Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Specialistica in Matematica

L'ANELLO DI COOMOLOGIA DELLA VARIETÀ DELLE BANDIERE

Tesi di Laurea Specialistica in Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
LUCA MIGLIORINI

Presentata da:
ELENA MEUCCI

III Sessione
Anno Accademico 2008-09

A Riccardo che continua
a vivere nel mio cuore.

Indice

Introduzione

La nascita della coomologia di de Rham risale a una questione che venne affrontata da E. Cartan intorno al 1927. Il problema che Cartan si pose era quello di sapere quando su una varietà liscia, compatta, orientata M di dimensione n, una k-forma differenziale chiusa è anche esatta. Le basi della teoria vennero gettate da G. de Rham qualche anno dopo, quando introdusse quelli che oggi vengono chiamati gruppi di coomologia di de Rham. Il k-esimo gruppo di coomologia di M è il quoziente dello spazio delle k-forme chiuse su M per lo spazio delle k-forme esatte su M.
Le applicazioni della teoria della coomologia di de Rham non solo permettono di ottenere numerosi invarianti utili per la classificazione delle varietà differenziabili, ma permettono inoltre di dimostare risultati importanti riguardanti la struttura intrinseca delle varietà differenziabili e le applicazioni tra di esse.
La coomologia di de Rham ha inoltre dei vantaggi computazionali rilevanti dovuti, ad esempio, al fatto che i gruppi di coomologia sono spazi vettoriali e l'omomorfismo di applicazioni di complessi è un'applicazione lineare. Inoltre, la successione di Mayer-Vietoris rende molto semplice il calcolo dei gruppi di coomologia ed è la chiave nella dimostrazione induttiva di molti teoremi.
Lo scopo di questa tesi è calcolare l'anello di coomologia della varietà delle bandiere.
Nel primo capitolo introdurremo la coomologia di de Rham enunciando i grandi teoremi che sono alla base di questa teoria come, ad esempio, il Lemma di Poincaré e il Teorema di Leray-Hirsch.
Il secondo capitolo è interamente dedicato alla varietà delle bandiere.
L'ultimo capitolo è incentrato sul calcolo della coomologia della varietà delle bandiere. Per raggiungere questo scopo vengono introdotte le classi di Eulero e le classi di Chern di un fibrato vettoriale.
L'Appendice presenta una breve introduzione alle varietà differenziabili e ai fibrati vettoriali.

Capitolo 1

La teoria di de Rham

In questo capitolo inizialmente definiremo la coomologia di de Rham ordinaria e a supporto compatto di $\mathbb{R}^n$ e delle varietà differenziabili. Introdurremo successivamente una tecnica per calcolare la coomologia di de Rham: la successione di Mayer-Vietoris. Vedremo inoltre i due Lemmi di Poincaré che calcolano la coomologia ordinaria e a supporto compatto di $\mathbb{R}^n$. Infine, utilizzando il principio di Mayer-Vietoris, dimostreremo alcuni importanti teoremi.

1.1 Il complesso di de Rham in $\mathbb{R}^n$

In questo paragrafo definiremo la coomologia di de Rham.
Siano $x_1, \ldots, x_n$ un sistema di coordinate su $\mathbb{R}^n$. Denotiamo con $\Omega^\bullet$ l'algebra su $\mathbb{R}$ generata da $dx_1, \ldots, dx_n$ con le relazioni

$$\begin{cases} (dx_i)^2 = 0 \\ dx_i dx_j = -dx_j dx_i, \quad i \neq j. \end{cases}$$

Pensato come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $\Omega^\bullet$ ha base

$$1, dx_i, dx_i dx_j, dx_i dx_j dx_k, \ldots, dx_1 \cdots dx_n,$$

con $i < j$, $i < j < k$ e così via.
Le *forme differenziali* C^∞ su $\mathbb{R}^n$ sono elementi di

$$\Omega^\bullet(\mathbb{R}^n) = \{ \text{ funzioni } C^\infty \text{ su } \mathbb{R}^n \} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^\bullet.$$

Se ω appartiene a $\Omega^\bullet(\mathbb{R}^n)$, allora ω può essere univocamente scritta come

$$\sum f_{i_1 \cdots i_q} dx_{i_1} \cdots dx_{i_q}, \tag{1.1}$$

dove i coefficienti $f_{i_1 \cdots i_q}$ sono funzioni C^∞. Al posto di (1.1) scriveremo anche

$$\omega = \sum f_I dx_I.$$

Osservazione 1.1. L'algebra $\Omega^\bullet(\mathbb{R}^n)$ è graduata:

$$\Omega^\bullet(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{q=0}^{n} \Omega^q(\mathbb{R}^n),$$

dove $\Omega^q(\mathbb{R}^n) = \{$ q-forme C^∞ su $\mathbb{R}^n\}$.

Definiamo l'operatore differenziale

$$d : \Omega^q(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{q+1}(\mathbb{R}^n)$$

come segue:

1. se $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$, allora $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$,
2. se $\omega = \sum f_I dx_I$, allora $d\omega = \sum df_I dx_I$.

Esempio 1. Se $\omega = xdy$, allora $d\omega = dxdy$.

Definizione 1.1. Date due forme differenziali $\tau = \sum f_I dx_I$ e $\omega = \sum g_J dx_J$ si definisce il *prodotto esterno*, che denoteremo con $\tau \wedge \omega$ oppure $\tau \cdot \omega$, come segue:

$$\tau \wedge \omega = \sum f_I g_J dx_I dx_J.$$

Osservazione 1.2.
$$\tau \wedge \omega = (-1)^{deg\tau \ deg\omega} \omega \wedge \tau.$$

Proposizione 1.3. *d è un'*antiderivazione*, cioè*

$$d(\tau \cdot \omega) = (d\tau) \cdot \omega + (-1)^{deg\tau} \tau \cdot d\omega.$$

Dimostrazione. Per linearità, basta dimostrare che questo vale sui monomi. Prendiamo quindi $\tau = f_I dx_I$ e $\omega = g_J dx_J$. Si ha

$$d(\tau \cdot \omega) = d(f_I g_J) dx_I dx_J = (df_I) g_J dx_I dx_J + f_I dg_J dx_I dx_J = (d\tau) \cdot \omega + (-1)^{deg\tau} \tau \cdot d\omega.$$

$\square$

Esempio 2. Sia x_1, x_2, x_3, x_4 un sistema di coordinate su $\mathbb{R}^4$ e consideriamo le seguenti due forme differenziali: $\tau = x_1 dx_3$ e $\omega = x_2^2 dx_4$.
Si ha

$$d(\tau \cdot \omega) = d(x_1 x_2^2) dx_3 dx_4 = dx_1 x_2^2 dx_3 dx_4 + x_1 dx_2^2 dx_3 dx_4 =$$

$$= x_2^2 dx_1 dx_3 dx_4 + 2x_1 x_2 dx_2 dx_3 dx_4,$$

$$d\tau \cdot \omega = (dx_1 dx_3) \cdot x_2^2 dx_4 = x_2^2 dx_1 dx_3 dx_4,$$

$$\tau \cdot d\omega = (x_1 dx_3) \cdot (2x_2 dx_2 dx_4) = 2x_1 x_2 dx_3 dx_2 dx_4.$$

E quindi

$$d(\tau \cdot \omega) = x_2^2 dx_1 dx_3 dx_4 - 2x_1 x_2 dx_3 dx_2 dx_4 = d\tau \cdot \omega - \tau \cdot d\omega.$$

Proposizione 1.4. *$d^2 = 0$.*

Dimostrazione. Sia $\omega = \sum a_I dx_I$. Calcoliamo

$$d\omega = d(\sum a_I dx_I) = \sum da_I dx_I = \sum_{l,\, I\colon |I|=k} \frac{\partial a_I}{\partial x_l} dx_l dx_I.$$

Quindi, dato che $dx_j dx_i = -dx_i dx_j$,

$$d^2\omega = d^2(\sum a_I dx_I) = \sum_{l,\, m,\, I\colon |I|=k} \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_m \partial x_l} dx_m dx_l dx_I =$$

$$= \sum_{l<m,\, I\colon |I|=k} \Big(\frac{\partial^2 a_I}{\partial x_l \partial x_m} - \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_m \partial x_l} \Big) dx_l dx_m dx_I = 0,$$

poiché per le funzioni C^∞ si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

□

Il complesso $\Omega^\bullet(\mathbb{R}^n)$ insieme con l'operatore differenziale d è chiamato il *complesso di de Rham su* $\mathbb{R}^n$.
Gli elementi del nucleo di d sono dette forme *chiuse* e gli elementi dell'immagine di d sono dette forme *esatte*.
Dalla proposizione precedente si deduce che le forme esatte sono automaticamente chiuse; queste sono le forme *non interessanti*.
Una dimensione della misura dello spazio delle forme *interessanti*, cioè delle forme chiuse che non sono esatte, è la definizione della coomologia di de Rham.

Definizione 1.2. La *q-esima coomologia di de Rham* di $\mathbb{R}^n$ è lo spazio vettoriale

$$H^q(\mathbb{R}^n) = \frac{\{\text{q-forme chiuse}\}}{\{\text{q-forme esatte}\}}.$$

Notazione 1. Se ci sarà bisogno di distinguere tra una foma ω e la sua classe di coomologia, denoteremo quest'ultima con $[\omega]$.

Osservazione 1.5. Tutte le definizioni date precedentemente si possono dare anche su un sottoinsieme aperto U di $\mathbb{R}^n$. Per esempio,

$$\Omega^\bullet(U) = \{ \text{ funzioni } C^\infty \text{ su } U\} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^\bullet.$$

Possiamo quindi anche parlare della coomologia di de Rham $H^\bullet(U)$ di U.

Parliamo ora brevemente di complessi differenziali un cui esempio è proprio il complesso di de Rham.

Definizione 1.3. Una somma diretta di spazi vettoriali $C = \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} C^q$ indicizzata da interi è chiamato *complesso differenziale* se esistono omomorfismi

$$\cdots \to C^{q-1} \xrightarrow{d} C^q \xrightarrow{d} C^{q+1} \to \cdots$$

tali che $d^2 = 0$. d è detto l'*operatore differenziale* del complesso C.

Definizione 1.4. La *coomologia* del complesso differenziale C, che ha d come operatore differenziale, è la somma diretta di spazi vettoriali

$$H(C) = \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} H^q(C),$$

dove

$$H^q(C) = \frac{Ker(d) \cap C^q}{Im(d) \cap C^q}.$$

Definizione 1.5. Siano A e B due complessi differenziali.
Un'*applicazione* $f : A \to B$ si dice *di complessi* se è lineare e commuta con gli operatori differenziali di A e B:

$$fd_A = d_B f.$$

Definizione 1.6. Una successione di spazi vettoriali

$$\cdots \to V_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \to \cdots$$

è detta *esatta* se, per ogni i, $ker(f_i) = Im(f_{i-1})$.

Definizione 1.7. Una successione esatta della forma

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

è detta *successione esatta corta.*

Data una successione esatta corta di complessi differenziali

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

nella quale le mappe f e g sono applicazioni di complessi, c'è una successione esatta lunga di gruppi di coomologia

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^q(A) \arrow[r, "f^*"] & H^q(B) \arrow[r, "g^*"] & H^q(C) \arrow[d, "\delta"] \\ & & \cdots & H^{q+1}(A) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

In questa successione, f^* e g^* sono applicazioni indotte in modo naturale e $\delta([c])$, con $c \in C^q$, è ottenuta come segue. Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A^q & \xrightarrow{f} & B^q & \xrightarrow{g} & C^q & \to & 0 \\ & & \downarrow_d & & \downarrow_d & & \downarrow_d & & \\ 0 & \to & A^{q+1} & \xrightarrow{f} & B^{q+1} & \xrightarrow{g} & C^{q+1} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

Poiché g è suriettiva, esiste un elemento b in B^q tale che $g(b) = c$. Usando ciò, ricaviamo che

$$g(db) = d(g(b)) = dc = 0$$

e quindi esiste a appartenente a A^{q+1} tale che $db = f(a)$. Questo elemento a risulta essere chiuso. $\delta[c]$ è definito come la classe di coomologia $[a]$ in $H^{q+1}(A)$. Notiamo che la definizione di δ risulta essere indipendente dalle scelte fatte.

1.1.1 Complesso di de Rham a supporto compatto

Ci sarà molto utile, quando parleremo di varietà, una piccola modificazione della definizione di complesso di de Rham.

Se nella definizione di complesso di de Rham consideriamo solo le funzione C^∞ a supporto[1] compatto ciò che otteniamo lo chiameremo *complesso di de Rham a supporto compatto* e lo indicheremo con $\Omega_c^\bullet(\mathbb{R}^n)$. Cioè:

$$\Omega_c^\bullet(\mathbb{R}^n) = \{ \text{ funzioni } C^\infty \text{ su } \mathbb{R}^n \text{ a supporto compatto } \} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^\bullet.$$

1.2 La successione di Mayer-Vietoris

In questo paragrafo estenderemo la definizione di complesso di de Rham da $\mathbb{R}^n$ alle varietà differenziabili e introdurremo una tecnica per calcolare la coomologia di de Rham: la successione di Mayer-Vietoris. Prima di fare ciò dobbiamo parlare della natura funtoriale del complesso di de Rham.

1.2.1 Il Funtore $\Omega^\bullet$

Siano $x_1, \dots, x_m$ e $y_1, \dots, y_n$ i sistemi standard di coordinate in $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ rispettivamente. Un'applicazione liscia

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

induce un'applicazione pull-back sulle funzioni C^∞ in questo modo:

$$\begin{array}{rccc} f^* : & \Omega^0(\mathbb{R}^n) & \to & \Omega^0(\mathbb{R}^m). \\ & g & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

Estendiamo questa applicazione pull-back a tutte le forme $f^* : \Omega^\bullet(\mathbb{R}^n) \to \Omega^\bullet(\mathbb{R}^m)$ in modo tale che commutino con d. La richiesta che f^* commuti con d impone che f^* debba essere definita in un unico modo:

$$f^*(\sum g_I dy_{i_1} \dots dy_{i_q}) = \sum (g_I \circ f) df_{i_1} \dots df_{i_q},$$

dove $f_i = y_i \circ f$ è la i-esima componente della funzione f.

Proposizione 1.6. *Usando la precedente definizione di f^* sulle forme, f^* commuta con d.*

Dimostrazione. Questa dimostrazione è essenzialmente un'applicazione della regola della catena. Infatti,

$$f^* d(g_I dy_{i_1} \dots dy_{i_q}) = f^* \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_I}{\partial y_i} dy_i dy_{i_1} \dots dy_{i_q} \Big) = \sum_{i=1}^n \Big(\Big(\frac{\partial g_I}{\partial y_i} \circ f \Big) df_i \Big) df_{i_1} \dots df_{i_q} =$$

[1] Ricordiamo che il supporto di una funzione continua f su uno spazio topologico X è così definita:

$$\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{p \in X | f(p) \neq 0\}}.$$

$$= d(g_I \circ f) df_{i_1} \dots df_{i_q} = d((g_I \circ f) df_{i_1} \dots df_{i_q}) = df^*(g_I dy_{i_1} \dots dy_{i_q}).$$

Abbiamo quindi ottenuto ciò che volevamo dimostrare. □

Osservazione 1.7. La derivata esterna d è indipendente dal sistema di coordinate su $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Sia $x_1, \dots, x_n$ il sistema di coordinate standard di $\mathbb{R}^n$ e $u_1, \dots, u_n$ un nuovo sistema di coordinate di $\mathbb{R}^n$. Allora esiste un diffeomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che $u_i = x_i \circ f = f^*(x_i)$. Per la regola della catena, se g è una funzione liscia su $\mathbb{R}^n$, si ha

$$\sum_i \frac{\partial g}{\partial u_i} du_i = \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j.$$

Quindi per una funzione liscia abbiamo dimostrato quanto volevamo.
Nel caso generale, se $\omega = \sum g_I du_I$, allora $d\omega = \sum dg_I du_I$. □

Diamo ora le seguenti definizioni:

Definizione 1.8. Una *categoria* consiste di una classe di oggetti e per ogni coppia di oggetti A e B, un insieme Hom(A,B) di morfismi da A a B che soddisfano le seguenti proprietà. Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ sono due morfismi, allora è definita la composizione di morfismi $g \circ f : A \to C$. Tale operazione di composizione deve essere associativa e per ogni oggetto A deve esistere l'identità 1_A in Hom(A,A).

Esempio 3. La classe di tutti i gruppi insieme con gli omomorfismi di gruppi è un esmpio di categoria.

Definizione 1.9. Un *funtore covariante* F da una categoria $\mathcal{K}$ ad una categoria $\mathcal{L}$ associa ad ogni elemento A in $\mathcal{K}$ un oggetto $F(A)$ in $\mathcal{L}$, e ad ogni morfismo $f : A \to B$ in $\mathcal{K}$ un morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$ in $\mathcal{L}$ tale che F preserva la composizione e l'identità:

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

$$F(1_A) = 1_{F(A)}.$$

Se F è tale che $F(f) : F(B) \to F(A)$ allora F è detto *funtore controvariante.*

Queste definizioni ci permettono di riassumere quanto precedentemente detto in questo modo:

$\Omega^\bullet$ *è un funtore controvariante dalla categoria degli spazi euclidei* $\{\mathbb{R}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *e applicazioni lisce:* $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *alla categoria delle algebre graduate differenziali commutative*[2]

[2]Qui la commutatività dell'algebra graduata si riferisce al fatto che

$$\tau \wedge \omega = (-1)^{deg\tau deg\omega} \omega \wedge \tau.$$

e i loro omomorfismi. Questo è l'unico funtore che estende il pullback di funzioni su $\Omega^0(\mathbb{R}^n)$.

Osserviamo che ciò che abbiamo appena detto per $\mathbb{R}^n$ continua a valere se si considerano tutti gli aperti di $\mathbb{R}^n$.
Il funtore $\Omega^\bullet$ può essere esteso alla categoria delle varietà differenziabili[3]. Per fare ciò abbiamo bisogno della seguente definizione.

Definizione 1.10. Una forma differenziale ω su M è una collezione di forme ω_U per U nell'atlante definito su M, che sono compatibili in questo senso: se i e j sono le inclusioni

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{i} & U \\ \downarrow_j & & \\ V & & \end{array}$$

allora

$$i^*\omega_U = j^*\omega_V$$

in $\Omega^\bullet(U \cap V)$.

Dato che $\Omega^\bullet$ è un funtore, la nozione di derivata esterna e di prodotto esterno si possono estendere alle forme differenziali su una varietà. Come in $\mathbb{R}^n$, un'applicazione liscia di varietà differenziabili $f : M \to N$ induce in modo naturale il pull-back sulle forme $f^* : \Omega^\bullet(N) \to \Omega^\bullet(M)$. In questo modo $\Omega^\bullet$ diventa un funtore controvariante sulla categoria delle varietà differenziabili.

1.2.2 La successione di Mayer-Vietoris

La successione di Mayer-Vietoris permette di calcolare la coomologia di due insiemi aperti.
Supponiamo $M = U \cup V$ con U e V aperti. Allora esiste una successione di inclusioni

$$M \leftarrow U \coprod V \leftleftarrows^{\partial_0}_{\partial_1} U \cap V$$

dove $U \coprod V$ è l'unione disgiunta di U e V, e ∂_0 e ∂_1 sono le inclusioni di $U \cap V$ in V e in U rispettivamente.
Applicando il funtore controvariante $\Omega^\bullet$, otteniamo la seguente successione

$$\Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) \rightrightarrows^{\partial_0^*}_{\partial_1^*} \Omega^\bullet(U \cap V)$$

dove con la restrizione di una forma ad una varietà intendiamo la sua immagine tramite il pull-back indotto dalle inclusioni.

[3]Nell'Appendice A vi è un breve richiamo sulle varietà differenziabili.

Prendendo la differenza delle due ultime mappe, otteniamo la successione di Mayer-Vietoris

$$0 \to \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) \to \Omega^\bullet(U \cap V) \to 0$$

dove

$$\begin{array}{ccc} \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) & \to & \Omega^\bullet(U \cap V). \\ (\omega, \tau) & \mapsto & \tau - \omega \end{array}$$

Proposizione 1.8. *La successione di Mayer-Vietoris è esatta.*

Dimostrazione. L'unico passaggio non chiaro è la suriettività della penultima applicazione.
Iniziamo considerando $M = \mathbb{R}$.
Sia f una funzione C^∞ su $U \cap V$. Sia $\{\rho_U, \rho_V\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento aperto $\{U, V\}$[4]. Si noti che $\rho_V f$ è una funzione su U. Poiché

$$(\rho_U f) - (-\rho_V f) = f,$$

allora

$$\Omega^0(U) \oplus \Omega^0(V) \to \Omega^0(U \cap V)$$

è suriettiva.
Nel caso generale, se M è una varietà differenziabile e $\omega \in \Omega^q(U \cap V)$, allora $(-\rho_V \omega, \rho_U \omega) \in \Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V)$ ha immagine ω. Questo prova la suriettività dell'applicazione. $\square$

La successione di Mayer-Vietoris

$$0 \to \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) \to \Omega^\bullet(U \cap V) \to 0$$

induce una successione esatta lunga in coomologia, ancora chiamata successione di Mayer-Vietoris

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^q(M) \arrow[r] & H^q(U) \oplus H^q(V) \arrow[r] & H^q(U \cap V) \arrow[d, "\delta"] \\ H^{q+1}(U \cap V) \arrow[d] & H^{q+1}(U) \oplus H^{q+1}(V) \arrow[l] & H^{q+1}(M) \arrow[l] & \\ \vdots & & & \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

[4] C.f.r. l'Appendice A.

Vediamo nel dettaglio come si comporta l'operatore δ.
La successione esatta corta induce il seguente diagramma formato da righe esatte

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & \Omega^q(M) & \rightarrow & \Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V) & \rightarrow & \Omega^q(U \cap V) & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow_d & & \downarrow_d & & \downarrow_d & & \\
0 & \rightarrow & \Omega^{q+1}(M) & \rightarrow & \Omega^{q+1}(U) \oplus \Omega^{q+1}(V) & \rightarrow & \Omega^{q+1}(U \cap V) & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Sia $\omega \in \Omega^q(U \cap V)$ una forma chiusa. Poiché la fila è chiusa, esiste $\xi \in \Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V)$ che ha ω come immagine, cioè

$$\xi = (-\rho_V \omega, \rho_U \omega).$$

Dato che il diagramma commuta e $d\omega = 0$, allora $d\xi$ deve andare in $0 \in \Omega^{q+1}(U \cap V)$, cioè $-d(\rho_V \omega) = d(\rho_U \omega)$ nell'intersezione $U \cap V$. Quindi $d\xi$ è l'immagine di un elemento in $\Omega^{q+1}(M)$. Questo elemento è chiuso e rappresenta $\delta([\omega])$. Inoltre, δ risulta essere indipendente dalla scelta del rappresentante. Esplicitamente:

$$\delta([\omega]) = \begin{cases} [-d(\rho_V \omega)], & \text{su } U \\ [d(\rho_U \omega)], & \text{su } V. \end{cases} \tag{1.3}$$

Definizione 1.11. Data una forma ω su una varietà M, il supporto di ω è definito come

$$\mathrm{Supp}(\omega) = \overline{\{p \in M | \omega(p) \neq 0\}}.$$

Osservazione 1.9. Nella successione di Mayer-Vietoris $\delta(\omega) \in H^\bullet(M)$ ha supporto in $U \cap V$.

1.2.3 Il Funtore $\Omega_c^\bullet$ e la successione di Mayer-Vietoris

In generale, il pull-back di un'applicazione liscia di una forma a supporto compatto non ha necessariamente un supporto compatto. Così $\Omega_c^\bullet$ non è un funtore sulla categoria delle varietà e delle applicazioni lisce. Per rendere $\Omega_c^\bullet$ un funtore non consideriamo tutte le applicazioni lisce ma solo un appropriato sottoinsieme di queste: le *inclusioni di insiemi aperti*. Se $j : U \rightarrow M$ è l'inclusione del sottoinsieme aperto U nella varietà M, allora $j_* : \Omega_c^\bullet(U) \rightarrow \Omega_c^\bullet(M)$ è l'applicazione che estende una forma su U ad una forma su M mandandola a zero fuori da U.
Per questi funtori esiste una successione di Mayer-Vietoris.
La successione di inclusioni

$$M \leftarrow U \coprod V \leftleftarrows U \cap V$$

induce una successione di forme a supporto compatto

$$\begin{array}{ccccc} \Omega_c^\bullet(M) & \leftarrow & \Omega_c^\bullet(U) \oplus \Omega_c^\bullet(V) & \leftarrow & \Omega_c^\bullet(U \cap V) \\ & & (-j_*\omega, j_*\omega) & \leftarrow & \omega \end{array}$$

Proposizione 1.10. *La successione di Mayer-Vietoris per forme a supporto compatto*

$$0 \leftarrow \Omega_c^\bullet(M) \leftarrow \Omega_c^\bullet(U) \oplus \Omega_c^\bullet(V) \leftarrow \Omega_c^\bullet(U \cap V) \leftarrow 0$$

è esatta.

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata. Proviamo, ad esempio, che l'applicazione $\Omega_c^\bullet(M) \leftarrow \Omega_c^\bullet(U) \oplus \Omega_c^\bullet(V)$ è suriettiva. Sia ω appartenente a $\Omega_c^\bullet(M)$. ω è l'immagine dell'elemento $(\rho_U\omega, \rho_V\omega)$ che appartiene a $\Omega_c^\bullet(U) \oplus \Omega_c^\bullet(V)$. Si osservi che la forma $\rho_U\omega$ ha supporto campatto poiché $\mathrm{Supp}(\rho_U\omega) \subset \mathrm{Supp}(\rho_U) \cap \mathrm{Supp}(\omega)$ e un sottoinsieme chiuso di un insieme compatto in uno spazio Hausdorff è compatto. Abbiamo così dimostrato la suriettività di $\Omega_c^\bullet(M) \leftarrow \Omega_c^\bullet(U) \oplus \Omega_c^\bullet(V)$.
Osserviamo che per ottenere una forma su U si è moltiplicato per ρ_U e non per ρ_V. $\square$

Anche questa successione di Mayer-Vietoris induce una successione esatta lunga in coomologia:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_c^q(U \cap V) \arrow[r] & H_c^q(U) \oplus H_c^q(V) \arrow[r] & H_c^q(M) \arrow[d, "\delta_c"] \\ & H_c^{q+1}(M) \arrow[d] & H_c^{q+1}(U) \oplus H_c^{q+1}(V) \arrow[l] & H_c^{q+1}(U \cap V) \arrow[l] \\ & \vdots & & \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

1.3 Orientazione e integrazione di una forma differenziabile

Tutte le dimostrazioni di teoremi, proposizioni e lemmi di questo paragrafo che qui sono omesse le si possono trovare in [3] cap.3.

Sia $x_1, \ldots, x_n$ il sistema di coordinate standard di $\mathbb{R}^n$.
L'integrale di Riemann di una funzione differenziabile a supporto compatto f è

$$\int_{\mathbb{R}^n} f|dx_1 \cdots dx_n| = \lim_{\triangle x_i \to 0} \sum f \triangle x_1 \cdots \triangle x_n.$$

Noi definiamo l'integrale di una n-forma a supporto compatto $\omega = f dx_1 \cdots x_n$ come l'integrale di Riemann $\int_{\mathbb{R}^n} f|dx_1 \cdots dx_n|$.

Osservazione 1.11. Si noti che, a differenza della notazione usuale dell'analisi, nell'integrale di Riemann mettiamo un segno di valore assoluto. Questo per enfatizzare la distinzione tra l'integrale di Riemann di una funzione e l'integrale di una forma differenziale. Infatti, mentre l'ordine di $x_1, \ldots, x_n$ è importante in una forma differenziale, non è importante nell'integrale di Riemann: se π è una permutazione di $\{1, \ldots, n\}$, allora

$$\int f dx_{\pi(1)} \cdots dx_{\pi(n)} = (sgn(\pi)) \int f|dx_1 \cdots dx_n|,$$

mentre

$$\int f|dx_{\pi(1)} \cdots dx_{\pi(n)}| = \int f|dx_1 \cdots dx_n|.$$

Notazione 2. Se non c'è la possibilità di confondersi, torneremo alle usuali notazioni dell'analisi.

Così definito l'integrale di una n-forma dipende dalle coordinate $x_1, \ldots, x_n$.
Un cambiamento di coordinate è dato da un diffeomorfismo $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che, se le coordinate sono rispettivamente $y_1, \ldots, y_n$ e $x_1, \ldots, x_n$, si ha:

$$x_i = x_i \circ T(y_1, \ldots, y_n) = T_i(y_1, \ldots, y_n).$$

Vediamo come l'integrale $\int \omega$ si trasforma mediante questo diffeomorfismo. Per fare ciò ci serve la seguente osservazione.

Osservazione 1.12. Si può dimostrare che

$$dT_1 \cdots dT_n = J(T) dy_1 \cdots dy_n,$$

dove $J(T) = det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)$ è il determinante dello Jacobiano di T.

Usando l'osservazione precedente otteniamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} T^*\omega = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ T) dT_1 \cdots dT_n = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ T) J(T) |dy_1 \cdots dy_n|. \tag{1.5}$$

Se invece utilizziamo la formula del cambiamento di variabili otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f(dx_1 \cdots dx_n)|dx_1 \ldots dx_n| = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ T)|J(T)||dy_1 \cdots dy_n|. \tag{1.6}$$

Unendo (1.5) e (1.6) otteniamo:

$$\int_{\mathbb{R}^n} T^*\omega = \pm \int_{\mathbb{R}^n} \omega,$$

dove il segno dipende dal segno del determinante $J(T)$.
In generale, se T è un diffeomorfismo di un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e se il determinante Jacobiano $J(T)$ è ovunque positivo, allora si dice che T *conserva l'orientazione*.
L'integrale su $\mathbb{R}^n$ non è invariante per tutti i gruppi di diffeomorfismi su $\mathbb{R}^n$, ma solo per il gruppo dei diffeomorfismi che mantengono l'orientazione.

Definizione 1.12. Sia M una varietà differenziabile con atlante $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$. Diciamo che l'*atlante* è *orientato* se tutte le funzioni di transizione $g_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ mantengono l'orientazione, e che la *varietà* è *orientabile* se ha un atlante orientato.

Osservazione 1.13. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ conserva l'orientazione se e solo se $T^* dx_1 \cdots dx_n$ è un multiplo positivo di $dx_1 \cdots dx_n$ in ogni punto.

Proposizione 1.14. *Una varietà M di dimensione n è orientabile se e solo se ha una n-forma globale che non si annulla mai.*

Osservazione 1.15. Se ω e ω' sono due n-forme globali che non si annullano mai su una varietà orientabile M di dimensione n, queste differiscono per una funzione che è sempre diversa da zero: $\omega = f\omega'$.
Se M è una varietà connessa e ω e ω' sono due n-forme con le proprietà precedenti, allora o f è sempre positiva oppure è sempre negativa.

Definizione 1.13. Sia M una varietà connessa e ω e ω' come sopra. Diciamo che ω e ω' sono *equivalenti* se f è positiva.

Così su una varietà orientabile connessa M le n-forme che non si annullano mai si dividono in due classi di equivalenza. La scelta di una classe è chiamata un'*orientazione* su M, e la denoteremo con $[M]$.

Esempio 4. L'orientazione standard su $\mathbb{R}^n$ è data da $dx_1 \cdots dx_n$.

Scegliamo un'orientazione $[M]$ su M.
Data $\tau \in \Omega_c^n(M)$, definiamo il suo integrale in questo modo:

$$\int_{[M]} \tau = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \tau,$$

dove $\int_{U_\alpha} \rho_\alpha \tau$ sta per $\int_{\mathbb{R}^n} (\phi_\alpha^{-1})^*(\rho_\alpha \tau)$ in cui ϕ_α è una trivializzazione

$$\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$$

che mantiene l'orientazione. Come nell'ultima proposizione del paragrafo precedente, $\rho_\alpha \tau$ ha supporto compatto.

Osservazione 1.16. Poiché assumiamo che la varietà sia orientabile, allora l'integrale su un insieme aperto coordinato $\int_{U_\alpha} \rho_\alpha \tau$ è ben definito.

Osservazione 1.17. Se rovesciamo l'orientazione si avrà solo un cambio di segno nell'integrale.

Notazione 3. Fissata una certa orientazione su M, scriveremo $\int_M \tau$ al posto di $\int_{[M]} \tau$.

Proposizione 1.18. *La definizione dell'integrale $\int_M \tau$ è indipendente dall'atlante orientato $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ e dalla patizione dell'unità $\{\rho_\alpha\}$.*

Dimostrazione. Sia $\{V_\beta\}$ un altro atlante orientato di M, e $\{\chi_\beta\}$ una partizione dell'unità subordinata a $\{V_\beta\}$.
Dato che $\sum_\beta \chi_\beta = 1$, allora

$$\sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \tau = \sum_{\alpha,\beta} \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \chi_\beta \tau. \tag{1.7}$$

Ma $\rho_\alpha \chi_\beta \tau$ ha supporto in $U_\alpha \cap V_\beta$, quindi

$$\int_{U_\alpha} \rho_\alpha \chi_\beta \tau = \int_{V_\beta} \rho_\alpha \chi_\beta \tau. \tag{1.8}$$

Unendo (1.7) e (1.8) otteniamo che

$$\sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \tau = \sum_{\alpha,\beta} \int_{V_\beta} \rho_\alpha \chi_\beta \tau = \sum_\beta \int_{V_\beta} \chi_\beta \tau.$$

□

Esempio 5. Sia $f : S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $f(e^{i\vartheta}) = (\cos(\vartheta), \sin(\vartheta))$ e sia

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Si ha

$$\int_{S^1} f^*\omega = \int_{S^1} d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi.$$

Prima di enunciare un teorema fondamentale della teoria dell'integrazione abbiamo bisogno di introdurre un nuovo tipo di varietà: le varietà con bordo.

Definizione 1.14. Una *varietà* M di dimensione n *con bordo* è data da un atlante $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, dove U_α sono omeomorfi a $\mathbb{R}^n$ oppure al semispazio superiore

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_n \geq 0\}.$$

Osservazione 1.19. Il bordo ∂M di M, che è costituito da tutti i punti di M che tramite una mappa di trivializzazione vanno in un punto di $\mathbb{R}^n$ con $x_n = 0$, è una varietà di dimensione $n - 1$.

Un atlante orientato induce in modo naturale un atlante orientato per ∂M. Questo è una conseguenza del seguente lemma.

Lemma 1.20. *Sia*

$$T : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$$

un diffeomorfismo con il determinante dello Jacobiano sempre positivo. T induce un'applicazione $\overline{T}$ dal bordo di $\mathbb{H}^n$ in sè. L'applicazione indotta $\overline{T}$, come diffeomorfismo di $\mathbb{R}^{n-1}$ ha ancora il determinante dello Jacobiano sempre positivo.

Sia $\mathbb{H}^n = \{x_n \geq 0\}$ il semispazio superiore in $\mathbb{R}^n$ dato dall'orientazione standard $dx_1 \cdots dx_n$.
L'*orientazione indotta* sul suo bordo $\partial\mathbb{H}^n = \{x_n = 0\}$ è per definizione la classe di equivalenza di

$$\begin{cases} (-1)^n dx_1 \cdots dx_{n-1}, & \text{per } n \geq 2 \\ -1, & \text{per } n = 1. \end{cases}$$

Il segno $(-1)^n$ serve per liberarsi da problemi di segno nel Teorema di Stokes che enunceremo tra poco.
In generale, per una varietà orientata con bordo M, definiamo un'*orientazione indotta* $[\partial M]$ su ∂M con la seguente richiesta: se ϕ è un diffeomorfismo che mantiene l'orientazione da un certo insieme aperto U in M ad un semispazio superiore $\mathbb{H}^n$, allora

$$\phi^*[\partial\mathbb{H}^n] = [\partial M]|_{\partial U},$$

dove $\partial U = \partial M \cap U$.
Enunciamo ora il teorema fondamentale della teoria dell'integrazione di cui avevamo parlato in precedenza.

Teorema 1.21. *(Teorema di Stokes) Se ω è una $(n-1)$-forma a supporto compatto su una varietà orientata M di dimensione n e se dotiamo ∂M dell'orientazione indotta, allora si ha*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

1.4 Lemma di Poincaré

In questo capitolo calcoleremo la coomologia ordinaria e la coomologia a supporto compatto di $\mathbb{R}^n$.

1.4.1 Lemma di Poincaré per la coomologia di de Rham

Sia

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x,t) & \mapsto & x \end{array}$$

la proiezione sulla prima componente e

$$\begin{array}{rccc} s: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (x,0) \end{array}$$

la sezione nulla.
Le applicazioni π e s inducono le seguenti applicazioni

$$\Omega^\bullet(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\pi^*} \Omega^\bullet(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

$$\Omega^\bullet(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \xrightarrow{s^*} \Omega^\bullet(\mathbb{R}^n).$$

Vogliamo dimostrare che le applicazioni π e s inducono isomorfismi inversi in coomologia e quindi

$$H^\bullet(\mathbb{R}^{n+1}) \cong H^\bullet(\mathbb{R}^n).$$

Notazione 4. Se non specificato, assumiamo che tutte le applicazioni che andiamo a considerare siano lisce.

Prima di dimostrare quanto vogliamo, facciamo la seguente osservazione.

Osservazione 1.22. Dato che $\pi \circ s = 1$, allora $s^* \circ \pi^* = 1$. Inoltre, $s \circ \pi \neq 1$ e questo corrisponde, a livello di forme, al fatto che $\pi^* \circ s^* \neq 1$. Ad esempio, $\pi^* \circ s^*$ manda la funzione $f(x,t)$ in $f(x,0)$.

Proposizione 1.23. *Le applicazioni*

$$H^\bullet(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\pi^*} H^\bullet(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

$$H^\bullet(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \xrightarrow{s^*} H^\bullet(\mathbb{R}^n)$$

sono isomorfismi.

Dimostrazione. Per mostrare che $\pi^* \circ s^*$ è l'identità in coomologia è sufficiente trovare un'applicazione K su $\Omega^\bullet(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ tale che

$$1 - \pi^* \circ s^* = \pm(dK \pm Kd),$$

poiché $dK \pm Kd$ manda forme chiuse in forme esatte e questo induce un'applicazione nulla in coomologia. Un operatore K così fatto è chiamato *operatore di omotopia*. Se K esiste, diciamo che $\pi^* \circ s^*$ è una applicazione di complessi *omotopa* all'identità.
Osserviamo che l'operatore di omotopia K decresce il grado di 1.
Ogni forma su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ è una combinazione lineare, unicamente determinata, di due tipi di forme:

(I) $(\pi^*\phi) f(x,t)$,

(II) $(\pi^*\phi)f(x,t)dt$,

dove ϕ è una forma sulla base $\mathbb{R}^n$.
Definiamo

$$K : \Omega^q(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to \Omega^{q-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

in questo modo:

(I) $(\pi^*\phi)f(x,t) \mapsto 0$,

(II) $(\pi^*\phi)f(x,t)dt \mapsto (\pi^*\phi)\int_0^t f$.

Dimostriamo che K così definito è un operatore di omotopia.
Per brevità, scriveremo $\frac{\partial f}{\partial x}dx$ al posto di $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$ e $\int g$ al posto di $\int g(x,t)dt$.
Analizziamo ora le forme di tipo (I).

$$\omega = (\pi^*\phi) \cdot f(x,t), \qquad deg(\omega) = q,$$

$$(1 - \pi^* \circ s^*)\omega = (\pi^*\phi) \cdot f(x,t) - \pi^*\phi \cdot f(x,0),$$

$$(dK - Kd)\omega = -Kd\omega = -K\Big((d\pi^*\phi)f + (-1)^q\pi^*\phi\Big(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial t}dt\Big)\Big) =$$

$$= (-1)^{q-1}\pi^*\phi\int_0^t \frac{\partial f}{\partial t} = (-1)^{q-1}\pi^*\phi[f(x,t) - f(x,0)].$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$(1 - \pi^* \circ s^*)\omega = (-1)^{q-1}(dK - Kd)\omega.$$

Analizziamo ora le forme del (II) tipo.

$$\omega = (\pi^*\phi)f(x,t)dt, \qquad deg(\omega) = q,$$

$$d\omega = (\pi^*d\phi)fdt + (-1)^{q-1}(\pi^*\phi)\frac{\partial f}{\partial x}dx\,dt,$$

$$(1 - \pi^* \circ s^*)\omega = \omega \quad \text{perché} \quad s^*(dt) = d(s^*t) = d(0) = 0,$$

$$Kd\omega = (\pi^*d\phi)\int_0^t f + (-1)^{q-1}(\pi^*\phi)dx\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$dK\omega = (\pi^*d\phi)\int_0^t f + (-1)^{q-1}(\pi^*\phi)\left[dx\Big(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}\Big) + fdt\right].$$

In questo caso abbiamo ottenuto che

$$(dK - Kd)\omega = (-1)^{q-1}\omega.$$

In entrambi i casi risulta quindi

$$1 - \pi^* \circ s^* = (-1)^{q-1}(dK - Kd) \quad \text{su } \Omega^q(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Dalla proposizione appena dimostrata si deduce immediatamente il seguente corollario.

Corollario 1.24. *(Lemma di Poincaré)*

$$H^k(\mathbb{R}^n) = H^k(\mathit{punto}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \mathit{se}\ k = 0 \\ 0, & \mathit{altrimenti.} \end{cases}$$

Più in generale, consideriamo le applicazioni

$$M \times \mathbb{R} \xrightarrow{\pi} M$$

$$M \xrightarrow{s} M \times \mathbb{R}.$$

Se $\{U_\alpha\}$ è un atlante per M, allora $\{U_\alpha \times \mathbb{R}\}$ è un atlante per $M \times \mathbb{R}$.
Come prima, ogni forma su $M \times \mathbb{R}$ è una combinazione lineare dei due tipi di forme (I) e (II).
Ripercorrendo la dimostrazione precedente, si può dimostrare che

$$H^\bullet(M \times \mathbb{R}) \cong H^\bullet(M)$$

è un isomorfismo tramite π^* e s^*.
Prima di enunciare un importante risultato sarà utile dare la seguente definizione.

Definizione 1.15. Un'*omotopia tra due applicazioni* $f, g : M \to N$ è un'applicazione

$$F : M \times \mathbb{R} \to N$$

tale che

$$\begin{cases} F(x,t) = f(x), & \text{per } t \geq 1 \\ F(x,t) = g(x), & \text{per } t \leq 0. \end{cases}$$

Osservazione 1.25. Nel caso di applicazioni differenziabili C^∞ omotope la definizione data coincide con la seguente: $f, g : M \to N$ applicazioni differenziabili si dicono C^∞ omotope se esiste $F : M \times \mathbb{R} \to N$ applicazione differenziable tale che

$$\begin{cases} F(x,0) = f(x), & \text{per ogni } x \in M \\ F(x,1) = g(x), & \text{per ogni } x \in M. \end{cases}$$

Corollario 1.26. *(Assioma di omotopia per la coomologia di de Rham) Applicazioni omotope inducono le stesse applicazioni in coomologia.*

Dimostrazione. Sia F un'omotopia tra due applicazioni f e g e siano

$$s_0 : M \to M \times \mathbb{R}, \qquad s_0(x) = (x, 0),$$

$$s_1 : M \to M \times \mathbb{R}, \qquad s_1(x) = (x, 1).$$

Allora

$$f = F \circ s_1,$$

$$g = F \circ s_0.$$

Da questo segue che

$$f^* = (F \circ s_1)^* = s_1^* \circ F^*$$

$$g^* = (F \circ s_0)^* = s_0^* \circ F^*.$$

Dato che s_0^* e s_1^* sono entrambe le applicazioni inverse di π^*, allora sono uguali.
Da ciò possiamo concludere che $f^* = g^*$. □

Definizione 1.16. Diciamo che due varietà M e N hanno lo stesso tipo di *omotopia nel senso* C^∞ se esistono due applicazioni C^∞ $f : M \to N$ e $g : N \to M$ tali che $g \circ f$ e $f \circ g$ sono C^∞ omotope all'identità su M e N rispettivamente.

Definizione 1.17. Una varietà che ha il tipo di omotopia di un punto è detta *contraibile*.

Corollario 1.27. *Due varietà con lo stesso tipo di omotopia hanno la stessa coomologia di de Rham*

Definizione 1.18. Sia $A \subset M$. Se $r : M \to A$ è un'applicazione che ristretta è l'identità su A, allora r è chiamata *retratto* di M in A.
Equivalentemente, se $i : A \to M$ è l'inclusione, allora r è una retratto di M in A se $r \circ i : A \to A$ è l'identità.
Se in più $i \circ r : M \to M$ è omotopa all'identità su M, allora r è detto *retratto per deformazione* di M in A.

Osservazione 1.28. Se r è un retratto per deformazione, allora A e M hanno lo stesso tipo di omotopia.

Corollario 1.29. *Se A è un retratto per deformazione di M, allora A e M hanno la stessa coomologia di de Rham.*

1.4.2 Il lemma di Poincaré per la coomologia a supporto compatto

Proposizione 1.30. *$H_c^\bullet(M \times \mathbb{R})$ e $H_c^{\bullet-1}(M)$ sono isomorfi.*

La dimostrazione di questa proposizione è simile alla dimostrazione della Proposizione 1.23 e quindi la omettiamo.

Corollario 1.31. *(Lemma di Poincaré a supporto compatto)*

$$H_c^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & se\ k = n \\ 0, & altrimenti. \end{cases}$$

Qui l'isomorfismo

$$H_c^n(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$$

è dato integrando su $\mathbb{R}^n$.

Un generatore per $H_c^n(\mathbb{R}^n)$ è una n-forma a supporto compatto (chiamata *bump* in inglese)

$$\alpha(x)dx_1 \cdots dx_n$$

con

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x)dx_1 \cdots dx_n = 1.$$

Il supporto di α può essere piccolo a piacere.

1.5 Il principio di Mayer-Vietoris

La successione di Mayer-Vietoris collega la coomologia di un'unione di sottoinsiemi a quella dei sottoinsiemi. Insieme al Lemma dei Cinque, dà un metodo di dimostrazione chiamato principio di Mayer-Vietoris, che procede per induzione sulla scelta della cardinalità del ricoprimento aperto. La potenza e la versatilità di questo principio ci permetteranno di dimostrare, per tutte le varietà con un buon ricoprimento finito, che la dimensione della coomologia di de Rham è finita, la dualità di Poincaré, la Formula di Künneth e infine il Teorema di Leray-Hirsh.

1.5.1 Esistenza di un buon ricoprimento

Definizione 1.19. Sia M una varietà di dimensione n. Un ricoprimento aperto $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ di M è chiamato *buon ricoprimento* se tutte le intersezioni finite diverse dal vuoto $U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_p}$ sono diffeomorfe a $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.20. Una varietà che ha un buon ricoprimento finito è detta *di tipo finito.*

Teorema 1.32. *Ogni varietà ha un buon ricoprimento. Se la varietà è compatta, allora il ricoprimento può essere scelto in modo che sia finito.*

Per provare questo teorema c'è bisogno di un pò di geometria differenziale.

Definizione 1.21. Una *struttura Riemanniana* su una varietà M è una metrica $<,>$, che varia in maniera liscia sullo spazio tangente di M in ogni punto. La metrica varia in modo liscio in questo senso: se X e Y sono due campi vettoriali lisci su M, allora $< X, Y >$ è una funzione liscia su M.

Ad ogni varietà si può dare una struttura Riemanniana usando il seguente metodo. Sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento aperto coordinato, $<,>_\alpha$ una metrica Riemanniana su U_α, e $\{\rho_\alpha\}$ una partizione dell'unità subordinata a $\{U_\alpha\}$. Allora

$$<,>=\sum \rho_\alpha <,>_\alpha$$

è una metrica Riemanniana su M.
Possiamo ora dimostrare il teorema precedentemente illustrato.

Dimostrazione. Dotiamo M di una struttura Riemanniana. Presi due punti di una varietà Riemanniana, andiamo a considerare l'intersezione degli *intorni* dei due punti *geodeticamente convessi*, che esistono sempre nel caso di una varietà Riemanniana. Tale intersezione è ancora geodeticamente convessa. Poiché un intorno geodeticamente convesso di una varietà Riemanniana di dimensione n è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$, un ricoprimento aperto composto da intorni geodeticamente convessi sarà un buon ricoprimento. □

Definizione 1.22. Dati due ricoprimenti $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $\mathfrak{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in J}$, se ogni V_β è contenuto in qualche U_α, diciamo che $\mathfrak{V}$ è un *raffinamento* di $\mathfrak{U}$ e sriveremo $\mathfrak{U} < \mathfrak{V}$.

Per essere più precisi specificheremo un raffinamento con un'applicazione $\phi : J \to I$ tale che $V_\beta \subset U_{\phi(\beta)}$.
Facendo una piccola modifica alla dimostrazione precedente e cioè andando a considerare intorni geodeticamente convessi attorno ad ogni punto inclusi negli insiemi aperti del ricoprimento dato, si ottiene il seguente teorema.

Teorema 1.33. *Ogni ricoprimento aperto di una varietà ha un raffinamento che è un buon ricoprimento.*

1.5.2 Dimensione finita della coomologia di de Rham

Proposizione 1.34. *Se la varietà M ha un buon ricoprimento finito, allora la sua coomologia ha dimensione finita.*

Dimostrazione. Dalla successione di Mayer-Vietoris

$$\cdots \to H^{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^q(U \cup V) \xrightarrow{r} H^q(U) \oplus H^q(V) \to \cdots$$

otteniamo che

$$H^q(U \cup V) \cong \mathrm{Ker}\ r \oplus \mathrm{Im}\ r \cong \mathrm{Im}\ \delta \oplus \mathrm{Im}\ r.$$

Così, se $H^q(U)$, $H^q(V)$ e $H^{q-1}(U \cap V)$ sono di dimensione finita, allora lo è anche $H^q(U \cup V)$. Per una varietà che è diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$, il fatto che $H^\bullet(M)$ sia di dimensione finita deriva dal Lemma di Poincaré.
Procediamo per induzione sulla cardinalità di un buon ricoprimento. Supponiamo che la coomologia di ogni varietà che ha un buon ricoprimento con al più p aperti sia di dimensione finita. Consideriamo una varietà che ha un buon ricoprimento $\{U_0, \dots, U_p\}$ con $p+1$ aperti. $(U_0 \cup \cdots \cup U_{p-1}) \cap U_p$ ha un buon ricoprimento con p aperti, cioè $(U_{0p}, \dots, U_{p-1,p}\}$. Per ipotesi induttiva, la q-esima coomologia di $U_0 \cup \cdots \cup U_{p-1}$, U_p e $(U_0 \cup \cdots \cup U_{p-1}) \cap U_p$ sono di dimensione finita. Per ciò che abbiamo appena visto, si ha che anche la q-esima coomologia di $U_0 \cup \cdots \cup U_p$ è di dimensione finita. Questo completa l'induzione. □

In modo analogo si dimostra il seguente risultato.

Proposizione 1.35. *Se una varietà M ha un buon ricoprimento finito, allora la sua coomologia compatta è di dimensione finita.*

1.5.3 Dualità di Poincaré su una varietà differenziabile

Definizione 1.23. Siano V, W due spazi di dimensione finita.
Un pairing
$$<,>: V \otimes W \to \mathbb{R}$$
è detto *non degenere* se $< v, w >= 0$ per ogni $w \in W$ implica $v = 0$ e $< v, w >= 0$ per ogni $v \in V$ implica $w = 0$.
Equivalentemente, l'applicazione $v \mapsto < v, \cdot >$ definisce un'applicazione iniettiva $V \hookrightarrow W^*$ e anche l'applicazione $w \mapsto < \cdot, w >$ definisce un'applicazione iniettiva $W \hookrightarrow V^*$.

Lemma 1.36. *Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. L'applicazione $<,>: V \otimes W \to \mathbb{R}$ è non degenere se e solo se l'applicazione $v \mapsto < v, \cdot >$ definisce un isomorfismo $V \hookrightarrow W^*$.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$) Dato che $V \hookrightarrow W^*$ e $W \hookrightarrow V^*$ sono iniettive, allora
$$\dim V \leq \dim W^* = \dim W \leq \dim V^* = \dim V.$$
Quindi $\dim V = \dim W^*$ e $V \hookrightarrow W^*$ deve essere un isomorfismo.
$\Leftarrow$) Dato che $V \hookrightarrow W^*$ è un isomorfismo, allora $V \hookrightarrow W^*$ è iniettiva.
Supponiamo esista $0 \neq \overline{w} \in W$ tale che $< v, \overline{w} >= 0$ per ogni $v \in V$. Poiché $V \hookrightarrow W^*$ è un isomorfismo, si ha $\varphi(\overline{w}) = 0$ per ogni $\varphi \in W^*$ e questa dà una contraddizione perché possiamo definire $\widetilde{\varphi} \in W^*$ tale che $\widetilde{\varphi}(\overline{w}) = 1$, $\widetilde{\varphi}(t\overline{w}) = t$ per ogni t reale e 0 altrimenti. □

Dato che il prodotto esterno è un'antiderivazione discende in coomologia. Inoltre, anche l'integrazione, per il Teorema di Stokes, discende in coomologia.
Così per una varietà orientata M esiste un pairing dato dall'integrale del prodotto esterno di due forme:

$$\begin{array}{rccc} \int : & H^q(M) \otimes H_c^{n-q}(M) & \to & \mathbb{R}. \\ & [\omega] \otimes [\tau] & \mapsto & \int_M \omega \wedge \tau \end{array}$$

La prima versione della dualità di Poincaré è la seguente.

Teorema 1.37. *Se M è orientata e ha un buon ricoprimento finito, allora il pairing appena descritto è non degenere. Equivalentemente,*

$$H^q(M) \cong (H_c^{n-q}(M))^*.$$

Osservazione 1.38. Dalle due proposizioni precedenti deriva che sia $H^q(M)$ che $H_c^{n-q}(M)$ hanno dimensione finita.

Per dimostrare la dualità di Poincaré sono necessari due lemmi.

Lemma 1.39. *(Lemma dei cinque) Dato un diagramma commutativo di gruppi abeliani e omomorfismi di gruppi*

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \cdots & \to & A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{f_2} & C & \xrightarrow{f_3} & D & \xrightarrow{f_4} & E & \to & \cdots \\ & & \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma & & \downarrow\delta & & \downarrow\epsilon & & \\ \cdots & \to & A' & \xrightarrow{f_1'} & B' & \xrightarrow{f_2'} & C' & \xrightarrow{f_3'} & D' & \xrightarrow{f_4'} & E' & \to & \cdots \end{array}$$

nel quale le righe sono esatte, se le applicazioni α, β, δ e ϵ sono isomorfismi, allora anche γ è un isomorfismo.

Lemma 1.40. *Le due successioni di Mayer-Vietoris 1.2 e 1.4 possono essere accoppiate insieme per formare un diagramma commutativo a meno di segno*

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \to & H^q(U \cup V) & \to & H^q(U) \oplus H^q(V) & \to & H^q(U \cap V) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(U \cup V) & \to \cdots \\ & \otimes & & \otimes & & \otimes & & \otimes & \\ \cdots \leftarrow & H_c^{n-q}(U \cup V) & \leftarrow & H_c^{n-q}(U) \oplus H_c^{n-q}(V) & \leftarrow & H_c^{n-q}(U \cap V) & \xleftarrow{\delta_c} & H^{n-q-1}(U \cup V) & \to \cdots \\ & \downarrow \int_{U\cup V} & & \downarrow \int_U + \int_V & & \downarrow \int_{U \cap V} & & \downarrow \int_{U \cup V} & \\ & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & \end{array}$$

Qui per commutatività a meno del segno si intende, per esempio, che

$$\int_{U\cap V} \omega \wedge \delta_c \tau = \pm \int_{U \cup V} (\delta\omega) \wedge \tau,$$

dove $\omega \in H^q(U \cap V)$ e $\tau \in H_c^{n-q-1}(U \cup V)$.

Osservazione 1.41. Questo lemma è equivalente a dire che il pairing induce un'applicazione dalla successione esatta sopra al duale della successione esatta sotto tale che il seguente diagramma è commutativo a meno del segno:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \to & H^q(U \cup V) & \to & H^q(U) \oplus H^q(V) & \to & H^q(U \cap V) & \to \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots \to & H_c^{n-q}(U \cup V)^* & \to & H_c^{n-q}(U)^* \oplus H_c^{n-q}(V)^* & \to & H_c^{n-q}(U \cap V)^* & \to \cdots \end{array}$$

Dimostriamo ora il lemma appena enunciato.

Dimostrazione. Dato che dimostrare la commutatività dei primi due quadrati è facile, proviamo la commutatività del terzo quadrato.
Dalla 1.3 e 1.2 si ha che $\delta\omega$ è una forma in $H^{q+1}(U \cup V)$ tale che

$$\delta\omega|_U = -d(\rho_V \omega)$$

$$\delta\omega|_V = d(\rho_U \omega),$$

e $\delta_c \tau$ è una forma in $H_c^{n-q}(U \cap V)$ tale che

$$(-(\text{estensione con 0 di } \delta_c\tau \text{ a } U), (\text{estensione con 0 di } \delta_c\tau \text{ a } V)) = (d(\rho_U \tau), d(\rho_V \tau)).$$

Poiché τ è chiusa, allora $d(\rho_V \tau) = (d\rho_V)\tau$. Analogamente, $d(\rho_V \omega) = (d\rho_V)\omega$.
Quindi

$$\int_{U\cap V} \omega \wedge \delta_c \tau = \int_{U \cap V} \omega \wedge (d\rho_V)\tau = (-1)^{deg\omega} \int_{U\cap V} (d\rho_V)\omega \wedge \tau. \tag{1.9}$$

Dato che $\delta\omega$ ha supporto in $U \cap V$, si ha:

$$\int_{U\cup V} \delta\omega \wedge \tau = -\int_{U\cap V} (d\rho_V)\omega \wedge \tau. \tag{1.10}$$

Da (1.9) e (1.10) possiamo quindi concludere che

$$\int_{U\cap V} \omega \wedge \delta_c \tau = (-1)^{deg\omega + 1} \int_{U \cup V} \delta\omega \wedge \tau.$$

□

Dimostriamo ora la prima versione della dualità di Poincaré per le varietà orientabili che abbiamo precedentemente enunciato.

Dimostrazione. Per il Lemma dei cinque, se la dualità di Poincaré vale per U, V e $U \cap V$ allora vale per $U \cup V$. Procediamo per induzione sulla cardinalità di un buon ricoprimento. Se M è diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$, la dualità di Poincaré segue dai due Lemmi di Poincaré:

$$H^\bullet(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{in dimensione } 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e
$$H_c^\bullet(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{in dimensione } n \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Supponiamo che la dualità di Poincaré sia dimostrata per ogni varietà che ha un buon ricoprimento con almeno p aperti e consideriamo una varietà che ha un buon ricoprimento $\{U_0, \cdots, U_p\}$ con $p+1$ aperti.
Ora $(U_0 \cup \cdots \cup U_{p-1}) \cap U_p$ ha un buon ricoprimento formato da p aperti:

$$\{U_{0,p}, U_{1,p}, \ldots, U_{p-1,p}\}.$$

Per ipotesi induttiva, la dualità di Poincaré è dimostrata per $U_0 \cup \cdots \cup U_{p-1}$, U_p e $(U_0 \cup \cdots \cup U_{p-1}) \cap U_p$. Quindi la dualità di Poincaré vale anche per $U_0 \cup \cdots \cup U_{p-1} \cup U_p$. Abbiamo così dimostrato la dualità di Poincaré per una varietà orientabile che ha un buon ricoprimento finito. $\square$

Diamo ora due esempi di calcolo della coomologia di alcuni spazi: la sfera S^n e il proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Esempio 6. Coomologia della sfera S^n.
Mostriamo, per induzione su n, che

$$H^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, n \\ 0, & \text{se } k \neq 0, n. \end{cases}$$

Se $n = 1$, allora $M = S^1 \subset \mathbb{R}^2$. In questo caso, consideriamo gli aperti $U = S^1 \setminus \{(0,1)\} \cong \mathbb{R}$ e $V = S^1 \setminus \{(0,-1)\} \cong \mathbb{R}$. Si noti che $S^1 = U \cup V$. Per il Lemma di Poincaré,

$$H^k(U) = H^k(V) = H^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dato che $U \cap V = S^1 \setminus \{(0,1), (0,-1)\} \cong \mathbb{R} \coprod \mathbb{R}$,

$$H^k(U \cap V) = H^k(\mathbb{R}) \oplus H^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & \text{se } k = 0 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Poiché S^1 è connesso e 1-dimensionale, $H^0(S^1) = \mathbb{R}$ e $H^k(S^1) = 0$ per $k > 1$. Rimane da determinare $H^1(S^1)$ che calcoliamo utilizzando la successione di Mayer-Vietoris:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(S^1) & \xrightarrow{u} & H^0(\mathbb{R}) \oplus H^0(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\varphi} & H^0(\mathbb{R} \coprod \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} \\ H^1(S^1) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{R}) \oplus H^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{R} \coprod \mathbb{R}) & \longrightarrow & 0. & \end{array}$$

Utilizzando le osservazioni precedenti, la successione si semplifica nel modo seguente

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{u} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\delta} H^1(S^1) \longrightarrow 0,$$

dove $\varphi(a,b) = (b-a, b-a)$.
Siccome $Ker(\varphi) = Im(u)$,

$$\mathbb{R} \cong H^0(S^1) \cong Ker(\varphi) \text{ e } H^1(S^1) \cong \frac{\mathbb{R}^2}{Im(\varphi)}.$$

Quindi, $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$.
Ora supponiamo che

$$H^k(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, n-1 \\ 0, & \text{se } k \neq 0, n-1 \end{cases}$$

e dimostriamo che vale per S^n. Analogamente al caso di S^1, consideriamo il ricoprimento di S^n dato dagli aperti

$$U = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} \cong \mathbb{R}^n \cong V = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\}.$$

Si ha

$$U \cap V = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1), (0, \dots, 0, -1)\} \cong S^{n-1} \times]-1, 1[\cong S^{n-1} \times \mathbb{R} \sim S^{n-1}.$$

Per vedere il primo diffeomorfismo, basta considerare l'applicazione che associa ad ogni punto $p \in U \cap V$ il punto di intersezione della retta passante per p e parallela all'iperpiano coordinato $x_{n+1} = 0$, con $S^{n-1} \times]-1, 1[$. Si dimostra facilmente che questa applicazione è un diffeomorfismo. Quindi

$$H^k(U) = H^k(V) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

e usando l'induzione

$$H^k(U \cap V) \cong H^k(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, n-1 \\ 0, & \text{se } k \neq 0, n-1. \end{cases}$$

Poiché S^n è connesso e n-dimensionale, $H^0(S^n) = \mathbb{R}$ e $H^k(S^n) = 0$ per $k > n$. Per calcolare gli altri gruppi di coomologia usiamo la successione di Mayer-Vietoris. Quando $k = 1$ la successione si riduce a

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{u} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R} \xrightarrow{\delta} H^1(S^n) \longrightarrow 0,$$

dove $\varphi(a,b) = (b-a)$. Siccome $Ker(\varphi) = Im(u)$,

$$\mathbb{R} \cong H^0(S^n) \cong Ker(\varphi) \text{ e } H^1(S^n) \cong \frac{\mathbb{R}}{Im(\varphi)}.$$

Quindi, $H^1(S^1) = 0$.
Sia ora $1 < k < n+1$. Dalla successione di Mayer-Vietoris si ha

$$0 \longrightarrow H^{k-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H^k(S^n) \longrightarrow 0$$

e quindi

$$H^k(S^n) \cong H^{k-1}(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, n \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In conclusione, la struttura di $H^\bullet(S^n)$ come algebra è molto semplice: se x è un generatore di $H^n(S^n)$, allora

$$H^\bullet(S^n) = \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2)},$$

dove $\mathbb{R}[x]$ è l'insieme dei polinomi in una variabile a coefficienti in $\mathbb{R}$.

Esempio 7. Coomologia del proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.
Mostriamo, per induzione su n, che

$$H^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k \text{ è pari e } 0 \leq k \leq 2n \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Consideriamo il caso $n = 1$. Osserviamo che $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2$. Dall'esempio precedente si ha

$$H^k(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \cong H^k(S^2) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, 2 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Supponiamo ora $n > 1$ e calcoliamo la coomologia di de Rham di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.
Fissiamo $p_0 = [1 : 0 : \cdots : 0] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ e consideriamo gli aperti

$$U = U_0 = \{[x_0 : \cdots : x_n] \,|\, x_0 \neq 0\} \cong \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n} \text{ e } V = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus \{p_0\}.$$

Si ha $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = U \cup V$ e

$$U \cap V \cong \mathbb{C}^n \setminus \{(0, \cdots, 0)\} \cong \mathbb{R}^{2n} \setminus \{(0, \ldots, 0)\},$$

allora $U \cap V$ è omotopo a S^{2n-1}. Infatti, basta considerare l'omotopia

$$H : \mathbb{R}^{2n} \setminus \{(0, \ldots, 0)\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}, \quad H(x, t) = tx + (1-t)\frac{x}{\|x\|}.$$

Quindi, si ha

$$H^k(U) \cong H^k(\mathbb{R}^{2n}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

e

$$H^k(U \cap V) \cong H^k(S^{2n-1}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, 2n-1 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per utilizzare la successione di Mayer-Vietoris associata agli aperti U e V, dobbiamo calcolare la coomologia di V. Per farlo, cosideriamo

$$\pi : V \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}), \quad \pi([x_0 : \cdots : x_n]) = [x_1 : \cdots : x_n].$$

La definizione è ben posta perché p_0 non appartiene a V, quindi si ha $\pi([x_0 : \cdots : x_n]) \neq [0 : \cdots : 0]$ per ogni $[x_0 : \cdots : x_n] \in V$. Consideriamo ora

$$j : \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \to V, \quad j([x_1 : \cdots : x_n]) = [0 : x_1 : \cdots : x_n].$$

Si ha $\pi \circ j = id_{\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})}$, mentre $j \circ \pi$ è omotopo a id_V. Infatti, definiamo

$$H : V \times \mathbb{R} \to V, \quad H([x_0 : \cdots : x_n], t) = [tx_0 : \cdots : x_n].$$

Si ha

$$\begin{array}{lllll} H([x_0 : \cdots : x_n], 0) & = & [0 : x_1 : \cdots : x_n] & = & j \circ \pi([x_0 : \cdots : x_n]) \\ H([x_0 : \cdots : x_n], 1) & = & [x_0 : x_1 : \cdots : x_n] & = & id_V([x_0 : \cdots : x_n]), \end{array}$$

inoltre H è liscia e quindi è un'omotopia. Perciò si ha che V e $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ hanno lo stesso tipo di omotopia e quindi

$$H^\bullet(V) \cong H^\bullet(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})).$$

Ora, supponiamo per induzione che sia vero che

$$H^k(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k \text{ è pari e } 0 \leq k \leq 2n-2 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Scriviamo la succesione di Mayer-Vietoris relativa al ricoprimento $\{U, V\}$ di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$:

$$\cdots \longrightarrow H^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \xrightarrow{\varphi} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{\psi} H^k(U \cap V) \longrightarrow \cdots$$

e consideriamo il caso in cui $2 \leq k \leq 2n-2$. Allora

$$H^{k-1}(U \cap V) = 0 = H^k(U \cap V) = H^k(U).$$

Perciò si ha

$$H^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \cong H^k(V) \cong H^k(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k \text{ è pari e } 0 \leq k \leq 2n-2 \\ 0, & \text{se } k \text{ è dispari e } 0 \leq k \leq 2n-2. \end{cases}$$

Se $k = 2n-1$, allora

$$H^{k-1}(S^{2n-1}) = 0 = H^k(V) = H^k(U),$$

quindi $H^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = 0$.
Se $k = 2n$, analizzando il seguente tratto della successione di Mayer-Vietoris

$$0 = H^{2n-1}(U) \oplus H^{2n-1}(V) \longrightarrow H^{2n-1}(U \cap V) \longrightarrow H^{2n}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \longrightarrow H^{2n}(U) \oplus H^{2n}(V) = 0,$$

si ha $H^{2n}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \cong H^{2n-1}(U \cap V) \cong \mathbb{R}$.
Rimangono da determinare i gruppi di coomologia $H^0(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ e $H^1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$. Poiché $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

è connesso in quanto è un quoziente di $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{(0,\dots,0)\}$ che è connesso, $H^0(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))=\mathbb{R}$.
Determiniamo $H^1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$. Dato che $H^1(U)=H^1(V)=0$, la successione di Mayer-Vietoris si semplifica come segue:

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \longrightarrow H^0(U)\oplus H^0(V) \longrightarrow H^0(U\cap V) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \longrightarrow 0,$$

cioé

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\oplus\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R} \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \longrightarrow 0,$$

dove $\varphi(a,b)=b-a$. Quindi, $H^1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))=0$.
Dal calcolo della coomologia di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, si desume che, per $0<k<2n$, l'applicazione

$$\varphi : H^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \longrightarrow H^k(U)\oplus H^k(V)$$

induce il seguente isomorfismo:

$$u_k : H^k(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})) \to H^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})).$$

Osserviamo infatti che per $2\le k\le 2n-2$ avevamo visto che $H^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))\cong H^k(V)\cong H^k(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}))$, mentre per $k=1,2n-1$ abbiamo che $H^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))=0=H^k(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}))$.
Vogliamo dimostrare per induzione su n che, fissato un elemento $x\in H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))\setminus\{0\}$, con $n>0$, allora x^k genera $H^{2k}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$, per $0\le k\le 2n$ e quindi

$$H^\bullet(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))=\frac{\mathbb{R}[x]}{(x^{n+1})}.$$

Visto come sono fatti i gruppi di coomologia di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, questo equivale a dimostrare che $x^k\neq 0$ per $0\le k\le n$. Per $n=1$ questo è ovvio. Ora, sia $n>1$, allora, come appena osservato, u_k è un isomorfismo di algebre e quindi se $s\in H^2(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}))\setminus\{0\}$, allora $x=u_k(s)\neq 0$.
Essendo per ipotesi induttiva $s^k\neq 0$ per $0\le k\le n-1$, si ha

$$x^k=(u_k(s))^k=u_k(s^k)\neq 0.$$

Quindi x^k genera $H^{2k}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ per $0\le k\le n-1$. Un modo immediato per dimostrare che $x^n\neq 0$ è usare la dualità di Poincaré.
$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è orientabile. Infatti, se consideriamo il ricoprimento di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ dato dagli aperti

$$U_i=\{[z_0:\dots:z_n]\in\mathbb{P}^n(\mathbb{C})\,|\,z_i\neq 0\}\cong\mathbb{C}^n,\quad i=0,\dots,n$$

e dalle funzioni $\varphi_i : U_i\to\mathbb{R}^{2n}$,

$$\varphi_i([z_0:\dots:z_n])=\Big(\frac{x_0x_i+y_0y_i}{x_i^2+y_i^2},\frac{y_0x_i-x_0y_i}{x_i^2+y_i^2},\dots,\frac{x_nx_i+y_ny_i}{x_i^2+y_i^2},\frac{y_nx_i-x_ny_i}{x_i^2+y_i^2}\Big),$$

supponendo per esempio che $j > i$, $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ è così definita

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = \varphi_j([x_1 + iy_1 : \cdots : x_i + iy_i : 1 : x_{i+1} + iy_{i+1} : \cdots : x_n + iy_n]) =$$

$$= \Big(\frac{x_1x_j + y_1y_j}{x_j^2 + y_j^2}, \frac{y_1x_j - x_1y_j}{x_j^2 + y_j^2}, \ldots, \frac{x_j}{x_j^2 + y_j^2}, \frac{-y_j}{x_j^2 + y_j^2}, \ldots, \frac{x_nx_j + y_ny_j}{x_j^2 + y_j^2}, \frac{y_nx_j - x_ny_j}{x_j^2 + y_j^2}\Big).$$

Per semplicità, consideriamo $n = 2$ (il caso $n > 2$ si svolge in maniera analoga) e calcoliamo lo Jacobiano J di $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{x_2^2+y_2^2} & \frac{y_2}{x_2^2+y_2^2} & \frac{x_1y_2^2 - x_1x_2^2 - 2x_2y_1y_2}{(x_2^2+y_2^2)^2} & \frac{y_1x_2^2 - y_1y_2^2 - 2y_2x_1x_2}{(x_2^2+y_2^2)^2} \\ \frac{-y_2}{x_2^2+y_2^2} & \frac{x_2}{x_2^2+y_2^2} & \frac{y_1y_2^2 - y_1x_2^2 + 2x_1x_2y_2}{(x_2^2+y_2^2)^2} & \frac{x_1y_2^2 - x_1x_2^2 - 2x_2y_1y_2}{(x_2^2+y_2^2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{y_2^2 - x_2^2}{(x_2^2+y_2^2)^2} & \frac{-2x_2y_2}{(x_2^2+y_2^2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{2x_2y_2}{(x_2^2+y_2^2)^2} & \frac{y_2^2 - x_2^2}{(x_2^2+y_2^2)^2} \end{pmatrix}$$

Dato che $det(J) = \frac{(x_2^2+y_2^2)((x_2^2-y_2^2)^2+4x_2^2y_2^2)}{(x_2^2+y_2^2)^6} = \frac{1}{(x_2^2+y_2^2)^3} > 0$, concludiamo che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è orientabile.
Poiché $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è compatto, dato che può essere visto come quoziente di S^{2n-1} che è compatto, ed è orientabile, per la dualità di Poincaré, si ha che l'applicazione bilineare

$$H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \times H^{2n-2}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \to \mathbb{R}$$

definita da

$$(x, x^{n-1}) \mapsto \int_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})} x^n$$

è non degenere. Quindi $\int_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})} x^n \neq 0$, perciò $x^n \neq 0$ e x^n genera $H^{2n}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$, il che completa la dimostrazione.

Osservazione 1.42. Nel teorema che enuncia la dualità di Poincaré, l'ipotesi che il buon ricoprimento sia finito, in realtà, non è necessaria. Da un'analisi più dettagliata della topologia della varietà, il principio di Mayer-Vietoris, che abbiamo visto, si può estendere ad ogni varietà orientabile[5].

Bisogna fare molta attenzione perché non è sempre vero che

$$H_c^q(M) \cong (H^{n-q}(M))^*.$$

Questa asimmetria deriva dal fatto che il duale di una somma diretta è un prodotto diretto, ma il duale di un prodotto diretto non è una somma diretta.

[5] C.f.r. [6] vol.1 pag. 198 e pag. 14.

Esempio 8. Consideriamo l'unione infinita disgiunta $M = \coprod_{i=1}^{\infty} M_i$ dove M_i sono tutte le varietà di tipo finito della stessa dimensione n.
Allora la coomologia di de Rham è un prodotto diretto

$$H^q(M) = \prod_i H^q(M_i), \tag{1.11}$$

mentre la coomologia compatta è una somma diretta

$$H_c^q(M) = \bigoplus_i H_c^q(M_i).$$

Facendo il duale della coomologia compatta si ottiene un prodotto diretto:

$$(H_c^q(M))^* = \prod_i H_c^q(M_i). \tag{1.12}$$

Da (1.11) e (1.12) e dalla dualità di Poincaré per le varietà di tipo finito M_i segue che

$$H^q(M) = (H_c^{n-q}(M))^*.$$

Corollario 1.43. *Se M è una varietà orientata connessa di dimensione n, allora*

$$H_c^n(M) \cong \mathbb{R}.$$

In particolare, se M è orientata, compatta e connessa, allora

$$H^n(M) \cong \mathbb{R}.$$

Sia $f : M \to N$ un'applicazione tra due varietà orientate e compatte di dimensione n, allora esiste un'applicazione indotta in coomologia:

$$f^* : H^n(N) \to H^n(M).$$

1.5.4 La Formula di Künneth e il Teorema di Leray-Hirsch

La Formula di Künneth enuncia che il prodotto di due varietà M e F è il prodotto tensoriale delle coomologie:

$$H^\bullet(M \times F) = H^\bullet(M) \otimes H^\bullet(F). \tag{1.13}$$

Questo significa che

$$H^n(M \times F) = \bigoplus_{p+q=n} H^p(M) \oplus H^q(F),$$

per ogni intero n non negativo. Più in generale, siamo interessati alla coomologia di un fibrato.

Definizione 1.24. Sia G un gruppo di Lie che agisce a sinistra[6], mediante un'applicazione differenziabile, su una varietà differenziabile F. Un'applicazione differenziabile suriettiva $\pi : E \to B$ tra varietà differenziabili è un *fibrato con fibra* F e *gruppo struttura* G se B ha un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ tale che esistono diffeomorfismi che preservano le fibre

$$\phi_\alpha : E_{|U_\alpha} \to U_\alpha \times F$$

e le funzioni di transizione sono differenziabili e a valori in G:

$$g_{\alpha,\beta}(x) = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(\{x\} \times F).$$

Lo spazio E è chiamato *spazio totale*. Un fibrato con gruppo struttura G è anche chiamato G-fibrato. Se $x \in B$, l'insieme $E_x = \pi^{-1}(x)$ è chiamato la *fibra* in x.

In assenza di ambiguità, identificheremo lo spazio totale E con il fibrato.
Se parliamo di fibrati senza menzionare il gruppo struttura, allora intendiamo che il gruppo struttura sia il gruppo dei diffeomorfismi di F che denoteremo con $Diff(F)$.

Definizione 1.25. L'azione di un gruppo di Lie G, mediante un'applicazione differenziabile, su una varietà differenziabile F è detta *effettiva* se l'unico elemento di G che agisce banalmente è l'identità, cioè se $g \cdot y = y$ per ogni $y \in F$ implica che $g = 1 \in G$.

Questo è equivalente a richiedere che il nucleo dell'applicazione naturale $G \to Diff(F)$ sia l'identità o che G sia un sottogruppo di $Diff(F)$.

Osservazione 1.44. Nella definizione di fibrato si richiede che l'azione di G su F sia effettiva affinché il diffeomorfismo $g_{\alpha,\beta}(x)$ di F possa essere identificato con un elemento di G.

Le funzioni di transizione $g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ soddisfano

$$g_{\alpha,\beta} \cdot g_{\beta,\gamma} = g_{\alpha,\gamma}.$$

Dato $\{g_{\alpha,\beta}\}$ con valori in G che soddisfa $g_{\alpha,\beta} \cdot g_{\beta,\gamma} = g_{\alpha,\gamma}$, possiamo costruire un fibrato E che ha queste come funzioni di transizione ponendo

$$E = (\coprod U_\alpha \times F)/(x, y) \sim (x, g_{\alpha,\beta}(x)y), \tag{1.14}$$

per $(x, y) \in U_\beta \times F$ e $(x, g_{\alpha,\beta}(x)y) \in U_\alpha \times F$.
La seguente dimostrazione della Formula di Künneth assume che la varietà M abbia un buon ricoprimento finito. Questa ipotesi è necessaria per l'induzione.

[6] C.f.r. la Definizione 2.1

Dimostrazione. Le due proiezioni $\pi : M \times F \to M$, $\rho : M \times F \to F$, rispettivamente sul primo e sul secondo fattore, danno origine ad un'applicazione sulle forme:

$$\omega \otimes \phi \longmapsto \pi^*\omega \cdot \rho^*\phi$$

che induce un'applicazione in coomologia:

$$\psi : H^\bullet(M) \otimes H^\bullet(F) \to H^\bullet(M \times F).$$

Dimostreremo che ψ è un isomorfismo.
Se $M = \mathbb{R}^n$, allora questo segue dal Lemma di Poincaré.
Da ora in poi penseremo a $M \times F$ come a un prodotto fibrato su M.
Siano U e V due insieme aperti di M e n un intero fissato. Dalla successione di Mayer-Vietoris

$$\cdots \to H^p(U \cup V) \to H^p(U) \oplus H^p(V) \to H^p(U \cap V) \to \cdots$$

si ottiene una successione esatta facendo il prodotto tensoriale con $H^{n-p}(F)$:

$$\cdots \to H^p(U \cup V) \otimes H^{n-p}(F) \to (H^p(U) \oplus H^p(V)) \otimes H^{n-p}(F) \to H^p(U \cap V) \otimes H^{n-p}(F) \to \cdots$$

dato che fare il prodotto tensoriale con uno spazio vettoriale preserva l'esattezza. Ricordando che vale la proprietà distributiva, facendo la somma su tutti i p, si ha la successione esatta

$$\cdots \to \bigoplus_{p=0}^{n} H^p(U \cup V) \otimes H^{n-p}(F) \to \bigoplus_{p=0}^{n} (H^p(U) \otimes H^{n-p}(F)) \oplus (H^p(V) \otimes H^{n-p}(F)) \to$$

$$\to \bigoplus_{p=0}^{n} H^p(U \cap V) \otimes H^{n-p}(F) \to \cdots$$

Il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccc}
\bigoplus_{p=0}^n H^p(U \cup V) \otimes H^{n-p}(F) & \to & \bigoplus_{p=0}^n (H^p(U) \oplus H^p(V)) \otimes H^{n-p}(F) & \to & \bigoplus_{p=0}^n H^p(U \cap V) \otimes H^{n-p}(F) \\
\downarrow \psi & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\
H^n((U \cup V) \times F) & \longrightarrow & H^n(U \times F) \oplus H^n(V \times F) & \longrightarrow & H^n((U \cap V) \times F)
\end{array}$$

è commutativo. La commutatività è ovvia eccetto per

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{p=0}^n H^p(U \cap V) \otimes H^{n-p}(F) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{p=0}^n H^{p+1}(U \cup V) \otimes H^{n-p}(F) \\
\downarrow \psi & & \downarrow \psi \\
H^n((U \cap V) \times F) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}((U \cup V) \times F),
\end{array}$$

che adesso verificheremo. Sia $\omega \otimes \phi \in H^p(U \cap V) \otimes H^{n-p}(F)$. Allora

$$\psi\delta(\omega \otimes \phi) = \pi^*(\delta\omega) \cdot \rho^*\phi,$$

$$\delta\psi(\omega \otimes \phi) = \delta(\pi^*\omega \cdot \rho^*\phi).$$

Ricordiamo che se $\{\rho_U, \rho_V\}$ è una partizione dell'unità subordinata a $\{U, V\}$, allora

$$\delta\omega = \begin{cases} -d(\rho_V\omega), & \text{su } U \\ \ \ d(\rho_U\omega), & \text{su } V. \end{cases}$$

Siccome il pull-back $\{\pi^*\rho_U, \pi^*\rho_V\}$ forma una partizione dell'unità su $(U \cup V) \times F$ subordinata al ricoprimento $\{U \times F, V \times F\}$, su $(U \cap V) \times F$, dato che ϕ è chiusa, si ha

$$\delta(\pi^*\omega \cdot \rho^*\phi) = d((\pi^*\rho_U)\pi^*\omega \cdot \rho^*\phi) = (d\pi^*(\rho_U\omega)) \cdot \rho^*\phi =$$

$$= \pi^*(\delta\omega) \cdot \rho^*\phi.$$

Quindi il diagramma è commutativo.
Per il Lemma dei cinque, se il teorema è vero per U, V e $U \cap V$, allora è anche vero per $U \cup V$. La Formula di Künneth segue dall'induzione sulla cardinalità di un buon ricoprimento, come nella dimostrazione della dualità di Poincaré. □

Sia $\pi : E \to M$ un fibrato con fibra F. Supponiamo esistano delle classi di coomologia $e_1, \ldots, e_r$ su E che si restringono a una base per la coomologia di ciascuna fibra. Allora possiamo definire un'applicazione

$$\psi : H^\bullet(M) \otimes \mathbb{R}\{e_1, \ldots, e_r\} \to H^\bullet(E).$$

Con lo stesso ragionamento nella dimostrazione della Formula di Künneth si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema 1.45. *(Leray-Hirsch) Sia E un fibrato su M con fibra F. Supponiamo che M abbia un buon ricoprimento. Se esistono classi di coomologia globali $e_1, \ldots, e_r$ su E che quando vengono ristrette a ogni fibra generano liberamente la coomologia della fibra, allora $H^\bullet(E)$ è un modulo libero su $H^\bullet(M)$ con base $\{e_1, \ldots, e_r\}$, cioè*

$$H^\bullet(E) \cong H^\bullet(M) \otimes \mathbb{R}\{e_1, \ldots, e_r\} \cong H^\bullet(M) \otimes H^\bullet(F).$$

1.5.5 Il duale di Poincaré di una sottovarietà chiusa

Sia M una varietà orientata di dimensione n e S una sottovarietà chiusa di dimensione k. Ad ogni sottovarietà orientata chiusa $i : S \hookrightarrow M$ di dimensione k possiamo associare un'unica classe di coomologia $[\eta_S] \in H^{n-k}(M)$, chiamata il suo *duale di Poincaré*, come segue. Sia ω una k-forma chiusa a supporto compatto su M. Dato che S è chiusa in M, $Supp(\omega|_S)$ è chiuso non soltanto in S, ma anche in M.
Ora, poiché $Supp(\omega|_S) \subset (Supp(\omega)) \cap S$ è un sottoinsieme chiuso in un compatto, $i^*\omega$ ha

supporto compatto su S e quindi è definito l'integrale $\int_S i^*\omega$. Per il Teorema di Stokes, l'integrazione su S definisce un funzionale lineare su $H_c^k(M)$. Per la dualità di Poincaré

$$(H_c^k(M))^* \cong H^{n-k}(M),$$

ne segue che l'integrazione su S corrisponde ad un'unica classe di coomologia $[\eta_S] \in H^{n-k}(M)$. Chiameremo sia la classe di coomologia $[\eta_S]$ sia la forma che lo rappresenta il duale di Poincaré di S. Per definizione, il duale di Poincaré $[\eta_S]$ è l'unica classe di coomologia in $H^{n-k}(M)$ che soddisfa

$$\int_S i^*\omega = \int_M \omega \cdot \eta_S,$$

per ogni $\omega \in H_c^k(M)$.
Supponiamo che S sia una sottovarietà compatta, orientata di M di dimensione k. Siccome un compatto in uno spazio che è Hausdorff è chiuso, S è anche una sottovarietà orientata, chiusa e quindi ha un duale di Poincaré $\eta_S \in H^{n-k}(M)$.
Concludiamo questa sezione con le due seguenti osservazioni.

Osservazione 1.46. Se M è una varietà orientabile di dimensione n, allora la dualità di Poincaré di un punto p è un generatore per $H^n(M)$.

Osservazione 1.47. Se S è una sottovarietà di M di dimensione k, e $f : N \to M$ è un'applicazione differenziabile tale che $f^{-1}(S)$ è una sottovarietà di N di dimensione $-n + \dim N + k$, allora $[f^{-1}(S)] = f^*([S])$.

Capitolo 2

La varietà delle bandiere

In questo capitolo definiamo una struttura di varietà differenziabile sull'insieme delle bandiere di uno spazio vettoriale complesso. Premettiamo alcune considerazioni sulle azioni di gruppi di Lie su varietà differenziabili.

2.1 Azione di un gruppo su un insieme

Definizione 2.1. Sia G un gruppo e X un insieme. G agisce su X (a sinistra) se esiste un'applicazione

$$\vartheta : G \times X \to X$$

che soddisfa le seguenti condizioni:

1. se e è l'elemento neutro di G, allora

$$\vartheta(e, x) = x, \qquad \text{per ogni } x \text{ appartenente a } X;$$

2. se g_1, g_2 appartengono a G, allora

$$\vartheta(g_1, \vartheta(g_2, x)) = \vartheta(g_1 g_2, x), \qquad \text{per ogni } x \text{ appartenente a } X.$$

Se G è un gruppo di Lie, X è una varietà differenziabile[1] e ϑ è un'applicazione differenziabile, parliamo di azione C^∞.

Notazione 5. Sia G un gruppo che agisce su un insieme X e sia A un sottoinsieme di X. Usiamo la seguente notazione:

$$GA = \{ga | g \in G, a \in A\}.$$

[1]Nell'Appendice A vi è un breve richiamo sulle varietà differenziabili.

Definizione 2.2. Sia G un gruppo che agisce su un insieme X. L'*orbita* di $x \in X$ è l'insieme Gx. Se $Gx = x$, allora x è detto *punto fisso* di G. Se $Gx = X$ per un certo x, allora si dice che G agisce in modo *transitivo* su X. In questo caso, $Gx = X$ per tutti gli elementi x appartenenti a X.

Sia G un gruppo di Lie, M una varietà differenziabile e $\vartheta : G \times M \to M$ un'azione C^∞. Definiamo una relazione $\sim$ su M in questo modo: $m_1 \sim m_2$ se esiste $g \in G$ tale che $m_2 = \vartheta_g(m_1) = gm_1$.

Osservazione 2.1. La relazione appena definita risulta essere una relazione di equivalenza e le classi di equivalenza coincidono con le orbite di G.

Dimostrazione. Dimostramo che è una relazione di equivalenza:

- $m_1 \sim m_1$ dato che $m_1 = em_1$ e quindi la relazione è riflessiva;
- se $m_1 \sim m_2$, allora $m_2 = gm_1$ e quindi $m_1 = g^{-1}m_2$, cioè $m_2 \sim m_1$ e questo prova che la relazione è simmetrica;
- se $m_1 \sim m_2$ e $m_2 \sim m_3$, allora $m_2 = gm_1$ e $m_3 = hm_2$ e così $m_3 = (hg)m_1$ e quindi $m_1 \sim m_3$, questo dimostra la transitività della relazione.

Dimostriamo infine che, per ogni $m_1 \in M$, $[m_1] = Gm_1$. Se $m_1 \sim m_2$, allora m_1 e m_2 stanno nella stessa orbita, così la classe di equivalenza $[m_1] \subset Gm_1$. Viceversa, se $m_2 \in Gm_1$, allora $m_1 \sim m_2$ e così $Gm_1 \subset [m_1]$. $\square$

Con M/G denoteremo l'insieme delle classi di equivalenza e lo doteremo della topologia quoziente. Chiameremo M/G lo *spazio delle orbite* di un'azione. Con questa topologia, la proiezione

$$\pi : M \to M/G, \qquad \pi(m) = mG$$

è continua. La proiezione π risulta essere anche aperta: se $U \subset M$ è un insieme aperto, allora è aperto anche $\vartheta_g(U)$ per ogni $g \in G$, dato che l'azione ϑ è continua, quindi $GU = [U] = \bigcup_{g \in G} \vartheta_g(U)$, essendo unione di aperti, è aperto.
Lo spazio delle orbite non necessariamente è Hausdorff, ma se lo è, allora le orbite devono essere sottoinsiemi chiusi di M dato che ogni orbita risulta essere la retroimmagine, tramite π, di un punto di M/G e i punti sono chiusi in uno spazio Hausdorff.

Definizione 2.3. Un *sottogruppo di Lie* H di un gruppo di Lie G è un sottogruppo che è anche una sottovarietà immersa ed è un gruppo di Lie con la struttura differenziabile di sottovarietà immersa.

Osservazione 2.2. Sia G un gruppo di Lie e H un sottogruppo di G. H agisce su G a sinistra mediante le traslazioni a sinistra. Se inoltre H è un sottogruppo di Lie allora l'azione è C^∞.
Quindi se H è un sottogruppo di Lie, l'insieme dei laterali destri G/H coincide con lo spazio delle orbite dell'azione.

Prima di enunciare un risultato che ci sarà molto utile nel seguito, abbiamo bisogno di una definizione e di dimostrare due lemmi.

Definizione 2.4. Una *relazione di equivalenza* $\sim$ su uno spazio topologico X è detta *aperta* se, per ogni sottoinsieme $A \subset X$ aperto, l'insieme $[A] = \bigcup_{a \in A}\{x \in X | x \sim a\}$ è aperto.

Lemma 2.3. *Una relazione di equivalenza $\sim$ su uno spazio topologico X è aperta se e solo se la proiezione π è aperta. Inoltre, se $\sim$ è aperta e X ha una base numerabile di insiemi aperti, allora anche $X/\sim$ ha una base numerabile.*

Dimostrazione. Sia $A \subset X$ un sottoinsieme aperto. Poiché $[A] = \pi^{-1}(\pi(A))$ allora, dalla definizione di topologia quoziente su $X/\sim$, si ha che $[A]$ è aperto se π è aperta e viceversa $[A]$ aperto implica che $\pi(A)$ è aperto.
Dimostriamo ora la seconda parte dell'enunciato. Supponiamo che $\sim$ sia aperta e che X abbia una base numerabile $\{U_i\}$ di insiemi aperti. Se W è un sottoinsieme aperto di $X/\sim$, allora

$$\pi^{-1}(W) = \bigcup_{j \in J} U_j$$

per una certa sottofamiglia di $\{U_i\}$ e

$$W = \pi(\pi^{-1}(W)) = \bigcup_{j \in J} \pi(U_j).$$

Da questo segue che $\{\pi(U_i)\}$ è una base di insiemi aperti per $X/\sim$. $\square$

Lemma 2.4. *Sia $\sim$ una relazione di equivalenza aperta su uno spazio topologico X. Allora $R = \{(x, y) | x \sim y\}$ è un sottoinsieme chiuso dello spazio $X \times X$ se e solo se la spazio quoziente $X/\sim$ è Hausdorff.*

Dimostrazione. $\Leftarrow$) Supponiamo che $X/\sim$ sia Hausdorff e supponiamo che $(x, y) \notin R$, cioè $x \nsim y$. Allora ci sono intorni disgiunti U di $\pi(x)$ e V di $\pi(y)$ che possiamo supporre aperti. Siano $\widetilde{U} = \pi^{-1}(U)$ e $\widetilde{V} = \pi^{-1}(V)$. $\widetilde{U}$ e $\widetilde{V}$ risultano così essere due insiemi aperti che contengono rispettivamente x e y. Se l'insieme aperto $\widetilde{U} \times \widetilde{V}$ intersecasse R, allora dovrebbe contenere almeno un punto (x', y') tale che $x' \sim y'$. Ma questo sarebbe contrario al fatto che abbiamo assunto che $U \cap V = \emptyset$ poichè risulterebbe che $\pi(x') = \pi(y')$. Questa contraddizione mostra che $\widetilde{U} \times \widetilde{V}$ non interseca R e quindi R è chiuso.
$\Rightarrow$) Viceversa, supponiamo che R sia chiuso. Allora per ogni coppia di punti distinti $\pi(x)$, $\pi(y)$ in $X/\sim$, esiste un insieme aperto della forma $\widetilde{U} \times \widetilde{V}$ contenente (x, y) che non ha punti in R. Ne segue che $U = \pi(\widetilde{U})$ e $V = \pi(\widetilde{V})$ sono disgiunti. Per il lemma precedente e dalle ipotesi, si ha che U e V sono aperti. Abbiamo così dimostrato che $X/\sim$ è Hausdorff. $\square$

Il risultato più importante di questo paragrafo è il seguente.

Teorema 2.5. *Sia G un gruppo di Lie e H un sottogruppo di Lie di G. Allora l'applicazione $\pi : G \to G/H$, che ad ogni elemento di G associa la sua orbita, cioè il suo laterale destro, oltre ad essere continua è anche aperta. Inoltre G/H è Hausdorff se e solo se H è chiuso.*

Dimostrazione. Dato che questo spazio coincide con lo spazio delle orbite di H che agisce su G, π è aperta e continua.
Per dimostrare che G/H è Hausdorff se e solo se H è chiuso utilizziamo la seguente applicazione C^∞:

$$F : G \times G \to G \qquad F(g_1, g_2) = g_2^{-1} g_1.$$

Dato che F è continua e $F^{-1}(H)$ è il sottoinsieme $R = \{(g_1, g_2) | g_1 \sim g_2\}$ di $G \times G$, allora R è chiuso e quindi, per il lemma precedente, G/H è Hausdorff se e solo se H è un sottoinsieme chiuso di G. $\square$

Concludiamo questo paragrafo con la seguente definizione.

Definizione 2.5. Sia G un gruppo che agisce su un insieme X e sia $x \in X$. Il gruppo di *isotropia* o di *stabilità* di x, che denoteremo con G_x, è il sottogruppo di tutti gli elementi di G che lasciano x fisso, cioè

$$G_x = \{g \in G | gx = x\}.$$

2.2 Spazi omogenei

In questo paragrafo analizzeremo l'azione di un gruppo di Lie su una varietà nel caso di un'azione transitiva. Ricordiamo che, se G è un gruppo di Lie e M è una varietà differenziabile, si dice che l'azione $\vartheta : G \times M \to M$ è transitiva se per ogni m_1, m_2 appartenenti a M esiste un g appartenente a G tale che $\vartheta_g(m_1) = m_2$.

Definizione 2.6. Una varietà M è detta *spazio omogeneo* del gruppo di Lie G se esiste un'azione transitiva C^∞ di G su M.

Proposizione 2.6. *Sia G un gruppo e H un sottogruppo di G e G/H l'insieme dei laterali destri. L'applicazione*

$$\lambda : G \times G/H \to G/H \qquad \lambda((g, \widetilde{g}H)) = g\widetilde{g}H$$

gode delle seguenti proprietà:

1. *è un'azione a sinistra;*

2. $\pi \circ L_{\widetilde{g}} = \lambda_{\widetilde{g}} \circ \pi$ *per ogni* $\widetilde{g} \in G$*, dove*

$$\lambda_{\widetilde{g}} : G/H \to G/H, \qquad \lambda_{\widetilde{g}}(gH) = \widetilde{g}gH,$$

$$\pi : G \to G/H, \qquad \pi(\widetilde{g}) = \widetilde{g}H$$

e

$$L_{\widetilde{g}} : G \to G, \qquad L_{\widetilde{g}}(g) = \widetilde{g}g$$

per ogni $g \in G$*;*

3. *è transitiva.*

Dimostrazione. 1. Dimostriamo che l'azione appena definita è un'azione a sinistra:

(i) $\lambda(e, gH) = gH$,

(ii) $\lambda(g_1, \lambda(g_2, gH)) = \lambda(g_1, g_2gH) = (g_1g_2)gH = \lambda(g_1g_2, gH)$.

2. Da una parte $\pi \circ L_{\widetilde{g}}(g) = \pi(\widetilde{g}g) = (\widetilde{g}g)H$.
Dall'altra $\lambda_{\widetilde{g}} \circ \pi(g) = \lambda_{\widetilde{g}}(gH) = \widetilde{g}gH$.
Abbiamo così dimostrato quanto volevamo.

3. Dimostramo che l'azione appena definita è transitiva.
Basta osservare che $\lambda_{\widetilde{g}g^{-1}}(gH) = \widetilde{g}H$ per ogni g, $\widetilde{g}$ appartenenti a G.

□

Sia X un insieme sul quale agisce transitivamente un gruppo G tramite l'applicazione $\vartheta : G \times X \to X$. Sia $\overline{x}$ un elemento di X e H il sottogruppo di isotropia di $\overline{x}$, cioè

$$H = \{g \in G | \vartheta_g(\overline{x}) = \overline{x}\}.$$

Definiamo l'applicazione

$$\widetilde{F} : G \to X, \qquad \widetilde{F}(g) = \vartheta_g(\overline{x}).$$

Osservazione 2.7. Dato che ϑ è transitiva, allora $\widetilde{F}$ è suriettiva. Infatti, preso $x \in X$ esiste un elemento $\overline{g} \in G$ tale che $\vartheta_{\overline{g}}(\overline{x}) = x$. Allora $\widetilde{F}(\overline{g}) = x$.

Osservazione 2.8. Per ogni $x \in X$ si ha che $\widetilde{F}^{-1}(x) = gH$ dove g è un elemento di G tale che $\widetilde{F}(g) = x$.

Dalle due osservazioni precedenti deriva che $\widetilde{F}$ induce un'applicazione

$$F : G/H \to X, \qquad F(gH) = \widetilde{F}(g)$$

che risulta essere iniettiva e suriettiva.
Infatti:

- proviamo che F è ben definita: siano g e $\widetilde{g}$ due rappresentanti della stessa classe di equivalenza in G/H, cioè $\widetilde{g} = gh$ con $h \in H$, allora
$$F(\widetilde{g}H) = F((gh)H) = \widetilde{F}(gh) = \vartheta_{gh}(\overline{x}) = \vartheta_g(\vartheta_h(\overline{x})) = \vartheta_g(\overline{x}) = \widetilde{F}(g) = F(gH);$$
- proviamo che F è iniettiva: supponiamo che $F(g_1H) = F(g_2H)$, per l'ultima osservazione fatta si ha che $\widetilde{F}^{-1}(\widetilde{F}(g_1)) = g_1H$ e $\widetilde{F}^{-1}(\widetilde{F}(g_2)) = g_2H$, quindi g_1 e g_2 appartengono alla stessa classe di equivalenza, cioè $g_1H = g_2H$;
- proviamo che F è suriettiva: dato che $\widetilde{F}$ è suriettiva si ha che per ogni x appartenente a X esiste $\overline{g} \in G$ tale che $\widetilde{F}(\overline{g}) = x$, quindi $F(\overline{g}H) = x$.

Osservazione 2.9. Valgono le seguenti relazioni:

1. $F \circ \pi = \widetilde{F}$;
2. $F \circ \lambda_g = \vartheta_g \circ F$ per ogni $g \in G$.

Preso un sottoinsieme aperto V di G/H, una *sezione* (V, σ) su G/H indicherà una applicazione $\sigma : V \to G$ continua e tale che $\pi \circ \sigma = id_V$.
Per dimostrare un importante risultato che enunceremo tra poco ci serviremo del seguente lemma.

Lemma 2.10. *Sia G un gruppo di Lie e sia H un sottogruppo di Lie di G connesso e chiuso. Allora ogni gH è una sottovarietà chiusa regolare e, per ogni $\overline{g} \in G$, esiste un intorno coordinato cubico (U, ϕ) (cioè $\phi(U)$ è un cubo in $\mathbb{R}^n$) tale che per ogni gH si ha che $gH \cap U$ è vuoto oppure è una singola foglia connessa.*

Dimostrazione. Il fatto che H e ogni suo laterale sia una sottovarietà regolare è una immediata conseguenza della seconda parte dell'enunciato.
Poiché ogni laterale è una varietà integrale massimale della distribuzione invariante a sinistra $\triangle$ determinata da $\triangle_e = T_e(H)$, ogni $\overline{g} \in G$ ha un intorno coordinato (U, ϕ) le cui foglie, determinate fissando le ultime $m - n$ coordinate (dove $n = \dim(H)$ e $m = \dim(G)$), sono varietà integrali e ognuna è un sottoinsieme aperto di un laterale gH di H. Dobbiamo ora verificare che si può prendere U sufficientemente piccolo tale che per ogni g, $gH \cap U = \emptyset$ oppure è una singola foglia. Possiamo limitarci a dimostrare questo solo per $\overline{g} = e$ dato che $\triangle$, le varietà integrali, etc. sono invarianti per traslazioni a sinistra di elementi di G. Inoltre, se dimostriamo che esiste un intorno coordinato di e, (U', ϕ'), tale che $U' \cap H$ è uguale ad una sola foglia, allora basta prendere $U \subset U'$ abbastanza piccolo in modo che valga $U^{-1}U \subset U'$ e tale che $(U, \phi = \phi'|_U)$ sia un intorno coordinato cubico per completare la dimostrazione. Infatti, se g_1, $g_2 \in U$ stessero su due foglie distinte ma appartenessero allo stesso laterale, cioè $g_1H = g_2H$, allora $g_1g_2^{-1}$ ed e risulterebbero essere due elementi di $U' \cap H$ che stanno in due foglie distinte (dato

che $L_{g_2^{-1}}$ è un diffeomorfismo e porta foglie in foglie). Ma questo contraddice le nostre assunzioni su U' e quindi ciò non può accadere. Ci rimane quindi da dimostrare l'esistenza di (U', ϕ').
Prendiamo un intorno coordinato (V, ψ) di e tale che $\psi(e) = 0$ e $\psi(V)$ sia un cubo che indicheremo con $C^m_\delta(0)$. Le foglie

$$S(c^{n+1}, \ldots, c^m) = \{v \in V \mid x^j(v) = c^j, \quad j = n+1, \ldots, m\}$$

sono varietà integrali. La collezione delle foglie distinte su H, cioè $V \cap H$ è numerabile e quindi corrisponde ad un insieme numerabile di punti $\{(c^{n+1}, \ldots, c^m)\}$ del cubo $C^{m-n}_\delta(0)$. Se ci restringiamo ad un cubo chiuso $\overline{V'} = \overline{\psi^{-1}(C^m_{\delta'}(0))}$ dove $\delta > \delta' > 0$ dobbiamo supporre che l'insieme numerabile sia chiuso, dato che H e $\overline{V'}$ sono chiusi. Poiché un insieme numerabile chiuso di $\mathbb{R}^{m-n}$ deve contenere un punto isolato, segue che $H \cap V'$ contiene una foglia isolata. Possiamo supporre, per l'invarianza per traslazioni, che questa foglia passi per e. È quindi possibile scegliere ϵ', $0 < \epsilon' < \delta'$, tale che $\psi^{-1}(C^m_{\epsilon'}(0)) = U'$ e $\phi' = \psi|_{U'}$ hanno le proprietà che abbiamo richiesto: $H \cap U'$ è una singola foglia e contiene l'identità e. Questo completa la dimostrazione del lemma. $\square$

Enunciamo ora l'importante risultato che avevamo promesso.

Teorema 2.11. *Sia G un gruppo di Lie e H un sottogruppo di Lie chiuso. Allora esiste un'unica struttura di varietà differenziabile su G/H con le proprietà:*

1. *π è C^∞,*
2. *ogni $g \in G$ è nell'immagine $\sigma(V)$ di una sezione C^∞ (V, σ) su G/H.*

Inoltre, l'azione $\lambda : G \times G/H \to G/H$ descritta precedentemente è un'azione C^∞ di G su G/H con questa struttura. Risulta inoltre che la dimensione di G/H è $dim(G) - dim(H)$.

Dimostrazione. La topologia su G/H è univocamente determinata dalla richiesta che $\pi : G \to G/H$ sia aperta e continua.
Dimostriamo ora che $\lambda : G \times G/H \to G/H$ è un'azione continua. Prendiamo U un insieme aperto di G/H, dobbiamo dimostrare che $\lambda^{-1}(U)$ è aperto. Sia W un sottoinsieme di $G \times G$ tale che per ogni $(g_1, g_2) \in W$ il prodotto $g_1 g_2 \in \pi^{-1}(U)$ che è un sottoinsieme aperto di G. W è aperto dato che è la retroimmagine di $\pi^{-1}(U)$ tramite l'applicazione continua $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$. L'applicazione

$$G \times G \to G \times G/H$$

$$(g_1, g_2) \mapsto (g_1, \pi(g_2))$$

è aperta e porta W in un insieme aperto che risulta essere proprio $\lambda^{-1}(U)$.
Applichiamo ora il Teorema di Frobenius alla distribuzione invariante a sinistra $\triangle$ determinata da $\triangle_e = T_e H$. Come base $\triangle$ ha ogni base di campi vettoriali invarianti a

sinistra in $\mathfrak{h}$, l'algebra di H vista come sottoalgebra di $\mathfrak{g}$. Le foglie integrali massimali di $\triangle$ sono esattamente i laterali destri gH. Segue che esiste un intorno cubico di e la cui intersezione con i laterali gH sono unioni di foglie. Restingiamoci a lavorare su un intorno cubico (U, ϕ) del tipo descritto nel lemma precedente con $\phi(U) = C_\epsilon^m(0)$ e supponiamo che nelle coordinate locali $x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^m$, le foglie ottenute tenendo fisse $x^{n+1}, \ldots, x^m$ sono le intersezioni dei laterali gH con U. Sia

$$A = \{a \in U | x^1(a) = \cdots = x^n(a) = 0\}$$

e consideriamo l'applicazione

$$\overline{\psi} : A \to C_\epsilon^{m-n}(0) \subset \mathbb{R}^{m-n}, \qquad \overline{\psi}(q) = (x^{n+1}(q), \ldots, x^m(q)).$$

A è una sottovarietà liscia di G, contenuta in U e $\overline{\psi}$ è un diffeomorfismo. Per come abbiamo scelto (U, ϕ), A interseca ogni laterale di H che interseca U esattamente in un punto. Quindi π manda A omeomorficamente in un insieme aperto V di G/H. Denotiamo l'inversa con σ. Abbiamo così ottenuto che $\sigma : V \to G$ è una sezione continua con $\sigma(V) = A$. Supponiamo che (U, ϕ) e $(\widetilde{U}, \widetilde{\phi})$ siano tali che $V = \pi(A)$ e $\widetilde{V} = \pi(\widetilde{A})$ abbiano punti comuni. L'insieme $V \cap \widetilde{V}$ è aperto e, dato che

$$\widetilde{\sigma} \circ \pi : W := \sigma(V \cap \widetilde{V}) \to \widetilde{W} := \widetilde{\sigma}(V \cap \widetilde{V})$$

è differenziabile con inversa

$$\sigma \circ \pi : \widetilde{W} \to W$$

ancora differenziabile, allora W e $\widetilde{W}$ sono diffeomorfi. Segue che la collezione degli insiemi aperti $V = \pi(A)$ su tutto (U, ϕ) del tipo sopra insieme agli omeomorfismi $\psi = \overline{\psi} \circ \sigma : V \to C_\epsilon^{m-n}(0)$ determinano una struttura differenziabile del tipo richiesto dal teorema.
L'unicità segue dalle richeste 1 e 2. Infatti se avessimo due diverse strutture su G/H allora l'identità sarebbe un diffeomorfismo in questo modo: fattorizziamo questa localmente in una sezione $\sigma : V \to G$ della prima struttura seguita dalla proiezione π che è differenziabile in una seconda struttura. Dato che facciamo questo per ogni dominio V, allora otteniamo che l'identità è un'applicazione differenziabile da G/H con la prima struttura a G/H con la seconda struttura. Ma vale anche l'inverso e quindi la struttura risulta essere unica.
Infine, $\lambda : G \times G/H \to G/H$ è differenziabile poiché può essere scritta sul dominio V di una sezione come $\lambda(g, \widetilde{g}H) = \pi(g\sigma(\widetilde{g}H))$. $\square$

Prima di completare il quadro della situazione, enunciando l'ultimo teorema del paragrafo, diamo la seguente definizione.

Definizione 2.7. Sia $F : N \longrightarrow M$ un'applicazione differenziabile tra varietà differenziabili e sia $n \in N$. Siano (U, φ) e (V, ψ) due intorni coordinati di n e $F(n)$ rispettivamente tali che $F(U) \subset V$. Consideriamo

$$\widehat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V).$$

Si chiama *rango* di F in n il rango di $\widehat{F}$ in $\varphi(n)$.

Teorema 2.12. *Sia M una varietà differenziabile e sia G un gruppo di Lie che agisce transitivamente su M mediante l'applicazione $\vartheta : G \times M \to M$. Allora l'applicazione*

$$\widetilde{F} : G \to M, \qquad \widetilde{F}(g) = \vartheta(g, m)$$

è differenziabile e, per ogni $g \in G$, F ha rango in g uguale alla dimensione di M. Inoltre, il gruppo di isotropia H è un sottogruppo di Lie chiuso e così G/H risulta essere una varietà differenziabile. Infine, l'applicazione

$$F : G/H \to M$$

definita da

$$F(gH) = \widetilde{F}(g)$$

è un diffeomorfismo e

$$F \circ \lambda_g = \vartheta_g \circ F, \qquad \textit{per ogni } g \in G.$$

Dimostrazione. $\widetilde{F} : G \to M$ è liscia dato che $\widetilde{F}(g) = \vartheta(g, m)$ e ϑ è liscia per ipotesi.
Da

$$\widetilde{F} \circ L_g(x) = \widetilde{F}(gx) = \vartheta_g \circ \widetilde{F}(x)$$

per la regola della catena e per il fatto che sia L_g che ϑ_g sono diffeomorfismi, si ha che il rango di $\widetilde{F}$ è lo stesso per ogni $g \in G$. Segue, applicando il Teorema del rango, che

$$\widetilde{F}^{-1}(m) = H$$

è una sottovarietà chiusa e soddisfa le ipotesi del teorema precedente.
Consideriamo ora $D\widetilde{F}_e : T_e(G) \to T_m(M)$. $X_e \in T_e(G)$ è il vettore tangente in $t = 0$ alla curva $g(t) = \exp(tX)$ così il vettore $D\widetilde{F}_e(X_e)$ è il vettore tangente a

$$\widetilde{F}(\exp tX) = \vartheta(\exp tX, m)$$

in m per $t = 0$. Poiché ϑ ristretta a $g(t) = \exp tX$ è un'azione di $\mathbb{R}$ su M, allora $D\widetilde{F}_e(X_e)$ è zero se e solo se $\vartheta(\exp tX, m) = m$ per ogni t, cioè $\exp tX \subset H$ che è equivalente a scrivere $X \in T_e(H)$, dove con $T_e(H)$ indichiamo il sottospazio di $T_e(G)$

relativo al sottogruppo H.
Quindi
$$\mathrm{Ker}(D\widetilde{F}_e) = T_e(H) = \mathrm{Ker}(D\pi_e)$$
e la dimensione di $\mathrm{Ker}(D\widetilde{F})$ è costante su G come la dimensione di $\mathrm{Ker}(D\pi)$.
Dato che $\widetilde{F}$ è suriettiva, per il Teorema del rango si ha che
$$\dim(M) = \dim(G) - \dim(H) = \dim(G/H).$$
Consideriamo $F : G/H \to M$. Sia $q \in G/H$ e (V, σ) una sezione definita in un intorno V di q. Dato che σ è liscia e $F|_V = \widetilde{F} \circ \sigma$, allora F è liscia in un intorno di ogni punto, quindi è liscia su G/H. Sappiamo che F è iniettiva e suriettiva e se $\mathrm{Ker}(DF) = \{0\}$, cioè $\mathrm{rank}(F) = \dim(G/H) = \dim(M)$ ovunque, allora F è un diffeomorfismo. Sia $q \in G/H$ e supponiamo $q = \pi(g)$. Usando il fatto che $\widetilde{F} = F \circ \pi$ e la regola della catena, si ha che $D\widetilde{F}_g : T_g(G) \to T_{\widetilde{F}(g)}(M)$ è anche dato da $DF_{\pi(g)} \circ D\pi_g$. Quindi, poiché
$$\dim(\mathrm{Ker}\ (D\widetilde{F})) = \dim(\mathrm{Ker}\ (D\pi)),$$
allora $\mathrm{Ker}(DF) = 0$, che era ciò che volevamo provare.
Il fatto che
$$F \circ \lambda_g = \vartheta_g \circ F$$
deriva da un'osservazione precedente.
Inoltre, per il teorema precedente, λ_g è un diffeomorfismo mentre ϑ_g è un diffeomorfismo per ipotesi.
Abbiamo così concluso la dimostrazione del teorema. $\square$

Riassumiamo quanto abbiamo visto in questa sessione:

Se un gruppo di Lie G agisce, mediante l'azione ϑ, su un insieme X transitivamente in modo tale che il sottogruppo di isotropia di un elemento x in X sia un sottogruppo di Lie chiuso, allora esiste un'unica struttura differenziabile su X tale che l'azione sia C^∞. Questa struttura è costruita richiedendo che l'applicazione
$$F : G/H \to X, \qquad F(gH) = \vartheta_g(x)$$
sia un diffeomorfismo. Osserviamo inoltre che la struttura non dipende dall'elemento x in X che si considera.

2.3 Struttura di varietà per l'insieme delle bandiere

In questo paragrafo, applicando il metodo precedentemente descritto, vogliamo dare una struttura di varietà all'insieme delle bandiere di $\mathbb{C}^n$.
Diamo prima di tutto la definizione di bandiera.

Definizione 2.8. Una successione di n sottospazi di $\mathbb{C}^n$

$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n$$

con $\dim V_j = j$ per $j = 1, \ldots, n$ è detta *bandiera* di $\mathbb{C}^n$.

Notazione 6. Denoteremo con $Fl(n)$ l'insieme delle bandiere di $\mathbb{C}^n$.

Vogliamo dimostrare che l'azione di $GL_n(\mathbb{C})$ sull'insieme $Fl(n)$

$$\vartheta : GL_n(\mathbb{C}) \times Fl(n) \to Fl(n)$$

così definita

$$\vartheta(A, V_1 \subset \cdots \subset V_n) = AV_1 \subset \cdots \subset AV_n$$

è transitiva.
Dimostriamo anzitutto che è un'azione:

- $\vartheta(I, V_1 \subset \cdots \subset V_n) =$
  $= IV_1 \subset \cdots \subset IV_n =$
  $= V_1 \subset \cdots \subset V_n;$
- $\vartheta(A, \vartheta(B, V_1 \subset \cdots \subset V_n) =$
  $= \vartheta(A, BV_1 \subset \cdots \subset BV_n) =$
  $= A(BV_1) \subset \cdots \subset A(BV_n) =$
  $= (AB)V_1 \subset \cdots \subset (AB)V_n =$
  $= \vartheta(AB, V_1 \subset \cdots \subset V_n).$

Dimostriamo ora che l'azione è transitiva.
Per fare ciò introduciamo prima di tutto quella che viene detta *bandiera standard*:

$$E_\bullet =< e_1 >\subset< e_1, e_2 >\subset \cdots \subset< e_1, \ldots, e_n >$$

dove $e_1, \ldots, e_n$ sono gli elementi della base standard di $\mathbb{C}^n$.
Osserviamo che per ogni bandiera di $\mathbb{C}^n$

$$V_\bullet = V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n$$

possiamo trovare una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ tale che $V_i =< v_1, \ldots, v_i >$. Ricordiamo che, se necessario, si può anche trovare una base unitaria con questa proprietà.
Consideriamo ora la matrice A $n \times n$ tale che $Ae_j = v_j$ per ogni j. A manda la bandiera standard nella bandiera $V_\bullet$.

Calcoliamoci ora il gruppo di stabilità della bandiera standard $E_\bullet$. Vogliamo cioè trovare l'insieme

$$H = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) | AE_\bullet = E_\bullet\}.$$

Affinché $A = (a_{ij})_{i,j} \in GL_n(\mathbb{C})$, $AE_\bullet = E_\bullet$, si deve avere che $Ae_1 \in < e_1 >$, cioè

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \in < e_1 > .$$

Le condizioni che ne derivano sono:

$$a_{21} = \cdots = a_{n1} = 0.$$

Ovviamente queste condizioni non bastano. Deve infatti anche valere, ad esempio, che

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \in < e_1, e_2 >$$

e quindi

$$a_{32} = \cdots = a_{n2} = 0.$$

In generale,

$$Ae_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} e_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in < e_1, \ldots, e_j >$$

e quindi

$$a_{j+1,j} = \cdots = a_{n,j} = 0.$$

Abbiamo così ottenuto che le matrici appartenenti a H sono le matrici triangolari superiori invertibili a coefficienti in $\mathbb{C}$. Denoteremo tale insieme con $T_s(n)$.
L'insieme $T_s(n)$ risulta essere un gruppo, infatti:

- $I \in T_s(n)$;
- $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} \\ 0 & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{22}b_{2n} + \cdots + a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix} \in T_s(n);$$

- $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}} \begin{pmatrix} a_{22}\cdots a_{nn} & & & * \\ & a_{11}a_{33}\cdots a_{nn} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{11}\cdots a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$
  $\in T_s(n)$.

Quindi l'insieme delle matrici triangolari superiori invertibili è un sottogruppo di Lie di $GL_n(\mathbb{C})$ chiuso.
Per ciò che abbiamo visto nel paragrafo precedente, si ha che

$$Fl(n) = GL_n(\mathbb{C}) \diagup T_s(n)$$

e $Fl(n)$ risulta così essere una verietà omogenea.

Osservazione 2.13. Avremmo potuto lavorare solamente sulle basi ortonormali di $\mathbb{C}^n$ rispetto al prodotto Hermitiano standard[2] $<,>$ su $\mathbb{C}^n$. Se avessimo scelto di fare ciò, allora ci saremmo limitati a guardare le matrici del gruppo unitario

$$U(n) = \{X \in GL_n(\mathbb{C}) | \bar{X}^T = X^{-1}\}.$$

Anche il gruppo $U(n)$ agisce transitivamente sull'insieme $Fl(n)$.
Il sottogruppo di Lie chiuso per cui avremmo dovuto quozientare sarebbe stato l'insieme delle matrici diagonali di $U(n)$ che denotiamo con T^n [3]. Quindi, alla fine, ragionando in questo modo, avremmo ottenuto che

$$Fl(n) = U(n) \diagup T^n.$$

Calcoliamoci ora la dimensione della varietà delle bandiere.
Dato che

$$\dim_{\mathbb{R}}(GL_n(\mathbb{C})) = 2n^2 \qquad \text{e} \qquad \dim_{\mathbb{R}}(T_s(n)) = 2(n + (n-1) + \cdots + 1) = n(n+1)$$

[2]Dati due vettori $\xi = \sum_j \xi_j e_j$ e $\zeta = \sum_j \zeta_j e_j$, il prodotto Hermitiano standard su $\mathbb{C}^n$ è così definito:

$$< \sum_j \xi_j e_j, \sum_j \zeta_j e_j >:= \sum_j \xi_j \bar{\zeta_j}.$$

[3]Cioè T^n è l'insieme di tutte le matrici della forma

$$\mathrm{Diag}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

dove $z_j \in \mathbb{C}$, $|z_j| = 1$ per $j = 1, \ldots, n$ e quindi un generico elemento di T^n è della forma

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}.$$

allora
$$\dim(Fl(n)) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Osservazione 2.14. $Fl(2)$ si identifica naturalmente a $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Se invece di $\mathbb{C}^n$ consideriamo uno spazio vettoriale complesso V di dimensione n, denotiamo con $Fl(V)$ la varietà delle bandiere di V. Analogamente, si ha

$$\dim(Fl(V)) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Capitolo 3

L'anello di coomologia della varietà delle bandiere

Lo scopo di questo capitolo è calcolare l'anello di coomologia della varietà delle bandiere. Prima di fare ciò occorre definire le classi di Eulero, le classi di Chern e la proiettivizzazione di un fibrato vettoriale.

3.1 Le classi di Eulero di un fibrato vettoriale

Per semplicità, definiremo la classe di Eulero[1] di un fibrato vettoriale orientato di rango 2, $\pi : E \to M$.

Definizione 3.1. Sia M una varietà orientata di dimensione n. Una n-forma si dice *positiva* se è nella stessa classe di orientazione di M.

L'orientazione standard della sfera unitaria S^{n-1} in $\mathbb{R}^n$ è, per convenzione, la seguente: se σ è un generatore di $H^{n-1}(S^{n-1})$ e $\pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$ è un retratto per deformazione, allora σ è positiva su S^{n-1} se e soltanto se $dr \cdot \pi^*\sigma$ è positiva su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Esempio 9. Sia ϑ la funzione angolo standard su $\mathbb{R}^2$ misurata in senso antiorario. La 1-forma $d\vartheta$ è positiva su S^1. Infatti, consideriamo il cambio di coordinate su $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x = r\cos(\vartheta) \\ y = r\sin(\vartheta). \end{cases}$$

Si ha

$$dx \cdot dy \longmapsto d(r\cos(\vartheta)) \cdot d(r\sin(\vartheta)) = (\cos(\vartheta)dr - r\sin(\vartheta)d\vartheta)(\sin(\vartheta)dr + r\cos(\vartheta)d\vartheta) =$$

$$= r\cos^2(\vartheta)dr\,d\vartheta - r\sin^2(\vartheta)d\vartheta\,dr = r(\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta))dr\,d\vartheta = rdr\,d\vartheta.$$

Quindi, $d\vartheta$ è positiva su S^1.

[1] Per la definizione di classe di Eulero di un fibrato vettoriale di rango n c.f.r. [3] cap. 11.

Esempio 10. Siano $r \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in (0,\pi)$ e $\vartheta \in (0,2\pi)$ le coordinate sferiche su $\mathbb{R}^3$. La 2-forma $d\varphi \cdot d\vartheta$ è positiva su S^2. Infatti, consideriamo il cambio di coordinate su $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x &= r\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\varphi)\cos(\vartheta) \\ z &= r\sin(\varphi)\sin(\vartheta). \end{cases}$$

Si ha

$$dx \cdot dy \cdot dz \longmapsto d(r\cos(\varphi)) \cdot d(r\sin(\varphi)\cos(\vartheta)) \cdot d(r\sin(\varphi)\sin(\vartheta)) =$$
$$= (\cos(\varphi)dr - r\sin(\varphi)d\varphi) \cdot (\sin(\varphi)\cos(\vartheta)dr + r\cos(\varphi)\cos(\vartheta)d\varphi - r\sin(\varphi)\sin(\vartheta)d\vartheta)\cdot$$
$$\cdot(\sin(\varphi)\sin(\vartheta)dr + r\cos(\varphi)\sin(\vartheta)d\varphi + r\sin(\varphi)\cos(\vartheta)d\vartheta) =$$
$$= (r\cos^2(\varphi)\cos(\vartheta)dr\,d\varphi - r\sin(\varphi)\cos(\varphi)\sin(\vartheta)dr\,d\vartheta - r\sin^2(\varphi)\cos(\vartheta)d\varphi\,dr+$$
$$+r^2\sin^2(\varphi)\sin(\vartheta)d\varphi\,d\vartheta) \cdot (\sin(\varphi)\sin(\vartheta)dr + r\cos(\varphi)\sin(\vartheta)d\varphi) + r\sin(\varphi)\cos(\vartheta)d\vartheta)) =$$
$$= (r\cos(\vartheta)dr\,d\varphi - r\sin(\varphi)\cos(\varphi)\sin(\vartheta)dr\,d\vartheta + r^2\sin^2(\varphi)\sin(\vartheta)d\varphi\,d\vartheta)(\sin(\varphi)\sin(\vartheta)dr+$$
$$+r\cos(\varphi)\sin(\vartheta)d\varphi + r\sin(\varphi)\cos(\vartheta)d\vartheta) =$$
$$= r^2\sin(\varphi)\cos^2(\vartheta)dr\,d\varphi\,d\vartheta - r^2\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\sin^2(\vartheta)dr\,d\vartheta\,d\varphi + r^2\sin^3(\varphi)\sin^2(\vartheta)d\varphi\,d\vartheta\,dr =$$
$$= (r^2\sin(\varphi)\cos^2(\vartheta) + r^2\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\sin^2(\vartheta) + r^2\sin^3(\varphi)\sin^2(\vartheta))dr\,d\varphi\,d\vartheta =$$
$$= r^2\sin(\varphi)dr\,d\varphi\,d\vartheta$$

e quindi $d\varphi \cdot d\vartheta$ è positiva su S^2.

Sia σ il generatore positivo di $H^{n-1}(S^{n-1})$ e $\psi = \pi^*\sigma$ il generatore corrispondente in $H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Definizione 3.2. La $(n-1)$-forma ψ è chiamata *forma angolare* su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Sia $\rho(r) : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ una funzione uguale a -1 per $r \in [0,a]$ e 0 per $r \in [b,+\infty)$ con $b > a$, continua e crescente; indichiamo ancora $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la funzione $\rho(\sum x_i^2)$. Richiediamo inoltre che $d\rho = \rho'(r)dr$ sia a supporto compatto su $\mathbb{R}$ con integrale totale uguale a 1. Quindi, $(d\rho) \cdot \psi$ è una forma a supporto compatto su $\mathbb{R}^n$ con integrale totale uguale a 1, cioè $(d\rho) \cdot \psi$ è un generatore di $H_c^n(\mathbb{R}^n)$.
Si noti che poiché ψ è una forma chiusa, possiamo scrivere

$$(d\rho) \cdot \psi = d(\rho \cdot \psi).$$

Ora, sia E un fibrato vettoriale su M di rango 2 e sia E^0 il complementare della sezione nulla in E. Dotiamo E di una metrica, così possiamo parlare della funzione raggio r su E. Definiamo una forma globale ψ su E^0 la cui restrizione su ogni fibra sia la forma angolare su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ appena definita. La 1-forma ψ è chiamata *forma angolare globale.* Sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento aperto coordinato di M che banalizza E. Dato che E ha una

struttura Riemanniana, possiamo scegliere una base ortonormale su ciascun U_α. Questo definisce le coordinate polari r_α e ϑ_α su $E^0_{|U_\alpha}$.
Se $x_1, \dots, x_n$ sono le coordinate su U_α, allora $\pi^* x_1, \dots, \pi^* x_n, r_\alpha, \vartheta_\alpha$ sono coordinate su $E^0_{|U_\alpha}$. Nell'intersezione $U_\alpha \cap U_\beta$ i raggi r_α e r_β coincidono, ma gli angoli ϑ_α e ϑ_β differiscono per una rotazione. Siccome E è un fibrato orientato, ha senso parlare di *senso antiorario* sulla fibra E_p. Questo ci permette di definire senza ambiguità l'angolo $\varphi_{\alpha,\beta}$ di rotazione in senso antiorario dal sistema di coordinate su U_α al sistema di coordinate su U_β (a meno di un multiplo di 2π), cioè

$$\vartheta_\beta = \vartheta_\alpha + \pi^* \varphi_{\alpha,\beta}, \quad \varphi_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{R}.$$

Si noti che

$$\varphi_{\alpha,\beta} + \varphi_{\beta,\gamma} - \varphi_{\alpha,\gamma} \in 2\pi\mathbb{Z},$$

e non è detto che $\varphi_{\alpha,\beta} + \varphi_{\beta,\gamma} - \varphi_{\alpha,\gamma} = 0$, ma si ha

$$d\varphi_{\alpha,\beta} + d\varphi_{\beta,\gamma} - d\varphi_{\alpha,\gamma} = 0.$$

Definiamo le seguenti 1-forme su U_α: $\xi_\alpha = \frac{1}{2\pi} \sum_\gamma \rho_\gamma d\varphi_{\gamma,\alpha}$, dove $\{\rho_\gamma\}$ è una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento aperto $\{U_\gamma\}$.
Poiché $d\varphi_{\alpha,\beta} = -d\varphi_{\beta,\gamma} + d\varphi_{\alpha,\gamma}$, si ha

$$\xi_\beta - \xi_\alpha = \frac{1}{2\pi} \sum_\gamma \rho_\gamma d\varphi_{\gamma,\beta} - \frac{1}{2\pi} \sum_\gamma \rho_\gamma d\varphi_{\gamma,\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_\gamma \rho_\gamma (d\varphi_{\gamma,\beta} - d\varphi_{\gamma,\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \sum_\gamma \rho_\gamma (-d\varphi_{\beta,\gamma} + d\varphi_{\alpha,\gamma}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Big(\sum_\gamma \rho_\gamma \Big) d\varphi_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2\pi} d\varphi_{\alpha,\beta}.$$

Ne segue che $d\xi_\beta = d\xi_\alpha$ su $U_\alpha \cap U_\beta$. Quindi, possiamo incollare i $d\xi_\alpha$ e costuire così una 2-forma globale e su M. La 2-forma e è chiaramente chiusa, ma non necessariamente esatta dato che non è detto che sia possibile incollare gli ξ_α e formare una 1-forma.

Definizione 3.3. La classe di coomologia $e(E) = e \in H^2(M)$ è chiamata la *classe di Eulero* del fibrato vettoriale orientato E.

Proposizione 3.1. *La classe di coomologia di e è indipendente dalla scelta di $\{\xi_\alpha\}$.*

Dimostrazione. Consideriamo le 1-forme $\{\bar{\xi}_\alpha\}$. Dato che

$$\bar{\xi}_\beta - \bar{\xi}_\alpha = \frac{1}{2\pi} d\varphi_{\alpha,\gamma} = \xi_\beta - \xi_\alpha,$$

si ha che

$$\bar{\xi}_\beta - \xi_\beta = \bar{\xi}_\alpha - \xi_\alpha = \xi$$

è una forma globale e quindi $d\bar{\xi}_\alpha - d\xi_\alpha$ è una forma globale esatta. $\square$

Dalla definizione di $\varphi_{\alpha,\beta}$ si ottiene

$$\frac{d\vartheta_\alpha}{2\pi} - \pi^*\xi_\alpha = \frac{d\vartheta_\beta}{2\pi} - \pi^*\xi_\beta.$$

Quindi queste forme si possono incollare insieme e si può costruire una 1-forma globale ψ su E^0, la *forma globale angolare* la cui restrizione su ogni fibra è la forma angolare $\frac{1}{2\pi}d\vartheta$, cioè, se $i_p : \mathbb{R}^2 \to E$ è l'inclusione ortogonale di una fibra su p, allora $i_p^*\psi = \frac{1}{2\pi}d\vartheta$.
La forma angolare globale non è chiusa, infatti:

$$d\psi = d\Big(\frac{d\vartheta_\alpha}{2\pi} - \pi^*\xi_\alpha\Big) = -\pi^* d\xi_\alpha = -\pi^* d\xi_\beta$$

Quindi,

$$d\psi = -\pi^* e.$$

Se E è un fibrato banale, possiamo considerare ψ come il pull-back di $\frac{1}{2\pi}d\vartheta$ nella proiezione

$$E^0 = M \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

In questo caso, ψ è chiusa e la classe di Eulero e è 0. In questo senso, la classe di Eulero misura il twist nel fibrato vettoriale orientato E.
La classe di Eulero di un fibrato vettoriale orientato di rango 2 può essere vista in termini delle funzioni di transizione nel modo seguente. Siano

$$g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to SO(2)$$

le funzioni di transizione di E.
Considerando l'isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} SO(2) & \to & S^1 \\ \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} & \mapsto & e^{i\vartheta} \end{array}$$

$g_{\alpha,\beta}$ può essere pensata come una funzione a valori complessi e l'angolo ottenuto passando dal sistema di coordinate su U_α al sistema di coordinate su U_β è $(1/i)\log(g_{\alpha,\beta})$. Si ha così

$$\vartheta_\alpha - \vartheta_\beta = \pi^*(1/i)\log(g_{\alpha,\beta})$$

e

$$\pi^*\varphi_{\alpha,\beta} = -\pi^*(1/i)\log(g_{\alpha,\beta}).$$

Sia $\{\rho_\gamma\}$ una partizione dell'unità subordinata a $\{U_\gamma\}$. Allora,

$$\frac{1}{2\pi}d\varphi_{\alpha,\beta} = \xi_\beta - \xi_\alpha,$$

dove

$$\xi_\alpha = \frac{1}{2\pi}\sum_\gamma \rho_\gamma d\varphi_{\gamma,\alpha} = -\frac{1}{2\pi i}\sum_\gamma \rho_\gamma d\log(g_{\gamma,\alpha}).$$

Quindi,

$$e(E) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_\gamma d(\rho_\gamma d\log(g_{\gamma,\alpha})) \tag{3.1}$$

su U_α.

Proposizione 3.2. *La classe di Eulero è funtoriale, cioè, se $f : N \to M$ è un'applicazione liscia e E è un fibrato vettoriale orientato di rango 2 su M, allora*

$$e(f^{-1}E) = f^*(e(E)).$$

Dimostrazione. Dato che le funzioni di transizione di $e(f^{-1}E)$ sono $f^*g_{\gamma,\alpha}$, la proposizione segue dal fatto che

$$e(E) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_\gamma d(\rho_\gamma d\log(g_{\gamma,\alpha})).$$

□

3.2 Le classi di Chern di un fibrato vettoriale

Ricordiamo che un fibrato vettoriale complesso di rango n è un fibrato con fibra $\mathbb{C}^n$ e gruppo struttura $GL_n(\mathbb{C})$. Un fibrato vettoriale complesso di rango 1 è chiamato *fibrato complesso in rette*. Come il gruppo struttura di un fibrato vettoriale reale può essere ridotto al gruppo ortogonale $O(n)$ introducendo una metrica, così il gruppo struttura di un fibrato vettoriale complesso di rango n può essere ridotto al gruppo unitario $U(n)$.
Ogni fibrato vettoriale complesso E di rango n ha un fibrato vettoriale reale $E_\mathbb{R}$ di rango $2n$ corrispondente, ottenuto dimenticando la struttura complessa su ogni fibra. L'isomorfismo $U(1) \cong SO(2)$ fornisce una corrispondenza biunivoca tra i fibrati in rette complessi e i fibrati reali orientati di rango 2.

Definizione 3.4. La *prima classe di Chern* di un fibrato in rette complesso L su una varietà M è la classe di Eulero del fibrato reale $L_\mathbb{R}$ corrispondente ed è denotata con $c_1(L)$, cioè:

$$c_1(L) = e(L_\mathbb{R}) \in H^2(M).$$

Se L e L' sono fibrati in rette complessi con funzioni di transizione $\{g_{\alpha,\beta}\}$ e $\{g'_{\alpha,\beta}\}$,

$$g_{\alpha,\beta},\, g'_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}^*,$$

allora il prodotto tensoriale $L \otimes L'$ è un fibrato in rette complesso con funzioni di transizione $\{g_{\alpha,\beta} \cdot g'_{\alpha,\beta}\}$. Dalla (3.1) che dà la classe di Eulero in termini delle funzioni di transizione, si ha

$$c_1(L \otimes L') = c_1(L) + c_1(L'). \tag{3.2}$$

Sia L^* il duale di L. Dato che il fibrato in rette $L \otimes L^* = Hom(L, L)$ ha una sezione ovunque non nulla data dalla mappa identità, $L \otimes L^*$ è un fibrato banale. Dalla (3.2) si ha

$$c_1(L) + c_1(L^*) = c_1(L \otimes L^*) = 0$$

e quindi

$$c_1(L^*) = -c_1(L). \tag{3.3}$$

Enunciamo ora un fatto che non dimostreremo[2].

Teorema 3.3. *Sia $\pi : E \to M$ un fibrato vettoriale orientato di rango k su una varietà orientata compatta di dimensione k. Sia s una sezione di E con un numero finito di zeri. La classe di Eulero di E è la duale di Poincaré degli zeri di s, contati con la moltiplicità appropriata.*

Utilizziamo il Teorema appena enunciato nel seguente esempio.

Esempio 11. Consideriamo l'atlante standard di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ costituito dai seguenti aperti coordinati

$$U_i = \{[x_0 : x_1] \,|\, x_i \neq 0\} \cong \mathbb{C}^1 \qquad i = 0, 1.$$

Prendiamo come coordinate z per U_0 e w per U_1. Quindi in $U_0 \cap U_1$ abbiamo $w = z^{-1}$. Consideriamo un fibrato lineare complesso. Prendiamo su $U_0 \times \mathbb{C}$ le coordinate (z, ζ) e su $U_1 \times \mathbb{C}$ le coordinate (w, ξ). La funzione di transizione che andiamo a considerare è la seguente:

$$\begin{array}{cccc} g_{01} : & U_0 \cap U_1 & \to & GL_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*, \\ & z & \mapsto & z^{-1} \end{array}$$

cioè abbiamo $w = z^{-1}$ e $\xi = z^{-1}\zeta$.
Consideriamo ora una sezione S così fatta: su $U_0 \times \mathbb{C}$ prendiamo $\zeta = s_0(z)$, su $U_1 \times \mathbb{C}$ prendiamo $\xi = s_1(w)$.
Dobbiamo a questo punto imporre che su $(U_0 \cap U_1) \times \mathbb{C}$ il punto $(z, s_0(z))$ sia uguale a $(w, s_1(w))$. Abbiamo $w = z^{-1}$, $s_1(w) = z^{-1}s_0(z)$. Quindi per $s_0(z) = z$ si ha $s_1(w) = 1$. Allora l'insieme degli zeri è costituito soltanto da un elemento: 0. Per il teorema appena

[2] Per la dimostrazione c.f.r. [3] cap. 11.

enunciato si ha che $c_1(S^*) = [0]$. Ma la classe di un punto, per l'Osservazione (1.46), è proprio il generatore di $H^2(\mathbb{P}(\mathbb{C}))$, quindi $c_1(S^*)$ è un generatore di $H^2(\mathbb{P}(\mathbb{C}))$.
Analizziamo ora il caso generico: $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Una sezione di S^* ha come insieme degli zeri un iperpiano H di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Quindi $[H] \in H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$. Siccome $\dim(H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))) = 1$ allora, per il teorema precedente, $c_1(S^*) = a[H]$ a meno che $[H] = 0$. Se dimostriamo che $[H] \neq 0$ e $a = 1$, abbiamo che $c_1(S^*) = [H]$.
Consideriamo una retta l in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ in posizione generale rispetto a H. Chiamiamo p il punto di intersezione della retta l con l'iperpiano H. Consideriamo l'inclusione $i : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Si ha, per l'Osservazione (1.47), $i^*([H]) = [H \cap l] = [p] \neq 0$. Abbiamo così dimostrato che $[H] \neq 0$.
Dimostriamo ora che $a = 1$. Consideriamo la stessa retta l presa in precedenza. Si ha da una parte,

$$i^* c_1(S^*) = a i^*[H] = a[p] \tag{3.4}$$

dall'altra, per la Proposizione (3.2),

$$i^* c_1(S^*) = c_1(i^{-1}S^*) = c_1(S^*_{|\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}) = [p]. \tag{3.5}$$

Unendo (3.4) e (3.5) si ottiene che $a = 1$, come volevamo dimostrare.

Esempio 12. (Fibrato tautologico di uno spazio proiettivo) Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione n e $\mathbb{P}(V)$ la sua proiettivizzazione:

$$\mathbb{P}(V) = \{ \text{ sottospazi 1-dimensionali di } V\}.$$

Esistono diversi fibrati vettoriali su $\mathbb{P}(V)$: il fibrato prodotto $\mathbb{P}(V) \times V$, il *sottofibrato universale* S, cioè il sottofibrato di $\mathbb{P}(V) \times V$ definito come segue:

$$S = \{(l, v) \in \mathbb{P}(V) \times V \mid v \in l\}$$

e il *fibrato quoziente universale* Q definito dalla successione esatta

$$0 \to S \to \mathbb{P}(V) \times V \to Q \to 0. \tag{3.6}$$

La fibra di S su un punto $l \in \mathbb{P}(V)$ consiste di tutti i punti in l, dove l è pensata come una retta su V.
La successione (3.6) è chiamata *successione tautologica esatta* su $\mathbb{P}(V)$ e S^* è chiamato *fibrato iperpiano.*
Con un calcolo simile all'Esempio 7, l'anello di coomologia $H^\bullet(\mathbb{P}(V))$ è

$$H^\bullet(\mathbb{P}(V)) = \mathbb{R}[x]/(x^n),$$

dove si è soliti considerare come generatore[3] $x = c_1(S^*) = -c_1(S)$ e $n = dim_{\mathbb{C}}(V)$. In altre parole, si vede che $H^\bullet(\mathbb{P}(V))$ è generato dalla classe di Eulero del fibrato E, cioè dalla prima classe di Chern del sottofibrato universale S.

[3] Si ragiona, per un generico spazio vettoriale di dimensione n, in maniera analoga a quanto fatto nell'esempio precedente per $\mathbb{C}^n$.

Osservazione 3.4. Nell'esempio precedente consideriamo la composizione dell'inclusione del sottofibrato universale S in $\mathbb{P}(V)\times V$ con la proiezione sul secondo fattore di $\mathbb{P}(V)\times V$:

$$\sigma : S \hookrightarrow \mathbb{P}(V) \times V \to V.$$

La retroimmagine di un punto v è

$$\sigma^{-1}(v) = \{(l, v) \,|\, v \in l\}.$$

Se $v \neq 0$, $\sigma^{-1}(v)$ è un punto (l, v), dove l è la retta che passa per l'origine e per v. Se $v = 0$, allora $\sigma^{-1}(0)$ è isomorfa a $\mathbb{P}(V)$. La mappa $\sigma : S \to V$ è chiamata *scoppiamento* (o *blow-up* in inglese) di V nell'origine.
Dotiamo V di una metrica Hermitiana. Sia E il fibrato sferico per il sottofibrato universale S:

$$E = \{(l, v) \,|\, v \in l,\ \|v\| = 1\}.$$

Si noti che $\sigma^{-1}(0)$ è la sezione nulla del sottofibrato universale S. Dato che $S \setminus \sigma^{-1}(0)$ è diffeomorfo a $V \setminus \{0\}$, E è diffeomorfo alla sfera S^{2n-1} in V e la mappa $\pi : E \to \mathbb{P}(V)$ dà la fibrazione

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \hookrightarrow & S^{2n-1} \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{P}(V). \end{array}$$

3.2.1 La proiettivizzazione di un fibrato vettoriale

Sia $\rho : E \to M$ un fibrato vettoriale complesso con funzioni di transizione

$$g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL_n(\mathbb{C}).$$

Denotiamo con E_p la fibra sul punto p e $PGL_n(\mathbb{C}) = GL_n(\mathbb{C})/\sim$, dove $A \sim B$ se $B = \lambda A$, per un $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definizione 3.5. La *proiettivizzazione* di E, $\pi : \mathbb{P}(E) \to M$, è il fibrato la cui fibra in un punto $p \in M$ è lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(E_p)$ e le cui funzioni di transizione

$$\overline{g}_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to PGL_n(\mathbb{C})$$

sono indotte da $g_{\alpha,\beta}$. Così un punto di $\mathbb{P}(E)$ è una retta l_p della fibra E_p.

Come nel caso di $\mathbb{P}(V)$, anche su $\mathbb{P}(E)$ esistono fibrati tautologici: il pull-back $\pi^{-1}E$ definito da

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}E & & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}(E) & \xrightarrow{\pi} & M, \end{array}$$

il *sottofibrato universale* S e il *fibrato quoziente universale* Q definito dalla successione esatta

$$0 \to S \to \pi^{-1}E \to Q \to 0.$$

Il fibrato $\pi^{-1}E$ è il fibrato vettoriale su $\mathbb{P}(E)$ la cui fibra in l_p è E_p. Quando ristretto alla fibra $\pi^{-1}(p)$, $\pi^{-1}E$ diventa il fibrato banale

$$\pi^{-1}E_{|\mathbb{P}(E)_p} = \mathbb{P}(E)_p \times E_p,$$

poiché $\rho : E_p \to \{p\}$ è un fibrato banale. Il sottofibrato universale S su $\mathbb{P}(E)$ è definito da

$$S = \{(l_p, v) \in \pi^{-1}E \,|\, v \in l_p\}.$$

La fibra in l_p consiste di tutti i punti in l_p.
Sia $x \in c_1(S^*)$, allora x è una classe di coomologia in $H^2(\mathbb{P}(E))$. Siccome la restrizione al sottofibrato universale S su $\mathbb{P}(E)$ a una fibra $\mathbb{P}(E_p)$ è il sottofibrato universale $\widetilde{S}$ dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(E_p)$, per la proprietà di naturalità della prima classe di Chern (vedi Proposizione 3.2), $c_1(\widetilde{S})$ è la restrizione di $-x$ a $\mathbb{P}(E_p)$.
Quindi le classi di coomologia $1, x, \ldots, x^{n-1}$ sono classi globali su $\mathbb{P}(E)$ le cui restrizioni a ogni fibra $\mathbb{P}(E_p)$ generano liberamente la coomologia della fibra.
Dal Teorema di Leray-Hirsch, la coomologia $H^\bullet(\mathbb{P}(E))$ è un modulo libero su $H^\bullet(M)$ con base $\{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$. In questo modo, x^n può essere scritta univocamente come combinazione lineare di $1, x, \ldots, x^{n-1}$ con coefficienti in $H^\bullet(M)$; esistono cioè $c_i(E) \in H^{2i}(M)$ tali che

$$x^n + \pi^* c_1(E) x^{n-1} + \cdots + \pi^* c_n(E) = 0.$$

Nel seguito, con lieve abuso di linguaggio, scriveremo questa relazione nella forma

$$x^n + c_1(E) x^{n-1} + \cdots + c_n(E) = 0$$

(cioè identificheremo $H^\bullet(M)$ col sottoanello $\pi^* H^\bullet(M) \subseteq H^\bullet(\mathbb{P}(E))$).

Definizione 3.6. Il coefficiente $c_i(E)$ si chiama *i-esima classe di Chern* del fibrato vettoriale complesso E e

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \cdots + c_n(E) \in H^\bullet(M)$$

è la *classe totale di Chern.*

Quindi la struttura di anello della coomologia di $\mathbb{P}(E)$ è data da

$$H^\bullet(\mathbb{P}(E)) = H^\bullet(M)[x]/(x^n + c_1(E) x^{n-1} + \cdots + c_n(E)), \tag{3.7}$$

dove $x = c_1(S^*)$ e n è il rango di E.
Ora abbiamo due definizioni della prima classe di Chern di un fibrato in rette L: da un lato la prima classe di Chern è $e(L_\mathbb{R})$ e dall'altro come coefficiente $c_1(L)$ nell'equazione

$$x^n + c_1(L) x^{n-1} + \cdots + c_n(L) = 0.$$

Dimostriamo che le due definizioni coincidono.
Per un fibrato in rette L si ha

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}L & & L \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}(L) & \xrightarrow{\pi} & M \end{array} \tag{3.8}$$

e si ha $\mathbb{P}(L) = M$, $\pi^{-1}L = L$ e il sottofibrato universale S su $\mathbb{P}(L)$ è L stesso. Quindi,

$$x = e(S^*_{\mathbb{R}}) = -e(S_{\mathbb{R}}) = -e(L_{\mathbb{R}}).$$

Così l'equazione $x^n + c_1(E)x^{n-1} + \cdots + c_n(E) = 0$ si riduce a $x + e(L_{\mathbb{R}}) = 0$ che dimostra $c_1(L) = e(L_{\mathbb{R}})$.

Osservazione 3.5. Se E è un fibrato banale $M \times V \to M$, allora $\mathbb{P}(E) = M \times \mathbb{P}(V)$ e $x^n = 0$. Quindi tutte le classi di Chern di un fibrato banale sono nulle. In questo senso, le classi di Chern misurano il twist di un fibrato vettoriale complesso.

3.2.2 Proprietà delle classi di Chern

In questo paragrafo vedremo alcune proprietà delle classi di Chern.

Proposizione 3.6. *(Naturalità) Sia $f : Y \to X$ e E un fibrato vettoriale complesso su X, allora $c(f^{-1}E) = f^*c(E)$, dove consideriamo*

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}E & & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X. \end{array}$$

Dimostrazione. Essenzialmente la proposizione segue dalla funtorialità della costruzione delle classi di Chern. Infatti, per la Proposizione 3.2, la prima classe di Chern di un fibrato in rette è funtoriale. Denotiamo con S_E il sottofibrato universale su $\mathbb{P}(E)$. Ora, $f^{-1}\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(f^{-1}(E))$ e $f^{-1}(S^*_E) = S^*_{f^{-1}(E)}$, così se $x_E = c_1(S^*_E)$, allora

$$x_{f^{-1}(E)} = c_1(S^*_{f^{-1}(E)}) = c_1(f^{-1}(S^*_E)) = f^*x_E.$$

Applicando f^* a

$$x^n_E + c_1(E)x^{n-1}_E + \cdots + c_n(E) = 0$$

otteniamo

$$x^n_{f^{-1}(E)} + f^*c_1(E)x^{n-1}_{f^{-1}(E)} + \cdots + f^*c_n(E) = 0.$$

Quindi, poiché tale equazione definisce univocamente $c_i(f^{-1}E)$, si ha

$$c_i(f^{-1}E) = f^*c_i(E)$$

e questo conclude la dimostrazione della proposizione. $\square$

Per la naturalità delle classi di Chern, si ha che se E e F sono fibrati vettoriali isomorfi su X, allora $c(E) = c(F)$.

Proposizione 3.7. *Sia V uno spazio vettoriale complesso. Se S^* è il fibrato iperpiano su $\mathbb{P}(V)$, allora $c_1(S^*)$ genera l'algebra $H^\bullet(\mathbb{P}(V))$.*

Proposizione 3.8. *(Formula di Whitney)*

$$c(E' \oplus E'') = c(E')c(E'').$$

Dimostreremo la Formula di Whitney nel prossimo paragrafo.

Osservazione 3.9. Se E è un fibrato vettoriale complesso di rango n, allora $c_i(E) = 0$, per $i > n$.

Proposizione 3.10. *Se E è un fibrato vettoriale complesso di rango n e E ha una sezione non nulla, allora $c_n(E) = 0$.*

Dimostrazione. Sia s una sezione non nulla di E. La sezione s induce una sezione $\widetilde{s}$ su $\mathbb{P}(E)$ in questo modo: in un punto $p \in X$, $\widetilde{s}(p)$ è la retta in E_p per l'origine e $s(p)$. Allora $\widetilde{s}^{-1}S_E$ è un fibrato in rette su X la cui fibra su p è la retta in E_p generata da $s(p)$. Dato che ogni fibrato in rette con una sezione non nulla è isomorfo al fibrato banale, $\widetilde{s}^{-1}S_E$ è isomorfo al fibrato banale. Per la naturalità della classe di Chern,

$$\widetilde{s}^* c_1(S_E) = 0,$$

che implica

$$\widetilde{s}^* x = 0.$$

Applicando $\widetilde{s}^*$ a

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n = 0,$$

si ottiene

$$\widetilde{s}^* c_n = 0$$

e questo in realtà significa $\widetilde{s}^* \pi^* c_n = 0$. In conclusione, $c_n = 0$. $\square$

Enunciamo ora un fatto che non dimostreremo[4].

Proposizione 3.11. *Se E è un fibrato vettoriale complesso di rango n, allora $c_n(E) = e(E_{\mathbb{R}})$.*

[4] Per la dimostrazione c.f.r. [3] cap. 21.

3.2.3 Il principio di spezzamento

Sia $\tau : E \to M$ un fibrato vettoriale complesso C^∞ di rango n su una varietà M. In questo paragrafo desideriamo costruire uno spazio $F(E)$ e una mappa $\sigma : F(E) \to M$ tale che:

1. il pull-back di E in $F(E)$ si spezza in una somma diretta di fibrati in rette:
$$\sigma^{-1}E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n;$$
2. $\sigma^* : H^\bullet(M) \to H^\bullet(F(E))$ è un'applicazione iniettiva, che identifica $H^\bullet(M)$ ad un sottoanello di $H^\bullet(F(E))$.

Per costruzione, $F(E)$ è una varietà ed è chiamata *varietà di spezzamento* di E.
Se E ha rango 1 non c'è nulla da dimostrare.
Se E ha rango 2, possiamo considerare come varietà di spezzamento $F(E)$ il fibrato proiettivo $\mathbb{P}(E)$, poiché esiste la successione esatta

$$0 \to S_E \to \sigma^{-1}(E) \to Q_E \to 0$$

e quindi[5] $\sigma^{-1}(E) = S_E \oplus Q_E$, dove S_E e Q_E sono fibrati in rette.
Ora supponiamo che E abbia rango 3. Su $\mathbb{P}(E)$ possiamo isolare il fibrato in rette S_E come in precedenza. Il fibrato quoziente Q_E su $\mathbb{P}(E)$ ha rango 2 e così si può spezzare nella somma diretta di fibrati in rette:

$$\begin{array}{ccccc} E & & S_E \oplus Q_E & & \beta^{-1}S_E \oplus S_{Q_E} \oplus Q_{Q_E} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M & \stackrel{\alpha}{\leftarrow} & \mathbb{P}(E) & \stackrel{\beta}{\leftarrow} & \mathbb{P}(Q_E). \end{array} \tag{3.9}$$

Così possiamo considerare $\mathbb{P}(Q_E)$ come varietà di spezzamento $F(E)$.
Sia $x_1 = \beta^* c_1(S_E^*)$ e $x_2 = c_1(S_{Q_E}^*)$. Dalla (3.7), si ha

$$H^\bullet(\mathbb{P}(E)) = H^\bullet(M)[x_1]/(x_1^3 + c_1(E)x_1^2 + c_2(E)x_1 + c_3(E)) \tag{3.10}$$

e

$$H^\bullet(F(E)) = H^\bullet(\mathbb{P}(E))[x_2]/(x_2^2 + c_1(Q_E)x_2 + c_2(Q_E)). \tag{3.11}$$

Dalla (3.10) e (3.11) ricaviamo

$$H^\bullet(F(E)) = H^\bullet(M)[x_1, x_2]/(x_1^3 + c_1(E)x_1^2 + c_2(E)x_1 + c_3(E),\ x_2^2 + c_1(Q_E)x_2 + c_2(Q_E)).$$

[5] Per la Proposizione A.3. che si trova nell'Appendice.

Per induzione, nel caso generale si ottiene:

$$\begin{array}{ccccccccc} E & & S_1 \oplus Q_1 & & S_1 \oplus S_2 \oplus Q_2 & & & & S_1 \oplus \cdots \oplus S_{n-1} \oplus Q_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ M & \stackrel{\alpha}{\leftarrow} & \mathbb{P}(E) & \stackrel{\beta_1}{\leftarrow} & \mathbb{P}(Q_1) & \stackrel{\beta_2}{\leftarrow} & \cdots & \stackrel{\beta_{n-2}}{\leftarrow} & \mathbb{P}(Q_{n-2}) = F(E) \end{array} \tag{3.12}$$

(notiamo che in (3.12) si è utilizzato un lieve abuso di notazione, abbiamo infatti scritto S_j al posto di $\beta_i^{-1}S_j$ per $i = 0, \dots, n-2$, $j = 0, \dots, n-2$ e $j \leq i$).
Quindi per un fibrato vettoriale di rango n esiste una varietà di spezzamento $F(E)$ ed è data esplicitamente dalla (3.12). La coomologia $H^\bullet(F(E))$ è un $H^\bullet(M)$-modulo libero che ha come base tutti i monomi della forma

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_{n-1}^{a_{n-1}},\ a_1 \leq n-1, a_2 \leq n-2, \dots, a_{n-1} \leq 1, \quad a_1, \dots, a_{n-1} \geq 0, \tag{3.13}$$

dove $x_i = c_1(S_i^*)$.
Come conseguenza dell'esistenza delle varità di spezzamento, possiamo formulare il Principio di spezzamento:
Per dimostrare un'identità polinomiale nelle classi di Chern di fibrati vettoriali complessi è sufficiente dimostrare l'identità assumendo che i fibrati vettoriali siano una somma diretta di fibrati in rette.
Vediamo un'applicazione di questo principio dimostrando la Formula di Whitney.
Sia $E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$, dove $L_1, \dots, L_n$ sono fibrati in rette.
Con un abuso di notazione, scriveremo $\pi^{-1}E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$ per il pull-back di E nella proiettivizzazione $\mathbb{P}(E)$. Su $\mathbb{P}(E)$ possiamo isolare il sottofibrato universale S in $\pi^{-1}E$:

$$\begin{array}{ccc} E & & S \subset \pi^{-1}E \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \stackrel{\pi}{\leftarrow} & \mathbb{P}(E) \end{array} \tag{3.14}$$

Sia s_i la proiezione di S su L_i. Allora s_i è una sezione di $Hom(S, L_i) = S^* \otimes L_i$. Siccome in ogni punto y di $\mathbb{P}(E)$ la fibra S_y è un sottospazio 1-dimensionale di $(\pi^{-1}E)_y$, le proiezioni $s_1, \dots, s_n$ non possono essere simultaneamente zero. Ne segue che gli insiemi aperti

$$U_i = \{y \in \mathbb{P}(E) \,|\, s_i(y) \neq 0\}$$

formano un ricoprimento aperto di $\mathbb{P}(E)$. Su ogni U_i il fibrato $(S^* \otimes L_i)_{|U_i}$ ha una sezione che non si annulla ovunque, ossia s_i. Quindi, $(S^* \otimes L_i)_{|U_i}$ è un fibrato banale. Sia ξ_i la 2-forma globale chiusa su $\mathbb{P}(E)$ che rappresenta $c_1(S^* \otimes L_i)$, allora $\xi_i = d\omega_i$, dove ω_i è una 1-forma su U_i. La parte cruciale della dimostrazione è trovare la forma globale su $\mathbb{P}(E)$ che rappresenta $c_1(S^* \otimes L_i)$ e che si annulla su U_i. Poiché ω_i non è una forma globale su $\mathbb{P}(E)$, $\xi_i - d\omega_i$ non è la forma globale cercata, comunque, restringendo un pochino il ricoprimento aperto $\{U_i\}$, possiamo estendere $\xi_i - d\omega_i$ a una forma globale.
Consideriamo un ricoprimento aperto $\{V_i\}$ di $\mathbb{P}(E)$ e funzioni C^∞ ρ_i tali che

1. $\overline{V_i} \subset U_i$;
2. ρ_i è 1 su $\overline{V_i}$ e 0 fuori da U_i.

Ora $\rho_i\omega_i$ è una forma globale che coincide con ω_i su V_i e quindi $\xi_i - d\rho_i\omega_i$ è una forma globale che rappresenta $c_1(S^* \otimes L_i)$ e che si annulla su V_i.
Dato che $\{V_i\}$ è un ricoprimento di $\mathbb{P}(E)$,

$$\prod_{i=1}^{n} c_1(S^* \otimes L_i) = 0.$$

Sia $x = c_1(S^*)$. Dalla (3.2) si ha

$$\prod_{i=1}^{n}(x + c_1(L_i)) = x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + \sigma_n = 0,$$

dove σ_i è l'i-esimo polinomio simmetrico elementare di $c_1(L_1), \ldots, c_1(L_n)$ e questa è precisamente l'equazione che definisce $c(E)$. Quindi,

$$\sigma_i = c_i(E) \text{ e } c(E) = \prod(1 + c_1(L_i)) = \prod c(L_i).$$

Abbiamo dimostrato che la Formula di Whitney vale per una somma diretta di fibrati in rette. Per il Principio di spezzamento, la Formula vale anche per un fibrato vettoriale complesso. Infatti, siano E e E' due fibrati vettoriali complessi rispettivamente di rango n e m e siano $\pi : F(E) \to M$ e $\pi' : F(\pi^{-1}E') \to F(E)$ gli spezzamenti.
Entrambi i fibrati si decompongono completamente come segue:

$$\begin{array}{ccccc} E \oplus E' & & L_1 \oplus \cdots \oplus L_n \oplus \pi^{-1}E' & & L_1 \oplus \cdots \oplus L_n \oplus L'_1 \oplus \cdots \oplus L'_m \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M & \overset{\pi}{\leftarrow} & F(E) & \overset{\pi'}{\leftarrow} & F(\pi^{-1}E'). \end{array} \tag{3.15}$$

Sia $\sigma = \pi' \circ \pi$. Allora si ha

$$\sigma^* c(E \oplus E') = c(\sigma^{-1}(E \oplus E')) = c(L_1 \oplus \cdots \oplus L_n \oplus L'_1 \oplus \cdots \oplus L'_m) =$$
$$= \left(\prod_{i=1}^{n} c(L_i)\right)\left(\prod_{j=1}^{m} c(L'_j)\right) = \sigma^* c(E)\sigma^* c(E') = \sigma^* c(E)c(E').$$

Dato che σ^* è iniettiva, $c(E \oplus E') = c(E)c(E')$. Questo conclude la dimostrazione della Formula di Whitney.

Osservazione 3.12. Dalla Formula di Whitney si ottiene che per ogni successione esatta di fibrati vettoriali complessi C^∞

$$0 \to A \to B \to C \to 0,$$

si ha $c(B) = c(A)c(C)$.

3.3 Il fibrato delle bandiere e l'anello di coomologia della varietà delle bandiere

Dato un fibrato vettoriale complesso E, definiamo il *fibrato delle bandiere* $Fl(E)$ associato ad E come il fibrato ottenuto da E sostituendo ogni fibra E_p con la varietà delle bandiere $Fl(E_p)$. La trivializzazione locale $\phi_\alpha : E_{|U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ induce una trivializzazione naturale $Fl(E_{|U_\alpha}) \to U_\alpha \times Fl(n)$. Siccome $GL_n(\mathbb{C})$ agisce su $Fl(n)$, consideriamo come funzioni di transizione di $Fl(E)$ le funzioni di transizione di E. Si noti che $Fl(E)$ non è un fibrato vettoriale.

Proposizione 3.13. *Il fibrato delle bandiere $Fl(E)$ associato ad un fibrato vettoriale E è la varietà di spezzamento costruita precedentemente.*

Dimostrazione. Prima di tutto dimostriamo la proposizione per $E = V$, dove V è uno spazio vettoriale di dimensione 3 pensato come un fibrato vettoriale di rango 3 su un punto p. Si ha

$$\begin{array}{ccccc} V & & S_V \oplus Q_V & & S_V \oplus S_{Q_V} \oplus Q_{Q_V} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{p} & \longleftarrow & \mathbb{P}(V) & \longleftarrow & \mathbb{P}(Q_V) = F(V). \end{array}$$

In ciò che segue, quando parleremo di rette e piano intenderemo rette e piano per l'origine, vale a dire sottospazi vettoriali. Un punto in $\mathbb{P}(V)$ è una retta L in V. Un punto in $\mathbb{P}(Q_V)$ è una retta L in V e una retta L' in V/L, quindi un punto in $\mathbb{P}(Q_V)$ può essere pensato come un piano in V generato da L e L'. Così

$$Fl(V) = \mathbb{P}(Q_V) = \{V_1 \subset V_2 \subset V, \, \mathrm{dim} V_i = i\} = F(V).$$

Sia E un fibrato vettoriale di rango n su M. La varietà di spezzamento $F(E)$ è ottenuta da una sequenza di $n-1$ proiettivizzazioni come in (3.12). Un punto in $\mathbb{P}(E)$ è una coppia (p, l), dove p è un punto in M e l è una retta in E_p. Introducendo una metrica Hermitiana su E, possiamo pensare ai fibrati quozienti $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ come sottofibrati di E. Quindi, un punto di $\mathbb{P}(Q_1)$ su (p, l_1) in $\mathbb{P}(E)$ è una tripletta (p, l_1, l_2), dove l_2 è una retta nel complemento ortogonale di l_1 in E_p. Un punto di $\mathbb{P}(Q_2)$ su (p, l_1, l_2) in $\mathbb{P}(Q_1)$ è una quadrupla (p, l_1, l_2, l_3), dove l_3 è una retta nel complemento ortogonale di l_1 e l_2 in E_p. In generale, un punto nella varietà di spezzamento $F(E) = \mathbb{P}(Q_{n-2})$ può essere identificato con la bandiera

$$(p, l_1 \subset \{l_1, l_2\} \subset \{l_1, l_2, l_3\} \subset \cdots \subset E).$$

Questo dimostra che il fibrato delle bandiere $Fl(E)$ associato ad un fibrato vettoriale E è la varietà di spezzamento $F(E)$. $\square$

Da ora in avanti utilizzeremo entrambi $Fl(E)$ e $F(E)$ per denotare il fibrato delle bandiere associato ad E.
La Formula (3.13) fornisce una descrizione della struttura di spazio vettoriale della coomologia del fibrato delle bandiere. Per calcolare la sua struttura di anello, ricordiamo dalla (3.7) che se E è un fibrato vettoriale complesso di rango n su M, allora l'anello di coomologia della sua proiettivizzazione è

$$H^\bullet(\mathbb{P}(E)) = H^\bullet(M)[x]/(x^n + c_1(E)x^{n-1} + \cdots + c_n(E)), \text{ dove } x = c_1(S^*).$$

Notazione 7. Se A è un anello graduato e a, b, c, f sono elementi di A, allora (a, b, c) denota l'ideale generato da a, b, c, mentre $(f = 0)$ denota l'ideale generato dalle componenti omogenee di f.

Esiste una descrizione alternativa di questo anello di coomologia che ci sarà molto utile. Denotiamo con $H^\bullet(M)[c(S), c(Q)]$

$$H^\bullet(M)[c_1(S), c_1(Q), \ldots, c_{n-1}(Q)],$$

dove S e Q sono rispettivamente il sottofibrato universale e il fibrato quoziente su $\mathbb{P}(E)$ definiti in precedenza.

Proposizione 3.14. *Sia E un fibrato vettoriale e $\mathbb{P}(E)$ la sua proiettivizzazione. L'anello di coomologia di $\mathbb{P}(E)$ è*

$$H^\bullet(\mathbb{P}(E)) = H^\bullet(M)[c(S), c(Q)]/(c(S)c(Q) = \pi^* c(E)).$$

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione è eliminare i generatori $c_1(Q), \ldots, c_{n-1}(Q)$ usando la relazione $c(S)c(Q) = \pi^* c(E)$.
Sia $x = c_1(S^*)$, $y_i = c_i(Q)$ e $c_i = \pi^* c_i(E)$. Uguagliando i termini dello stesso grado in

$$(1 - x)(1 + y_1 + \cdots + y_{n-1}) = 1 + c_1 + \cdots + c_n,$$

si ha

$$\begin{array}{rcl} y_1 - x & = & c_1, \\ y_2 - xy_1 & = & c_2, \\ y_3 - xy_2 & = & c_3, \\ & \vdots & \\ y_{n-1} - xy_{n-2} & = & c_{n-1}, \\ -xy_{n-1} & = & c_n. \end{array}$$

Dalle prime $n - 1$ equazioni otteniamo $y_1, \ldots, y_{n-1}$ in funzione di x e elementi appartenenti a $H^\bullet(M)$ e quindi possiamo eliminare $y_1, \ldots, y_{n-1}$ dai generatori di

$$H^\bullet(M)[c(S), c(Q)]/(c(S)c(Q) = \pi^* c(E)).$$

L'ultima equazione è equivalente a

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n = 0.$$

In conclusione, $H^\bullet(M)[c(S), c(Q)]/(c(S)c(Q) = \pi^* c(E))$ è isomorfo all'anello polinomiale su $H^\bullet(M)$ con generatore x e relazione $x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n = 0$, cioè è isomorfo a $H^\bullet(\mathbb{P}(E))$. □

Teorema 3.15. *Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione n. L'anello di coomologia della varietà delle bandiere $Fl(V)$ è*

$$H^\bullet(Fl(V)) = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]/\Big(\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) = 1\Big).$$

Dimostrazione. Sia E un fibrato vettoriale. Per (3.12) e per la Proposizione 3.13, il fibrato delle bandiere $Fl(E)$ è ottenuto dalla sequenza di $n-1$ proiettivizzazioni. Applicando la Proposizione 3.14 a (3.12), otteniamo

$$H^\bullet(\mathbb{P}(Q_1)) = H^\bullet(\mathbb{P}(E))[c(S_2), c(Q_2)]/(c(S_2)c(Q_2) = c(Q_1)) =$$

$$= H^\bullet(M)[c(S_1), c(Q_1), c(S_2), c(Q_2)]/(c(S_1)c(Q_1) = c(E),\ c(S_2)c(Q_2) = c(Q_1)) =$$
$$= H^\bullet(M)[c(S_1), c(S_2), c(Q_2)]/(c(S_1)c(S_2)c(Q_2) = c(E)).$$

Per induzione,

$$H^\bullet(\mathbb{P}(Q_{n-2})) = H^\bullet(M)[c(S_1), \ldots, c(S_{n-1}), c(Q_{n-1})]/(c(S_1)\cdots c(S_{n-1})c(Q_{n-1}) = c(E)).$$

Ponendo $x_i = c_1(S_i)$ per $i = 1, \ldots, n-1$ e $x_n = c_1(Q_{n-1})$, l'anello di coomologia del fibrato delle bandiere $Fl(E)$ è

$$H^\bullet(Fl(E)) = H^\bullet(M)[x_1, \ldots, x_n]/\Big(\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) = c(E)\Big).$$

Se pensiamo allo spazio vettoriale complesso V come al fibrato banale su un punto, allora l'anello di coomologia della varietà delle bandiere è

$$H^\bullet(Fl(V)) = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]/\Big(\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) = 1\Big).$$

□

Appendice A

Breve richiamo sulle varietà differenziabili e sui fibrati vettoriali

In questa appendice introdurremo brevemente le varietà differenziabili e la teoria dei fibrati vettoriali.

A.1 Varietà differenziabili

Una struttura differenziabile su una varietà è data da un atlante, cioè da un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di M nel quale ogni insieme aperto U_α è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ tramite un omeomorfismo $\phi_\alpha : U_\alpha \overset{\cong}{\to} \mathbb{R}^n$ e nell'intersezione $U_\alpha \cap U_\beta$ le funzioni

$$g_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sono diffeomorfismi di sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^n$. Richiediamo inoltre che l'atlante sia massimale rispetto alle inclusioni.
Assumiamo che tutte le varietà siano Hausdorff e a base numerabile.
La collezione $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ è detta *ricoprimento aperto coordinato* di M e ϕ_α è detta *trivializzazione* di U_α.
Siano $u_1, \ldots, u_n$ le coordinate standard di $\mathbb{R}^n$. Scriveremo $\phi_\alpha = (x_1, \ldots, x_n)$, dove $x_i = u_i \circ \phi_\alpha$ sono un sistema di coordinate per U_α.
Una funzione f è detta *differenziabile* se $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ è una funzione differenziabile su $\mathbb{R}^n$.
Se f è una funzione differenziabile su U_α, la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ è definita come la i-esima derivata parziale delle funzioni $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ su $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial (f \circ \phi_\alpha^{-1})}{\partial u_i}(\phi_\alpha(p)).$$

Lo *spazio tangente* ad M in p, che denoteremo con $T_p(M)$, è lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

generato dagli operatori $\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)$.
Un *campo vettoriale liscio* su U_α è una combinazione lineare

$$X_\alpha = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

dove le f_i sono funzioni lisce su U_α.
Osservazione A.1. Se prendiamo un altro sistema di coordinate $(y_1, \dots, y_n)$, allora

$$X_\alpha = \sum g_j \frac{\partial}{\partial y_j},$$

dove $\frac{\partial}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial}{\partial y_j}$ soddisfano la regola della catena:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Un campo vettoriale liscio su M può essere visto come una collezione di campi vettoriali X_α su U_α che concordano nell'intersezione $U_\alpha \cap U_\beta$.

Completiamo questo paragrafo parlando delle partizioni dell'unità su una varietà.

Definizione A.1. Una *partizione dell'unità* su una varietà M è una collezione di funzioni lisce non negative $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tale che

1. per ogni punto c'è un intorno nel quale $\sum \rho_\alpha$ è una somma finita;
2. $\sum \rho_\alpha = 1$.

Diamo per veri i seguenti fatti che ci torneranno utili in seguito[1]:

1. Dato un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di M, esiste una partizione dell'unità $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tale che il supporto di ρ_α è contenuto in U_α. Se vale ciò, diremo che $\{\rho_\alpha\}$ è una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$.
2. Dato un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di M, esiste una partizione dell'unità $\{\rho_\beta\}_{\beta \in J}$ a supporto compatto tale che il supporto di ρ_β sia contenuto in qualche U_α.

Osservazione A.2. In 1. il supporto di ρ_α non è detto sia compatto ma l'insieme degli indici di $\{\rho_\alpha\}$ è lo stesso di quello di $\{U_\alpha\}$. In 2., invece, è vero il contrario: il supporto di ρ_β è compatto ma può essere che $I \neq J$. In generale, non è detto che si possa avere che il supporto dei ρ_β sia compatto e che l'insieme degli indici di $\{\rho_\beta\}$ sia lo stesso di quello di $\{U_\alpha\}$.

Esempio 13. Prendiamo il ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$ costituito da un solo insieme aperto e chiamiamo anche quest'ultimo $\mathbb{R}$. Questo ricoprimento aperto chiaramente non può avere una partizione dell'unità a supporto compatto e subordinata al ricoprimento considerato.

[1]Per la dimostrazione c.f.r. [14] pag. 10.

A.2 Fibrati vettoriali

In questo paragrafo introduciamo i fibrati vettoriali e ne richiamiamo alcune proprietà. Sia $\pi : E \to M$ un'applicazione suriettiva tra varietà differenziabili la cui fibra $\pi^{-1}(x)$ è uno spazio vettoriale per ogni $x \in M$. L'applicazione π è un *fibrato vettoriale reale di rango* n se esiste un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di M e diffeomorfismi che preservano le fibre

$$\phi_\alpha : E_{|U_\alpha} = \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

che sono isomorfismi lineari sulle fibre. Le applicazioni

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$$

sono tali che per ogni $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, sulla fibra $\pi^{-1}(x)$, $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}|_{\{x\}\times\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sono automorfismi di $\mathbb{R}^n$ su ogni fibra e quindi danno luogo ad applicazioni

$$g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL_n(\mathbb{R}), \quad g_{\alpha,\beta}(x) = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}|_{\{x\}\times\mathbb{R}^n}.$$

Quindi un fibrato vettoriale è un fibrato di rango n con fibra $\mathbb{R}^n$ e gruppo struttura $GL_n(\mathbb{R})$.
Se la fibra è $\mathbb{C}^n$ e il gruppo struttura è $GL_n(\mathbb{C})$, il fibrato vettoriale è detto *fibrato vettoriale complesso*.
In generale, quando parliamo di fibrati vettoriali intendiamo fibrati vettoriali reali.
Sia U un aperto di M. Un'applicazione $s : U \to E$ è una *sezione* di un fibrato vettoriale E su U se $\pi \circ s$ è l'identità su U. Lo spazio di tutte le sezioni su U è $\Gamma(U, E)$.
Si noti che ogni fibrato vettoriale ha una sezione nulla globale ben definita.
Un insieme di sezioni $s_1, \ldots, s_n$ su un aperto U in M è una base su U se per ogni $x \in U$, $s_1(x), \ldots, s_n(x)$ forma una base per lo spazio vettoriale $E_x = \pi^{-1}(x)$.
L'insieme delle funzioni di transizione $\{g_{\alpha,\beta}\}$ è detta *cociclo* se soddisfa la condizione

$$g_{\alpha,\beta} \circ g_{\beta,\gamma} = g_{\alpha,\gamma} \text{ su } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$$

Il cociclo $\{g_{\alpha,\beta}\}$ dipende dalla banalizzazione.

Lemma A.3. *Se il cociclo $\{g'_{\alpha,\beta}\}$ è definito a partire da un'altra banalizzazione $\{\phi'_\alpha\}$, allora esistono delle applicazioni $\lambda_\alpha : U_\alpha \to GL_n(\mathbb{R})$ tali che*

$$g_{\alpha,\beta} = \lambda_\alpha g'_{\alpha,\beta} \lambda_\beta^{-1} \textit{ su } U_\alpha \cap U_\beta.$$

Dimostrazione. Le due banalizzazioni differiscono per una trasformazione non singolare di $\mathbb{R}^n$ in ogni punto, cioè

$$\phi_\alpha = \lambda_\alpha \phi'_\alpha, \quad \lambda_\alpha : U_\alpha \to GL_n(\mathbb{R}).$$

Quindi,

$$g_{\alpha,\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} = \lambda_\alpha \phi'_\alpha \phi'^{-1}_\beta \lambda_\beta^{-1} = \lambda_\alpha g'_{\alpha,\beta} \lambda_\beta^{-1}.$$

□

Due cocicli $\{g_{\alpha,\beta}\}$ e $\{g'_{\alpha,\beta}\}$ tali che

$$g_{\alpha,\beta} = \lambda_\alpha g'_{\alpha,\beta} \lambda_\beta^{-1}$$

sono detti equivalenti.
Dato un cociclo $\{g_{\alpha,\beta}\}$ con valori in $GL_n(\mathbb{R})$, possiamo costruire un fibrato vettoriale $\pi : E \to M$ che ha $\{g_{\alpha,\beta}\}$ come suo cociclo definendo

$$E = (\coprod U_\alpha \times \mathbb{R}^n)/(x, y) \sim (x, g_{\alpha,\beta}(x)y)$$

per $(x, y) \in U_\beta \times \mathbb{R}^n$ e $(x, g_{\alpha,\beta}(x)y) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n$.
Un omomorfismo tra due fibrati vettoriali è un'*applicazione tra fibrati* se $f : E \to E'$ è liscia, preserva le fibre ed è lineare sulle fibre.
Dato un fibrato vettoriale con cociclo $\{g_{\alpha,\beta}\}$, diciamo che il gruppo struttura di E può essere ridotto al sottogruppo $H < GL_n(\mathbb{R})$ se esiste un cociclo equivalente a valori in H.
Un fibrato vettoriale si dice *orientabile* se il suo gruppo struttura può essere ridotto al sottogruppo $GL_n^+(\mathbb{R})$ di $GL_n(\mathbb{R})$ i cui elementi sono matrici con determinante positivo.
Una banalizzazione $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ su E è detta *orientata* se per ogni α e β in I, le funzioni di transizione $g_{\alpha,\beta}$ hanno determinante positivo. Due banalizzazioni orientate $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ e $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ sono equivalenti se per ogni $x \in U_\alpha \cap V_\beta$,

$$\phi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

ha determinante positivo.
Quella appena definita è una relazione di equivalenza e su una varietà connessa M questa relazione divide tutte le banalizzazioni orientate di un fibrato vettoriale in due classi di equivalenza. La scelta di una delle due classi di equivalenza è chiamata *orientazione* del fibrato vettoriale.

Esempio 14. Sia M una varietà differenziabile. Incollando a ogni punto $x \in M$ lo spazio tangente a M in x otteniamo il *fibrato tangente*:

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M.$$

Sia $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ un atlante per M. Il diffeomorfismo

$$\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$$

induce un'applicazione

$$(\phi_\alpha)^* : T_{U_\alpha} \to T_{\mathbb{R}^n},$$

che dà una banalizzazione locale del fibrato tangente T_M. Da questa osservazione deduciamo che le funzioni di transizione di T_M sono gli Jacobiani delle funzioni di transizione

di M. Quindi, M è orientabile come varietà differenziabile se e soltanto se il suo fibrato tangente è orientabile come fibrato.
Se $\phi_\alpha = (x_1, \ldots, x_n)$, allora $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ è una base per T_M su U_α. Nel linguaggio dei fibrati, un campo vettoriale liscio su U_α è una sezione liscia del fibrato tangente su U_α.

Mostriamo ora che il gruppo struttura di ogni fibrato vettoriale reale $\pi : E \to M$ può essere ridotto al gruppo ortogonale, cioè dimostriamo la seguente proposizione.

Proposizione A.4. *Il gruppo struttura di un fibrato vettoriale reale di rango n può essere sempre ridotto a $O(n)$. Può essere ridotto a $SO(n)$ se e soltanto se il fibrato vettoriale è orientabile.*

Dimostrazione. Per prima cosa, dotiamo E di una metrica, cioè una forma lineare simmetrica positiva che varia in maniera liscia su ogni fibra, come segue. Sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento aperto di M che banalizza E. Su ogni U_α, scegliamo una base ortonormale per $E_{|U_\alpha}$. Queste definisce una struttura Riemanniana su $E_{|U_\alpha}$. Sia $\langle\, , \rangle_\alpha$ il prodotto interno su $E_{|U_\alpha}$. Ora usiamo una partizione dell'unità $\{\rho_\alpha\}$ tale che

$$\langle\, , \rangle = \sum \rho_\alpha \langle\, , \rangle_\alpha .$$

Consideriamo $\langle\, , \rangle$ come prodotto interno su M.
Come banalizzazioni di E prendiamo solo quelle applicazioni ϕ_α che mandano la base ortonormale di E (relativa alla metric globale $\langle\, , \rangle$) nella base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Una tale applicazione esiste per il Teorema di Gramm-Schmidt. Quindi le funzioni di transizione preservano le basi ortonormali e perciò prendono valori nel gruppo ortogonale $O(n)$.
Se il determinante di $g_{\alpha,\beta}$ è positivo, allora $g_{\alpha,\beta}$ prenderà valori nel gruppo ortogonale speciale $SO(n)$. Questo conclude la dimostrazione della proposizione. $\square$

Se $\pi : E \to M$ e $\pi' : E' \to M$ sono fibrati vettoriali di rango rispettivamente n e m, la loro *somma diretta* è un fibrato vettoriale $\pi \oplus \pi' : E \oplus E' \to M$ la cui fibra su un punto $x \in M$ è $E_x \oplus E'_x$. Le banalizzazioni locali $\{\phi_\alpha\}$ e $\{\phi'_\alpha\}$ per E e E' rispettivamente, inducono una banalizzazione locale per $E \oplus E'$:

$$\phi_\alpha \oplus \phi'_\alpha : E \oplus E'|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times (\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m).$$

Quindi le matrici di transizione per $E \oplus E'$ sono

$$\begin{pmatrix} g_{\alpha,\beta} & 0 \\ 0 & g'_{\alpha,\beta} \end{pmatrix}.$$

In modo analogo, possiamo definire il prodotto tensoriale $\pi \otimes \pi' : E \otimes E' \to M$, il duale E^* e $Hom(E, E')$. Si noti che $Hom(E, E')$ è isomorfo a $E^* \otimes E'$. Il prodotto tensoriale ha matrici di transizione $\{g_{\alpha,\beta} \otimes g'_{\alpha,\beta}\}$, ma le matrici di transizione per il duale non sono

così immediate.
Ricordiamo che il duale V^* di uno spazio vettoriale reale V è lo spazio di tutti i funzionali su V, cioè $V^* \cong Hom(V, \mathbb{R})$, e che un'applicazione lineare $f : V \to W$ induce un'applicazione $f^t : W^* \to V^*$ rappresentata dalla matrice trasposta di f. Se

$$\phi_\alpha : E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

è una banalizzazione per E, allora

$$(\phi_\alpha^t)^{-1} : E^*|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times (\mathbb{R}^n)^*$$

è una banalizzazione per E^*. Quindi, le funzioni di transizione per E^* sono

$$(\phi_\alpha^t)^{-1} \circ \phi_\beta^t = ((\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})^t)^{-1} = (g_{\alpha,\beta}^t)^{-1}.$$

Siano M e N varietà differenziabili e $\pi : E \to M$ un fibrato vettoriale su M. Un'applicazione $f : N \to M$ induce un fibrato vettoriale $f^{-1}E$ su N chiamato *pull-back di E* tramite f. Il fibrato $f^{-1}E$ è il sottoinsieme di $N \times E$ definito da

$$\{(n, e) \in N \times E \mid f(n) = \pi(e)\},$$

cioè è l'unico sottoinsieme massimale di $N \times E$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \xrightarrow{f} & M. \end{array}$$

La fibra di $f^{-1}E$ su un punto $y \in N$ è isomorfa a $E_{f(y)}$. Siccome il pull-back di un fibrato prodotto è un fibrato prodotto, $f^{-1}E$ è localmente banale e quindi $f^{-1}E \to N$ definisce un fibrato vettoriale. Inoltre, se consideriamo la composizione

$$M \xrightarrow{g} M' \xrightarrow{f} M'',$$

allora

$$(f \circ g)^{-1}E = g^{-1}(f^{-1}E).$$

Osservazione A.5. Sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento aperto che banalizza E e $g_{\alpha,\beta}$ le funzioni di transizione. Allora $\{f^{-1}U_\alpha\}$ è un ricoprimento aperto che banalizza $f^{-1}E$ su N e

$$(f^{-1}E)|_{f^{-1}U_\alpha} \cong f^{-1}(E|_{U_\alpha}).$$

Quindi le funzioni di transizione per $f^{-1}E$ sono $f^* g_{\alpha,\beta}$.

Concludiamo questo paragrafo con la seguente proposizione.

Proposizione A.6. *Se* $0 \to S \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} Q \to 0$ *è una successione esatta corta di fibrati vettoriali, allora* $V \simeq S \oplus Q$.

Dimostrazione. Scegliamo una metrica su V. Otteniamo $V = S \oplus S^\perp$. La proiezione p definisce un isomorfismo di $S^\perp$ con Q. $\square$

Bibliografia

[1] J. Berndt, *Lie Group Actions on Manifolds*, Lecture notes, Tokio (2002).

[2] W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, New York (1975).

[3] R. Bott, L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, New York (1982).

[4] M. Cornalba, *Note di Geometria Differenziale*, $http://www-dimat.unipv.it/cornalba/dispense/geodiff.pdf$.

[5] G. de Rham, *Variétés Différentiables*, Hermann, Paris (1960).

[6] W. Geub, S. Halperin, R. Vanstone, *Connections, Curvature and Cohomology*, vol. 1 (De Rham Cohomology of Manifolds and Vector Bundles), Academic Press, New York (1972).

[7] V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1974).

[8] N. Hitchin, *Differentiable Manifolds*, $http://people.maths.ox.ac.uk/\ hitchin/hitchinnotes/Differentiable\_manifolds/Chapter_1.pdf$.

[9] J. E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Springer-Verlag, New York (1972).

[10] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer (2002).

[11] A.-L. Mare, *An Introduction to Flag Manifolds*, Notes for Summer School on Combinatorial Models in Geometry and Topology of Flag Manifolds, Regina (2007).

[12] C. Procesi, *Geometria Differenziale*, $http://www.mat.uniroma1.it/people/procesi/appunti.html$.

[13] E. Sernesi, *Geometria 2*, Bollati-Boringhieri, Torino (1994).

[14] F. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, New York (1983).

Ringraziamenti

La prima persona che devo ringraziare è la persona che giorno per giorno, mano nella mano, cammina con me sulla strada della Vita: Giacomo Patrizi. Ringrazio mia sorella Erika che mi ha fornito preziosi consigli e che, nonostante i suoi impegni e problemi, ha sempre trovato tempo ed energie da dedicarmi. Scherzando ho detto a mia sorella che nei Ringraziamenti l'avrei ringraziata ogni tre persone; per ovvi motivi non lo faccio anche se dovrei dato che mi è sempre stata vicino anche dalla lontana America. Ringrazio i miei genitori, che sono stati sempre al mio fianco e che nelle difficoltà hanno sempre cercato di sostenermi e di incoraggiarmi; in particolare ringrazio mia madre che mi ha trasmesso la passione per la Matematica. Ringrazio i miei amici Andrea Cesari, Marcello Labombarda e Silvia Poppi perché so di poter sempre contare su di loro. Ringrazio Marisa Clementi perché ha cercato sempre di capirmi e di consigliarmi. Ringrazio i due professori di Matematica che mi hanno accompagnato durante il Liceo: Giorgio Cabianca e Irene Foresti. Ringrazio tutti i professori universitari che mi hanno permesso di approfondire le mie conoscenze matematiche, in particolare Angelo Vistoli, Mirella Manaresi, Marta Morigi, Sandro Graffi, Piero Plazzi, Angelo Cavallucci, Massimo Ferri, Giulio Casciola e Ermanno Lanconelli.
Un ringraziamento particolare lo devo ai due relatori che ho avuto nel mio percorso universitario: Libero Verardi e Luca Migliorini. Il primo è stato il mio relatore della Laurea Triennale, da lui ho imparato tantissimo, sia come conoscenze matematiche, sia dal lato umano; il secondo è il mio relatore della Laurea Specialistica e lo ringrazio per l'infinita pazienza che ha avuto nei miei confronti.
Chiedo infine scusa e ringrazio tutte le persone che non ho sopra citato ma che mi sono state vicino nelle difficoltà, comprese quelle che dall'alto mi sorridono.