Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Dipartimento di Matematica

DIDATTICA E STORIA DEI QUADRATI MAGICI

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Candidato:
IVAN CASALBONI

Relatore:
Prof. GIORGIO BOLONDI

Sessione III

Anno Accademico 2008 - 2009

Indice

Introduzione

DEFINIZIONE 0.1 (Quadrato magico). Un ***quadrato magico*** é uno schieramento di numeri interi positivi distinti in una tabella quadrata tale che la somma dei numeri presenti in ogni riga, in ogni colonna e in entrambe le diagonali dia sempre lo stesso numero; tale intero é denominato la **costante di magia** o **costante magica** o **somma magica** del quadrato.

DEFINIZIONE 0.2 (Quadrato magico, definizione piú rigorosa). Con il *linguaggio della matematica*, se n é un intero maggiore di 2, si definisce ***quadrato magico*** ogni matrice quadrata di ordine n a valori interi e iniettiva tale che le somme delle entrate di ciascuna delle righe, di ognuna delle colonne e di entrambe le diagonali abbiano lo stesso valore intero.

Un quadrato magico di ordine n le cui entrate sono gli interi consecutivi da 1 a n^2 viene talvolta detto **quadrato magico perfetto** o **quadrato magico normale**.

I quadrati magici normali esistono per tutti gli ordini n escluso $n = 2$, anche se il caso $n = 1$ é insignificante - esso infatti consiste in una sola casella che contiene il numero 1. Il piú piccolo caso non banale é di ordine 3, un esempio del quale é visibile sotto.

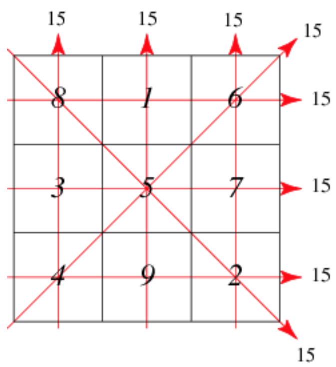


FIGURA 1. Quadrato magico di ordine 3 e costante di magia 15.

La *costante magica* é data dalla formula:

$$M_2(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{1}{2}n(n^2+1)$$

I primi 15 componenti di questa successione sono : 1, 5, 15, 34, 65, 111, 175, 260, 369, 505, 671, 870, 1.105, 1.372, 1.695.

La **costante magica** per un quadrato magico di un generico ordine n che parte da un **intero** A e con entrate in **progressione aritmetica** crescente con differenza D tra i termini é:

$$M_2(n; A, D) = \frac{1}{2}n[2A + D(n^2-1)]$$

(Hunter e Madachy, 1975)

É un problema irrisolto quello di determinare il numero di quadrati magici di un ordine arbitrario, ma il numero di quadrati magici distinti (esclusi quelli ottenuti per rotazione e riflessione) di ordine 1, 2, ... é 1, 0, 1, 880, 275.305.224, ...

CAPITOLO 1

Storia dei quadrati magici

1. Il *Lo Shu*

Quadrati e cubi magici sono straordinarie configurazioni numeriche, di grande tradizione. Ai confini tra il gioco e la matematica, sono un'affascinante sfida alla nostra intelligenza.

Il primo quadrato magico, il piú antico, risale addirittura all'Antica Cina, ai tempi della dinastia Shang, nel 2000 a.C.. Esso é originario della Cina. Una delle leggende che lo riguardano dice che intorno al 2800 a.C. si ebbe una disastrosa piena del fiume 'Lo' (un affluente del fiume Giallo) causata dall'ira del dio del fiume e che la popolazione offrí dei sacrifici al dio per far cessare il disastroso evento. Dopo ogni sacrificio dal fiume emergeva una tartaruga, ma la furia del fiume non si placava. Solo dopo vari tentativi un bambino si accorse che la tartaruga inviata dal dio aveva segnati sul guscio degli strani segni geometrici. Un pescatore portó la tartaruga all'imperatore e i matematici al suo servizio, studiando quei segni, scoprirono un'imprevedibile struttura: un quadrato di numeri con somma costante 15 su ogni riga, colonna o diagonale. Questo, secondo loro, significava che il dio chiedeva un sacrificio di 15 entitá e l'accoglimento del messaggio portó alla fine della piena.

Piú tardi, circa 400 anni prima della nascita di Cristo, gli stessi segni furono interpretati come un quadrato magico $3 \cdot 3$, il primo della storia. Tale quadrato magico, chiamato *Lo-Shu*, cioé *'Il saggio del fiume Lo'*, era realizzato non con cifre, ma con piccoli cerchietti all'interno di ciascuna casella. *Lo Shu* diventó uno dei simboli sacri della Cina, rappresentazione dei piú arcani misteri della Matematica e dell'Universo.

Con quel tipo di grafica il *Lo-Shu* é diventato successivamente anche forma di ornamento in ampie aree dell'Asia, assumendo un valore simbolico e propiziatorio legato alla credenza che un quadrato magico del genere, inciso su una piastra di metallo prezioso o nel cuoio, e portato al collo, potesse proteggere da gravi malattie e calamitá. Questa tradizione perdura ancora oggi in alcuni paesi orientali, dove questi simboli vengono incisi anche su utensili di uso quotidiano come ciotole e recipienti per la conservazione di erbe o di pozioni medicinali.

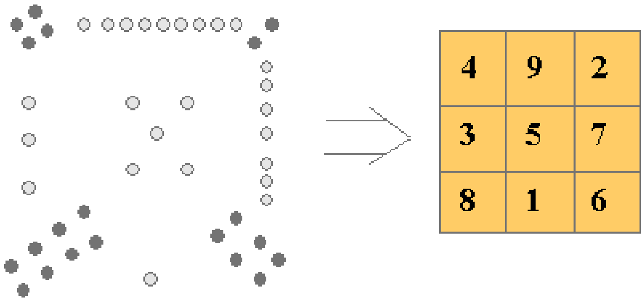


Figura 1. I segni sul guscio della tartaruga e la loro traduzione in numeri.

Questa configurazione é stata considerata un simbolo dell'armonia universale: i numeri da 1 (l'inizio di tutte le cose) a 9 (il completamento) sono considerati benauguranti, soprattutto il 5 centrale. La somma magica 15 si interpreta come la durata di ciascuno dei 24 cicli dell'anno solare cinese. Nell'antica Cina ci si ispirava a questo quadrato per progettare templi e cittá suddivise in $3 \cdot 3$ settori.

In questa tabella sono riportati alcuni dei collegamenti, stabiliti nell'antica Cina, con i numeri dello *Shu*.

Numeri dello Shu	**Punti cardinali**	**Colori**	**Elementi**
1	Nord	Bianco	Acqua
2	Sudovest	Nero	Terra
3	Est	Blu	Legno
4	Sudest	Verde	Legno
5	Centro	Giallo	Terra
6	Nordovest	Bianco	Metallo
7	Ovest	Rosso	Metallo
8	Nordest	Bianco	Terra
9	Sud	Porpora	Fuoco

Forse la sua origine non é poi cosí antica e la sua comparsa si puó far risalire in realtá al IV secolo a.C.. La prima traccia scritta si trova nel *Ta Tai Li Chi*, una fedele trascrizione di antichi riti, compilata da Tai il Vecchio nel primo secolo d.C.. Le proprietá piú interessanti del *Lo Shu* sono collegate alla teoria dello Yin-Yang, secondo la quale ogni cosa deriva dall'armoniosa opposizione di due originali forze cosmiche, lo Yin e lo Yang, rappresentate da migliaia di anni nella forma circolare dell'antica saggezza.

Yang, per i cinesi, é la forza maschile, sorgente di calore, di luce e di vita, sotto l'influenza del Sole; Yin é invece la forza femminile, che si sviluppa al buio, al freddo e nell'immobilitá, sotto l'influenza della Luna. Nel *Lo Shu* i numeri pari rappresentano l'elemento maschile yang, mentre i numeri dispari rappresentano l'elemento femminile yin. Il numero 5 rappresenta la Terra e gli altri numeri rappresentano i punti cardinali e le stagioni. Ad esempio, 1 é il Nord e l'inverno, il 9 é il Sud e l'estate, il 3 l'Est e la primavera, il 7 l'Ovest e l'autunno. Attorno al 5 si alternano coppie di numeri che rappresentano i quattro elementi: l'acqua, 1 e 6, il fuoco, 2 e 7, il legno 3 e 8 e il metallo, 4 e 9. Vediamo alcune proprietá aritmetiche di questo quadrato.

Il numero centrale, il 5, é la media aritmetica di tutte le coppie di numeri opposti(1 e 9, 8 e 2, 3 e 7). Se si moltiplica il numero centrale 5 per l'ordine del quadrato, cioé 3, si ottiene il valore della somma costante, cioé 15. E sempre il numero centrale moltiplicato per l'ordine, elevato al quadrato, é uguale alla somma totale dei numeri che compongono il quadrato magico: $5 \cdot 3 = 15$ e $5 \cdot 3^2 = 45$. Queste formule valgono per qualsiasi quadrato magico di ordine dispari. E quindi anche per quadrati $5 \cdot 5$, $7 \cdot 7$ e cosí via. L'indagine venne poi estesa ai quadrati di ordine superiore.

2. Dall'antichitá ai giorni nostri

I quadrati magici hanno affascinato l'umanitá durante i secoli e fanno parte della civiltá da oltre 4000 anni. Essi si trovano in un certo numero di culture, compresa quella dell'Egitto e dell'India, sono incisi sulla pietra o sul metallo e sono considerati come una sorta di talismani. L'opinione diffusa é che i quadrati magici abbiano qualitá astrologiche e divine: il loro uso garantisce la longevitá e la prevenzione dalle malattie. Ad esempio il *Kubera-Kolam* , una pittura del pavimento usata in India, é sotto forma d'un quadrato magico di ordine tre. É essenzialmente lo stesso del quadrato del *Lo Shu*, ma con il numero 19 aggiunto ad ogni numero e la costante di magia risulta quindi 72.

23	28	21
22	24	26
27	20	25

Il primo quadrato magico di ordine 4 venne realizzato dall'astrologo indiano *Varahamihira* nel VI secolo d.C.. Solo nell'XI secolo, sempre grazie ad un indiano, si giunge ad una elaborazione di ordine 4 con caratteristiche veramente innovative e sorprendenti. Definito all'epoca come **'magicamente magico'** e oggi **'diabolico'**, questo quadrato contiene la propria costante magica non solo nei punti canonici, ma anche in oltre 40 ulteriori posizioni simmetriche e ordinate. I quadrati magici erano ben noti ai matematici arabi probabilmente fin dal settimo secolo, quando gli arabi entrarono in contatto con la cultura indiana e quella sud-asiatica ed impararono la matematica e l'astronomia indiane, comprese altre funzioni della matematica combinatoria. Inoltre é stato suggerito che l'idea provenisse dalla Cina.

I primi quadrati magici di ordini 5 e 6 comparvero in un'enciclopedia di Baghdad nel 983 d.C. circa, il *Rasa'il Ihkwan al-Safa* (*l'Enciclopedia dello stile della purezza*); ma pare che alcuni piú semplici fossero conosciuti da parecchi matematici arabi negli anni precedenti. Il matematico arabo Ahmad Al-Buni, che lavoró ai quadrati magici intorno al 1200 d.C., ha attribuito loro alcune proprietá mistiche, anche se nessun particolare di queste presunte proprietá ci é pervenuto. Ci sono inoltre riferimenti all'uso dei quadrati magici nei calcoli astrologici, una pratica anch'essa che sembra iniziare con gli arabi.

Un ben noto e antico quadrato magico fu trovato nel tempio di Parshvanath Jain a Khajuraho. Esso é datato X secolo e si riferisce al *Chautisa Yantra* dato che la somma di ogni sotto quadrato (ovvero ogni quadrato $2 \cdot 2$ contenuto in esso), oltre che la costante magica, é 34.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Nel X secolo i cinesi conoscevano quadrati fino all'ordine 10, oltre a catene di cerchi e cubi magici non perfetti. Queste strutture giunsero in Europa relativamente tardi. Nel 1300, analizzando il lavoro dell'arabo Al-Buni, l'erudito bizantino greco **Manuel Moschopoulos** (circa 1265 - 1316) scrisse un trattato matematico a proposito dei quadrati magici, andando oltre il misticismo dei suoi predecessori. Si pensa che Moschopoulos fu il primo occidentale ad occuparsi dell'argomento. Intorno alla metá del XV secolo l'italiano **Luca Pacioli** studió queste strutture e raccolse tantissimi esempi. Nel 1510 circa **Heinrich Cornelius Agrippa** (1483 - 1535) scrisse il *De Occulta Philosophia*, basandosi sugli impianti ermetici e magici di Marsilio Ficino e Pico della Mirandola e in esso espose le virtú magiche dei sette quadrati magici degli ordini dal 3 al 9, ciascuno connesso con uno dei pianeti dell'astrologia. Egli li definí precisamente come

> *'tavole sacre dei pianeti e dotate di grandi virtú, poiché rappresentano la ragione divina, o forma dei numeri celesti'*

Questo libro ebbe molta influenza in Europa fino alla Riforma Cattolica e i quadrati magici di Agrippa, a volte denominati *Kameas* , continuano ad essere usati all'interno delle moderne cerimonie magiche piú o meno allo stesso modo in cui egli li prescrisse.

L'uso piú comune per questi *Kameas* é quello di fornire un modello su cui costruire i sigilli per gli spiriti, gli angeli o i demoni; le lettere del nome dell'entitá sono convertite in numeri e le linee sono tracciate attraverso il modello che questi numeri successivi fanno sul *kamea*. In un contesto magico, il termine quadrato magico é inoltre applicato ad una varietá di 'quadrati di parola' o di quadrati di numeri trovati nei *'grimories'* magici, compresi alcuni che non seguono alcun modello evidente e perfino alcuni con i numeri differenti di file e di colonne. Essi sono generalmente usati come talismani; ad esempio le loro incisioni su placche d'oro o d'argento venivano impiegate come rimedi, dalla peste al mal d'amore.

Per gli astrologi e gli studiosi di magia, poi, avevano speciali significati; cosí per il giá citato Cornelio Agrippa il quadrato magico di ordine 1 simboleggiava l'unitá e l'eternitá, l'inesistenza del quadrato magico di ordine 2 indicava l'imperfezione dei quattro elementi, mentre i sette quadrati magici degli ordini da 3 a 9 rappresentavano i sette pianeti allora conosciuti (la numerazione é stata assegnata rispettando l'ordine della sequenza planetaria nel sistema magico caldeo: 3 Giove, 4 Saturno, 5 Marte, 6 Sole, 7 Venere, 8 Mercurio, 9 Luna).

Uno tra piú noti quadrati magici é sicuramente quello che compare nell'incisione di **Albrecht Dürer** intitolata *Melancholia I*.

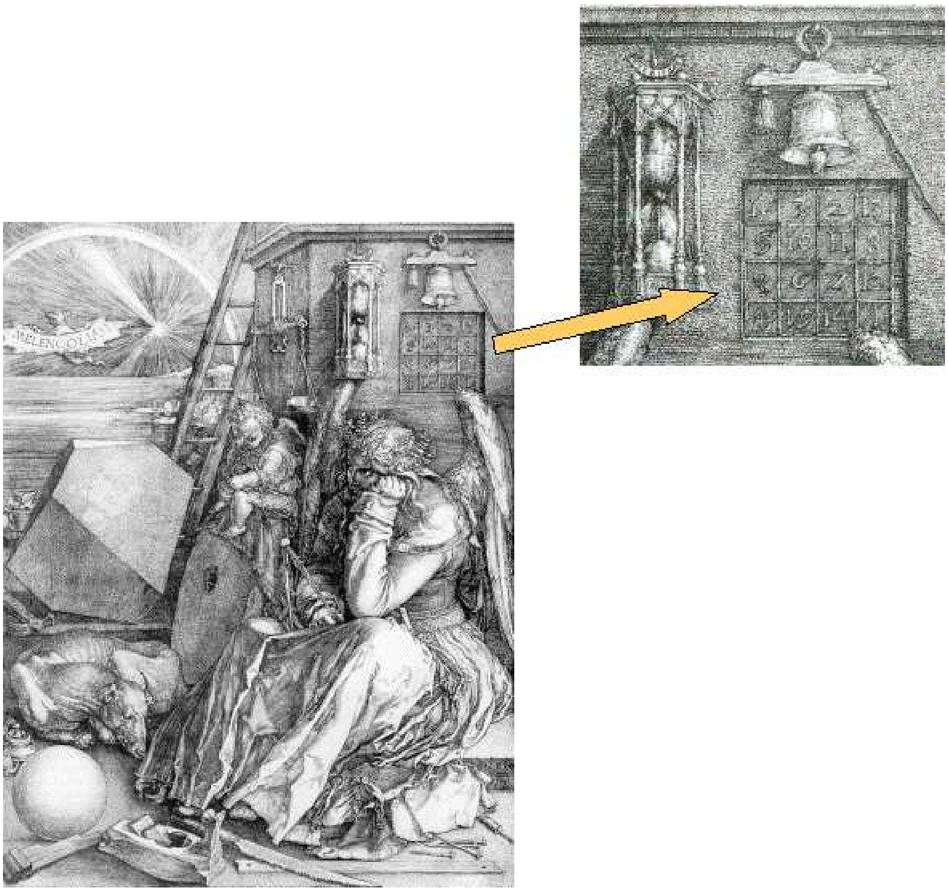


FIGURA 2. Uno dei piú celebri quadrati magici si trova alle spalle dell'angelo nell'incisione *Melancolia I* di Albrecht Dürer, 1514. Si osservi che la data del quadro, 1514, compare nella riga in basso del quadrato di ordine 4.

Nel 1599 Diego Palomino pubblicó a Madrid un'opera sui quadrati magici, ma non indicó alcun procedimento generale per costruirli. Un elegante metodo per trovare quelli di ordine dispari fu pubblicato nel 1612 da C.G. Bachet nei suoi *Problémes plaisant*; quello pubblicato nel 1691 da De La Loubére non ne differisce in maniera particolare. Un procedimento per la costruzione dei quadrati di ordine pari fu dato da **Frenicle De Bessy** in un'opera pubblicata nel 1693. Lo stesso Frenicle de Bessy (1605 - 1665), matematico francese amico di Cartesio e di Pierre de Fermat, nel 1663 calcoló il numero dei quadrati magici perfetti del quarto ordine: 880, con somma costante 34, su righe, colonne e diagonali. Solo grazie al computer si riuscí ad estendere il risultato, nel 1973, agli ordini superiori: i quadrati magici di ordine 5 sono 275.305.224. Non é noto il numero preciso dei quadrati magici di ordine 6, anche se molti sono impegnati nella sua determinazione. Secondo alcune indagini, il loro numero é nell'ordine di $1.7754 \cdot 10^{19}$. Resta comunque insoluto il problema piú generale di trovare la regola che permetta di determinare il numero di quadrati magici di ordine n.

3. Cenni sui cubi magici

Era logico che il matematico a un certo punto tentasse il passaggio alla terza dimensione, occupandosi di *cubi magici perfetti*, definiti come i cubi nei quali ogni quadrato é magico (ogni diagonale risulta magica e non soltanto le quattro diagonali principali). Il gioco si complica in modo incredibile, e il progresso in questo campo, prima dell'arrivo del computer, é stato molto lento.

Il primo cubo magico perfetto, di ordine 7, con i primi 343 numeri disposti in modo che su ogni possibile riga, colonna o diagonale la somma sia sempre 1204, venne scoperto soltanto nel 1866 da un missionario inglese, docente di matematica, il reverendo *Andrew H. Frost*.

Figura 3. Un quadro di *Gustavus Frankenstein* (1827 - 1893), il pittore appassionato di cubi magici. Il quadro é senza titolo e senza data.

Alcuni anni piú tardi *Gustavus Frankenstein*, pittore e matematico, scoprí il primo cubo magico di ordine 8, con somma costante 2052, e scrisse in proposito:

> *'Questa scoperta mi ha dato una soddisfazione superiore a quella che avrei provato se avessi scoperto una miniera d'oro nel mio giardino.'*

Sempre verso la fine dell'Ottocento vennero scoperti altri cubi magici perfetti di ordine 7, 8, 9, 11 e 12, mentre non si conosce alcun cubo perfetto di ordine 10, e non si sa nemmeno se esista.

É stato invece dimostrato che non esistono cubi magici perfetti di ordine 2, 3 e 4 (Schroeppel 1972, Gardner 1988).

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

FIGURA 4. Il quadrato magico $8{\cdot}8$ scoperto da Benjamin Franklin e pubblicato in un libro del 1767. La somma costante é 260, inoltre la somma su ogni mezza riga o colonna é 130.

E proprio di questi ultimi anni é la grande scoperta: i primi cubi magici di ordine 5 e 6.

Merito di un matematico tedesco, **Walter Trump**, e di un informatico francese, **Christian Boyer**, che insieme hanno trovato il cubo magico perfetto $5 \cdot 5 \cdot 5$, il piú piccolo dei cubi magici, tormento per piú di un secolo dei matematici i quali erano arrivati persino a dubitare della sua esistenza. *'Perfetto'* vuol dire che si ritrova la somma costante su qualsiasi riga, colonna o diagonale, nelle tre dimensioni e su ogni faccia del cubo stesso.

In questo cubo magico perfetto i numeri, da 1 a 125, hanno sempre 315 come somma costante su una qualsiasi delle 109 linee, righe, colonne o diagonali.

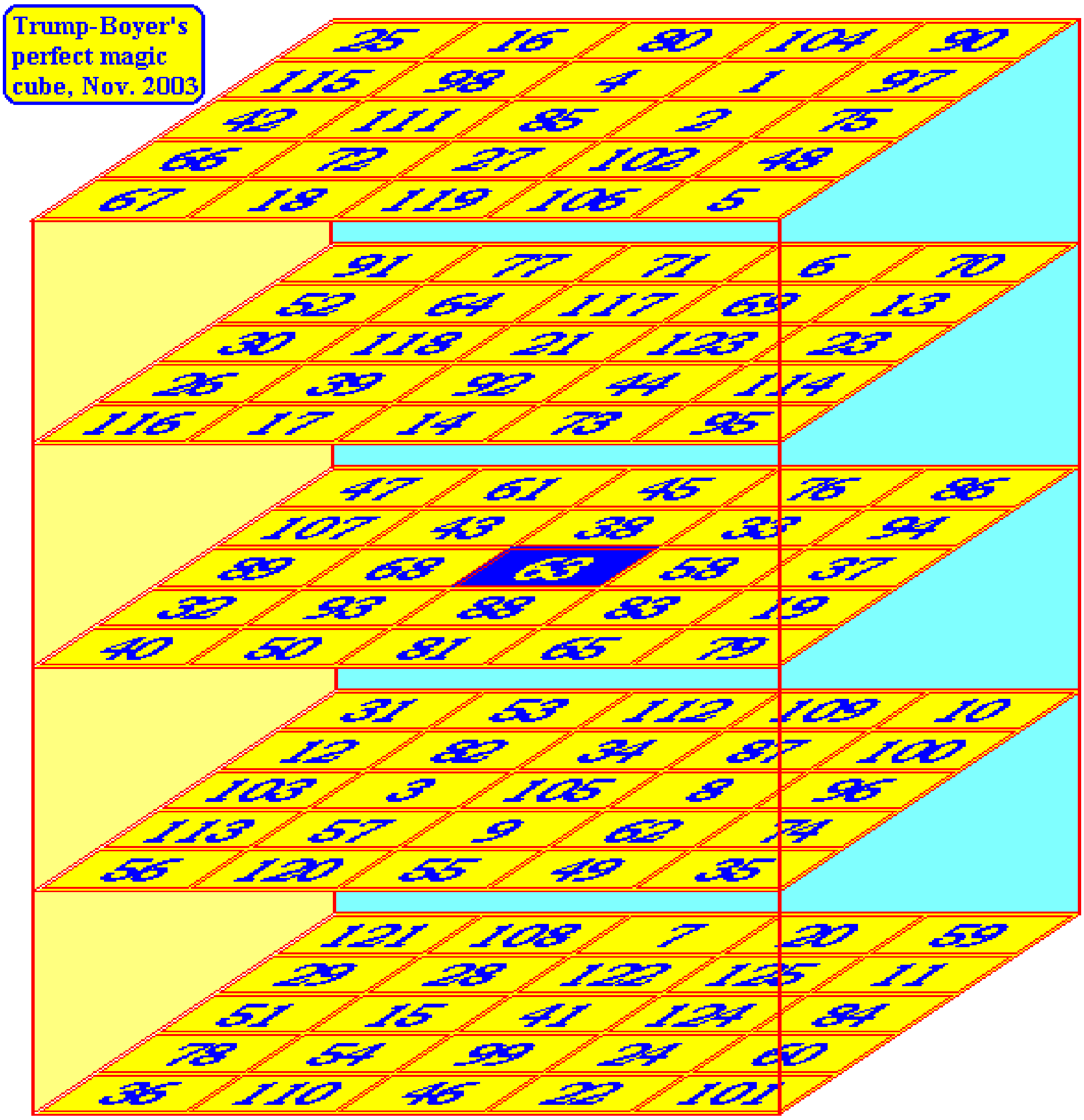


FIGURA 5. Il celebre cubo magico perfetto di ordine 5 di Trump-Boyer.

In generale, la formula che consente di trovare la somma costante su righe, colonne e diagonali, nelle tre dimensioni, é:

$$S(n) = \frac{1}{2}n(n^3 + 1)$$

Per raggiungere il loro obiettivo Boyer e Trump hanno utilizzato cinque computer che hanno lavorato contemporaneamente, a tempo pieno, per diverse settimane, sui dati inseriti dai due ricercatori.

Fino ad allora non si sapeva se potessero esistere cubi magici di ordine 5 o 6 (Wells, 1986), nonostante Schroeppel(1972) e Gardner(1988) avessero osservato che qualsiasi cubo magico perfetto di ordine 5 debba necessariamente avere un valore centrale di 63.

Poi, nel novembre del 2003, Trump e Boyer scoprirono il cubo magico perfetto di ordine 5 mostrato sopra (Schroeppel 2003, Boyer 2003). Come ci si aspettava questo cubo ha costante magica pari a 315 e valore centrale 63. Il metodo usato da Trump e Boyer consisteva nella costruzione di cubi ausiliari di ordine 3. Questi cubi erano centralmente simmetrici, il che significa che tutte le 13 linee di 3 numeri incluso il numero centrale soddisfacevano l'identitá $x + y + 63 = 189$ come pure un certo numero di altre caratteristiche parzialmente magiche.

Usando questi cubi ausiliari, Trump e Boyer effettuarono una grande ricerca al calcolatore per completare i numeri mancanti, soprattutto usando i numeri complementari che soddisfacevano la relazione $x + y + 189 = 315$. Come conseguenza di questa procedura, vi sono molte simmetrie presenti in questo cubo.

Dopo diverse settimane di ricerche al computer e la costruzione di piú di 80.000 cubi ausiliari diversi di ordine 3, Trump e Boyer trovarono il primo cubo magico perfetto conosciuto di ordine 5. L'annuncio della loro scoperta seguiva molto da vicino quella di Trump del settembre 2003, a proposito del primo cubo magico di ordine 6. Questo cubo fu scoperto usando tecniche simili a quelle usate per attaccare il cubo di ordine 5. Come si puó direttamente verificare,il cubo perfetto magico di Trump di ordine 6 ha costante magica pari a 651.

Boyer ha poi trovato quello piú grande fino ad oggi noto, di ordine 8.192, un cubo eccezionale, che resta sempre magico anche quando si elevano i suoi numeri al quadrato, al cubo o alla quarta potenza.

E se salissimo dalla terza alla quarta dimensione, quali ipercubi magici troveremmo? Il piú piccolo *ipercubo magico perfetto* é stato costruito da *J. Hendricks*, nel 1999. É di ordine 16 e la somma costante é 524.296.

4. I quadrati magici piú celebri

Ritornando invece ai quadrati magici, le pubblicazioni su di essi divennero sempre piú frequenti ed é cosí che apparvero le *Récréations* dell'Ozanam, il *Traité des quarrés sublimes* di Poignard (Bruxelles, 1704) e varie memorie di **L. Eulero**. Nel 1838 ci fu l'opera di Violle *Traité complet des carrés magiques pairs et impairs, simplex et composés, a bordures, compartiments, chassis, équerre, etc., suivi d'un traité des cubes magiques*, in due volumi. Tra il 1866 ed il 1886 videro la luce diversi studi come quelli di A. H. Frost ed M. Frolow, mentre nel 1894 E. Maillet pubblicó le sue ricerche per una teoria generale dei quadrati magici fondata sulla teoria generale delle sostituzioni di 'n' lettere e G. Arnoux l'opera *Les espaces arithmétiques hypermagiques*

(Parigi, 1894), in cui espose un metodo notevole per la costruzione dei quadrati magici d'ordine primo, poi esteso da A. Margossian in *De l'ordonnance des nombres dans les carrés magiques impairs* (Parigi, 1908) al caso di ordine composto qualunque.

Famosi quadrati magici nella storia sono:

- quello di ordine 4 che si trova nel grottesco intitolato *Melancolia*, inciso da *Albrecht Dürer*, nel 1514;
- il quadrato cosiddetto *del Sator*, con il quale si indica una struttura a forma di quadrato magico composta dalle cinque parole latine: SATOR, AREPO, TENET, OPERA, ROTAS, che, considerate di seguito, danno luogo ad un palindromo (frase che rimane identica se letta da sinistra a destra o viceversa). Disponendo le parole su una matrice quadrata, si ottiene una struttura che ricorda quella dei quadrati magici di tipo numerico. Le cinque parole si ripetono se vengono lette da sinistra a destra e da destra a sinistra, oppure dall'alto al basso o dal basso in alto. Al centro del quadrato la parola TENET forma una croce palindroma.
- quello di ordine 8, costruito nel 1767, da Benjamin Franklin.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

FIGURA 6. Il quadrato magico di Albrecht Dürer.

Il numero dei quadrati magici diversi che si possono costruire non é stato ancora definito per un ordine maggiore di 4, del quale, invece, é noto che ci sono 880 quadrati di base (senza, cioé, contarvi quelli che possono essere ottenuti con riflessioni e rotazioni); per quelli di ordine 5 é stato, di recente, calcolato un limite inferiore pari a 275.305.224 quadrati di base (Richard Schroeppel, 1973).

Da ció consegue che il numero dei quadrati di base di ordine 8 é necessariamente elevatissimo in quanto si é giá riscontrato come tale numero cresca in misura esponenziale passando da un ordine all'altro. Nella figura successiva, il piú noto quadrato magico di ordine 8, collegato al pianeta Mercurio, che si trova descritto nel libro di Cornelio Agrippa.

14	3	62	51	46	35	30	19
52	61	4	13	20	29	36	45
11	6	59	54	43	38	27	22
53	60	5	12	21	28	37	44
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Figura 7. Il quadrato magico di Benjamin Franklin.

Figura 8. Il quadrato del *Sator*.

8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

Figura 9. Il quadrato magico di Cornelio Agrippa.

CAPITOLO 2

La congettura di Eulero e le applicazioni moderne dei quadrati magici

1. Introduzione al problema

Storicamente, a proposito dei quadrati magici, é da segnalare un celebre risultato del 1959 che smentí clamorosamente quanto congetturato dal grande Eulero secoli prima.

Infatti la storia della matematica é piena di valutazioni fatte ad intuito da uomini dotati di grande introspezione matematica, abili congetture che spesso aspettano secoli prima di essere dimostrate essere valide o false. Quando ció avviene é un evento matematico di prima grandezza.

Nel 1959 alla riunione annuale della *American Mathematical Society* venne annunciata la negazione di una famosa ipotesi del grande matematico svizzero **Leonardo Eulero**, il quale aveva espresso la sua convinzione che non potessero esistere quadrati greco-latini di certi ordini.

Tre matematici, *Parker*, *Bose* e *Shrikhande* hanno completamente demolito la *congettura di Eulero*, individuando metodi per costruire un numero infinito di quadrati di questo tipo che per 177 anni si credevano impossibili da realizzare.

I tre matematici vennero soprannominati dai loro colleghi *'i guastafeste di Eulero'* e scrissero un breve resoconto della loro scoperta.

Definizione 2.1 (Quadrato latino). Un quadrato latino é un tipo di quadrato magico dove le caselle sono indicate con ordinarie lettere latine (secondo una prassi adottata dallo stesso Eulero), per esempio utilizzando le quattro lettere latine a, b, c, d si possono occupare le sedici caselle di un quadrato di ordine 4 in modo che ogni lettera si presenti una sola volta in ogni riga ed una sola volta in ogni colonna.

Analogamente si puó fare la stessa cosa per le lettere greche, per esempio con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ottenendo un quadrato greco.

Se sovrapponiamo questi due quadrati troviamo che ogni lettera latina si combina una ed una sola volta con ogni lettera greca, ed il quadrato combinato é detto **quadrato greco-latino**. La costruzione di questi quadrati greco-latini di ordine 4 é legata alla soluzione di un popolare gioco di carte del XVIII secolo: prendere tutti gli assi, re, regine e fanti da un mazzo di carte e sistemarli in un quadrato in modo che ogni riga e colonna contenga i quattro valori ed i quattro colori.

Aα	Bδ	Cβ	Dε	Eγ
Bβ	Cε	Dγ	Eα	Aδ
Cγ	Dα	Eδ	Aβ	Bε
Dδ	Eβ	Aε	Bγ	Cα
Eε	Aγ	Bα	Cδ	Dβ

FIGURA 1. Un quadrato greco-latino di ordine 5.

Al tempo di Eulero era giá noto come dimostrare che non sono possibili quadrati greco-latini di ordine 2. Si conoscevano quadrati di ordine 3, 4, 5 ma cosa si poteva dire circa quelli di ordine 6?

Eulero formuló il problema in questi termini, proponendo il cosiddetto *'Problema dei* 36 *ufficiali'*:

> *é possibile disporre su una piazza quadrata* 36 *ufficiali, provenienti a sei a sei da sei diversi reggimenti ed aventi, ciascuno di essi, sei gradi militari differenti, in* 6 *righe e* 6 *colonne da* 6 *ufficiali ciascuna, in modo che in ogni riga e in ogni colonna ci sia un ufficiale di ogni reggimento e di ogni grado?*

Eulero dimostró che il problema degli n^2 ufficiali, che é lo stesso che costruire un quadrato greco-latino di ordine n, puó sempre esser risolto se n é dispari o se n é *'completamente pari'*(cioé é un numero divisibile per 4). Sulla base di numerose prove egli enunció:

> *'Io non esito a concludere che é impossibile costruire un qualsiasi quadrato completo di* 36 *caselle e la stessa possibilitá si estende ai casi n=10, n=14 e in generale a tutti i numeri non completamente pari(numeri pari non divisibili per* 4*)'.*

Questo enunciato divenne famoso come **ipotesi di Eulero**. Piú formalmente puó enunciarsi cosí: *'non esiste una coppia di quadrati latini ortogonali di ordine* $n = 4k + 2$ *(*$n \equiv 2 (mod 4)$*) per qualsiasi intero positivo k'.*

DEFINIZIONE 2.2 (quadrati latini ortogonali o greco-latini). Due quadrati latini dello stesso ordine vengono detti *ortogonali* se la loro sovrapposizione (intesa come prodotto cartesiano ordinato) é ancora un quadrato latino. I quadrati latini ortogonali vengono detti anche *greco-latini*, poiché i simboli usati da Eulero erano le lettere latine a, b, c, d per il primo quadrato e le lettere greche $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ per il secondo.

Nel 1901 il matematico francese Gaston Tarry pubblicó una dimostrazione che l'ipotesi di Eulero valeva effettivamente per un quadrato di ordine 6. Egli lo provó nel modo piú faticoso, semplicemente elencando tutti i possibili modi di costruire un quadrato latino di ordine 6 e poi facendo vedere che nessuna coppia avrebbe formato un quadrato greco-latino. Ció rese piú forte l'ipotesi di Eulero e diversi matematici pubblicarono addirittura delle 'dimostrazioni' che l'ipotesi fosse vera, ma in seguito si vide che queste in realtá non riuscivano a dimostrare l'enunciato nella forma datagli da Eulero. Il lavoro necessario per sistemare la questione con un'enumerazione con carta e matita che esaurisca tutti i casi cresce rapidamente col crescere dell'ordine del quadrato. Il successivo caso incognito, quello di ordine 10, era di gran lunga troppo complicato per esser deciso in questo modo e nel 1959 era ancora quasi al di fuori delle capacitá dei calcolatori. L'ultima frase della memoria di Eulero dice:

> *'A questo punto chiudo la mia ricerca su una questione, che anche se di poca utilitá in se stessa, ci ha condotto ad importanti osservazioni in teoria delle combinazioni, come anche per la teoria generale dei quadrati magici.'*

Come giá detto, Eulero riteneva che la propria congettura valesse non solo per il caso $n = 6$, ma anche per ogni ordine n del tipo $n = 4k + 2$, $\forall n \in N$ e ció venne smentito nell'aprile del 1959 alla riunione della *American Mathematical Society (AMS)*, dai matematici E. T. Parker, R. C. Bose e S. S. Shrikhande, che provarono, al contrario, che l'ipotesi di Eulero é falsa per tutti i valori $n = 4k + 2$ con $n > 6$.

Il grande matematico svizzero ebbe comunque il merito di provare la risolubilitá del problema nel caso in cui n sia dispari o divisibile per 4. Dopo quanto detto, sorge allora spontanea la domanda: 'per quali valori di n esistono quadrati latini ortogonali e quanti quadrati latini mutuamente ortogonali é possibile costruire per questi valori?' Per dare una risposta (peraltro non completa) a questa questione, occorre qualche cenno riguardante i campi e in particolare modo i *campi finiti*.

2. Richiamo sui campi finiti

Definizione 2.3 (campo). Un insieme F dotato di due operazioni binarie, denotate con '+' e '$\cdot$', e dette somma e prodotto, viene detto *campo* se le due operazioni sono entrambe associative e commutative, se vale la distributivitá del prodotto rispetto alla somma, se esiste per entrambe le operazioni un elemento neutro, denotato rispettivamente con 0_F e 1_F , e se ogni elemento di F possiede un inverso rispetto ad entrambe le operazioni, escluso 0_F per il prodotto.

Non é difficile vedere che ogni campo contiene *un sottocampo minimo* che si puó identificare o con il campo dei numeri razionali Q, se il campo contiene infiniti elementi, o con il campo delle classi di resto modulo p, denotato con Z_p, con p primo. Andiamo a mostrare, dunque, tale risultato, ma prima sono necessarie alcune ulteriori definizioni.

DEFINIZIONE 2.4 (dominio d'integritá). Si dice *dominio d'integritá* un anello commutativo con unitá tale che $0 \neq 1$ in cui il prodotto di due qualsiasi elementi non nulli é un elemento non nullo. In altre parole, un dominio d'integritá é un anello commutativo privo di divisori dello zero. Piú precisamente, l'anello $(A, +, \cdot)$ é un dominio d'integritá se valgono le seguenti condizioni:

(1) $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in A$;
(2) $a \cdot b = 0 \rightarrow a = 0 \vee b = 0$.

La seconda legge viene detta *legge di annullamento del prodotto*. Equivalentemente, un dominio di integritá puó essere definito come un anello commutativo in cui l'ideale nullo $\{0\}$ é primo, o come sottoanello di un qualche campo.

DEFINIZIONE 2.5 (caratteristica). Se A é un anello, si definisce *caratteristica* di A e si denota con $caratt(A)$ il periodo di 1_A in $(A, +)$.

La caratteristica di A vale 0 se non esiste un intero positivo m tale che $m \cdot 1_A = 0_A$, che equivale a dire che 1 ha periodo infinito, oppure la si definisce come il piú piccolo intero positivo m tale che $m \cdot 1_A = 0_A$.

TEOREMA 2.1.
Se A é un dominio (d'integritá), allora o $caratt(A) = 0$ o $caratt(A) = p$, con p primo.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che A sia un dominio e che $caratt(A) \neq 0$. Sia $caratt(A) = m$. Se m non fosse primo, $m = m_1 \cdot m_2$, con $1 < m_1, m_2 < m$. Allora ne segue: $m \cdot 1_A = 0_A \Rightarrow m_1 \cdot m_2 \cdot 1_A = 0_A \Rightarrow (m_1 \cdot 1_A)(m_2 \cdot 1_A) = 0_A$, ma poiché A é un dominio, vale la legge di annullamento del prodotto, per cui $m_1 \cdot 1_A = 0_A$ oppure $m_2 \cdot 1_A = 0_A \Rightarrow$ assurdo, poiché per definizione m é il piú piccolo intero positivo tale che $m \cdot 1_A = 0_A$. □

Abbiamo ora tutti gli elementi per provare l'esistenza del sottocampo minimo.

TEOREMA 2.2.
Ogni campo F di caratteristica 0 *contiene un sottocampo isomorfo a* Q*; ogni campo F di caratteristica p, con p primo, contiene un sottocampo isomorfo a Z_p.*

DIMOSTRAZIONE. F, essendo un campo, in particolare é un anello. Considero allora l'omomorfismo fondamentale $f : Z \rightarrow F, 1 \rightarrow 1_F, m \rightarrow m \cdot 1_F$.

Se $caratt(F) = 0$, f é iniettiva, pertanto $\exists!$ omomorfismo di anelli iniettivo G: $Q \to$ F, dove Q é il campo dei quozienti di Z.

Quindi F contiene un sottocampo $G(Q)$ isomorfo a $Q \Rightarrow$ un campo di caratteristica 0 é infinito.

Se $caratt(F) \neq 0$, allora $caratt(F) = p$, con p primo, in quanto un campo, in particolare, é anche un dominio.

f non é iniettiva, $\ker\{f\} = (p) \Rightarrow F \supset f(Z) \cong \frac{Z}{\ker\{f\}} = \frac{Z}{(p)} = Z_p$. □

Il caso in cui il sottocampo minimo di un campo sia isomorfo a Z_p conduce alla teoria dei campi finiti, ovvero dei campi che contengono un numero finito di elementi, anche detti **campi di Galois**. Con altri elementi basilari di teoria dei campi si puó facilmente mostrare che il numero di elementi contenuti in un campo finito é sempre uguale alla potenza di un numero primo, ovvero che vale il seguente risultato.

Osservazione 1.
La cardinalitá di un campo F o é infinita o é p^n, ove p é un numero primo e $n \in N$.

Dimostrazione. Se $caratt(F) = 0$, allora $F \supset Q$, dunque F é infinito.

Se invece F é un campo finito, $caratt(F) = p$, con p primo. In tal caso Z_p é un sottocampo di F.

Ora: F é uno Z_p -spazio vettoriale di dimensione finita, cioé n, ed i suoi elementi saranno quindi del tipo $a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n$, con $a_i \in Z_p, e_i$ base canonica.

$\Rightarrow F \cong Z_p^n$ (come spazio vettoriale) $\Rightarrow \|F\| = p^n$. □

Ne deduciamo pertanto che l'ordine di un campo finito é la potenza di un primo.

É lecito chiedersi adesso se, dato un qualunque primo p e un qualunque numero naturale n, esista un campo finito con p^n elementi. La risposta (affermativa) viene data dal seguente teorema.

Teorema 2.3 (Teorema di Galois).
Dati comunque un numero primo p e un intero positivo n, esiste un campo con p^n elementi.

Dimostrazione. Consideriamo il polinomio $p(x) = x^{p^n} - x \in Z_p[x]$. Tale polinomio ha al piú p^n radici distinte, anzi ne ha esattamente p^n: ció deriva dal fatto che é coprimo con la sua derivata. Sia allora L il suo campo di spezzamento(ovvero il minimo campo che ne contiene i coefficienti e le radici), e sia

$$K = \{a \in L | a^{p^n} = a\}$$

Ovviamente $0_{Z_p} \in K$, $1_{Z_p} \in K$, e K contiene i coefficienti di $p(x)$. Gli elementi di K sono le radici di $p(x)$, perció la cardinalitá di K eguaglia il numero di radici distinte di $x^{p^n} - x$: $\|K\| = p^n$. Se riusciamo a dimostrare che K é un campo, allora seguirá la tesi, poiché K coinciderá con L. Per quanto accennato sopra, valgono peró le seguenti relazioni modulo p, $\forall a, b \in K$:

$$(a \pm b)^{p^n} = a^{p^n} \pm b^{p^n} = a \pm b$$
$$(a \cdot b)^{p^n} = a^{p^n} \cdot b^{p^n} = a \cdot b$$
$$(a \cdot b^{-1})^{p^n} = a^{p^n} \cdot (b^{p^n})^{-1} = a \cdot b^{-1}$$

Ció é sufficiente per concludere che K é un campo. Infatti le proprietá universali di associativitá, di commutativitá e di distributivitá vengono ereditate da K in quanto sottoinsieme del campo L; in piú, le operazioni sono interne per quanto appena visto, e l'elemento neutro di ciascuna di esse appartiene a K per le considerazioni fatte; infine con la prima e con l'ultima verifica si prova facilmente anche l'esistenza dell'inverso rispetto alle due operazioni per ogni elemento di K. Dunque K é un campo con p^n elementi. □

Si puó inoltre dimostrare che esiste sostanzialmente un unico campo finito con p^n elementi, a meno di isomorfismi. Concludiamo questo paragrafo con il seguente risultato.

Osservazione 2.
Il gruppo moltiplicativo di un campo finito é ciclico.

3. Gli m^2 ufficiali

Analizzeremo ora il seguente problema: dato m, quanti quadrati latini $m \cdot m$ mutuamente ortogonali possono essere costruiti? Consideriamo un problema simile a quello di Eulero con 16 ufficiali.

Potremmo essere interessati, fissata per esempio la disposizione degli ufficiali nel primo quadrato, a sapere in quanti modi si possono disporre gli ufficiali in altri quadrati latini mutuamente ortogonali e ortogonali al primo. (Per esempio, per un problema applicato all'analisi statistica tale questione potrebbe rivelarsi interessante per attenuare eventuali disparitá nella progettazione di esperimenti). Facendo varie prove con carta e penna, dato che 4 é un numero piccolo, oppure anche servendosi di un calcolatore, si arriva a concludere che *il massimo numero di quadrati latini di ordine* 4 *mutuamente ortogonali é* 3; ovviamente il quadrato latino di partenza é arbitrario, cosí come i successivi (che devono peró rispettare la proprietá di ortogonalitá).

Questo é un caso particolare che si inquadra bene nel prossimo teorema, che enuncia un risultato piú generale.

Teorema 3.1.

(1) *Scelto $m \in N$, non possono esistere piú di $m-1$ quadrati latini ortogonali.*

(2) *Se esiste un campo K con m elementi, allora esistono $m-1$ quadrati latini $m \cdot m$ mutuamente ortogonali.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Segue da una semplice considerazione sulla struttura dei quadrati $m \cdot m$. Numeriamo la prima riga di ogni quadrato con

$$1 \quad 2 \quad 3 \dots m$$

senza perdere di generalitá: infatti quest'operazione non influisce sulle proprietá di ortogonalitá dei quadrati latini. Consideriamo il simbolo di posto $(2,1)$ di ogni quadrato.

Per esso abbiamo $m-1$ scelte, poiché va escluso il caso in cui esso sia 1, dal momento che 1 compare giá nella prima colonna.

Se si avessero ora due quadrati con lo stesso simbolo k in posizione $(2,1)$, verrebbe contraddetta l'ortogonalitá, poiché la coppia (k,k) sarebbe presente sia nella posizione $(1,k)$ che nella posizione $(2,1)$ del quadrato greco-latino derivante dalla 'sovrapposizione' (il 'prodotto cartesiano ordinato') dei due. Pertanto il massimo numero di quadrati latini mutuamente ortogonali di ordine m eguaglia il numero di scelte per il simbolo in posizione $(2,1)$, pari a $m-1$.

(2) Consideriamo il gruppo moltiplicativo di K

$$K^\star = \{k \in K | k \neq 0_K\}, \|K^\star\| = m-1$$

Poiché $K^\star$ é un gruppo, possiede inverso moltiplicativo per ogni elemento.

Per ogni elemento $k \in K^\star$, definiamo un quadrato latino di ordine m ponendo

$$Q_k(i,j) = k \cdot i + j$$

per $i, j \in K$. (Nel caso in cui $k = 0$ non si avrebbe evidentemente un quadrato latino). Per verificare che Q é effettivamente un quadrato latino, basta osservare che se si avesse $Q_k(i,j) = Q_k(i,j')$ per $j \neq j'$, allora dalla relazione $k \cdot i + j = k \cdot i + j'$ si dedurrebbe facilmente l'assurdo: $j = j'$.

D'altra parte, se fosse $Q_k(i,j) = Q_k(i',j)$ per $i \neq i'$ seguirebbe $k \cdot i' + j = k \cdot i + j$, da cui $k \cdot i' = k \cdot i$.

Ma k é invertibile poiche é un elemento di $K^\star$, e premoltiplicando per il suo inverso ambo i membri dell'ultima uguaglianza dedotta, si otterrebbe l'assurdo: $i' = i$.

Verifichiamo ora che gli $m-1$ quadrati ottenuti sono mutuamente ortogonali. Scegliamo due quadrati qualsiasi Q_r e Q_s e supponiamo che il simbolo (y, y') si trovi in due posizioni diverse (i_1, j_1) e (i_2, j_2) del loro quadrato prodotto cartesiano ordinato, ovvero valgano le relazioni:

$$r \cdot i_1 + j_1 = y$$

$$r \cdot i_2 + j_2 = y$$

$$s \cdot i_1 + j_1 = y'$$

$$s \cdot i_2 + j_2 = y'$$

Si deduce facilmente da esse la seguente coppia di ulteriori relazioni:

$$r \cdot (i_1 - i_2) = j_2 - j_1$$

$$s \cdot (i_1 - i_2) = j_2 - j_1$$

Se allora $(i_1 - i_2) = 0$, $j_1 = j_2$ e perció le due posizioni coincidono. Altrimenti, poiché $(i_1 - i_2) \in K^\star$, esiste il suo inverso $t = ((i_1 - i_2))^{-1} \in K^\star$. Segue $r = t \cdot (j_2 - j_1) = s$, per cui $Q_r = Q_s$.

Ne deduciamo allora che se $r \neq s$ i quadrati corrispondenti sono ortogonali, perció, poiché $\|K^\star\| = m - 1$, esistono $m - 1$ elementi diversi (ovviamente non nulli) in $K^\star$, quindi $m - 1$ quadrati latini mutuamente ortogonali di ordine m.

□

Corollario 3.2.
Dato p primo e $n \in N$, esistono $p^n - 1$ quadrati latini mutuamente ortogonali di ordine p^n.

Dimostrazione. Segue dall'esistenza di un campo con p^n elementi. □

Osserviamo peró che il teorema non esaurisce tutta la casistica possibile: resta infatti aperto il problema di determinare quanti quadrati latini $n \cdot n$ mutuamente ortogonali possono esistere nel caso in cui n non sia la potenza di un primo. Come detto, per $n = 6$, il minimo n non potenza di un primo, Tarry provó l'impossibilitá di trovare due quadrati mutuamente ortogonali.

Tuttavia, quanto detto circa gli altri $n = 4k + 2$ ci fa capire che possono essere possibili comportamenti diversi per numeri che non sono potenze di primi. Nell'ultimo paragrafo esamineremo un'applicazione dei quadrati latini a problemi pratici di importanza non secondaria.

4. Applicazioni moderne e considerazioni

É un esempio impressionante dell'unitá della scienza il fatto che l'impulso iniziale che condusse ad una soluzione dell'ipotesi di Eulero venisse dai bisogni pratici della sperimentazione agricola e che le investigazioni che Eulero pensava inutili o almeno fini a se stesse si siano dimostrate di enorme valore nel progetto degli esperimenti controllati.

Sir Ronald Fisher, uno dei maggiori statistici del mondo, fu il primo a mostrare (verso i primi del 1920) come i quadrati latini potessero essere usati nella ricerca agricola.

Supponiamo di avere a disposizione un appezzamento di terreno coltivabile di forma rettangolare e che si voglia provare la resa della coltura di cinque varietá di grano su di esso. I fattori che entrano in gioco nel determinare la varietá di grano piú produttiva sono molteplici: per esempio, la fertilitá del suolo, che puó variare da zona a zona dell'appezzamento, oppure la maggiore o minore esposizione ai raggi solari, o molti altri.

Supponiamo che il lato nord del campo sia casualmente piú fertile del lato sud. Se si sceglie di piantare le cinque varietá di grano (numerate da 1 a 5) come segue:

varietá 1
varietá 2
varietá 3
varietá 4
varietá 5

e la resa della varietá 1 risulta superiore rispetto alle altre, resta da chiedersi se il risultato sia dovuto effettivamente alla miglior qualitá del grano 1 o alla maggior fertilitá della striscia di terra scelta per seminarla. La fertilitá tende inoltre, a causa dell'aratura parallela ai lati del campo, ad essere piú uniforme lungo le strisce parallele ai lati. Per cercare di attenuare, allora, gli effetti della variazione di fertilitá nel risultato finale, possiamo piantare le cinque varietá di grano secondo un quadrato latino, nel seguente modo:

1	2	3	4	5
2	4	5	3	1
4	3	1	5	2
5	1	4	2	3
3	5	2	1	4

L'applicazione si estende anche ai quadrati latini ortogonali. Supponiamo infatti di complicare il problema, volendo sperimentare anche l'effetto di cinque composti chimici differenti sulla resa della coltura delle cinque varietá. Il nostro scopo é quello di utilizzare ogni composto chimico con ogni tipo di grano, sempre attenuando, peró, gli effetti della diversa fertilitá di zone diverse dell'appezzamento.

La soluzione é l'utilizzo di due quadrati latini ortogonali, che, grazie alla proprietá di ortogonalitá, garantiscono che ogni coppia (r, s) di (grano, composto chimico) si ritrovi una ed una sola volta sull'appezzamento, e che ogni tipo di composto chimico sia usato una e una sola volta in ogni striscia di terra. Esemplifichiamo:

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	$(1,1)$	$(2,2)$	$(3,3)$	$(4,4)$	$(5,5)$
2	4	5	3	1	4	3	1	5	2	$(2,4)$	$(4,3)$	$(5,1)$	$(3,5)$	$(1,2)$
4	3	1	5	2	5	1	4	2	3	$(4,5)$	$(3,1)$	$(1,4)$	$(5,2)$	$(2,3)$
5	1	4	2	3	3	5	2	1	4	$(5,3)$	$(1,5)$	$(4,2)$	$(2,1)$	$(3,4)$
3	5	2	1	4	2	4	5	3	1	$(3,2)$	$(5,4)$	$(2,5)$	$(1,3)$	$(4,1)$

ove il primo quadrato rappresenta la disposizione delle varietá di grano numerate da 1 a 5, il secondo la disposizione dei diversi composti chimici, anch'essi numerati da 1 a 5, e il terzo é la combinazione dei due.

Tale ragionamento puó essere esteso (a patto di apportare qualche modifica) qualora si volessero ulteriormente sperimentare cinque tipi di erbicida, per esempio, sempre tenendo presente che il teorema visto in precedenza stabilisce (in molti casi) una soglia di sbarramento circa il numero di diverse caratteristiche di cui si puó tenere conto all'atto della realizzazione del nostro esperimento.

Se poi, per esempio, volessimo sperimentare ulteriormente gli effetti di cinque tipi di fungicidi e di cinque livelli di aciditá del suolo, avremmo bisogno in totale di cinque quadrati (mutuamente) ortogonali di ordine 5, ma per lo stesso teorema abbiamo visto che ne esistono soltanto quattro, perció bisognerebbe procedere in modo diverso.

Il sistema dei quadrati latini viene largamente utilizzato per progettare esperimenti in biologia, medicina, sociologia e prove di mercato. Il *'campo'* naturalmente non occorre sia un pezzo di terreno. Puó essere una mucca, un paziente, una foglia, un periodo di tempo...: il quadrato greco-latino é un diagramma dell'esperienza, in cui le colonne tengono conto di una variabile, le righe di un'altra, i simboli latini di una terza e i simboli greci di una quarta.

Se un medico ricercatore vuole provare gli effetti di cinque diversi tipi di pillole su persone in cinque diverse fasce di etá, cinque diversi gruppi di peso e cinque diversi stadi della medesima malattia, puó fare uso di un quadrato greco-latino di ordine 5, che rappresenta il progetto piú efficiente che possa utilizzare.

Ritorniamo alla confutazione della congettura di Eulero e diamo un cenno della storia di come i *'guastafeste di Eulero'* riuscirono a trovare dei quadrati latini di ordine 10, 14, 18, 22 ....

Nel 1958 Parker fece una scoperta che mise in dubbio la correttezza dell'ipotesi di Eulero. Bose, seguendone la scia, sviluppó alcune rigorose regole generali per la costruzione di quadrati latini ortogonali di ordine elevato, finché, applicandole con l'aiuto di Shrikhande, riuscí a costruire un quadrato greco-latino di ordine 22, contraddicendo l'ipotesi di Eulero.

Visti i risultati, Parker riuscí a sviluppare un nuovo metodo che lo portó alla costruzione di un quadrato greco-latino di ordine 10, che ebbe notevoli applicazioni in Statistica.

Un'interessante questione: in tale quadrato compariva, nell'angolo in basso a destra, un quadrato greco-latino di ordine 3. Tutti i quadrati di ordine 10 trovati inizialmente da Parker e dai suoi collaboratori contenevano un sottoquadrato di tale tipo (a meno di permutazioni di righe e di colonne, considerando equivalenti due quadrati che differiscono per tali permutazioni). Per un certo tempo rimase aperta la questione se tutti i quadrati greco-latini di ordine 10 contenessero necessariamente sottoquadrati di ordine 3, ma tale ipotesi fu dimostrata falsa mediante diversi controesempi. Comunque, affinando sempre piú i metodi, *i tre matematici scoprirono infine la falsitá dell'ipotesi di Eulero per ogni* $n = 4k + 2, n > 6$.

Tale successo fu ottenuto con una rapiditá sorprendente dopo che invano molti sforzi matematici si erano succeduti in questa direzione per quasi due secoli. La storia dell'affascinante questione posta da Eulero testimonia come problemi matematici di (apparente) semplice formulazione possano richiedere lo sforzo di intere generazioni per essere risolti, e allo stesso tempo i contributi che tale problema ha dato alle scienze statistiche dimostrano che questioni matematiche di (apparente) scarso interesse pratico possono avere risvolti particolarmente utili nella vita di tutti i giorni.

La storia finisce qui? No, tutt'altro: oggi i quadrati magici, oltre ad essere collegati alle strutture combinatorie dei quadrati greco-latini impiegati per progettare esperimenti biologici, medici e statistici e ricerche di mercato, hanno colpito ancora e dalla matematica pura sono tornati al gioco, in veste orientale.

Il riferimento é al **sudoku**, il gioco che, nato negli Stati Uniti nel 1984, é passato in Giappone ed é infine approdato in Italia nell'estate 2005 dopo essere passato per Londra.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

FIGURA 2. Un esempio di sudoku.

CAPITOLO 3

Costruzione dei quadrati magici

Ci sono molti modi di costruire un quadrato magico, ma quello standard (e piú semplice) consiste nel seguire determinate configurazioni/formule che generano i modelli regolari.

I quadrati magici esistono per tutti gli ordini di n, con un'unica eccezione - é impossibile da costruire un quadrato magico di ordine 2. I quadrati magici possono essere classificati in tre tipi: *dispari, semplicemente pari (n divisibile per* 2*, ma non per* 4*) e doppiamente pari (n divisibile per* 4*).* I quadrati magici dispari e doppiamente pari sono facili da generare; la costruzione dei semplicemente pari é piú difficile ma esistono parecchi metodi, compreso il *'LUX method for magic squares'* (dovuto a *John Horton Conway*) and *'the Strachey method for magic squares'.*

Il numero dei differenti quadrati magici con n da 1 a 5 non contando le rotazioni e le riflessioni é: 1, 0, 1, 880, 275.305.224. Il numero per $n = 6$ é stato valutato in $1.7745 \cdot 10^{19}$.

1. Quadrati di ordine dispari

Kraitchik (1942) propone tecniche generali per costruire quadrati magici di ordine n, con n che puó essere sia un numero pari sia un numero dispari.

Per n dispari, puó essere utilizzata una tecnica molto semplice conosciuta come **il metodo Siamese**, come illustrato di seguito (Kraitchik, 1942).

Si inizia mettendo 1 nella colonna centrale della fila superiore. Si compila la colonna seguente del numero uno (a destra) e ad una fila superiore. Se siete giá alla fila superiore, si compila una colonna alla destra nella fila inferiore. E se siete nella colonna di estrema destra, si compila il numero seguente nella colonna di estrema sinistra, una fila in su. Se il quadrato é giá occupato da un numero piú piccolo, si posiziona il numero successivo nello spazio immediatamente sotto all'ultimo immesso: si procede in tale maniera fino a comporre tutto il quadrato.

Il metodo, chiamato anche il *metodo di de la Loubére*, si dice che sia stato portato in Europa quando de la Loubére ritornó in Francia dopo aver servito come ambasciatore in Siam.

Una generalizzazione di questo metodo fa uso di un *'vettore ordinario'* (x, y) che fornisce il bilanciamento per ogni mossa in cui non

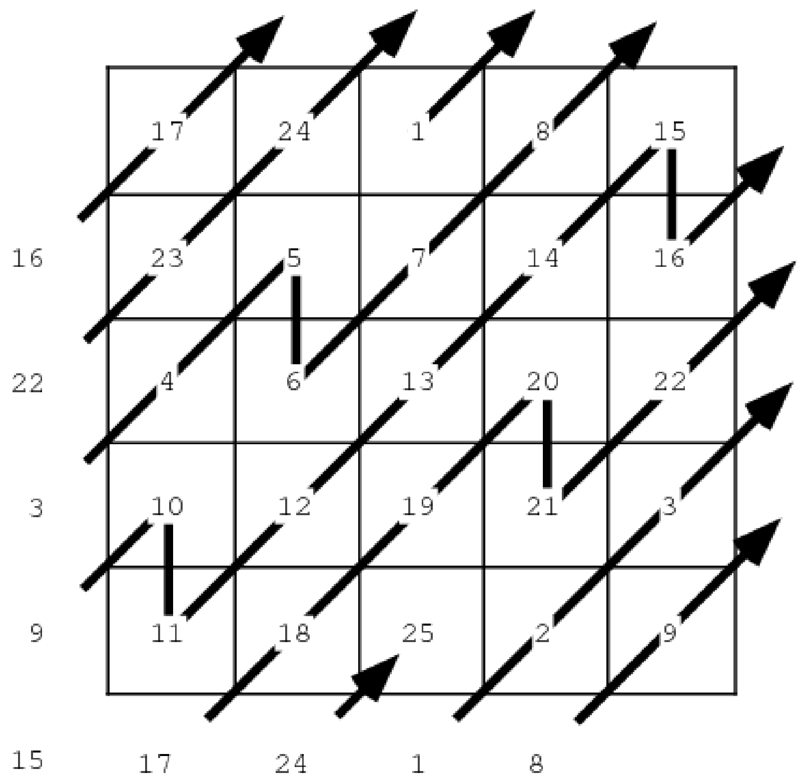


FIGURA 1. Il metodo Siamese per quadrati di ordine dispari.

ci si imbatte in altri numeri e un *'vettore di deviazione'* (u, v) che fornisce il bilanciamento con cui giungere al momento di una 'collisione' con una casella giá occupata da un altro numero.

Il metodo Siamese standard quindi ha un vettore ordinario $(1, -1)$ e un vettore di deviazione $(0, 1)$. Affinché si ottenga un quadrato magico, ogni mossa di deviazione deve terminare in una cella libera, vuota.

Classi speciali di quadrati magici possono essere costruite considerando le somme assolute $|u+v|$, $|(u-x)+(v-y)|$, $|u-v|$ e $|(u-x)-(v-y)| = |u+y-x-v|$.

Chiamiamo l'insieme di questi numeri 'le somme_differenze'(somme e differenze). Se tutte le somme_differenze sono relativamente prime con n ed il quadrato é un quadrato magico, allora il quadrato é anche un *quadrato ultramagico*.

DEFINIZIONE 3.1 (quadrato ultramagico o diabolico). Un *quadrato ultramagico* (o panmagico, o diabolico, o pandiagonale) é un quadrato magico che oltre ad avere costante la somma delle righe, delle colonne e delle due diagonali principali, mantiene costanti anche le somme delle diagonali secondarie, come nell'esempio che segue:

15	10	3	6
4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12

Se sommiamo i quattro numeri che costituiscono due semi-diagonali opposte come ad esempio: 4, 10, 13 e 7 oppure 3, 9, 14 e 8 vediamo che otteniamo sempre la costante che per un quadrato di ordine 4, come quello considerato, vale 34. Anche la somma di un numero d'angolo coi tre numeri della diagonale opposta dá sempre la costante del quadrato:

15, 8, 2, 9 oppure: 6, 4, 11, 13 oppure: 1, 10, 16, 7 oppure ancora: 12, 14, 5, 3.

I quadrati diabolici hanno tantissime altre somme uguali alla costante, come ad esempio la somma dei 4 numeri agli angoli (15, 6, 1, 12).

In questo quadrato diabolico ci sono ben 86 modi diversi di ottenere la costante!

Approfondiró maggiormente il discorso sui quadrati diabolici o ultramagici nella sezione dedicata loro nel Capitolo 4, paragrafo 3.

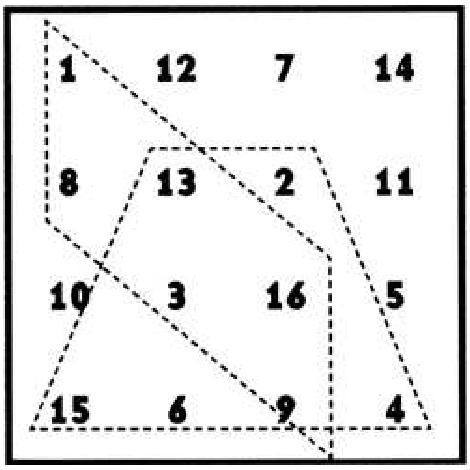


Figura 2. Unendo con tratti di retta i numeri con i quali si ottiene la costante di questo quadrato ultramagico di ordine 4, si possono realizzare figure quali parallelogrammi e trapezi.

Ritornando alle somme_differenze, la tabella seguente ne fornisce un elenco per particolari scelte di vettori ordinari e di deviazione.

Vet. ord.	**Vet. dev.**	**Som_diff**	**QM**	**QPM**
$(1,-1)$	$(0,1)$	$(1,3)$	$2k+1$	nessuno
$(1,-1)$	$(0,2)$	$(0,2)$	$6k\pm1$	nessuno
$(2,1)$	$(1,-2)$	$(1,2,3,4)$	$6k\pm1$	nessuno
$(2,1)$	$(1,-1)$	$(0,1,2,3)$	$6k\pm1$	$6k\pm1$
$(2,1)$	$(1,0)$	$(0,1,2)$	$2k+1$	nessuno
$(2,1)$	$(1,2)$	$(0,1,2,3)$	$6k\pm1$	nessuno

Un secondo metodo per generare quadrati magici di ordine dispari é stato proposto da *J.H. Conway* sotto il nome di **metodo 'a losanga'** o a rombo o a caramella.

Come illustrato di seguito, in questo metodo i numeri dispari sono inseriti lungo linee diagonali nella forma di un diamante nella parte centrale del quadrato. I numeri pari che mancano sono poi aggiunti sequenzialmente lungo la continuazione della diagonale ottenuta avvolgendo, accartocciando, piegando il quadrato finché la diagonale 'avvolta' non raggiunge il suo punto d'inizio.

Nel quadrato sotto, la prima diagonale quindi é completata con i numeri $1, 3, 5, 2, 4$, la seconda diagonale con $7, 9, 6, 8, 10$ e cosí via.

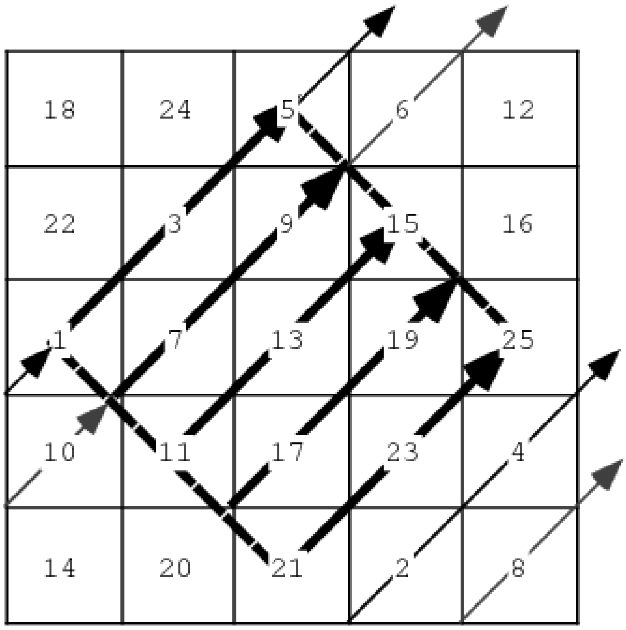


FIGURA 3. Il metodo a losanga per quadrati di ordine dispari.

2. Quadrati di ordine doppiamente pari

Un metodo per costruire quadrati magici di ordine doppiamente pari del tipo $n = 4m$ consiste nel disegnare delle 'X'' attraverso ogni sottoquadrato $4 \cdot 4$ e riempire tutte le caselle in sequenza. Poi sostituire ogni entrata a_{ij} su una diagonale cancellata con $(n^2 + 1) - a_{ij}$ o, equivalentemente, invertire l'ordine delle entrate cancellate.

Quindi nell'esempio sotto per $n = 8$, i numeri cancellati sono originariamente $1, 4, ..., 61, 64$ in modo che l'entrata 1 sia sostituita da 64, 4 da 61, etc.

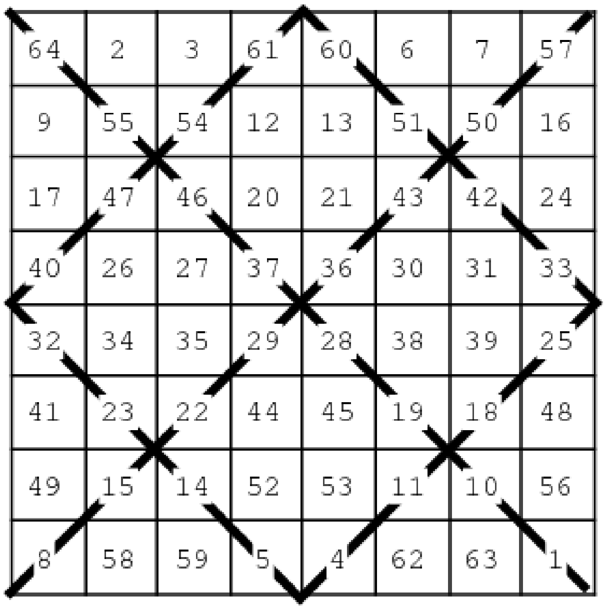


FIGURA 4. Metodo per un quadrato di ordine doppiamente pari.

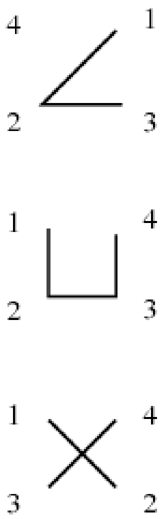
3. Quadrati di ordine semplicemente pari

Un elegante metodo per costruire quadrati magici di ordine semplicemente pari $n = 4m + 2$ con $m \geq 1$ (non c'é un quadrato magico di ordine 2) é dovuto ancora a J.H.Conway, che lo chiamó il **metodo 'LUX'**.

Esso si sviluppa nei seguenti passi:

- Si crei un array che consista di $m + 1$ file di 'L', 1 fila di $'U'$, ed $m - 1$ file di $'X'$, tutte di lunghezza pari a $n/2 = 2m + 1$.
- Si scambi la U nel mezzo con la L sopra di essa.
- Ora si generi il quadrato magico di ordine $2m + 1$ usando il metodo Siamese (NB: $2m+1$ é necessariamente un numero dispari) centrato nell'array di lettere(partendo dalla casella centrale della fila piú in alto), ma si riempia ogni insieme di quattro caselle che circondano una lettera sequenzialmente secondo l'ordine stabilito dalla lettera. Questo ordine é illustrato nella parte sinistra della figura di seguito, ed il quadrato completo é illustrato sulla destra.

Le 'forme' delle lettere L, U, ed X suggeriscono in materia naturale e spontanea l'ordine di inserimento, da cui il nome dell'algoritmo **LUX**.



68	65	96	93	4	1	32	29	60	57
L		L		L		L		L	
66	67	94	95	2	3	30	31	58	59
92	89	20	17	28	25	56	53	64	61
L		L		L		L		L	
90	91	18	19	26	27	54	55	62	63
16	13	24	21	49	52	80	77	88	85
L		L		U		L		L	
14	15	22	23	50	51	78	79	86	87
37	40	45	48	76	73	81	84	9	12
U		U		L		U		U	
38	39	46	47	74	75	82	83	10	11
41	44	69	72	97	100	5	8	33	36
X		X		X		X		X	
43	42	71	70	99	98	7	6	35	34

FIGURA 5. Il metodo LUX per un quadrato di ordine semplicemente pari.

CAPITOLO 4

Proprietá dei quadrati magici e quadrati particolari

Un quadrato magico gode delle seguenti proprietá di invarianza:

Osservazione 3.
Un quadrato magico resta tale se si opera su di esso con una delle seguenti trasformazioni semplici:

(1) rotazione intorno al centro di $\pm\pi/2, \pm\pi, \pm(3/2)\pi$;
(2) simmetria rispetto all'asse orizzontale o verticale;
(3) simmetria rispetto all'una o all'altra diagonale;
(4) sostituzione di ogni numero col suo complementare rispetto al numero $n^2 + 1$ (dove n é l'ordine del quadrato).

1. 'Moltiplicazione' tra quadrati magici

Esiste un curioso concetto di moltiplicazione tra quadrati magici, che vale la pena illustrare con un esempio. Successivamente, tenteró di fornire una giustificazione matematica di questo particolare 'prodotto' e di enunciarne alcune proprietá.

Consideriamo due quadrati magici scelti a caso, ad esempio quelli che seguono:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

A

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

B

Figura 1. A é un quadrato $3 \cdot 3$, B é un quadrato $4 \cdot 4$.

Andiamo a fare il 'prodotto' tra A e B, $A * B$, che sará un quadrato $12 \cdot 12$. Il nostro obiettivo é di costruire una grande griglia vuota $4 \cdot 4$ e di riempire ognuna delle sue caselle libere con un quadrato magico di ordine 3 : da notare che avremo un array di dimensione $4 \cdot 4$ (cioé la dimensione del quadrato B) di quadrati $3 \cdot 3$ (pari alla dimensione del quadrato A).

Procediamo, dunque, come segue. Disegnamo una spaziosa griglia vuota $4 \cdot 4$ e osserviamo la posizione del numero 1 nel quadrato B : questo si trova nella posizione $(1, 1)$, cioé nell'angolo in alto a sinistra. Pertanto andiamo ad inserire nella posizione corrispondente della nostra griglia il quadrato A di partenza, in questo modo:

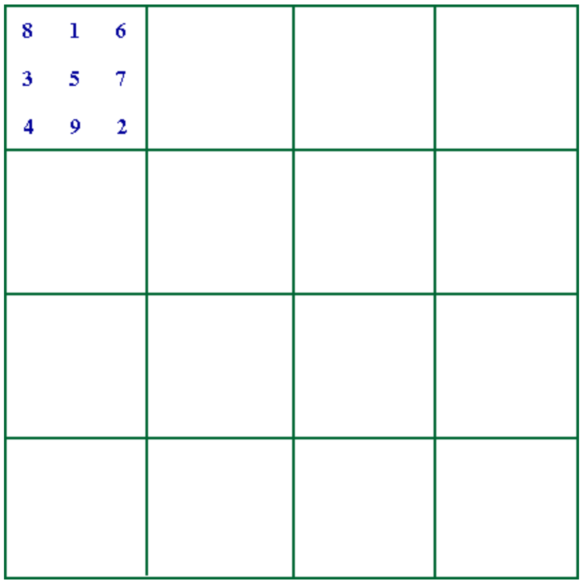


Figura 2. Situazione dopo il primo passaggio.

Il quadrato A contiene i numeri da 1 a 9, e lo possiamo considerare come il modello per contare i numeri da 1 a 9. Se dovessimo contare i numeri da 10 a 18, vale a dire i 9 numeri successivi, nello stesso schema, otterremmo questo quadrato $3 \cdot 3$:

17	10	15
12	14	16
13	18	11

Figura 3. Quadrato magico $3 \cdot 3$ contenente i numeri da 10 a 18.

Un'altra maniera di avere lo stesso risultato deriva dall'aggiungere 9 (il numero di celle del quadrato A) ad ognuna delle caselle di A medesimo.

A questo punto andremo a posizionare nel nostro quadrato $12 \cdot 12$ in divenire il secondo quadrato di ordine 3 che ci siamo appena costruiti nella posizione corrispondente a quella in cui si trova il numero 2 nel quadrato B, cioé $(4, 3)$. Ora possiamo iterare tale procedimento, che ci permette di realizzare i 16 quadrati magici di ordine 3 e di inserirli correttamente nel nostro quadrato di arrivo a seconda della posizione dei numeri 3, 4, . . ., 16 nel quadrato B. Il quadrato che si genera attraverso questo ingegnoso algoritmo é mostrato sotto.

8	1	6	134	127	132	125	118	123	35	28	33
3	5	7	129	131	133	120	122	124	30	32	34
4	9	2	130	135	128	121	126	119	31	36	29
107	100	105	53	46	51	62	55	60	80	73	78
102	104	106	48	50	52	57	59	61	75	77	79
103	108	101	49	54	47	58	63	56	76	81	74
71	64	69	89	82	87	98	91	96	44	37	42
66	68	70	84	86	88	93	95	97	39	41	43
67	72	65	85	90	83	94	99	92	40	45	38
116	109	114	26	19	24	17	10	15	143	136	141
111	113	115	21	23	25	12	14	16	138	140	142
112	117	110	22	27	20	13	18	11	139	144	137

FIGURA 4. Il quadrato $A * B$ di ordine 12.

1.1. Proprietá del prodotto tra quadrati magici. Iniziamo con la giustificazione del termine ‘prodotto’ utilizzato nel paragrafo precedente. Le parole ‘prodotto’ e ‘moltiplicazione’ intendono solamente trasmettere l’idea che i due quadrati magici vengono combinati per ottenere un altro quadrato magico, ma l’utilizzo di questo vocabolo in tale contesto é frutto di una scelta; pertanto ora diventa ragionevole domandarsi se essa abbia qualcosa in comune con l’usuale nozione di moltiplicazione fra numeri.

Vediamo di enunciare, allora, somiglianze e differenze tra di esse:

- L’operazione *, che abbiamo definito per i quadrati magici, soddisfa la *proprietá associativa*. In altre parole, se A, B, C sono quadrati magici, allora $A * (B * C) = (A * B) * C$.
- L’operazione * é dotata di *elemento neutro*, precisamente il quadrato magico $1 \cdot 1$ il cui unico elemento é 1:

1

FIGURA 5. L’elemento neutro della moltiplicazione * tra quadrati magici.

- Una prima differenza tra la moltiplicazione * e l’ordinaria moltiplicazione tra numeri é che * *non gode della proprietá* *commutativa*, il che significa che, presi A e B quadrati magici qualsiasi, $A*B \neq B*A$. Questa caratterizzazione la condivide con il prodotto fra matrici, anch'esso non commutativo.

- Un'ulteriore differenza con la moltiplicazione solita é che non vi é una corrispondente nozione di addizione da cui deriva.

Una volta che abbiamo accettato il fatto che questa possa considerarsi in qualche modo una definizione ragionevole di moltiplicazione, possiamo studiarne ed osservarne altre proprietá.

Nella moltiplicazione tra numeri positivi, abbiano la nozione di *numero primo* che si contrappone a quella di *numero composto.*

Allo stesso modo, possiamo definire un *quadrato magico composto* se esso puó essere ottenuto come prodotto (*) di quadrati magici strettamente piú piccoli.

Pertanto il quadrato magico $A*B$ di dimensione $12 \cdot 12$ dell'esempio precedente é composto. Invece, il quadrato magico B $4 \cdot 4$ non é composto, poiché l'unica maniera in cui potrebbe scriversi come prodotto di due quadrati magici strettamente piú piccoli sarebbe con entrambi di tipo $2 \cdot 2$, ma non esistono quadrati magici di ordine 2.

Un quadrato magico si definisce *primo* se non é composto e se non é l'unitá, cioé il quadrato magico $1 \cdot 1$ il cui unico elemento é il numero 1.

Uno degli aspetti notevoli che giustifica questo uso dei termini 'primo' e 'composto' é il fatto che ogni quadrato magico puó essere scritto in uno ed un solo modo come prodotto di quadrati magici primi (quando diciamo in un solo modo, questo include l'ordine dei fattori, in quanto la moltiplicazione non é commutativa).

Perció non soltanto disponiamo di proprietá generali come l'associativitá e l'esistenza di un elemento neutro, ma abbiamo perfino un risultato analogo al teorema fondamentale dell'aritmetica sull'esistenza ed unicitá di una fattorizzazione in primi, ed é questo che piú di ogni altra cosa giustifica l'utilizzo della parola 'moltiplicazione'.

Oltretutto, la dimostrazione della validitá di questo teorema é sorprendentemente simile alla dimostrazione della fattorizzazione dei numeri in primi nell'aritmetica ordinaria.

Definizione 4.1 (monoide). Un insieme M dotato di un'operazione associativa * e di un elemento neutro 1_M per quell'operazione si chiama *monoide.*

Un'insieme numerico dotato di moltiplicazione ordinaria forma un monoide, e, con il nostro concetto esteso di moltiplicazione, anche l'insieme dei quadrati magici dotati dell'operazione * costituisce un monoide.

Definizione 4.2 (liberamente generato). Sia $(M, *, 1)$ un monoide e sia P un sottinsieme di M. Diciamo che M é *liberamente generato* da P se il teorema di fattorizzazione unica si mantiene rispetto a P, cioé se ogni elemento di M puó esprimersi in uno ed un solo modo come prodotto (nel senso di *) di elementi di P, incluso l'ordine.

TEOREMA 1.1.
L'insieme dei quadrati magici é liberamente generato dall'insieme dei quadrati magici primi.

DEFINIZIONE 4.3 (monoide libero). Diciamo che un monoide $(M, *, 1)$ é *libero* se esiste un sottinsieme P di M tale che M é liberamente generato da P.

Pertanto *il teorema fondamentale dell'aritmetica per i quadrati magici afferma anche che l'insieme dei quadrati magici dotato di * forma un monoide libero.*

Un risultato analogo vale per i cubi e gli ipercubi magici, e per le costruzioni analoghe a piú dimensioni, e lo stesso si applica alla moltiplicazione medesima.

Poiché l'esistenza ed unicitá della fattorizzazione dei quadrati magici ha questa interpretazione, é interessante ed utile vedere quale sia la corrispondente interpretazione per l'analoga fattorizzazione dei numeri.

Sostanzialmente il risultato é identico, ma invece di usare la nozione di monoide, usiamo la nozione di monoide commutativo.

DEFINIZIONE 4.4 (monoide commutativo). Un *monoide commutativo* é un monoide $(M, *, 1)$ nel quale l'operazione * é commutativa.

Come prima, diciamo che se P é un sottinsieme di M, il monoide commutativo M é *liberamente generato* da P se ogni elemento di M puó scriversi in uno ed in un solo modo come prodotto (nel senso di *) di elementi di P. Qui, quando diciamo 'in uno ed un solo modo', non teniamo conto dell'ordine dei fattori poiché stiamo assumendo la commutativitá.

Se $(M, *, 1)$ é un monoide commutativo e se M ha un sottinsieme P tale che M sia liberamente generato da P come monoide commutativo, allora diciamo che M é un *monoide commutativo libero.*

Pertanto l'usuale *teorema dell'aritmetica per gli interi positivi puó esprimersi dicendo che l'insieme degli interi positivi dotato di moltiplicazione $\cdot$ é un monoide commutativo libero.*

2. Quadrati doppiamente magici o satanici

DEFINIZIONE 4.5 (quadrato doppiamente magico o satanico). Si dicono *quadrati doppiamente magici* o *satanici* quei quadrati magici che rimangono ancora tali sostituendo a ciascun numero, situato nella propria casella, lo stesso numero elevato a potenza con esponente a.

Se $a = 2$ allora vengono definiti *doppiamente magici o bimagici.*

Ad esempio il quadrato di ordine 8 qui rappresentato, che ha come costante 260, é ancora magico sostituendo ai suoi numeri i rispettivi quadrati, ed ha allora per costante $11 \cdot 180$.

5	31	35	60	57	34	8	30
19	9	53	46	47	56	18	12
16	22	42	39	52	61	27	1
63	37	25	24	3	14	44	50
26	4	64	49	38	43	13	23
41	51	15	2	21	28	62	40
54	48	20	11	10	17	55	45
36	58	6	29	32	7	33	59

Il problema non é risolvibile per il quadrato di ordine 3 con numeri diversi, come pure per quelli di ordine 4 con 16 numeri consecutivi.

Infatti se prendiamo un quadrato formato dai primi 16 numeri consecutivi abbiamo come costante magica 34. Se eleviamo alla seconda tutti i numeri otterremo $34 \cdot 11 = 374$ come costante.

Il numero $16^2 = 256$ dovrá appartenere ad almeno due serie (una riga e una colonna), ma la differenza $374-256 = 118$ non é componibile che in una sola maniera in una somma di tre quadrati differenti a due a due, cioé 1, 36 e 81. Quindi non é possibile formare un quadrato satanico il quale ne abbia come base uno formato dai primi sedici numeri consecutivi.

Il primo quadrato doppiamente magico ad essere stato individuato é quello di ordine 8 e costante 260. **Bensen** e **Jacobi** hanno avanzato la congettura che non esista alcun quadrato bimagico non banale (cioé privo di numeri ripetuti) di ordine inferiore a 8.

Questa congettura é stata dimostrata da **Boyer** e **Trump** per i quadrati magici 'normali', cioé per i quadrati magici contenenti gli interi da 1 a n^2.

Nel 1998 **John Robert Hendricks** trovó la dimostrazione che segue, molto semplice, della non esistenza di quadrati bimagici di ordine 3.

TEOREMA 2.1.
Non esistono quadrati bimagici di ordine 3.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che esista un quadrato bimagico $3{\cdot}3$ della forma seguente:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

É noto che per ogni quadrato magico di questa forma deve valere l'uguaglianza:

$$a + i = 2e;$$

infatti un quadrato magico di ordine 3 ha costante di magia pari a 15, dunque nella sua casella centrale deve trovarsi il numero 5, per cui la somma di due numeri d'angolo deve essere doppia del termine al centro.

La bimagicitá comporta quindi: $a^2 + i^2 = 2e^2$;
di conseguenza: $(a - i)^2 = 2(a^2 + i^2) - (a + i)^2 = 4e^2 - 4e^2 = 0$,
e quindi $a = e = i$.
Analoga uguaglianza vale per tutte le linee che passano per la casella centrale. □

Fino ad oggi sono stati costruiti dei quadrati satanici di ordine 8, 9, 10 e 14.
Si possono formare anche quadrati semplicemente magici ma con una magicitá particolare, ossia normali quadrati che diventano peró magici innalzando a una potenza, per esempio alla seconda, ciascuno dei loro numeri. Il quadrato che si ottiene con le espressioni algebriche della figura, assegnando valori qualunque alle diverse lettere, diventa magico per le colonne e per le righe (non per le diagonali) innalzando alla seconda tutte le espressioni.
La costante é data dalle somme $p^2 + q^2 + r^2 + s^2$.

$p^2 + q^2 - r^2 - s^2$	$2(qr + ps)$	$2(qs - pr)$
$2(qr - ps)$	$p^2 + r^2 - q^2 - s^2$	$2(rs + pq)$
$2(qs + pr)$	$2(rs - pq)$	$p^2 + s^2 - q^2 - r^2$

Dando per esempio i valori $p = 2$, $q = 6$, $r = 3$ ed $s = 4$ otterremo il seguente quadrato semplicemente magico e il suo satanico.

15	52	36
20	−39	48
60	0	−25

225	2704	1296
400	1521	2304
3600	0	625

3. Quadrati ultramagici o diabolici

Definizione 4.6 (quadrato ultramagico o diabolico). Si dicono *quadrati ultramagici o diabolici* quei quadrati magici nei quali oltre ad aversi una somma costante nei $2(n + 1)$ modi soliti, questa puó ottenersi in molti altri modi, regolari o geometrici.

Per esempio la somma delle 2 diagonali principali, delle semi-diagonali opposte e quella dei sottoquadrati rende sempre la costante di magia. Un quadrato diabolico rimane quindi tale non solo nell'ambito di una rotazione o di una riflessione, come un 'normale' quadrato magico, ma anche se una riga o una colonna viene spostata da un lato del quadrato verso il lato opposto.
La teoria dei quadrati ultramagici ebbe la sua origine con il matematico francese Philippe de la Hire, ed in seguito essa venne sviluppata dal grande matematico svizzero Leonardo Eulero e dall'inglese Arthur Cayley, famoso per i suoi studi sulle matrici.
Il piú piccolo quadrato magico di questo tipo é quello di ordine 4.

1	8	13	12
14	11	2	7
4	5	16	9
15	10	3	6

In questo quadrato la costante di magia puó essere ottenuta in un certo numero di modelli oltre che nelle righe, colonne e diagonali. Essa appare:

- nei sedici sottoquadrati $2 \cdot 2$ compresi quelli che racchiudono i bordi (es. $1 + 12 + 15 + 6$, $1 + 8 + 14 + 11$, $11 + 2 + 5 + 16$);
- negli angoli dei sottoquadrati $3 \cdot 3$ (es. $1 + 13 + 16 + 4$, $11 + 7 + 10 + 6$);
- nelle coppie orizzontali o verticali di numeri adiacenti sommate con la coppia corrispondente spostata di un vettore $v(2, 2)$ (es. $1 + 8 + 16 + 9$, $12 + 7 + 5 + 10$, $14 + 4 + 3 + 13$).

Perció delle 86 possibili combinazioni, 52 formano schemi-sequenze regolari, contro le 10 di un classico quadrato magico $4 \cdot 4$.

4. Quadrati cabalistici

Definizione 4.7 (quadrato cabalistico). Si dicono *quadrati cabalistici* quei quadrati magici allo stesso tempo satanici e diabolici.

Si puó costruire un quadrato cabalistico di ordine n tale che n soddisfi le seguenti condizioni:

(1) non sia primo;
(2) non sia uguale a 4;
(3) non sia un numero composto prodotto di uno o piú numeri primi solamente alla prima potenza.

Si possono quindi costruire dei quadrati cabalistici con $n = 8(= 2^3)$ e $n = 9(= 3^2)$.

5. Quadrati alfamagici

Definizione 4.8 (quadrato alfamagico). Si dicono *quadrati alfamagici* quei quadrati magici all'apparenza normali, ma che godono della proprietá particolare per la quale se ai numeri scritti in cifre si sostituiscono quelli scritti in lettere, si contano poi i caratteri di ogni casella e si scrivono i nuovi numeri ottenuti, si produrrá un nuovo quadrato sempre magico e dello stesso ordine di quello di partenza.

Facciamo un esempio.

87	165	129
169	127	85
125	89	167

ottantasette	centosessantacinque	centoventinove
centosessantanove	centoventisette	ottantacinque
centoventicinque	ottantanove	centosessantasette

12	19	14
17	15	13
16	11	18

La costante del primo quadrato é 381 mentre di quello che ne deriva é 45.

Questo tipo di quadrato fu ideato dall'esperto olandese di matematica ricreativa *Lee Sallow* che, in uno studio pubblicato nel 1986, presentó molti esempi di 'alphamagic square' composti in varie lingue (moderne, antiche e arcaiche ...) e realizzati grazie ad un programma per computer di sua invenzione.

Mentre alcune lingue offrono, peró, un gran numero di possibilitá diverse, quello riportato qui sopra é l'unico esempio ottenibile in italiano a meno di banali derivazioni. L'inglese invece, a questo proposito, si presta bene alla costruzione di quadrati alfamagici.

5	22	18
28	15	2
12	8	25

five	twenty two	eighteen
twenty eight	fifteen	two
twelve	eight	twenty five

4	9	8
11	7	3
6	5	10

CAPITOLO 5

Didattica dei quadrati magici

Sarebbe stato molto interessante trattare personalmente i quadrati magici come argomento di studio da proporre all'interno di un ambiente scolastico oppure come tema sul quale partire e sviluppare una ricerca nell'ambito della didattica della matematica; purtroppo non ne ho avuto l'occasione e perció mi limito soltanto, in quest'ultimo capitolo, a mettere a confronto per poi commentare un interessante lavoro di un gruppo di ricerca italiano di alcuni docenti ed esperti di didattica della matematica, proposto a tutti i livelli di scolaritá, articolo che mi é capitato di leggere e che mi ha appassionato sin dall'inizio, con un'attivitá di classe rivolta a studenti americani frequentanti quella che in Italia é la scuola secondaria inferiore o scuola media.

Il primo lavoro (di gruppo) é stato coordinato dai docenti Elsa Malisani e Teresa Marino del Dipartimento di Matematica dell'Universitá di Palermo, il secondo deve i suoi meriti ad un gruppo di insegnanti, matematici e ricercatori della Drexel University, riuniti nel 'Math Forum', i quali si propongono di condividere attivitá e idee per aiutare gli studenti, e non solo, ad imparare la matematica ed i docenti a migliorare la didattica della matematica. Ovviamente cercheró, sulla base di ció, di formulare una mia proposta di metodologia didattica sull'argomento e di sviluppare volta per volta considerazioni personali sulle tematiche che saltano agli occhi del lettore.

1. Lavoro del gruppo di ricerca di Palermo sui quadrati magici

La sperimentazione didattica riguardava la risoluzione di un quadrato magico; piú precisamente la richiesta era formulata in questi termini:

'completare il quadrato inserendo i numeri mancanti, in modo che la somma dei numeri di ciascuna riga, colonna o diagonale sia sempre la stessa'.

La proposta del quadrato magico ha diverse motivazioni: si tratta di un problema che si adatta abbastanza bene alla sperimentazione nei diversi livelli scolastici, perché puó essere presentato con modalitá diverse e con differenti gradi di difficoltá in relazione al tipo di scuola.

Ma, fondamentalmente, il quadrato magico permette di studiare lo sviluppo del linguaggio aritmetico e del linguaggio algebrico nelle diverse fasce di etá.

Precisamente, gli studi sugli ostacoli epistemologici e didattici relativi al passaggio dal pensiero aritmetico al pensiero algebrico occupano un posto importantissimo nella Ricerca in Didattica della Matematica. In particolare, il lavoro che ho avuto la fortuna di leggere

> *'... si pone come un modesto contributo in questo senso'...*

Quindi la sperimentazione didattica che viene effettuata ha una doppia finalitá. Innanzitutto, l'analisi qualitativa dei dati riporta i risultati piú importanti sugli schemi di ragionamento messi in opera dagli alunni; in secondo luogo, l'analisi quantitativa pretende di dare delle indicazioni sullo sviluppo del linguaggio aritmetico e/o algebrico nei diversi livelli scolastici.

1.1. Didattica nella scuola elementare. Nella scuola elementare la sperimentazione é stata effettuata all'interno di classi prime.

La 'situazione problema' riguardava il gioco del quadrato magico, le cui finalitá prospettavano la determinazione degli schemi di ragionamento messi in atto dai bambini e la formulazione di indicazioni sullo sviluppo del loro pensiero aritmetico.

La consegna consisteva nel completamento del quadrato attraverso l'inserimento dei numeri mancanti in modo che la somma dei numeri di ciascuna riga, colonna e diagonale risultasse sempre la medesima.

Il gioco si articolava in 3 fasi, vale a dire:

- I fase - Gioca l'insegnante e l'allievo.
- II fase - Gli allievi giocano in coppia.
- III fase - Il gioco si svolge a squadre.

Dai risultati ottenuti si evince che alcuni non sono riusciti a portare a termine il compito perché hanno proceduto per tentativi e hanno addizionato con le dita fino ad arrivare all'abbandono della consegna.

Altri bambini, invece, hanno usato la manipolazione e la linea dei numeri e hanno addizionato per completamento portando a termine il compito ottenendo risultati soddisfacenti.

Compiendo un'analisi qualitativa si sono toccati i seguenti punti:

- Durante la fase insegnante - allievo sono espresse al meglio le capacitá scolastiche del bambino poiché lo stesso non avverte nessuna situazione conflittuale verso l'insegnante. Di conseguenza con calma riesce a trovare la soluzione e a seguire le consegne.
- La fase allievo - allievo é quella in cui si accende la competizione e i risultati ne vengono influenzati, talvolta positivamente, talaltra negativamente. Infatti in alcuni casi i bambini perdevano piú tempo per evitare errori sfruttando al meglio le conoscenze, in altri casi la voglia di velocizzare e di battere il compagno li portava a cercare la soluzione per tentativi.

- Nell'ultima fase sono stati riconosciuti subito, da parte dei bambini, i leaders che spontaneamente sono stati i piú impegnati nel tentativo di soluzione. Alcuni si sono stretti intorno ai leaders contribuendo con incitamenti e proposte al risultato finale, altri rendendosi conto di non essere di aiuto si sono autoesclusi dalla gara.

L'esperimento ha coinvolto anche alunni portatori di handicap. Questo aspetto é da commentare nella discussione dei risultati del test, in quanto nelle fasi II e III ha giocato un ruolo determinante il loro stato emozionale, in quanto essi si sono inibiti, perché, trovandosi a competere con altri bambini, per timore di perdere si sono affrettati a dare la soluzione disattendendo la consegna. Tuttavia, dopo essere stati rassicurati dall'insegnante, che ne ha facilitato l'autocorrezione attraverso la retro-azione, essi sono riusciti in parte a risolvere il quesito.

Ritengo che l'esperimento non sia fine a se stesso, ma possa anche servire a questo livello per consolidare ed interiorizzare il concetto di addizione e sottrazione, a condurre gli alunni a riflettere per trovare le strategie opportune, secondo le proprie capacitá e il modo di sperimentare soluzioni.

Si é osservato che nelle prove individuali e di coppia la maggior parte dei bambini é stata in grado di autogestirsi e concentrarsi per potere eseguire correttamente le consegne.

Nel gioco di squadra, invece, la competizione, il sovrapporsi delle opinioni individuali e la conseguente confusione, hanno impedito ai bambini di intuire l'esatta modalitá di esecuzione della consegna. Per questi motivi hanno teso a procedere per tentativi.

Durante la prima fase gli alunni hanno fatto riferimenti di tipo pragmatico locale-teorico. Nella seconda hanno realizzato riferimenti di tipo pragmatico dipendenti dal contratto didattico precedente.

Alcuni bambini hanno dimostrato di saper creare ipotesi e di avere una certa metodologia personale, altri progettano, altri utilizzano riferimenti pragmatici, altri ancora giustificano le strategie adottate.

1.2. Didattica nella scuola media. Per gli alunni della scuola media, di classi prime, il progetto di sperimentazione si é svolto nel modo seguente: inizialmente si é comunicato agli alunni il tipo di gioco da fare. Si invita un alunno a giocare con l'insegnante alla lavagna con uno dei quadrati magici $3 \cdot 3$. Ci si accerta, con domande, che la consegna sia stata recepita in modo corretto da tutti.

A questo punto si é intrapresa la fase di azione: un lavoro individuale motivato. Dunque si procede alla consegna ad ogni singolo alunno di un quadrato magico $4 \cdot 4$ da completare e si invitano tutti gli alunni a scrivere su un foglio il tipo di procedimento che man mano vanno utilizzando per arrivare alla soluzione del problema. Il vincitore sará colui che per primo riesce a consegnare la soluzione con la descrizione completa del procedimento.

L'ultima parte della sperimentazione é consistita nella divisione della classe in gruppi eterogenei per abilitá logico-matematiche. Ad ogni gruppo si consegna un quadrato da risolvere. Ogni gruppo deve trovare ora una soluzione comune ed il procedimento risolutivo deve essere consegnato per iscritto dal gruppo. Naturalmente vince il gruppo che per primo completa il quadrato e la descrizione del procedimento.

Infine per dare un senso al lavoro di gruppo svolto puó essere utile e produttivo scrivere, magari alla lavagna, le affermazioni risolutive che tutti ritengono valide e si arriva a formulare un teorema.

Dall'analisi dei risultati ottenuti, emergono due gruppi di studenti:

- Ad un grande gruppo appartengono gli alunni che hanno completato il quadrato inserendo i numeri a caso o hanno applicato la strategia del complementare inserendo numeri in una casella a caso;
- Al piccolo gruppo, invece, appartengono coloro che hanno scelto una strategia vincente, calcolando i numeri da inserire per differenza, per differenza con equazione di primo grado o hanno applicato la strategia del complementare anche senza la consegna di una descrizione scritta corretta.

Da un'analisi prettamente qualitativa dei dati é emerso che negli alunni é giá strutturato il pensiero aritmetico, anche se un gruppo numeroso ha proceduto ancora per tentativi, perché nel quadrato $4 \cdot 4$ hanno inserito i numeri a caso o hanno scelto le caselle a caso.

Questo é dovuto sicuramente alla complessitá stessa del compito: per completare il quadrato magico é necessario capire la dipendenza reciproca che esiste tra le diverse righe, colonne e diagonali e quindi, l'alunno deve individuare le caselle dalle quali puó iniziare e, successivamente, continuare a giocare.

É interessante rilevare che, nel caso in cui la somma parziale di alcune caselle del quadrato $4 \cdot 4$ proposto nel lavoro di squadra era superiore alla somma totale del quadrato, i ragazzi hanno utilizzato i numeri negativi come numeri da sottrarre.

Rispetto allo sviluppo del pensiero algebrico, é possibile sottolineare che alcuni alunni hanno considerato la lettera 'a' una costante uguale a 0; per altri, invece, é stato un simbolo che poteva essere sostituito da un numero. Per altri ancora ha rappresentato una variabile, cioé un simbolo che doveva essere sommato a tutte le colonne, a tutte le righe e alle due diagonali.

Da qui emerge chiaramente il problema che hanno in generale gli studenti nel distinguere i vari significati delle lettere in matematica : variabili, incognite, costanti e parametri.

Anche se gli alunni della sperimentazione in esame di cui qui porto un mio resoconto e commento critico personale non avevano ancora iniziato lo studio dell'algebra, hanno considerato il simbolo 'a' sotto differenti aspetti: costante, valore numerico, $'0'$, 'cosa che varia'.

Complessivamente nei vari gruppi si é evidenziato un tentativo di argomentazione con modalitá di tipo generalizzazione e gerarchizzazione.

In alcuni casi l'argomentazione é stata corretta, ma non si evidenziano indicatori linguistici particolari, ci sono stati anche tentativi di controesempio, in altri casi si utilizzano falsi ragionamenti giustificati, in cui il gruppo lavora anche fuori dal quadrato.

Complessivamente i risultati sono interessanti e ricchi di spunti per tematiche di didattica della matematica.

1.3. Didattica nella scuola superiore. In ultimo, vado a descrivere la sperimentazione d'aula avvenuta in un liceo psico-pedagogico, classi prime, comunque stiamo parlando di alunni di 14 anni, all'inizio della loro avventura nelle scuole secondarie di secondo grado.

Il procedimento é molto simile al precedente, cioé a quello predisposto per gli alunni di scuola media: dapprima l'insegnante simula il gioco con l'alunno, spiegando la procedura per la compilazione del quadrato magico $3 \cdot 3$. Proseguono poi il gioco uno o due alunni scelti a caso, alla lavagna, per vedere se é stato recepito il funzionamento del 'gioco'.

Poi la fase d'azione si articola in un lavoro individuale durante il quale i ragazzi compilano il quadrato $4 \cdot 4$ individualmente riportando su di un foglio la strategia adottata. In questa fase ogni alunno viene responsabilizzato e costruisce da solo il proprio sapere: stimolazione della zona di sviluppo prossimale dell'apprendimento matematico, secondo le parole di **Vygotskij**.

Infine il lavoro di gruppo : la classe viene divisa in due gruppi coordinati da un portavoce. All'interno del gruppo ciascun allievo cerca di convincere gli altri della propria strategia: entrano in gioco argomentare, congetturare e, possibilmente, anche dimostrare. Avviene dunque la formulazione di una conoscenza. Si prende coscienza della strategia decisa di comune accordo e poi si scrive su un foglio la dimostrazione. Vince la squadra che riesce a completare per prima il quadrato.

Volendo fare un commento sui risultati dell'analisi quantitativa si osserva che talvolta il quadrato magico é stato trasformato in un problema aritmetico, talaltra é prevalso il metodo algebrico operando con il valore simbolico della 'a'.

Da un grafico delle similaritá dei procedimenti e dei risultati emergono due raggruppamenti:

(1) Al primo gruppo appartengono gli alunni che hanno utilizzato il calcolo algebrico assegnando ad 'a' un valore costante. Le strategie di questo gruppo riguardano il calcolo aritmetico.

(2) Il secondo gruppo é formato dagli alunni che hanno utilizzato il calcolo aritmetico o calcoli algebrici errati. La maggior parte degli alunni ha utilizzato calcoli algebrici. Alcune strategie previste dall'analisi a priori del problema fatta con l'insegnante non sono state utilizzate(ad esempio, i sistemi lineari).

Ancora una volta é interessante dal punto di vista didattico notare la varietá di significati che assume per gli studenti il simbolo 'a'.

Questa é una caratteristica dei valori simbolici che sono astratti.

Per taluni il simbolo 'a' viene considerato un valore costante, per altri un valore numerico, per certuni un simbolo senza alcun valore, oppure un'incognita, oppure ancora una variabile.

Gli alunni, a questo livello scolastico, hanno usato un numero considerevole di congetture e argomentazioni. Anche questo, a mio parere, é un bel risultato dal punto di vista della didattica della matematica.

2. Proposta di un'attivitá di classe sui quadrati magici con riferimento a quello di Dürer

La seconda attivitá che vado a presentare nasce come esperienza rivolta a docenti e studenti statunitensi, pertanto i suoi obiettivi ricalcano gli standard ed i programmi dei gradi 6-8 previsti dalla scuola americana, che corrisponde alla nostra scuola media italiana.

Cercheró di commentare questo lavoro con riferimento ai programmi della scuola media italiana, in particolare a proposito delle indicazioni per la matematica.

Riporto dunque qui di seguito ció che in Italia ci si prefigge di ottenere per studenti di etá compresa tra gli 11 e i 13 anni.

Obiettivi:

'... *L'insegnamento della matematica propone di:*

- *suscitare un interesse che stimoli le capacitá intuitive degli alunni;*
- *condurre gradualmente a verificare la validitá delle intuizioni e delle congetture con ragionamenti via via piú organizzati;*
- *sollecitare ad esprimersi e comunicare in un linguaggio che, pur conservando piena spontaneitá, diventi sempre piú chiaro e preciso, avvalendosi anche dei simboli, rappresentazioni grafiche, ecc. che facilitino l'organizzazione del pensiero;*
- *guidare alla capacitá di progressiva chiarificazione dei concetti e facendo riconoscere analogie in situazioni diverse, cosí da giungere a una visione unitaria su alcune idee centrali (variabile, funzione, trasformazione, struttura ...);*

- *avviare alla consapevolezza e alla padronanza del calcolo.*

Suggerimenti metodologici:

Per il conseguimento degli obiettivi predetti, si fará ricorso ad osservazioni, esperimenti, problemi tratti da situazioni concrete cosí da motivare l'attivitá matematica della classe fondandola su una sicura base intuitiva.

Verrá dato ampio spazio all'attivitá di matematizzazione intesa come interpretazione matematica della realtá nei suoi vari aspetti (naturali, tecnologici, economici, linguistici...) con la diretta partecipazione degli allievi.'

'... La matematica potrá fornire e ricevere contributi significativi da altre discipline.

Si tenga presente, al riguardo, che la matematica fornisce un apporto essenziale alla formazione della competenza linguistica, attraverso la ricerca costante di chiarezza, concisione e proprietá di linguaggio, e, anche, mediante un primo confronto fra il linguaggio comune e quello piú formale, proprio della matematica.'

Tra i temi di studio affini agli standard americani che si inquadrano nell'esperienza sui quadrati magici, vorrei citare i seguenti:

Insiemi numerici:

(1) *Numeri naturali. Successivi ampliamenti del concetto di numero: dai naturali agli interi relativi: dalle frazioni (come operatori) ai numeri razionali - Rapporti, percentuali - Proporzioni - Rappresentazione dei numeri su una retta orientata.*
(2) *Scrittura decimale. Ordine di grandezza.*
(3) *Operazioni dirette e inverse e loro proprietá nei diversi insiemi numerici. Potenze e radici. Multipli e divisori di un numero naturale e comuni a piú numeri. Scomposizione in fattori primi. Esercizi di calcolo, esatto e approssimato. Approssimazione successive come avvio ai numeri reali. Uso ragionato di strumenti di calcolo (ad es. tavole numeriche, calcolatori tascabili, ecc.).*

Trasformazioni geometriche:

(1) *Isometrie (o congruenze) piane - traslazioni, rotazioni, simmetrie a partire da esperienze fisiche (movimenti rigidi) - Composizioni di isometrie. Figure piane direttamente o inversamente congruenti.*

(2) *Similitudini piane, in particolare omotetie, a partire da ingrandimenti e rimpicciolimenti. Riduzioni in scala.*
(3) *Osservazione di altre trasformazioni geometriche: ombre prodotte da raggi solari o da altre sorgenti luminose, rappresentazioni prospettiche (fotografie, pittura, ecc.), immagini deformate...*

Ora, concentriamoci soprattutto sugli obiettivi *specifici* dell'attivitá relativa al quadrato magico di Albrecht Dürer:

(1) gli studenti impareranno la definizione di quadrato magico;
(2) gli studenti impareranno il contesto storico dei quadrati magici;
(3) gli studenti faranno esperienza degli aspetti artistici dei quadrati magici.

Per quanto riguarda il materiale adatto ad una buona preparazione del lavoro di classe, occorre, se possibile, l'accesso alla rete Internet in modo da strutturare l'attivitá mostrando dapprima il quadro di Dürer *Melancholia*, suscitando l'attenzione dei ragazzi in particolare modo sul quadrato magico riconoscibile in esso, e fornendo informazioni storiche sull'autore interattivamente, per i piú interessati, in modo da coinvolgerli maggiormente nel contesto storico, e a questo punto incominciando con l'attivitá di gruppo vera e propria.

In alternativa, si possono mostrare inizialmente alla classe lucidi e trasparenze sugli stessi temi descritti in precedenza; in entrambi i casi per un corretto sviluppo dell'esperienza é necessario consegnare ad ogni ragazzo, o a ciascun gruppo, carta, penna e righello.

Per prima cosa, si tratta di far visualizzare a tutti il quadrato magico di Dürer, per poi sottoporre agli studenti alcune fra queste domande, di argomento storico e matematico, magari le piú significative:

Domande a carattere storico:

- Dopo aver letto riguardo alla vita ed al contesto storico-culturale dell'artista, perché pensi che abbia incluso un quadrato magico all'interno della sua opera?
- Se tu dovessi creare un quadrato magico con la data di quest'anno, dovresti riempire una griglia di quale dimensione?

Domande a carattere matematico:

- Che cosa vi é di magico riguardo alla sistemazione dei numeri nelle celle del quadrato $4 \cdot 4$?
- Qual é stato il primo numero usato dall'artista? Quale l'ultimo?
- Quanti numeri vi sono? Alcuni numeri sono ripetuti?
- Qual é la somma dei numeri della prima, seconda, terza, quarta riga?

Albrecht Dürer's Magic Square

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Figura 1. Il quadrato magico $4 \cdot 4$ di Albrecht Dürer.

- Qual é la somma dei numeri della prima, seconda, terza, quarta colonna?
- Qual é la somma dei numeri sulle 2 diagonali?

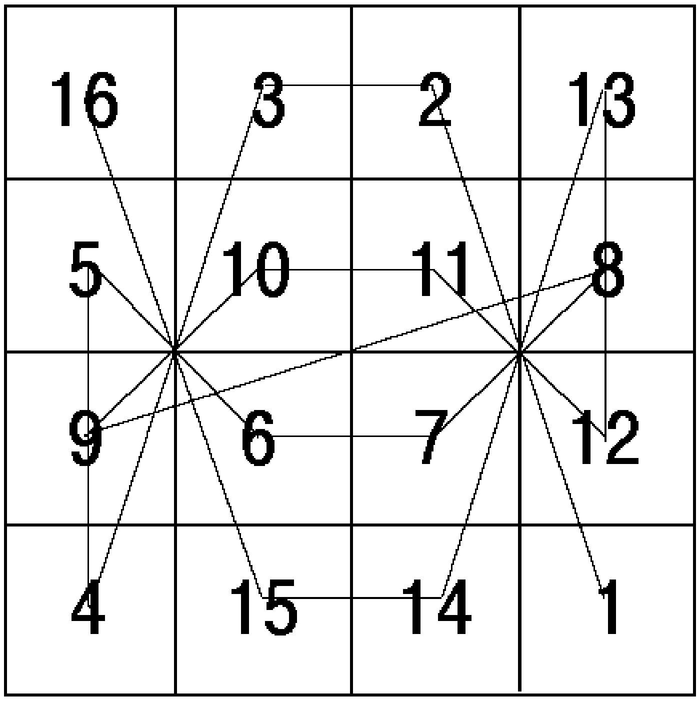
Tutto questo per far sviluppare e rafforzare negli allievi attenzione, riflessione e capacitá di ragionamento critico.

A questo punto, mentre l'insegnante lavora con il proiettore mostrando il da farsi, gli studenti costruiscono una griglia vuota di dimensione $4 \cdot 4$ e, usando il quadro dell'artista mostrato dal docente, inseriscono nel quadrato i numeri utilizzati da Dürer, con l'avvertenza che le cifre debbano essere posizionate al centro di ogni cella della griglia.

L'ultima parte dell'attivitá consiste nel far disegnare un puntino nel centro di ogni numero del quadrato e, usando un righello, unire i puntini partendo da 1, proseguendo con 2, 3,. . ., fino a 16, in modo tale da ottenere una figura simile a quella che segue.

É ora interessante porre ai ragazzi le seguenti domande relative a concetti di simmetria:

- Quali motivi/modelli/trame vedi?
- Quali sono le relazioni di simmetria?



- La linea che hai disegnato é un esempio di rotazione? traslazione? riflessione? glisso-simmetria? o altro?

Per scoprire la trasformazione coinvolta, é utile creare un lucido da mostrare alla classe e svolgere dei 'test' di rotazione, traslazione e riflessione sul campione preso come esempio.

Ritengo questa esperienza formativa sia dal punto di vista matematico che storico-artistico, e penso che possa essere un esempio di metodologia di didattica A molto efficace verso gli studenti, nonché motivante e stimolante anche per l'acquisizione di concetti e di idee da sviluppare in futuro, come per esempio le trasformazioni geometriche.

3. Considerazioni personali finali

Vorrei concludere il tutto esprimendo alcune considerazioni personali e svolgendo un breve confronto fra le due esperienze sui quadrati magici.

Innanzitutto, per quanto riguarda la ricerca d'aula in didattica della matematica, credo che la proposta del gioco del quadrato magico svolta dal gruppo di Palermo (utilizzo la parola gioco perché gli alunni lo vedono come un qualcosa di ludico, ed infatti si tratta anche di matematica ricreativa) sia molto adatta.

Puó far emergere tante tematiche di studio interessanti nella ricerca in didattica della matematica, in particolare in didattica B, cioé nell'epistemologia dell'apprendimento della matematica: il contratto didattico, le rappresentazioni semiotiche, l'importanza di congetturare e dimostrare in matematica, la differenza tra esercizi e problemi, la questione dei simboli, e questi solo per citarne alcuni.

Per quanto concerne, invece, una metodologia didattica sulla risoluzione di un quadrato magico in sé, credo che sia utile e proficuo fornire agli studenti anche una caratterizzazione storico-culturale ed aneddottica del problema, magari fornendo un'esemplificazione : avviene proprio questo nell'esperienza del quadrato di Albrecht Dürer, e ció diventa cruciale al fine di aumentare l'interesse e la motivazione degli allievi: ció riguarda naturalmente la didattica A.

Oltretutto, come ho giá rimarcato precedentemente, i quadrati magici hanno tante applicazioni moderne, anche ludiche, ma non solo, tali che ognuno di noi dovrebbe avere almeno un'idea di che cosa si tratti. É comunque un argomento talmente vasto con talmente tanti sbocchi che l'approfondimento che ho svolto nella mia argomentazione é solo una piccola parte di ció che vi si sarebbe potuto collegare. Spero tuttavia di aver almeno inquadrato l'argomento nei suoi aspetti principali.

Bibliografia

[1] N. L. Biggs: Discrete Mathematics, Clarendon Press - Oxford 1985
[2] L. Childs: Algebra, Ets editrice - Pisa 1983
[3] G. M. Piacentini Cattaneo: Algebra. Un approccio algoritmico, Decibel Zanichelli - 1996
[4] M. Gardner: Enigmi e giochi matematici, Vol. 2, Sansoni - 1973
[5] M. Gardner: Enigmi e giochi matematici, Vol. 3, Sansoni - 1973
[6] W. W. Sawyer: Preludio alla Matematica, Biblioteca Moderna Mondadori - 1962
[7] C. Procesi: Elementi di teoria di Galois, Decibel - Padova 1977
[8] C. Pellegrino, L. Zuccheri: Tre in Uno - Piccola Enciclopedia della Matematica Intrigante
[9] I. Ghersi : Matematica curiosa e dilettevole
[10] R. Cammilleri: Il quadrato magico - un mistero che dura da duemila anni
[11] http://www.antiqua.altervista.org/quadrati.html
[12] http://mathworld.wolfram.com/
[13] http://www2.polito.it/didattica/polymath
[14] http://mathforum.org/alejandre/magic.square.html
[15] http://www.edscuola.it/archivio/norme/programmi/media.html
[16] http://it.wikipedia.org
[17] http://math.unipa.it/˜grim/ : Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento/Apprendimento delle Matematiche - Universitá degli studi di Palermo - Dipartimento di Matematica e Applicazioni.
Lavoro di ricerca in didattica della matematica - Gruppo 1 - Quadrato magico.
Coordinatori: Elsa Malisani, Teresa Marino.
Componenti: Abate Antonella, Buscemi Concetta, Campagna Maria, Cumia Alessandro, Diana Rosa, Fuardo Gabriella, Mancuso Irene, Marotta Salvatore, Martino Rosaria, Parisi Gabriela, Rindone Mariella, Sutera Rita.