

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

Realizzazione di un sistema di
stabilizzazione per laser a stato solido, per
la generazione di luce squeezed in
esperimenti di interferometria

Relatore:
Prof. Marco Prevedelli

Presentata da:
Stefano Finelli

Sessione III
Anno Accademico 2013/2014

Abstract

Con questo lavoro di tesi si affrontano i primi accorgimenti sperimentali necessari alla realizzazione di un esperimento di ottica quantistica. L'attività svolta consiste nell'ottimizzazione dei parametri di un PLL (Phase-Locked Loop) che mantiene due laser agganciati in frequenza, e nella misura del rumore di fase presente nell'aggancio. Questa stabilizzazione costituisce il primo passo per la generazione di luce squeezed, associata a particolari stati del campo elettromagnetico. Grazie a quest'ultima, è possibile migliorare la sensibilità raggiungibile in esperimenti di interferometria di precisione, quali ad esempio quelli per la ricerca di onde gravitazionali. L'iniezione di luce squeezed costituirà infatti parte del prossimo upgrade dell'interferometro di *Virgo*.

Scendendo più nel dettaglio, la tesi si apre con un capitolo di teoria nel quale, partendo dalla conoscenza dell'oscillatore armonico quantistico e della scomposizione del campo elettromagnetico nei modi di cavità, si giunge alla quantizzazione del campo stesso e all'introduzione delle sue principali rappresentazioni. Tra queste, appunto, vi sono gli stati squeezed, che generalizzano il concetto di stato a minima incertezza.

Il secondo capitolo è incentrato sull'analisi dei limiti intrinseci nella precisione di un interferometro di tipo Michelson. Si studiano le cause fondamentali del rumore quantomeccanico, e si introducono le potenzialità della tecnica della luce squeezed. Essa consiste sostanzialmente nell'attenuare le fluttuazioni causate dallo stato di vuoto del campo (il quale entra nell'interferometro dalla porta normalmente inutilizzata), sostituendolo invece con uno stato squeezed. Quest'ultimo ha il vantaggio di presentare un'incertezza inferiore a qualsiasi stato coerente in una delle due quadrature di fase, a discapito di una maggiore nell'altra. Si vedrà come, operando opportunamente lo squeezing, si possa aumentare la precisione dello strumento.

Tuttavia i processi per generare stati squeezed sono abbastanza delicati, e necessitano alla base di laser ben stabilizzati in frequenza. Il primo passo consiste in una buona progettazione dell'elettronica degli agganci, i quali devono presentare piccoli valori di rumore di fase, per quanto possibile. L'attività svolta ai laboratori dell'INFN di Legnaro (PD) è stata incentrata proprio su questo, ed è descritta nel terzo ed ultimo capitolo.

Come prima cosa, è stata caratterizzata la risposta alla modulazione del cristallo piezoelettrico interno ai laser. Esso permette di modificare la frequenza della luce uscente, ma è opportuno conoscere la banda di modulazione in cui poter operare, al fine di evitare scomodi inconvenienti dovuti alle risonanze acustiche. In seguito a ciò, è stato possibile ottimizzare i parametri del PLL, misurando densità spettrale di potenza e rumore di fase per diversi

guadagni della pompa di carica. Dopo aver scelto il regime in cui operare, il rumore di fase dell'aggancio è stato nuovamente misurato, servendosi prima di un analizzatore di spettro RF (Radio Frequenza), e confrontando poi i dati con quelli forniti da un analizzatore a FFT (Fast Fourier Transform). L'obiettivo prefissato era di ottenere un rumore di fase *rms* (root mean square) dell'ordine di 10 mrad_{rms} nella banda $0 - 100 \text{ kHz}$, ed è stato raggiunto. Come ulteriore conferma dei valori ottenuti, è stato misurato sull'analizzatore a FFT anche il rumore di fase dei due DDS (Direct Digital Synthesizer) utilizzati per fornire i segnali di clock. Esso è risultato essere dell'ordine delle decine di μrad_{rms} , a sostegno del fatto che tutto il rumore presente fosse sostanzialmente dovuto al PLL, e che le misure precedenti non fossero limitate dal fondo strumentale.

Indice

1	Introduzione Teorica	1
1.1	Richiami sull'oscillatore armonico quantistico	1
1.2	Scomposizione del campo elettromagnetico nei modi di cavità	3
1.3	Quantizzazione del campo elettromagnetico	5
1.3.1	Stati numero o stati di Fock	6
1.3.2	Stati coerenti	7
1.3.3	Stati squeezed	9
2	Analisi quantomeccanica di un interferometro	11
2.1	Introduzione	11
2.2	Analisi del Beam-Splitter	13
2.3	Pressione di radiazione	14
2.4	Conteggio di fotoni	16
2.5	Potenza ottimale	17
3	Parte Sperimentale	19
3.1	Introduzione	19
3.2	Modulazione FM	21
3.3	Caratterizzazione del guadagno del cristallo piezoelettrico	22
3.4	PLLs: Phase-Locked Loops	25
3.4.1	Funzione di trasferimento	27
3.4.2	Simulazione con ADIsimPLL	29
3.5	Rumore di fase	30
3.5.1	Stima del rumore di fase in rad_{rms}	31
3.5.2	Rumore di fase di due DDS	39
3.6	Conclusioni	41

Bibliografia

Capitolo 1

Introduzione Teorica

1.1 Richiami sull'oscillatore armonico quantistico

L'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico unidimensionale in meccanica quantistica può essere ricavata, per il Principio di Corrispondenza, a partire da quella classica:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \mathbf{q}^2}{2}$$

dove \mathbf{H} , \mathbf{q} e \mathbf{p} sono ora operatori (hermitiani), e questi ultimi soddisfano la seguente relazione di commutazione:¹

$$[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = i\hbar$$

Si definiscono gli operatori (adimensionali) \mathbf{P} e \mathbf{Q} per giungere ad una forma più simmetrica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \mathbf{q} \\ \mathbf{P} = \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}} \mathbf{p} \end{array} \right. \implies [\mathbf{Q}, \mathbf{P}] = i$$

$$\mathbf{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\mathbf{P}^2 + \mathbf{Q}^2)$$

Quindi, seguendo il metodo algebrico di Dirac, si introducono gli operatori di creazione e distruzione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{Q} + i\mathbf{P}) \\ \mathbf{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{Q} - i\mathbf{P}) \end{array} \right. \implies [\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = 1$$

La relazione di commutazione segue dalle precedenti, inoltre si nota come \mathbf{a} e \mathbf{a}^\dagger non siano hermitiani, non essendo quindi associabili a grandezze osservabili. Tuttavia la loro importanza risiede nell'interpretazione fisica e nelle buone proprietà algebriche.

L'Hamiltoniana diventa:

$$\mathbf{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + 1) = \hbar\omega (\mathbf{N} + \frac{1}{2})$$

dove prima si è fatto uso del commutatore, e poi si è introdotto l'operatore $\mathbf{N} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$ (operatore numero, hermitiano). Poiché \mathbf{H} ha la forma semplice di una funzione lineare di \mathbf{N} , i due operatori ammettono gli stessi autovettori.^{2,3} Il problema agli autovalori dell'energia si riduce quindi a trovare quelli dell'operatore numero:

$$\mathbf{N} |\nu\rangle = \nu |\nu\rangle$$

dove gli autoket sono etichettati secondo il corrispettivo autovalore. Esiste un teorema che aiuta molto nella risoluzione:^{1,2}

• **Teorema:**

Sia $|\nu\rangle$ un autoket di \mathbf{N} , e ν il corrispondente autovalore. Allora:

- i) $\nu \geq 0$
- ii) $\mathbf{a}^\dagger |\nu\rangle$ è a sua volta autoket (non normalizzato) di \mathbf{N} , con autovalore $(\nu + 1)$.
- iii) Se $\nu \neq 0$, allora $\mathbf{a} |\nu\rangle$ è ancora autoket (non normalizzato) di \mathbf{N} , con autovalore $(\nu - 1)$. Con $\nu = 0$, $\mathbf{a} |\nu\rangle = |0\rangle$.
- iv) $\nu \in \mathbb{N} \implies \underline{\nu = n}$

Di conseguenza:

$$\mathbf{N} |n\rangle = n |n\rangle$$

$$\mathbf{H} |n\rangle = E_n |n\rangle \implies E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$$

Gli autostati $|n\rangle$ sono stazionari. Essendo normalizzati e completi, formano una base hilbertiana ortonormale.¹ Nel caso unidimensionale gli autovalori E_n non sono mai degeneri, ed inoltre si noti che l'energia minima non è nulla, bensì $E_0 = \hbar\omega/2$.

Dal teorema sopra si ricava l'azione di \mathbf{a} e \mathbf{a}^\dagger sugli autoket $|n\rangle$:

$$\begin{cases} \mathbf{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \\ \mathbf{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \end{cases}$$

E, noto lo stato fondamentale $|0\rangle$, un generico stato $|m\rangle$ è generato da:

$$|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}} (\mathbf{a}^\dagger)^m |0\rangle$$

1.2 Scomposizione del campo elettromagnetico nei modi di cavità

La quantizzazione del campo elettromagnetico segue dalla scomposizione dello stesso nei singoli modi di cavità. Grazie a questo processo, difatti, emerge nell'espressione dell'energia una struttura corrispondente a quella di oscillatori armonici indipendenti. La quantizzazione del campo si riduce quindi alla quantizzazione degli oscillatori.

Si consideri un campo elettromagnetico libero, localizzato in un volume finito di spazio. Senza perdita di generalità, si può assumere un volume cubico ($V = L^3$). Poiché V è finito, tutte le grandezze del campo sono sviluppabili in serie tripla di Fourier. Ad esempio per il potenziale vettore:⁴

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}; t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

ove le lettere in grassetto indicano quantità vettoriali.

La sommatoria è estesa a tutti i possibili valori di \mathbf{k} , le cui componenti assumono i valori $k_j = \frac{2\pi n_j}{L}$ (con $n_j \in \mathbb{Z}$), a seguito dell'imposizione delle condizioni di periodicità al contorno (scelte in modo tale da generare un prolungamento continuo al di fuori di V).

La condizione da imporre per ottenere $\mathbf{A}(\mathbf{r}; t)$ reale è: $\mathbf{A}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*$.

L'energia posseduta dal campo, in accordo col teorema di Poynting, è data da:⁵

$$\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) d^3x$$

Nel gauge di Coulomb vale $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, che nello sviluppo implica $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0$, ovvero $\mathbf{k} \perp \mathbf{A}$. Dalle equazioni di Maxwell si ricavano i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} & \longrightarrow & \quad \mathbf{E} = -\sum_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} & \longrightarrow & \quad \mathbf{B} = i \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \end{aligned}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^2 &= \sum_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^2 e^{2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}'} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} \\ \mathbf{B}^2 &= -\sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{A}_{\mathbf{k}}|^2 e^{2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'} (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}})(\mathbf{k}' \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}'}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} \end{aligned}$$

Integrando sulle coordinate, tutti i termini con $\mathbf{k}' \neq -\mathbf{k}$ danno contributo nullo. Per $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$, invece, la dipendenza spaziale scompare e l'integrazione fornisce semplicemente il volume V . Si ottiene quindi:

$$\mathcal{E} = \frac{V\epsilon_0}{2} \sum_{\mathbf{k}} (\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^* + \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*)$$

ove si è usata la condizione per $\mathbf{A}(\mathbf{r}; t)$ reale e si è posto $\omega_{\mathbf{k}}^2 = k^2 c^2$.

Prima di poter ricondurre tale espressione a quella dell'energia di un insieme di oscillatori, è necessario fare qualche altra considerazione sul potenziale vettore.

Grazie alla condizione $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, dalle equazioni di Maxwell senza sorgenti è possibile ricavare un'equazione d'onda per $\mathbf{A}(\mathbf{r};t)$:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}(\mathbf{r};t) = 0$$

Cercando una soluzione fattorizzabile nella forma $\mathbf{A}(\mathbf{r};t) = \mathcal{T}(t) \mathcal{X}(\mathbf{r})$, si ottiene:

$$\frac{\nabla^2 \mathcal{X}(\mathbf{r})}{\mathcal{X}(\mathbf{r})} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{\mathcal{T}}(t)}{\mathcal{T}(t)} = -K^2$$

ove i due membri sono stati posti uguali ad una costante, affinché l'uguaglianza possa essere verificata. Si ottiene un sistema di due equazioni armoniche:

$$\begin{cases} \mathcal{X}(\mathbf{r}) &= \alpha e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \beta e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ \mathcal{T}(t) &= \gamma e^{i\omega t} + \delta e^{-i\omega t} \end{cases}$$

Quindi la soluzione finale può essere scritta nella forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r};t) = [\delta \mathcal{X}(\mathbf{r})] e^{-i\omega t} + [\gamma \mathcal{X}(\mathbf{r})] e^{i\omega t} = \mathbf{A}^+(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \mathbf{A}^-(\mathbf{r}) e^{i\omega t}$$

e la condizione per $\mathbf{A}(\mathbf{r};t)$ reale impone: $\mathbf{A}^-(\mathbf{r}) = (\mathbf{A}^+(\mathbf{r}))^*$. In questo modo, sviluppando $\mathbf{A}^+(\mathbf{r})$ con Fourier, si ottiene subito anche lo sviluppo di $\mathbf{A}^-(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{A}^+(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{c}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\mathbf{A}^-(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{c}_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

Da cui, ponendo $\mathbf{a}_{\mathbf{k}} = \mathbf{c}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r};t) = \sum_{\mathbf{k}} \left[\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right]$$

Confrontando questo sviluppo con quello iniziale, si nota che si deve avere $\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^*$, il che implica $\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} = -i\omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{a}_{\mathbf{k}} - \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^*)$. Sostituendo nell'espressione per l'energia:

$$\mathcal{E} = 2V\varepsilon_0 \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*$$

dove ora l'energia posseduta dal campo è espressa come somma di contributi delle singole onde piane. Operando la trasformazione canonica:

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = \sqrt{V\varepsilon_0} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) \\ \mathbf{P}_{\mathbf{k}} = -i\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{V\varepsilon_0} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) \end{cases}$$

si ha per l'energia:

$$\mathcal{E} = \mathbf{H} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}^2)$$

Ciascuno dei vettori $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$ e $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$ è per costruzione ortogonale al vettore d'onda \mathbf{k} , quindi può essere scomposto in due componenti indipendenti (indicate con $j = 1, 2$). Ecco che:

$$\mathbf{H} = \sum_{\mathbf{k}, j} \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{\mathbf{k}, j}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}, j}^2)$$

e l'energia del campo elettromagnetico è espressa come somma delle energie di oscillatori armonici indipendenti, in numero doppio rispetto ai valori che può assumere \mathbf{k} . Dallo sviluppo iniziale si riescono inoltre ad esprimere le grandezze dal campo in termini delle variabili canoniche:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}; t) = \frac{1}{\sqrt{V\epsilon_0}} \sum_{\mathbf{k}} \left[\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \frac{\mathbf{P}_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \right]$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}; t) = -\frac{1}{\sqrt{V\epsilon_0}} \sum_{\mathbf{k}} [\mathbf{P}_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \omega_{\mathbf{k}} \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$$

1.3 Quantizzazione del campo elettromagnetico

Il campo elettromagnetico è quantizzato a partire dalla quantizzazione degli oscillatori armonici associati ai singoli modi di cavità. Formalmente, le variabili canoniche $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}, j}$ e $\mathbf{P}_{\mathbf{k}, j}$ vengono sostituite da operatori:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q}_{\mathbf{k}, j} \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_{\mathbf{k}}}} \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}, j} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{k}, j} \rightarrow \sqrt{\hbar\omega_{\mathbf{k}}} \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}, j} \end{array} \right. \implies [\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}, j}, \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}, j}] = i$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \sum_{\mathbf{k}, j} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2} (\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}, j}^2 + \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}, j}^2)$$

La non-commutatività di $\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}, j}$ e $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}, j}$ (detti anche operatori di quadratura) non introduce termini misti nell'Hamiltoniana.⁶ In maniera analoga a quanto si è fatto in §1.1, si introducono gli operatori di creazione e distruzione. Inoltre, per quanto detto sinora, risulta formalmente che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{\mathbf{k}, j} \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2V\epsilon_0\omega_{\mathbf{k}}}} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}, j} \\ \mathbf{a}_{\mathbf{k}, j}^* \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2V\epsilon_0\omega_{\mathbf{k}}}} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}, j}^\dagger \end{array} \right.$$

Dove ora $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k},j}^\dagger$ e $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k},j}$ rappresentano rispettivamente la creazione e la distruzione di un fotone con vettore d'onda \mathbf{k} e polarizzazione j . Per le grandezze del campo si trova:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}; t) &= \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{V\varepsilon_0\omega_{\mathbf{k}}}} \left[\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \right] \\ \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}; t) &= - \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{V\varepsilon_0}} \left[\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \right]\end{aligned}$$

E, nei termini degli operatori di creazione e distruzione:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}; t) &= \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2V\varepsilon_0\omega_{\mathbf{k}}}} \left[\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] \\ \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}; t) &= i \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V\varepsilon_0}} \left[\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right]\end{aligned}$$

Lo stato quantico di ciascun modo può essere trattato indipendentemente dagli altri. Lo stato totale del campo è dato dal prodotto degli stati dei singoli modi.⁷ Si considerano ora tre possibili rappresentazioni per il campo elettromagnetico quantizzato.

1.3.1 Stati numero o stati di Fock

Gli stati numero sono generalmente il punto di partenza per la trattazione di un singolo modo del campo e, come già visto, costituiscono una base hilbertiana ortonormale. Nonostante ciò risulta particolarmente difficile realizzarli sperimentalmente. Le proprietà basilari degli autoket $|n_{\mathbf{k}}\rangle$ e l'algebra degli operatori di creazione e distruzione sono discusse in §1.1. Da queste si ricava:

$$\left(\Delta\hat{N}_{\mathbf{k}}\right)^2 = \langle\hat{N}_{\mathbf{k}}^2\rangle - \langle\hat{N}_{\mathbf{k}}\rangle^2 = 0$$

il che significa che non v'è incertezza nel numero di fotoni presenti. Il prezzo da pagare è una completa indeterminazione della fase.⁸ L'equazione agli autovalori per l'energia (per un singolo modo) può essere scritta in varie forme:

$$\hat{\mathbf{H}}|n_{\mathbf{k}}\rangle = \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k},j}^\dagger \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k},j} + \frac{1}{2} \right) |n_{\mathbf{k}}\rangle = \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2} \left(\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k},j}^2 + \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{k},j}^2 \right) |n_{\mathbf{k}}\rangle$$

Ricordando come sono legati agli operatori di creazione e distruzione, è immediato verificare che gli operatori di quadratura hanno eguali proprietà nella rappresentazione degli stati di Fock:

$$\begin{aligned}\langle n_{\mathbf{k}} | \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k},j} | n_{\mathbf{k}} \rangle &= \langle n_{\mathbf{k}} | \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{k},j} | n_{\mathbf{k}} \rangle = 0 \\ \langle n_{\mathbf{k}} | \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k},j}^2 | n_{\mathbf{k}} \rangle &= \langle n_{\mathbf{k}} | \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{k},j}^2 | n_{\mathbf{k}} \rangle = \left(n_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \\ \left(\Delta\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k},j} \right)^2 &= \left(\Delta\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{k},j} \right)^2 = \left(n_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right)\end{aligned}$$

Lo stato fondamentale $|0\rangle$ è un esempio di stato a minima incertezza: $\Delta\hat{Q}_{\mathbf{k},j}\Delta\hat{P}_{\mathbf{k},j} = 1/2$. I valori medi e le varianze del campo elettrico e del potenziale vettore seguono dall'algebra di $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k},j}$ e $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k},j}^\dagger$:

$$\begin{aligned}\langle\hat{\mathbf{A}}\rangle &= 0 & (\Delta\hat{\mathbf{A}})^2 &= \frac{\hbar}{V\varepsilon_0\omega_k} \left(n + \frac{1}{2}\right) \\ \langle\hat{\mathbf{E}}\rangle &= 0 & (\Delta\hat{\mathbf{E}})^2 &= \frac{\hbar\omega_k}{V\varepsilon_0} \left(n + \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

1.3.2 Stati coerenti

Gli stati coerenti sono stati introdotti da Glauber nel 1963⁹. Sono stati a incertezza minima, in cui però il numero di fotoni presenti è indefinito. Rappresentano con buona approssimazione il campo prodotto da un laser altamente stabilizzato. Nella trattazione che segue, si considera un solo modo del campo e si sottintendono i cappelli che indicano gli operatori. Come prima cosa si introduce l'operatore (unitario) di traslazione:⁷

$$\mathbf{D}(\alpha) = e^{(\alpha\mathbf{a}^\dagger - \alpha^*\mathbf{a})}$$

ove α è un generico numero complesso. L'operatore \mathbf{D} gode delle seguenti proprietà:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\mathbf{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\mathbf{a}} \\ \mathbf{D}^\dagger(\alpha) = \mathbf{D}^{-1}(\alpha) = \mathbf{D}(-\alpha) \\ \mathbf{D}^\dagger(\alpha) \mathbf{a} \mathbf{D}(\alpha) = \mathbf{a} + \alpha \\ \mathbf{D}^\dagger(\alpha) \mathbf{a}^\dagger \mathbf{D}(\alpha) = \mathbf{a}^\dagger + \alpha^* \end{array} \right.$$

dove la prima di esse segue dall'identità operatoriale:⁷

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}e^{-\frac{[\mathbf{A},\mathbf{B}]}{2}} \quad \text{valida quando:} \quad [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = [\mathbf{B}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = 0$$

Questo operatore ha quindi l'effetto di traslare gli operatori di creazione e distruzione. Lo stato coerente $|\alpha\rangle$ è generato applicando $\mathbf{D}(\alpha)$ allo stato fondamentale:

$$|\alpha\rangle = \mathbf{D}(\alpha) |0\rangle$$

ed è quindi una sorta di *vuoto dislocato*. Esso è autoket dell'operatore di distruzione, difatti:

$$\mathbf{D}^\dagger(\alpha) \mathbf{a} |\alpha\rangle = \mathbf{D}^\dagger(\alpha) \mathbf{a} \mathbf{D}(\alpha) |0\rangle = (\mathbf{a} + \alpha) |0\rangle = \alpha |0\rangle$$

e, moltiplicando ambo i membri per $\mathbf{D}(\alpha)$, si ottiene l'equazione agli autovalori per \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

In maniera analoga si giunge a quella per gli autovettori sinistri di \mathbf{a}^\dagger :

$$\langle\alpha| \mathbf{a}^\dagger = \alpha^* \langle\alpha|$$

È possibile mostrare che gli stati coerenti sono normalizzati, e che possono essere espansi in termini degli stati numero come:^{7,8,9}

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

ove si nota come il numero di fotoni sia indefinito. La distribuzione di probabilità che lo governa è infatti una Poissoniana di valor medio $|\alpha|^2$:

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$$

E, grazie alle relazioni precedenti, è facile notare che:

$$\begin{aligned} \langle\alpha| \mathbf{N} |\alpha\rangle &= |\alpha|^2 \\ \langle\alpha| \mathbf{N}^2 |\alpha\rangle &= |\alpha|^4 + |\alpha|^2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad (\Delta\mathbf{N})^2 = |\alpha|^2$$

L'incertezza relativa nel numero di fotoni presenta quindi un andamento decrescente di tipo:

$$\frac{\Delta\mathbf{N}}{\langle\mathbf{N}\rangle} = \frac{1}{|\alpha|^2} = \frac{1}{\sqrt{\langle\mathbf{N}\rangle}}$$

Avvalendosi sempre dell'espressione di \mathbf{P} e \mathbf{Q} nei termini di \mathbf{a} e \mathbf{a}^\dagger , e facendo uso del loro commutatore quando serve, si valutano valori medi e varianze degli operatori di quadratura:

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{Q}\rangle &= \sqrt{2} \Re[\alpha] = \sqrt{2} |\alpha| \cos \theta_\alpha & \langle\mathbf{P}\rangle &= \sqrt{2} \Im[\alpha] = \sqrt{2} |\alpha| \sin \theta_\alpha & (\theta_\alpha = \arg \alpha) \\ (\Delta\mathbf{Q})^2 &= (\Delta\mathbf{P})^2 = \frac{1}{2} & \Longrightarrow & (\Delta\mathbf{Q})(\Delta\mathbf{P}) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ove è evidente la minima incertezza degli stati coerenti.

Per quel che riguarda i valori di aspettazione di campo elettrico e potenziale vettore, si ha:

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{A}\rangle &= \sqrt{\frac{2\hbar}{V\varepsilon_0\omega}} |\alpha| \cos(\chi - \phi_1) & (\Delta\mathbf{A})^2 &= \frac{\hbar}{2V\varepsilon_0\omega} \\ \langle\mathbf{E}\rangle &= -\sqrt{\frac{2\hbar\omega}{V\varepsilon_0}} |\alpha| \cos(\chi - \phi_2) & (\Delta\mathbf{E})^2 &= \frac{\hbar\omega}{2V\varepsilon_0} \end{aligned}$$

dove $\chi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$; $\tan(\phi_1) = -\frac{\Im[\alpha]}{\Re[\alpha]}$ e $\tan(\phi_2) = \frac{\Re[\alpha]}{\Im[\alpha]}$.

Gli operatori di campo presentano un andamento sinusoidale con varianza costante, un comportamento quasi-classico che tende a descrivere un campo classico per $|\alpha| \rightarrow \infty$.

Infine, si osserva che gli stati coerenti non sono ortogonali:

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\beta-\alpha|^2}$$

ma lo diventano approssimativamente nel limite $|\beta - \alpha| \gg 1$.

1.3.3 Stati squeezed

Esiste una classe più generale di stati a minima incertezza, denominati *stati squeezed*, caratterizzati dal fatto di rispettare $(\Delta\mathbf{Q})(\Delta\mathbf{P}) = 1/2$, presentando però incertezze diverse nelle due quadrature. Geometricamente sono individuati da un'iperbole nel piano $(\Delta\mathbf{Q})(\Delta\mathbf{P})$, e gli stati coerenti sono rappresentati dal punto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Da notare che solo i punti a destra dell'iperbole rappresentano stati fisici.

Si definisce l'operatore (unitario) di *squeezing*:¹⁰

$$\mathbf{S}(\xi) = \exp \left[\frac{1}{2} \left(\xi^* \mathbf{a}^2 - \xi (\mathbf{a}^\dagger)^2 \right) \right]$$

ove $\xi = r e^{i\theta}$ è un numero complesso. Le principali proprietà di \mathbf{S} sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}^\dagger(\xi) = \mathbf{S}^{-1}(\xi) = \mathbf{S}(-\xi) \\ \mathbf{S}^\dagger(\xi) \mathbf{a} \mathbf{S}(\xi) = \mathbf{a} \cosh(r) - \mathbf{a}^\dagger e^{i\theta} \sinh(r) \\ \mathbf{S}^\dagger(\xi) \mathbf{a}^\dagger \mathbf{S}(\xi) = \mathbf{a}^\dagger \cosh(r) - \mathbf{a} e^{-i\theta} \sinh(r) \\ \mathbf{S}^\dagger(\xi) (\mathbf{Y}_1 + i\mathbf{Y}_2) \mathbf{S}(\xi) = \mathbf{Y}_1 e^{-r} + i \mathbf{Y}_2 e^r \end{array} \right.$$

dove $(\mathbf{Y}_1 + i\mathbf{Y}_2) = (\mathbf{Q} + i\mathbf{P}) e^{-i\frac{\theta}{2}}$ sono gli operatori di quadratura ruotati. L'operatore di squeezing agisce riducendo l'ampiezza di una quadratura (ruotata) - e aumentando quella dell'altra - di un fattore e^r . Un generico stato squeezed $|\alpha, \xi\rangle$ è ottenuto "spremendo" e poi traslando lo stato fondamentale:

$$|\alpha, \xi\rangle = \mathbf{D}(\alpha) \mathbf{S}(\xi) |0\rangle$$

e le corrispondenti proprietà più generali sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}^\dagger(\xi) \mathbf{D}^\dagger(\alpha) \mathbf{a} \mathbf{D}(\alpha) \mathbf{S}(\xi) = \mathbf{a} \cosh(r) - \mathbf{a}^\dagger e^{i\theta} \sinh(r) + \alpha \\ \mathbf{S}^\dagger(\xi) \mathbf{D}^\dagger(\alpha) \mathbf{a}^\dagger \mathbf{D}(\alpha) \mathbf{S}(\xi) = \mathbf{a}^\dagger \cosh(r) - \mathbf{a} e^{-i\theta} \sinh(r) + \alpha^* \end{array} \right.$$

In questo caso non esistono semplici equazioni agli autovalori come nel caso di stati coerenti e stati di Fock, ma con un po' di algebra si riesce a ricavare:⁸

$$(\mathbf{a} \cosh(r) + \mathbf{a}^\dagger e^{i\theta} \sinh(r)) |\alpha, \xi\rangle = (\alpha \cosh(r) + \alpha^* e^{i\theta} \sinh(r)) |\alpha, \xi\rangle$$

e con metodi del tutto analoghi si ottengono i valori di aspettazione di interesse, con le rispettive varianze:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \mathbf{N} \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2(r) \\ (\Delta\mathbf{N})^2 = |\alpha|^2 [e^{2r} \sin^2(\theta_\alpha - \frac{\theta}{2}) + e^{-2r} \cos^2(\theta_\alpha - \frac{\theta}{2})] + 2 \sinh^2(r) (\sinh^2(r) + 1) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \langle \mathbf{Q} \rangle = \sqrt{2} |\alpha| \cos(\theta_\alpha) \\ (\Delta \mathbf{Q})^2 = \frac{1}{2} [e^{2r} \sin^2(\frac{\theta}{2}) + e^{-2r} \cos^2(\frac{\theta}{2})] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle \mathbf{P} \rangle = \sqrt{2} |\alpha| \sin(\theta_\alpha) \\ (\Delta \mathbf{P})^2 = \frac{1}{2} [e^{2r} \cos^2(\frac{\theta}{2}) + e^{-2r} \sin^2(\frac{\theta}{2})] \end{cases}$$

Si noti come i valori di aspettazione degli operatori di quadratura dipendano solo dal parametro di coerenza α , mentre le loro varianze solo da quello di squeezing ξ .

Per il campo elettrico si trova:

$$\begin{cases} \langle \mathbf{E} \rangle = -\sqrt{\frac{2\hbar\omega}{V\varepsilon_0}} |\alpha| \cos(\chi - \phi_2) \\ (\Delta \mathbf{E})^2 = \frac{\hbar\omega}{2V\varepsilon_0} [e^{2r} \sin^2(\chi - \frac{\theta}{2}) + e^{-2r} \cos^2(\chi - \frac{\theta}{2})] \end{cases}$$

e si osserva che anche il valore medio (segnale) ed il suo rumore dipendono da parametri differenti. Ciò rende teoricamente possibile il poter “prendere il meglio dai due mondi”, beneficiando di un segnale analogo a quello di uno stato coerente, ma con rumore sensibilmente ridotto.

Capitolo 2

Analisi quantomeccanica di un interferometro

2.1 Introduzione

I moderni interferometri per la ricerca di onde gravitazionali lavorano misurando la posizione relativa di due masse ampiamente separate. Necessitano di rilevazioni estremamente sensibili, ed è quindi opportuno prendere in esame i limiti intrinseci dello strumento. Il prototipo standard è un interferometro di Michelson in cui la luce è fornita da un laser (Fig. 2.1).¹⁰ La seguente analisi adotta un approccio semplificato e riassuntivo del modello più completo offerto dalla Ref. 10, alla quale si rimanda per una discussione più esaustiva.

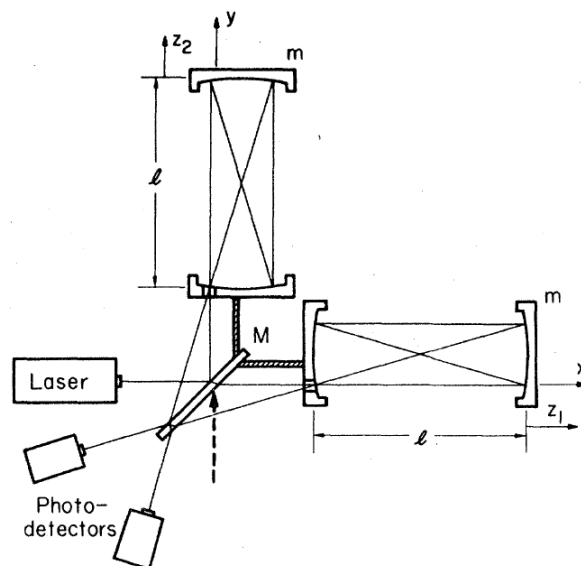


Figura 2.1: Interferometro di Michelson

Con riferimento alla figura, il fascio luminoso uscente dal laser viene inizialmente di-

viso da un beam-splitter 50:50. A questo punto entra nei bracci dell'interferometro, dove viene fatto rimbalzare più volte da specchi totalmente riflettenti, per poi concludere ricombinandosi nella porta di uscita. Gli specchi finali sono rigidamente connessi a due masse m molto grandi, mentre quelli iniziali ed il beam-splitter ad una ancora maggiore, indicata con M . Si assume $M \gg m$ così da poter considerare la maggiore a riposo, e la pressione di radiazione agente solo sulle due masse finali. Gli spostamenti di queste ultime dalle posizioni imperturbate sono indicati con z_1 e z_2 . Dall'intensità luminosa uscente, rilevata con fotodiodi, si possono ottenere informazioni sullo sfasamento relativo della luce nei due bracci: $\Delta\phi = [2 b k z + \text{const}]$, ove k è il modulo del vettore d'onda, b è il numero di rimbalzi e $z = z_2 - z_1$. Cambiamenti in z , rivelati da fluttuazioni in $\Delta\phi$, possono essere causati dal passaggio di un'onda gravitazionale. L'informazione su z non è però il valore istantaneo, ma una sorta di media fatta sul tempo τ_s che la luce trascorre in ogni braccio, e che definisce quindi la risoluzione temporale dello strumento.

L'interferometro di *Virgo* ha bracci lunghi $l = 3 \text{ Km}$ che, grazie a cavità ottiche, raggiungono una lunghezza effettiva di $\sim 120 \text{ Km}$.¹¹ È progettato per la rilevazione di onde gravitazionali con frequenza compresa tra 10 Hz e 10 kHz . Questo dovrebbe permettere l'osservazione di segnali emessi dai sistemi binari, dalle pulsar ed eventualmente dalle supernovae, provenienti principalmente dall'ammasso della Vergine (da cui il nome).

La meccanica quantistica pone però dei limiti sulla precisione con cui si può misurare z o, in generale, la posizione di una particella libera.¹² Dal Principio di Indeterminazione segue:

$$(\Delta z)_{min} \sim \sqrt{\frac{\hbar\tau}{m}}$$

indicando con τ il tempo di misura e con m la massa dell'oggetto in questione.

In un interferometro, questo limite quantistico è ricavabile anche con una trattazione più specifica. Vi sono sostanzialmente tre fonti di rumore quantomeccanico che determinano la risoluzione di tale strumento. In primis, analogamente a quanto detto sopra, l'indeterminazione nelle coordinate e nei momenti degli specchi finali (sulla quale qui non ci si soffermerà). In secondo luogo vi sono le fluttuazioni della pressione di radiazione agente su di essi ed, ultime ma non per importanza, sono presenti fluttuazioni nel numero di fotoni nelle porte di uscita. Incrementando la potenza del laser diminuisce l'errore nel conteggio dei fotoni, ma aumenta quello causato dalla pressione di radiazione. Per ottenere il meglio dai due mondi, si può minimizzare l'errore totale rispetto a questi due parametri, trovando la potenza ottimale:¹⁰

$$\mathcal{P}_0 \simeq \frac{1}{2b^2} \frac{1}{\omega\tau} \frac{mc^2}{\tau}$$

dove ω è la frequenza angolare della luce.

In questa configurazione, i due contributi sono uguali, e Δz è dell'ordine del limite quantistico. Facendo una prima stima a ordini di grandezza dei parametri di *Virgo*:

$$m \sim 10^2 \text{ Kg}; \quad \tau \sim 8 \cdot 10^{-4} \text{ s}; \quad \omega \sim 2 \cdot 10^3 \text{ THz}; \quad b \sim 40$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_0 \sim 2 \cdot 10^6 \text{ W}$$

che è un valore eccessivamente elevato per i laser continui di oggi (per le specifiche sui laser utilizzati nell'esperienza si veda il Cap. 3). Ciò significa che il contributo dominante nel rumore sarà dato dall'errore nel conteggio di fotoni che, come visto nel Cap. 1, per un laser che emette uno stato coerente ha un andamento del tipo:

$$\frac{\Delta \mathbf{N}}{\langle \mathbf{N} \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\langle \mathbf{N} \rangle}}$$

Tuttavia, negli ultimi decenni è stata sviluppata ed implementata una tecnica che consente di ridurre sensibilmente tale contributo, anche per potenze $\mathcal{P} \ll \mathcal{P}_0$. Essa consiste nel non lasciare che nel secondo ingresso dell'interferometro entri lo stato di vuoto coerente $|0\rangle$ (i.e. lo stato coerente con $\alpha = 0$), ma nell'iniettarvi uno stato di vuoto squeezed $|0, \xi\rangle = \mathbf{D}(0)\mathbf{S}(\xi)|0\rangle$. Come visto precedentemente, uno stato squeezed presenta in una quadratura di fase un'incertezza inferiore rispetto a quella di un qualsiasi stato coerente, a svantaggio di un'incertezza maggiore nell'altra. Questa tecnica, infatti, funziona proprio perché una delle due quadrature è responsabile delle fluttuazioni nel numero dei fotoni, mentre l'altra causa quelle nella pressione di radiazione. A seconda del modo in cui si applica lo squeezing, è quindi possibile ridurre uno dei due contributi al rumore, a discapito di incrementare l'altro. Si può così migliorare la sensibilità di interferometri che operano a potenze inferiori di \mathcal{P}_0 .

2.2 Analisi del Beam-Splitter

La figura⁸ 2.2 mostra un beam-splitter ideale con due modi di ingresso e due modi di uscita del campo elettromagnetico.

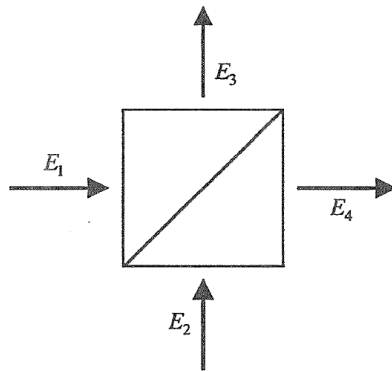


Figura 2.2:

Le relazioni che li legano possono essere scritte in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} E_3 \\ E_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & T_2 \\ T_1 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

dove i coefficienti R_j e T_j sono in generale numeri complessi:

$$R_j = \rho_j e^{i\theta_j} \qquad T_j = \tau_j e^{i\phi_j}$$

Deve valere la conservazione dell'energia, ovvero:

$$|E_1|^2 + |E_2|^2 = |E_3|^2 + |E_4|^2$$

e, sostituendo le relazioni precedenti:

$$\begin{cases} |R_1|^2 + |T_1|^2 = 1 \\ |R_2|^2 + |T_2|^2 = 1 \\ (R_1 T_2^* + T_1 R_2^*) = 0 \end{cases}$$

Dall'ultima di esse segue:

$$\begin{cases} |\rho_1| |\tau_2| = |\rho_2| |\tau_1| \\ \theta_1 + \theta_2 - \phi_1 - \phi_2 = \pm\pi \end{cases}$$

La matrice del beam-splitter è quindi unitaria, e questo è conseguenza della conservazione dell'energia. Nel caso di un beam-splitter 50:50, i coefficienti hanno tutti modulo pari a $\sqrt{2}/2$.

Il caso quantistico è sostanzialmente analogo a quello classico. Formalmente, i modi del campo elettromagnetico vengono etichettati tramite gli operatori di distruzione \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{b}_3 e \mathbf{b}_4 (dove la corrispondenza coi precedenti è negli indici). Si può scrivere:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & T_2 \\ T_1 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$$

E le considerazioni che ne seguono corrispondono alle precedenti.⁸

2.3 Pressione di radiazione

Ci sono stati dibattiti e controversie sull'esistenza e sull'origine del rumore dovuto alla pressione di radiazione sulle masse finali di un interferometro. Nel 1980 Caves¹³ ha risolto la questione, dimostrando come esso sia in effetti reale, e causato dalle fluttuazioni del vuoto del campo elettromagnetico (le fluttuazioni nella potenza del laser si dovrebbero dividere equamente al beam-splitter). Lo stato di vuoto entra nell'interferometro dalla porta di

ingresso che solitamente viene lasciata inutilizzata, ed interferisce con la luce del laser. Le fluttuazioni causate dalla pressione di radiazione sono ottenute calcolando il momento trasferito alle masse m . Durante il calcolo, si assume che le masse rimangano a riposo ($m \rightarrow \infty$) in modo da poter trascurare l'effetto Doppler sulla luce riflessa.¹⁰ Infine, si rilascerà tale condizione per il calcolo della perturbazione su z .

Si considerano quindi quattro modi del campo elettromagnetico in presenza del beam-splitter (BS). Il modo 1 descrive la luce proveniente dal laser, il modo 2 quella proveniente dall'altro ingresso. I modi 3 e 4 sono modi di uscita. Siano \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{b}_3 e \mathbf{b}_4 i corrispondenti operatori di distruzione. Per le relazioni del beam-splitter:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\Delta} \begin{pmatrix} -e^{-i\mu} & 1 \\ 1 & e^{i\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$$

dove Δ e 2μ sono costanti del BS (rispettivamente lo sfasamento totale e lo sfasamento relativo). Per gli operatori di creazione valgono relazioni analoghe, ma bisogna coniugare gli elementi della matrice (la trasposizione, in questo caso, non ha effetto). La differenza nei momenti assorbiti dalle due masse è data dall'impulso trasferito da ogni fotone nelle b riflessioni, moltiplicato per la differenza nel numero di fotoni presenti nei due bracci:

$$\mathbf{p} = 2b \frac{\hbar\omega}{c} \left(\mathbf{b}_3^\dagger \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_4^\dagger \mathbf{b}_4 \right)$$

ove ω è la pulsazione della luce e \mathbf{p} è in effetti un operatore. Se lo si esprime nei termini dei modi di ingresso:

$$\mathbf{p} = -\frac{2b\hbar\omega}{c} \left(e^{i\mu} \mathbf{a}_1^\dagger \mathbf{a}_2 + e^{-i\mu} \mathbf{a}_2^\dagger \mathbf{a}_1 \right)$$

Si consideri il caso in cui il modo 1 sia in uno stato coerente, e il modo 2 sia uno stato di vuoto squeezed:

$$|\Psi\rangle = \mathbf{S}_2(\xi) \mathbf{D}_1(\alpha) |0\rangle$$

Dalle proprietà di tali stati segue facilmente:

$$\langle \Psi | \mathbf{p} | \Psi \rangle = 0$$

Il calcolo della varianza è invece un poco più laborioso, e richiede la conoscenza dei valori di aspettazione di \mathbf{a}_2^2 e $(\mathbf{a}_2^\dagger)^2$ sullo stato di vuoto squeezed:⁸

$$\begin{cases} \langle \Psi | \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 | \Psi \rangle = -\frac{e^{i\theta}}{2} \sinh(2r) \\ \langle \Psi | \mathbf{a}_2^\dagger \mathbf{a}_2^\dagger | \Psi \rangle = -\frac{e^{-i\theta}}{2} \sinh(2r) \end{cases}$$

Si trova quindi:

$$(\Delta \mathbf{p})^2 = \left(\frac{2b\hbar\omega}{c} \right)^2 \left[|\alpha|^2 - \frac{e^{2i\mu}}{2} (e^{i\theta}(\alpha^*)^2 \sinh(2r)) - \frac{e^{-2i\mu}}{2} (e^{-i\theta}\alpha^2 \sinh(2r)) + (1 + 2|\alpha|^2) \sinh^2(r) \right]$$

Il caso interessante si presenta quando la fase dello squeezing del modo 2 è scelta in modo tale che la quadratura con rumore ridotto sia esattamente in fase o 90° fuori fase con l'eccitazione coerente del modo 1. Si può considerare quindi α reale, il che equivale a porre lo zero della fase in corrispondenza di $\theta_\alpha = \arg(\alpha)$, e $\xi = -re^{-2i\mu}$ (si vedano §1.3.2 e §1.3.3). L'espressione sopra si semplifica in:

$$(\Delta \mathbf{p})^2 = \left(\frac{2b\hbar\omega}{c} \right)^2 (|\alpha|^2 e^{2r} + \sinh^2(r))$$

Di conseguenza, il rumore su z dovuto alle fluttuazioni della pressione di radiazione è:

$$(\Delta z)_{pr} \simeq \frac{\tau}{2m} (\Delta \mathbf{p}) = \frac{b\hbar\omega\tau}{mc} \sqrt{|\alpha|^2 e^{2r} + \sinh^2(r)}$$

Generalmente r è piccolo, e si può tranquillamente considerare $\langle \mathbf{N}_1 \rangle \gg \langle \mathbf{N}_2 \rangle$, ovvero $\alpha^2 \gg \sinh^2(r)$. Il primo termine nella radice è quindi quello dominante. Di conseguenza, tramite il parametro di squeezing r (che può essere sia positivo che negativo) si può controllare $(\Delta z)_{pr}$.

2.4 Conteggio di fotoni

Il calcolo delle fluttuazioni in z dovute all'errore nel conteggio dei fotoni è simile al precedente, ma ora i modi di uscita 3 e 4 descrivono la luce diretta ai fotodiodi (rispettivamente nelle direzioni $-x$ e $-y$). Definendo \mathbf{c}_3 e \mathbf{c}_4 i loro operatori di annichilazione, le relazioni coi modi di ingresso sono:¹⁰

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_3 \\ \mathbf{c}_4 \end{pmatrix} = -ie^{i\Phi} \begin{pmatrix} e^{-i\mu} \sin(\Delta\phi/2) & i \cos(\Delta\phi/2) \\ i \cos(\Delta\phi/2) & e^{i\mu} \sin(\Delta\phi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$$

dove $\Delta\phi = [\pi - 2\mu + 2b\omega z/c]$ è la differenza di fase relativa tra un braccio e l'altro, mentre $\Phi = [2b\omega(z_1 + z_2)/c + \text{const}]$ è la fase media. L'operatore che restituisce la differenza in numero tra i fotoni nei due modi è $\mathbf{n} = [\mathbf{c}_3^\dagger \mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_4^\dagger \mathbf{c}_4]$, che è opportuno esprimere nei termini dei modi di ingresso:

$$\mathbf{n} = [\mathbf{a}_1^\dagger \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2^\dagger \mathbf{a}_2] \cos(\Delta\phi) - i[e^{i\mu} \mathbf{a}_1^\dagger \mathbf{a}_2 - e^{-i\mu} \mathbf{a}_2^\dagger \mathbf{a}_1] \sin(\Delta\phi)$$

Considerando sempre lo stesso stato $|\Psi\rangle = \mathbf{S}_2(\xi) \mathbf{D}_1(\alpha) |0\rangle$ del campo, con squeezing definito come nel calcolo di \mathbf{p} , si trova:

$$\begin{cases} \langle \mathbf{n} \rangle = [\alpha^2 - \sinh^2(r)] \cos(\Delta\phi) \\ (\Delta \mathbf{n})^2 = \cos^2(\Delta\phi)[\alpha^2 + 2 \cosh^2(r) \sinh^2(r)] + \sin^2(\Delta\phi)[\alpha^2 e^{-2r} + \sinh^2(r)] \end{cases}$$

Per stimare il rumore in uscita dovuto al conteggio di fotoni si usa un piccolo artificio. Un cambiamento (infinitesimo) nel valore n_{out} fornito dall'operatore \mathbf{n} si manifesta con perturbazioni in z :

$$\delta n_{out} = -\frac{2b\omega}{c} \alpha^2 \sin(\Delta\phi) \delta z$$

dove vale sempre $\alpha^2 \gg \sinh^2(r)$, e si è usata la definizione di $\Delta\phi$ per ottenere δz . Combinando questa espressione con la varianza di \mathbf{n} , si trova il rumore di conteggio:

$$(\Delta z)_c \simeq \frac{c}{2b\omega\alpha} \sqrt{\left[e^{-2r} + \cot^2(\Delta\phi) + \frac{\sinh^2(r)}{\alpha^2} \left(1 + 2 \cot^2(\Delta\phi) \cosh^2(r) \right) \right]}$$

I termini dipendenti da $\Delta\phi$ possono essere scartati con un opportuno posizionamento dei fotodiodi (tale che $\cos(\Delta\phi) = 0$), mentre i contributi rimanenti sono da intendersi come intrinseci dello strumento:

$$(\Delta z)_c \simeq \frac{c}{2b\omega\alpha^2} \sqrt{[\alpha^2 e^{-2r} + \sinh^2(r)]}$$

Dal confronto di quest'ultima con $(\Delta z)_{pr}$ si nota come la quadratura del modo 2 sovrapposta all'eccitazione del modo 1 sia differente nei due casi. In sostanza, iniettando vuoto squeezed nella seconda porta dell'interferometro, si può ridurre il rumore di conteggio a spese di incrementare quello dovuto alla pressione di radiazione ($r > 0$), o viceversa ($r < 0$).

Il caso standard è recuperato invece per $r = 0$.

2.5 Potenza ottimale

Considerando sempre lo stato $|\Psi\rangle = \mathbf{S}_2(\xi) \mathbf{D}_1(\alpha) |0\rangle$, si assume ora che α sia grande abbastanza da poter trascurare i termini in $\sinh^2(r)$ nei due contributi al rumore. Ciò equivale ad assumere che la radice del numero di fotoni emessi dal laser sia di molto superiore al numero di fotoni del vuoto squeezed. Le espressioni ricavate precedentemente diventano:

$$(\Delta z)_{pr} = \frac{b\hbar\omega\tau}{mc} |\alpha| e^r$$

$$(\Delta z)_c = \frac{c}{2b\omega|\alpha|} e^{-r}$$

Il rumore intrinseco totale è valutato tramite la somma in quadratura di questi due contributi. Per individuare il minimo, si deriva rispetto ad $|\alpha|$, mantenendo momentaneamente r fissato.

Si trova così: $(\Delta z)_{min} \simeq \frac{\hbar\tau}{m}$, in corrispondenza di: $\alpha_0^2 e^{-2r} = \frac{1}{2b^2} \frac{1}{\omega\tau} \frac{mc^2}{\hbar\omega} = \alpha_{ott}$

dove α_{ott} rappresenta il numero ottimale di fotoni nel modo coerente 1 (quello del laser), ed è facile tradurlo in una potenza ottimale:

$$\mathcal{P}_{ott} = \frac{\hbar\omega}{\tau} \alpha_0^2 e^{-2r} = \mathcal{P}_0 e^{-2r}$$

dove \mathcal{P}_0 è la potenza ottimale di un interferometro senza squeezing (si veda §2.1). Il fattore esponenziale è appositamente lasciato in evidenza per mostrare che la \mathcal{P}_{ott} può essere sensibilmente ridotta per $r > 0$. Questo è un'ulteriore conferma del fatto che gli interferometri standard siano limitati dal rumore nel conteggio dei fotoni, ed è evidente come la tecnica della luce squeezed possa portare a dei tangibili miglioramenti. Per citare qualche risultato sperimentale,¹⁴ negli ultimi anni è stato ottenuto $r \sim 1.4$ che corrisponde ad un rumore ~ 12 dB inferiore a quello del vuoto.

La precedente trattazione sul rumore intrinseco di un interferometro (e le conclusioni che ne si sono tratte) è da ritenersi valida entro i limiti imposti, ossia in ultima analisi nel regime in cui si può considerare $|\alpha| \gg \sinh^2(r)$. Il modulo del parametro di squeezing non può aumentare a piacere senza che vi siano conseguenze, e per r grandi (in questi termini) vi sono rapidi peggioramenti nella sensibilità raggiungibile. Per una trattazione più esaustiva della questione, compresa di commenti sul caso in cui anche la luce del laser sia in uno stato squeezed, si rimanda nuovamente alla Ref. 10.

Gli stati squeezed possono essere generati ad esempio a partire da uno stato coerente (o dallo stato di vuoto) e servendosi di un amplificatore parametrico degenere. Un normale amplificatore parametrico ottico è sostanzialmente un cristallo non lineare con una suscettività del second'ordine non nulla ($\chi^{(2)} \neq 0$). Per amplificare un fascio luminoso a frequenza ω_1 , il mezzo viene pompato otticamente con luce ad una frequenza $\omega_p > \omega_1$. La non-linearità del second'ordine converte un certo numero di fotoni del pompaggio in coppie di fotoni a frequenze ω_1 e ω_2 (tali che $\omega_1 + \omega_2 = \omega_p$).

Un amplificatore parametrico degenere è tale per cui $\omega_1 = \omega_2 = \omega_p/2$, ed è un dispositivo molto sensibile alla fase. Difatti amplifica solo le componenti del segnale in fase (o 180° fuori fase) con il pompaggio a ω_p , mentre attenua quelle che sono in quadratura.¹⁵ Questo effetto costituisce proprio la base della generazione di stati squeezed.

Nella pratica, si estrae una porzione del fascio da amplificare e ne si duplica la frequenza sempre tramite processi non lineari del second'ordine (Generazione di Seconda Armonica). Quindi, questo nuovo fascio viene usato per il pompaggio del cristallo, ma è essenziale che si trovi proprio a $\omega_p = 2\omega_1$ affinché l'amplificatore parametrico degenere operi al meglio. Per una discussione più completa sulla generazione di luce squeezed e sugli amplificatori parametrici ottici, si rimanda alla Ref. 15 appena citata.

Capitolo 3

Parte Sperimentale

3.1 Introduzione

L'esperienza consiste nella misura del rumore di fase presente nell'aggancio in frequenza tra due laser, dove quest'ultimo viene effettuato tramite un PLL (si veda più avanti). Si tratta di una piccola frazione dell'apparato che costituirà l'upgrade di *Virgo*, ovvero l'iniezione di luce squeezed nell'interferometro per aumentarne la sensibilità. Nel nostro caso, l'obiettivo preposto è la realizzazione di un aggancio a 20 MHz di differenza, con rumore di fase dell'ordine della decina di $mrad_{rms}$.

I laser utilizzati sono due *Mephisto* della ditta *Coherent*, con le seguenti specifiche:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda & = 1064 \text{ nm} \\ \text{potenza} & = 500 \text{ mW} \\ \text{larghezza di riga} & \sim 1 \text{ kHz} \\ \text{rumore di ampiezza } (f > 10 \text{ kHz}) & < -140 \text{ dBc/Hz} \end{array} \right.$$

Questi laser riescono a raggiungere prestazioni così elevate grazie ad una cavità ottica basata unicamente su di un cristallo monolitico (NPRO: Non-Planar Ring Oscillator), piuttosto che su elementi ottici separati, ed inoltre grazie ad un ulteriore sistema interno di riduzione del rumore. Il cristallo è progettato in maniera tale che non solo funge da cavità, ma costituisce anche il mezzo di guadagno ed inoltre opera come un diodo ottico, ossia un dispositivo la cui trasmissività in un verso è molto maggiore che nell'altro. Per maggiori informazioni sui laser e sui cristalli NPRO, si rimanda alla letteratura fornita dalla ditta¹⁶ e alle principali referenze ivi citate.¹⁷ Per ottenere un controllo sulla frequenza vi sono due differenti meccanismi. Il primo, più "fine" ed a risposta rapida, è costituito da un trasduttore piezoelettrico applicato sulle facce non-ottiche del cristallo, grazie al quale è possibile modularne la lunghezza effettiva. Da manuale, il cristallo è modulabile con segnali fino a 100 kHz di banda, con un guadagno dell'ordine di 1 MHz/V. Cambiamenti più lenti, ma più sostanziosi, nella frequenza sono possibili grazie al meccanismo di controllo della temperatura. Essa influisce sulle caratteristiche del cristallo tramite le variazioni nelle dimensioni, dovute alla dilatazione o contrazione termica, e le variazioni nell'indice di rifrazione. Il coefficiente di guadagno nominale è dell'ordine di -3 GHz/K ma, considerando i salti di modo, il manuale fornisce un intervallo di regolazione della frequenza di circa 30 GHz per cambiamenti di

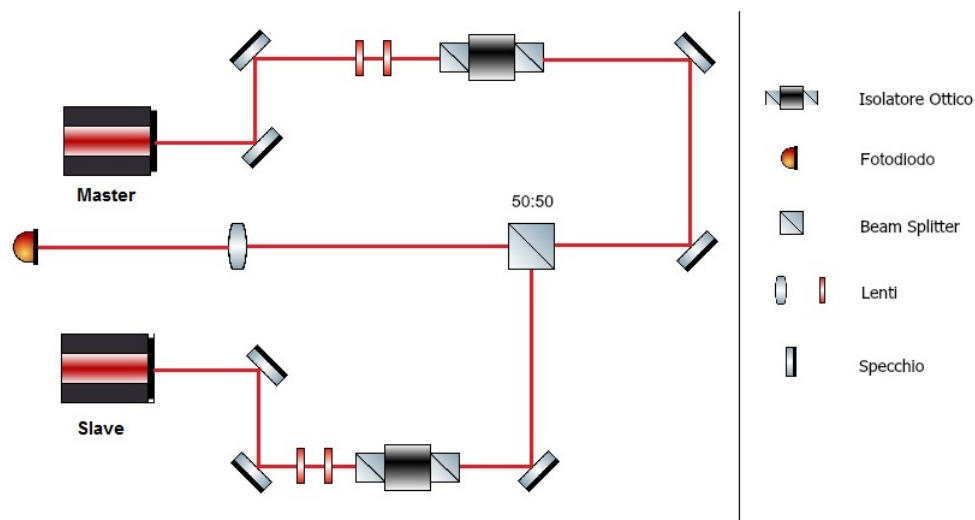


Figura 3.1: Banco Ottico

La figura 3.1 mostra la schematizzazione del banco ottico. Gli isolatori ottici sono una combinazione di polarizzatori e rotatori di Faraday, con lo scopo di prevenire che riflessioni indesiderate di luce raggiungano i laser. Sono anch'essi diodi ottici che permettono al fascio luminoso di attraversarli in un solo verso. Il fotodiolo (FD) è un rivelatore quadratico che genera correnti proporzionali alla potenza luminosa incidente. Le componenti a frequenza ottica oscillano troppo rapidamente per essere seguite dallo strumento, che quindi le media sul tempo, e le componenti continue sono bloccate da un amplificatore accoppiato in AC. Sopravvive solo la corrente che oscilla alla differenza tra le frequenze dei laser, e che costituisce l'ingresso del PLL. Quest'ultimo opera cercando di mantenere la suddetta frequenza in ingresso pari a quella di riferimento (segnale di clock a 20 MHz), e per fare ciò regola opportunamente la tensione sul cristallo piezoelettrico interno di uno dei due laser. Quest'ultimo del quale viene modulata la frequenza è generalmente etichettato come "Slave", mentre l'altro come "Master".

Prima di progettare il PLL, è comunque opportuno caratterizzare la risposta del cristallo, al fine di conoscere l'effettiva banda di modulazione in cui poter operare. Si apre ora una piccola parentesi sulla modulazione FM come base teorica per i successivi risultati sperimentali.

3.2 Modulazione FM

La modulazione di un segnale consiste nell'imprimere un segnale detto *modulante*, contenente l'informazione, su di un segnale periodico ad alta frequenza, detto *portante*. Se la portante è di tipo sinusoidale, in virtù delle proprietà della trasformata di Fourier, si ottiene come risultato la conversione del segnale modulante dalla banda base alla banda traslata. La tecnica della modulazione FM consiste nel modulare la frequenza della portante in maniera proporzionale all'ampiezza del segnale modulante. La frequenza f istantanea del segnale è quindi nella forma:

$$f(t) = f_p + K_m m(t)$$

ove f_p è la frequenza della portante, mentre K_m è una costante. La fase totale è data da:

$$\phi(t) = 2\pi \left(f_p \cdot t + K_m \int_0^t m(t') dt' \right)$$

e il segnale modulato ha la forma: $s(t) = A \cos[\phi(t)]$.

Si consideri ora un segnale modulante di tipo sinusoidale: $m(t) = B_m \cos(2\pi f_m t)$. Per quanto detto sopra:

$$f(t) = f_p + \Delta f \cos(2\pi f_m \cdot t) \quad \implies \quad \phi(t) = 2\pi f_p \cdot t + \beta \sin(2\pi f_m \cdot t)$$

ove si è posto $\Delta f = K_m B_m$ e $\beta = \Delta f / f_m$, detto *indice di modulazione*. Per piccoli valori di tale parametro:

$$s(t) \approx A \cos(2\pi f_p \cdot t) + \frac{A\beta}{2} [\cos(2\pi(f_m + f_p) \cdot t) - \cos(2\pi(f_m - f_p) \cdot t)]$$

e il segnale modulato ha tre componenti principali. Calcolando la sua trasformata di Fourier, si ottiene lo spettro di potenza:

$$S(f) \approx \frac{A}{2} [\delta(f - f_p) + \delta(f + f_p)] + \frac{A\beta}{4} [\delta(f - (f_m + f_p)) + \delta(f + (f_m + f_p))] + \\ - \frac{A\beta}{4} [\delta(f - (f_m - f_p)) + \delta(f + (f_m - f_p))]$$

ove le δ sono le funzioni di Dirac.

In generale, per qualsiasi valore di β , si può scrivere:

$$s(t) = \Re [A e^{i(2\pi f_p t + \beta \sin(2\pi f_m t))}]$$

e, facendo uso dell'espansione di Jacobi-Anger¹⁸ $\left(e^{iz \sin(\theta)} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\theta} \right)$, si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} s(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos [2\pi(f_p + nf_m) \cdot t] \\ S(f) = \frac{A}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) [\delta(f - (f_p + nf_m)) + \delta(f + (f_p + nf_m))] \end{array} \right.$$

dove le J_n sono le funzioni di Bessel del primo tipo. Lo spettro del segnale modulato contiene tutte le armoniche della frequenza modulante, con ampiezza regolata dalle J_n .

Per piccoli valori di β , si possono considerare solo i termini di ordine $n = 0, \pm 1$; e sfruttando le proprietà delle J_n :¹⁹

- $J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$
- $J_n(\beta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\beta/2)^{2m+n}}{m! (m+n)!} \approx \frac{1}{n!} \left(\frac{\beta}{2}\right)^n \quad (\text{per } \beta \ll 1)$

si riottengono le espressioni precedentemente ricavate in tale limite.

3.3 Caratterizzazione del guadagno del cristallo piezoelettrico

Nei laser a stato solido utilizzati nell'esperimento, la luce viene fatta risonare all'interno di un cristallo NPRO. A questo viene applicato un trasduttore piezoelettrico, grazie al quale è possibile modularne le dimensioni effettive (e quindi la frequenza della luce uscente), tramite l'applicazione di una differenza di potenziale. Per avere un'idea qualitativa di quello che succede si può, in prima approssimazione, trattare il cristallo come una cavità di risonanza con pareti totalmente riflettenti. Non si considerano quindi gli stati di polarizzazione dei modi luminosi. Supponendo, inoltre, che la risposta del cristallo alla modulazione sia lineare:

$$l = l_0 + K_{pz}v(t)$$

ove l_0 è la lunghezza del cammino ottico in assenza di perturbazioni, e K_{pz} è il guadagno del cristallo in m/V . La lunghezza d'onda e la frequenza del laser sono quindi date da:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda(t) = \frac{2l}{m} = \frac{2l_0}{m} + \frac{2}{m} K_{pz}v(t) \\ f(t) = \frac{c}{n\lambda(t)} = \frac{mc}{2nl_0} \frac{l_0}{l_0 + K_{pz}v(t)} \end{array} \right.$$

dove m è l'ordine dell'armonica e n è l'indice di rifrazione del cristallo. Scrivendo la frequenza istantanea come $f(t) = f_0 + \delta f(t)$, si ricava:

$$\delta f(t) = -\frac{mc}{2nl_0} \frac{K_{pz}v(t)}{l_0 + K_{pz}v(t)}$$

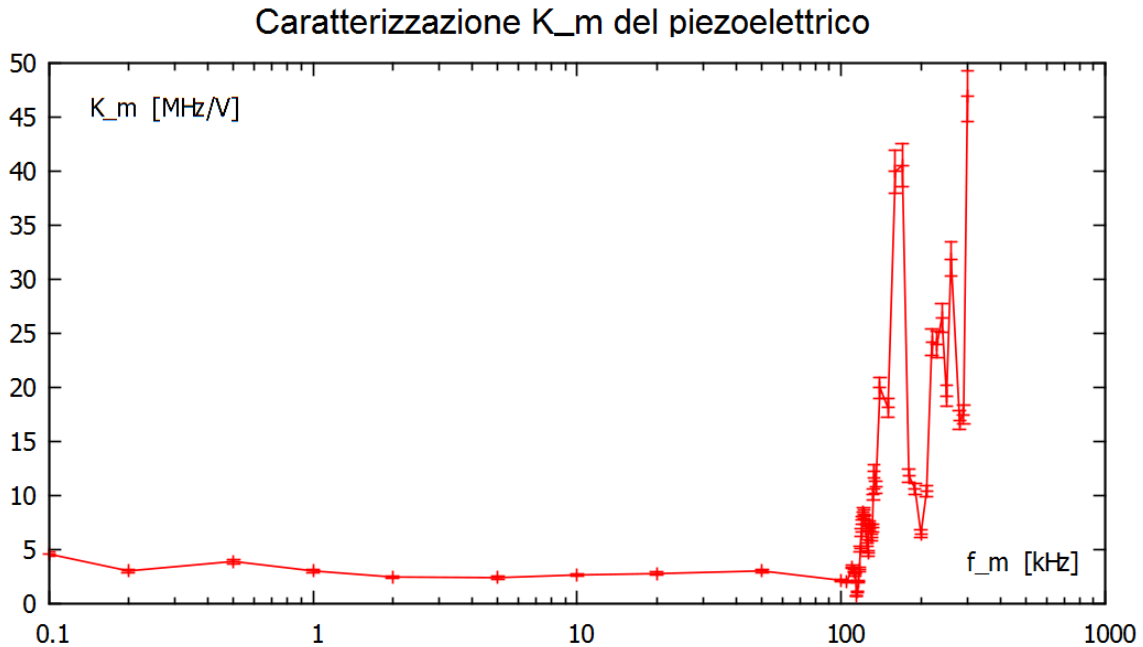
che per $K_{pz}v(t) \ll l_0$ può essere espanso in serie di potenze arrestata al prim'ordine:

$$\delta f(t) \approx -\frac{mc}{2nl_0^2} K_{pz}v(t) = K_m v(t)$$

e questa rappresenta di fatto una modulazione in frequenza come visto nella precedente sezione. Questa trattazione matematica è abbastanza euristica: nel mondo reale il cristallo presenta delle risonanze acustiche, da cui è bene tenersi alla larga, ed inoltre la K_{pz} dipende dalla frequenza di modulazione. Solitamente si procede con una caratterizzazione sperimentale della risposta del piezoelettrico a varie frequenze. Nel presente caso questa operazione è stata effettuata nel seguente modo: abbiamo modulato la lunghezza del cristallo dello Slave Laser (cioè la frequenza di quest'ultimo, e di conseguenza quella del battimento sul fotodiodo) con un segnale armonico. Quindi, mandando il segnale (filtrato) in uscita dal FD su di un analizzatore di spettro RF (impostato per mediare sul tempo), abbiamo misurato sullo schermo la Δf_{\pm} , ossia l'intervallo totale di frequenze (attorno a quella centrale) che era spazzato dalla f del battimento. Con le notazioni usate nella trattazione della modulazione FM:

$$\Delta f_{\pm} = 2\Delta f = 2K_m B_m \quad \implies \quad K_m = \frac{\Delta f_{\pm}}{2B_m}$$

I valori di K_m misurati a varie frequenze di modulazione sono riportati in un grafico:



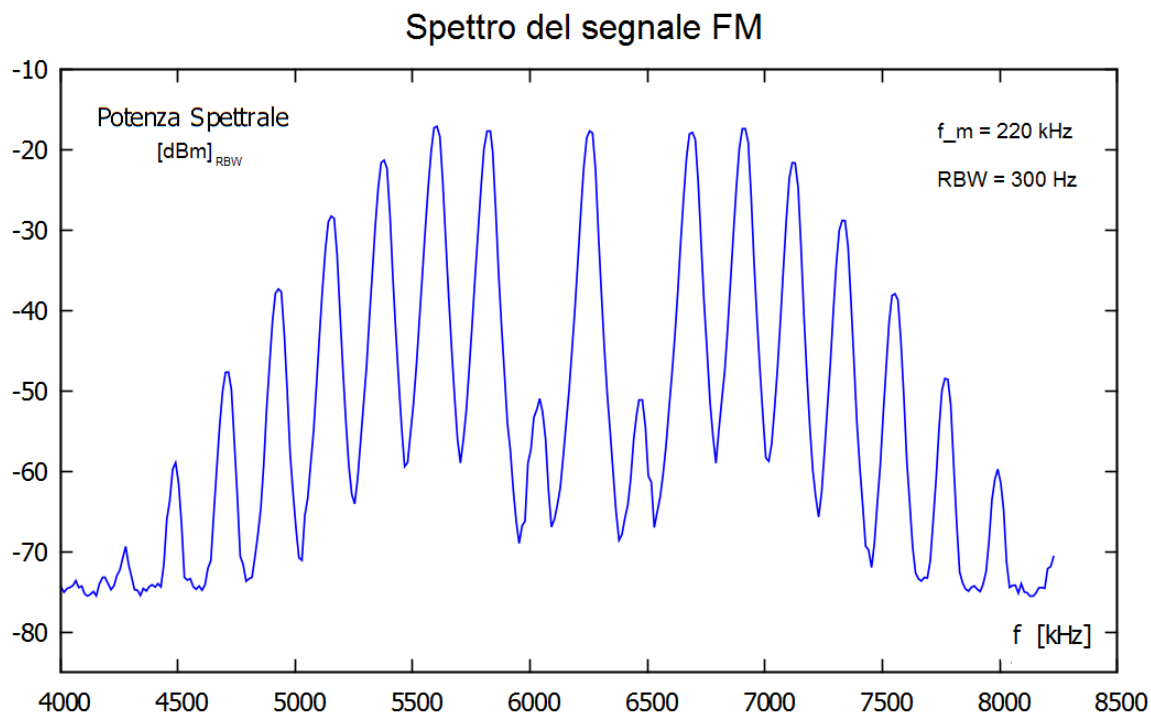
Data la scarsa riproducibilità del sistema, una formalmente corretta propagazione degli errori può risultare non molto indicativa. Le incertezze sui valori K_m sono quindi state stimate grossolanamente al 5%.

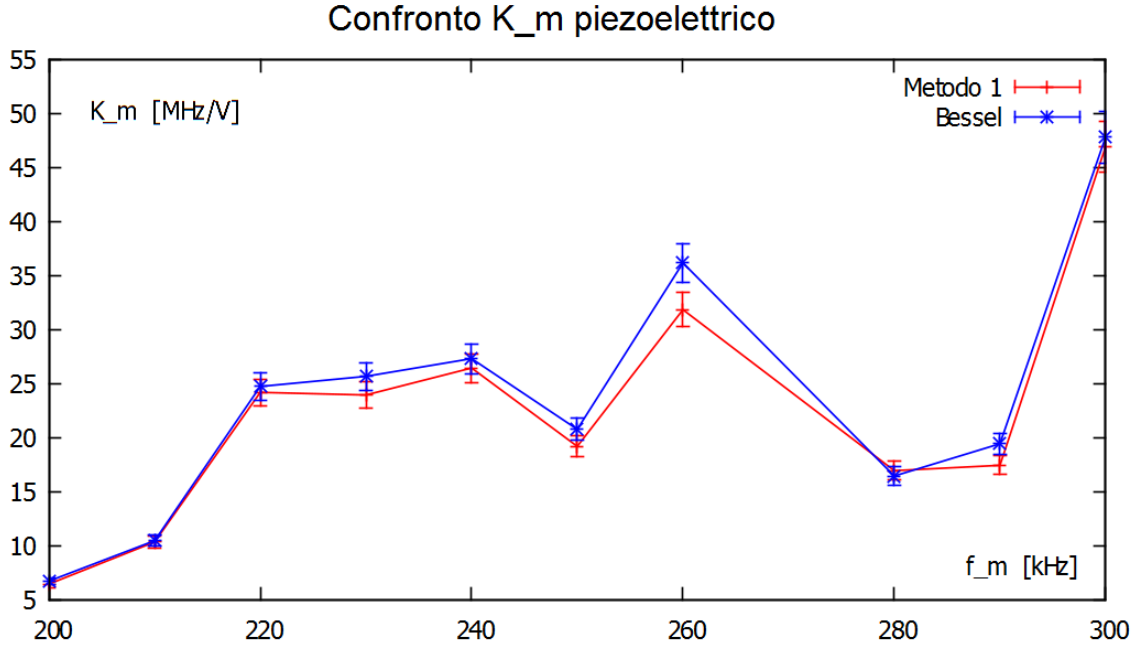
Dal grafico emerge un andamento circa costante di K_m sino ai 100 kHz, come ci si aspettava. Tuttavia attorno ai 160 - 170 kHz si può osservare una “brutta” risonanza acustica, ed anche a frequenze maggiori il profilo rimane molto complicato. È quindi consigliabile operare con f_m inferiori ai 100 kHz, dove la risposta ha un buon comportamento.

Per avere un riscontro sui dati ottenuti, abbiamo utilizzato un metodo più rigoroso del precedente: lo spettro del segnale modulato in frequenza contiene tutte le frequenze $f_0 + n f_m$, con ampiezza dei picchi data dalle funzioni di Bessel (vedi espansione di Jacobi-Anger). Abbiamo quindi variato opportunamente l'ampiezza B_m del segnale modulante, in maniera tale da individuare il primo passaggio per lo zero della prima armonica di f_m . Ciò equivale a individuare il primo zero della funzione di Bessel $J_1(\beta)$, i cui valori sono noti e tabulati.²⁰ Dalla conoscenza del valore dell'argomento (in questo caso $\beta = 3.831705$) e dell'ampiezza B_m per cui ciò occorre è possibile ricavare K_m :

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = 3.831705 \quad \Rightarrow \quad K_m = \frac{3.831705 \cdot f_m}{B_m}$$

Queste misure sono state effettuate per frequenze di modulazione comprese tra 200 e 300 kHz. Di seguito si riporta un esempio di spettro del segnale FM ed il grafico che confronta i valori di K_m ottenuti con i due metodi di cui sopra.





Anche in questo caso gli errori sono stimati al 5%. Con le precedenti considerazioni sulle incertezze, dal confronto emerge una compatibilità accettabile tra i valori ottenuti.

3.4 PLLs: Phase-Locked Loops

Un PLL è un sistema di feedback negativo che combina un oscillatore controllato in tensione (VCO) ed un comparatore di fase (PD), così connessi che l'oscillatore raggiunga e mantenga una differenza di fase costante rispetto ad un segnale di riferimento (RF).²¹ Poiché la frequenza è la derivata della fase, questo implica che al termine del regime transitorio il segnale in uscita dal VCO oscillerà alla stessa frequenza di RF. Considerando le fasi totali di questi due segnali come input del PD, e supponendo che esso produca in uscita un segnale v_{pd} proporzionale alla loro differenza, si ha:

$$\theta_{rf}(t) = \omega_{rf} \cdot t + \phi_{rf} \qquad \theta_{vco}(t) = \omega_{vco}(t) \cdot t + \phi_{vco}(t)$$

$$v_{pd}(t) = K_{pd} [\theta_{rf}(t) - \theta_{vco}(t)]$$

dove K_{pd} è il guadagno del PD in V/rad , e in realtà al posto delle frequenze f si sono usate le pulsazioni angolari ω . Questo segnale costituisce l'ingresso del VCO, la cui frequenza istantanea in uscita si suppone soddisfi una relazione lineare del tipo:

$$\omega_{vco}(t) = \omega_n + K_{vco} \cdot v_{pd}(t)$$

dove ω_n è la frequenza naturale di oscillazione e K_{vco} è il guadagno dell'oscillatore misurato in Hz/V . Il segnale in uscita dal VCO viene mandato come secondo ingresso del PD,

chiudendo il loop di feedback. Dalle equazioni precedenti si ricava il comportamento del PLL per diverse condizioni iniziali.²² Nel caso banale in cui i due segnali siano inizialmente perfettamente allineati in fase ed in frequenza ($\omega_{rf} = \omega_n = \omega_{vco}$; $\phi_{rf} = \phi_{vco} = 0$), l'uscita del PD sarà nulla e il VCO oscillerà alla frequenza naturale, pari a quella di RF. Il circuito sarà automaticamente nello stato locked.

Se invece le due frequenze sono uguali, ma tra i segnali esiste uno sfasamento iniziale ($\omega_{rf} = \omega_n$; $\phi_{rf} = 0$, $\phi_{vco} = \phi_0 > 0$), $v_{pd}(t)$ sarà inizialmente negativo e ciò significa $\omega_{vco}(0) < \omega_n$. La fase totale $\theta_{vco}(t)$ varierà nel tempo, causando variazioni conseguenti in $v_{pd}(t)$ e $\omega_{vco}(t)$, fino a che non si avrà $\omega_{vco} = \omega_{rf}$. A questo punto il circuito sarà nello stato locked. Matematicamente ciò si può esprimere come:

$$\theta_{rf}(t) = \omega_n \cdot t \qquad \theta_{vco}(t) = \omega_{vco}(t) \cdot t + \phi_0$$

e per mezzo delle equazioni sopra, si ricava:

$$v_{pd}(t) = -\frac{K_{pd}\phi_0}{1 + K_{pd}K_{vco} \cdot t}$$

dove si può notare che per $t \rightarrow \infty$, $v_{pd} \rightarrow 0$.

Il caso più interessante si ha quando i segnali sono originariamente a due frequenze diverse. Si consideri ad esempio:

$$\omega_{rf} > \omega_n ; \qquad \phi_{rf} = 0 ; \qquad \phi_{vco} = \phi_0 > 0$$

quindi nel regime transitorio valgono:

$$\begin{cases} v_{pd}(t) = \frac{K_{pd} [(\omega_{rf} - \omega_n) \cdot t - \phi_0]}{1 + K_{pd}K_{vco} \cdot t} \\ \omega_{vco}(t) = \frac{\omega_n + K_{pd}K_{vco} [\omega_{rf} \cdot t - \phi_0]}{1 + K_{pd}K_{vco} \cdot t} \end{cases}$$

Da cui, nell'istante iniziale:

$$v_{pd}(0) = -K_{pd} \phi_0 ; \qquad \omega_{vco}(0) = \omega_n - K_{pd}K_{vco} \phi_0$$

mentre per $t \rightarrow \infty$:

$$v_{pd} = \frac{(\omega_{rf} - \omega_n)}{K_{vco}} ; \qquad \omega_{vco} = \omega_{rf}$$

e il circuito sarà nello stato locked. Da notare che, per frequenze iniziali non coincidenti (cioè per $\omega_{rf} \neq \omega_n$), è necessaria una differenza di fase (costante) per rendere la ω_{vco} in uscita pari a quella di riferimento. Essa è data da:

$$(\Delta\phi)_\infty = \frac{(v_{pd})_\infty}{K_{pd}} = \frac{(\omega_{rf} - \omega_n)}{K_{pd}K_{vco}}$$

Si precisa che la trattazione fatta sinora è valida per deviazioni in frequenza opportunamente piccole, ove possono essere supposte valide le ipotesi di linearità del PD.

3.4.1 Funzione di trasferimento

I PLL reali sono un poco più complicati di come descritto sopra. Ad esempio, considerando che il PD è di fatto un moltiplicatore di segnali, è necessario inserire un filtro prima del VCO per eliminare le componenti indesiderate ad alta frequenza. Sia quindi $F(s)$ la funzione di trasferimento del filtro e $v_c(t)$ il segnale in uscita da esso, che controlla le deviazioni in frequenza del VCO:

$$\omega_{vco}(t) = \omega_n + K_{vco} \cdot v_c(t)$$

Poichè la frequenza è la derivata della fase, l'azione del VCO può essere descritta come:²³

$$\frac{d\theta_{vco}(t)}{dt} = K_{vco} \cdot v_c(t)$$

e passando alle trasformate di Laplace si ricava:

$$\begin{cases} \Theta_{vco}(s) = \frac{K_{vco}V_c(s)}{s} \\ V_{pd}(s) = K_{pd} [\Theta_{rf}(s) - \Theta_{vco}(s)] \\ V_c(s) = F(s)V_{pd}(s) \end{cases}$$

Dalla combinazione di queste si arriva alla funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{\Theta_{vco}(s)}{\Theta_{rf}(s)} = \frac{K_{vco}K_{pd}F(s)}{s + K_{vco}K_{pd}F(s)}$$

Prima di procedere oltre è necessario fare qualche specificazione sul caso che andremo a considerare. Innanzitutto il guadagno della pompa di carica del PD è funzione di una corrente I programmabile, la quale può variare in 8 passi da 0.625 a 5 mA. K_{pd} è quindi dato da $I/2\pi$ (in A/rad). Per convertire la corrente in tensione viene utilizzato il filtro, che verrà ora considerato come una resistenza R in serie ad un condensatore C , connessi tra uscita e massa. Applicando la legge di Ohm, la funzione di trasferimento di questo blocco è:

$$G_1(s) = K_{pd} F(s) = \frac{I}{2\pi} \frac{s\tau_1 + 1}{sC}$$

dove il secondo fattore altro non è che l'impedenza del filtro, e $\tau_1 = RC$ è la costante caratteristica di tempo.

In aggiunta, si schematizza la banda limitata della modulazione FM del laser con un polo semplice a frequenza $\omega_2 \simeq 100 \text{ kHz}$. La funzione di trasferimento di questo secondo blocco è quindi:

$$G_2(s) = K_{vco} F_{vco}(s) = K_{vco} \frac{\omega_2}{s + \omega_2}$$

dove ω_2 rappresenta la banda passante del VCO. Aggiustando i parametri per ottenere $\omega_2 \leq 100 \text{ kHz}$, si fa in modo di operare nella regione in cui la K_m del piezoelettrico è circa costante (per basse frequenze di modulazione $K_m \sim 3 \text{ MHz/V}$). Inoltre, così facendo, per $\omega \ll \omega_2$ si può trascurare in prima analisi il complicato andamento della risposta ad alte frequenze (approssimazione del polo semplice).

Per spazzare un intervallo più ampio, abbiamo interposto un amplificatore di guadagno 4 tra il filtro e l'ingresso di modulazione dello Slave Laser, per cui la costante efficace del VCO risulta $K_{vco} \simeq 2\pi \cdot 12 \text{ MHz/V}$.

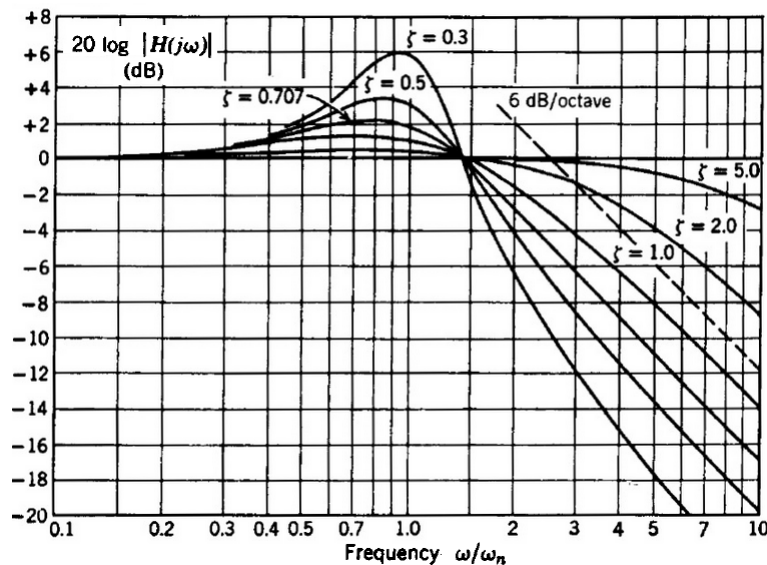
Con queste premesse, la funzione di trasferimento ora risulta:

$$H(s) = \frac{\alpha(\tau_1 s + 1)}{s^2 + s(\alpha\tau_1 + \omega_2) + \alpha}$$

con $\alpha = \omega_2 K_{vco} R_1 I / 2\pi$. Il loop è del second'ordine, in quanto al denominatore il grado più alto di s è pari a 2.²³ Di solito si pone $\omega_N^2 = \alpha$ e $\zeta = (\alpha\tau_1 + \omega_2)/\omega_N$, così che $H(s)$ viene portata nella forma:

$$H(s) = \frac{\omega_N^2(\tau_1 s + 1)}{s^2 + \zeta\omega_N s + \omega_N^2}$$

ω_N e ζ sono dette rispettivamente frequenza naturale e costante di smorzamento. Si riporta un grafico²³ di esempio dell'andamento tipico di $H(s)$:



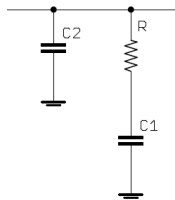
$H(s)$ ha quindi la forma della caratteristica di un passa-basso. Di conseguenza il loop segue bene i cambiamenti a bassa frequenza, ma non traccia quelli a $\omega \gg \omega_N$. Progettare il filtro consiste nel fissare ω_N e ζ , e calcolare quindi R e C .

Un metodo alternativo si basa invece sulla scelta di ω_u , la così detta frequenza di guadagno unitario per cui $|H(j\omega_u)| = 1$ (nel grafico rappresentata dal punto a 0 dB). Fissata quindi $\omega_u \sim 2\pi \cdot 50 \text{ kHz}$, per le stime numeriche dei parametri del filtro ci siamo affidati al programma ADIsimPLL fornito dalla Analog Devices, la ditta produttrice del chip ADF4002

che implementa il PD. Tramite il programma è possibile fare simulazioni anche con filtri più complessi (nella fattispecie è stato usato un loop del III ordine). Il programma simula inoltre il rumore di fase del chip, e fornisce una prima stima di quello totale ad anello chiuso.

3.4.2 Simulazione con ADIsimPLL

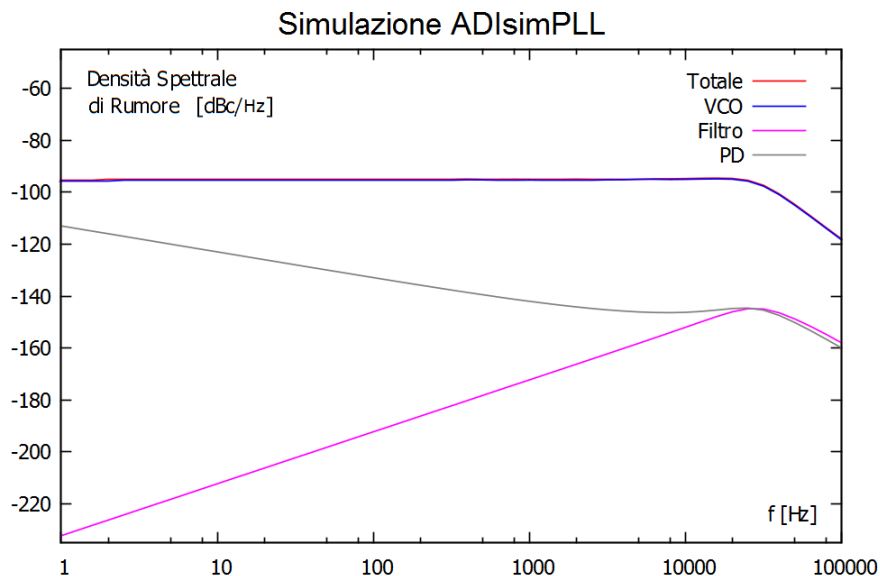
Con le premesse fatte sopra, è stato impostato sul programma il seguente filtro:



Fissando la banda del PLL attorno a 50 kHz , ne sono stati ottimizzati i parametri:

$$C_1 = 120\text{ nF}, \quad C_2 = 560\text{ nF}, \quad R = 15\ \Omega$$

Viene inserita manualmente la densità spettrale di rumore di fase del VCO, utilizzando quella specificata nel manuale della Coherent per un laser libero. Il programma fornisce quindi le prime stime sulla densità spettrale di rumore totale:



Il contributo sostanziale proviene dal VCO. Il plateau è attorno a -95 dBc/Hz , e un'integrazione numerica da 0 a 100 kHz fornisce un rumore di fase rms di circa 2.7 mrad_{rms} . Poichè in realtà vi sono due laser nell'aggancio, per una stima più realistica si moltiplica il contributo del VCO per 2. Ovvero, si aggiungono $+3\text{ dB}$ alla curva nel grafico, ed il rumore rms diventa sui 3.8 mrad_{rms} . Nella prossima sezione si mostrano più nel dettaglio gli aspetti del calcolo.

3.5 Rumore di fase

Si consideri una variabile aleatoria $x(t)$ che dipende in maniera continua dal tempo, e a cui è associata una densità di probabilità $P(x, t)$. Si suppone che $x(t)$ sia un processo gaussiano stazionario a media zero:

$$\langle x(t) \rangle = 0 \qquad \sigma_x^2 = \langle x(t)x^*(t) \rangle$$

dove le parentesi angolari indicano il valore di aspettazione. La funzione di autocorrelazione di $x(t)$ è definita nel seguente modo:

$$c_x(t, t') = \langle x(t)x^*(t') \rangle$$

dove $c_x(t, t) = \sigma_x^2$, e l'ipotesi di stazionarietà implica che c_x dipenda da t e t' solamente tramite la loro differenza: $c_x(t, t') = c_x(|t - t'|) = c_x(\tau)$. La densità spettrale di potenza di x è data da:

$$\mathcal{P}_x(\omega) = \langle X(\omega)X^*(\omega) \rangle$$

dove con $X(\omega)$ si indica la trasformata di Fourier di $x(t)$. Il teorema di Wiener-Khintchine²⁴ gioca un ruolo chiave, affermando che $\mathcal{P}_x(\omega)$ è la trasformata di Fourier di $c_x(\tau)$.

Si consideri ora un processo reale casuale $a(t)$ che rappresenta l'ampiezza, e un altro $\phi(t)$ che rappresenta la fase. Il legame tra i due è:

$$a(t) = \Re e [e^{i\phi(t)}]$$

dove si sono tralasciate la frequenza ω_0 e la costante d'ampiezza, che complicano l'algebra senza cambiare la sostanza. Si vuole ricercare la relazione tra $\mathcal{P}_a(\omega)$ e $\mathcal{P}_\phi(\omega)$ nel limite in cui si possa considerare $\sigma_\phi^2 \ll 1$. Arrestando l'espansione in serie di potenze al second'ordine:

$$c_a(\tau) = \Re e \left[\left\langle e^{i(\phi(t) - \phi(t'))} \right\rangle \right] \approx 1 - \frac{1}{2} \langle \phi^2(t) + \phi^2(t') - 2\phi(t)\phi(t') \rangle$$

ricordando che i termini del prim'ordine hanno media nulla. Di conseguenza:

$$c_a(\tau) = 1 - \sigma_\phi^2 + c_\phi(\tau)$$

$$\mathcal{P}_a(\omega) = (1 - \sigma_\phi^2)\delta(0) + \mathcal{P}_\phi(\omega)$$

dove si legge che l'effetto del rumore di fase è quello di togliere una porzione σ_ϕ^2 della potenza totale dal picco principale, e spargerla in un piedistallo dato da $\mathcal{P}_\phi(\omega)$.

Mandando $a(t)$ su di un analizzatore di spettro si misura $\mathcal{P}_a(\omega)$ ma, se il rumore di fase è piccolo, si può integrare il piedistallo ottenendo σ_ϕ^2 con buona approssimazione.

Inoltre, in queste condizioni, la potenza sottratta alla portante è solo una piccola frazione del totale. Se il picco è normalizzato a 1, allora l'integrale di $\mathcal{P}_a(\omega)$ farà circa 1. In questo caso l'integrale di $\mathcal{P}_\phi(\omega)$ è misurato in dBc (dB relativi alla portante, che si trova a 0). Poiché σ_ϕ^2 è misurato invece in $dBrad^2$ (dB rispetto a 1 rad^2), l'ultima equazione mostra come, per piccolo rumore di fase, dBc e $dBrad^2$ siano equivalenti.

3.5.1 Stima del rumore di fase in rad_{rms}

La figura 3.2 mostra un tipico spettro del segnale in uscita da un oscillatore non-ideale.²⁵ Il rumore di fase è qui rappresentato dal rapporto della densità spettrale di potenza (in una banda di 1 Hz) ad una certa frequenza di offset f_m , rispetto alla potenza della frequenza principale f_0 .

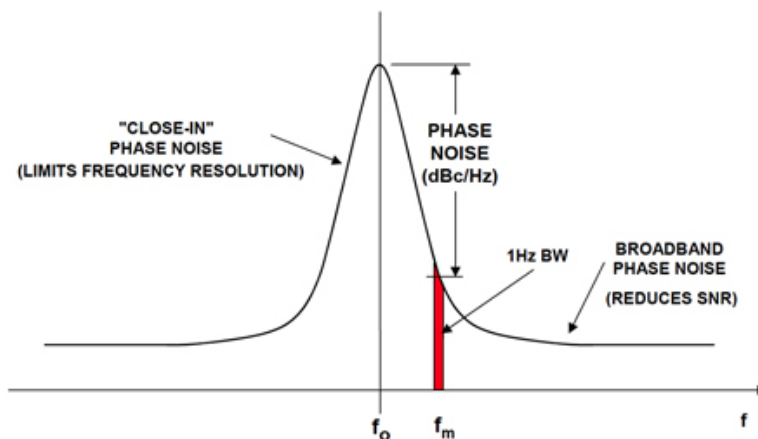


Figura 3.2: Spettro di un oscillatore reale

Tipicamente un oscillatore è caratterizzato tramite il rumore di fase in dBc/Hz , ma è spesso opportuno convertire quest'ultimo in rad_{rms} . I dati forniti dall'analizzatore di spettro RF sono in dBm (dB relativi a $1 mW$) rispetto alla banda di risoluzione (RBW). Traslandoli sulle y in maniera da mandare la portante a 0 (ovvero rinormalizzando la potenza del picco a 1 nella scala lineare), si ottengono i dati in dBc (dB relativi alla portante). È importante notare che i dBm sono un'unità di misura assoluta, mentre i dBc no. Il rumore di fase è definito nella banda di $1 Hz$, ma analizzatori di spettro con tali risoluzioni sono parecchio costosi. Nel nostro caso l'analizzatore è un HP 8594E, la cui risoluzione minima è pari a $300 Hz$. Quindi, per riscalarli i dati, è stata sottratta loro la quantità $10 \log_{10}(300)$, ottenendo i valori in dBc/Hz . Ciò equivale ad assumere che la potenza misurata nelle singole finestre di $300 Hz$ sia distribuita in maniera costante all'interno di esse e, quindi, a dividerla appunto per $300 Hz$ nella scala lineare. Poiché si è interessati al rumore di fase, bisogna sottrarre ai dati la densità di potenza della frequenza principale. Il problema è dato dal fatto che l'analizzatore di spettro filtra la trasformata di Fourier del segnale con una finestra (approssimativamente rettangolare) di $300 Hz$, facendo cioè la convoluzione tra queste ultime due. La \mathcal{F} del segnale, ossia lo spettro, è approssimata da un picco a δ , poggiato su di un largo e basso piedistallo rettangolare. La convoluzione del rettangolo (indicato in notazione compatta con \square) sul piedistallo in sostanza non lo modifica, restituendo ancora un piedistallo; mentre sulla δ :

$$(\delta * \square) = \mathcal{F}^{-1} [\mathcal{F}(\delta * \square)] = \mathcal{F}^{-1} [1 \cdot \mathcal{F}(\square)] = \square$$

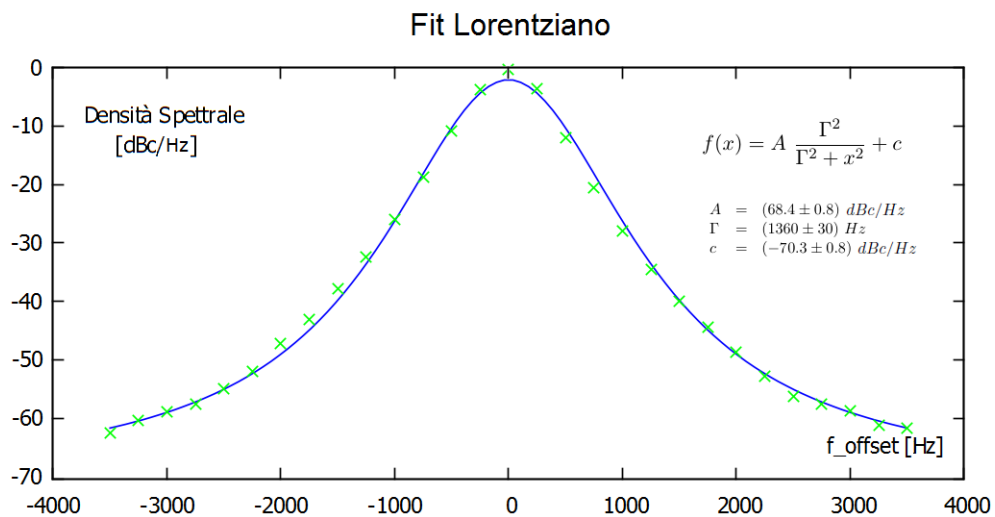
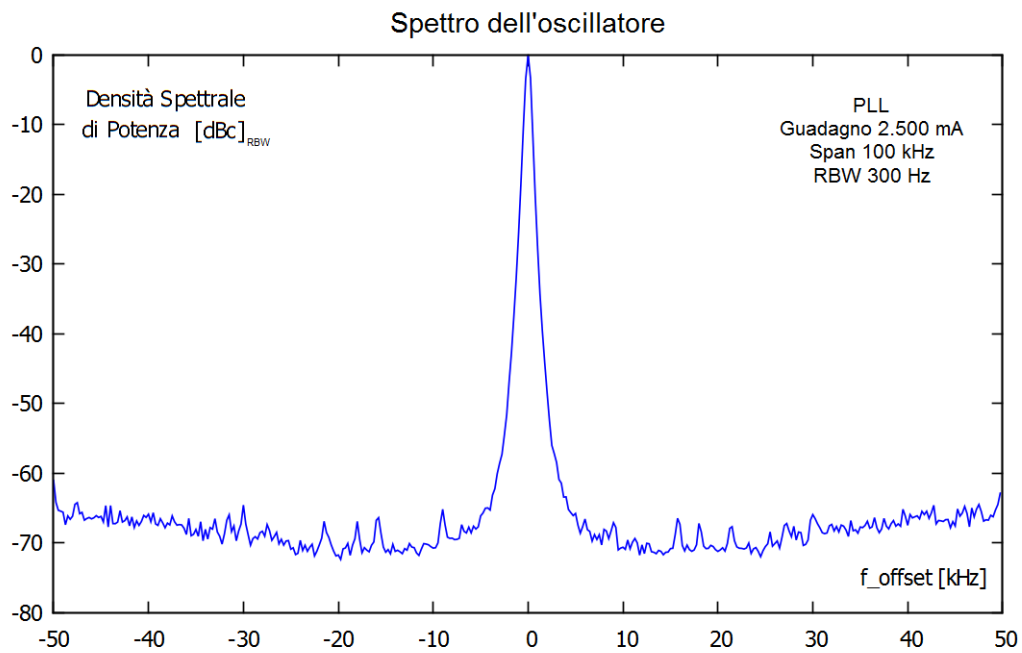
dove si è usato il Teorema di Convoluzione.

L'effetto complessivo è in realtà un allargamento del picco. In questo caso abbiamo trovato

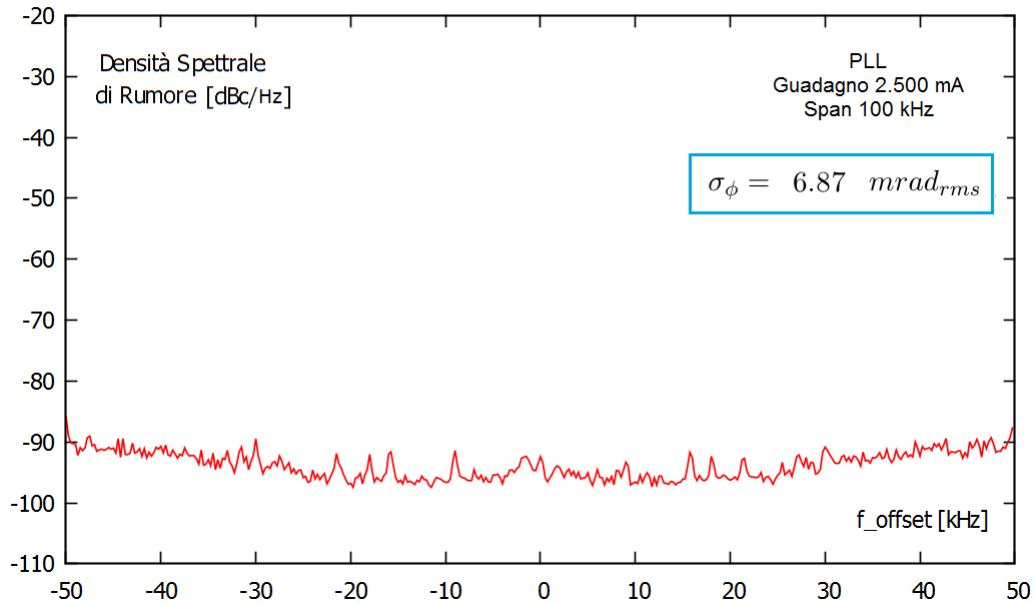
andamento di tipo Lorentziano nella scala logaritmica. Questo non emerge in effetti dai calcoli e dalle ipotesi precedenti, ma è basato sull'osservazione empirica.

È stato quindi eseguito un fit Lorentziano sul picco (con *Gnuplot*) ed il risultato è stato sottratto ai precedenti valori in dBc/Hz . Quindi i dati sono stati riportati su scala lineare in rad^2/Hz tramite la trasformazione $y' = 10^{\frac{y}{10}}$, e sono stati integrati numericamente (metodo dei trapezi). La radice quadrata dell'integrale è σ_ϕ , il rumore di fase in rad_{rms} .

Si riporta un esempio di spettro iniziale, fit, e spettro del rumore rimanente (con portante traslata a 0 Hz):



Spettro del Rumore



Inizialmente abbiamo caratterizzato il rumore di fase per diversi valori del guadagno G della pompa di carica del PD. Abbiamo preso due differenti serie di misure, fra le quali vi è stato un aggiustamento della temperatura, poiché i laser si erano sganciati. Nella prima serie, lo SPAN dello strumento era impostato a 100 kHz , mentre nella seconda era il doppio. I valori ottenuti, integrando su $\pm 50\text{ kHz}$ attorno alla portante, sono riportati nelle seguenti tabelle:

Tabella 3.1: SPAN 100 kHz

G [mA]	σ_ϕ [mrad _{rms}]
0.625	15.35
1.250	11.32
1.875	9.40
2.500	6.87
3.125	6.48

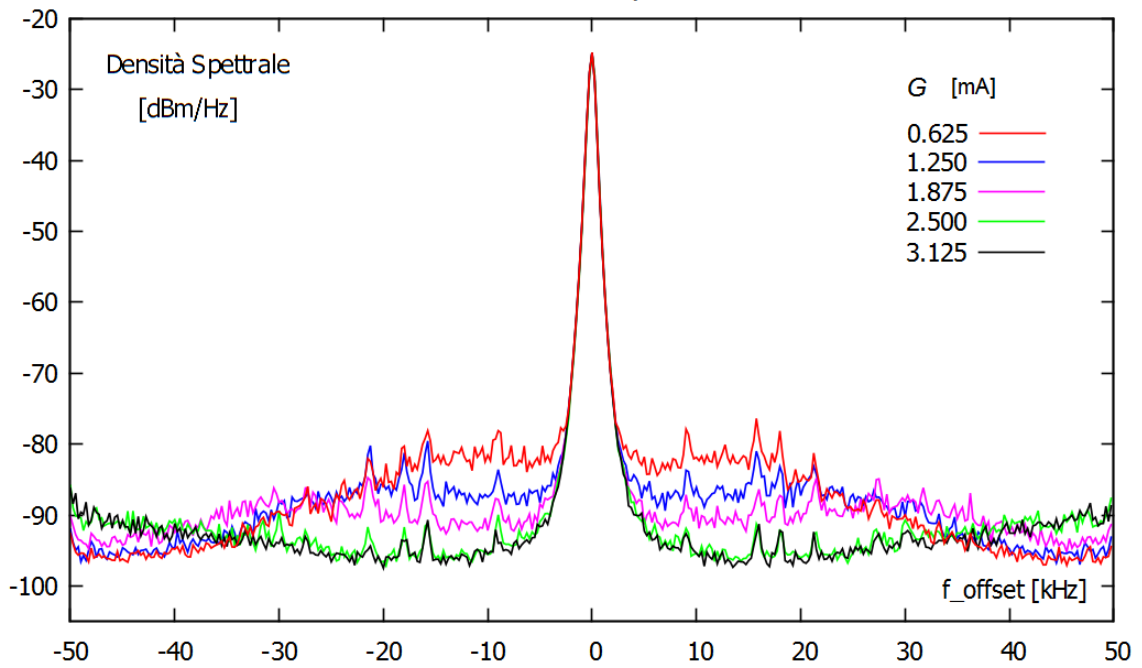
Tabella 3.2: SPAN 200 kHz

G [mA]	σ_ϕ [mrad _{rms}]
0.625	17.42
1.250	13.27
1.875	9.57
3.125	8.87
3.750	8.59
4.375	8.19
5.000	6.24

Nelle pagine seguenti sono mostrati grafici di confronto tra spettri di segnali e di rumori per le due serie di misure. Dalle tracce si nota come, all'aumentare di G , il fondo di rumore si abbassi, mentre la banda del loop aumenti.

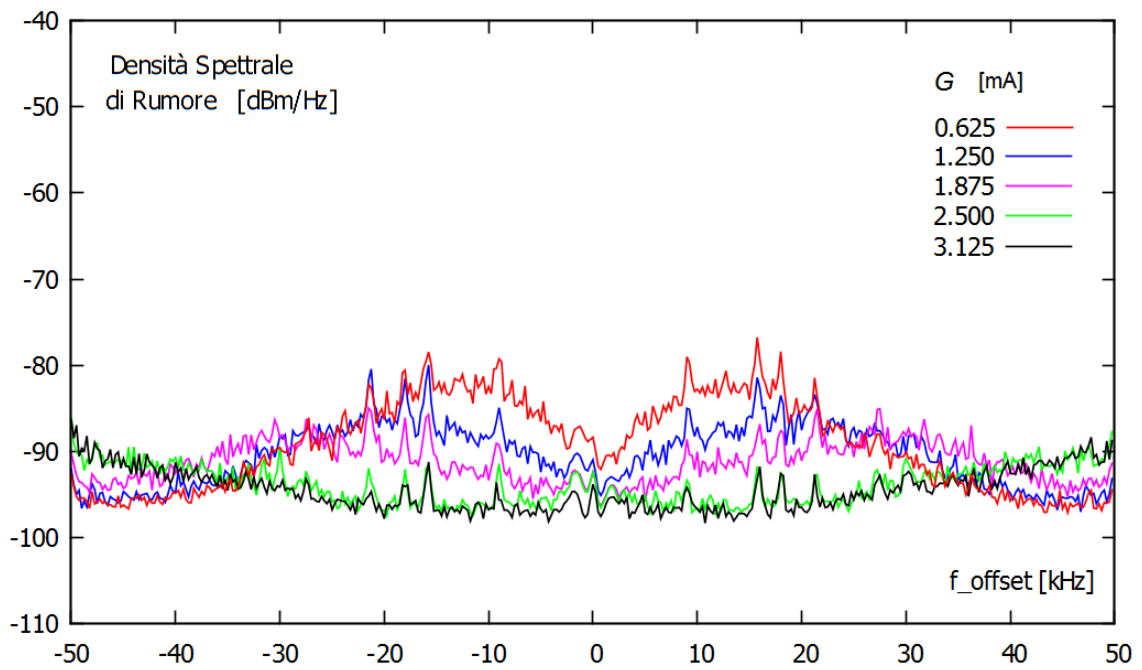
Confronto Spettri

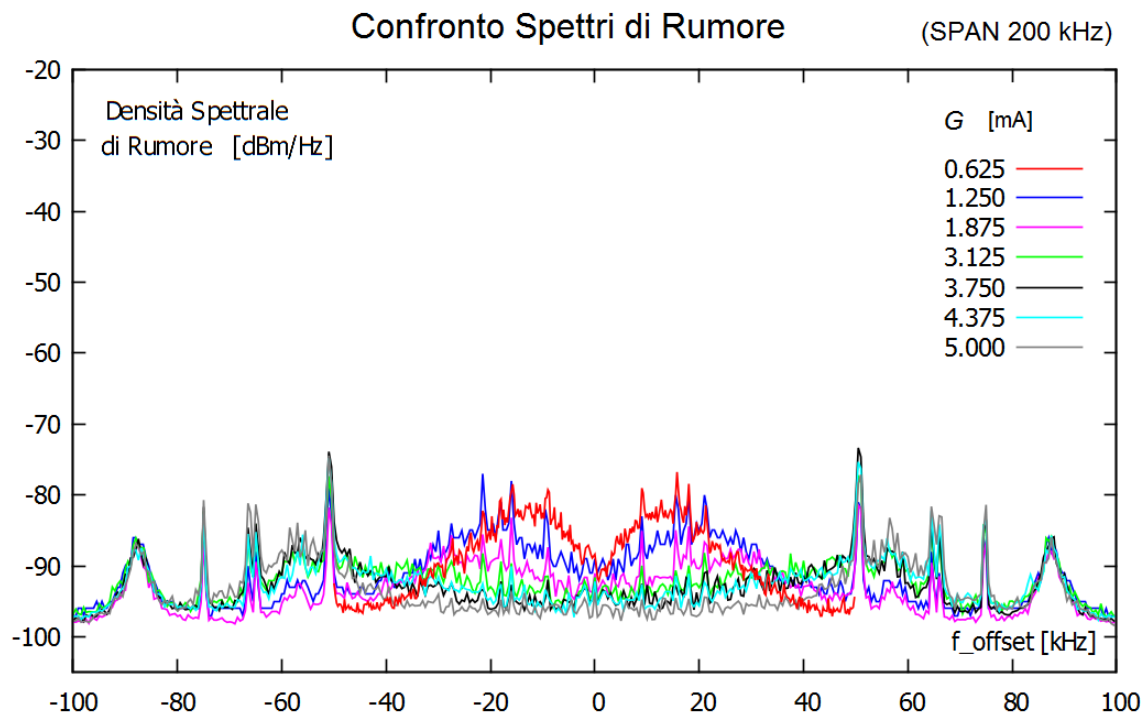
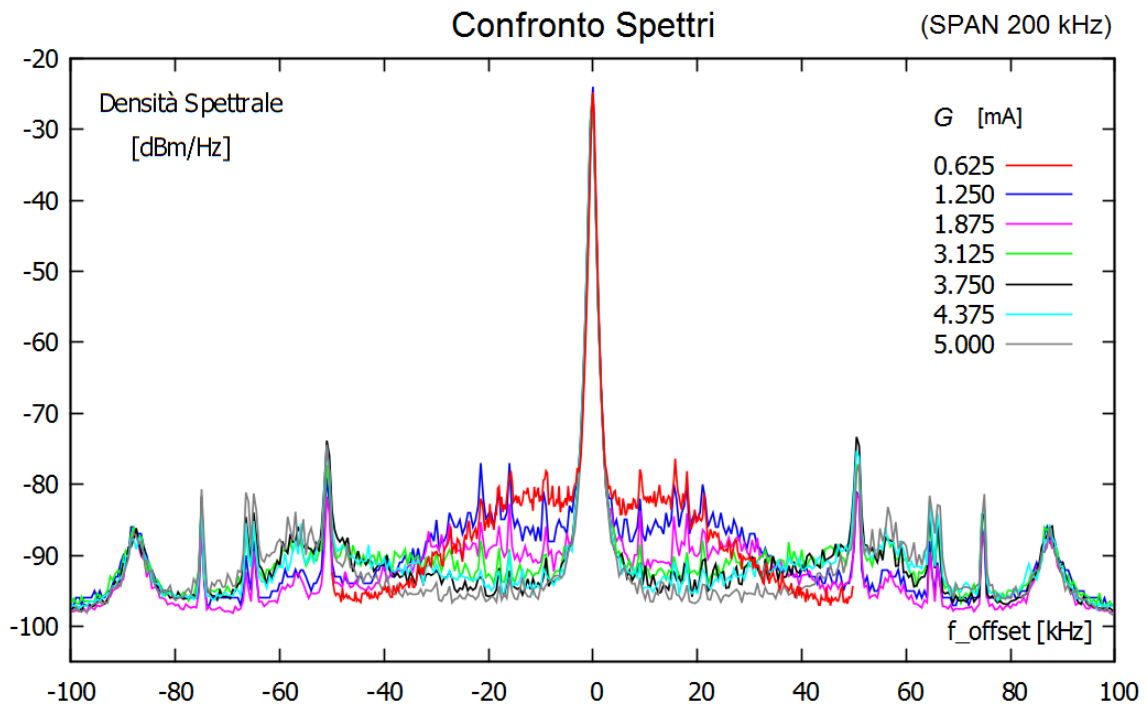
(SPAN 100 kHz)



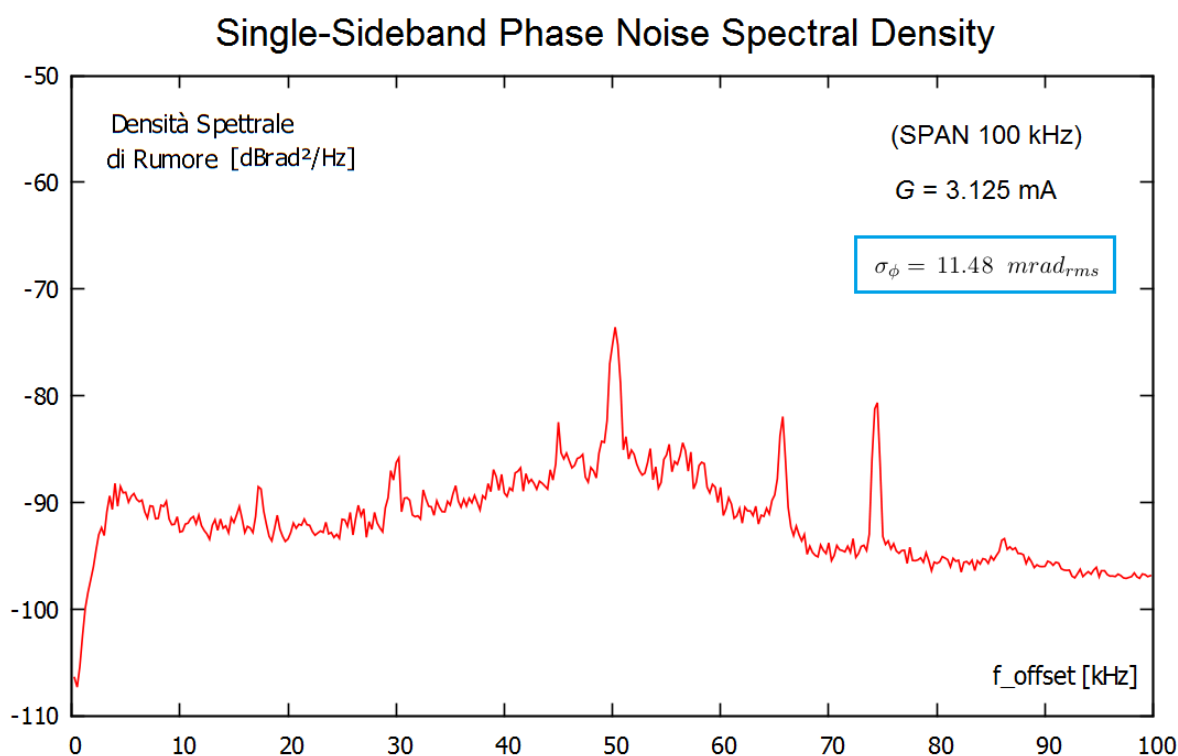
Confronto Spettri di Rumore

(SPAN 100 kHz)





Abbiamo deciso di lavorare con il guadagno a 3.125 mA . Il rumore di fase del PLL è stato nuovamente misurato (integrando da 0 a 100 kHz), ma questa volta nei termini della single-sideband, con la quale si usa in genere caratterizzarlo. È necessario quindi raddoppiare il contributo di ogni intervallo, allo scopo di tenere in considerazione anche le frequenze f_{offset} negative (supponendo che lo spettro a doppia banda sia in buona approssimazione simmetrico). Ciò corrisponde ad aggiungere $+3 \text{ dB}$ alla y (i.e. la linearizzazione diventa: $y' = 10^{\frac{y+3}{10}}$), commettendo un errore di sole 5 parti in 10^3 . Per eliminare il picco centrale, abbiamo fatto una misura di spettro con entrambe le bande laterali, e usato il fit ricavato da quei dati. Questo perché l'analizzatore di spettro non è molto affidabile sulle frequenze assolute. Si mostra il grafico della densità di rumore così ottenuto, che corrisponde a un σ_ϕ di 11.48 mrad_{rms} :



Dal grafico si può notare la banda del PLL a circa 50 kHz . La densità spettrale ha un plateau intorno ai $-97 \text{ dBrad}^2/\text{Hz}$.

Per avere un riscontro sui dati, abbiamo preso una serie di misure anche su di un analizzatore a FFT, che calcola la trasformata numericamente. Esso offre un fondo strumentale più basso, oltre alla possibilità di fare misure con risoluzioni inferiori ai 300 Hz , tuttavia non è in grado di distinguere le f_{offset} positive da quelle negative. Lo spettro del rumore è osservabile moltiplicando in un mixer il segnale del battimento con il segnale di clock, sfasandoli di 90° e filtrando la componente ad alta frequenza. Per fare ciò, grazie ad un DDS abbiamo generato due copie in quadratura di fase del segnale RF a 20 MHz . Una è

stata usata come riferimento del PLL, l'altra è stata inviata al mixer (MX), assieme ad una copia del segnale del battimento. Siano $b(t)$ e $c(t)$ rispettivamente i segnali di battimento e di clock:

$$b(t) = B \sin(\omega_{rf} \cdot t + \phi_1(t))$$

$$c(t) = C \cos(\omega_{rf} \cdot t + \phi_2(t))$$

dove, assumendo nulla la costante di fase ed anche $\phi_2(t)$ (clock nominalmente perfetto), $\phi_1(t) = \phi(t)$ è una piccola perturbazione. La componente che oscilla alla frequenza somma viene filtrata, e il segnale in uscita dal filtro è nella forma:

$$v_{mx}(t) = K_{mx} \frac{BC}{2} \sin(\phi(t))$$

dove K_{mx} è il guadagno del mixer. Questo viene inviato all'analizzatore FFT, che ne misura lo spettro di potenza. Se $\phi(t)$ è sufficientemente piccolo, si può approssimare il seno:

$$v_{mx}(t) \approx K_e \phi(t)$$

dove sono state raggruppate le costanti. Ciò vuol dire che per piccolo rumore di fase:

$$\sigma_\phi^2 = \frac{1}{K_e^2} \int (v_{mx})^2 df$$

Bisogna però scegliere un intervallo di integrazione opportuno che escluda i primi punti. Questo perché se i due segnali non sono esattamente in quadratura, nell'uscita del MX vi è anche una componente in continua che può sporcare molto la misura. L'analizzatore FFT lavora accoppiato in alternata applicando filtri dipendenti dalla SPAN, e per piccoli valori di quest'ultima la costante di tempo del filtro può essere di svariati secondi. Perciò i primi punti dello spettro sono ancora contaminati dalla componente in continua, ed è lecito scartarli. In questo caso, l'estremo inferiore è stato posto a 2 Hz .

Per misurare K_e abbiamo temporaneamente sfalsato di poco la frequenza dei due ingressi del mixer ($\delta\omega = 1 \text{ kHz}$). Ciò produce in uscita:

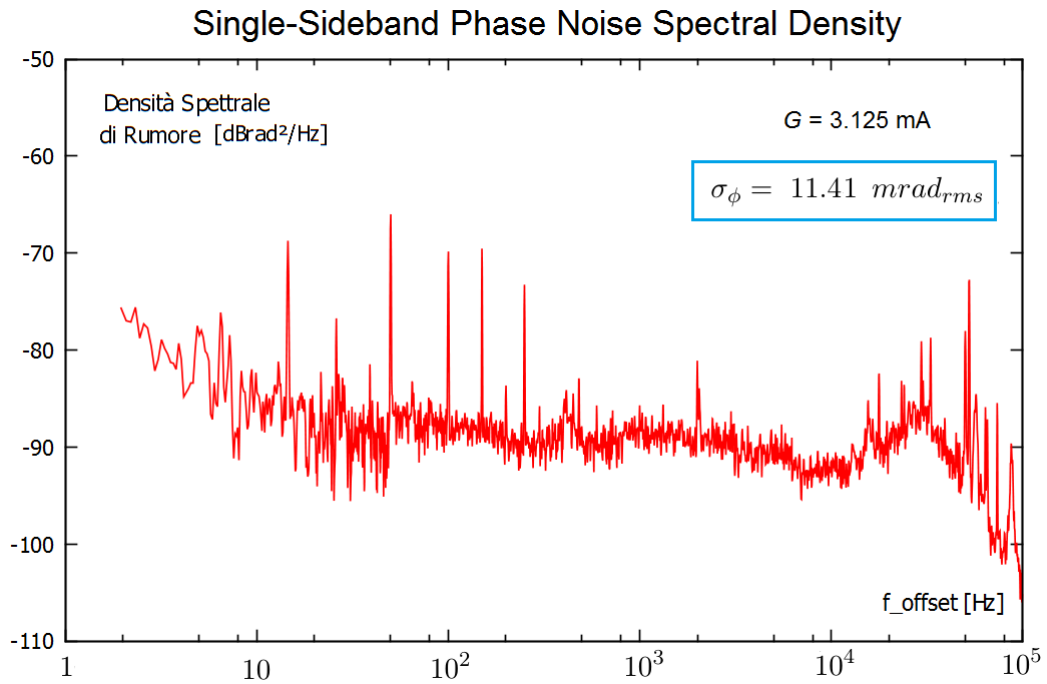
$$v_{mx}(t) = K_e \sin(\delta\omega + \phi(t))$$

e mandando questo segnale su di un oscilloscopio, ne abbiamo misurato l'ampiezza in V . Il valore numerico coincide con la K_e in V/rad nell'equazione per σ_ϕ^2 .

Con l'analizzatore FFT abbiamo preso 12 spettri in ordine crescente di SPAN da 48 Hz a 100 kHz . Di questi abbiamo incollato i dati, per ottenere un unico spettro con risoluzione elevata. Di seguito viene riportata una tabella riassuntiva dei valori ottenuti, ed il grafico dello spettro del rumore sull'analizzatore FFT.

Tabella 3.3: Rumore di Fase

$\int df$	$\sigma_{\phi} (RF) [mrad_{rms}]$	$\sigma_{\phi} (FFT) [mrad_{rms}]$
2 Hz - 50 kHz	7.89	8.27
2 Hz - 100 kHz	11.48	11.41



Confrontando i dati della tabella 3.3 si nota la loro compatibilità a meno del 5%. Il rumore di fase nell'aggancio è dell'ordine desiderato, e complessivamente ci si può ritenere soddisfatti.

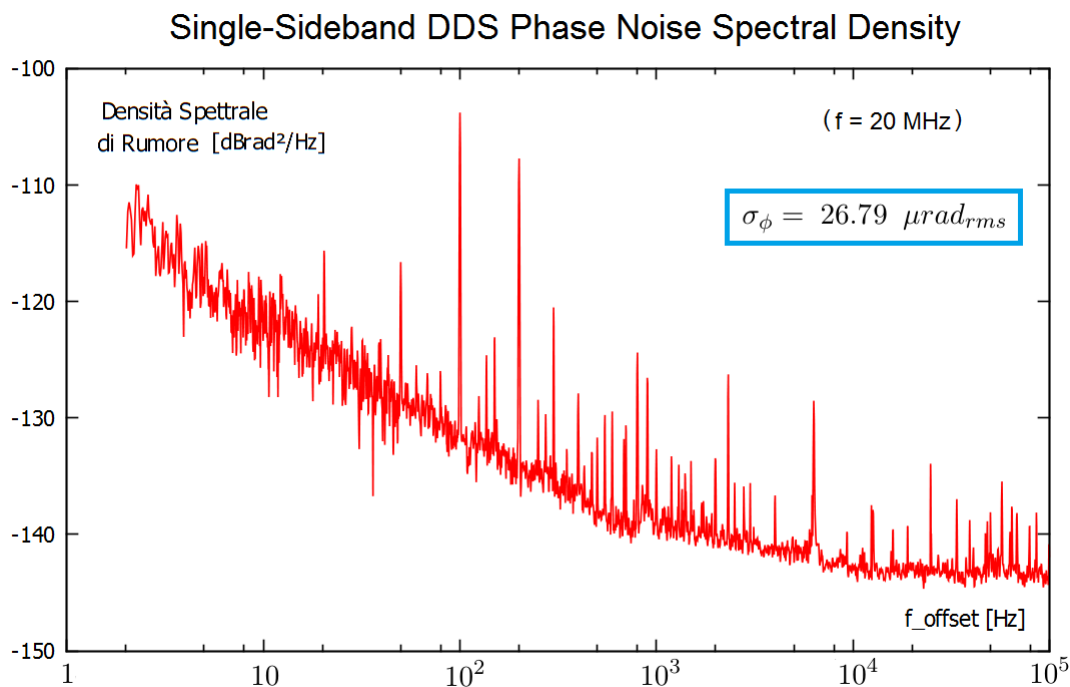
3.5.2 Rumore di fase di due DDS

Un Direct Digital Synthesizer (DDS) è un sintetizzatore di frequenze capace di creare funzioni d'onda arbitrarie a partire da un segnale di clock fissato. Nel presente caso, sono stati forniti da DDS (come segnali armonici) rispettivamente il riferimento RF del PLL ed il segnale di clock $c(t)$ in ingresso al mixer. Per concludere l'esperienza, è stato misurato sull'analizzatore FFT anche il rumore di fase di due DDS, con la stessa tecnica utilizzata precedentemente. Ciò è stato fatto per convalidare l'ipotesi che tutto il rumore di fase presente nell'aggancio fosse causato dal PLL. In questo caso, con le notazioni del precedente paragrafo, le perturbazioni ϕ_1 e ϕ_2 si possono assumere come processi stazionari gaussiani a media nulla, non correlati tra loro. Ci si aspetta di trovare valori di σ_ϕ molto inferiori, anche come conferma di non aver raggiunto il fondo strumentale nelle misurazioni precedenti.

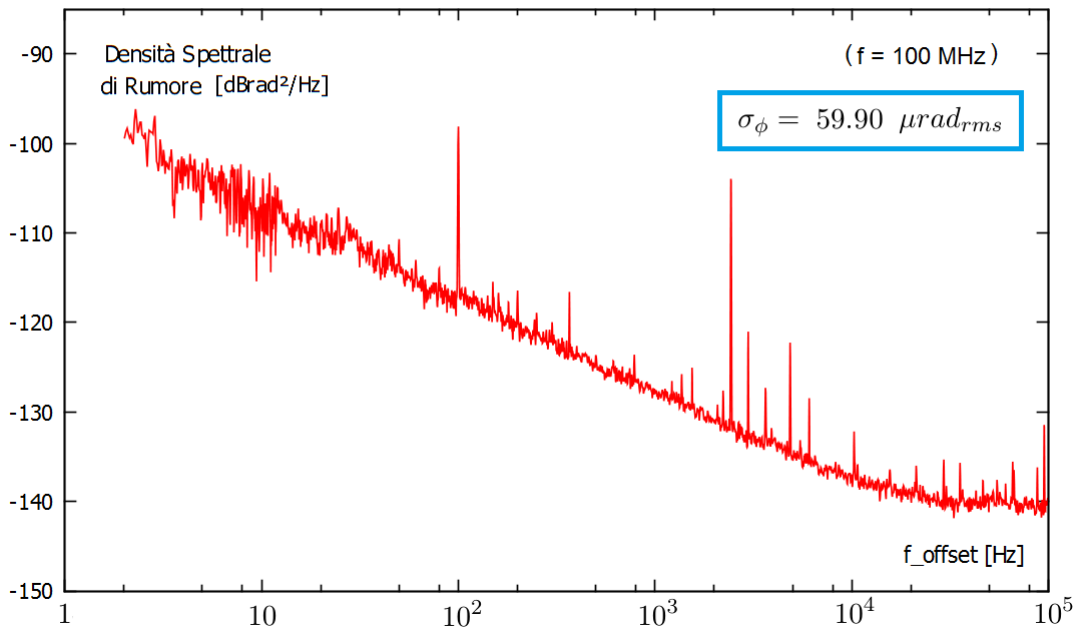
Sono state effettuate due differenti serie di misure, generando prima 20 e poi 100 MHz. Per ognuna di esse sono stati presi 14 differenti spettri, in ordine crescente di SPAN da 12 Hz a 100 kHz. Incollando opportunamente i dati, analogamente a quanto fatto nel caso del PLL, sono stati ottenuti due spettri finali di risoluzione elevata, che vengono qui riportati assieme ai risultati:

Tabella 3.4: Rumore di Fase DDS

$\int df$	σ_ϕ (20 MHz) [μrad_{rms}]	σ_ϕ (100 MHz) [μrad_{rms}]
2 Hz - 100 kHz	26.79	59.90



Single-Sideband DDS Phase Noise Spectral Density



Nel primo caso la densità spettrale di rumore ha un plateau attorno a $\sim 3 \cdot 10^{-15} \text{ rad}^2/\text{Hz} = -145 \text{ dBrad}^2/\text{Hz}$, mentre nel secondo è circa a $\sim -140 \text{ dBrad}^2/\text{Hz}$. I valori di σ_ϕ trovati sono almeno due ordini di grandezza inferiori ai precedenti, quindi il segnale di clock non introduce alcun rumore significativo.

È bene fare qualche considerazione sul fondo di rumore raggiunto. Facendo una media tra i due casi, il fondo spettrale misurato con l'analizzatore FFT è sui $20 \cdot 10^{-9} V_{rms}/\sqrt{\text{Hz}}$. Richiamando la formula del rumore termico di una resistenza:²²

$$V_n = \sqrt{4k_B T R B}$$

ove k_B è la costante di Boltzmann e B è la banda di frequenze (in questo caso $B = 1 \text{ Hz}$), si ricava che il fondo di rumore osservato è compatibile con quello generato da una resistenza di $25 \text{ k}\Omega$. Per ottenere risultati migliori, è quindi opportuno progettare attentamente l'elettronica tra MX ed analizzatore.

3.6 Conclusioni

L'obiettivo prefissato sul rumore di fase dell'aggancio è stato raggiunto, e le misure sui DDS hanno confermato come esso sia dovuto sostanzialmente al PLL. Con ciò si conclude questo lavoro di tesi, ma non quello del gruppo a Legnaro. Si dovrà ora operare sull'elettronica per eliminare dagli spettri gli *spikes* minori, dovuti ad esempio ai neon e al sistema di ventilazione della camera pulita: in questo modo si potranno raggiungere livelli di rumore ancora più basso. Di conseguenza, sarà possibile ottenere una "buona" luce verde (tramite generazione di seconda armonica), la quale verrà utilizzata come pompaggio ottico di un amplificatore parametrico degenere. Questo, con i dovuti accorgimenti, porterà alla generazione di stati squeezed.

Il sistema verrà infine replicato a Cascina (PI), e implementato nell'interferometro di Virgo.

Ringraziamenti

Un sentito e sincero ringraziamento al Prof. Marco Prevedelli per avermi seguito e sostenuto in questa tesi. Lo ringrazio soprattutto per l'infinita disponibilità e pazienza con le quali ha sempre risposto ai miei n dubbi, con $n + 1$ spiegazioni.

Desidero inoltre ringraziare il gruppo che mi ha accolto ed ospitato a Legnaro per prendere le misure, in particolar modo il Prof. Jean-Pierre Zendri dell'Università di Padova, e i due dottorandi Marco e Matteo. A questi ultimi, grazie per avermi "tenuto a bada" in laboratorio.

Bibliografia

- ¹A. Messiah - *Quantum Mechanics (Vol. I)* (North-Holland Publishing Company, 1967)
- ²J. J. Sakurai - *Modern Quantum Mechanics (Revised ed.)* (Addison-Wesley Publishing Company, 1994)
- ³C. Cohen-Tannoudji - *Quantum Mechanics (Vol. 1)* (Wiley, 1991)
- ⁴L. D. Landau, E. M. Lifšits - *Fisica Teorica II - Teoria dei Campi* (Editori Riuniti University Press, 2010)
- ⁵J. D. Jackson - *Classical Electrodynamics* (Wiley, 1962)
- ⁶L. D. Landau, E. M. Lifšits - *Fisica Teorica IV - Teoria Quantistica Relativistica* (Editori Riuniti University Press, 2010)
- ⁷D. F. Walls, G. J. Milburn - *Quantum Optics* (Springer, 2008)
- ⁸R. Loudon - *The Quantum Theory of Light* (Oxford University Press, 2000)
- ⁹R. J. Glauber - *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field* (Phys. Rev. **131**, 2766 (1963))
- ¹⁰C. M. Caves - *Quantum-mechanical noise in an interferometer* (Phys. Rev. D **23**, 1693 (1981))
- ¹¹<http://www.ego-gw.it/virgodescription/>
- ¹²V. B. Braginskii, Yu. I. Vorontsov - *Quantum-mechanical limitations in macroscopic experiments and modern experimental technique* (Usp. Fiz. Nauk **114**, 41-53 (1974))
- ¹³C. M. Caves - *Quantum-Mechanical Radiation-Pressure Fluctuations in an Interferometer* (Phys. Rev. Lett. **45**, 75-79 (1980))
- ¹⁴M. Mehmet, S. Ast, T. Eberle, S. Steinlechner, H. Vahlbruch, R. Schnabel - *Squeezed light at 1550 nm with a quantum noise reduction of 12.3 dB* (Optics Express, **19-25**, 25763 (2011)), e le ref. ivi citate.
- ¹⁵A. Yariv - *Quantum Electronics* (Wiley, 1989)
- ¹⁶M. Arrigoni, O. Haupt, V. Leonhardt - *Ultra-Low Noise and Narrow Linewidth* (White paper: https://www.coherent.com/downloads/WP1_MephistoNPRO_Final.pdf)
- ¹⁷T. J. Kane, R. L. Byer - *Monolithic, unidirectional single-mode Nd:YAG ring laser* (Opt. Lett. **10-2**, 65 (1985))
- ¹⁸M. Abramowitz, I. A. Stegun - *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (Dover Publications Inc., 1965)
- ¹⁹G. P. Tolstov - *Fourier Series* (Dover Publications Inc., 1962)
- ²⁰J. Harrison - *Fast and Accurate Bessel Function Computation* (Proceedings of ARITH19, the 19th IEEE Conference on Computer Arithmetic, IEEE Computer Society Press, 2009)
- ²¹M. Curtin, P. O'Brien - *Phase-Locked Loops for High-Frequency Receivers and Transmitters, Part 1* (Analog Dialogue **33-3**, (1999))
- ²²J. Millman, C. Halkias, C. D. Parikh - *Integrated Electronics* (McGraw Hill Education India, 2010)
- ²³F. M. Gardner - *Phaselock Techniques* (Wiley, 2005)
- ²⁴R. D. Yates, D. J. Goodman - *Probability and Stochastic Processes: A Friendly Introduction for Electrical and Computer Engineers (2nd Ed.)* (John Wiley & Sons, 2005)
- ²⁵W. Kester - *Converting Oscillator Phase Noise to Time Jitter* (MT-008 Tutorial, Analog Devices)