmetrica che presenta tutti 1 sulla diagonale principale.

A.2 Funzione di utilità e modelli media-varianza

Per comprendere il funzionamento dei mercati finanziari è necessario introdurre una teoria che possa descrivere le decisioni finanziarie quali acquisto, vendita, preferenza di un titolo piuttosto che un altro, ecc. Trattandosi di scelte che si basano su una conoscenza più o meno accurata del passato e solo su una ipotetica previsione del futuro, questa teoria deve saper gestire adeguatamente incertezza e rischio, fattori sempre presenti nell'azione di un agente economico.

Indichiamo con a una decisione che l'investitore può prendere (vendere, acquistare,...) appartenente a tutte le possibili decisioni D . Assumiamo inoltre che il mondo circostante abbia uno stato ω (evento elementare) $\in \Omega$ (insieme dei possibili stati), nell'ipotesi importante che la scelta di a non influenzi in alcun modo la scelta di ω .

Il risultato combinato di queste scelte determina la coppia $(a, \omega) \in D \times \Omega$ alla quale è associato un numero reale c che rappresenta la conseguenza per l'investitore della scelta a quando il mondo è nello stato ω .

Denotiamo con X la funzione dall'insieme $D \times \Omega$ a valori in \mathbb{R} con legge $X : (a, \omega) \mapsto c$. Fissato lo stato ω , è pertanto lecito scrivere $X_a(\omega) = c$.

X_a risulta quindi una funzione da Ω in \mathbb{R} , ovvero una variabile aleatoria.

All'insieme delle possibili scelte dell'investitore a possiamo quindi sostituire l'insieme delle corrispondenti variabili aleatorie X_a oppure, in modo equivalente, le loro distribuzioni di probabilità F_a o le densità di probabilità f_a , ammesso che esistano.

Introduciamo quindi il concetto primitivo di *preferenza dell'investitore* tra distribuzioni, indicato con il simbolo: \succeq (“*preferito a*”) e assumiamo validi i seguenti assiomi:

1. *Completezza*: per ogni coppia di distribuzioni F_a, F_b appartenente all'insieme delle distribuzioni F , si verifica che $F_a \succeq F_b$ oppure $F_b \succeq F_a$. Se valgono entrambe allora F_a e F_b si dicono equipreferite e si scrive: $F_a \sim F_b$.
2. *Transitività*: se $F_a \succeq F_b$ e $F_b \succeq F_c \implies F_a \succeq F_c$.
3. *Continuità*: se $F_a \succeq F_b \succeq F_c \implies \exists \lambda \in [0, 1]: \lambda F_a + (1 - \lambda)F_c \sim F_b$, cioè tra tre alternative ordinate è sempre possibile effettuare una combinazione tra la pessima e la ottima per ottenere un valore equipreferito alla intermedia.

Teorema A.18. (*Utilità ordinale*).

Esiste una funzione $V : F \rightarrow \mathbb{R}$ tale che, se valgono gli assiomi 1, 2 e 3, allora si ha:

$$F_a \succeq F_b \iff V(F_a) \geq V(F_b). \tag{A.9}$$

Definizione A.19. Se vale (A.9) la funzione V è detta *funzione di utilità ordinale* che, si dice, rappresenta le preferenze \succeq . La qualifica di “ordinale” deriva dal fatto che la funzione di utilità V è unica a meno di trasformate monotone crescenti.

Si noti che la funzione V è definita sullo spazio delle distribuzioni di probabilità, pertanto non è un oggetto di facile manipolazione. Si introduce quindi un 4° assioma che semplifica notevolmente il problema:

4. *Indipendenza*:
se $F_a \succeq F_b$ allora $\forall \lambda \in [0, 1]$ e $\forall F_c \in F \implies \lambda F_a + (1 - \lambda)F_c \succeq \lambda F_b + (1 - \lambda)F_c$
cioè l'investitore non altera la propria preferenza tra due distribuzioni a cui vengono aggiunte le stesse componenti aleatorie.

Diretta conseguenza di questo assioma è il teorema di Von Neumann e Morgenstern:

Teorema A.20. (*Utilità attesa*).

Data una distribuzione di probabilità F_a , se valgono i 4 assiomi sopra definiti, allora esiste una funzione $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$V(F_a) = E[U(X_a)]. \quad (\text{A.10})$$

- Nel caso discreto, se $X_a = \begin{cases} x_1 & p_{a,1} \\ \dots & \dots \\ x_n & p_{a,n} \end{cases}$, la funzione di utilità U è tale che:

$$V(F_a) = E[U(X_a)] = \sum_{i=1}^n U(x_i)p_{a,i}.$$

- Nel caso continuo, se f_a è la densità di probabilità, allora:

$$V(F_a) = E[U(X_a)] = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x)dF_a(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x)f_a(x)dx.$$

Definizione A.21. Se vale (A.10) la funzione U è detta *funzione di utilità cardinale o di Von Neumann e Morgenstern (VNM)* che rappresenta \succeq sotto l'assunto dei 4 assiomi.

Il vantaggio rispetto all'utilità ordinale è di avere una funzione reale a valori reali per la quale valgono tutti i risultati del calcolo differenziale ordinario, che vengono sfruttati nei passaggi della teoria di Markowitz.

La modellistica finanziaria si base, quasi sempre, sulla massimizzazione dell'utilità attesa:

$$\max_{a \in D} V(F_a) = \max_{a \in D} E[U(X_a)] \quad (\text{A.11})$$

L'argomento della funzione U è, tipicamente, una grandezza monetaria W che rappresenta il reddito o la ricchezza dell'investitore.

La funzione di utilità U deve soddisfare ulteriori due assiomi di natura economica che si traducono in semplici disuguaglianze:

5. *Non sazietà*: l'investitore preferisce sempre una quantità maggiore rispetto ad una quantità minore per cui la funzione U è monotona strettamente crescente:

$$W_1 < W_2 \Rightarrow U(W_1) < U(W_2) \quad (\text{A.12})$$

6. *Avversione al rischio*: l'investitore preferisce sempre ottenere con certezza il valore atteso di una data quantità aleatoria rispetto alla quantità aleatoria stessa. Ciò si traduce nella seguente definizione matematica di avversione al rischio:

$$U(E[W]) > E[U(W)] \quad (\text{A.13})$$

Per costruire funzioni di utilità che verifichino le condizioni di non sazietà e avversione al rischio, ricordiamo un importante risultato:

Teorema A.22. (Disuguaglianza di Jensen).

Siano (Ω, \mathcal{F}, P) uno spazio di probabilità, W una variabile aleatoria a valori reali e U una funzione convessa. Allora:

$$U(E[W]) \leq E[U(W)] \quad (\text{A.14})$$

La (A.14) riporta la disuguaglianza nell'espressione classica basata sulla convessità. E' immediato verificare che nel caso di una funzione concava U vale la disuguaglianza inversa (poiché se U è concava allora $-U$ è convessa e $E[-U(W)] = -E[U(W)]$).

Deduciamo quindi che, se consideriamo una funzione monotona crescente e strettamente concava, allora gli assiomi 5 e 6 sono verificati. Per rappresentare invece un soggetto *neutrale al rischio* (indifferente alla scelta tra quantità aleatoria e suo valore atteso) o *propenso al rischio* (preferisce la quantità aleatoria rispetto al suo valore atteso) utilizziamo rispettivamente una funzione di utilità lineare o una funzione di utilità convessa.

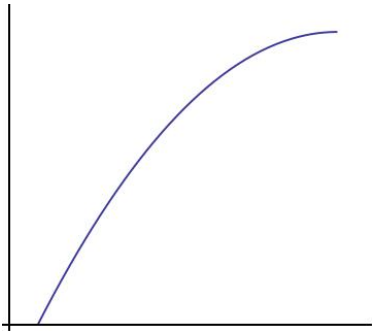


Figura A.2: utilità di un soggetto avverso al rischio

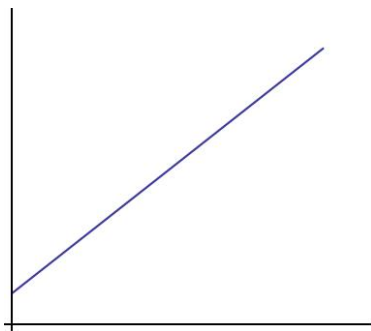


Figura A.3: utilità di un soggetto neutrale al rischio

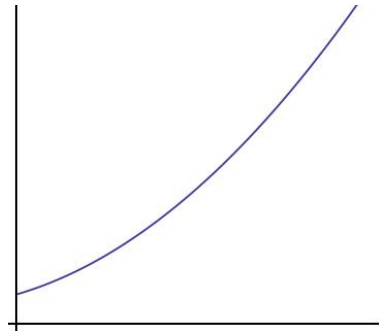


Figura A.4: utilità di un soggetto propenso al rischio

Nella teoria AAS consideriamo sempre un agente economico avverso al rischio, pertanto approfondiamo il caso di funzioni di utilità monotone crescenti e concave.

Ci limitiamo a considerare la classe delle funzioni polinomiali e, in particolare, quella di utilità quadratica:

$$U(W) = a + bW - cW^2.$$

Si tratta di una funzione polinomiale di secondo grado. Affinché sia rappresentativa dei soggetti non saziabili ed avversi al rischio la derivata prima deve essere positiva (monotonia crescente) e la derivata seconda deve essere negativa (concavità), quindi:

$$\begin{cases} U' = b - 2cW > 0 \\ U'' = -2c < 0 \end{cases} \implies \begin{cases} W \in]0, \frac{b}{2c}[, & b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$$

La funzione quadratica è molto utile sia perché può essere vista, tramite uno sviluppo di Taylor, come l'approssimazione al secondo ordine di una qualsiasi funzione di utilità, sia perché un soggetto con funzione di utilità quadratica prende le proprie decisioni in base ai parametri di *valore atteso* e *varianza*. Si hanno infatti questi due importanti risultati:

Proposizione A.23. *Si consideri un soggetto con funzione di utilità quadratica U .*

- *Egli basa le sue decisioni solo in funzione dei parametri di media $E[X]$ e varianza $var(X)$ secondo la relazione:*

$$E[U(X)] = \Psi(+E[X], -var(X)) \quad (\text{A.15})$$

I segni + e - stanno ad indicare che la media ha un effetto positivo, cioè al crescere della media cresce il livello di benessere, mentre la varianza ha un effetto negativo, cioè al crescere della varianza diminuisce il livello di benessere.

- *Se i valori attesi di due variabili aleatorie sono uguali ($E[X] = E[Y]$) allora il criterio decisionale si basa solo sulla varianza e il soggetto avverso al rischio preferisce la soluzione a minor varianza: $X \succeq Y \iff var(X) < var(Y)$.*

Definizione A.24. Nella relazione (A.15) la funzione Ψ è detta *funzione di utilità indiretta media-varianza*.

In particolare, come tipicamente accade, se consideriamo distribuzioni di probabilità normali $X \sim \mathcal{N}_{\mu_X, \sigma_X^2}$ che dipendono per definizione solo da media $\mu_X = E[X]$ e varianza $\sigma_X^2 = var(X)$, si ha necessariamente che per qualunque funzione di utilità U :

$$E[U(X)] = \Psi(+\mu_X, -\sigma_X^2) \quad (\text{A.16})$$

Ad esempio, la forma più semplice di utilità indiretta media-varianza è:

$$\Psi(+\mu_X, -\sigma_X^2) = \mu_X - \theta\sigma_X^2, \quad \theta \in \mathbb{R}, \theta > 0.$$

I modelli finanziari classici si basano proprio su utilità indirette di questo tipo, perciò vengono chiamati *modelli media-varianza*. Il primo a sviluppare tale teoria sfruttando le proprietà della funzione di utilità quadratica fu Harry Markowitz negli anni '50 del secolo scorso. Da questi risultati lo stesso economista statunitense sviluppò la teoria della frontiera dei portafogli efficienti, cuore dell'Asset Allocation Strategica.

A.3 Problema di minimo vincolato

All'interno della teoria AAS ci si trova ad affrontare un tipico problema di analisi matematica, cioè determinare un punto estremante (un minimo, in particolare) di una funzione a valori reali rispetto ad uno o più vincoli. Per presentare rigorosamente questo importante risultato dobbiamo utilizzare la teoria delle varietà di \mathbb{R}^N , di cui riportiamo solo alcuni concetti essenziali.

Definizione A.25. $M \subseteq \mathbb{R}^N$, $M \neq \emptyset$ è una p -varietà di classe C^k , $1 \leq p < N$, $k \geq 1$, se per ogni punto $a \in M$ esistono un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ contenente a e una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{N-p}$ di classe C^k tali che:

1. $M \cap \Omega = \{x \in \Omega : f(x) = 0\}$,
2. la matrice jacobiana J_f ha rango $N - p$.

In tal caso diciamo che $f = 0$ è una *equazione locale di M in a* .

Intuitivamente un punto di \mathbb{R}^N vincolato su una p -varietà ha p gradi di libertà, perché è soggetto a $N - p$ vincoli.

Utilizzando un altro profondo risultato, noto in letteratura come Teorema di Dini, è possibile dimostrare che ogni varietà è localmente il grafico di una funzione.

Definizione A.26. Sia M una p -varietà di classe C^k , $a \in M$. Un vettore $h \in \mathbb{R}^N$ si dice *tangente a M nel punto a* se è tangente ad una curva passante per a , cioè se esiste $\psi :]-\delta, \delta[\rightarrow M$ derivabile in 0 tale che $\psi(0) = a$, $\psi'(0) = h$.

Teorema A.27. Sia $f = 0$ un'equazione locale di una p -varietà M in a . Allora:

$$M_a = \ker df(a).$$

Indichiamo con M_a l'insieme dei vettori tangenti a M nel punto a . Per il teorema precedente M_a è uno spazio vettoriale di dimensione p , detto *spazio tangente* a M in a . Anche l'insieme $M_a^\perp = \{k \in \mathbb{R}^N \text{ t.c. } k \perp h, \forall h \in M_a\}$ risulta essere uno spazio vettoriale (di dimensione $N - p$), detto *spazio normale* a M in a .

Osservazione A.28. Nelle notazioni precedenti, se $f = (f_1, \dots, f_{N-p}) = 0$ è un'equazione locale di M in a allora $\{\nabla f_1(a), \dots, \nabla f_{N-p}(a)\}$ è una base di M_a^\perp .

Dimostrazione. Sia $h \in M_a \Rightarrow df(a)(h) = 0 \Leftrightarrow J_f(a)h = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \dots \\ \nabla f_{N-p}(a) \end{pmatrix} h = 0$

da cui deduciamo che $\langle \nabla f_j(a), h \rangle = 0 \forall j = 1, \dots, N-p$.

Quindi i vettori $\nabla f_1(a), \dots, \nabla f_{N-p}(a) \in M_a^\perp$; inoltre sono linearmente indipendenti perché il rango di $J_f(a)$ è $N-p$, pertanto costituiscono una base di M_a^\perp . □

Definizione A.29. Sia $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $M \subseteq \Omega$ una p -varietà. $a \in M$ si dice *punto estremante relativo vincolato* di F su M se a è un punto di max (min) relativo per $F|_M$ cioè se esiste un disco D di raggio $r > 0 : F(x) \leq (\geq) F(a) \forall x \in M \cap D(a, r)$.

Definizione A.30. Siano $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ e $M \subseteq \Omega$ una p -varietà. $a \in M$ è un *punto critico vincolato* di F su M se: $dF(a)|_{M_a} = 0$.

Osserviamo che, dalla definizione precedente si ha:

$$dF(a)|_{M_a} = 0 \iff \langle \nabla F(a), h \rangle = 0 \quad \forall h \in M_a \iff \nabla F(a) \in M_a^\perp$$

quindi, se $f = (f_1, \dots, f_{N-p}) = 0$ è un'equazione locale di M in a , allora per l'osservazione A.28 a è un punto critico di $F|_M$ se e solo se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_{N-p} \in \mathbb{R}$ tali che

$$\nabla F(a) = \sum_{j=1}^{N-p} \lambda_j \nabla f_j(a) \iff \nabla (F - \sum_{j=1}^{N-p} \lambda_j f_j)(a) = 0.$$

La funzione $\mathcal{L} = F - \sum_{j=1}^{N-p} \lambda_j f_j$ è detta *lagrangiana*.

Teorema A.31. (Fermat).

Siano $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, Ω aperto di \mathbb{R}^N , $M \subseteq \Omega$ p -varietà e infine $a \in M$. Allora:

a punto estremante relativo di $F|_M \implies a$ punto critico di $F|_M$.

Dimostrazione. Supponiamo che a sia un punto di massimo relativo per $F|_M$, allora esiste un disco D di raggio $r > 0$ tale che:

$$F(x) \leq F(a) \quad \forall x \in M \cap D(a, r).$$

Sia ora $h \in M_a$ fissato ad arbitrio: per la definizione A.26 di vettore tangente, esiste una funzione $\psi :]-\delta, \delta[\rightarrow M \cap D(a, r)$ tale che $\psi(0) = a$, $\psi'(0) = h$. Allora:

$$F(\psi(t)) \leq F(a) = F(\psi(0)) \quad \forall t \in]-\delta, \delta[.$$

Pertanto la funzione $F \circ \psi :]-\delta, \delta[\rightarrow \mathbb{R}$ ha un punto di massimo in $t = 0$. Applicando il Teorema di Fermat per le funzioni reali a valori reali si ha che:

$$\left. \frac{d}{dt} F(\psi(t)) \right|_{t=0} = 0 \implies \langle \nabla F(\psi(0)), \psi'(0) \rangle = 0 \implies \langle \nabla F(a), h \rangle = 0.$$

In definitiva: $dF(a)(h) = 0 \forall h \in M_a \implies dF(a)|_{M_a} = 0$, cioè a è punto critico di $F|_M$. Analogo ragionamento nel caso in cui a sia un punto di minimo relativo. □

Teorema A.32. (Moltiplicatori di Lagrange).

Sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, Ω aperto di \mathbb{R}^N . Sia $f = (f_1, \dots, f_{N-p}) = 0$ un'equazione locale della p -varietà M nel punto $a \in M$. Se a è un punto estremante relativo di $F|_M$, allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_{N-p} \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\nabla \mathcal{L}(a) = 0 \quad \text{dove } \mathcal{L} \text{ è la lagrangiana } F - \sum_{j=1}^{N-p} \lambda_j f_j. \quad (\text{A.17})$$

Dimostrazione. Per ipotesi a è un punto estremante quindi, per il teorema A.31 di Fermat, a è un punto critico di $F|_M$. Come osservato in precedenza ciò equivale a:

$$\begin{aligned} \nabla F(a) \in M_a^\perp &\iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_{N-p} \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \nabla F(a) = \sum_{j=1}^{N-p} \lambda_j \nabla f_j(a) \\ &\iff \nabla (F - \sum_{j=1}^{N-p} \lambda_j f_j)(a) = 0 \\ &\iff \nabla \mathcal{L}(a) = 0. \end{aligned}$$

□

Il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange fornisce una condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché un punto della p -varietà M sia un massimo o un minimo relativo vincolato per F su M . Pertanto solo i punti che verificano la condizione A.17 possono essere punti estremanti relativi di $F|_M$, ma il teorema non assicura che lo siano.

Bibliografia

- [1] Riccardo Cesari, *Introduzione alla Finanza Matematica. Mercati Azionari, rischi e portafogli*, McGraw-Hill, 2012.
- [2] Andrea Pascucci, *Calcolo stocastico per la finanza*, Springer, 2007.
- [3] Ermanno Lanconelli, *Lezioni di Analisi Matematica 2*, Pitagora Editrice, 2000.
- [4] Riccardo Cesari, *Introduzione alla Finanza Matematica. Concetti di base, tassi e obbligazioni*, McGraw-Hill, 2012.
- [5] Magazine di Analisi Tecnica, *Asset Allocation Strategica e Tattica*, Mrprofit.it, 2010
- [6] Wikipedia, *Frontiera dei portafogli*, it.wikipedia.org, 2014