

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea specialistica in Matematica

SULLA NON AUTENTICITÀ DELLE DEFINIZIONI DI EUCLIDE

Tesi di Laurea in Storia del pensiero scientifico

Relatore:
Chiar.mo Prof.
SANDRO GRAFFI

Presentata da:
ROCCO DEDDA

III Sessione
Anno Accademico 2008/09

Introduzione

Esistono almeno tre ragioni che ci portano a dedurre che il pensiero scientifico greco, finora pienamente conosciuto da pochi specialisti e per lo più trascurato da classicisti, storici e scienziati, sia in realtà di grande interesse generale:

- la conoscenza della civiltà ellenistica;
- la comprensione di aspetti storiografici quali il ruolo di Roma, le ragioni che hanno portato alla decadenza della tecnologia nel medioevo, le caratteristiche e i limiti della moderna Rinascita scientifica;
- la rilevanza per alcuni problemi attuali quali i rapporti tra scienza e tecnologia e altri aspetti della società moderna, la struttura interna della scienza, l'origine e il possibile superamento dell'attuale frattura tra cultura umanistica e cultura scientifica.

L'importanza della nascita della scienza, che ha svolto un ruolo centrale nella nostra civiltà, è paradossalmente quasi mai percepita malgrado si possa credere che sia considerata un nodo fondamentale della storia dell'uomo.

Possiamo conoscere la scienza ellenistica del periodo aureo solo attraverso il filtro dei redattori dell'età imperiale e medievali. Essi non solo ci hanno conservato solo le opere più elementari, ma ne hanno anche alterato il testo adattandolo alle proprie concezioni, basate sulla filosofia pre-ellenistica. Il risultato è stato spesso quello di deformare la scienza ellenistica a tal punto da determinarne una grave sottovalutazione.

In questo contesto è possibile discutere la non autenticità delle definizioni degli enti geometrici fondamentali (punto, retta, piano) presenti negli *Elementi* di Euclide, tema centrale della dissertazione.

In particolare, è possibile spiegare la corruzione del trattato euclideo attraverso l'inserimento, avvenuto in età imperiale, di alcuni brani presenti in un'opera di Erone di Alessandria: le *Definizioni*.

Nelle prossime pagine verranno discussi diversi argomenti ai fini di ricostruire l'inserimento negli *Elementi* di Euclide delle definizioni degli enti primitivi. Verranno preliminarmente riportati cenni storici sull'ellenismo e lo sviluppo delle teorie scientifiche, da un punto di vista storico-tecnico, avvenuto nello stesso periodo. Verranno inoltre descritti gli *Elementi* di Euclide e le *Definizioni* di Erone.

Indice

Introduzione	i
1 L'ellenismo	1
1.1 Cenni storici	1
1.2 Il confronto con la Grecia classica	4
1.2.1 La nascita delle teorie scientifiche nell'ellenismo e le relazioni con l'età classica	4
1.2.2 Il salto di qualità della scienza ellenistica	6
1.2.3 Le origini della scienza ellenistica	8
1.3 Il metodo dimostrativo	9
1.3.1 Le origini della dimostrazione scientifica	10
1.3.2 I postulati	12
1.3.3 Le definizioni	13
2 Gli <i>Elementi</i> di Euclide	17
2.1 Euclide	17
2.2 Introduzione agli <i>Elementi</i>	20
2.3 Il corpo dell'opera	22
2.3.1 I tredici libri degli <i>Elementi</i>	22
2.3.2 I postulati e le nozioni comuni	24
2.3.3 Le proposizioni: teoremi e problemi	26
2.4 Le definizioni del libro I	29
2.4.1 Critica delle prime sette definizioni	30

3	Le <i>Definizioni</i> di Erone	33
3.1	Erone d'Alessandria	33
3.2	Le <i>Definizioni</i>	34
3.2.1	La prefazione all'opera	34
3.2.2	Le corrispondenze con le definizioni di Euclide	35
4	Sulla non autenticità delle definizioni di Euclide	37
4.1	Plausibilità della derivazione da Erone	38
4.1.1	L'attendibilità degli <i>Elementi</i> di Euclide	38
4.1.2	Le possibili fonti di Erone	39
4.1.3	Analogie tra le <i>Definizioni</i> e il commentario di Erone agli <i>Elementi</i>	40
4.2	Le motivazioni metodologiche	41
4.3	Analisi di due definizioni degli <i>Elementi</i>	43
4.3.1	La definizione 15 degli <i>Elementi</i>	43
4.3.2	La definizione 22 degli <i>Elementi</i>	44
4.3.3	Osservazioni	46
4.4	L'analisi delle fonti	47
4.5	Confronto tra le due serie di definizioni	50
4.6	Conclusioni	53
	Bibliografia	55

Capitolo 1

L'ellenismo

1.1 Cenni storici

Il periodo ellenistico comincia nel 323 a.C. con la morte di Alessandro Magno e la successiva dissoluzione del suo impero.

La conseguente disgregazione portò alla nascita di varie entità politiche che gradualmente si costituirono come regni autonomi.

I tre stati principali, nati da tale evoluzione, furono:

- l'Egitto, con capitale nella nuova città di Alessandria (fondata da Alessandro nel 331 a.C.) retto dalla dinastia dei Tolomei, che governavano anche Cipro, la Cirenaica, la Fenicia e la Palestina;
- lo stato dei Seleucidi, con capitale nella città di Antiochia, che comprendeva la Siria, quasi tutta l'Asia minore e, a partire dal 200 a.C., anche la Fenicia e la Palestina;
- lo stato degli Antigonidi, comprendente la Macedonia e alcune città della Grecia.

Tra gli stati minori vanno menzionati il regno di Pergamo, retto dalla dinastia degli Attalidi, il Ponto e la Bitinia.

La produzione della civiltà ellenistica, tuttavia, non è dovuta solo ai Greci abitanti degli stati nati dalla disgregazione dell'Impero Alessandrino. Di-

verse città greche autonome, distribuite in tutto il mediterraneo, infatti, contribuirono allo sviluppo della civiltà ellenistica. Tra i centri autonomi più attivi in questo senso ci furono Rodi, Siracusa e Marsiglia.

La scienza ellenistica 'esplose' nel III secolo a.C. ed è, comunque, spesso ricordata come 'alessandrina', in quanto aveva il suo centro principale in Alessandria, soprattutto grazie all'opera di Tolomeo I Sotèr (che regnò dal 323 al 283 a.C.) e di Tolomeo II Filadelfo (che regnò dal 283 al 246 a.C.). Ad Alessandria lavorarono diverse menti geniali che segnarono inevitabilmente la civiltà ellenistica, denotandone i connotati riguardo la rilevanza che si attribuisce a questo periodo per l'evoluzione scientifica dell'uomo.

Ad Alessandria, intorno alla fine del IV sec a.C. lavorò ed insegnò Euclide, il celebre autore degli *Elementi* che a distanza di secoli risulta ancora uno degli autori più letti della storia dell'umanità.¹ Nella prima metà del III sec a.C. vissero ad Alessandria Ctesibio, Erofilo di Calcedonia e Aristarco di Samo: il primo viene ricordato come fondatore della pneumatica e iniziatore della scuola dei meccanici alessandrini; ad Erofilo, invece viene attribuito il ruolo di fondatore dell'anatomia e della fisiologia scientifiche; Aristarco è famoso soprattutto per aver elaborato la teoria eliocentrica, presente nella sua opera *Sulle dimensioni e le distanze del Sole e della Luna*.² Ad Alessandria studiò molto probabilmente Archimede, uno degli scienziati più prolifici del periodo ellenistico. Archimede rimase anche da Siracusa in continuo contatto epistolare con gli scienziati alessandrini. Spostandoci verso la seconda metà del III sec a.C., sono degni di nota scienziati del calibro di Eratostene e Filone di Bisanzio. Eratostene, che fu, tra l'altro, bibliotecario di Alessandria, effettuò la prima vera misurazione del raggio della Terra che fu descritta nella sua opera *Sulle dimensioni della Terra*, che però non ci è giunta. Filone di Bisanzio fu, invece, continuatore del lavoro di Ctesibio. A cavallo tra la fine del secolo e l'inizio del successivo lavorò ad Alessandria Apollonio di Perga, che giocò un ruolo fondamentale per lo sviluppo della teoria delle sezioni

¹Approfondimenti su Euclide e gli *Elementi* sono presenti nel secondo capitolo.

²I dati osservativi di Aristarco saranno utilizzati nel II sec d.C. da Tolomeo, il più celebre astronomo dell'antichità, autore dell'*Almagesto*.

coniche. Il suo celebre trattato, le *Coniche*, non è pervenuto nella versione completa.

Il II sec a.C. segnò una rapida decadenza degli studi scientifici, in seguito alla conquista dei centri dell'ellenismo da parte dei Romani iniziata a partire dal 212 a.C. (saccheggio di Siracusa e uccisione di Archimede). In particolare l'attività scientifica ad Alessandria decadde drammaticamente nel 145-144 a.C. in seguito ad una feroce persecuzione della classe dirigente greca da parte di Tolomeo VIII (Evergete II), appena salito al trono, che continuò anche successivamente a svolgere una politica ostile alla comunità greca di Alessandria. Le fonti storiche a nostra disposizione non sono sufficienti per un'accurata descrizione delle cause che portarono a tale persecuzione. Tuttavia Evergete II aveva goduto dell'aiuto dei Romani già prima di ottenere il trono ed è quindi legittimo pensare che fosse diventato uno strumento della politica di Roma, particolarmente violenta, di espansione nel Mediterraneo.³

L'unificazione di tutto il Mediterraneo sotto il dominio di Roma fu raggiunta nel 30 a.C con l'annessione dell'Egitto. Questo evento è solitamente considerato il termine dell'ellenismo, cui si fa seguire il 'periodo imperiale'. Tuttavia, la cultura ellenistica sopravvisse nell'età imperiale. Per questo motivo a volte si continua ad usare il termine ellenismo per identificare la cultura di quella parte dell'impero romano nella quale la lingua dominante continuò ad essere il greco e in cui, da un punto di vista culturale, tecnologico ed economico, vi fu una maggiore continuità con il periodo precedente rispetto alle somiglianze con l'Occidente latino.

Tra il I e il II sec d.C. la 'pax romana' permise una parziale ripresa degli studi scientifici, grazie soprattutto a scienziati come Erone, Tolomeo e Galeno. In seguito, il declino diventò inarrestabile.

Alessandria restò comunque il principale centro della residua attività scientifica ancora per un paio di secoli.

³Questa ipotesi sembra confermata da un'iscrizione di Delo, contenente la dedica di una statua a un generale di Evergete II, da parte di commercianti romani, come segno di riconoscenza per i 'benefici loro concessi quando Alessandria fu presa dal re Tolomeo Evergete' (Evergete II). L'iscrizione è riportata in [1], vol. II, p. 217.

Dello straordinario sviluppo scientifico ellenistico ci sono rimaste solo poche opere e frammenti. Esistono tuttavia fonti non originali risalenti al IV sec d.C. e documenti datati successivamente al II sec a.C. D'altra parte, nella consultazione di scritti risalenti al periodo imperiale occorre però grande cautela a causa della profonda involuzione subita in quel periodo dalla metodologia scientifica.

1.2 Il confronto con la Grecia classica⁴

L'ellenismo giocò senza dubbio un ruolo fondamentale nell'evoluzione della scienza. Ciò non va però inteso nel senso che nessun elemento del metodo scientifico sia apparso prima del 323 a.C.. Molte caratteristiche della scienza, infatti, appaiono certamente nel periodo precedente, in particolare negli sviluppi della geometria e dell'astronomia greche durante il V e il IV sec a.C..

1.2.1 La nascita delle teorie scientifiche nell'ellenismo e le relazioni con l'età classica

L'importanza dell'ellenismo per l'evoluzione della scienza moderna è legata particolarmente alla caratterizzazione delle 'teorie scientifiche'.

Una teoria si può definire 'scientifica' se rispecchia le seguenti caratteristiche:

- esprime affermazioni non riguardanti oggetti concreti, ma enti teorici specifici. La geometria euclidea, ad esempio, può esprimere affermazioni riguardo angoli, segmenti o punti, ovvero su oggetti che non esistono in natura.
- Ha una struttura rigorosamente deduttiva, ovvero, è costituita da pochi enunciati fondamentali sui propri enti caratteristici e da un metodo unitario universalmente accettato per dedurne un numero illimitato di

⁴Il contenuto di questo paragrafo è tratto da [2], capitoli 1-2.

conseguenze. Tale metodo, detto ‘metodo dimostrativo’, garantisce la ‘verità’ delle affermazioni di una teoria scientifica.⁵

- Le applicazioni al mondo reale sono basate su regole di corrispondenza tra gli enti della teoria e gli oggetti concreti. Il metodo fondamentale per controllare l’applicabilità della teoria è il ‘metodo sperimentale’. Tuttavia, a differenza delle affermazioni interne alla teoria, le regole di corrispondenza non forniscono alcuna garanzia assoluta.

L’esplosione delle teorie scientifiche si ebbe nel corso del III sec a.C. e segnò, da un punto di vista scientifico, un’innovazione rispetto ai secoli precedenti, imponendosi come caratteristica essenziale della civiltà ellenistica.

E’ possibile dedurre logicamente da quando detto che la cultura greca classica non abbia prodotto teorie scientifiche. Tale affermazione, in realtà, richiede qualche precisazione:

- ai Greci va riconosciuto il merito di spiegare fenomeni con enti non osservabili a causa dell’assenza di mezzi sperimentali adeguati e, soprattutto, della mancanza dei nostri strumenti concettuali raffinati. E’ il caso, ad esempio, della teoria atomistica di Democrito e Leucippo. Tale approccio rappresenta un passo di enorme importanza verso la costruzione di teorie scientifiche.
- Dal pensiero greco del periodo classico nascono molte di quelle che rimarranno idee guida nella scienza, sia ellenistica che moderna. E’ il caso, ad esempio, del determinismo che sembra risalire a Leucippo, o della distinzione tra qualità primarie e qualità secondarie, presente in Democrito. Tale distinzione diventerà una base essenziale per la formulazione di teorie quantitative di fenomeni quali i suoni, i colori, o le proprietà chimiche delle sostanze.

⁵Il concetto di ‘metodo dimostrativo’ e il suo utilizzo nel periodo ellenistico saranno approfonditi nel paragrafo 1.3

- la scienza deve agli antichi atomisti, oltre al concetto generico e al nome di 'atomo', idee come quella del moto caotico (idea sviluppata nel periodo ellenistico e ripresa in epoca moderna e che fu essenziale per la nascita della teoria cinetica dei gas). Idee più specifiche come questa, spesso considerate scientifiche, appaiono già nel pensiero dei cosiddetti Presocratici.

1.2.2 Il salto di qualità della scienza ellenistica

Nonostante molte idee dei filosofi presocratici sembrano vicine al successivo metodo scientifico ellenistico, non è in nessun caso documentabile, nell'età classica, l'uso di complete teorie ipotetico-deduttive né del metodo sperimentale.

Per evidenziare il passo fondamentale compiuto dall'ellenismo nell'elaborazione di teorie scientifiche rispetto alla filosofia naturale aristotelica, riportiamo qui di seguito un passo di Aristotele riguardante lo studio dei moti:

Se poi [la forza] A muoverà B nel tempo T secondo la lunghezza L, la metà di A, cioè E, non muoverà B nel tempo T né in una parte del tempo T secondo una parte della lunghezza L che sia rispetto all'intero L nella stessa proporzione in cui è la forza A rispetto alla forza E.[...] se fosse altrimenti, un uomo solo muoverebbe una nave, qualora venissero numericamente divise la forza di quelli che la tirano a secco e la lunghezza secondo cui tutti la muovono.⁶

Il problema di Aristotele è quello di stabilire la relazione quantitativa tra forza, tempo e spostamento. Utilizzando il metodo scientifico si possono risolvere problemi del genere solo in due modi:

- assumendo una relazione data come 'principio'. In tal caso il metodo sperimentale risulta essenziale per controllare che i fenomeni di cui si

⁶Aristotele, *Physica*, VII, 5, 250a.

vuole costruire il modello avvengano come si può prevedere per mezzo della corrispondenza al principio enunciato.

- Deducendo, con il metodo dimostrativo, la relazione cercata in una teoria preesistente.

Tuttavia Aristotele non può usare né il metodo dimostrativo né il metodo sperimentale, in quanto non ha, né vuole costruire, una teoria scientifica. Gli enti di cui parla (forze, tempi e lunghezze) sono da lui concepiti come oggetti concreti, quindi non interni ad una teoria. E' possibile stabilire le loro reciproche relazioni solo attraverso la speculazione filosofica. Inoltre egli accenna ad un dato empirico (l'impossibilità per un uomo solo di spostare una nave). L'accenno è essenzialmente illustrativo poichè l'argomentazione decisiva sarà che la parte considerata di forza agisce in modo diverso a seconda che sia isolata o inserita nel tutto, perchè nel secondo caso la parte esiste solo in potenza. L'obiettivo consiste quindi nel dedurre affermazioni quantitative su particolari fenomeni fisici direttamente da principi filosofici generali, trovati grazie all'osservazione qualitativa della natura.

La superiorità del metodo 'scientifico', nel senso già spiegato, sulla filosofia naturale, è riscontrabile nella confutazione dell'argomentazione aristotelica, molto persuasiva, da parte di Archimede. Questi avrebbe progettato, all'interno della sua teoria della meccanica, un congegno con il quale un uomo solo (se stesso o, secondo altre fonti, il sovrano Gerone II) avrebbe potuto spingere in acqua una nave tirata in secco nel porto di Siracusa. La macchina effettuava la divisione delle forze che l'argomentazione aristotelica riteneva impossibile. L'episodio è riportato da Proclo⁷ e da Plutarco, in una versione leggermente diversa.⁸

Il valore metodologico dell'esperimento dimostrativo risulta, naturalmente, indipendente dall'eventuale volontà di Archimede di fare esplicito riferimento ad Aristotele.

⁷[9], 63.

⁸Plutarco, *Vita Marcelli*, xiv, 8.

Anziché riflettere il mondo nella speculazione filosofica, il nuovo metodo scientifico aveva permesso di cambiarlo. La macchina progettata da Archimede annullava l'impossibilità osservativa da Aristotele.

1.2.3 Le origini della scienza ellenistica

L'esplosione scientifica avvenuta con l'ellenismo è dovuta anche al nuovo tipo di relazioni instauratesi tra i Greci e le antiche civiltà egiziana e mesopotamica nel corso del III sec a.C.. I Greci dell'età classica, che avevano creato, oltre alla filosofia naturale, la storiografia, il teatro, la democrazia politica e i capolavori della letteratura e dell'arte che tutti conoscono, erano comunque ancora inferiori agli abitanti dell'Egitto e della Mesopotamia da un punto di vista tecnologico. Tale asserzione è posta in risalto da alcune frasi di Charles Singer, presenti nell'epilogo del secondo volume della *Storia della tecnologia*, riportate qui di seguito:

Qualunque sia il punto di vista sulla bellezza e sull'interesse dell'arte, della letteratura, dell'etica e del pensiero della Grecia e di Roma, non è più possibile sostenere che la loro tecnologia fosse superiore a quella degli antichi imperi [...].

La curva della capacità tecnologica tende a scendere piuttosto che a salire, con l'avvento delle culture classiche. Per sincerarsene basta confrontare i capitoli specifici del primo volume con i corrispondenti capitoli del presente volume [...].

La Grecia e Roma poggiarono la loro potenza sulla distruzione delle civiltà più antiche [...]. L'ascesa del popolo ellenico e di quello romano [...] fu principalmente una vittoria su una logora ma antica civiltà.⁹

⁹[3], vol. II, pp. 766-767.

Le conclusioni di Singer appaiono ottenute dalla sovrapposizione di due elementi di natura molto diversa:

- la constatazione che la tecnologia degli antichi imperi fosse superiore a quella della Grecia classica e a quella in uso a Roma;
- la constatazione che Roma abbia poggato la propria potenza sulla distruzioni di civiltà superiori.

Le tradizioni delle civiltà più antiche avevano sempre attirato l'interesse dei Greci. Non a caso si era attribuito a Talete e a Pitagora l'inizio della matematica ellenistica. Di entrambi si diceva che fossero stati in Egitto (e di Pitagora anche in Oriente). Nel III sec a.C. i contatti divennero molto più intensi. In seguito alla nascita dei nuovi regni sorti dalle conquiste alessandrine, molti Greci, ivi trasferiti, dovettero gestire e controllare economie e tecnologie più sviluppate, a cui non erano abituati, con la guida dei raffinati metodi di analisi razionale sviluppati negli ultimi secoli della loro tradizione culturale. In questo contesto nacque la scienza.

1.3 Il metodo dimostrativo

Come accennato nel precedente paragrafo, una caratteristica essenziale delle teorie scientifiche esplose nell'ellenismo è il metodo dimostrativo, cioè una tecnica che permette di dedurre affermazioni da altre affermazioni. Accettando le premesse non si possono rifiutare le conclusioni, a meno che non si trovi un errore nella deduzione.

In questo paragrafo verrà descritto il metodo dimostrativo, sia da un punto di vista storico (verrà analizzata l'origine della dimostrazione scientifica), sia da un punto di vista tecnico, in particolare per quanto riguarda le 'definizioni' dei termini scientifici, che divideremo in due tipologie: 'platonico-essenzialiste' e 'nominalista-costruttiviste'.

Tali argomenti sono utili ai fini della trattazione per due motivi:

- per comprendere la struttura degli *Elementi* di Euclide, analizzata in dettaglio nel secondo capitolo;
- perchè la discussione sulla non autenticità delle definizioni di Euclide, tema centrale della dissertazione, avrà tra i suoi punti critici la scelta di alcune definizioni di stampo platonico-essenzialista, da parte dell'autore degli *Elementi*, che risulterà incoerente con la sua condivisione della concezione nominalista-costruttivista.

1.3.1 Le origini della dimostrazione scientifica

Il verbo italiano 'dimostrare' è un calco, attraverso il latino, del termine greco *αποδεικνυμι*. Il sostantivo corrispondente, *αποδειξις*, ha come significato originario quello di 'esposizione' di un oggetto o di un argomento.

L'evoluzione dal significato generico a quello scientifico accompagnò la formazione e il consolidarsi del metodo scientifico.

Tale formazione è passata attraverso almeno due fasi intermedie, esemplificabili con gli usi del termine da parte di Platone e Aristotele:

- nelle opere di Platone il termine assume il significato di 'argomentazione razionale' idonea a convincere l'interlocutore. Ad esempio, nell'*Ippia minore*, Ippia propone di 'dimostrare' che Omero ha rappresentato Achille migliore di Ulisse;¹⁰ nella *Repubblica*, invece, vengono proposte varie 'dimostrazioni' della possibile realizzazione del modello esposto di stato.
- Nelle opere logiche di Aristotele, invece, al termine viene associato il carattere di assoluta inconfutabilità che oggi è considerato necessario nelle dimostrazioni matematiche. Questa nuova caratterizzazione è presente negli *Analytica priora*, in cui si analizzano i sillogismi.¹¹ Aris-

¹⁰Platone, *Ippia minore*, 369c.

¹¹*Analytica priora*, I, i, 24a, 11-15.

totele definisce la dimostrazione come un sillogismo vero (un sillogismo le cui premesse sono vere).

Per una descrizione precisa dell'evoluzione dell' $\alpha\pi\omicron\delta\epsilon\iota\chi\iota\varsigma$, dalla generica argomentazione alla 'dimostrazione sillogistica' aristotelica, non basterebbe un riesame di buona parte della storia della filosofia greca. Difatti, tale evoluzione dovette molto allo sviluppo della retorica deliberativa e giudiziaria, ossia all'arte di argomentare in modo convincente nelle assemblee e nei tribunali, sviluppatasi in particolare nel V sec a.C. nelle democrazie greche.

Aristotele spiega il rapporto tra retorica e dimostrazione nella *Retorica*. Nell'opera l'autore presenta la retorica, in larga misura, come un'applicazione degli strumenti da lui elaborati nelle opere di logica. E' importante osservare che l'ordine storico era stato evidentemente l'inverso. Infatti, i trattati di arte retorica avevano preceduto di circa un secolo le opere di logica.

L'origine di alcuni schemi deduttivi, come quello che, in epoca medievale, era chiamato *consequentia mirabilis*, è riscontrabile nella retorica del V sec a.C.. Il *consequentia mirabilis*, che è una variante della dimostrazione per assurdo, consiste nel dimostrare un'affermazione a dimostrando che non- a implica a . Il *consequentia mirabilis* era stato utilizzato da Protagora e Gorgia.¹²

Il nesso tra dimostrazione e retorica è ancora riscontrabile in epoca imperiale, quando la retorica era ormai utilizzata solo a scopo giudiziario.

La dimostrazione sillogistica fu un elemento importante del metodo scientifico, ma dovette combinarsi con altri elementi.

Una teoria scientifica ellenistica, infatti, è molto diversa da una raccolta di sillogismi, poichè:

- le affermazioni di una teoria scientifica costituiscono un'unica rete, essendo tutte dimostrabili da un piccolo numero di premesse.
- Le teorie scientifiche utilizzano termini 'teorici' specifici della teoria. Non basta, come nel caso dei sillogismi, saper dedurre un'affermazione

¹²La storia del *consequentia mirabilis* è esaminata in [4].

da altre, ma bisogna scegliere opportunamente le premesse e i termini del discorso.

- Nella costruzione di teorie scientifiche risultò essenziale l'uso di elementi diversi dall'argomentazione verbale, tratti dalle attività tecniche. E' il caso, ad esempio, delle 'costruzioni' presenti nelle dimostrazioni geometriche.

1.3.2 I postulati

Come abbiamo accennato più volte nel corso di questo capitolo, il metodo scientifico è caratterizzato da un piccolo numero di premesse da cui dimostrare tutte le affermazioni di una data teoria. Tali premesse erano dette *αιτηματα* ('postulati', ossia richieste) o anche *υποθεσεις* ('ipotesi').

Le assunzioni iniziali delle teorie scientifiche ellenistiche non sono né ovvie né verificabili.

Difatti, molti autori, sia nell'antichità che in età moderna, hanno ritenuto opportuno assumere come ipotesi le affermazioni più semplici e più facilmente verificabili.

Tuttavia, un criterio del genere non risulta affatto funzionale. Infatti, le affermazioni che appaiono più semplici possono risultare non utilizzabili per dedurre affermazioni interessanti. E' il caso, ad esempio, dell'assunzione in astronomia della fissità della Terra. Una scelta del genere può risultare ovvia, ma può non offrire una base particolarmente utile per descrivere i moti planetari. Un altro esempio, riscontrabile storicamente, riguarda la geometria. I pitagorici tentarono di costruire la geometria partendo da affermazioni sui singoli punti, fallendo nel loro intento. Essi non riuscirono a ricavare proprietà anche solo di una linea.¹³

D'altra parte, nel caso di quasi tutti i postulati delle teorie scientifiche ellenistiche, ogni verificabilità è esclusa dal carattere universale delle affer-

¹³Lo scritto pseudo-aristotelico *De lineis insecabilibus* è dedicato a questo problema.

mazioni. Ad esempio, come è possibile dimostrare che un'affermazione vale 'per ogni coppia di punti'?

E' utile, al fine di stabilire un criterio efficace per scegliere i postulati di una teoria scientifica, riportare il seguente passo dello scettico Sesto Empirico:

Noi [scettici] non contestiamo ciò che induce involontariamente il nostro assenso su un'impressione sensibile, e cioè i *phainomena*.¹⁴

Nel passo di Sesto Empirico è riportata la concezione stoica dei *phainomena*, ossia 'apparenze'. Secondo gli Stoici, infatti, al fine di avere un 'apparenza', non basta l'impressione sensibile, ma è essenziale anche l'assenso del soggetto, che allo stesso tempo è attivo e involontario.

In definitiva, le ipotesi di una teoria possono essere non direttamente verificabili, o anche a prima vista sorprendenti, ma devono permettere di dedurre logicamente i *phainomena*. Ad esempio, l'ipotesi di Aristarco che il Sole fosse fermo e la Terra fosse soggetta a un moto di rotazione e di rivoluzione appariva certamente strana e distante dall'intuizione, ma essa permetteva di 'salvare i fenomeni' deducendone i moti planetari effettivamente osservati.

1.3.3 Le definizioni

Nella storia del pensiero si sono alternate due concezioni profondamente diverse di 'definizioni' (*ορος*).

Secondo la prima, lo scopo delle definizioni è quello di individuare l'essenza dell'ente definito. Chiameremo tale concezione 'essenzialista' o 'platonica', in quanto fu propria di Platone, anche se fu condivisa da Aristotele. E' questo, ad esempio, il caso di molteplici tentativi di definire il 'bene' o il 'giusto' nei dialoghi socratici di Platone. Inoltre, la concezione platonica prevede l'applicabilità delle definizioni essenzialiste anche agli enti matematici, pensati dotati di una propria realtà oggettiva, mentre al matematico spetta la descrizione e l'uso di tali definizioni.

¹⁴Sesto Empirico, *Pyrrhoneae hypotyposes*, I, X, 19

Tale concezione dominò in età imperiale, nel medio evo e nei primi secoli dell'età moderna.

Tuttavia non è questo il metodo che ha condotto alla creazione della terminologia scientifica inerente al nostro contesto. Nel caso della scienza esatta, infatti, la definizione serve a caratterizzare univocamente un ente teorico tra i possibili infiniti e non a riconoscere un oggetto concreto in un insieme finito di possibilità.

Una tipica definizione idonea a creare un nuovo termine scientifico è la seguente, di Archimede:

Assumiamo che se un'ellisse ruota, con l'asse maggiore fermo, fino a tornare nella posizione iniziale la figura racchiusa dall'ellisse sia detto 'sferoide allungato'.¹⁵

Una definizione di questo tipo consiste evidentemente nell'introdurre un nome come etichetta per individuare un'espressione composta da più termini già noti. Nell'esempio citato, Archimede usa termini tradizionali quali 'sferoide', 'allungato' in significati nuovi e convenzionali. Una definizione del genere è detta 'nominalista'.

Definizioni come queste sono frequenti nei testi degli scienziati ellenistici. Anche Euclide condivise la concezione nominalista. A supporto di questa tesi mostreremo, come già accennato, un'argomentazione dettagliata nei prossimi capitoli.

Le definizioni nominaliste sono certamente importanti per arricchire la terminologia scientifica, ma non possono crearla dal nulla, poichè ogni definizione di questo tipo riconduce al significato di un nuovo termine a quello di altri considerati già noti. Quindi, come per l'assunzione dei postulati per dimostrare le affermazioni inerenti ad una teoria, anche il procedimento definitorio richiede affermazioni indimostrate su cui basarsi. Gli 'enti fondamentali' di una teoria possono essere implicitamente definiti dai postulati della teoria stessa.

¹⁵Archimede, *De conoidibus et sphaeroidibus*, 155, 4-13 (ed. Mugler).

Naturalmente i postulati assumerebbero in questo senso anche il nuovo aspetto di affermazioni teoriche. E' questo il caso di diverse teorie scientifiche ellenistiche. Non è del tutto chiaro se gli scienziati greci fossero consapevoli del procedimento appena descritto. Sembra consapevole in tutti quei casi in cui un termine fondamentale della teoria viene introdotto senza essere definito, come fa ad esempio Euclide nell'*Ottica*¹⁶ per la nozione di 'raggio visuale' o Archimede nel trattato *Sull'equilibrio delle figure piane* per la nozione di 'baricentro' o nel I libro del trattato *Sulla sfera e sul cilindro* per la nozione di lunghezza di una classe di curve.

¹⁶L'*Ottica* di Euclide è pubblicata in [5], vol. VII.

Capitolo 2

Gli *Elementi* di Euclide

2.1 Euclide

Come per molti altri matematici greci, anche nel caso di Euclide non disponiamo di molte informazioni riguardo alla sua vita.

Sul celebre autore degli *Elementi* Proclo scrive che:

Non molto più giovane di loro Ermotico di Colofone e Filippo di Medma è Euclide; egli raccolse gli ‘Elementi’, ne ordinò in sistema molti di Eudosso, ne perfezionò molti di Teeteto, e ridusse a dimostrazioni inconfutabili quelli che suoi predecessori avevano poco rigorosamente dimostrato. Visse al tempo del primo Tolomeo, perché Archimede, che visse subito dopo Tolomeo primo, cita Euclide: e anche si racconta che Tolomeo gli chiese una volta se non ci fosse una via più breve degli Elementi per apprendere la geometria, ed egli rispose che per la geometria non esistevano vie fatte per i re. Euclide era dunque più giovane dei discepoli di Platone, ma più anziano di Eratostene e di Archimede che erano fra loro contemporanei, come afferma in qualche luogo Eratostene.¹

¹*Proclus*, ed. Friedlein, 68, 6-20

Il passaggio appena riportato mostra che Proclo non aveva una conoscenza diretta sul luogo di nascita e sulle date, di nascita e di morte, di Euclide. Egli procedette per deduzione: dato che Archimede (287-212 a.C.), vissuto in un periodo successivo al regno di Tolomeo I (che regnò dal 323 al 283), menziona Euclide in un aneddoto riguardante anche il sovrano, si deduce che l'autore degli *Elementi* visse in un'epoca precedente al matematico siracusano. Proclo colloca quindi l'operato di Euclide (quindi anche la stesura degli *Elementi*) intorno al 300 a.C., dato che non solo era precedente ad Archimede e visse ai tempi di Tolomeo I, ma era anche più giovane dei discepoli di Platone, morto nel 347 a.C..

E' molto probabile che Euclide ricevette la sua formazione matematica ad Atene dai seguaci di Platone. Infatti la maggior parte dei geometri responsabili della sua formazione avevano insegnato nell'Accademia platonica. Inoltre, ad Atene vissero altri matematici e scrittori i cui lavori risultarono fondamentali per la stesura degli *Elementi*.

E' certo che Euclide insegnò ad Alessandria, dove fondò una scuola. La veridicità di quest'ultima affermazione è riscontrabile in un passo di Pappo in cui Apollonio viene accostato a degli allievi di Euclide.²

Diversi autori e traduttori del Medioevo confondono Euclide con Euclide di Megara che fu un filosofo, seguace di Socrate, vissuto nel V sec a.C..

Oltre agli *Elementi*, che descriveremo dettagliatamente nel seguito di questo capitolo, Euclide compose altri trattati:

- i *Dati*, inseriti nel *Tesoro di analisi* di Pappo che li descrive come contenenti materiale geometrico supplementare riguardo ai 'problemi algebrici'.³ L'opera è strettamente legata agli *Elementi*.
- La *Divisione delle figure*. Nell'opera, citata da Proclo,⁴ l'autore tratta la suddivisione di una figura data in altre figure. Ne esiste una traduzione latina, probabilmente dovuta a Gerardo di Cremona (1114-

²*Pappus*, VII, p.678, 10-12.

³*Pappus*, VII, p.638.

⁴*Proclus*, p. 69, 4.

1187), basata su una versione araba scorretta e incompleta. Nel 1851 Franz Woepcke trovò e tradusse un'altra versione araba che sembra corretta. Ne esiste una traduzione inglese ad opera di R. C. Archibald.

- *L'Ottica*, in cui Euclide si occupa di quella che era considerata ottica in senso stretto, cioè della visione diretta, escludendo i fenomeni di riflessione. Nell'opera l'autore mostra come, utilizzando il metodo scientifico, si possano analizzare le percezioni visive. Come enti fondamentali l'autore considera i 'raggi visuali' che, in numero finito, si estendono in linea retta dall'occhio.⁵
- *I Fenomeni*, che è un'opera di astronomia contenente 18 proposizioni di geometria sferica e altre sulle sfere ruotanti uniformemente. La Terra è trattata come una sfera.⁶
- *Le Coniche*. Secondo Pappo, i contenuti di quest'opera perduta, suddivisa in quattro libri, divennero sostanzialmente i primi tre libri delle *Sezioni coniche* di Apollonio.
- *I Porismi*, andati perduti. Pappo parla dell'opera nella sua *Collezione matematica*, asserendo che consisteva di tre libri. Si ritiene, sulla base delle osservazioni di Pappo e di Proclo, che i *Porismi* trattassero essenzialmente il problema della costruzione degli oggetti geometrici la cui esistenza era già assicurata.
- *I Luoghi superficiali*, consistente in due volumi, è citata da Pappo nella sua *Collezione*. Quest'opera, che non ci è giunta, trattava probabilmente le proprietà di alcune superfici.
- *Le Pseudaria*, che contenevano dimostrazioni geometriche giuste e sbagliate in vista delle esercitazioni degli studenti. Anche quest'opera è andata perduta.

⁵Sia *l'Ottica* che una *Catoptrica* pseudo-euclidea sono pubblicate in [5], vol. VII.

⁶[5], vol VIII.

2.2 Introduzione agli *Elementi*

Come abbiamo già accennato, dal passo di Proclo riportato nel precedente paragrafo possiamo dedurre che Euclide scrisse gli *Elementi* intorno al 300 a.C..

L'opera consiste in una riorganizzazione delle scoperte dei matematici greci del periodo classico. Ciò è deducibile paragonando i contenuti del trattato con i risultati ottenuti precedentemente al primo ellenismo. Lo stesso Proclo sottolinea che nell'opera Euclide introdusse molti teoremi di Eudosso, che perfezionò i teoremi di Teeteto e che diede delle dimostrazioni inconfutabili di risultati dimostrati in modo imperfetto dai suoi predecessori. Inoltre Euclide deve senza dubbio molto del suo materiale a disposizione ai Platonici.

Tuttavia, l'opera non si presenta come una semplice raccolta di risultati. Il grande merito di Euclide, che lo rende uno dei più grandi matematici della storia dell'umanità, è stato quello di creare la matematica come una teoria scientifica.

Difatti, come abbiamo già sostenuto, con diversi argomenti,⁷ nella matematica ellenistica erano sorti due tipi di problemi:

- certe affermazioni apparentemente ovvie su figure geometriche ne potevano implicare logicamente altre molto meno evidenti;
- si era discusso il rapporto, non chiaro, tra i concetti propri della matematica e il mondo reale.

Queste problematiche furono discusse e risolte da Euclide creando, come accennato in precedenza, la matematica come una teoria scientifica e utilizzando il metodo scientifico. Negli *Elementi*, infatti, Euclide definisce esplicitamente gli enti della teoria (come cerchi, angoli retti, rette parallele ecc.) in termini di pochi enti fondamentali (quali punti, rette, piani) ed elenca i postulati da cui ricavare le 'proposizioni', cioè le proprietà degli enti geometrici, da ritenere accettabili solo nel caso in cui siano dimostrate, tramite una catena di implicazioni logiche, dai postulati.

⁷Paragrafi 1.2 e 1.3.

Inoltre, si devono ad Euclide la scelta particolare dei postulati, la disposizione dei teoremi nell'opera, la pulizia e il rigore delle dimostrazioni. Inoltre, Euclide inserì comunque negli *Elementi* aggiunte di sua mano, in particolare le dimostrazioni di alcune proposizioni.

E' giusto però osservare, senza voler sminuire l'assoluta importanza degli *Elementi* da un punto di vista storico-scientifico, che l'opera di Euclide presenta alcune defezioni a livello strutturale:

- l'uso della sovrapposizione tra figure che Euclide per dimostrare la congruenza tra figure.
- L'autore utilizza diverse proprietà senza enunciarle mai e di cui evidentemente non si rendeva conto, come, ad esempio, quelle concernenti alla continuità dei luoghi geometrici.

La geometria euclidea, in quanto sistema ipotetico deduttivo, ricevette una rigorosa formulazione nel 1899 da D. Hilbert (1862-1943) che, nei suoi *Grundlagen der Geometrie*, stabilì un sistema di assiomi più completo rispetto a quello di Euclide.

Nonostante questi difetti, gli *Elementi* ebbero un tale successo da soppiantare tutti i testi di geometria precedenti. Nel III sec. a.C., quando ancora ne sopravvivevano altri, perfino Archimede e Apollonio rimandano agli *Elementi* per i risultati di cui avevano bisogno.

L'opera è stata studiata direttamente con continuità per 22 secoli (dal 300 a.C. alla fine dell'800) e rende Euclide uno degli autori, anche se oggi non più di prima mano, più letti nella storia dell'umanità.

Non ci sono pervenuti manoscritti autografi di Euclide. L'opera è stata ricostruita da numerose recensioni, commentari e osservazioni di altri scrittori. Nel trattato sono contenute diverse interpolazioni dovute a matematici, successivi ad Euclide, che hanno studiato gli *Elementi*. Tutte le edizioni tradotte in latino e in lingue moderne degli *Elementi*, tranne uno, discendono da manoscritti greci, precisamente dalla revisione dell'opera scritta da

Teone di Alessandria (fine del IV sec. a.C.). Due importanti commentari al testo degli *Elementi* risalgono a Pappo e ad Erone.

2.3 Il corpo dell'opera

2.3.1 I tredici libri degli *Elementi*

Gli *Elementi* sono suddivisi in 13 libri.

I primi 6 riguardano la geometria piana e i rapporti tra grandezze. In particolare:

- il libro I contiene definizioni degli enti geometrici (tra cui le definizioni di punto, retta, superficie, angolo, segmento e triangolo), gli assiomi e proposizioni di geometria piana riguardanti segmenti, angoli, triangoli, rette parallele e perpendicolari. In particolare vengono descritte proprietà riguardanti la congruenza, il teorema di Pitagora, le costruzioni elementari, la teoria delle figure equivalenti e i teoremi sui parallelogrammi. Tutte le figure analizzate in questo libro sono rettilinee.
- Il libro II riguarda l'algebra geometrica. Tutte le quantità sono rappresentate geometricamente. Ad esempio: i numeri sono sostituiti da segmenti di retta; il prodotto tra due numeri diventa l'area di un rettangolo; il prodotto tra tre numeri un volume.
- Il libro III riguarda la geometria del cerchio. Inizialmente vengono presentate alcune definizioni riguardanti la geometria dei cerchi. In seguito vengono dimostrate proprietà delle corde, delle tangenti, delle secanti, degli angoli al centro e alla circonferenza ecc..
- Il libro IV tratta l'inscrittibilità e la circoscrittibilità dei poligoni regolari.
- Nel libro V viene presentata la teoria delle proporzioni. Il libro è basato sull'opera di Eudosso, che aveva già introdotto la nozione di grandezza,

associandola ad entità quali i segmenti di retta, gli angoli, le aree, i volumi e gli intervalli di tempo. La teoria delle proporzioni viene estesa negli *Elementi* ai rapporti incommensurabili. Il libro contiene diverse definizioni utilizzate nelle dimostrazioni presenti in questa sezione.

- Il libro VI tratta le figure simili. Il libro si apre con alcune definizioni. Nelle dimostrazioni presenti in questa sezione Euclide utilizza la teoria delle proporzioni descritta nel V libro.

I successivi 4, invece, sono inerenti alla teoria dei numeri. In particolare:

- nel libro VII Euclide presenta alcune definizioni riguardanti i numeri. In particolare vengono definiti i numeri primi, i numeri perfetti e vengono descritti l'“algoritmo” di Euclide (per calcolare il massimo comun divisore tra due numeri) e il procedimento per calcolare il minimo comune multiplo tra due numeri.
- Il libro VIII tratta essenzialmente le progressioni geometriche.
- Nel libro IX vengono presentate proposizioni sui numeri quadrati e cubi. Viene inoltre dimostrata la formula che fornisce la somma dei termini di una progressione geometrica. Nello stesso libro è presente la celebre dimostrazione dell'infinità dell'insieme dei numeri primi, che Euclide dimostra evitando di trattare direttamente il concetto d'“infinito”, la cui delicatezza era nota almeno dai tempi di Zenone. Riportiamo la dimostrazione, rigorosa, della proposizione: data una quantità arbitraria di numeri primi (supposti diversi da 1), sia n il prodotto ottenuto moltiplicandoli tra di loro. $n+1$ non è divisibile per nessuno dei numeri primi assegnati inizialmente; se m è un fattore primo di $n+1$ diverso da 1, m non può quindi essere uno dei primi dati; abbiamo quindi trovato un numero primo non compreso nell'insieme (finito) di partenza.
- Il libro X intraprende la classificazione dei tipi di irrazionali attraverso le grandezze incommensurabili con delle grandezze date.

Infine, gli ultimi tre libri riguardano la geometria solida:

- nel libro XI comincia la trattazione della geometria solida. Il libro si apre con delle definizioni riguardanti i solidi, i concetti di parallelismo e di perpendicolarità esteso ai piani ed altri enti geometrici come, ad esempio, gli angoli solidi. Le dimostrazioni del libro riguardano soltanto figure piane. Inoltre, Euclide considera solo i solidi convessi.
- Il libro XII contiene proposizioni sulle aree e sui volumi, in particolare di figure curvilinee e di figure limitate da superfici.
- Nel libro XIII Euclide presenta le proprietà dei solidi regolari. In particolare viene dimostrato che non possono esistere più di 5 solidi (poliedri) regolari (e convessi).

Alcune delle vecchie edizioni degli *Elementi* comprendono altri due libri che contengono ulteriori risultati sui solidi regolari. Entrambi sono posteriori ad Euclide. Il XIV libro è dovuto a Ipsicle (II sec. a.C.), mentre alcune parti del libro XV furono probabilmente scritte addirittura nel IV sec. a.C.

2.3.2 I postulati e le nozioni comuni

Euclide presenta nel libro I degli *Elementi* cinque postulati:

1. [E' possibile] tracciare un segmento da ogni punto a ogni punto.
2. [E' possibile] prolungare con continuità un segmento in una retta.
3. [E' possibile] tracciare una circonferenza con qualsiasi centro e raggio.
4. Tutti gli angoli retti sono eguali tra loro.
5. Se una retta intersecandone altre due forma nello stesso semipiano angoli interni la cui somma è minore di due retti, allora le due rette si incontrano in quel semipiano.

Euclide presuppone che la retta del postulato 1 sia unica. Tale assunzione è implicita nella proposizione 4 del libro I, in cui viene dimostrato che due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due lati e l'angolo compreso tra essi è equivalente (primo criterio di congruenza).

Analogamente, nel postulato 2 Euclide assume che l'estensione sia unica. L'autore usa l'unicità implicitamente all'inizio del libro I ed esplicitamente nel libro XI.

Il postulato 5 è originale di Euclide ed evidenzia la sua genialità nell'averne riconosciuto la necessità. Molti Greci criticarono questo postulato per la sua non immediata evidenza. Nel corso dei secoli si registrarono diversi tentativi di dimostrare il 5° postulato come conseguenza dei primi quattro. Su tale questione si basa la fase di revisione critica dei fondamenti della geometria tra il XVIII e il XIX secolo. Tuttavia i vari tentativi risutarono vani. D'altra parte furono costruite nuove teorie che partivano dal rifiuto del postulato 5, le cosiddette 'geometrie non euclidee'. La costruzione di modelli di geometrie non euclidee basate sugli enti della geometria euclidea dimostrarono l'effettiva indipendenza del postulato 5 dagli altri quattro.

Va notato che nei postulati rette e circonferenze occupano un ruolo privilegiato. Il motivo di questa scelta si rispecchia nelle origini della geometria euclidea che nasce esplicitamente come la teoria scientifica dei disegni eseguibili con riga e compasso, che hanno come modelli matematici rette e circonferenze.

I primi tre postulati di Euclide sono la trasposizione, a livello di teoria matematica, delle operazioni effettuabili con i due strumenti fondamentali.

Naturalmente vi è un'enorme differenza tra la matematica e il disegno. La scienza matematica parte da un fenomeno di astrazione basato su modelli teorici degli strumenti reali. Difatti, con un compasso non si può affatto tracciare una vera circonferenza. La scienza matematica nasce sostituendo alla riga e al compasso una riga ed un compasso ideale. Di tali modelli teorici

sono chiare, per quanto discusso nel paragrafo 1.2.1, sia l'origine sia le regole di corrispondenza che ne permettono l'applicazione.

Gli ultimi due postulati sono invece di natura più teorica.

Oltre ai postulati, nel I libro vengono presentate cinque 'nozioni comuni', cioè affermazioni che non riguardano gli enti specifici della geometria. Come nel caso dei postulati, le nozioni comuni vanno accettate senza dimostrazione:

1. Cose uguali ad una stessa cosa sono uguali tra loro.
2. Aggiungendo [quantità] uguali a [quantità] uguali le somme sono uguali.
3. Sottraendo [quantità] uguali da [quantità] uguali i resti sono uguali.
4. Cose che coincidono con un'altra sono uguali all'altra.
5. L'intero è maggiore della parte.

L'autenticità delle nozioni comuni, però, è stata più volte contestata.⁸

2.3.3 Teoremi e problemi

La differenza tra i primi tre postulati, che affermano la costruibilità di rette e circonferenze, e i due restanti, di natura più teorica, si riflette nelle proposizioni che compongono gli *Elementi*.

Nel trattato, infatti, si riscontrano due tipi di proposizioni:

- i 'problemi' (*προβλήματα*), che consistono nella descrizione di una figura geometrica con proprietà assegnate, seguita dalla costruzione della figura e dalla dimostrazione che la stessa figura costruita soddisfa effettivamente le proprietà richieste;

⁸Cfr., per esempio, [6], vol. I, p. 221.

- i ‘teoremi’ (*θεωρηματα*), che consistono invece nell’affermare che determinate proprietà (ipotesi) ne implicano altre (tesi) e possono essere seguiti solo dalla dimostrazione.

Un esempio di teorema è quello che afferma l’equivalenza tra il quadrato costruito sull’ipotenusa di un triangolo rettangolo e la somma dei quadrati costruiti sui cateti⁹ (il ‘teorema di Pitagora’). Tale teorema è preceduto dal problema che mostra come costruire i quadrati.¹⁰ Euclide, infatti, non usa mai una figura geometrica se non dopo averne descritto e dimostrato la costruzione.

Altri esempi di problemi, presenti negli *Elementi*, sono date dalle seguenti proposizioni del libro I:

PROPOSIZIONE 1: *Su una retta data costruire un triangolo equilatero.*

La dimostrazione è semplice. Si costruiscono due cerchi: il primo di centro A e raggio AB; il secondo di centro B e stesso raggio del cerchio precedente. Sia C il punto d’intersezione tra tali cerchi. Il triangolo ABC è equilatero.

PROPOSIZIONE 2: *Applicare ad un punto dato una retta uguale a una retta data.*

Si potrebbe pensare che ciò sia realizzabile immediatamente servendosi del postulato 3. Ma per fare ciò è necessario che il compasso mantenga inalterata l’apertura uguale alla lunghezza data per il periodo necessario a spostare il compasso nel punto in cui deve essere costruita la lunghezza uguale a quella data. Euclide, invece, assume che il compasso sia mobile e da perciò una dimostrazione più complicata. Naturalmente, egli assume che l’apertura del compasso rimanga inalterata mentre descrive un cerchio di centro e raggio dati, cioè per tutto il tempo in cui il compasso rimane aderente alla superficie su cui viene tracciato il cerchio.

⁹Euclide, *Elementi*, I, 47.

¹⁰Euclide, *Elementi*, I, 46.

Continuiamo ad utilizzare come supporto il libro I per mostrare degli esempi di teoremi presenti negli *Elementi*.

PROPOSIZIONE 16: *Un angolo esterno di un triangolo è maggiore di ciascuno degli angoli interni ad esso opposti.*

Nella dimostrazione della proposizione 16, nota anche come ‘teorema dell’angolo esterno’, si considera un triangolo ABC con base AB. Detto E il punto medio di BC, si prolunga il segmento AE di un segmento EF congruente ad AE. Si prolunga inoltre AB di un segmento BG congruente ad AB.

Dalla costruzione risulta che:

- $AB \cong EF$
- $CB \cong BG$

Quindi gli angoli ACB e CAB sono minori dell’angolo esterno CBG.

PROPOSIZIONE 27: *Se una retta, cadendo su due rette, forma gli angoli alterni interni uguali fra loro, le due rette saranno parallele fra loro.*

La dimostrazione della proposizione 27, nota anche come ‘teorema delle rette parallele’, è fatta per assurdo usando il teorema dell’angolo esterno. Infatti, affermando che le due rette non sono parallele, esse si incontrerebbero in un punto, formando un triangolo. Secondo il teorema dell’angolo esterno, in ogni triangolo ogni angolo esterno è maggiore di ogni angolo interno ad esso non adiacente. Dato che i due angoli alterni interni sono congruenti per ipotesi, il risultato a cui ha portato questo ragionamento è assurdo. Poiché le due rette non possono incontrarsi per evitare una proposizione falsa, le due rette sono parallele.

2.4 Le definizioni del libro I

Nel I libro degli *Elementi* Euclide presenta 23 definizioni.

Riportiamo le prime sette:

1. Punto è ciò che non ha parti.
2. Linea [è] una lunghezza senza larghezza.
3. Estremità di una linea [sono] punti.
4. Linea retta è quella che giace allo stesso modo rispetto a [tutti] i suoi punti.
5. Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.
6. Estremi di una superficie sono linee.
7. Superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle sue rette.

Gli enti definiti successivamente, detti ‘termini definiti’ sono espressi in funzione degli enti fondamentali appena riportati, detti anche ‘termini primitivi’.

In particolare vengono definiti:

- gli angoli piani rettilinei, acuti ed ottusi (def. 8-9-11-12);
- la perpendicolarità tra due rette (def 10);
- il concetto di figura geometrica rettilinea (def. 13-14-19);
- cerchio, semicerchio, diametro e centro di un cerchio (def. 15-16-17-18)
- i triangoli, classificati sia rispetto agli angoli che rispetto al lati (def. 20-21);
- i quadrati (def. 22);
- il parallelismo tra due rette (def. 23).

2.4.1 Critica delle prime sette definizioni

La presenza, negli *Elementi*, delle prime sette definizioni riguardanti i termini primitivi (che sono in realtà tautologie o frasi puramente illustrative), appare in contraddizione con gli argomenti, esposti in precedenza, riguardo alla necessità di lasciare indefiniti gli enti fondamentali della teoria. Lo stesso Euclide, nella redazione dell'*Ottica*, aveva lasciato indefinito il concetto di ‘raggio visuale’, assunto come ente fondamentale.

Dall’analisi delle prime sette definizioni, di chiaro stampo platonico, emerge un’ulteriore contraddizione poichè Euclide condivise la concezione nominalista. Come esempio consideriamo il concetto di punto ($\sigma\tau\iota\gamma\mu\eta$) presente negli *Elementi* di Euclide. L’autore evita nella sua opera il termine $\sigma\tau\iota\gamma\mu\eta$, preferendo parlare di $\sigma\eta\mu\epsilon\iota\omicron\nu$ (che originariamente significava ‘segno’). Quest’ultima considerazione suggerisce che Euclide avesse già voluto tagliare i ponti con la tradizione di speculazioni pltoniche sulla natura del punto: le analisi del concetto di punto contenute nelle opere di Aristotele erano state di questo tipo.

D’altra parte, l’adesione da parte di Euclide alla concezione nominalista sembra evidente in alcune sue definizioni, come quella di proporzione (quinta definizione del libro V), riportata qui di seguito:

Si dice che una prima grandezza è con una seconda nello stesso rapporto in cui una terza è con una quarta, quando, se si considerano equimultipli qualsiasi della seconda e della quarta, i primi equimultipli sono ambedue maggiori o ambedue eguali o ambedue minori dagli altri equimultipli presi nell’ordine corrispondente.

Infatti, se si pensa ai ‘rapporti di grandezze’ come a qualcosa dotato di realtà oggettiva, l’uguaglianza di due rapporti appare una nozione ovvia, mentre Euclide adotta una definizione equivalente ad una complessa e raffinata ‘costruzione’ del concetto di rapporto tra due grandezze.

Inoltre, tutti gli autori che hanno adottato la concezione platonica non hanno trovato nulla di criticabile nelle prime sette definizioni di Euclide, men-

tre non hanno mai capito l'utilità della complessa definizione di proporzione. Altri argomenti a supporto di questa tesi saranno presentati nel capitolo 4.

Come ultima considerazione, va osservato che le prime sette definizioni degli *Elementi* non mostrano alcuna analogia con le opere di Apollonio e Archimede. Si inserirebbero molto meglio nel clima culturale dell'età imperiale che nel primo ellenismo.

Tra gli scienziati dell'età imperiale abbiamo già citato Erone, a cui sono attribuite delle interpolazioni presenti negli *Elementi*.

In particolare:

- la proposizione 12 del III libro è attribuita ad Erone dal commentatore arabo An-Naiziri;
- una prova alternativa della proposizione 25 del I libro è attribuita ad Erone da Proclo.¹¹

Inoltre, è possibile ipotizzare, per ragioni che presenteremo nel corso della dissertazione, l'inserimento, avvenuto in età imperiale, negli *Elementi*, di alcuni passaggi presenti in un'opera di Erone, le *Definizioni*. Non è chiaro infatti, per quanto esposto finora, perchè Euclide abbia inserito nel trattato le prime sette definizioni. L'eventuale inserimento è stato in genere considerato come un possibile grave limite dell'autore.

Risulta quindi fondamentale, come ulteriore premessa alla discussione sulla possibile corruzione del testo di Euclide, presentare l'opera di Erone, che sarà analizzata in chiave critica.

¹¹[9], pp. 346-347.

Capitolo 3

Le *Definizioni* di Erone

3.1 Erone d’Alessandria

Erone d’Alessandria è vissuto in età imperiale, in un periodo compreso tra il 100 a.C. e il 100 d.C..

Proclo cita Erone con l’appellativo di *mechanicus*, che potrebbe significare quello che è oggi un ingegnere meccanico. Lo stesso Proclo lo discute in connessione con l’inventore Ctesibio, suo maestro.

Ciò che più colpisce dell’opera di Erone è la commistione che si trova fra la matematica rigorosa e i procedimenti, le formule approssimate della cultura egiziana e l’algebra mesopotamica. Egli usò i risultati rigorosi di Archimede e in alcune opere provò un certo numero di nuovi teoremi di geometria euclidea. Inoltre, Erone si occupava di geometria applicata e di meccanica.

Oltre ad aver scritto un commentario agli *Elementi* di Euclide e le *Definizioni*, che analizzeremo in seguito, Erone ha composto altri trattati:

- la *Metrica* e la *Geometrica*. In queste due opere l’autore presenta regole e teoremi riguardanti le aree piane, le aree superficiali e i volumi di diverse figure. Per le figure dotate di contorni curvi, Erone utilizza i risultati di Archimede.
- La *Geodesia* e la *Stereometria*, dedicate agli stessi argomenti dei due trattati appena descritti.

- La *Diottra*, riguardante ancora la geometria. Nell'opera sono presenti diverse formule come, ad esempio, quella che da l'area di un triangolo (A) in funzione dei lati (a , b , c) e del semiperimetro (s):

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Nonostante sia attribuita ad Erone, la formula è dovuta ad Archimede.

- La *Meccanica*, *La costruzione di catapulte*, le *Misurazioni*, *La progettazione di cannoni*, la *Pneumatica* e *Sull'arte della costruzione degli automi*. In queste opere, di carattere applicativo, Erone applicò molti dei suoi teoremi e delle sue regole.

3.2 Le *Definizioni*

Le *Definizioni* di Erone presentano un'illustrazione delle definizioni degli enti geometrici presenti negli *Elementi* di Euclide.

Nell'opera vengono presentate circa una centinaio di definizioni. Vengono definiti in particolare enti come i punti, le rette e i piani, ossia i termini primitivi della geometria euclidea.

3.2.1 La prefazione all'opera

L'autore presenta l'opera come segue:¹

Descrivendo ed abbozzando per te, illustre Dionisio, il più concisamente possibile, i termini tecnici presupposti negli elementi di geometria, assumerò come punto di partenza e come struttura generale l'insegnamento di Euclide, l'autore degli 'Elementi' della teoria geometrica

¹[11], p. 14.

Erone non parla di ‘definizioni’ ma di descrizioni dei concetti geometrici. Le prime definizioni presenti nell’opera, infatti, sono lunghe illustrazioni e non delle ‘definizioni’ in senso tecnico.

La presentazione di Erone appare del tutto chiara supponendo che egli si fosse preoccupato di illustrare gli enti geometrici fondamentali lasciati indefiniti negli *Elementi* che potrebbero essere indicati, come è riportato nel passo citato, come ‘i termini tecnici presupposti negli elementi geometria’.

Il titolo dell’opera può effettivamente apparire in contraddizione con quest’ultima considerazione. In realtà il titolo presente nei manoscritti non è dovuto ad Erone. Infatti i manoscritti di cui disponiamo provengono da una raccolta bizantina, nella quale il titolo *Definizioni di Erone* serviva a distinguere il testo che abbiamo da brani estratti da altri autori.

Notiamo inoltre che Erone considera la sua opera preliminare alla lettura degli *Elementi*.

3.2.2 Le corrispondenze con le definizioni di Euclide

Da un confronto tra le definizioni del libro I degli *Elementi* di Euclide e le *Definizioni* emerge che quelle presenti negli *Elementi* sono brani delle ‘definizioni’ di Erone.

In particolare:

- la definizione 1 degli *Elementi* coincide con l’inizio della definizione 1 di Erone.
- La definizione 2 degli *Elementi* coincide con l’inizio della definizione 2 di Erone.
- La definizione 3 degli *Elementi* corrisponde ad un altro brano della definizione 1 di Erone.
- La definizione 4 degli *Elementi* corrisponde all’inizio della definizione 4 di Erone.

- La definizione 5 degli *Elementi* corrisponde all'inizio definizione 8 di Erone.
- La definizione 6 degli *Elementi* corrisponde ad un altro brano della definizione 2 di Erone.
- La definizione 7 degli *Elementi* coincide con l'inizio della definizione 9 di Erone.

La stretta relazione tra le definizioni di Euclide e le definizioni di Erone, in particolare le coincidenze, troppe per essere casuali, tra le definizioni di Euclide e brani (in genere quelli iniziali) delle definizioni di Erone, potrebbero suggerire che le definizioni di Euclide siano originali e quelle di Erone ne siano ampliamenti esplicativi.

Tuttavia, un'ulteriore possibilità logica, già accennata in precedenza, consiste nel sostenere che tali definizioni mancassero nell'opera di Euclide e non sono altro che estratti dei brani di Erone, inserite successivamente nel testo degli *Elementi*.

Oltre agli argomenti già discussi a sostegno di questa ipotesi, ne esistono altri che analizzeremo dettagliatamente nel corso del prossimo capitolo.

Capitolo 4

Sulla non autenticità delle definizioni di Euclide¹

In questo capitolo verranno fornite argomentazioni ai fini di dimostrare la non autenticità delle definizioni degli enti geometrici presenti nel libro I degli *Elementi*.

In particolare:

- è possibile mostrare che, alla luce delle informazioni che abbiamo sui testi di Euclide e di Erone, la stretta relazione tra le due opere possa essere spiegata come una dipendenza del testo tramandatoci da Euclide dall'opera di Erone, a discapito dell'interpretazione più ovvia;
- è possibile dimostrare che le definizioni inserite nel I libro degli *Elementi*, sono state effettivamente estratte dall'opera di Erone;
- esistono diverse ragioni metodologiche che portano inevitabilmente a sostenere che le definizioni degli enti geometrici fondamentali abbiano avuto la stessa origine;
- l'ipotesi della dipendenza delle definizioni di Euclide dai brani di Erone è fortemente riscontrabile nell'analisi delle fonti, in particolare da due passi di Sesto Empirico.

¹Il contenuto di questo capitolo è tratto da [8].

4.1 Plausibilità della derivazione da Erone

Per dimostrare che l'ipotesi riguardante l'inserimento di brani delle *Definizioni*, avvenuto in età imperiale, nel testo degli *Elementi* non corrisponde ad una ricostruzione artificiosa, ma merita di essere presa in seria considerazione, risulta fondamentale superare alcune obiezioni preliminari.

In particolare è necessario valutare:

- l'attendibilità del testo di cui disponiamo degli *Elementi*;
- le possibili fonti, alternative agli *Elementi*, a cui Erone possa aver attinto nella redazione delle *Definizioni*;
- i canali di trasmissione attraverso i quali brani delle *Definizioni* possano essere penetrati negli *Elementi*.

4.1.1 L'attendibilità degli *Elementi* di Euclide

Per quanto riguarda l'attendibilità delle redazioni degli *Elementi* che ci sono state tramandate, sappiamo per quanto discusso in precedenza che tutti i manoscritti del testo, tranne uno, risalgono a Teone d'Alessandria.

D'altra parte, a Teone risale anche una redazione dell'*Ottica* di Euclide, in cui il redattore prende le distanze dal testo originale. Quest'ultima osservazione è riscontrabile in un manoscritto di una redazione precedente dell'*Ottica*, ritrovato da Heiberg nella Biblioteca Vaticana.² Sappiamo inoltre da Teone stesso che egli aveva inserito negli *Elementi* aggiunte di sua mano,³ provando quindi di non aver assunto un atteggiamento diverso da quello riservato all'*Ottica*.

L'unico manoscritto degli *Elementi* contenente una redazione più antica di quella di Teone è stato ritrovato anch'esso da Heiberg nella Biblioteca

²Ambedue le redazioni sono riportate in [5].

³In particolare Teone parla di un teorema da lui dimostrato nel suo commento all'*Almagesto* [12]. Si tratta di un'affermazione aggiunta alla proposizione 33 del libro VI.

Vaticana. La convinzione di Heiberg era che questa redazione non potesse risalire ad un periodo antecedente al III sec. d.C..

Il disinteresse di Teone dal testo originale degli *Elementi* doveva essere stato condiviso dall'autore di quest'altra redazione, giacchè il manoscritto, non troppo differente da quelli attribuiti a Teone, contiene diverse interpolazioni, come provato dal confronto con i pochi frammenti contenuti in papiri e con le citazioni di Euclide presenti in varie fonti.⁴ Le interpolazioni riconosciute sono in genere aggiunte di carattere esplicativo.

Per quanto riguarda l'analisi dei papiri ritrovati, sono stati ritrovati pochissimi frammenti del testo degli *Elementi* in papiri, di cui solo due contengono delle definizioni. Con tale strumento, quindi, possiamo fare poca luce diretta sulla questione che ci interessa.

Tuttavia, in un papiro è contenuta una definizione di 'cerchio' che manca di una proposizione presente in tutti i manoscritti noti.⁵ Ci occuperemo in seguito di questa testimonianza.

Quindi, è possibile concludere che la presenza delle prime sette definizioni presenti nel testo tramandatoci degli *Elementi* non è certo sufficiente per attribuirle con certezza ad Euclide.

4.1.2 Le possibili fonti di Erone

Non è difficile risalire alle possibili fonti di Erone, alternative agli *Elementi*.

Ad esempio:

- gran parte dei concetti utilizzati nella definizione 1 di Erone, che è una lunga illustrazione del concetto di punto, sono in Aristotele. In particolare: la concezione di punto come 'estremità di una linea'; l'analogia tra punto ed istante; l'indivisibilità che caratterizza il punto.

⁴I passi riconosciuti come interpolati sono discussi sia in [5] che in [6] nel momento in cui si presentano.

⁵La definizione di cerchio contenuta in questo papiro è citata e discussa da Heath in [6], vol. I, pp. 50 e 184.

- la caratterizzazione delle linee come estremità delle superfici, contenuta nella definizione 2 di Erone, è la stessa definizione platonica già criticata da Aristotele.
- la definizione di linea retta, che analizzeremo in maggior dettaglio in seguito, sembra derivare da Archimede.

In definitiva, anche prescindendo da Euclide, Erone avrebbe avuto a disposizione tutto il materiale sufficiente per derivarne le sue ‘definizioni’ degli enti geometrici fondamentali.

4.1.3 Analogie tra le *Definizioni* e il commentario di Erone agli *Elementi*

Per quanto riguarda, invece, i possibili canali di trasmissione attraverso i quali i brani delle *Definizioni* possano essere stati interpolati negli *Elementi*, sappiamo, per quanto discusso in precedenza, che Erone scrisse un commentario agli *Elementi*, come riportato da Proclo.

Il commento agli *Elementi*, apparentemente del tutto perso, sembra ovviamente collegato alle *Definizioni*.

D'altra parte sappiamo, da quanto riportato in precedenza, che, sulla base di alcune testimonianze riconducibili al II e al III sec. d.C., alcuni brani contenuti in tutti i manoscritti noti degli *Elementi* sono stati identificati come interpolazioni provenienti dal commento di Erone. E' inoltre plausibile supporre che nel suo commento Erone avesse inserito brani delle sue *Definizioni*.

Quindi, dato che nessuna redazione degli *Elementi* risale ad epoche precedenti al III sec. d.C. e dato che i redattori dell'opera del II e del III sec. d.C. avevano certamente a disposizione il testo di Euclide commentato da Erone e non avevano alcuno scrupolo filologico di fedeltà al testo originale, appare del tutto naturale l'inserimento dei brani di Erone nel testo degli *Elementi* (in alcuni casi è addirittura documentato).

In definitiva, alla luce delle informazioni di cui disponiamo sui testi di Euclide ed Erone, l'ipotesi che le prime sette definizioni degli *Elementi* siano brani delle *Definizioni*, inseriti in età imperiale, appare del tutto plausibile.

4.2 Le motivazioni metodologiche

Le definizioni degli enti fondamentali presenti negli *Elementi*, riportate nel capitolo 2, appaiono come un blocco omogeneo ed è quindi logico supporre che la loro origine sia comune.

Il criterio fondamentale per determinarne l'origine, come del resto in tutte le analisi di autenticità, è la coerenza interna dell'opera.

In particolare, gli *Elementi* hanno una struttura in genere rigorosamente unitaria, in cui le varie proposizioni sono legate da rigide relazioni di implicazione logica. Ne abbiamo già tracciato i dettagli nei primi due capitoli della dissertazione.

Tale osservazione suggerisce fortemente l'interpolazione delle prime sette definizioni negli *Elementi*, dato che:

- le definizioni degli enti fondamentali non sono utilizzate nel testo degli *Elementi*, ne tantomeno potrebbero esserlo;
- la loro eliminazione dal testo rafforzerebbe la coerenza metodologica del contenuto dell'opera, gravemente destabilizzata da queste pseudo-definizioni, che sono in realtà frasi vaghe basate sul linguaggio comune e su reminiscenze filosofiche.

Inoltre è possibile fornire altre prove della scelta di Euclide di condividere la concezione nominalista e costruttivista, nella scelta delle definizioni, già sostenuta con diversi argomenti.

In primo luogo, va osservato che il testo degli *Elementi*, per la sua natura di manuale elementare copiato a fini didattici, aveva ben poche possibilità di mantenersi inalterato. Per tale ragione risulta utile, per studiare le concezioni matematiche del primo ellenismo, l'analisi di opere che, pur appartenendo

alla stessa tradizione scientifica, hanno potuto conservarsi in una forma più vicina all'originale. Ad esempio, le opere di Archimede e Apollonio.

In queste opere non si trova materiale analogo alle pseudo-definizioni degli enti fondamentali presenti negli *Elementi*. Inoltre, sappiamo da Proclo che Apollonio aveva discusso i concetti geometrici fondamentali con considerazioni di chiaro stampo 'costruttivista'. Infine, lo stesso Apollonio è sempre stato fedele alla tradizione euclidea, sia nel metodo che nella terminologia e non sappiamo che avesse criticato le definizioni di Euclide.

In secondo luogo, si potrebbe avanzare l'ipotesi secondo cui la presenza negli *Elementi* delle prime sette definizioni, nonostante il resto del testo sia basato su concezioni completamente diverse, non implica la loro non autenticità. Un'ipotesi legittima potrebbe consistere nel riscontrare, in Euclide, un atteggiamento eclettico.

Quest'ultima osservazione, in realtà, rafforza la congettura riguardo alla corruzione degli *Elementi* per due ragioni:

- l'eventuale ecletticismo di Euclide non è documentato né in Euclide né, più in generale, nei matematici del primo ellenismo;
- un'atteggiamento del genere appare più coerente con il clima culturale dell'età imperiale, in particolare con la personalità di Erone, che non esita a mescolare tradizioni diverse, come l'algebra mesopotamica e la geometria greca.

Infine, una testimonianza interessante, anche se indiretta, è fornita da Giamblico.

Nel libro VII degli *Elementi* viene definita l'unità come:

ciò per cui ciascuna delle cose viene detta 'uno'

Tale definizione, di stampo chiaramente platonico, è quindi dello stesso tipo delle prime sette del primo libro.

La definizione appena riportata viene citata da Giamblico che la attribuisce a scrittori più recenti.⁶

⁶[15], 11, 5.

In conclusione, la tesi che le definizioni degli enti geometrici fondamentali degli *Elementi* siano interpolazioni provenienti dall'opera di Erone è la sola coerente con la storia conosciuta della metodologia scientifica ellenistica.

4.3 Analisi di due definizioni degli *Elementi*

E' utile, ai fini della trattazione, analizzare due definizioni del I libro degli *Elementi*, riguardanti il cerchio (definizione 15), il quadrato e il rettangolo (definizione 22).

4.3.1 La definizione 15 degli *Elementi*

Riguardo alla definizione 15, come accennato in precedenza, esiste un papiro, ercolanense, che ne fornisce una versione antecedente al III sec. d.C..

La definizione presente nel papiro, che si ritiene essere quella originale, è la seguente:

Il cerchio è una figura piana racchiusa da una linea [tale che] tutti i segmenti incidenti su di essa [tracciati] da un punto di quelli che giacciono all'interno della figura, sono tra di loro eguali.

La definizione 27 data da Erone, d'altra parte, inizia nel modo seguente:

Il cerchio è una [figura] piana racchiusa da una linea. La figura è detta cerchio, e la linea che la racchiude circonferenza, se tutti i segmenti incidenti su di essi [tracciati] da un punto di quelli che giacciono all'interno della figura, sono tra di loro eguali.

La definizione trasmessa da tutti i manoscritti degli *Elementi*, invece, è la seguente:

Il cerchio è una figura piana racchiusa da una linea, che è detta circonferenza, [tale che] tutti i segmenti incidenti su di essa [tracciati] da un punto di quelli che giacciono all'interno della figura alla circonferenza del cerchio sono tra di loro eguali.

Il confronto tra i testi mostra che la definizione di cerchio di cui disponiamo era originariamente assente nelle redazioni precedenti a quelle pervenuteci degli *Elementi*, ma era già presente in Erone.

Tale circostanza suggerisce che tale definizione sia stata prelevata da Erone.

4.3.2 La definizione 22 degli *Elementi*

La provenienza da Erone risulta chiara anche nel caso della definizione 22 del I libro degli *Elementi*, che inizia con le seguenti parole:

*tra i quadrilateri il quadrato è quello che è equilatero e rettangolo,
l'eteromekes invece quello rettangolo ma non equilatero..*

La proposizione iniziale è evidentemente una corretta definizione di quadrato. Inoltre non vi è alcun motivo per dubitare sull'autenticità di questa definizione dato che Euclide utilizza i quadrati in proposizioni fondamentali degli *Elementi* come, ad esempio, nel teorema di Pitagora.

Tuttavia, non è chiara la presenza delle parole successive, in cui si definisce l'*eteromekes* (il rettangolo non quadrato). Del resto Euclide non utilizza la figura dell'*eteromekes* nel seguito degli *Elementi*. L'inserimento di tale definizione non è quindi comprensibile.

Tutti i commentatori considerano sia quest'ultima frase che il resto della definizione una interpolazione inserita per completezza.⁷ Dal confronto con le *Definizioni* di Erone nasce il sospetto sulla sua possibile origine.

Erone, infatti, definisce nella definizione 50 tutti i quadrilateri secondo una duplice ripartizione:

- equilateri e non equilateri;
- rettangoli e non rettangoli;

⁷Cfr., ad esempio, [6], vol. I, p. 62.

da cui scaturivano quattro casi:

- il quadrilatero equilatero e rettangolo, descritto nella definizione 51;
- l'*eteromekes*, descritto nella definizione 52 e definito esattamente come nella definizione 22 degli *Elementi*;
- il rombo (equilatero non rettangolo), descritto nella definizione 53. Le stesse parole sono presenti nella definizione 22, in seguito alle frasi riporotate. Come nel caso dell'*eteromekes*, il rombo non è mai usato nel testo degli *Elementi*.
- Il romboide, descritto nella definizione 54, che è un caso particolare dei quadrilateri non equilateri e non rettangoli. Anche questa definizione con una frase presente nella definizione 22 degli *Elementi*, successiva alla definizione di rombo e analogamente mai utilizzata negli *Elementi*.

Il sospetto che le definizioni di *eteromekes*, rombo e romboide, presenti nella definizione 22 degli *Elementi*, siano state attinte da Erone diviene certezza esaminando la conclusione della definizione presente nel testo di Euclide:

gli altri quadrilateri siano detti trapezi

Questa conclusione appare veramente misteriosa, soprattutto perchè:

- il termine trapezio viene qui utilizzato anche per descrivere i quadrilateri senza lati paralleli;
- la parola trapezio proviene dal greco $\tau\rho\alpha\pi\epsilon\xi\alpha$ che significa 'tavola' (in particolare quelle usate per le mense). La proprietà dei trapezi di avere due lati paralleli doveva quindi aver caratterizzato il suo significato sin dalla sua prima introduzione nel linguaggio della geometria.
- Euclide utilizza il termine trapezio, nel senso attuale, nella sua opera *Sulla divisione delle figure*. Lo stesso utilizzo del termine è presente nella letteratura successiva: ad esempio nella classificazione dei quadrilateri che Proclo attribuisce a Poseidonio.

Anche l'uso del termine 'trapezio' negli *Elementi* può essere facilmente spiegato come una trascrizione da Erone che, dopo le definizioni 55, 56, 57, 58 relative ai parallelogrammi e ad altre figure (come lo gnomone) con lati paralleli, presenta nelle *Definizione* la definizione 59:

i quadrilateri rimanenti sono trapezi o trapezoidi

Osserviamo che il mancato inserimento delle definizioni 55, 56, 57 e 58, presenti nelle *Definizioni*, nel testo di Euclide è spiegabile con la locazione del concetto di parallelismo, introdotto nella definizione 23 del libro I degli *Elementi*.

In definitiva, la definizione 22 degli *Elementi* coincide con quella che si ottiene aggiungendo alla definizione di quadrato la trascrizione di tutte le definizioni di Erone riguardanti i quadrilateri e che non usano il termine 'parallelo'.

La definizione 22, se si eccettua la proposizione iniziale, risulta chiaramente spuria e facilmente interpretabile ammettendone la derivazione da Erone. La stessa definizione diviene difficilmente interpretabile in caso contrario.

4.3.3 Osservazioni

Dal confronto, tra le definizioni 15 e 22 del libro I degli *Elementi* e le definizioni presenti nel papiro ercolanense ed in Erone, emergono ulteriori contaminazioni tra il testo di Erone e quello di Euclide, riguardanti anche le definizioni.

E' possibile concludere che:

- il testo originale di Euclide conteneva alcune delle definizioni che attualmente sono presenti, come quella di cerchio.
- Euclide non esitava ad usare termini geometrici non definiti esplicitamente, come nel caso del termine circonferenza, assente originariamente nella definizione 15 del primo libro degli *Elementi*, utilizzato nelle

definizioni successive. Diventa quindi ancora più irragionevole supporre che le sette definizioni degli enti geometrici fondamentali, presenti nel primo libro, siano autentiche.

- Le *Definizioni* di Erone contenevano sia illustrazioni ed ampliamenti delle definizioni di Euclide (come quella di cerchio) che definizioni di enti geometrici che l'autore degli *Elementi* non aveva definito (come quelle di circonferenza, *eteromekes*, rombo, trapezio e trapezoide).
- L'uso di termini geometrici non precedentemente definiti fu evitato in età imperiale, in alcuni casi inserendo nel testo degli *Elementi* definizioni originariamente assenti.
- Alcune delle definizioni presenti nel libro I degli *Elementi* sono state certamente tratte dalle *Definizioni di Erone*.

4.4 L'analisi delle fonti

Abbiamo già analizzato la prefazione di Erone, che fornisce un supporto importante a favore della tesi preposta.

Esistono altre due importanti testimonianze, di Sesto Empirico (che rappresenta una delle principali fonti di informazione sul pensiero ellenistico) fondamentali ai fini della trattazione.

La prima testimonianza che sarà presa in analisi è estratta dai *Lineamenti del Pirronismo*,⁸ in cui Sesto Empirico discute esplicitamente le 'definizioni'.

Come premessa bisogna osservare che l'opera in questione è un'esposizione dello scetticismo. Il fine della discussione sulle 'definizioni' è quello di escludere ogni possibile funzione delle 'definizioni'.

⁸[10], vol. I, p. 284.

L'argomentazione di Sesto Empirico, analoga a quella che usa contro i postulati, è la seguente:

E giacchè, se ci proponiamo di definire tutto, non definiamo nulla, rinviando all'infinito [ogni definizione], mentre se ammettiamo che alcune cose possano essere comprese senza definizione, stiamo dichiarando che le definizioni non sono necessarie per la comprensione...perciò o non definiremo nulla o dichiareremo le definizioni non necessarie

In prima analisi è doveroso osservare che Sesto Empirico non poteva certo criticare l'uso delle definizioni da parte dei matematici senza prendere in considerazione gli *Elementi* di Euclide, ossia l'opera che, basata su delle definizioni, era alla base di tutti gli sviluppi successivi. Lo stesso Sesto Empirico, inoltre, dimostra più volte di conoscere bene l'opera di *Euclide*.

La scelta metodologica di Euclide riguardo alle definizioni deve essere quindi tra le due possibilità prese in considerazione da Sesto. Dato che Euclide non aveva evidentemente elencato infinite definizioni, il passo riportato suggerisce fortemente che nel testo degli *Elementi* a disposizione di Sesto 'si ammettesse che alcune cose possano essere comprese senza definizione', ovvero che tale redazione non contenesse le definizioni degli enti fondamentali.

Inoltre, il brano dimostra che all'epoca di Sesto Empirico (200 d.C.) era certamente presa in considerazione la possibilità di costruire definizione a partire da alcuni enti non definiti. Dato che nel 200 d.C. le conoscenze scientifiche risalivano quasi esclusivamente al III e al II sec. a.C., sembra assurdo pensare che Sesto Empirico avesse preso in considerazione questa possibilità se non fosse stata la scelta metodologica dei matematici del periodo aureo.

Il secondo passo di Sesto Empirico che verrà analizzato, estratto dall'opera *Contro i matematici*,⁹ sembra fornire un argomento a favore dell'autenticità delle prime sette definizioni del libro I di Euclide.

⁹[10], vol. IV, p. 254.

Sesto scrive:

Perciò essi [i matematici] descrivendo questi [enti] dicono che il punto è un segno senza parti e senza estensione, o l'estremità di una linea...

Dato che le frasi 'il punto è un 'segno' senza parti' e la successiva caratterizzazione del punto, come estremità di una linea, coincidono con le prime due definizioni del libro I degli *Elementi*, i commentatori interpretano in genere la frase di Sesto come una citazione dell'opera di Euclide.

Tuttavia, quest'ultima osservazione è contestabile, per diverse ragioni.

In particolare:

- le definizioni inserite negli *Elementi* sono menzionate insieme ad una terza caratterizzazione: la mancanza di estensione. Ciò rende difficile interpretare questo passo come una citazione di Euclide.
- nessuna delle tre caratteristiche del punto riportate nel passo di Sesto è considerata come definizione: nel brano citato, infatti, si parla di frasi che i matematici dicono 'descrivendo'. Dato che negli *Elementi* non vi sono descrizioni ma solo definizioni, questo passo difficilmente può riferirsi ad Euclide. Inoltre, lo stesso Sesto, in un altro passo, riporta la definizione di cerchio riferendosi ai matematici 'che definiscono'.

Non è difficile individuare il matematico cui effettivamente Sesto Empirico si riferisce, giacchè si tratta evidentemente di Erone.

Infatti, la descrizione di punto riportata da Sesto coincide quasi del tutto (salvo la sostituzione di un aggettivo che comunque sembra essere un errore del copista) con il primo brano della lunga illustrazione di punto inserito da Erone nel primo brano delle sue *Definizioni*.

Inoltre, il passo di Sesto Empirico continua come segue:

la linea è lunghezza senza larghezza o l'estremità di una superficie,
la superficie l'estremità di un corpo o larghezza senza profondità.

Analogamente al caso precedente, queste frasi appaiono sia negli *Elementi* che nelle *Definizioni*, tranne la definizione di superficie come estremità di un corpo, presente solo nel testo di Erone.

Risulta chiaro, quindi, che Sesto Empirico, parlando di matematici che 'descrivono' si riferisse ad Erone. Tuttavia, gran parte dei commentatori di Sesto Empirico non ha potuto individuare in Erone il matematico citato, dato che la datazione più probabile di Erone è stata considerata il III sec. d.C., successiva a Sesto Empirico, finchè Neugebauer¹⁰ la fissò finalmente alla seconda metà del I sec. d.C. (più di un secolo prima di Sesto).

L'attribuzione del passo riportato ad Erone appare un'importante conferma alla tesi preposta. Se infatti le definizioni di punto e di linea presenti negli *Elementi* fossero autentiche, risulterebbe incomprensibile la scelta di Sesto Empirico di criticare le 'descrizioni' di Erone invece di criticare direttamente le 'definizioni' di Euclide, preferendo quindi un'opera di divulgazione del trattato euclideo.

4.5 Confronto tra le due serie di definizioni

Il confronto tra le prime sette definizioni del libro I degli *Elementi* ed i brani corrispondenti delle *Definizioni* di Erone fornisce diversi argomenti a favore della non autenticità delle definizioni degli enti geometrici fondamentali presenti nell'opera di Euclide.

In primo luogo è riscontrabile nelle definizioni in analisi la stessa identità letterale che, anche se appare una naturale conseguenza di un lavoro di redazione compiuto con lo spirito di un copista, mal si concilia con l'intenzione di 'descrivere' i concetti geometrici da parte di una personalità come

¹⁰[13].

Erone, certamente dotata di autonomia intellettuale. Si può naturalmente pensare che Erone, riguardo alle prime sette definizioni del primo libro degli *Elementi*, avesse scelto di citare Euclide. Tuttavia quest'ultima possibilità non spiega come mai l'autore delle *Definizioni* non abbia separato le citazioni dai suoi commenti, facendone frasi distinte.

In secondo luogo, risulta molto sospetta la circostanza che il punto e la linea siano definiti ciascuno due volte (il punto nelle definizioni 1 e 3 e la linea nelle definizioni 2 e 6). E' molto strano che ad Eulide sia sfuggita una tale incongruenza logica. Inoltre, il fine di tutto il trattato è proprio quello di trovare la strada logicamente più breve dalle definizioni più semplici ai teoremi relativamente più complessi e duplicare definizioni mal si concilia con questo scopo. D'altra parte, anche nel caso delle proposizioni dimostrate due volte negli *Elementi* si è potuta sempre provare l'origine spuria di almeno una delle dimostrazioni.

La presenza di definizioni duplici è facilmente spiegabile accettandone la derivazione da Erone. E' naturale, infatti, che il compilatore della redazione degli *Elementi* che ci è stata tramandata, dovendo decidere quali delle frasi di Erone conservare come 'definizioni' da inserire nel testo, in alcuni casi abbia potuto essere così indeciso da preferire conservarne due.

E' il caso, ad esempio, del punto. Erone scrive:

Il punto è ciò che non ha parti ed un'estremità senza estensione o le estremità di una linea ed essendo qualcosa senza parti e senza estensione può essere solo afferrato con il pensiero. Dicono che sia come l'attimo di tempo o come un'unità dotata di posizione. Ha dunque la stessa natura dell'unità, in quanto entrambi sono indivisibili, incorporei e senza parti; essi differiscono però...

Un lunga illustrazione discorsiva di questo tipo non poteva essere inserita nella stringata prosa degli *Elementi*. L'espedito più ovvio, al fine di limare la distanza stilistica dal trattato di Euclide, sarebbe stato quello di troncare il brano di Erone trascrivendone solo la prima proposizione. Le prime

cinque parole del brano di Erone ('il punto è ciò che non ha parti') costituiscono effettivamente la definizione 1 contenuta nel libro I degli *Elementi*. Non sarebbe però stato facile rinunciare a tutte le altre caratterizzazioni, in particolare a quella di punto come estremità di una linea, presente negli *Elementi* come definizione 3.

Si possono trarre conclusioni analoghe anche riguardo alle due definizioni di linea.

Tra le varie traduzioni della definizione 4 degli *Elementi*, la migliore, già esposta in precedenza, è forse la seguente:

linea retta è [quella] che giace allo stesso modo rispetto a [tutti] i suoi punti.

Il significato di questa definizione rimane oscuro. L'unica interpretazione possibile sembra quella secondo cui la linea retta sia 'vista' da tutti i suoi punti allo stesso modo, in altre parole che esistono movimenti rigidi che, lasciando invariata la linea, portino alla sovrapposizione di due qualsiasi dei suoi punti. Tale proprietà, che Apollonio aveva chiamato 'omeomerismo', non caratterizza però la retta, in quanto è condivisa dalle eliche cilindriche e, restringendosi alle curve piane, dalle circonferenze. Quest'ultima osservazione non poteva certo sfuggire ad Euclide.

Come nel caso del punto, le misteriose asimmetrie appena descritte sono facilmente spiegabili ricorrendo ad Erone.

La 'definizione' di Erone inizia con la frase:

linea retta è [quella] che allo stesso modo rispetto a [tutti] i suoi punti giace dritta e tesa al massimo tra gli estremi.

L'origine di questa caratterizzazione è individuabile con ragionevole sicurezza in Archimede che, all'inizio del primo libro dell'opera *Sulla sfera e sul cilindro*,¹¹ aveva assunto che tra tutte le linee con le stesse estremità il segmento di retta avesse minima lunghezza. La dipendenza da Archimede

¹¹[14], p. 10.

diviene più chiara analizzando il seguito dell'illustrazione di Erone, che in particolare utilizza il superlativo di Archimede 'più breve'. Erone però, volendo trasformare il passo di Archimede in una caratterizzazione della linea retta, non poteva evidentemente limitarsi ad una data coppia di punti, ma doveva aggiungere che la proprietà individuata da Archimede doveva verificarsi 'allo stesso modo ripetuto a [tutti] i suoi punti'. La frase di Erone risulta quindi del tutto chiara.

Si può quindi supporre che il redattore degli *Elementi*, essenzialmente un copista e non un matematico di qualche valore, abbia deciso di inserire i primi brani delle illustrazioni di Erone come 'definizioni' con cui iniziare gli *Elementi* e abbia troncato la frase di Erone non appena si potesse ottenerne una proposizione sintatticamente corretta, anche se priva di contenuto matematico. Seguendo questo procedimento si ottiene esattamente la 'definizione' inserita nel testo di Euclide. Ciò dimostra l'attendibilità della ricostruzione.

4.6 Conclusioni

Dalle considerazioni svolte in quest'ultimo capitolo si deduce che:

- Euclide non aveva affatto inserito nel libro I le prime sette definizioni, lasciando correttamente indefiniti gli enti fondamentali.
- In età imperiale il decadimento del livello scientifico rese incomprensibile la scelta di Euclide e la mancanza delle definizioni degli enti primitivi apparve una lacuna del testo degli *Elementi*
- Tale lacuna fu colmata inserendo nel testo degli *Elementi* estratti delle *Definizioni* di Erone di Alessandria, che aveva attinto liberamente sia alla tradizione pre-ellenistica che ai matematici del III sec. a.C..

Bibliografia

- [1] Peter M. Fraser, *Ptolemaic Alexandria*, 3 voll., Clarendon, Oxford 1999.
- [2] Lucio Russo, *La rivoluzione dimenticata, il pensiero scientifico greco e la scienza moderna*, ed. Feltrinelli, Milano 1996; terza edizione riveduta e ampliata nell' 'Universale Economica'-SAGGI ottobre 2003.
- [3] Charles Singer, *Storia della tecnologia*, Torino 1966; traduzione di *A History of Technology*, 5 voll., Clarendon, Oxford 1954-58.
- [4] Fabio Bellissima e Paolo Pagli, *Consequentia mirabilis. Una regola logica tra matematica e filosofia*, Leo S. Olschki, Firenze 1996.
- [5] *Euclidis Opera Omnia*, ed. J. L. Heiberg, H. Menge, 9 voll., Teubner, Leipzig 1883-1916.
- [6] *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, translated with introduction and commentary by Thomas L. Heath, Cambridge University Press, Cambridge 1925; ristampa Dover, New York 1956.
- [7] Morris Kline, *Storia del pensiero matematico*, 2 voll., ed. Einaudi 1999; traduzione di *Mathematical Thought from Ancient to modern Times*, 1972.
- [8] Lucio Russo, *Sulla non autenticità delle definizioni degli enti geometrici fondamentali contenute negli Elementi di Euclide*, in 'Bollettino dei classici', Accademia dei Lincei, 13 (1992), pp. 25-44.

-
- [9] *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii*, ed. G. Friedlein, Leipzig 1873.
- [10] Sextus Empiricus, translated by R.G. Bury, London 1949, 4 voll..
- [11] *Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia*, vol. IV: *Heronis definitiones cum variis collectionibus Heronis quae feruntur geometrica*. Copiis Guilelmi Schmidt usus edidit J.L. Heiberg, Leipzig 1899.
- [12] A. Rome (ed.), *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*. Tome II: Théon d'Alexandrie, *Commentaire sur les livres 1 et 2 de l'Almageste*, Città del Vaticano 1936.
- [13] O. Neugebauer, in 'Kgl. Danske Vidensk. Selsk, hist.-filol. medd.' 26, 2 e 7 (1938 e 1939).
- [14] *Archimède*. Texte établi et traduit par Charles Mugler, Paris 1971. Tome I.
- [15] Giamblico, *In Nicomachi Arithmeticae introductionem*, ed. N. Pistelli, Leipzig 1894.