ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

'Sensate esperienze' e 'necessarie dimostrazioni': una proposta di insegnamento della cinematica

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Giorgio Bolondi

Correlatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Barbara Pecori

Presentata da:
Valentina Botteri

II Sessione Anno
Accademico 2013-2014

Alla mia famiglia

Indice

Introduzione

La matematica è un'attività umana che sembra non lasciare indifferente quasi nessuno: alcuni rimangono affascinati dalla sua 'magia', molti altri provano paura e rifiutano categoricamente persino di sentirla nominare. Spesso, non solo a scuola, si percepisce la matematica come un'attività distaccata, fredda, lontana dalle esigenze del mondo reale. Bisognerebbe, invece, fare in modo che gli studenti la sentano come una risorsa culturale importante, da costruire personalmente con tempo, fatica e soddisfazione. Gli studenti dovrebbero avere l'opportunità di riflettere sul senso di fare matematica e sulle sue potenzialità, attraverso attività che diano spazio alla costruzione autonoma, alle loro ipotesi e alla condivisione delle idee. Nel primo capitolo, a partire dalle difficoltà degli studenti, sono analizzati alcuni studi sulla straordinaria capacità della matematica di organizzare le nostre rappresentazioni del mondo che ci circonda e sull'importanza di costruire percorsi didattici incentrati sulla modellizzazione matematica. Dalla considerazione di questi studi, è stato elaborato un progetto didattico, presentato nel secondo capitolo, che potesse rappresentare un'occasione inconsueta ma significativa per cercare di chiarire l'intreccio profondo tra matematica e fisica. Si tratta di una proposta rivolta a studenti all'inizio del secondo biennio in cui è prevista una revisione dei problemi della cinematica attraverso le parole di Galileo. L'analisi di documenti storici permette di approfondire le relazioni tra grandezze cinematiche e di mettere in evidenza la struttura matematica di tali relazioni. Le scelte che abbiamo fatto nella nostra proposta sono state messe in discussione da alcuni insegnanti all'inizio della formazione per avere un primo riscontro sulla sua validità e sulle sue potenzialità. Le riflessioni raccolte sono state lo spunto per trarre delle considerazioni finali. Nelle appendici, è presente materiale di lavoro utilizzato per la progettazione e discussione del percorso: alcuni testi originali di Aristotele e di Galileo, le diapositive con cui la proposta è stata presentata agli studenti universitari e un esempio di protocollo di costruzione di Geogebra sul moto parabolico.

Capitolo 1: Lo stato dell'arte

1.1 Le difficoltà degli studenti in matematica

Il valore formativo e culturale assegnato allo studio della matematica ha radici molto antiche, così come il problema di quale matematica insegnare e come farlo. All'ingresso della culla del pensiero e della filosofia greca, ossia l'Accademia di Atene, era posta un'iscrizione su cui era scritto *"Non entri chi non conosce la geometria*", per rimarcare l'importanza della sua impronta sul ragionamento. Agli inizi del nuovo millennio, questa considerazione non è cambiata sensibilmente. Per esempio, il progetto OCSE PISA è nato con l'intento di valutare quanto delle conoscenze e abilità apprese, nel corso degli studi obbligatori, un ragazzo sarà in grado di trasferire nella propria vita futura, come cittadino responsabile. È rivolto a ragazzi di 15 anni, di tutto il mondo, e indaga, con periodicità triennale, le competenze in lettura, matematica, e scienze. In particolare, nel framework di OCSE PISA del 2012 si definisce la competenza matematica (mathematical literacy) come "*la capacità di un individuo di utilizzare e interpretare la matematica e di darne rappresentazione mediante formule, in una varietà di contesti. Tale competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate che consentano loro di essere cittadini* *impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo*." La definizione sottolinea l'importanza di dare l'opportunità agli studenti di imparare il gusto e l'utilità di guardare il mondo in modo matematico. I quattro ambiti dell'indagine sono cambiamenti e relazioni (funzioni), spazio e forma (geometria), quantità (algebra e aritmetica), incertezza e dati (probabilità). La matematica valutata da OCSE-PISA è quindi una matematica ricca, centrata attorno all'attività di risoluzione di problemi. Le prove sono articolate in modo tale da richiedere agli studenti di svolgere diversi compiti, che sono presi da un contesto reale, quotidiano, noto ai ragazzi. Si richiede loro di *formulare* la matematica, ossia prendere una situazione così come si presenta nel contesto reale, e trasformarla in una forma trattabile matematicamente, dandole una struttura e una rappresentazione adeguata (ad esempio tramite un'equazione, una funzione, una rappresentazione geometrica, un grafico); di *applicare* la matematica, facendo ragionamenti, manipolando oggetti e formule, o eseguendo calcoli; di *interpretare* le soluzioni matematiche trovate riflettendo sulla loro validità e sensatezza nel contesto reale del problema affrontato. In alcuni casi, è prevista non solo la produzione di risposte chiuse ma anche la giustificazione alla risposta fornita.

In generale, il risultato dei ragazzi italiani è al di sotto della media dei Paesi OCSE[1], sebbene il quadro evidenzi segnali di un miglioramento con il passare del tempo. I risultati sono in linea con le prove INVALSI svolte a livello nazionale: mostrano, per esempio, come l'andamento sia piuttosto disomogeneo dal punto di vista geografico, con risultati eccellenti nelle zone del Nord-Est e più sconfortanti per il Sud e le isole. Circa il 34% degli studenti del Mezzogiorno, per esempio, riesce a rispondere solo a domande nelle quali sono esplicitate tutte le informazioni da adoperare. Inoltre sembrano avere importanza anche il contesto familiare dell'individuo, la sua cittadinanza (con un gap per i migranti, specie se di prima generazione), e la tipologia di scuola. Gli studenti degli Istituti professionali e tecnici sono, in linea generale, più in difficoltà. Si può notare soprattutto che gli studenti italiani si posizionano nella media rispetto al processo dell'applicare, cioè quando si tratta di fare matematica in un contesto matematico, ma i risultati peggiorano nei processi del formulare, non essendo in grado di capire quando è opportuno usare la matematica per comprendere e risolvere un problema o una sfida. Le maggiori difficoltà per quanto riguarda le quattro aree di contenuto dei quesiti posti sono nell'ambito 'cambiamenti e relazioni', che "*misura la comprensione delle tipologie fondamentali del cambiamento (all'interno di sistemi di*

[1] Rapporto nazionale OCSE PISA 2012.

oggetti correlati o in circostanze nelle quali gli elementi si influenzano a vicenda) e la capacità di riconoscerle quando si manifestano per poter utilizzare modelli matematici adeguati a descrivere e predire il cambiamento". Inoltre, i risultati dell'indagine mostrano le difficoltà dei nostri ragazzi nell'argomentazione e giustificazione delle proprie affermazioni. Questi risultati mostrano come l'insegnamento della matematica nella nostra scuola tenda a concentrarsi esclusivamente sull'aspetto procedurale, lasciando in ombra quello concettuale e relazionale.

1.2 La modellizzazzione matematica e le strutture di ragionamento spontanee

Indipendentemente dagli specifici oggetti e metodi di studio della realtà naturale, uno dei temi fondamentali dell'insegnamento delle scienze, rispetto al quale si vorrebbe perseguire un apprendimento di qualità, è il tema del cambiamento. Cosa significa che una cosa (oggetto, persona, ambiente) cambia? Come faccio a saperlo? Fin da piccoli i bambini possono essere avviati, attraverso il gioco, ad attività intuitive di osservazione e manipolazione, abbastanza coinvolgenti da permettere di costruire, in modo elementare, sia concetti specifici, sia modi di procedere tipici della scienza. Per esempio[2], una sofisticata versione del nascondino può permettere l'esplicitazione di correlazioni d'ordine fra quattro variabili gestite qualitativamente (frequenza della "conta", distanza degli spostamenti necessari, velocità della corsa, tempo necessario): "*'Se lui conta troppo in fretta non ce la faccio a correre abbastanza in fretta per nascondermi lontano (…) allora decido di nascondermi più vicino, (…) però se per fare tana devo fare un giro molto più lungo mi tocca correre al massimo per arrivare in tempo (…)', e così via."* Buona parte del lavoro di astrazione, necessario alla prima costruzione *'reciprocamente risonante di struttura matematica e modellizzazione fisica'*, consiste dunque nell'esplicitazione linguistica e rappresentativa, delle azioni di cui è intessuta la quotidianità. L'elaborazione condivisa delle rappresentazioni mentali "naturali" del movimento, controllate e descritte con concetti fisico-matematici via via più raffinati, permetterà di costruire quelle competenze formali fondamentali per l'educazione scientifica.

Possediamo solo due modi per confrontare tra loro due elementi di realtà: la differenza fra variabili e il loro rapporto. Sono cognitivamente elementari e organizzano strutture molto solide per rappresentare i fenomeni perché sono ancorati nella

[2] Guidoni, "Movimento – spunti di riflessione", 2006. http://www.seminariodidama.unito.it/guidonic3.pdf;

percezione e nell' *'azione'*. Proprio attraverso la discriminazione e la sistematizzazione, prima qualitativa e poi quantitativa, dei confronti, e dei confronti multipli, secondo differenza e secondo rapporto, si costruiscono le strutture additiva e moltiplicativa[3]. La struttura additiva è intrinsecamente unidimensionale, e implica sia omogeneità qualitativa (selezione di una classe comune a tutti i termini coinvolti) sia omogeneità quantitativa (selezione della stessa unità di misura). La struttura moltiplicativa, invece, è intrinsecamente bidimensionale e permette il confronto tra grandezze non omogenee. Spesso a scuola la moltiplicazione viene presentata come addizione ripetuta e si rappresenta su una stessa linea; però, non si tiene conto del fatto che così si sta perdendo un'informazione importante. Infatti, nella moltiplicazione si combinano due numeri che hanno significato diverso: la struttura moltiplicativa consiste nel prendere 'a cose per volta per b volte'. Giordano e Bonelli Majorino[4] propongono di usare una rappresentazione spaziale della moltiplicazione per aiutare a far emergere la struttura bidimensionale della moltiplicazione, perché se non è chiarita adeguatamente, genera in seguito molte difficoltà, specie nei problemi di proporzionalità. Il problema per molti studenti dei diversi livelli scolari è proprio passare dalla risoluzione intuitiva dei problemi di proporzionalità a una loro gestione numerica e algebrica corretta, oltre alla costruzione dei significati delle diverse grandezze in gioco. *"Così se è facile capire che la dolcezza di un bicchiere con acqua e zucchero dipenderà da quanta acqua c'è e da quanto zucchero, non è facile capire che si può fare il rapporto tra i due pesi (masse) per ottenere il valore della dolcezza (se faccio massa zucchero/massa acqua, altrimenti il reciproco) e che due soluzioni sono ugualmente dolci se questo rapporto rimane costante al variare della quantità dell'acqua e dello zucchero [...] Analogamente per spazi e tempi, prezzi e quantità, pesi e volumi ecc.*" Quel che deve essere innanzitutto costruito è la capacità di interpretare verbalmente il significato di un numero che è ottenuto dalla loro divisione, che dal punto di vista della fisica cambia se il rapporto è numerico, tra due grandezze omogenee o tra due grandezze non omogenee. Le verbalizzazioni dei rapporti sottendono molte delle manipolazioni dell'algebra elementare e sono particolarmente importanti nella trasposizione di problemi verbali.

---

[3] Guidoni P., Ripensando il pensiero proporzionale: schemi per la riflessione e per la progettazione didattica proposti nel corso di "Didattica della Matematica" della laurea in "Formazione Primaria", Materiali Progetto CNR-Villani

[4] Giordano, E., Bonelli Majorino, P. (2009). Esempi di interferenze costruttive tra matematica e fisica per il successo formativo nella scuola di base: la proporzionalità. In O. Robutti, & M. Mosca (a cura di), Curriculum e successo formativo in matematica e fisica

La proporzione è una struttura concettuale, radicata nelle strategie cognitive più generali (a cominciare da quelle percettive) e coinvolta fino a quelle più astratte e complicate. Si tratta della sintesi di due relazioni dello stesso tipo che legano quattro termini presi due a due, rispetto a cui si afferma un'equivalenza relazionale, riconosciuta valida attraverso un duplice confronto condotto con lo stesso criterio: il nodo fondamentale per la sua comprensione è cosa significa il segno "=". Si possono avere le seguenti relazioni:

- A:a = B:b

  E' la proporzione vista come "semanticamente omogenea", in cui si mette in relazione diretta fra loro elementi che sono "corrispondenti in significato", ma si trovano all'interno di due sistemi diversi. Sono ovviamente di questo tipo relazioni come SPAZIO:spazio = TEMPO:tempo (p. es. per due diversi intervalli all'interno dello stesso movimento); COSTO:costo = QUANTITÀ:quantità (p. es. per due diverse merci vendute allo stesso prezzo uniforme); PESO:peso = VOLUME:volume (p. es. per due diversi materiali di densità uniforme); e così via. I rapporti omogenei sono adimensionali.
- A:B = a:b

  E' la proporzione vista come "semanticamente disomogenea", in cui si mettono in relazione diretta coppie di elementi di diverso significato, che sono interne a ciascuno dei due sistemi. Si può definire la "forma" stessa del sistema attraverso la relazione interna. Qui il rapporto diventa in genere intrinsecamente dimensionale: è ben noto che fare direttamente rapporti fra grandezze semanticamente disomogenee era vietato per i greci antichi;
- $A \times b = a \times B$

  E' la terza relazione possibile fra coppie di elementi, numericamente ovvia ma, di fatto, semanticamente disturbante. Contesti semantici come quelli di velocità, prezzo, densità ETC non permettono, infatti, di assegnare un significato diretto a relazioni moltiplicative di questo tipo (generalmente "incrociate": spazio1 x tempo2 = spazio2 x tempo1, … ETC).

Il fatto poi che le tre relazioni di proporzionalità siano concettualmente e numericamente riducibili una all'altra fa parte delle proprietà strutturali delle operazioni moltiplicative fra numeri. Queste relazioni sono spesso concepite solo come passaggi algebrici, mentre il significato sottostante è, di solito, oscurato ai ragazzi. Invece, potrebbero essere sfruttate proprio come avvio a una comprensione astratta della "compensazione" come fenomeno strutturale legato alla strategia moltiplicativa.

Analogamente al confronto singolo, il doppio confronto (uguaglianza di rapporti per la proporzione) costituisce una delle strutture portanti della fenomenologia e delle strategie di conoscenza quotidiana e comune. Come tale, dunque, questa tipologia di "mosse cognitive di confronto strutturante", che è spontanea nei primissimi anni di vita, va valorizzata e arricchita fin dall'inizio dell'esperienza scolastica; gradualmente esplicitata in situazioni e in semantiche differenti. Per queste considerazioni, possiamo concludere che il pensiero proporzionale costituisce dunque uno strumento principe di modellizzazione e ha un ruolo fondamentale nella costruzione del pensiero fisico, perché permette di costruire nuove grandezze, attraverso le relazioni tra grandezze che si conoscono già. Ed è all'interno della teoria delle proporzioni che avviene il primo tentativo di formalizzazione del movimento.

La lunga trattazione che Galileo fa per definire il 'moto equabile' non è tanto una ripetizione di risultati noti, ma è impostata sulla definizione di correlazioni d'ordine tra spazi, tempi e velocità per studiare le velocità in quanto classe di grandezze, e permettere di stabilire come si confrontino tra loro e come se ne calcolino i rapporti. "*Lo sforzo di esplicitazione raggiunge per la prima volta un livello compiutamente formale anche attraverso un'accurata gestione della semantica*"[5]. Possiamo osservare che Galileo definisce le velocità attraverso rapporti omogenei: sono le stesse difficoltà che hanno i ragazzi di oggi quando non hanno ancora assimilato totalmente il pensiero algebrico, quando cioè non sia stata ancora stabilizzata l'equivalenza tra rapporti di grandezze e numeri.

L'apparato matematico di cui Galileo dispone è inadeguato, inadatto a esprimere compiutamente le sue idee e a descrivere il moto di caduta dei corpi. Un grave, in caduta libera in un mezzo resistente, dopo un periodo iniziale di accelerazione, finisce per acquisire una velocità sostanzialmente costante e il tempo necessario affinché si instauri questo regime di moto uniforme dipende dal mezzo: è piuttosto lungo nell'aria, ma al contrario è molto breve nell'acqua, dove si può dire che il moto di un grave sia praticamente uniforme. *"Per chi, come Galileo, cerchi di dare una descrizione quantitativa della caduta dei gravi disponendo di una matematica assolutamente insufficiente ad affrontare il fenomeno nella sua completezza (e cioè a rendere conto sia*

[5] Giusti E. "Galileo e le leggi del moto" in "Discorsi e dimostrazioni matematiche" di Galilei, Einaudi, Torino, 1990

dell'accelerazione iniziale che dell'uniformità asintotica), per chi dunque non si accontenti di una descrizione puramente qualitativa, si pone il problema di separare i due aspetti affermando la preminenza di uno di essi e riducendo l'altro ad elemento disturbatore, accidente preternaturale, che maschera la vera natura del fenomeno e che deve essere eliminato per giungere alla piena comprensione, dunque alla trattazione quantitativa, del processo." [6] Un passaggio decisivo per la comprensione del moto di caduta fu lo studio del moto del pendolo: il carattere del moto del pendolo (accelerazione) mostrò a Galileo un esempio da cui dedusse che nella caduta dei gravi, l'uniformità finale avrebbe potuto essere relegata tra gli accidenti, una perturbazione di cui non si può dare la trattazione matematica, effetto di un'azione ritardatrice del mezzo. In questo modo Galileo può passare alla trattazione puramente cinematica del moto.

In una lettera al Sarpi, suo amico della Repubblica veneta, Galileo traccia quale è il vero obiettivo dei suoi studi: *"Ripensando circa le cose del moto, nelle quali, per dimostrare li accidenti da me osservati, mi mancava principio totalmente indubitabile da poter porlo per assioma, mi son ridotto ad una proposizione la quale ha molto del naturale et dell'evidente; et questa supposta, dimostro poi il resto, cioè gli spazii passati dal moto naturale esser in proporzione doppia dei tempi, et per conseguenza gli spazii passati in tempi eguali esser come i numeri impari ab unitate, et le altre cose."* [7] Galileo ha osservato un certo numero di casi del moto di caduta dei gravi, ed è alla ricerca di un principio (di un metodo matematico) che permetta di unirli in una teoria del moto. Galileo conosce già risultati a cui vuole arrivare; in primo luogo la legge oraria (gli spazi percorsi sono proporzionali ai quadrati dei tempi) e la legge dei numeri dispari (gli spazi percorsi in tempi uguali dall'inizio del moto stanno tra loro come i numeri dispari); ma a questi non è difficile aggiungerne altri, come la legge del piano inclinato (i tempi di discesa lungo piani inclinati di eguale altezza sono proporzionali alle lunghezze dei piani). Quello cui Galileo mira è dunque la scoperta non delle leggi che governano il moto, ma piuttosto di una teoria matematica che colleghi tra loro risultati precedentemente acquisiti. *"Il fatto in sé non è sorprendente: non si dimostra che quello che si conosce"* osserva Giusti nella prefazione dei Discorsi da lui curata.

"*La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a*

[6] Giusti, 1990
[7] Vedi Giusti, 1990

intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto." Queste famosissime parole di Galileo che si trovano nel Saggiatore sanciscono, in qualche modo, la nascita della fisica moderna, e più in generale della scienza così come oggi la intendiamo. Galileo, in aperta opposizione con la tradizione aristotelica scolastica, ha sottolineato la necessità di coniugare le "sensate esperienze" con le "certe dimostrazioni", rivendicando così il ruolo essenziale della matematica nel descrivere i fenomeni della natura e, in particolare, il movimento dei corpi. "*Se il primo passo della conoscenza scientifica consiste nell'osservazione dei fatti, la matematica ha il ruolo di 'decodificare' il messaggio percepito dai sensi. L'apparente complessità dei fatti nasconde cioè delle leggi scritte in un codice che può essere tradotto nel semplice linguaggio della matematica. La decodificazione dei dati empirici conduce alla formulazione di una ipotesi, espressa sempre in termini matematici, la quale dovrà essere verificata attraverso l'esperimento. Con questo esperimento la natura viene interrogata, mediante l'uso di macchine o artifici umani che la mettano nelle migliori condizioni di rispondere. Infine, la manipolazione matematica condurrà alla determinazione di formule semplici, adeguate a descrivere e spiegare il fenomeno studiato. L'esperimento ha un ruolo assai importante nella scienza galileiana: è il momento del controllo, della verifica della legge matematica mediante la quale si vuol descrivere l'intima essenza di un complesso di fenomeni. Ma il rapporto fra scienziato e natura non è diretto: lo scienziato non osserva la natura a occhio nudo, ma attraverso la lente di un modello matematico astratto.*"[8] Galileo recepisce la visione rinascimentale, in cui la matematica si afferma come potente strumento per unificare e consolidare le nuove conoscenze derivate dalle attività pratiche e dalle invenzioni tecniche[9], e la riveste di un sapere razionale, più astratto, legato al pensiero platonico. Il punto chiave è quello di riuscire a 'difalcare gli impedimenti' come Galileo afferma in un passo dei Dialoghi. Si tratta di saper *"scorgere entro il complicato intreccio dei fenomeni naturali, le leggi, le costanze generali che li regolano, scartando gli aspetti accessori, secondari rispetto all'oggetto principale del suo studio. (…) Dietro un piano materiale inclinato su cui rotola una sfera materiale imperfetta (lo scienziato) deve vedere il modello matematico del piano senza attrito su cui rotola una sferetta materiale perfetta. Certo, lo scienziato deve saper 'difalcare gli impedimenti' in modo corretto, cioè*

[8] Israel, G., Modelli matematici. Introduzione alla matematica applicata, Torino: Franco Muzzio Editore, 2009

[9] Si pensi ai problemi dell'astronomia

trascurando gli aspetti davvero accessori rispetto al problema oggetto del suo studio. (…) *Paradossale percorso intellettuale quello della scienza moderna che, per avvicinarsi di più alla realtà, alla natura, deve farsi più astratta!*"[10]

La matematica di cui si serve Galileo affonda le radici nella geometria di Euclide; dunque, si tratta ancora di concetti, che, sebbene idealizzati, sono in sostanza parte integrante del mondo fisico. Concetti cruciali di matematica e fisica, come le funzioni, sono stati storicamente sviluppati per lo studio del moto[11] e poi decontestualizzati e generalizzati, conservando termini che evocano il moto. Tuttavia con il passare del tempo, la matematica è divenuta sempre più complessa e astratta, sempre più impregnata di oggetti per cui è difficile trovare una corrispondenza con la realtà esterna, come, per esempio, i numeri complessi o le geometrie di spazi curvi a più dimensioni. Nonostante questo, si è dimostrata essenziale nel descrivere la fisica del XX secolo, addirittura anticipando alcune strutture formali sia del mondo microscopico delle particelle elementari sia del mondo macroscopico dell'universo e la sua efficacia non si limita alla fisica, ma penetra anche altri campi. La matematica è stata investita di un nuovo ruolo: quello di unificazione delle teorie. Mediante il linguaggio matematico si costruiscono "*descrizioni astratte, valide per molti casi diversi e quindi capaci di unificarli sul piano dell'analogia della forma descrittiva. Insomma, il nuovo criterio fu quello di costruire dei modelli matematici: cioè schemi astratti di contenuti possibili da riempire di volta in volta di reali contenuti diversi. Modelli capaci di produrre un'unificazione nella descrizione dei fenomeni, ma soltanto sul piano linguistico-formale.*"[12] Non si può che rimanere affascinati dalla sua straordinaria potenza nel selezionare aspetti di una situazione reale e nel rappresentarli con il linguaggio della logica, stabilendo tra loro delle relazioni di tipo matematico che ci permettono di descrivere e comprendere qualcosa della struttura del mondo in cui ci troviamo. Per dirla come Wigner[13], "*l'enorme utilità della matematica nelle scienze della natura è qualcosa che confina con il mistero e che non ha alcuna spiegazione razionale*". Il dibattito su cosa sia la matematica e del motivo per cui essa riesca a eseguire calcoli e previsioni nelle applicazioni più diverse, dal conto della spesa all'orbita dei pianeti e degli asteroidi, è

---

[10] Israel, 2009.

[11] Prima di rendere esplicito il concetto di funzione, i matematici studiarono le curve come generate da moti. In queste prime fasi di esplorazione del concetto, la funzione ha aspetti molto dinamici e solo in seguito venne sistematizzata in modo più rigoroso, nella forma moderna. [Paola, 2003]

[12] Israel, 2009

[13] "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", Wigner, 1959 in Boncinelli, Bottazzini 2000

attualmente ancora aperto. Ne è un esempio il libro "La serva padrona"[14] di Edoardo Boncinelli e Umberto Bottazzini. Riprendendo il titolo di un'opera di Pergolesi che a giudizio degli autori rende bene quanto emerge da questi discorsi, nel libro, si cerca di mettere in evidenza alcuni degli aspetti più salienti del dibattito. Sotto forma di dialogo, sono esposte le posizioni dei due autori che sono molto diverse. Boncinelli è un fisico che ha lavorato moltissimi anni in laboratorio come biologo molecolare. È convinto che tutto derivi dall'osservazione sperimentale, che porta all'elaborazione di teorie generali, che andranno poi testate con nuovi esperimenti. A partire da un'ipotesi che non si può verificare, la matematica permette di predire una serie di conseguenze e queste, a volte, sono più facili da verificare delle affermazioni iniziali. Secondo tale visione la matematica non enuncia verità sul mondo e sulla natura, ma esemplifica solo il potere del ragionamento logico. Dal canto suo, lo storico della matematica Bottazzini crede che gli enti matematici siano prodotti della mente umana prima ancora che astrazioni dell'esperienza sensibile. La mente umana possiede, attraverso l'evoluzione biologica della specie, alcuni elementi primitivi – i primi numeri naturali, forme geometriche elementari – che sono la base di un linguaggio, che, sviluppandosi attraverso l'evoluzione culturale, ci aiuta a interrogare la natura e ci dà la chiave per interpretarne le risposte. E questo linguaggio è proprio la matematica. *"Serva o padrona che sia la matematica rappresenta un'esaltante avventura tanto per l'umanità nel suo complesso quanto per ogni singolo individuo che vi si accosti e ne voglia gustare il fascino e il potere."*

1.3 Aspetti didattici

È innegabile che la matematica abbia caratteristiche che possono essere motivo intrinseco di difficoltà per chi apprende[15]. Opera su oggetti che sono astratti; ha una struttura formata da una rete fittissima di relazioni; richiede di partire da alcuni elementi primitivi e derivare tutto il resto, con deduzioni logiche; utilizza un linguaggio ricco di simboli, lontano da quello quotidiano. Queste caratteristiche che spesso vengono banalizzate o nascoste nella pratica didattica creano dei veri e propri ostacoli all'apprendimento. Si parla di ostacoli epistemologici perché legati alla natura stessa della disciplina. La loro formazione è spiegata dagli studi di psicologia cognitiva. Il nostro cervello è geneticamente predisposto a comprendere e ad apprendere e lo fa

[14] Boncinelli E., Bottazzini U.,"La serva padrona: fascino e potere della matematica", Cortina, Milano 2000.
[15] "La matematica è difficile?" Conversazione con Rosetta Zan in Perché studiare la matematica? A cura di Giorgio Bolondi, Pearson 2012.

strutturandosi in un continuo dialogo con l'ambiente esterno. L'apprendimento sarebbe il risultato di una selezione di prerappresentazioni che ci formiamo e di una stabilizzazione di queste attraverso tentativi ed errori. Le immagini mentali sono 'prodotti tipici dell'individuo', possono essere elaborate inconsciamente e sono validate e rinforzate nel tempo da prove, esperienze ripetute, esercizi risolti e accettati dall'insegnante come corretti. Ma è importante ad un certo punto rompere l'equilibrio, mostrando aspetti diversi, più profondi, e cambiare il modo di guardare il mondo di chi sta imparando. Questo è il compito dell'insegnante. L'insegnamento è un'attività sovversiva, come sostengono Postman e Weingartner[16]. Le idee transitorie sono in qualche modo necessarie, perché sono aggiustamenti, che rispondono in modo corretto a ciò che viene esperimentato, ma bisogna essere consapevoli che alcune resisteranno al cambiamento in un momento successivo, in cui si tenterà di farle superare, mettendole alla prova in situazioni diverse, più generali. L'allievo tenderà a conservare l'idea già acquisita, anche se produce risposte scorrette, proprio per il fatto che al momento della formazione è stata efficace. Bisogna che le contraddizioni siano messe in luce e che lo studente se ne renda conto. Per dare una veste teorica a queste considerazioni, Brousseau[17] definì questa barriera, che si oppone al passaggio da un'idea meno evoluta ad una più approfondita e più generale, con il termine 'ostacolo'. Si possono definire tre tipi di ostacolo: quelli di natura ontogenetica (le capacità del soggetto non sono adatte all'acquisizione di certi concetti), quelli di natura didattica (le scelte didattiche dell'insegnante possono essere più adatte ad alcuni studenti e meno ad altri), quelli di natura epistemologica. In particolare, gli ostacoli epistemologici si possono riconoscere facilmente. "*Quando nella storia dell'evoluzione di un concetto si individua una non continuità, una frattura, cambi radicali di concezione, allora si suppone che quel concetto abbia al suo interno ostacoli di carattere epistemologico sia ad essere concepito, sia ad essere accettato dalla comunità dei matematici, sia ad essere appreso.*"[18] In particolare, si può osservare che molte delle difficoltà, che i grandi matematici hanno incontrato, si verificano anche negli errori ricorrenti degli studenti, stabili negli anni e più o meno negli stessi termini. L'analisi critica dell'evoluzione delle idee è, prima di tutto, importante per l'insegnante, perché attraverso di essa può individuare i punti critici nell'apprendimento dei concetti. Per gli studenti, invece, non è scontata l'utilità di analizzare i punti critici,

---

[16] Postman, Weingartner, "L'insegnamento come attività sovversiva", 1969, in Zan, 2006
[17] Vedi D'Amore, 1999
[18] Bruno D'Amore, "Elementi di Didattica della Matematica" Pitagora ed. 1999.

legati ad un concetto, attraverso la sua evoluzione storica.[19] Considerare la storia della matematica come una specie di "laboratorio in cui esplorare lo sviluppo della conoscenza matematica" richiede l'accettazione di un punto di vista teorico che giustifichi il collegamento tra lo sviluppo concettuale nella storia e quello moderno. Infatti, i dati storici saranno inevitabilmente collegati e interpretati dal punto di vista dei meccanismi culturali attuali. Gli aspetti che, adesso, alla luce delle nostre conoscenze, consideriamo difficoltà storiche o momenti di passaggio verso la formazione di una matematica più evoluta, costituivano invece la matematica evoluta ed esatta dell'epoca, elaborata in base a precise esigenze e concezioni culturali.

Il contributo della storia nella didattica della matematica può essere importante da altri punti di vista e può assumere forme diverse. Si può presentare un concetto attraverso la sua evoluzione storica, partendo dalle origini delle idee e dei problemi, per favorire una visione della disciplina che non sia quella di una raccolta di regole già decise, *"sistemate da sempre e per sempre, ma qualcosa in evoluzione, fatta dall'uomo per l'uomo, intrisa da aspetti culturali e sociali"*[20]. Si può, invece, prevedere un uso a posteriori della storia, una volta che i concetti siano già stati acquisiti ad un primo livello, al fine di favorire un approfondimento e un chiarimento degli argomenti trattati. Nel nostro percorso abbiamo scelto di utilizzare il secondo approccio, alla luce delle interessanti ricerche di Anna Sfard[21]. Uno stesso concetto matematico può essere concepito e proposto sia come strumento, che viene usato per risolvere alcuni problemi, sia come oggetto, che trova una posizione propria all'interno del sapere matematico. Lo studio citato ipotizza che, sia nella costruzione nel corso della storia dei concetti matematici, che nel loro apprendimento da parte degli studenti, ciascun concetto venga visto e sperimentato prima come *strumento (o processo)* e solo in seguito si condensi in un *oggetto astratto,* meritevole di un'attenzione teorica. In questa prospettiva, i due modi di guardare gli enti matematici, quello strumentale e quello relazionale, non sono antitetici ma uno complementare dell'altro. Nessuno dei due va privilegiato rispetto all'altro perché sono entrambi importanti nel processo di apprendimento. È importante all'inizio dell'apprendimento, che l'allievo impari a utilizzare l'oggetto matematico, che spesso viene identificato attraverso un segno, e che ne esplori le caratteristiche operative, ma in seguito si deve favorire il passaggio ad un'astrazione e ad una

[19] G. Bagni, "Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche", La matematica e la sua didattica, 2, 51-70 (2004).
[20] D'Amore, 1999
[21] Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conception: reflection on processes and objects as different sides of the same coin, Educational Studies in Mathematics 22: 1-36.

trattazione più rigorosa dell'oggetto. Riprendere un determinato concetto matematico, come le proporzioni, per esempio, e rivederlo alla luce degli studi successivi, può aiutare gli allievi a precisare alcuni aspetti, proprietà e caratteristiche che in un primo tempo non erano state prese in considerazione o non erano state esplicitate dall'insegnante.

"*È anche vero, però, che non ho bisogno di condensare un processo in un oggetto astratto a meno che questo oggetto non mi serva come ingranaggio da usare in un processo di livello superiore. Questa considerazione può avere importanti implicazioni didattiche: la 'reificazione' di un processo in un oggetto astratto è un'operazione cognitiva assai complessa che richiede, in genere, anche una lunga fase di transizione. Se vogliamo coinvolgere uno studente in un'operazione di questa portata, è necessario che la motivazione sia forte*."[22] Infatti, nel momento in cui è richiesto di mettere in campo risorse ed energie per una qualsiasi attività, vale il principio di rilevanza: il soggetto deve percepire le potenzialità dell'attività e si deve sentire parte attiva in un progetto di acquisizione di un dominio di conoscenza, che ha sotto controllo. Dovremmo, quindi, creare situazioni in cui sente l'esigenza di passare ad un livello operativo più complesso, lasciare anzi che cominci ad esplorarlo, mettendo in gioco le proprie conoscenze, proponendo ipotesi, supposizioni, magari errori, tentando di dargli un ordine, confrontandosi e discutendo, per rendersi conto della comodità di organizzare ad un livello più alto un processo che già conosce in un oggetto nuovo. Anche nella storia il tentativo di dare una risposta a un problema aperto ha portato alla costruzione di nuove teorie e nuovi risultati che in linea di principio non si sapeva se avrebbero dato esito positivo. In questo quadro l'attività di modellizzazione appare privilegiata, in quanto effettivamente costruita attraverso esplorazioni di fenomeni, e quindi di processi, che per essere interpretati e utilizzati ad un altro livello, hanno bisogno di essere condensati in modelli.

Lo studente, d'altra parte, deve essere messo di fronte a situazioni che attingano alla sua realtà e che siano problematiche dal suo punto di vista. Solo sentendo il problema significativo per la sua realtà, solo lavorando su situazioni prese dalla realtà che rispondono a un problema sentito, egli metterà in campo azioni e ragionamenti, in modo naturale. Il ricorso a situazioni di realtà nella didattica della matematica dovrebbe essere motivato dal fatto che fornisce il terreno propizio per seminare il meccanismo delle immagini mentali. La modellizzazione matematica potrebbe essere, ancora,

[22] Mellone, Pezzia, Un progetto di ricerca-azione sulle strutture aritmetiche nella scuola di base, 2007.

un'attività privilegiata, perché riesce ad entrare in risonanza con il funzionamento del nostro cervello. "*Nel sottolineare il ruolo della matematica come linguaggio per descrivere la realtà, non si vuole per questo negare una sua specificità disciplinare; piuttosto si vuole rimarcare che, nel processo di apprendimento, enfatizzare la sua separatezza a priori dagli altri settori della scienza, confligge con i processi cognitivi naturali, figurando così all'origine di molte delle difficoltà manifestate dagli studenti. Se la matematica è concepita come un'astrazione a posteriori di strutture comuni a diversi contesti, il suo sviluppo strutturale entra in risonanza con la naturale attitudine di ogni essere umano di costruirsi strutture mentali e strumenti culturali per interpretare e dare un carattere di previsionalità all'esperienza, assumendo il ruolo di un linguaggio atto ad esprimere e sostenere il pensiero."* [23] Si dovrebbe, quindi, sfruttare questo nuovo modo di vedere la matematica nell'azione didattica: l'esplorazione dell'intreccio tra matematica e fisica, come due modi complementari ma "risonanti" di guardare il mondo, favorisce la creazione di interferenze costruttive.

Molto spesso, a scuola, tutto questo non accade, nonostante, nei licei scientifici, per esempio, il professore di matematica e quello di fisica siano la stessa persona. In matematica, si predilige privilegiare l'acquisizione dell'abilità procedurale ma questa non è sufficiente affinché gli allievi acquisiscano anche il significato di quello che stanno facendo e siano poi capaci di utilizzare gli strumenti che la matematica gli mette in mano, come abbiamo visto dai risultati OCSE PISA. Per esempio, nel caso del problema scolastico standard,[24] non c'è in generale una situazione effettivamente problematica che aiuti l'allievo a comprendere il problema: la situazione descritta spesso prende spunto dalla realtà quotidiana, ma è solo un pretesto per porre la domanda finale che è solo artificiosamente collegata a tale situazione. In questo modo, non si abitua a vedere nella situazione reale strutture e relazioni che la matematica riesce a descrivere e non si crea l'attitudine a ricercare le stesse strutture e relazioni in situazioni non predisposte dall'insegnante. Si rafforzano automatismi e convinzioni, che non portano gli allievi a percepire cosa si sta facendo, come nel famoso caso dell' 'età del capitano'[25]. I fatti della matematica diventano semplicemente norme da seguire, una sorta di istruzioni per l'uso, valide per imparare a fare, ma completamente privati del loro 'perché'. La matematica si riduce ad una serie infinita e confusa di formule, che hanno poco senso e che si devono imparare a memoria, perdendo così il gusto e i vantaggi di vedere il

[23] Iannace, Tortora, "La risonanza nei processi di apprendimento", 2007.
[24] Zan, R., Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire, Milano: Springer, 2006.
[25] D'Amore, 1999

mondo in senso matematico. Nei temi dal titolo "Io e la matematica", svolti da ragazzi di tutte le età e raccolti da Rosetta Zan, traspare molto bene questa perdita di senso e questo distacco dalla vita quotidiana:

"Alla scuola elementare era una delle poche materie che mi appassionasse, forse perché i problemi da risolvere erano spesso molto pratici e lo scopo era chiaro (…) [alle medie] il fine di imparare certe stramberie mi restava ignoto. Nella mia mente i contenuti restavano astratti e non vi trovavo niente che potesse servirmi nella vita quotidiana, tanto che ritenevo inutile imparare a memoria un sacco di concetti e basta, non mi sentivo arricchita studiando la matematica e non cresceva in me la voglia di imparare per conoscere e approfondire una materia così complessa e vasta." Martina (5S)

"Credo anche che nella vita non serva a parte le cose più importanti come le operazioni e i problemi delle elementari, per il resto invece non penso che una persona vada in giro costruire quadrati sui cateti o fare espressioni con le x o con le y e compagnia bella." Luigi (1S)

Molto spesso l'utilità dell'insegnamento della matematica è messa in discussione dagli studenti. Questa utilità viene interpretata, però, come immediata spendibilità nella vita di tutti i giorni delle conoscenze e abilità acquisite. Invece, essa va dimostrata con la costruzione, che richiede tempi lunghi, di competenze importanti, come quelle che propone OCSE PISA, che consentano di osservare, interpretare e affrontare problemi di vita reale. Il gusto e la valorizzazione della matematica non sono attitudini che si imparano spontaneamente[26].

D'altra parte, le difficoltà in matematica si ripercuotono anche sull'insegnamento della fisica. Il fatto che i ragazzi non sono in grado di capire il senso delle formule che utilizzano e si rifugiano nella memorizzazione delle formule e dei procedimenti di risoluzione, incide inevitabilmente nello studio della fisica. "*L'esistenza di diverse lacune fondamentali nella preparazione di base degli studenti può costituire un serio ostacolo alla comprensione dei concetti e delle linee di ragionamento che tentiamo di elaborare fin dall'inizio di un corso introduttivo di fisica. Queste lacune che hanno a che fare con la comprensione di concetti di 'area' e 'volume' e con ragionamenti che coinvolgono*

[26] "Insegnare la matematica. Apprendere la matematica." Conversazione con Martha Fandino Pinila, in "Perché studiare la matematica", A cura di Giorgio Bolondi, Pearson, 2012.

rapporti o divisioni, si incontrano spesso tra studenti di fisica e ingegneria."[27] Si cerca di supplire alle difficoltà degli allievi nell'uso degli strumenti matematici, facendovi ricorso il minimo possibile. Invece, bisognerebbe lavorare sulle definizioni operative delle grandezze fisiche dando l'occasione di fare esperienze sia pratiche (per esempio, misurare l'area di una figura qualsiasi attraverso il conteggio del numero di quadratini che contengono) sia descrittive (per esempio, spiegare con parole semplici come si può calcolare l'area di una figura irregolare). Arons insiste, in particolare, sull'opportunità che gli studenti siano messi nelle condizioni di descrivere con le loro stesse parole le azioni attraverso le quali si ricava un determinato valore numerico. In questa maniera, non solo si chiarisce il significato della grandezza fisica in questione, ma si dà la possibilità di ragionare autonomamente sulle proprietà e le caratteristiche che la struttura matematica sottostante possiede. Un altro suggerimento è di riprendere i concetti fondamentali in situazioni diverse, ogni volta che se ne ha l'occasione, perché per padroneggiare un modo di ragionare, l'ideale è vedere lo stesso ragionamento da diversi punti di vista. La ripresa delle idee dopo un certo periodo è essenziale per l'assimilazione dei concetti. Ogni volta che si introduce un concetto nuovo, è utile ragionare prima sull'idea e solo quando si sono esplorate le proprietà del concetto, si può cercare una definizione. Notevole importanza è data da Arons ai cambiamenti di registro: da quello verbale, a quello algebrico, a quello grafico, e all'indietro. Le semplificazioni e le omissioni, usate per aggirare gli ostacoli, non permettono di capire il significato delle grandezze e delle relazioni che le legano. In questo modo, anche le grandezze che la fisica descrive e studia perdono il loro significato. Per esempio, fa notare Arons, la costruzione di concetti come la velocità istantanea e l'accelerazione è spesso ostacolata da una trattazione della cinematica molto semplificata: ad esempio, non si dà l'occasione di percepire la differenza tra istante di tempo e intervallo di tempo, tra posizione, variazione di posizione e distanza percorsa. Questi concetti, che sono precursori nella comprensione della velocità istantanea, rimangono impliciti o sono dati per scontati.

Può essere utile un approccio laboratoriale che faccia uso di un sensore di movimento, per esempio, un sonar che calcola la distanza cui si trova un oggetto posto di fronte ad esso attraverso la misura del tempo di ritorno di una sequenza di ultrasuoni. Il sonar è collegato ad un software di elaborazione dati che permette di visualizzare in tempo reale su un computer i grafici di distanza, di velocità e di accelerazione in

[27] Arnold B. Arons"Guida all'insegnamento della fisica" , Zanichelli (Bologna) 1992.

funzione del tempo. Si può in questo modo studiare il moto unidimensionale di oggetti non solo in una situazione controllata ma anche in condizioni di moto vario generato dagli studenti stessi.[28] Un percorso iniziale di cinematica di questo tipo, se ben guidato, può aiutare tantissimo i ragazzi a comprendere il significato delle grandezze fisiche della cinematica e le loro relazioni.

Arons individua nella cinematica un argomento che dà la possibilità di approfondire alcuni aspetti del pensiero scientifico attraverso la lettura dei 'Discorsi intorno a due nuove scienze' di Galileo. Il metodo di Galileo richiede di porsi nella condizione di poter studiare come cadono i corpi e non perché cadano: egli limita di proposito il suo campo di azione e '*i fini della sua ricerca in modo da padroneggiare e chiarire un argomento significativo per volta*'[29]. Inoltre, l'operazione, che Galileo compie, di 'levare con il pensiero' la resistenza dell'aria indica come nel metodo scientifico le situazioni reali siano idealizzate, rese meno complesse dalla deliberata esclusione di alcuni dettagli e poi perfezionate con approssimazioni successive. Il fatto di decidere quali grandezze trascurare e quali prendere in considerazione, di progettare esperimenti allo scopo di verificare ipotesi è una strategia molto importante anche nella risoluzione di problemi. Nella pratica scolastica, solo pochissime volte i ragazzi sono messi nelle condizioni di fare previsioni, di ragionare sui casi limite, di decidere tra più scelte, di soffermarsi su quanto fatto e di esaminare ciò che è accaduto.

Le operazioni di modellizzazione dei fenomeni naturali, indispensabili per analizzare un fenomeno da un punto di vista fisico a diversi livelli, non possono essere date per scontate. Trascurando di mostrare il filo d'Arianna che ci offre la matematica nel costruire una rappresentazione formale d'idee o di conoscenze che si riferiscono a un fenomeno, si lascia gli studenti nell' 'oscuro laberinto' di Galileo e si perde l'occasione di far riflettere i ragazzi sul profondo legame tra matematica, fisica e mondo fisico.

[28] Marelli Silvia: 'Introduzione al concetto di funzione: una proposta didattica di approccio coordinato tra matematica e fisica', Tesi di Laurea Magistrale in Matematica, Università di Bologna, 2014.
[29] Arons, 1992

Capitolo 2: Progetto

2.1 La proposta

Il percorso didattico che abbiamo progettato è incentrato sulla figura di Galileo, sulla sua matematica e sul suo metodo di fare indagini, che è alla base del procedimento scientifico moderno. Le difficoltà dei ragazzi italiani, nel costruire un modello matematico a partire da un problema in un contesto reale e nel vedere il mondo in senso matematico, sono state il punto di partenza per la progettazione del percorso. Ci è sembrato ragionevole costruire un progetto, che possa aiutare gli studenti a imparare la gestione del formalismo in contesti diversi da quelli interni alla matematica stessa e che metta in evidenza l'intreccio tra fisica e matematica, senza perdere di vista il fatto che quelle strutture sono rappresentazioni create dall'uomo e non realtà. Questo è certamente un obiettivo molto ambizioso, da perseguire a lungo termine e con gradualità, ma il nostro progetto può essere un passo del lungo percorso per raggiungere questo scopo.

Le Indicazioni Nazionali del 2012 per i licei scientifici sono particolarmente attente a porre l'accento sull'importanza della costruzione di modelli matematici, a partire da fenomeni reali, in quanto rientra nelle competenze chiave per il percorso di matematica. Si legge che uno studente, a conclusione del percorso di studio, dovrà conoscere "*i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sé considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di fenomeni, in particolare del* *mondo fisico. Egli saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale*". Inoltre lo studente "*conoscerà le metodologie di base per la costruzione di un modello matematico di un insieme di fenomeni, saprà applicare quanto appreso per la soluzione di problemi, anche utilizzando strumenti informatici di rappresentazione geometrica e di calcolo [...] Il percorso, quando ciò si rivelerà opportuno, favorirà l'uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati nelle altre discipline scientifiche*." Infine gli obiettivi specifici di apprendimento nell'area 'Relazioni e funzioni' stabiliscono: "*Obiettivo di studio sarà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.), anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico […]*". Particolare importanza è data al legame con la fisica il cui "*contemporaneo studio […] offrirà esempi di funzioni che saranno oggetto di una specifica trattazione matematica, e i risultati di questa trattazione serviranno ad approfondire la comprensione dei fenomeni fisici e delle relative teorie. Lo studente sarà in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati*."

La studio della cinematica sembra essere il campo ideale da cui attingere l'occasione per dare un contributo in direzione di questi obiettivi, proprio perché storicamente è nello studio del moto che si è costruito il legame tra matematica e fisica. Nel suo libro "Origini della scienza moderna" lo storico Butterfield[30] afferma: "*Tra tutti gli ostacoli intellettuali che la mente umana ha affrontato e superato negli ultimi quindici secoli, il problema del moto è quello che a me sembra essere stato il più interessante di per sé, e anche il più spettacolare alla luce delle conseguenze successive."* Lo studio del moto ha costituito uno sforzo intellettuale notevole che è durato un periodo lunghissimo, ha impegnato molti studiosi, ha favorito l'esplorazione di nuove idee, sia epistemologiche sia concettuali, sia fisiche che matematiche. Attraverso l'analisi di problemi riguardanti il movimento dei corpi, dalla caduta libera dei gravi alle posizioni dei pianeti, è avvenuta la 'faticosa' costruzione di concetti legati alle strutture relazionali e alle funzioni. Inoltre, il movimento è fin dai primi anni di vita del bambino, uno strumento importante per sviluppare nuove concezioni[31] e in ragazzi più grandi favorisce lo sviluppo di *"quel guardare per differenze e cambiamenti"* che sono le strutture fondamentali della modellizzazione matematica. L'opportunità di riflettere su queste strutture, sul legame

[30] Vedi Arons,1992
[31] Guidoni, 2006

che hanno con il fenomeno osservato e con il nostro modo di rappresentarlo, aiuta ad approfondire e a far maturare idee su cosa vuol dire fare matematica e sul perché sia così importante. La cinematica è, inoltre, un campo privilegiato perché anche se il moto di un oggetto è, nella maggior parte dei casi, complesso, è possibile fare delle semplificazioni che permettano di creare dei modelli ideali relativamente semplici e descrivere i fenomeni in modo soddisfacente. Gli studenti dovrebbero essere coscienti che il modello ha dei limiti di validità e dovrebbero essere motivati a esplorarli costruendo modelli che approssimano sempre meglio il moto osservato.

La scelta di utilizzare materiale storico è finalizzata, non tanto a realizzare un vero e proprio approccio storico alla cinematica, quanto ad offrire la possibilità di rendere espliciti alcuni punti critici riguardanti lo studio del moto, in modo da approfondire le relazioni tra grandezze cinematiche ed espandere le conoscenze degli studenti. L'uso della storia può favorire la creazione di un'immagine di matematica e di scienza come costruzione culturale e avventura conoscitiva. Parlare di persone reali, del loro modo di vedere il mondo, del loro percorso intellettuale, evidenziando non solo i metodi con cui hanno superato gli ostacoli, ma anche gli errori e le difficoltà, è una risorsa preziosa per l'insegnante. "*Mettere l'allievo di fronte a queste fratture, a queste discontinuità, per mostrare situazioni erronee nelle quali i matematici si sono venuti a trovare, è un modo per aiutare a capire il senso che ha l'errore in matematica, dare confidenza con l'idea che la matematica sia ben più che non una raccolta di regole stantie ed insensate*"[32]. Riteniamo che la figura di Galileo sia particolarmente affascinante, per la ricchezza di sfaccettature che permette di delineare, per la straordinaria modernità del suo pensiero, per il suo carisma e la forza con cui si esprime. Tutto questo, se viene sfruttato in modo adeguato, crea motivazione e interesse, umanizza in qualche maniera la matematica e la rende più vicina a noi: altre persone hanno affrontato gli stessi problemi, hanno fatto errori e hanno avuto ripensamenti, dubbi, intuizioni. Secondo Zanarini[33]: "*È difficile, ma assai importante, in tutti i contesti formativi, trovare uno spazio per presentare la scienza come costruzione culturale, della quale sottolineare la dimensione storica di avventura conoscitiva, di invenzione di questioni centrali, di dibattito appassionato tra vari ragioni diverse*." Lo studio della figura di Galileo però non si può limitare ad un approccio aneddotico. L'analisi critica di come si sono formate le idee sul moto rappresenta uno strumento didattico importante: è in questo contesto, infatti, che sono

---

[32] D'Amore, 1999

[33] Zanarini G., "Immagini del sapere e formazione scientifica", La fisica nella Scuola, XXV, 4, 299-310, 1992.

stati esplicitati in modo maturo alcuni tratti e caratteristiche essenziali del pensiero scientifico. La lettura dei testi originali potrebbe sembrare difficile e noiosa, ma la nostra scelta è stata dettata dalla considerazione che leggere i testi originali di Galileo sia fondamentale per capire la natura delle novità da lui introdotte. Qui meglio che altrove, è forte l'esigenza di esprimere con chiarezza e semplicità le motivazioni che portano a condensare una serie di idee in un metodo ben definito. Non è casuale l'uso del volgare al posto del latino in punti particolarmente importanti. Galileo deve rispondere ai suoi avversari ma soprattutto vuole catturare l'attenzione del maggiore numero possibile di persone. Per noi questo è un grosso vantaggio: la sua passione, l'ansia di trasmettere le sue riflessioni e le sue considerazioni, il linguaggio sempre molto espressivo e vivace diventano un aiuto importante per veicolare idee e atteggiamenti che non sono naturali. La capacità di costruire ed esplorare modelli, modificandoli quando necessario, di formulare ipotesi e testarne i limiti di validità, di argomentare i propri ragionamenti, di utilizzare la strumentazione in maniera critica sono alcuni dei principali obiettivi che ogni corso scientifico dovrebbe cercare di far raggiungere. I ragazzi in questo percorso dovrebbero avere l'occasione di confrontare le differenze tra metodo scientifico e osservazione quotidiana dei fenomeni, sia con riflessioni individuali sia attraverso la discussione delle idee in classe.

Un ambiente di apprendimento stimolante può essere creato dal "gioco di echi e voci" di Boero[34]. Si tratta di una metodologia didattica basata sull'attività di imitazione attiva nella zona di sviluppo prossimale[35]. Si parte dalla considerazione che "*i contenuti anti-intuitivi e i caratteri salienti del sapere teorico sono portati da "voci", in particolare da "voci" storiche: espressioni dense e incisive attraverso le quali tali contenuti e caratteri salienti si sono manifestati, hanno modificato e modificano il nostro modo "spontaneo" di pensare e di esprimerci e possono essere identificati*." Su esplicita proposta del docente, queste "voci" possono essere considerate e interpretate dagli allievi e producono "echi". Le voci veicolano un contenuto, un metodo, un'organizzazione del discorso attraverso il quale è avvenuta una svolta del pensiero matematico e scientifico. L'eco si può riscontrare in un discorso dell'allievo, all'interno di una discussione di classe, per esempio, laddove si crea un legame con l'oggetto della voce, nel tentativo da parte

[34] Boero P., Garuti R., Pedemonte B., Robotti E., Il gioco voci-echi come metodologia per la mediazione degli aspetti salienti delle teorie, in Processi didattici innovativi per la matematica nella scuola dell'obbligo, a cura di N. Malara & al., Pitagora Editrice Bologna, 2003

[35] Secondo di Vygotskij, le conoscenze già definitivamente acquisite si trovano in una zona di sviluppo effettivo. Per avere un vero apprendimento si deve operare in quel campo di conoscenze a cui il soggetto, che apprende, può arrivare in modo autonomo. Questa è chiamata da Vygotskij zona di sviluppo prossimale.

dello studente di collegare tale voce con le proprie concezioni e le proprie esperienze. Nel momento in cui gli allievi sono posti di fronte agli errori concettuali più frequenti in cui possono incorrere, è utile condurre gli studenti a cogliere le contraddizioni tra quello che hanno detto o scritto e proprietà a loro ben note. L’esplicitazione dei concetti è necessaria per rilevare possibili zone opache, fraintendimenti, nelle conoscenze degli allievi e il fatto che molto spesso alla radice degli errori concettuali ci sono deduzioni che vengono da intuizioni comuni. Attraverso il gioco di “voci ed echi”, l’allievo apprende la matematica in collaborazione con altri allievi e con l’insegnante, in un progresso dialogico. Si può favorire la condivisione delle idee e una maggiore consapevolezza da parte di ciascun alunno, che in questo modo diventa parte attiva nel suo apprendimento.

Il laboratorio è, da questo punto di vista, un momento importante per incoraggiare la partecipazione attiva, ma anche per approfondire i contenuti disciplinari. È nel laboratorio di fisica che si ha un effettivo avvicinamento ai fenomeni reali, alle loro caratteristiche e complessità. Gli esperimenti possono avere un ruolo di controllo/ raffinamento della teoria o essere il punto di partenza per la comprensione di un fenomeno attraverso la sua osservazione. Non si tratta di ‘ricette’ già pronte: si deve dare spazio all’indagine, alla scoperta e alla messa in crisi del modello iniziale. Occorre che vi siano momenti significativi in cui lo studente abbia la possibilità di agire in autonomia, fare scelte, sia pure limitate, procedere per tentativi ed errori, sviluppare strategie e spirito critico. Occorre aiutare gli studenti a costruire dei concetti e a vedere se e quanto sono adeguati ai fatti. Il lavoro di gruppo è necessario per l’opportunità che offre di scambiare idee, discutere e confrontarsi. Oltre all’uso del laboratorio tradizionale in fisica, le Indicazioni Nazionali fanno intravedere in modo esplicito la presenza del laboratorio di matematica con l’utilizzo dello strumento informatico come scelta metodologica e non occasionale. L’uso di un software di geometria dinamica come Geogebra è particolarmente utile per l'apprendimento e l'insegnamento della matematica in quanto fornisce strumenti per lo studio di geometria, algebra, e analisi. Geogebra, infatti, permette di costruire punti, vettori, segmenti, rette, coniche e funzioni, modificandoli in tempo reale nella finestra grafica oppure attraverso quella algebrica. Si possono, per esempio, allargare le figure e ruotarle, senza modificare le proprietà con cui sono costruite. Inoltre, equazioni e coordinate possono essere inserite direttamente nella finestra "algebra". È un software di facile utilizzo, interattivo e scaricabile facilmente e gratuitamente da internet. Gli studenti possono utilizzare GeoGebra non solo per la visualizzazione, ma anche e soprattutto per fare congetture, per ricercare elementi di una dimostrazione, per esplorare proprietà, per argomentare e convincere altri delle proprie idee. Gli studenti possono deviare da percorsi indicati dall'insegnante per giungere a risultati originali; si possono creare situazioni positive, soluzioni inaspettate; insomma lo studente potrebbe essere invitato a comportarsi da matematico.[36]

Il nostro percorso richiede di sviluppare concetti su più livelli: da una parte la modellizzazione matematica, che comporta un certo grado di astrazione e un'analisi critica sulle strutture matematiche, dall'altra parte la documentazione storica, che implica una ricostruzione delle idee che circolavano ai tempi di Galileo e dei cambiamenti che erano in atto, e infine, una visione più genuina del metodo scientifico. Per questo motivo ci sembra più opportuno che la proposta si collochi nel secondo biennio del liceo scientifico (e scientifico tecnologico). In questo tipo di scuola gli studenti hanno già un primo incontro con la cinematica nei primi due anni, ma le Indicazioni Nazionali prevedono che si riprendano nel secondo biennio le leggi del moto affiancandole alla discussione sui sistemi di riferimento e al principio di relatività di Galileo. I requisiti che gli studenti devono avere sono la conoscenza delle grandezze cinematiche e le relazioni tra di esse, saper interpretare i grafici, conoscere le grandezze vettoriali e come si compongono, conoscere il significato della proporzionalità diretta fra due variabili. Indicativamente si possono supporre, per una proposta di questo tipo, *12-16* ore di lavoro.

Le tappe del percorso possono essere presentate secondo questo filo logico:

1. Partire dall'osservazione di un fenomeno reale;
2. Introdurre la spiegazione di Galileo basata sui risultati dei suoi studi del moto come ipotesi (antiintuitiva) da controllare;
3. Ripercorrere la strada di Galileo nello studio del moto (moto uniforme, caduta dei gravi);
4. Mettere alla prova l'ipotesi di Galileo:
    4.1 Studio del moto di caduta da diversi sistemi di riferimento,
    4.2 Analisi del filmato di un esperimento mediante SW di analisi dati,
    4.3 Previsioni del moto di un proiettile con Geogebra note la posizione e la velocità iniziale;
5. Riesaminare il fenomeno iniziale.

---

[36] Accomazzo, Beltramino, Sargenti: 'Esplorazioni matematiche con Geogebra', Ledizioni, 2013.

Ciascuna tappa e i relativi obiettivi saranno esposti nei prossimi paragrafi.

Nel nostro percorso il laboratorio ha un ruolo importante e ci sono, quindi, vari momenti in cui viene utilizzato. Il laboratorio è introdotto come strumento di controllo dell'ipotesi sul moto parabolico e come possibile avvio di altri esperimenti. In questo caso l'uso di GeoGebra risulta particolarmente utile perché, permettendo di variare i parametri iniziali del moto, può dare l'avvio a nuove ricerche sia all'interno del modello matematico sia come strumento per fare previsioni sul fenomeno. È presente, infine, una discussione dell'esperimento storico di Galileo sul piano inclinato, confrontato con una versione moderna dello stesso esperimento.

Alla fine del nostro percorso, gli obiettivi che ci aspettiamo che gli studenti possano raggiungere sono i seguenti:

1) Approfondire le relazioni tra velocità, spazio e tempo;
2) Comprendere le differenze tra conoscenza comune e conoscenza fisica per quanto riguarda il movimento;
3) Formulare ipotesi su un fenomeno osservato e cercare di darne una rappresentazione matematica;
4) Riflettere sul senso di fare matematica;
5) Individuare alcuni punti importanti del metodo sperimentale;
6) Confrontare le previsioni iniziali con i risultati ottenuti dall'esperimento.

2.1.1 Partire dall'osservazione di un fenomeno reale

Riportiamo in tabella 2.1 gli obiettivi di quest'attività.

Attività	Obiettivi
Visione di un filmato Discussione successiva	Formulare ipotesi qualitative sul moto osservato

Tabella 2.1

Questa prima fase ha inizialmente lo scopo di catturare l'attenzione degli studenti. L'insegnante fa vedere ai ragazzi un filmato che riguarda un fenomeno reale, un fenomeno che è sotto i nostri occhi ogni giorno come il moto parabolico dell'acqua di una fontana. Per suscitare curiosità, la situazione proposta dall'insegnante deve essere un po' particolare: compito del docente è, infatti, rompere l'equilibrio, mettendo gli allievi nella condizione di essere insoddisfatti della loro visione spontanea del fenomeno che è proprio quella che si vuole modificare. Se gli allievi non riescono a interpretare

Figura 1: Immagini della fontana considerata: Il primo getto d'acqua appare come sospeso nell'aria. Qui sotto, invece, un momento in cui tutti i getti proseguono la loro traiettoria comportandosi come proiettili.

quello che vedono saranno motivati a trovare una nuova spiegazione. Lo stupore iniziale degli studenti deve essere di stimolo per cercare di trovare una giustificazione a quello che si vede, perché la loro idea iniziale non si accorda con quello che hanno osservato. Abbiamo scelto un filmato che si trova su youtube,[37] in cui viene mostrata una fontana (figura 1) il cui getto s'interrompe regolarmente in modo repentino: si vede l'acqua che prosegue lungo l'arco di parabola. Tutti abbiamo visto l'acqua che esce da una fontana, abbiamo innaffiato il giardino o giocato con una pistola ad acqua. Il vedere l'acqua, quando esce, formare una parabola intera rafforza l'idea che l'acqua che si trova dietro spinge quella che sta davanti. Il senso comune è in qualche modo "aristotelico": il moto esiste perché c'è una forza nella stessa direzione del moto. Nel momento in cui, però, il flusso s'interrompe in modo talmente repentino da vedere l'acqua finire la sua traiettoria senza nulla dietro, ci viene da chiederci che cosa stia succedendo veramente. Gli studenti devono cominciare a fare osservazioni, a ragionare e a proporre ipotesi su quale sia la spiegazione più adeguata alla nuova situazione. Si possono fare varie scelte e si dovrebbe dare spazio alle ipotesi e al ragionamento degli studenti stessi. L'insegnante dovrebbe guidare la discussione, facendo collegamenti con le conoscenze possedute dagli studenti e fornendo nuove informazioni. Richiamando lo studio effettuato nel primo biennio, si può far notare loro che l'acqua in questo caso sembra comportarsi come un proiettile.

2.1.2 Introdurre la spiegazione di Galileo basata sui risultati dei suoi studi sul moto come ipotesi (antiintuitiva) da controllare

Attività	**Obiettivi**
Analisi del brano GALILEO E IL MOTO PARABOLICO	Riflettere sull'ipotesi di Galileo di indipendenza dei moti
Discussione di gruppo	

Tabella 2.2

L'insegnante dovrebbe proporre l'aiuto di una figura autorevole e introdurre il fatto che Galileo è stato il primo ad affermare che il moto parabolico non è altro che la composizione di due moti indipendenti, uno rettilineo uniforme e l'altro uniformemente accelerato. Uno degli studenti legge ad alta voce le parole che Galileo usa per descrivere il moto parabolico (GALILEO E IL MOTO PARABOLICO in figura 2). Sia il moto uniforme, sia quello accelerato sono moti già conosciuti dagli studenti. Si fa una discussione di gruppo per commentare la voce di Galileo e ragionare sulla soluzione proposta, su quanto sia ragionevole pensare ad un moto come l'unione di due movimenti

[37] https://www.youtube.com/watch?v=zxqeMran94I

GALILEO E IL MOTO PARABOLICO

“Le proprietà che si presentano nel moto equabile, come pure nel moto naturalmente accelerato su piani di qualsiasi inclinazione, le abbiamo considerate sopra. Nella trattazione, che ora comincio, cercherò di presentare, e di stabilire sulla base di salde dimostrazioni, alcuni fenomeni notevoli e degni di essere conosciuti, che sono propri di un mobile, mentre si muove con moto composto di un duplice movimento, cioè di un movimento equabile e di uno naturalmente accelerato: tale appunto sembra essere quello che chiamiamo moto dei proietti; la generazione del quale così stabilisco . [...] Piena di maraviglia e di diletto insieme è la forza delle dimostrazioni necessarie, quali sono le sole matematiche. Già sapevo io, per fede prestata alle relazioni di più bombardieri, che di tutti i tiri di volata dell'artiglieria, o del mortaro, il massimo, cioè quello che in maggior lontananza caccia la palla, era il fatto all'elevazione di mezo angolo retto, che essi dicono del sesto punto della squadra; ma l'intender la cagione onde ciò avvenga, supera d'infinito intervallo la semplice notizia auta dalle altrui attestazioni, ed anco da molte replicate esperienze.”

Discorsi e dimostrazioni su due nuove scienze – Quarta giornata

Figura 2

indipendenti e se ci siano altri casi in cui può essere plausibile pensarlo. Gli studenti dovrebbero considerare l'idea di Galileo un'ipotesi da controllare, ma consapevoli che la nuova teoria è semplice e sarà fruttuosa: la promessa di una più ampia comprensione della realtà favorisce l'assimilazione delle nuove idee. Si devono sottolineare le espressioni con cui Galileo sostiene il ruolo della matematica e si deve porre l'attenzione alla 'meraviglia' di Galileo.

2.1.3 Ripercorrere la strada di Galileo nello studio del moto (moto uniforme, caduta dei gravi)

Attività	**Obiettivi**
Presentazione della vita di Galileo	Identificare i momenti più importanti della biografia di Galileo
Ripasso dei concetti principali relativi al moto rettilineo uniforme Analisi del brano GALILEO E IL MOTO UNIFORME	Confrontare la definizione moderna e quella di Galileo di moto rettilineo uniforme
	Riflettere sulle relazioni tra velocità, spazio e tempo
Analisi del brano IL LINGUAGGIO DELLE SCIENZE	Riflettere sul senso di fare matematica di Galileo
	Confrontare la propria visione della matematica con quella di Galileo
Discussione sulla caduta di oggetti comuni Analisi del brano LA VOCE DI ARISTOTELE Discussione a piccoli gruppi stimolata da domande	Confrontare le conoscenze quotidiane e quelle cinematiche sulla caduta dei corpi
	Comprendere le linee generali del pensiero di Aristotele
Analisi del brano LA VOCE DI GALILEO Discussione a piccoli gruppi stimolata da domande Analisi del brano LE DIMOSTRAZIONI NECESSARIE Elaborazione di un dialogo tra Aristotele e Galileo	Individuare i passaggi logici delle obiezioni di Galileo Confrontare le idee di Aristotele con quelle di Galileo Individuare le differenze tra fenomeni studiati in fisica e situazioni reali
Analisi del modo in cui Galileo studia la caduta dei gravi	Individuare i punti principali del metodo scientifico Riflettere sull'utilizzo di casi limite
Riproduzione dell'esperimento di Galileo sul moto sul piano inclinato	Confrontare diversi strumenti di misura Esplorare i limiti di validità dell'ipotesi di Galileo

Tabella 2.3

L'insegnante farà una breve presentazione della figura di Galileo per delineare il contesto storico e culturale del Seicento e descrivere la sua vita in modo da mettere in evidenza le linee generali del suo lavoro e dell'evoluzione delle sue idee.

GALILEO E IL MOTO UNIFOTME

DEFINIZIONE:Moto eguale o uniforme intendo quello in cui gli spazi percorsi da un mobile in tempi eguali, ***comunque presi****, risultano tra di loro eguali.*

AVVERTENZA

Ci è parso opportuno aggiungere alla vecchia definizione (che semplicemente parla di moto equabile, allorché in tempi eguali vengono percorsi spazi eguali) l'espressione comunque presi, cioè per tutti i tempi che siano eguali: infatti, può accadere che in determinati tempi eguali un mobile percorra spazi eguali, mentre spazi, percorsi in frazioni di tempo minori, sebbene eguali, non siano eguali.

ASSIOMA 1: In uno stesso moto equabile, lo spazio percorso in un tempo più lungo è maggiore dello spazio percorso in un tempo più breve.

ASSIOMA 2: In uno stesso moto equabile, il tempo in cui è percorso uno spazio maggiore è più lungo del tempo impiegato a percorrere uno spazio minore.

ASSIOMA 3: Lo spazio, percorso in un dato tempo a velocità maggiore, è maggiore di quello percorso, nello stesso tempo, a velocità minore.

ASSIOMA 4: La velocità, con cui in un dato tempo viene percorso uno spazio maggiore, è maggiore di quella con cui, nello stesso tempo, viene percorso uno spazio minore.

TEOREMA1: Se un mobile, dotato di moto equabile, percorre due spazi con una stessa velocità, i tempi dei moti staranno tra di loro come gli spazi percorsi.

TEOREMA 2: Se un mobile percorre due spazi in tempi eguali, quegli spazi staranno tra loro come le velocità. E se gli spazi stanno tra loro come le velocità, i tempi saranno eguali.

TEOREMA 3: Se il medesimo spazio viene percorso con velocità diseguali, i tempi dei moti rispondono contrariamente [sono inversamente proporzionali] alle velocità.

TEOREMA 4: Se due mobili si muovono di moto equabile, ma con diseguale velocità, gli spazi percorsi da essi in tempi diseguali avranno tra di loro una proporzione composta della proporzione tra le velocità e della proporzione tra i tempi.

TEOREMA 5: Se due mobili si muovono di moto equabile, ma le loro velocità sono diseguali e diseguali gli spazi percorsi, la proporzione tra i tempi risulterà composta della proporzione tra gli spazi e della proporzione tra le velocità permutatamente prese [proporzione inversa delle velocità].

TEOREMA 6: Se due mobili si muovono di moto equabile, la proporzione tra le loro velocità risulterà composta della proporzione tra gli spazi percorsi e della proporzione tra i tempi permutatamente presi [proporzione inversa dei tempi]

Discorsi e dimostrazioni su due nuove scienze – Terza giornata

Figura 3

GALILEO E IL LINGUAGGIO DELLE SCIENZE

"Parmi, oltre a ciò, di scorgere nel Sarsi ferma credenza, che nel filosofare sia necessario appoggiarsi all'opinioni di qualche celebre autore, sì che la mente nostra, quando non si maritasse col discorso d'un altro, ne dovesse in tutto rimanere sterile o infeconda; e forse stima che la filosofia sia un libro e la fantasia d'un uomo, come l'Iliade e l'Orlando Furioso, libri ne' quali la meno importante cosa è che quello che vi e` scritto sia vero. Signor Sarsi, la cosa non istà così. La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali e` scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, e altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi e` un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto."

Il Saggiatore

Figura 4

È necessario riprendere il concetto di moto rettilineo uniforme moderno per poterlo confrontare con quello di Galileo. Si rilegge e si commenta la definizione di moto rettilineo uniforme dal libro di testo. Si riscrive assieme agli studenti la formula della velocità e si utilizza per risolvere alcuni semplici esercizi. Si pone la questione su che cosa bisogna guardare per capire che un oggetto si muove con velocità costante. Si legge e si analizza la definizione di Galileo e la sua avvertenza (GALILEO E IL MOTO UNIFORME in figura 3). Si pone l'attenzione sul fatto che Galileo precisa 'per i tempi comunque presi' e questo ci dà l'opportunità di far ragionare gli studenti sulla necessità di questa 'avvertenza'. La riflessione sul motivo di questa precisazione, deve mettere in evidenza che possiamo prendere tempi molto piccoli e gli spazi percorsi devono essere sempre uguali e si deve commentare cosa succede se non aggiungiamo quel 'comunque presi'. Se non viene fuori dalla discussione, l'insegnante dovrebbe sottolineare le somiglianze che una proprietà del genere ha con la velocità istantanea. Si leggono e si analizzano gli assiomi e i teoremi che servono a Galileo ad arrivare ad una formalizzazione della relazione tra spazio, tempo e velocità. Si richiama l'attenzione degli studenti al rigore che Galileo utilizza e si dà la possibilità agli studenti di esplorare le proprietà delle relazioni definite da Galileo una per una. Per ognuna si potrebbe immaginare un esempio concreto che la rappresenti per poi passare al linguaggio matematico. Si introduce quindi la rappresentazione della relazione così come è formulata da Galileo:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{s_1}{s_2} \times \frac{t_2}{t_1}$$

Si confronta tale formula con quella moderna:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Si può sottolineare che entrambe sono valide nel moto rettilineo uniforme, ma la seconda è una vera e propria definizione di velocità. Si può mettere in evidenza che ogni volta che vogliamo definire una grandezza nuova, non misurabile direttamente, dobbiamo fare un rapporto tra due grandezze non omogenee. L'insegnante può favorire la riflessione metacognitiva sulle differenze tra le due formule, su quali sono i vantaggi e gli svantaggi dell'una e dell'altra: questo passaggio è importante perché affronta una delle difficoltà maggiori degli studenti, cioè l'equivalenza tra rapporti tra grandezze e tra numeri.

Avendo visto come Galileo usa la matematica, si può far riflettere i ragazzi sul ruolo che assegna alla matematica nel fare indagini, leggendo, ad esempio, il brano GALILEO E IL LINGUAGGIO DELLE SCIENZE (figura 4) tratto dal Saggiatore. La discussione in classe del brano deve chiarire quale tipo di matematica usa, mettendo in evidenza che Galileo non usa l'algebra ma la geometria, e il motivo per cui la usa (è il linguaggio con cui è scritto il libro dell'universo). È opportuno invitare i ragazzi a riflettere sulla loro visione della matematica e magari far insorgere dubbi, sottolineando che quello di cui sta parlando Galileo non è l'immediata spendibilità della matematica.

Nella successiva tappa del percorso, si approfondirà come Galileo affrontò il moto rettilineo uniformemente accelerato e, in particolare, il moto di caduta dei corpi. Questa parte è concepita per mettere in evidenza il metodo di Galileo e le critiche che egli muove ad Aristotele. Alla fine, dovrebbero essere chiare ai ragazzi le motivazioni di questa critica, dovrebbero sentire anche loro che il metodo di Aristotele non è soddisfacente e sentire come un'esigenza personale trovare qualcosa che li aiuti a uscire dal senso comune, a isolare i fatti e descriverli in maniera "universale". L'insegnante sottolinea che Galileo ha studiato il moto uniformemente accelerato per spiegare la caduta dei gravi. Naturalmente avendo studiato la cinematica, i ragazzi sanno descrivere la caduta dei gravi, ma è necessario farli riflettere sul fatto che la risposta non è così scontata come sembra. Per rafforzare questo concetto, si introduce che al tempo di Galileo, si pensava che l'accelerazione dipendesse dal peso del corpo e quest'idea è sostanzialmente in accordo con quanto vediamo quotidianamente. Si può fare una discussione in classe su quest'argomento e i ragazzi dovrebbero essere incoraggiati a portare argomentazioni e prove a favore delle loro posizioni anche facendo semplici esperimenti qualitativi. Il percorso mostrerà che c'è una ragione precisa se a scuola si studia che la velocità di caduta è la stessa per tutti i corpi, ma in questa fase è necessario che emergano le idee spontanee dei ragazzi che potrebbero essere, nonostante lo studio della cinematica, ancora basate sul senso comune. A questo punto si leggono dei brani di Aristotele[38] presentati sotto forma di risposte ad alcune domande del tipo:

– Come si muovono i corpi vicino alla terra?
– Può esistere il movimento senza una causa?
– Come influenza il peso dei corpi la loro velocità di caduta?
– Come si muovono i corpi celesti?
– È possibile il movimento nel vuoto?
– È possibile descrivere il movimento di un corpo terrestre con la matematica?

[38] Alcuni dei brani in cui compaiono le risposte che Aristotele avrebbe potuto dare sono presentate nell'appendice A (VOCI DI ARISTOTELE).

Per favorire la partecipazione degli studenti, le risposte di Aristotele possono essere lette da ragazzi diversi. L'insegnante potrebbe organizzare una discussione tra piccoli gruppi guidata da domande, che servono per controllare se hanno capito e assimilato quanto affermato da Aristotele. Ecco un esempio di possibili domande:

– Quali sono le caratteristiche del moto di un corpo terrestre descritte da Aristotele? (il moto di un corpo dipende dalla sua composizione)

– Quali sono le differenze tra corpi celesti e corpi terrestri per Aristotele?

– Se tu fossi Aristotele, come spiegheresti, ad un tuo allievo, perché il fumo sale in alto?

– Come Aristotele argomenta le sue convinzioni?

– Siete d'accordo con Aristotele? Perché?

– Quali sono le esperienze/osservazioni che confermano o smentiscono le sue teorie?

Si legge a questo punto LA VOCE DI GALILEO[39]. Galileo fa un esperimento mentale e si serve di questo mezzo per avanzare le sue obiezioni alla teoria aristotelica. Si possono ripercorre i passaggi anche più volte per far cogliere la struttura argomentativa del dialogo ai ragazzi e rilevare i metodi che Galileo usa per portare avanti la sua indagine: dapprima un ragionamento logico e, dopo la risposta di Simplicio, ancora legata al fenomeno, la formulazione 'matematica' che definitivamente dimostra l'inesattezza della teoria di aristotelica. Si può sottolineare che dato un fenomeno naturale, l'attenzione dell'osservatore può essere distratta da effetti di secondaria importanza: per quanto sia vero che due corpi di peso diverso toccano terra in tempi diversi, il fatto importante, come sottolinea Galileo, è invece che lo fanno in tempi quasi uguali. Si deve insistere su questo punto che è fondamentale per far capire ai ragazzi che i fenomeni naturali sono complessi, anche quelli che sono sotto i nostri occhi tutti i giorni, a differenza di quello che pensava Aristotele. A questo punto dovrebbe essere chiaro che Galileo non solo non è convinto della rappresentazione aristotelica del moto, ma che soprattutto critichi il suo metodo di indagare. I ragazzi devono avere il tempo di riflettere sulle differenze tra le situazioni reali e l'esperimento controllato che si fa in laboratorio. La discussione in classe serve anche all'insegnante per vedere se i ragazzi hanno compreso l'ipotesi di Galileo e le sue implicazioni. A questo scopo l'insegnante potrebbe organizzare una discussione tra piccoli gruppi guidata dalle seguenti domande:

– Se un chiodo e uno stuzzicadenti vengono lasciati cadere dalla stessa altezza, essi non toccano terra nello stesso istante. In che modo avrebbe spiegato questo un

[39] Vedi appendice A

GALILEO E LE DIMOSTRAZIONI NECESSARIE

"Adunque, tuttavolta che in concreto voi applicate una sfera materiale a un piano materiale, voi applicate una sfera non perfetta a un piano non perfetto; e questi dite che non si toccano in un punto. Ma io vi dico che anco in astratto una sfera immateriale, che non sia sfera perfetta, può toccare un piano immateriale, che non sia piano perfetto, non in un punto, ma con parte della sua superficie; talché sin qui quello che accade in concreto, accade nell'istesso modo in astratto: e sarebbe ben nuova cosa che i computi e le ragioni fatte in numeri astratti, non rispondessero poi alle monete d'oro e d'argento e alle mercanzie in concreto. Ma sapete, signor Simplicio, quel che accade? Sí come a voler che i calcoli tornino sopra i zuccheri, le sete e le lane, bisogna che il computista faccia le sue tare di casse, in voglie ed altre bagaglie, cosí, quando il filosofo geometra vuol riconoscere in concreto gli effetti dimostrati in astratto, bisogna che difalchi gli impedimenti della materia; che se ciò saprà fare, io vi assicuro che le cose si riscontreranno non meno aggiustatamente che i computi aritmetici. Gli errori dunque non consistono né nell'astratto né nel concreto, né nella geometria o nella fisica, ma nel calcolatore, che non sa fare i conti giusti."

DIALOGO SOPRA I DUE MASSIMI SISTEMI DEL MONDO

Figura 5

L'ESPERIMENTO DI GALILEO

In un regolo, o vogliàn dir corrente, di legno, lungo circa 12 braccia, e largo per un verso mezo bracio e per l'altro 3 dita, si era in questa minor larghezza incavato un canaletto, poco più largo d'un dito; tiratolo drittissimo, e, per averlo ben pulito e liscio, incollatovi dentro una carta pecora zannata e lustrata al possibile, si faceva in esso scendere una palla di bronzo durissimo, ben rotondata e pulita; costituito che si era il detto regolo pendente, elevando sopra il piano orizontale una delle sue estremità un braccio o due ad arbitrio, si lasciava (come dico) scendere per il detto canale la palla, notando, nel modo che appresso dirò, il tempo che consumava nello scorrerlo tutto, replicando il medesimo atto molte volte per assicurarsi bene della quantità del tempo, nel quale non si trovava mai differenza né anco della decima parte d'una battuta di polso. Fatta e stabilita precisamente tale operazione, facemmo scender la medesima palla solamente per la quarta parte della lunghezza di esso canale; e misurato il tempo della sua scesa, si trovava sempre puntualissimamente esser la metà dell'altro: e facendo poi l'esperienze di altre parti, esaminando ora il tempo di tutta la lunghezza col tempo della metà, o con quello delli duo terzi o de i 3/4, o in conclusione con qualunque altra divisione, per esperienze ben cento volte replicate sempre s'incontrava, gli spazii passati esser tra di loro come i quadrati e i tempi, e questo in tutte le inclinazioni del piano, cioè del canale nel quale si faceva scender la palla; dove osservammo ancora, i tempi delle scese per diverse inclinazioni mantener esquisitamente tra di loro quella proporzione che più a basso troveremo essergli assegnata e dimostrata dall'Autore. Quanto poi alla misura del tempo, si teneva una gran secchia piena d'acqua, attaccata in alto, la quale per un sottil cannellino, saldatogli nel fondo, versava un sottil filo d'acqua, che s'andava ricevendo con un piccol bicchiero per tutto 'l tempo che la palla scendeva nel canale e nelle sue parti: le particelle poi dell'acqua, in tal guisa raccolte, s'andavano di volta in volta con esattissima bilancia pesando, dandoci le differenze e proporzioni de i pesi loro le differenze e proporzioni de i tempi; e questo con tal giustezza, che, come ho detto, tali operazioni, molte e molte volte replicate, già mai non differivano d'un notabil momento.

Discorsi e dimostrazioni su due nuove scienze

Figura 6

aristotelico? Qual era la spiegazione di Galileo?

– Analizza i brani letti in classe. Qual è la strategia con cui Galileo argomenta la sua confutazione ad Aristotele?

– Ci sono ed, eventualmente, quali sono, le differenze tra il metodo di indagine di Aristotele e quello di Galileo?

Si potrebbero stimolare gli studenti a ragionare su esperimenti fatti negli anni precedenti per ripercorrere le strategie che si erano utilizzate alla luce delle nuove considerazioni: quali grandezze erano state osservate, quali erano importanti e quali si erano trascurate, quali previsioni erano state rispettate e quali no. L'insegnante dovrebbe, a questo punto, riportare l'attenzione su quale ruolo può avere la matematica nella progettazione dell'esperimento. Si legge, quindi, un brano tratto dai Dialoghi di Galileo (GALILEO E LE DIMOSTRAZIONI NECESSARIE in figura 5). A questo punto, l'insegnante potrebbe dividere i ragazzi in gruppi e chiedere di preparare un breve dialogo tra Galileo e Aristotele. Il dialogo potrebbe essere su fenomeni studiati in precedenza con esperimenti e deve permettere ai ragazzi di mettere in pratica quanto è uscito fuori dalle considerazioni precedenti. I dialoghi saranno poi recitati dagli stessi ragazzi e saranno oggetto di una discussione di classe.

Arrivati a questo punto possiamo analizzare i passaggi fondamentali del metodo utilizzato da Galileo, che noi chiamiamo "sperimentale", per studiare il moto di caduta dei gravi. Galileo, infatti:

- Propone una definizione di accelerazione[40];
- Enuncia l'ipotesi che nel moto di caduta la velocità sia proporzionale al tempo;
- Ricava previsioni da un'ipotesi fatta in precedenza;
- Progetta un esperimento in cui le grandezze siano misurabili (L'ESPERIMENTO DI GALILEO in figura 6);
- Controlla sperimentalmente le sue previsioni.

Un possibile esperimento da condurre in classe è riportato in figura 7. Come rileva Arons *"per Galileo la comparsa di numeri interi nella descrizione di un fenomeno naturale molto comune aveva profonde implicazioni filosofiche, dal momento che mostrava che la natura era in qualche senso << matematica>> e che la matematica poteva essere utilizzata con successo nella filosofia naturale."* L'esperimento si può fare con gli strumenti moderni come il sonar, oppure con lo strumento di misura usato da

[40] LA DEFINIZIONE DELL'ACCELERAZIONE in appendice A

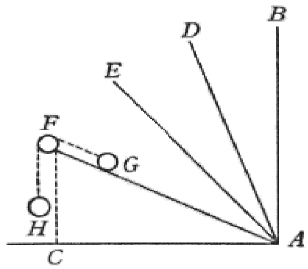
ESPERIMENTO: Ricostruzione dell'esperimento di Galileo

1) Gli strumenti di Galileo non erano in grado di misurare direttamente la velocità. Per controllare l'ipotesi di Galileo quali grandezze si possono misurare?

2) Ripercorrete i passaggi matematici che permettono di trovare una relazione tra spazio e tempo.

3) Ci sono differenze tra il moto sul piano inclinato e quello di caduta libera?

Non è ovvio che abbiano caratteristiche uguali. Galileo affrontò la questione mediante un ragionamento mentale al limite: dopo aver controllato che le caratteristiche del moto non variano all'aumentare dell'inclinazione del piano, immaginò di aumentare l'angolo fino a 90° in modo da avere un oggetto in caduta libera.



4) Per controllare che il moto sul piano inclinato sia uniformemente accelerato si possono usare dei campanelli, come fece Galileo, o più modernamente dei sensori di movimento che accendono delle lampadine al passaggio della pallina.

Provate a mettere i sensori a distanze uguali: con quale ritmo si accenderanno le lampadine?

Adesso provate a mettere i sensori a distanze prese secondo la legge dei numeri impari (prendete la prima distanza s_1 e posizionate il sensore. Il secondo sensore va messo a $3s_1$ dal primo, il terzo deve trovarsi a $5s_1$ dal secondo, etc): con quale ritmo si accenderanno le lampadine?

5) Rifate le stesse misure con angoli diversi. Si possono osservare cambiamenti nel tipo di comportamento della pallina?

6) Ricavare matematicamente la legge dei numeri impari. Fate una discussione di gruppo sulla particolarità di questo risultato.

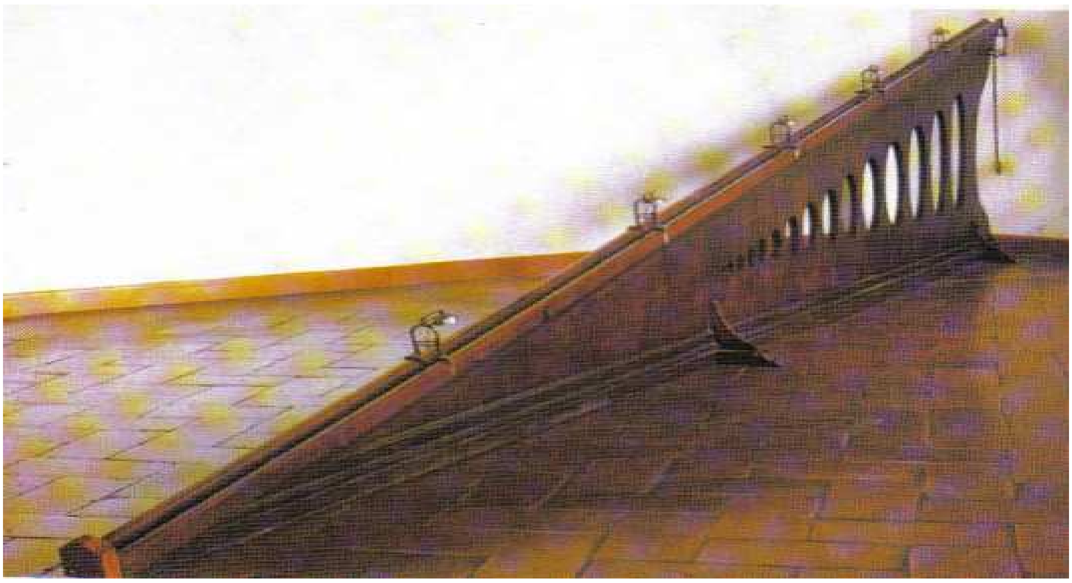


Figura 7: Riproduzione dell'esperimento di Galileo

Galileo, che misurava il peso dell'acqua che usciva da una specie di clessidra, nel tempo che la pallina scendeva lungo il piano. In questo modo si può operare un confronto tra i due strumenti di misura, per coglierne similitudini e differenze. Si può invitare gli studenti a riflettere sul fatto che differenti strumenti di misura ci permettono di osservare in modo diverso un fenomeno. Si possono fare misure simili a quelle di Galileo con diversi angoli, prendendo per ciascun angolo misure con distanze di partenza diverse. Si potrebbe, poi, invogliare gli studenti a variare le masse, la resistenza, il tipo di oggetti, o portare al limite alcune condizioni (gli angoli, per esempio) per far vedere quando il nostro modello, che è quello costruito da Galileo, è valido e lasciare aperte strade per ricercare nuove approssimazioni.

L'insegnante potrebbe anche chiedere ai ragazzi se secondo loro è possibile studiare la dipendenza della velocità dallo spazio invece che dal tempo, e invitarli a riflettere se in questo caso è possibile verificare sperimentalmente questa ipotesi. Il risultato che Galileo ottenne era che $v_f^2 = 2\,a\,s_f$. Perché Galileo, pur avendo trovato questa soluzione, decise di abbandonarla e definire l'accelerazione in un altro modo? Questo episodio mostra che talvolta sono possibili delle scelte alternative e che le decisioni spesso sono dettate da criteri di eleganza e di semplicità.

2.1.4 Mettere alla prova l'ipotesi di Galileo

Attività	**Obiettivi**
Visione di un filmato del PSSC sui sistemi di riferimento	Riflettere sul moto di una pallina in sistemi di riferimento differenti
Esperimento sulla caduta di una pallina	Applicare metodi usati in precedenza a situazioni nuove Studiare il moto parabolico scomponendolo in due moti indipendenti per controllare l'ipotesi di Galileo
Esplorazione del modello matematico con Geogebra	Esplorare le proprietà del modello matematico

Tabella 2.4

A questo punto, avendo studiato come Galileo aveva formulato sia il moto di caduta rettilineo uniforme, sia quello uniformemente accelerato, possiamo mettere alla prova l'ipotesi di Galileo sulla scomposizione del moto parabolico in due modi diversi.

Il primo, basato sulla visione di un filmato del PSSC[41], è una prova qualitativa in cui ben si evidenzia come componendo due moti indipendenti si ottenga una traiettoria

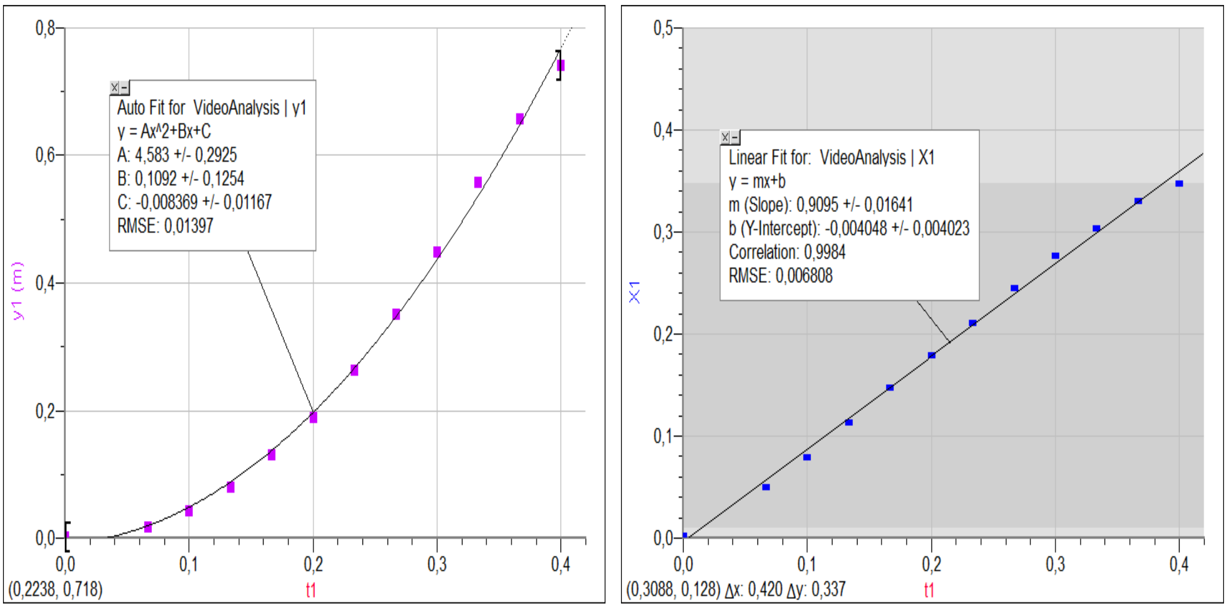
[41] Physical Science Study Committee

ESPERIMENTO SUL MOTO PARABOLICO

Una pallina scende lungo un piano inclinato costruito in modo tale che alla fine del piano la velocità sia orizzontale. Il piano è posto su un tavolo ad una certa altezza e la pallina che cade viene filmata con una telecamera. Nella posizione in cui è prevedibile che la pallina cada si mette un foglio ben fermo su cui è poggiata la carta carbone. L'ipotesi è che il moto sia parabolico.

1) Analizzate il filmato con SW di analisi dati che permette di fissare un sistema di riferimento e di prendere dei punti in corrispondenza della posizione della pallina per ogni fotogramma del filmato.
2) I punti presi hanno come coordinate i pixel dell'immagine, ma se misuriamo una distanza reale, si può conoscere il fattore di conversione tra numero di pixel e metri.
3) Elaborate i dati: si può controllare che, lungo l'asse verticale, l'andamento sia quadratico e, lungo l'asse orizzontale, sia lineare.
4) Ricavate dal fit quadratico del grafico per l'asse verticale il valore dell'accelerazione di gravità. È confrontabile con quello aspettato ($g=9,8\ m/s^2$)?
5) Ricavate dal fit lineare la velocità iniziale. Il valore ottenuto è confrontabile con le ipotesi iniziali ($v_x=0$)?
6) Quali sono le possibili fonti di incertezza? Si possono migliorare le condizioni sperimentali per minimizzare gli errori sistematici?

Figura 8: Scheda di laboratorio dell'esperimento sul moto parabolico. Qui sotto sono presentati due grafici che si possono ottenere facendo l'esperimento: a sinistra l'andamento lungo l'asse verticale, a destra l'andamento lungo l'asse orizzontale



curva che ricorda una parabola[42]. Si tratta di un filmato sui sistemi di riferimento che l'insegnante potrebbe anche utilizzare per introdurre in seguito quest'altro argomento. Un secondo modo è quello che ci ha insegnato Galileo, in altre parole controlliamo l'ipotesi mediante un esperimento (vedi figura 8).

Infine, si possono esplorare le caratteristiche del nostro modello, attraverso un software di geometria dinamica, che ci permetta non solo di introdurre i valori che avevamo ricavato dall'esperimento, ma anche di variare i parametri, "giocando" un po' con il moto parabolico. I ragazzi possono costruire un modello con Geogebra[43] che riproduca il moto parabolico di un oggetto, in modo tale che si possa variare l'angolo e la velocità iniziale, l'altezza da cui parte l'oggetto e visualizzare le componenti della velocità in ogni istante e la traiettoria. Si possono calcolare la gittata, il tempo di caduta, l'altezza massima, si può inserire il valore sperimentale di velocità iniziale e controllare la gittata calcolata dal computer, confrontandola con quella ricavata dalle misure. Si possono invitare i ragazzi a cambiare l'accelerazione gravitazionale e farli riflettere su quale situazione reale potrebbe descrivere quel modello e se ci sono situazioni che il modello matematico può descrivere e invece non ci sono nella realtà.

2.1.5 Riesaminare il fenomeno iniziale

Attività	Obiettivi
Analisi del fenomeno iniziale con SW di elaborazione dati	Confrontare le previsioni iniziali con i risultati ottenuti dall'elaborazione dei dati
Riflessione conclusiva	

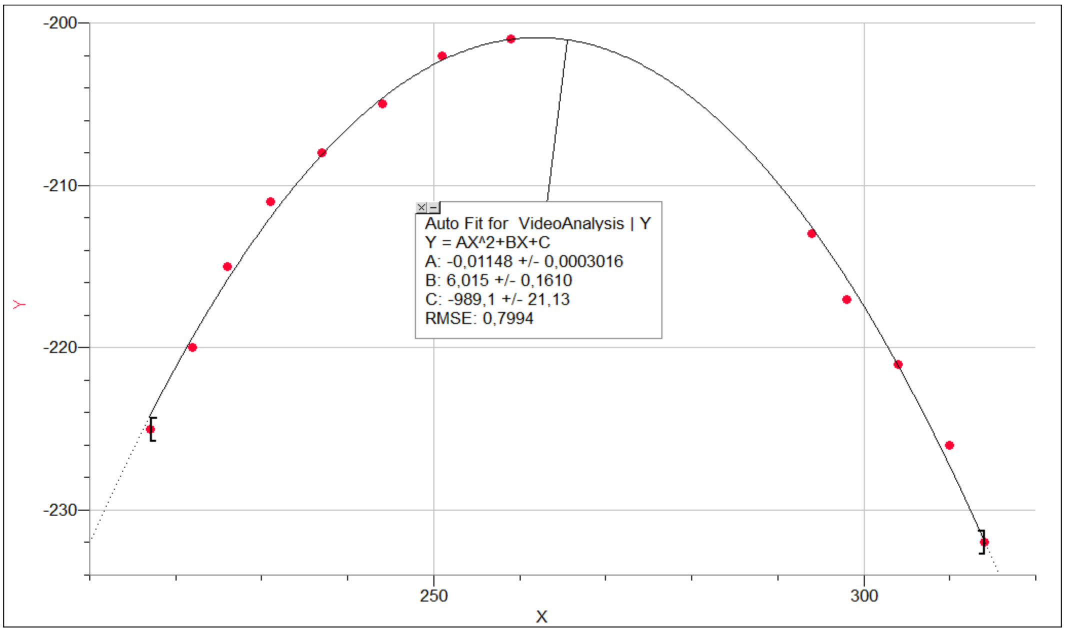
Tabella 2.5

Avendo controllato che l'ipotesi di Galileo è effettivamente valida per il moto di un proiettile, possiamo a questo punto riprendere il fenomeno da cui eravamo partiti per riesaminare le previsioni iniziali alla luce di quello che è stato fatto. Si può prendere un'immagine della fontana che gli studenti hanno visto all'inizio e analizzarla con SW di elaborazione dati, per vedere se la nostra ipotesi sia effettivamente confermata, oppure dobbiamo aggiustare qualcosa. (Un esempio di elaborazione dei dati è in figura 9.) Si invita i ragazzi a riflettere sulle ipotesi iniziali e a confrontare quei ragionamenti con quanto abbiamo trovato dall'elaborazione dei dati, per trarre delle conclusioni sul nostro fenomeno iniziale. Quali considerazioni erano effettivamente in linea con quanto osserviamo e quali devono essere riviste? I risultati che abbiamo ottenuto possono

[42] https://www.youtube.com/watch?v=DejaKlkaVc0

[43] Un esempio di protocollo costruzione del modello in Geogebra, fatto da me, è riportato in appendice B

Figura 9: Esempio di elaborazione dati sul fenomeno iniziale



descrivere in maniera corretta tutte le situazioni che conosciamo? Quali altre osservazioni/esperimenti possiamo fare per mettere alla prova la nostra descrizione del fenomeno? È importante far notare agli studenti che le conclusioni, che possiamo trarre dalla nostra osservazione della fontana, descrivono il moto dell'acqua, ma non spiegano perché l'acqua si muova in quella maniera. Questo spunto di riflessione può essere una buona occasione per sottolineare la differenza tra l'approccio cinematico, che si limita a descrivere il moto di un oggetto, e quello dinamico, che invece ricerca i motivi per cui quell'oggetto si muove in quel modo. Queste considerazioni possono essere il punto di partenza per riprendere e approfondire la trattazione dinamica.

2.2 L'analisi critica della proposta

Per avere un primo riscontro della nostra proposta, ci è sembrato interessante presentarla ad un gruppo di insegnanti in formazione, ossia studenti del corso 'L'insegnamento della fisica: aspetti teorici e aspetti sperimentali', tenuto dalla professoressa Pecori nel primo semestre all'Università di Bologna. Il corso è frequentato da una trentina di studenti, di cui una ventina fanno parte della laurea triennale di fisica e il resto sono studenti della magistrale di matematica. Le conoscenze pregresse su aspetti legati alla didattica sono, in generale, poco approfondite. Alcuni studenti di fisica, in contemporanea, con il corso della professoressa Pecori seguono un corso di storia della fisica, ma per tutti gli studenti di fisica questo è il primo corso di didattica. Gli studenti di matematica della laurea magistrale hanno seguito o stanno seguendo un corso di didattica della matematica e uno di storia della matematica. La proposta è stata mostrata loro con una presentazione di circa un'ora. Le slide utilizzate sono allegate nell'appendice C. In base alle scelte effettuate nel progettare la nostra proposta, erano stati individuati dei punti critici che alla fine della presentazione si sono concretizzati in una serie di domande e possibili spunti di riflessione:

- Quale ruolo assume la storia nel percorso didattico?
- Quale ruolo assume l'esperimento nel percorso didattico?
- È utile, e se sì perché, far studiare la costruzione del moto rettilineo uniforme fatta da Galileo?
- Trovate che il confronto tra le due formulazioni della relazione sul moto uniforme aiuti ad approfondire?
- È utile sottolineare la meraviglia di Galileo, dal punto di vista didattico?
- Quali proposte alternative fra quelle indicate trovate più interessati? Ci potrebbero essere altre proposte per migliorare il percorso?

- Sarebbe opportuno fare altri collegamenti interdisciplinari?
- Ritenete efficace il modo in cui viene affrontato il percorso riguardo al metodo sperimentale?
- Quanto è efficace iniziare il percorso con un filmato?
- È rispettato il filo logico indicato all'inizio della presentazione?

Divisi in gruppi da tre persone, è stato chiesto loro di fare una discussione, in circa due ore, a partire da queste domande. Ogni gruppo ha ricevuto le slide della presentazione e un transcript del commento come supporto e ha scelto di concentrare l'attenzione su una o due di queste domande. Alla fine della discussione a piccoli gruppi, è stato chiesto loro di preparare delle considerazioni critiche da comunicare a tutti gli altri. A partire dai temi scelti dai gruppi sono stati individuati quattro argomenti principali che sono stati utilizzati per riassumere i commenti:

1) Filo logico (approccio, obiettivi, strumenti, strategie didattiche, …)
2) Rapporto matematica e fisica
3) Ruolo della storia (argomentazione, esperimenti, motivazione, …)
4) Ruolo del laboratorio (approccio fenomenologico, "metodo sperimentale", HW/SW didattico, …)

Nei paragrafi successivi, saranno esposte osservazioni di vario tipo che sono state fatte dagli studenti universitari, raccolte in base all'argomento. Il commento ai problemi sollevati è riportato nel capitolo delle conclusioni.

2.2.1 Filo logico

Solo un gruppo ha scelto di fare le sue osservazioni sul filo logico, tuttavia nel corso della discussione sono usciti alcuni punti che valutavano obiettivi e scelte effettuate dal punto di vista della progettazione didattica. Le considerazioni fatte sono riassunte in tabella 2.6:

Tabella 2.6

Osservazioni sul filo logico
Sarebbe opportuno introdurre prima Aristotele e poi Galileo sul moto parabolico
Si potrebbe richiedere il contributo delle discipline umanistiche
Rifare un argomento porta via tempo
Si dovrebbe tenere conto dei diversi indirizzi di scuola superiore
Importanza della motivazione

Il gruppo che ha scelto di fare le sue considerazioni guardando il progetto globalmente era composto da studenti di fisica. Le loro considerazioni sono partite dal fatto che la voce di Aristotele poteva essere introdotta all'inizio del moto parabolico perché il suo pensiero "*va a consolidare alcune delle idee intuitive, pregresse e ancora residue dopo lo studio del moto parabolico nel biennio, che però possono essere rimaste*". Introducendo Aristotele all'inizio, in seguito "*Galileo può arrivare e sgombrare in un certo senso il campo da tutti quelli artifizi totalmente intuitivi (…) sostituendoli con qualcosa di ben quantificato e di ben correlato con la matematica.*"

Dallo stesso gruppo viene la riflessione sull'opportunità di richiedere il sostegno e la collaborazione dei professori delle discipline umanistiche: *"Abbiamo anche prestato attenzione all'abbondanza di testi proposti di Galileo e talvolta proposti integralmente, con tanti dettagli. Ci chiedevamo se questo percorso anche di tipo letterario, da un certo punto di vista, comunque ben radicato nella storia e nella letteratura, fosse possibile affrontarlo durante una lezione di matematica e fisica. Potrebbe essere proposto in sinergia con insegnanti di letteratura, di storia o di filosofia che affianchino la lettura di questi testi*". La loro lettura, infatti, potrebbe essere difficoltosa e pesante altrimenti, nonostante *"siamo i primi a sostenere che Galileo abbia un linguaggio estremamente colorito e piacevole."*

Gli ultimi due commenti trattano l'argomento storico da un punto di visto più generale riferendosi al contenuto della proposta. Una studentessa di fisica afferma: *"Rifare un argomento già affrontato in precedenza, anche se in modo diverso, porta via tempo per fare altre cose. È vero che è importante che capiscano la storia ma si può fare anche mediante altre discipline. L'insegnante di filosofia dovrà ripeterlo poi al suo momento mentre l'insegnante di fisica per far vedere che la fisica è un campo aperto deve, secondo me, raggiungere l'inizio della fisica moderna, che spesso non si riesce a fare."*

Un'altra ragazza osserva: *"Questi diversi tipi di approccio dovrebbero essere calibrati sui diversi tipi di istituti superiori: mi sembra molto più adatto un approccio storico di questo tipo ad un liceo scientifico o classico, mentre in un tecnico o in un istituto di ragioneria è eccessivo pretendere che gli studenti imparino addirittura il processo che ha portato alla deduzione di certe teorie."*

Un altro gruppo sottolinea l'importanza della motivazione: *"Ci deve essere una motivazione elevata (…) Questi testi potrebbero risultare difficili per studenti del terzo anno della scuola secondaria, però magari se si facesse la parafrasi dei testi sarebbe comunque utile esporli o prenderne spunto, anche per mettere lo studente in contatto* *emotivo. Magari incuriosito da una psicanalisi del personaggio, potrebbe essere più motivato allo studio."*

2.2.2 Rapporto tra matematica e fisica

Il rapporto tra matematica e fisica è alla base di questo percorso e ha interessato due gruppi di studenti. Le loro riflessioni sono riassunte nella tabella 2.7:

Tabella 2.7

Commenti su rapporto tra matematica e fisica
L'antagonismo tra i due personaggi può aiutare a mettere in evidenza l'importanza della matematica
La matematica permette di fare previsioni e schematizzazioni
La matematica è come una lingua per esprimere concetti
A volte si possono anticipare concetti matematici per studiare la fisica: problema dei prerequisiti
Le formule sono più intuitive della lingua
È utile sottolineare fin dall'inizio il ruolo sempre maggiore verso la fisica moderna

Il primo gruppo a parlare del rapporto tra matematica e fisica è composto da tre fisici: *"Noi siamo partiti proprio dal testo del Saggiatore che riteniamo interessante perché Galileo è il primo ad accorgersi che l'Universo ha una struttura matematica, in contrapposizione con Aristotele che si era concentrato più sul filosofare e partiva da un'esperienza visiva, però questo non è altro che 'un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto'."*

Un'osservazione che sarà ripresa anche da altri gruppi è il fatto che il legame della fisica con la matematica diviene sempre più importante con il passare del tempo e questo deve essere sottolineato fin da subito perché "*la matematica ha sempre di più un ruolo predominante nello studio della fisica e questo genera crisi nello studente".* Già nell'elettromagnetismo, per esempio, *"la matematica quasi supera la fisica, sembra predominare la matematica. Bisogna motivare fin da subito lo studente alla matematica e un tipo di percorso come questo, anche con collegamenti interdisciplinari con altre materie, può aiutare a far vedere questa connessione."* Altri aggiungono che *"insegnare agli studenti ad interpretare le formule matematiche fin da subito, anche nelle cose facili, è importante perché in seguito sarà più difficile, non sarà più così banale. Bisogna capire subito che la matematica è un linguaggio per la fisica e gli studenti devono imparare ad interpretare quello che vedono scritto nella formula."* Un terzo gruppo a questo proposito nota: "*C'è una fisica diversa a seconda del livello della matematica che usiamo per spiegarla, cioè si può pensare all'elettromagnetismo come si fa al liceo o* *come si fa all'università: più si va avanti, più la matematica diventa importante. Pensiamo al corpo nero, non è più per niente intuitivo ed è solo matematica, ossia se all'inizio è solo un linguaggio per descrivere un concetto fisico, più si va avanti più si intrecciano e diventano un'unica cosa."*

Un altro gruppo di fisici paragona il rapporto tra fisica e matematica al rapporto tra lingua e concetto: *"La matematica per la fisica è una cosa basilare perché come nella lingua, quando si parla di un concetto, questo è presente indipendentemente dalla lingua, però poi la lingua schematizza e dà la possibilità di rapportarsi. (…) È molto importante far capire agli studenti che sono due cose che andranno sempre insieme perché non si può scollegarle una dall'altra. Si potrebbe anche dire che molte volte ci sono stati dei matematici che hanno contributo alla fisica e molti fisici che hanno dato il loro contributo alla matematica".* Un'altra osservazione interessante viene dal fatto che la trattazione di certi argomenti fisici*, "secondo noi, non dovrebbe essere ostacolata dal fatto che certi concetti non sono ancora stati fatti in matematica e quindi non si usano neanche in fisica, per esempio il limite. Si potrebbe introdurre il concetto di limite senza il formalismo ma facendo intuire (…) la logica e questa cosa aiuta la fisica, però potrebbe anche aiutare l'introduzione di concetti matematici e del formalismo matematico nel futuro."*

Inoltre la formula matematica, per esempio, quella di Galileo "*delle proporzioni è più intuitiva. Aiuta a capire cosa vuole dire la legge fisica di più (…) più dello spiegarlo con il linguaggio."*

2.2.3 Ruolo della storia

Il ruolo della storia è stato un argomento molto dibattuto, le riflessioni fatte sono sintetizzate in tabella 2.8:

Tabella 2.8

Osservazioni sul ruolo della storia
Serve ad evidenziare la possibilità di soluzioni diverse
Può mettere in evidenza la risonanza con idee e difficoltà degli studenti
Si dovrebbe iniziare ad avere un approccio storico già al biennio
La lettura dei testi originali potrebbe essere "pesante"
Può aiutare a spiegare il "perché" si tratta l'argomento
Può favorire un atteggiamento critico
Può mettere in evidenza che la fisica è un campo aperto
Può creare un legame con altre materie
Può aiutare a sviluppare il pensiero scientifico

Il ruolo della storia per avvicinare la matematica e la fisica agli studenti è stato suggerito da più gruppi: *"Per noi il tema della storia aveva un'utilità maggiore per dare una certa umanità a queste figure che caratterizzano sia la matematica sia la fisica"* Leggere i testi è un modo per evidenziare *"il contesto storico in cui una certa scoperta scientifica è avvenuta, le motivazioni che hanno portato ad una certa teoria, i problemi che hanno incontrato nell'esporre questa loro teoria"* e questo rende *"una figura che altrimenti sarebbe fredda o associata solo ad una formula o ad una teoria (…) più umana. Molte persone che studiano storia hanno come idolo un personaggio storico. L'idea è quella di realizzare una specie di ponte emotivo con queste figure storiche."*

Inoltre, sempre lo stesso gruppo aggiunge che *"fornire un percorso storico metteva in risalto la non univocità della risoluzione di un problema. Per esempio, il presentare la formula moderna del moto uniforme o con le proporzioni di Galileo, oppure anche il vedere che la velocità si poteva vedere in funzione dello spazio percorso nel moto accelerato (…) mette in risalto che non c'è un solo modo per risolvere un problema. E questa cosa si ritrova anche nel laboratorio, facendo un confronto tra gli strumenti di oggi e quelli disponibili allora.*

Finora abbiamo ascoltato solo studenti di fisica, finalmente parlano anche quelli di matematica: *"La storia è importante nel percorso perché avvicina gli studenti. Raccontare la storia può far vedere che anche i grandi hanno avuto delle difficoltà e spesso i problemi storici potrebbero essere anche quelli reali che incontrano gli studenti. Il far vedere che non è stato tutto facile anche per altri è importante. L'utilizzo dei testi ci è sembrato difficile e avevamo delle perplessità sui tempi impiegati per leggerli. Abbiamo un po' di perplessità anche sulla riproposizione di argomenti già trattati in precedenza dagli studenti, mentre secondo noi la storia potrebbe essere una buonissima introduzione: l'insegnante potrebbe introdurre l'argomento anche con aneddoti lasciando un problema aperto che poi viene risolto in classe."* A parlare è ancora un gruppo di matematici che sottolinea l'importanza di osservare lo sviluppo storico di un concetto: *"Molto spesso quando un insegnante introduce un argomento nuovo, lo studente si chiede perché studiare quel nuovo argomento, per quale motivo viene affrontato in questo modo e non in modo diverso. Probabilmente con un approccio storico che faccia capire in che modo e perché si è arrivati a quei risultati si ha un approccio più reale (…) questo potrebbe far capire agli studenti che è necessario affrontare un nuovo argomento che viene proposto in modo critico, riflettere su quello* *che si sta facendo e quindi non semplicemente prendere per buono tutto ciò che viene detto loro."*

Ancora i fisici dicono: *"Questo contestualizzare le nuove teorie per capire anche il motivo per cui si fanno e il contesto storico in cui sono nate, serve per aiutare a vedere che la fisica e la matematica non sono materie finite, cioè c'è un futuro e ci sono ancora molte cose su cui indagare e da studiare perché dalla mia esperienza a volte la fisica sembra una materia finita, le formule son quelle e invece gli studenti devono sentire che fanno parte dello sviluppo scientifico e possono contribuire. È anche una questione di stimolare interesse."* Un altro gruppo ribadisce: *"Uno studente grazie ad un approccio storico riesce meglio a sviluppare un pensiero scientifico come si è sviluppato nel corso della storia. Vedere i teoremi e le teorie non come calate dall'alto ma come sono nate, cioè come soluzioni di difficoltà reali e di problemi che altri scienziati della storia si sono posti può aiutare ad interessare e a capire meglio. Dovrebbe esserci sempre un approccio storico".*

Quindi, dalle considerazioni di alcuni studenti sembra emergere che valga sempre la pena di avere un approccio storico fin dall'inizio: *"Far entrare già da subito lo studente nell'ottica del capire il problema, la dimensione problematica che ha portato lo scienziato a studiare questo fenomeno, è comunque un approccio che può far entrare fin da subito lo studente nella mentalità corretta di studio e di approccio alla materia."* Non tutti sono d'accordo su questo punto: *"Sono d'accordo sul presentare un approccio storico solo su un argomento già fatto (…) Il lavoro di lettura dei testi, lo studio delle motivazioni sono discorsi che avvengono più avanti perché si collegano con la filosofia. (…) Per ragazzi delle medie è più stimolante studiare la cinematica attraverso l'uso del sonar mentre invece forse nell'ultimo triennio è più interessante un approccio storico."*

2.2.4 Ruolo del laboratorio

Il ruolo del laboratorio è stato discusso da tre gruppi e le osservazioni sono sintetizzate in tabella 2.9:

Tabella 2.9

Osservazioni sul ruolo del laboratorio
Può aiutare a catturare attenzione e interesse
Può aiutare a concretizzare le formule
Dibattito su opportunità di usare strumenti "semplici"/moderni
Può aiutare a legare la fisica e la matematica
Non si dovrebbero trascurare le incertezze sperimentali
Discussione su esperimenti prima e/o dopo la teoria

Il primo gruppo di fisici che parla del laboratorio sottolinea: *"Secondo noi il laboratorio è il modo migliore per catturare l'attenzione perché osservando il fenomeno in laboratorio lo studente è costretto a stare attento rispetto ad una spiegazione teorica dell'insegnante o del libro. Il laboratorio fa passare dal teorico al concreto, non è più la fisica noiosa delle formule matematiche ma lo scopo è quello di far vedere allo studente la concretizzazione delle formule che ha imparato studiando la teoria, è un passo in più. (…) L'esperienza pratica della fisica è importante perché secondo noi la cosa che fa scoraggiare molti studenti è la matematica. (…) D'altra parte la matematica è il linguaggio della fisica e come si può spiegare la fisica se non attraverso la matematica. Però, il laboratorio se potenziato può suscitare più interesse e può aiutare a comprendere meglio le formule matematiche, in modo che non sia più un deterrente. Inoltre (…) si deve far si che gli strumenti che utilizzano siano i più rudimentali possibile, semplici perché così sono costretti a stare attenti a cosa succede e poi successivamente usare il calcolatore."* Per 'semplici' si intende strumenti che siano governati dallo studente e non demandino al software l'elaborazione dei dati. A questo proposito un secondo gruppo, invece, afferma: *"Abbiamo pensato che il laboratorio possa creare un legame ancora più stretto tra matematica e fisica, perché osservando il fenomeno reale e poi studiarlo con grafici può essere di grande aiuto. (…) Le vecchie tecnologie possono suscitare l'interesse e catturare l'attenzione e le nuove tecnologie possono mettere più in luce lo stretto legame tra la fisica e la matematica e favorire un'analisi più formale."*

Un gruppo fa notare: *"Sarebbe utile già dalle superiori accennare all'analisi degli errori e almeno dire che tutte le misure sono affette da errori, proprio per poter confrontare le misure con le grandezze conosciute."* Gli studenti sono stati stimolati sul fatto che in fisica le incertezze sono molto importanti e che invece la matematica tratta gli stessi concetti trascurando queste incertezze e che, quindi, un insegnante deve decidere come trattare queste apparenti differenze in qualche modo. Su questo punto, le riflessioni sembrano discordanti e, in parte, improvvisate su un tema sul quale non avevano riflettuto in precedenza: "*La matematica fa delle previsioni e l'esperimento dà dei risultati che dicono se l'esperimento è riuscito o meno*." Un'altra ragazza dice: "*le previsioni matematiche sono un'approssimazione della realtà*". Ancora un'altra dice: *"La fisica descrive una cosa reale e per questo ha un'incertezza. Mentre la matematica non ha una misura, non ha una parte sperimentale. Sono due scopi diversi, la fisica descrive una cosa reale, la matematica no, però comunque i numeri sono sempre quelli."* Una ragazza che studia matematica afferma: *"Anche la matematica ha dei problemi con le* *approssimazioni e dove ci sono le incertezze, come le funzioni seno e coseno che sono approssimate con funzioni polinomiali."* Un'altra studentessa di matematica sottolinea: *"Anche nei problemi di matematica ci sono delle misure, per esempio se misuriamo i lati di un triangolo lo facciamo con uno strumento affetto da un certo grado di sensibilità, però per il nostro scopo si cerca di non tener conto dell'errore dovuto alla misurazione perché lo scopo è quello di vedere se il ragazzo sa applicare una formula, sa ragionare o se sa portare avanti la dimostrazione. In fisica, dobbiamo far vedere che ci sono gli errori perché ottenendo un risultato diverso da quello aspettato, non è detto che l'esperimento non è riuscito ma abbiamo una misura in cui possono intervenire al di fuori del nostro controllo degli errori e quindi in fisica siamo costretti ad inserire l'errore.*"

Infine un gruppo di fisici ha discusso sul momento in cui è più opportuno fare l'esperimento: *"C'eravamo confrontati su due posizioni: la prima sosteneva che l'esperimento dovesse venire prima della formulazione teorica e matematica del fenomeno e un'altra posizione è che, in seguito all'identificazione delle grandezze in esame e all'analisi del fenomeno sulla carta, l'esperimento dovesse essere un esperimento di verifica. Di fatto, ci sembrano due visioni del metodo sperimentale e due modi profondamente diversi di affrontare l'esperimento, però forse anche all'interno di questo percorso potrebbe essere interessante cominciare e finire con l'esperimento in modo tale da far notare agli studenti, che dovrebbero avere già dei prerequisiti di formulazione nel triennio, come l'atteggiamento e il modo di guardare all'esperimento sia profondamente diverso in base ai contributi teorici, che vengono dalla formulazione matematica. Anche lo stesso esperimento può risultare o una scoperta, un tentativo di raccolta dati"* oppure se fatto in un secondo momento può diventare *"una verifica, sotto le correzioni degli errori sperimentali, di quello che si è andato a studiare. È importante dare entrambi i metodi perché riflettono l'intuizione che viene dall'osservazione di un dato sperimentale e poi successivamente la costruzione di un esperimento con dietro una teoria. Quando viene raccontato il metodo scientifico, sembra quasi che Newton, per esempio, veda la mela e si inventi la gravitazione universale e questo finisce per creare dei paradossi perché poi più si va avanti con la fisica più si vede che è impossibile una cosa del genere. Questa ambiguità, in cui si rischia di incorrere, può essere superata facendo vedere sia l'esperimento come verifica sia la raccolta di dati ancora non ben strutturati"* cui segue un lavoro di sistematizzazione successivo. È inoltre importante *"già da subito proporre e far notare loro quali potrebbero essere le cose che ci interesserà andare a guardare e quali gli aspetti che si possono considerare aspetti da trascurare. È interessante questo aspetto perché non è semplice spesso distinguere cosa* *deve essere trascurato e spesso le difficoltà a isolare il fenomeno sono piuttosto grandi".* É importante alla fine andare a vedere *"a cosa la formula avrà dato una risposta e cosa la formula lascerà aperto ad un'analisi successiva, più approfondita."*

2.3 Riflessioni sull'analisi critica della proposta da parte degli studenti

Abbiamo coinvolto gli studenti universitari per mettere in discussione il nostro progetto e i commenti alle loro osservazioni ci faranno da guida nelle riflessioni conclusive riportate nell'ultimo capitolo. È interessante, però, analizzare qui le loro reazioni alla nostra proposta in quanto insegnanti in formazione: in generale, sono emersi spunti di riflessione interessanti, tuttavia alcune osservazioni sembrano piuttosto immature, confuse e, a volte, ingenue, ancora troppo legate alle esperienze personali come studenti. Frasi come "*Lo studente (con il laboratorio) è costretto a stare attento*" ci sembrano emblematiche: quel 'costringere a stare attenti' mette in luce l'individuazione di un problema, sentito come centrale nell'insegnamento/apprendimento proprio perché vissuto in prima persona, anche attraverso i compagni di classe, ma non ancora affrontato o approfondito con una prospettiva da insegnante. L'insegnante non può 'costringere a stare attenti' i suoi studenti, anche se in maniera soft, come proposto dalla ragazza, attraverso il laboratorio, ma dovrebbe cercare strategie efficaci per catturare un'attenzione genuina da parte dei suoi studenti. Alcune volte, le critiche fatte sono fondate ma le soluzioni proposte sembrano piuttosto ingenue o stereotipate: "*Molto spesso quando un insegnante introduce un argomento nuovo, lo studente si chiede perché studiare quel nuovo argomento. (…) Probabilmente con un approccio storico che faccia capire in che modo e perché si è arrivati a quei risultati si ha un approccio più reale (…)".* Anche se è vero che lo studente si chiede spesso perché studiare un argomento, non è detto che il sapere come si è arrivati ad un risultato sia una risposta soddisfacente, perché la motivazione che ha spinto il raggiungimento di quel risultato nel passato può essere diversa da quella che spingegli studenti di oggi.

In particolare, gli studenti di fisica sembrano attenti al ruolo del laboratorio: è evidente che, sulla base della propria esperienza, anche universitaria, hanno avuto la possibilità di meditare sulla questione della funzione da assegnare al laboratorio e sono, quindi, in grado di argomentare e discutere con maggiore profondità le proprie posizioni.

Essendo ancora all'inizio della loro formazione, molti non hanno ancora avuto l'occasione di riflettere su come mettere in pratica le conoscenze teoriche acquisite sulle strategie didattiche e su quali effetti possono avere le scelte che l'insegnante compie. Problemi come il tempo da dedicare ad un determinato argomento piuttosto che ad un altro o evitare le difficoltà della lettura dei testi originali sembrano oscurare aspetti più problematici del rapporto tra matematica e fisica. Potrebbero essere considerati con una prospettiva diversa, più matura, solo attraverso una riflessione critica sul significato da dare all'insegnamento della fisica e a quello della matematica a scuola, su quali argomenti affrontare, sulle modalità con le quali affrontarli e sui motivi per cui è importante che i ragazzi apprendano quell'argomento. Negli ultimi anni, la ricerca ha fatto notare quanto siano importanti nella pratica didattica le convinzioni che insegnanti e studenti hanno sulla matematica e sulla fisica. Ognuno di noi concepisce la materia, il processo di insegnamento e apprendimento, gli obiettivi da raggiungere e il modo in cui raggiungerli secondo teorie personali, derivate dalle nostre esperienze e dalle nostre emozioni, oltre che da conoscenze formalizzate della disciplina. Questo sistema di convinzioni è determinante nella scelta da parte degli insegnanti degli obiettivi, dei contenuti e delle strategie educative. Proprio per questo è importante che la formazione iniziale degli insegnanti dia loro la possibilità di esplicitare e riflettere sulla propria visione della disciplina e del mestiere dell'insegnante. Gli studenti coinvolti nella discussione, infatti, hanno mostrato interesse per i problemi sollevati e rivelato potenzialità di approfondimento degli aspetti didattici affrontati. Tuttavia hanno, al tempo stesso, mostrato i limiti di un'analisi condotta prevalentemente con gli strumenti del senso comune. Entrambi questi aspetti ci confermano l'importanza di una formazione iniziale dei futuri insegnanti che dia loro la possibilità di sfruttare appieno le loro capacità come educatori.

Capitolo 3

La nostra progettazione è partita dalla constatazione che, pur essendo spesso dichiarato che la matematica è una materia che serve per descrivere il mondo reale, a scuola non si dà l'occasione agli studenti di capire che cosa vuol dire gestire il formalismo matematico in contesti diversi da quelli interni alla matematica stessa. Gli studenti italiani hanno molte difficoltà nel costruire un modello matematico a partire dalla realtà e nel vedere il mondo in senso matematico: spesso la matematica si riduce a una serie infinita di formule, apparentemente scollegate tra loro, che hanno poco senso e che si finisce per imparare a memoria. L'attività di modellizzazione diventa, invece, un momento particolarmente ricco, nel quale è possibile costruire competenze e conoscenze, condividendo idee, scelte, metodi di costruzione e di verifica. Si tratta di farlo senza forzare la presenza della matematica nella risoluzione dei problemi, ma in modo che essa svolga un ruolo quasi naturale. Lo studente, d'altra parte, deve essere messo di fronte a situazioni che attingano dalla sua realtà e che siano problematiche dal suo punto di vista. Il nostro percorso ci è sembrato una buona occasione per consentire agli studenti di cominciare a gestire modelli in prima persona, in modo non forzato, e recuperare il gusto di vedere il mondo in senso matematico. Nella proposta presentata in questo lavoro non si intende introdurre concetti matematici con esempi fisici, si cerca piuttosto di indurre gli studenti, con la presentazione di documentazione storica (in particolare di cinematica), a riconoscere il fatto che si tratta di idee, di rappresentazioni create dall'uomo che dipendono dal metodo di indagine, dalle tecniche sperimentali ecc.

"Le idee che entrano in gioco sono in primo luogo relative a ciò che si vuole descrivere (…) il fenomeno non contiene la legge (…) la traduzione matematica non è immediata" [44].

Il nostro percorso si basa su una scelta piuttosto non convenzionale: non si propone di ricostruire un percorso storico sull'evoluzione delle idee riguardanti il moto da Aristotele a Galileo, ma fa una scelta, per così dire, astorica. Questo ci permette di migliorare la presentazione perché il nostro filo logico non è costretto in una rigida ricostruzione di fatti e di problemi, utilizzando piuttosto la storia per accompagnare gli studenti nel loro percorso di crescita culturale. Le indicazioni degli studenti universitari, che hanno commentato la nostra proposta, sembrano, invece, suggerire una preferenza per un percorso lineare, che presenti, ad esempio, prima Aristotele e poi Galileo. Solitamente questa è la scelta che si fa anche a scuola e che può sembrare la più facile. La nostra proposta è di superare l'abitudine di vedere un percorso storico come lineare, cioè come una sequenza di fatti, per permettere un punto di vista più ampio, che riesca a vedere le cose in modo più generale e a creare collegamenti tra punti che non si trovano in sequenza. Non ci meravigliamo che la nostra scelta possa disorientare gli studenti che non vi sono abituati; si tratta, quindi, di una scelta che deve essere esplicitata diversamente. Nel primo capitolo abbiamo ricordato come il contributo della storia possa assumere varie forme. Si può presentare un concetto attraverso la sua evoluzione storica e questo è emerso anche dalle considerazioni di alcuni universitari che la ritengono '*una buona introduzione per giustificare un argomento*'. Tuttavia siamo convinti che la scelta di un uso a posteriori della storia sia necessaria per permettere di fare collegamenti e ricostruire in parte la fittissima rete di relazioni con altri concetti che è tipica degli enti matematici. Riprendere i concetti e rivederli con altri punti di vista è, quindi, l'occasione per mettere in luce l'aspetto relazionale della matematica, così come suggerito da Sfard (vedi il capitolo 1). Ne segue in modo naturale una proposta insolita rispetto alla stesura tradizionale dei "curricola": su alcuni argomenti sarebbe opportuno ritornare, in modo da approfondire aspetti che nella prima presentazione non potevano essere discussi.

Gli stessi studenti universitari hanno suggerito l'opportunità di una collaborazione con altre discipline, soprattutto legata all'esigenza di facilitare la lettura dei testi. Ci sembra che la collaborazione con altre discipline possa costituire una risorsa, per recuperare aspetti che in questo percorso sono trascurati e che possono, invece, costituire un valore aggiunto e dare un significato culturale più profondo alla proposta.

[44] Israel, 2009

La lettura dei testi originali contrapposta alla parafrasi ci sembra, però, auspicabile, dal momento che vogliamo ricostruire passo passo il ragionamento di Galileo: la stessa costruzione della frase, le parole che sceglie, l'uso della sintassi sono caratteristiche importanti che non possono essere trascurate, proprio perché trasmettono il messaggio di Galileo stesso. Un approccio interdisciplinare è spesso invocato in questi ultimi tempi. Troppo spesso si ritiene, però, che automaticamente possa dare un valore aggiunto. A nostro giudizio, nel nostro percorso, questo valore aggiunto può essere non tanto quello di aiutare a decifrare i testi, ma più quello di recuperare quella parte di ricostruzione storica e soprattutto filosofica dell'ambiente del seicento, riferita alla figura di Aristotele e al pensiero filosofico della scolastica, che abbiamo scelto di non introdurre. È importante anche per evitare il rischio di rimanere intrappolati in stereotipi quali quelli espressi da questa studentessa universitaria: *"Ponendo i due personaggi in antagonismo si può mettere in evidenza come senza lo strumento matematico, senza una formula, senza una schematizzazione astratta della realtà, si arriva a dire delle cose non solo erronee ma anche inutili, perché è inutile concludere che il fuoco va verso l'alto, sono conclusioni che non ci permettono di prevedere la realtà. Il vantaggio della formulazione matematica è proprio quello di prevedere la realtà."* La possibilità di una collaborazione con il professore di filosofia e storia dovrebbe permettere una ricostruzione attenta e rigorosa dell'ambiente culturale dell'epoca e favorire una maggiore consapevolezza delle caratteristiche di un modo di pensare che da Aristotele a Copernico ha attraversato i secoli ed ha influenzato il nostro pensiero e la cultura occidentale in generale.

Ci sembra che, a volte, pur partendo da considerazioni teoriche giuste, alcuni studenti siano rimasti legati a stereotipi: per esempio, la posizione che sostiene che l'utilizzo della storia può rendere più umana la matematica. Come abbiamo già detto nel primo capitolo, la conoscenza dei punti critici dell'evoluzione di un concetto matematico è importante per un insegnante. Tuttavia non si dovrebbe considerare immediata, per gli studenti, l'utilità di un percorso storico che analizzando i punti critici, legati ad un concetto, mostri le tappe con cui quel concetto è stato costruito. Non è detto che questo approccio riesca a rendere automaticamente tutto più chiaro. Ci chiediamo se un approccio storico che ricostruisca la vita di Galileo, puntando su aspetti sociali o politici, possa veramente essere utile per rendere più umana la matematica, o una formula. A nostro giudizio, l'umanità di Galileo emerge piuttosto dalla ricostruzione del suo percorso cognitivo e intellettuale. Non è un 'umanizzare la formula' ma il riconoscere che la formula rappresenta per Galileo (o per chi va con lui) il traguardo di un percorso intellettuale e quindi umano. "*Piena di maraviglia e di diletto insieme è la forza delle* *dimostrazioni necessarie, quali sono le sole matematiche"* dice Galileo. La 'maraviglia' di Galileo è la meraviglia dell'uomo che accetta la sfida della conoscenza e arriva ad un traguardo ed è la stessa meraviglia di chi decide di lasciarsi accompagnare dalla guida di Galileo per riconoscere nel suo traguardo, anche il proprio. Questo, secondo noi, è il modo per renderlo più umano e creare quel ponte emotivo citato da un gruppo di studenti universitari. *"L'idea è quella di realizzare una specie di ponte emotivo con queste figure storiche."*

Possiamo notare che gli studenti di matematica sono stati piuttosto timidi nel parlare del rapporto tra matematica e fisica. Probabilmente, la confidenza dei fisici nel trattare la matematica è maggiore della 'sicurezza' dei matematici nell'affrontare i problemi di fisica. In generale, i commenti sul rapporto tra matematica e fisica ci sono sembrati piuttosto confusi, come se gli studenti universitari non si fossero ancora posti il problema. Il punto dei prerequisiti ci sembra un aspetto importante: "*Secondo noi, non dovrebbe essere ostacolata dal fatto che certi concetti non sono ancora stati fatti in matematica e quindi non si usano neanche in fisica, per esempio il limite."* Ci sembra che la questione stia nel significato diverso che assume la rappresentazione formale in fisica e in matematica, e in questo ci sembra di vedere, in qualche modo, il dibattito tra Boncinelli e Bottazzini in 'La serva padrona'. Anche dal punto di vista didattico, il problema è aperto. Cosa è necessario che venga prima? Il fatto di introdurre in maniera intuitiva in fisica certi concetti matematici può essere utile a vedere la struttura sottostante, ma, quando poi si passa al formalismo matematico, si rischia di far sembrare tale passaggio un inutile esercizio di rigore. Si ha una visione strumentale della matematica. D'altra parte, introdurre il formalismo matematico e poi quello fisico, non è possibile a meno di non rinunciare alla comprensione delle relazioni tra grandezze fisiche. Ci possiamo rifare alla teoria di Skemp[45] sulle diverse visioni della matematica. Secondo Skemp, si può concepire la matematica come un insieme di formule da memorizzare e da applicare, senza necessariamente apprezzare la ragione per cui un procedimento funziona (visione strumentale), oppure si può riconoscere che la matematica è caratterizzata da relazioni e l'applicazione di formule prevede la comprensione del perché tali regole funzionino (visione relazionale). Skemp si schiera apertamente per una matematica relazionale, anche se in un approccio strumentale è più facile ottenere risultati nel breve periodo, mentre con un approccio relazionale è più

[45] Skemp R.R.: 1976, Relational understanding and instrumental understanding, Mathematics teaching, 77, 20-26.

difficile la gestione in tempi brevi. Solitamente, un approccio relazionale garantisce risultati più duraturi nel tempo, perché è minore il ruolo della memoria.

Un altro spunto interessante viene dall'osservazione che la storia dei concetti richieda di portare via tempo alla fisica moderna. Essa ci permette di sottolineare che, dal punto di vista didattico, non sono tanto importanti gli effettivi risultati della ricerca di Galileo, quanto invece la sua concezione del mondo, il suo modo di ragionare e di usare la matematica e la sua convinzione della necessità di usare controlli sperimentali. *"Occorre compiere il singolare passo di interporre fra la descrizione scientifica e la natura un diaframma intellettuale, quello del modello matematico. Un passo, però, che è alla base dei successi della scienza moderna, perché quel diaframma intellettuale è anche una lente che consente di scrutare a fondo nei fenomeni."*[46] Ci sembra che un percorso, come quello da noi progettato, contribuisca a gettare le fondamenta su cui costruire la struttura della fisica del XX secolo, perché dà la possibilità di approfondire le ragioni filosofiche che hanno portato a quella rivoluzione e di maturare, fin da subito, la consapevolezza che la fisica non è una verità calata dall'alto, ma una conoscenza in continua evoluzione. In questo modo, i discenti saranno pronti a comprendere anche i cambiamenti della fisica contemporanea. Riprendendo le parole di un gruppo dei nostri studenti universitari, si potrebbe dire: *"Far entrare già da subito lo studente nell'ottica del capire il problema, la dimensione problematica che ha portato lo scienziato a studiare questo fenomeno, è comunque un approccio che può far entrare fin da subito lo studente nella mentalità corretta di studio e di approccio alla materia*". Avvicinandosi alla fisica contemporanea cambia effettivamente il ruolo della matematica? E se invece il ruolo rimanesse lo stesso ma ci fosse la necessità di una strumentazione più vasta, più complicata e più ampia? Come afferma Israel, nella fisica classica "*il modello matematico è un'astrazione ricavata dall'esperienza con procedure ben definite ed espressa nel linguaggio matematico. Per esempio il piano inclinato è un modello matematico perché è identificabile con un piano geometrico. Prima viene l'analisi empirica, il processo di astrazione guidato, quindi la matematica. I modelli matematici del periodo posteriore alla fisica classica hanno bisogno di una dose molto minore di basi empiriche e soprattutto non sono legati a uno specifico contenuto empirico. Sono schemi vuoti applicabili a situazioni di volta in volta diverse. Si individua un'analogia matematica che permette ad un'equazione di essere lo schema unificante per descrivere una molteplicità impressionante di fenomeni diversissimi tra di loro, unificati da un solo elemento che è*

[46] Israel, 2009

per l’appunto la descrizione matematica.” Il nostro percorso potrebbe essere un punto di partenza per interpretare in questo senso l’intreccio tra matematica e fisica.

Appendice A

1. La voce di Aristotele

Come si muovono i corpi vicino alla terra?

Si definisca, così come appare a tutti, "pesante in assoluto" ciò che sta al di sotto di tutti gli altri corpi, "leggero in assoluto" ciò che sta al di sopra di tutti [...]Così vediamo che qualsiasi quantità di fuoco si prenda, questa si muove verso l'alto, se non v'è qualcos'altro che glielo impedisca, e qualsiasi quantità di terra verso il basso, e nello stesso modo, e anzi più rapidamente, se si tratta di quantità maggiori. In altro senso invece dico pesante e leggero, riferendomi ai corpi che posseggono entrambe le qualità [...] come fanno l'aria e l'acqua. Né l'uno né l'altro infatti di questi due è leggero o pesante in assoluto, perché entrambi sono più leggeri della terra - infatti qualsiasi parte di essi rimane al di sopra di questa - ma sono più pesanti del fuoco - qualsiasi loro parte infatti rimane sotto a questo. E' invece solo nel rapporto tra loro stessi che l'acqua e l'aria sono l'uno pesante e l'altro leggero: l'aria infatti, per grande che ne sia la quantità, sta sempre al di sopra dell'acqua, e l'acqua, quanta che sia, rimane sempre sotto all'aria. Siccome poi anche tra gli altri corpi alcuni hanno peso, altri leggerezza è chiaro che anche per tutti questi la causa va ricercata nella differenza che c'è nei corpi semplici che li compongono: a seconda infatti che si trovano a contenere maggiore o minor parte di questo o di quel corpo semplice, si ha che alcuni corpi sono leggeri, altri pesanti Accade peraltro che non dovunque i medesimi corpi paiano essere pesanti, o leggeri, e questo avviene per effetto della differenza dei corpi primi in essi presenti: ad esempio,nell'aria un talento di legno sarà più pesante di una mina di piombo, nell'acqua invece sarà più leggero. La causa di tutto ciò è che tutti i corpi hanno peso, eccetto il fuoco, e tutti leggerezza, eccetto la terra. La terra dunque, e i corpi che contengono maggior quantità di terra, hanno necessariamente peso dovunque, l'acqua dovunque tranne che nella terra, l'aria tranne che nell'acqua e nella terra [...]. Anche l'aria ha peso:ne è segno il fatto che un otre gonfio pesa più di un otre vuoto. Per modo che se un corpo contiene più aria che terra, o che acqua, potrà essere nell'acqua più leggero di un altro, nell'aria invece più pesante; non galleggia infatti sull'aria, ma galleggia sull'acqua….

“De coelo”, libro IV, cap. 4

Può esistere il movimento senza una causa?
(se allontanato a forza) ciascun corpo si muove verso il proprio luogo [...] e (se non allontanata a forza)ciascuna cosa rimane nel suo proprio luogo [...]. Il fuoco è portato per natura secondo uno spostamento che tende all'alto, la terra secondo quello che tende al basso; ed ecco che anche i loro spostamenti sono contrari. Il fuoco è portato in alto per natura, in basso contro natura [...]. Per la terra la quiete in alto si genera contro natura, mentre il movimento in basso è conforme a natura [...]

Cosa rende possibile il movimento dei corpi nell'aria?
… La forza si avvale dell'aria come di organo per trasmettere il moto. L'aria infatti ha per natura proprietà d'essere sia leggera che pesante; perciò, quando venga spinta e riceva il principio del moto dalla forza, effettuerà (secondo la spinta ricevuta) il movimento verso l'alto in quanto è leggera, o verso il basso viceversa in quanto è pesante. La forza in entrambi i casi comunica il moto al corpo quasi imprimendolo attraverso il contatto dell'aria. Perciò anche quando ciò che ha impresso il moto non lo accompagna più, il corpo mosso per costrizione continua il suo movimento. E se non ci fosse un corpo dotato di questa proprietà, non vi sarebbe movimento per costrizione. E anche il movimento secondo natura di ciascun corpo viene assecondato in questo stesso modo….

"De coelo", libro III, cap 2

Come il peso dei corpi influenza la loro velocità di caduta?
Noi vediamo che ogni corpo naturale ha in sé un principio di movimento; se pertanto tutti i corpi si riducono ad un unico elemento, ne viene che per tutti dovrebbe esservi un movimento unico. Ed è necessario che quanto più aumenta il loro numero, tanto più si muovono, come anche il fuoco, quanto più aumenta tanto più rapidamente si porta verso l'alto secondo il moto che ad esso è proprio. E accade che anche verso il basso quantità rilevanti si muovano più velocemente…

"De coelo", libro III, cap 2

2. La voce di Galileo

Salv. : Ma, senz'altre esperienze, con breve e concludente dimostrazione possiamo chiaramente provare, non esser vero che un mobile più grave si muova più velocemente d'un altro men grave, intendendo di mobili dell'istessa materia, ed in somma di quelli de i quali parla Aristotele. Però ditemi, Sig. Simplicio, se voi ammettete che di ciascheduno corpo grave cadente sia una da natura determinata velocità, sì che accrescergliela o diminuirgliela non si possa se non con usargli violenza o opporgli qualche impedimento.

Simp. : Non si può dubitare che l'istesso mobile nell'istesso mezzo abbia una statuita e da natura determinata velocità, la quale non se gli possa accrescere se non con nuovo impeto conferitogli, o diminuirgliela salvo che con qualche impedimento che lo ritardi.

Salv. : Quando dunque noi avessimo due mobili, le naturali velocità de i quali fussero ineguali, è manifesto che se noi congiugnessimo il più tardo col più veloce, questo dal più tardo sarebbe in parte ritardato, ed il tardo in parte velocitato dall'altro più veloce. Non concorrete voi meco in quest'opinione?

Simp. : Parmi che così debba indubitabilmente seguire.

Salv. : Ma se questo è, ed è insieme vero che una pietra grande si muova, per esempio, con otto gradi di velocità, ed una minore con quattro, adunque, congiugnendole amendue insieme, il composto di loro si moverà con velocità minore di otto gradi: ma le due pietre, congiunte insieme, fanno una pietra maggiore che quella prima, che si moveva con otto gradi di velocità: adunque questa maggiore si muove men velocemente che la minore; che è contro alla vostra supposizione. Vedete dunque come dal suppor che 'l mobile più grave si muova più velocemente del men grave, io vi concludo, il più grave muoversi men velocemente.

Simp. : Io mi trovo avviluppato, perché mi par pure che la pietra minore aggiunta alla maggiore le aggiunga peso, e aggiugnendole peso, non so come non debba aggiugnerle velocità, o almeno non diminuirgliela.

Salv. : Qui commettete un altro errore, Sig. Simplicio, perché non è vero che quella minor pietra accresca peso alla maggiore.

Simp. : Oh, questo passa bene ogni mio concetto.

(…)

Simp. : Il vostro discorso procede benissimo veramente: tuttavia mi par duro a credere che una lagrima di piombo si abbia a muover così veloce come una palla d'artiglieria.

Salv. : Voi dovevi dire, un grano di rena come una macina da guado. Io non vorrei, Sig. Simplicio, che voi faceste come molt'altri fanno, che, divertendo il discorso dal principale intento, vi attaccaste a un mio detto che mancasse dal vero quant'è un capello, e che sotto questo capello voleste nasconder un difetto d'un altro, grande quant'una gomona da nave. Aristotele dice: “una palla di ferro di cento libbre, cadendo dall'altezza di cento braccia, arriva in terra prima che una di una libbra sia scesa un sol braccio”; io dico ch'ell'arrivano nell'istesso tempo; voi trovate, nel farne l'esperienza, che la maggiore anticipa due dita la minore, cioè che quando la grande percuote in terra, l'altra ne è lontana due dita: ora vorreste dopo queste due dita appiattare le novantanove braccia di Aristotele, e parlando solo del mio minimo errore, metter sotto silenzio l'altro massimo. Aristotele pronunzia che mobili di diversa gravità nel medesimo mezzo si muovono (per quanto depende dalla gravità) con velocità di proporzionate a i pesi loro, e l'esemplifica con mobili ne i quali si possa scorgere il puro ed assoluto effetto del peso, lasciando l'altre considerazioni sì delle figure come de i minimi momenti, le quali cose grande alterazione ricevono dal mezzo, che altera il semplice effetto della sola gravità: che perciò si vede l'oro, gravissimo sopra tutte l'altre materie, ridotto in una sottilissima foglia andar vagando per aria; l'istesso fanno i sassi pestati in sottilissima polvere. Ma se voi volete mantenere la proposizione universale, bisogna che voi mostriate, la proporzione delle velocità osservarsi in tutti i gravi, e che un sasso di venti libbre si muova dieci volte più veloce che uno di due; il che vi dico esser falso, e che, cadendo dall'altezza di cinquanta o cento braccia, arrivano in terra nell'istesso momento.

3. La definizione di accelerazione

E in primo luogo conviene investigare e spiegare la definizione che corrisponde esattamente al moto accelerato di cui si serve la natura. […] Questa coincidenza crediamo di averla raggiunta finalmente, dopo lunghe riflessioni; soprattutto per il fatto che le proprietà, da noi successivamente dimostrate [*dalla nostra definizione*], sembrano esattamente corrispondere e coincidere con ciò che gli esperimenti naturali presentano ai sensi. Infine a studiare il moto naturalmente accelerato siamo stati condotti quasi per mano dall'osservazione della consuetudine e della regola seguite dalla natura medesima in tutte le altre sue opere, nella cui attuazione suole far uso dei mezzi più immediati, più semplici, più facili. […] Quando, dunque, osservo che una pietra, che discende dall'alto a partire dalla quiete, acquista via via nuovi incrementi di velocità, perché non dovrei credere che tali aumenti avvengano secondo la più semplice e più ovvia proporzione? Ora, se consideriamo attentamente la cosa, non troveremo nessun aumento o incremento più semplice di quello che aumenta sempre nel medesimo modo. Il che facilmente intenderemo considerando la stretta connessione tra tempo e moto: come infatti la equabilità e uniformità del moto si definisce e si concepisce sulla base della eguaglianza dei tempi e degli spazi (infatti chiamiamo equabile il moto, allorché in tempi eguali vengono percorsi spazi eguali), così, mediante una medesima suddivisione uniforme del tempo, possiamo concepire che gli incrementi di velocità avvengano con [altrettanta] semplicità; [lo possiamo] in quanto stabiliamo in astratto che risulti uniformemente e, nel medesimo modo, continuamente accelerato, quel moto che in tempi eguali, comunque presi, acquista eguali aumenti di velocità.[…] E così ci sembra di non discordare affatto dalla retta ragione se ammettiamo che l'intensità della velocità cresca secondo l'estensione del tempo [*la velocità sia proporzionale al tempo*]. Possiamo quindi ammettere la seguente definizione del moto di cui tratteremo: Moto equabilmente, ossia uniformemente accelerato, dico quello che, a partire dalla quiete, in tempi eguali acquista eguali momenti di velocità.

Appendice B: Protocollo di costruzione di ‘Moto parabolico’ in Geogebra

N.	Nome	Definizione	Valore
1	Numero t		t=0
2	Numero g		g=9.8
3	Numero alpha		alpha=0
4	Numero alpha1	3.14alpha/180	alpha1=0
5	Numero v0		v0=1.1
6	Numero $v0_x$	v0 cos(alpha1)	$v0_x$=1.1
7	Numero $v0_y$	v0 sen(alpha1)	$v0_y$=0
8	Numero h		h=0.8
9	Numero s_x	$v0_x\, t$	s_x=0
10	Numero s_y	$h+v0_y\, t-0.5g\, t^2$	s_y=0.8
11	Numero v2	$v0_y$ - g t	v2=0
12	Numero v1	$v0_x$	v1=1.1
13	Punto B	($v0_x$, $v0_y$ + h)	B = (1.1,0.8)
14	Punto P	(s_x, s_y)	P = (0,0.8)
15	Punto A	(0,h)	A = (0,0.8)
16	Vettore v_0	Vettore[A,B]	v_0 = (1.1,0)
17	Vettore v	(v1,v2)	v =(1.1,0)
18	Luogo luogo1	Luogo[P,t]	luogo1 = Luogo[P, t]
19	Vettore v_x	(v1, 0)	v_x = (1.1,0)
20	Vettore v_y	(0, v2)	v_y = (0,0)
21	Punto C	($v0_x$, h)	C = (1.1,0.8)
22	Numero c	2h / g	c = 0.16
23	Numero b	$v0_y$ / g	b = 0
24	Numero t_G	b + sqrt(b^2 + c)	t_G = 0.4
25	Numero x_G	$v0_x\, t_G$	x_G = 0.44
26	Numero t_M	$v0_y$ / g	t_M = 0
27	Numero Y_M	h + $v0_y^2$ / (2g)	Y_M= 0.8
28	Testo testo1	“La massima gittata è x_G=”+x_G+”; Il tempo di caduta è t_G=”+t_G+”;	“La massima gittata è x_G=0.44;

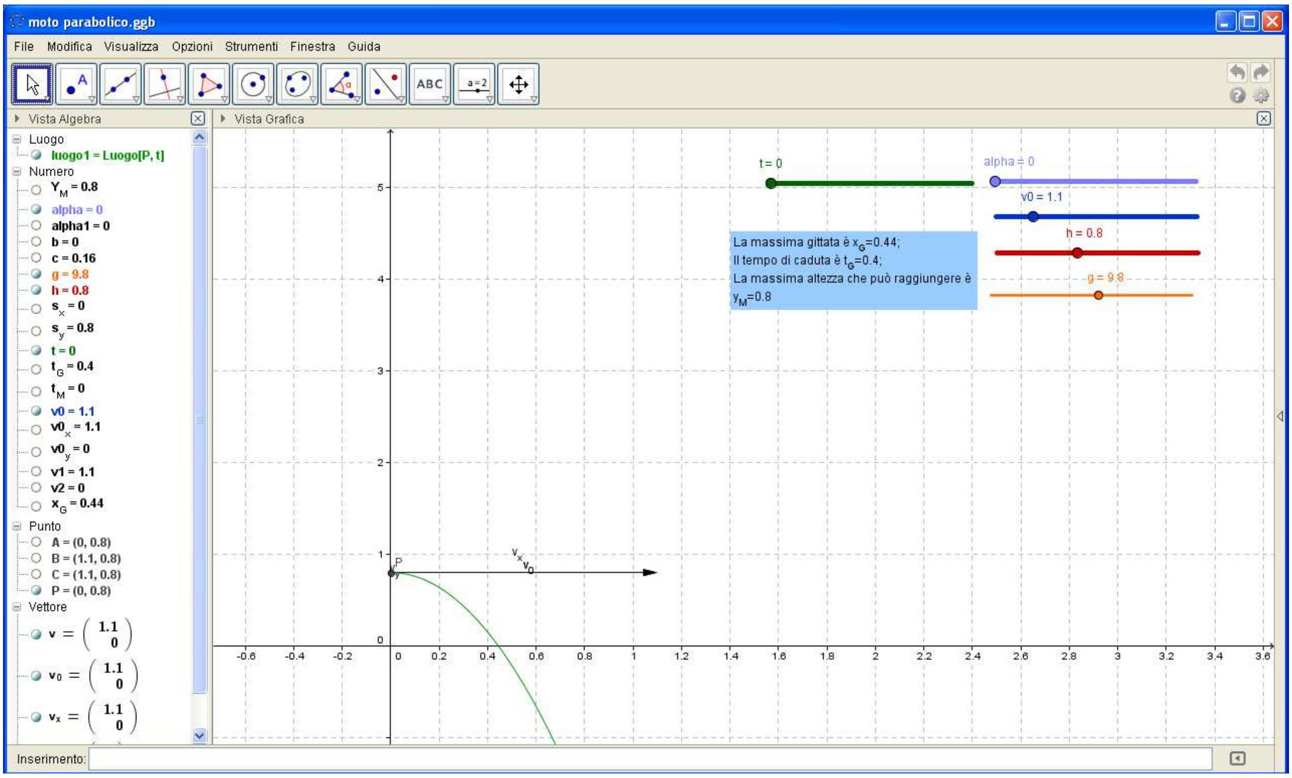
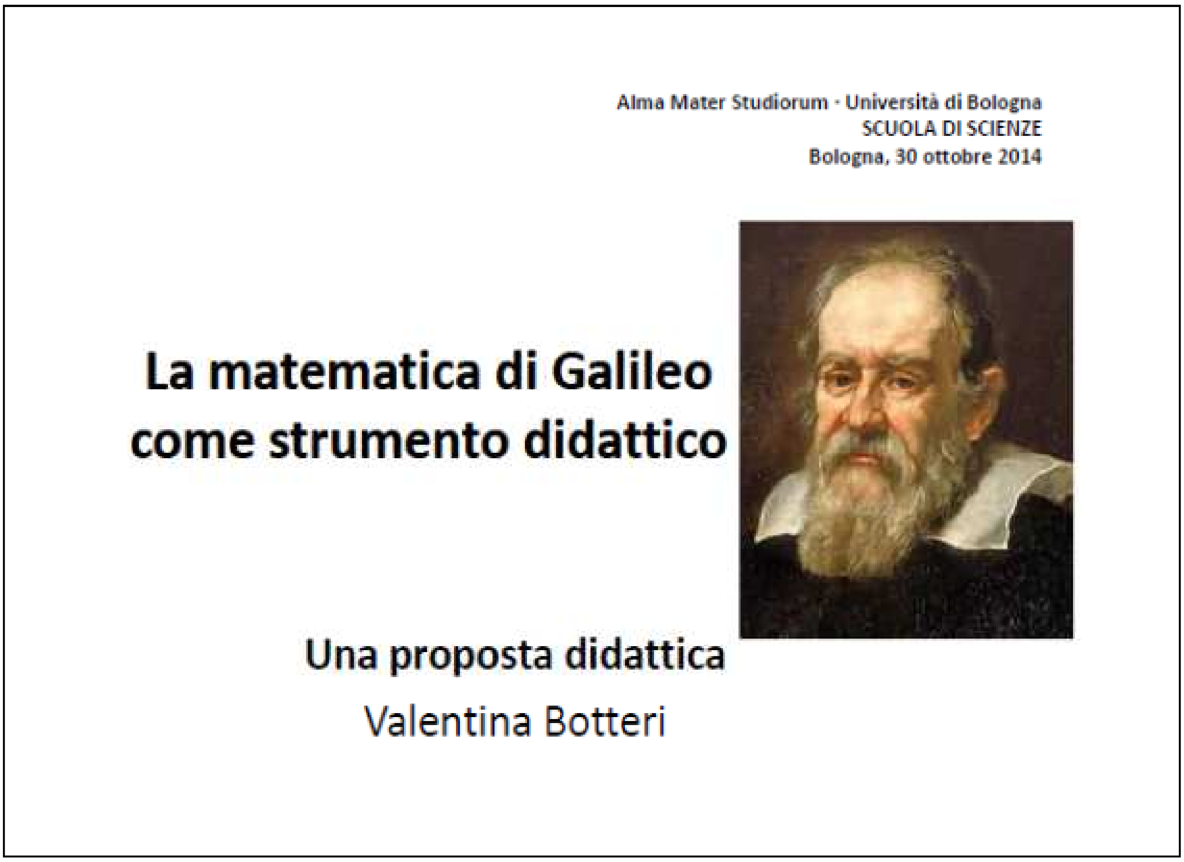


Figura C: La finestra grafica e quella algebrica del ‘moto parabolico’

Appendice C: La presentazione agli insegnanti in formazione



Introduzione

1) A chi è rivolto
2) Filo logico
3) Obiettivi generali
4) Obiettivi specifici
5) Metodologia didattica
6) Materiali e strumenti
7) Bibliografia di riferimento

A chi è rivolto

La proposta è intesa per la fascia scolare 15 – 16 anni. È opportuno che le attività previste siano svolte quando gli studenti hanno già le seguenti conoscenze:
- conoscenza delle grandezze fondamentali e delle leggi della cinematica,
- capacità di lettura e d'interpretazione di grafici,
- grandezze vettoriali
- conoscenza del concetto di proporzionalità diretta fra due variabili.

Filo logico

- Partire da un fenomeno reale e cercare una giustificazione
- Introdurre la spiegazione di Galileo come ipotesi (antiintuitiva) da controllare
- Ripercorrere la strada di Galileo nello studio del moto (moto uniforme, caduta dei gravi)
- Mettere alla prova l'ipotesi di Galileo
    1. Moto di caduta da diversi sistemi di riferimento (filmato)
    2. Previsioni del moto di un proiettile con Geogebra (nota v_i e la posizione iniziale)
    3. Analisi del filmato dell'esperimento con LoggerPro)
- Riesame del fenomeno iniziale

Obiettivi generali

- Imparare a gestire un modello matematico per rappresentare un fenomeno reale
- Imparare ad utilizzare gli strumenti di misura in modo critico
- Imparare ad argomentare, a formulare ipotesi ed esperimenti mentali
- Usare simboli e operazioni legate alla proporzionalità diretta.
- Riflettere dal punto di vista metacognitivo 'sul senso di fare matematica'
- Acquisire un'immagine realistica della scienza e della sua evoluzione storica

Obiettivi specifici

- Approfondire la relazione tra le grandezze cinematiche
- Esplorare le caratteristiche delle diverse 'formule' delle proporzioni e riflettere sulle relazioni tra di esse
- Conoscere gli elementi del pensiero di Galileo e le novità rispetto alle idee precedenti, in particolare, quelle di Aristotele

Metodologia didattica

Brain storming

Lavori di gruppo

Attività sperimentale

L'ascolto delle voci di personaggi storici

Materiali e strumenti utilizzati

Video, fotografie

Oggetti di uso comune

Geogebra

Esperimenti da PSSC

LoggerPro

Bibliografia per la didattica della fisica e della matematica in generale

- Arons, "Guida all'insegnamento della fisica" , Zanichelli (Bologna) 1992 ;
- Bruno D'Amore, "Elementi di Didattica della Matematica" Pitagora ed. 1999;
- *M.Giordano,"La descrizione del moto: progetto di tirocinio SISS"*
- Indicazioni Nazionali per il curriculum dei licei scientifici 2012;

Bibliografia di riferimento per l'approccio storico e su Galileo

- Rossi, "Il pensiero di Galileo: un'antologia di scritti", Loescher 1994;
- Giaquinta, "La forma delle cose: idee e metodi di matematica tra storia e filosofia", Edizioni di storia e letteratura 2011;
- "PCC:The Project Physics Course: Unità 1 IL MOTO", Zanichelli 1980;
- Igal Galili, "Excurse to the history of understanding of motion – De motu"in The Pleasure of understanding, Amos de-Shalit Science Teaching Center 2013;
- Galileo, "Discorsi e dimostrazioni matematiche", Einaudi, 1990. A cura di Enrico Giusti;
- Drake, "Galileo: una biografia scientifica", il Mulino, 1988.

Bibliografia di riferimento sulla proporzionalità diretta

- Guidoni P., Ripensando il pensiero proporzionale: schemi per la riflessione e per la progettazione didattica proposti nel corso di "Didattica della Matematica" della laurea in "Formazione Primaria", Materiali Progetto CNR-Villani www.didmat.dima.unige.it, 2003;
- Guidoni, "Movimento – spunti di riflessione" http://www.seminariodidama.unito.it/guidonic3.pdf;
- Giordano, E., Bonelli Majorino, P. (2009). Esempi di interferenze costruttive tra matematica e fisica per il successo formativo nella scuola di base: la proporzionalità. In O. Robutti, & M. Mosca (a cura di), Curriculum e successo formativo in matematica e fisica (pp. 304-317). Torino : Ambert. - http://boa.unimib.it/bitstream/10281/9781/3/Esempi_di_interferenze_costruttive.pdf

Filo logico

- Partire da un fenomeno reale e cercare una giustificazione
- Introdurre la spiegazione di Galileo come ipotesi (antiintuitiva) da controllare
- Ripercorrere la strada di Galileo nello studio del moto (moto uniforme, caduta dei gravi)
- Mettere alla prova l'ipotesi di Galileo
    1. Moto di caduta da diversi sistemi di riferimento (filmato)
    2. Previsioni del moto di un proiettile con Geogebra (nota v_i e la posizione iniziale)
    3. Analisi del filmato dell'esperimento con LoggerPro)
- Riesame del fenomeno iniziale

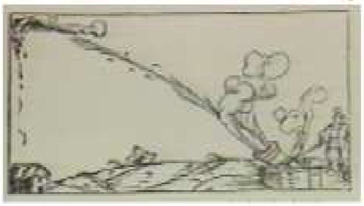
Partire da un fenomeno reale e cercare una giustificazione

Filo logico

- Partire da un fenomeno reale e cercare una giustificazione
- Introdurre la spiegazione di Galileo come ipotesi (antiintuitiva) da controllare
- Ripercorrere la strada di Galileo nello studio del moto (moto uniforme, caduta dei gravi)
- Mettere alla prova l'ipotesi di Galileo
  1. Moto di caduta da diversi sistemi di riferimento (filmato)
  2. Previsioni del moto di un proiettile con Geogebra (nota v_i e la posizione iniziale)
  3. Analisi del filmato dell'esperimento con LoggerPro)
- Riesame del fenomeno iniziale

Introdurre la spiegazione di Galileo come ipotesi (anti intuitiva) da controllare

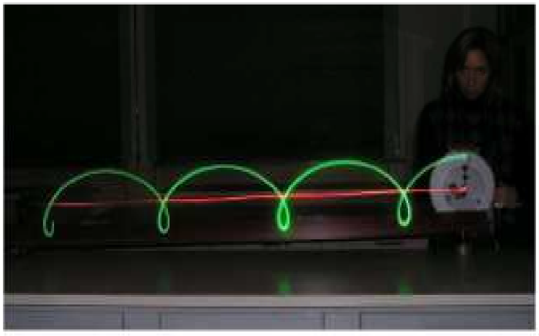
"Le proprietà che si presentano nel moto equabile, come pure nel moto naturalmente accelerato su piani di qualsiasi inclinazione, le abbiamo considerate sopra. ***Nella trattazione, che ora comincio, cercherò di presentare, e di stabilire sulla base di salde dimostrazioni, alcuni fenomeni notevoli e degni di essere conosciuti, che sono propri di un mobile, mentre si muove con moto composto di un duplice movimento, cioè di un movimento equabile e di uno naturalmente accelerato****: tale appunto sembra essere quello che chiamiamo moto dei proietti; la generazione del quale così stabilisco . [...]* ***Piena di maraviglia e di diletto insieme è la forza delle dimostrazioni necessarie, quali sono le sole matematiche. Già sapevo io, per fede prestata alle relazioni di più bombardieri, che di tutti i tiri di volata dell'artiglieria, o del mortaro, il massimo, cioè quello che in maggior lontananza caccia la palla, era il fatto all'elevazione di mezo angolo retto, che essi dicono del sesto punto della squadra; ma l'intender la cagione onde ciò avvenga, supera d'infinito intervallo la semplice notizia auta dalle altrui attestazioni, ed anco da molte replicate esperienze."***



Discorsi e dimostrazioni matematiche su due nuove scienze – Quarta giornata

Si potrebbe anche...

- Invogliare gli studenti a trovare loro altre curve che sono composizione di moti, magari con l'aiuto di Geogebra (rette, circonferenze, cicloidi....)



Filo logico

- Partire da un fenomeno reale e cercare una giustificazione
- Introdurre la spiegazione di Galileo come ipotesi (antiintuitiva) da controllare
- Ripercorrere la strada di Galileo nello studio del moto (moto uniforme, caduta dei gravi)
- Mettere alla prova l'ipotesi di Galileo
  1. Moto di caduta da diversi sistemi di riferimento (filmato)
  2. Previsioni del moto di un proiettile con Geogebra (nota v_i e la posizione iniziale)
  3. Analisi del filmato dell'esperimento con LoggerPro)
- Riesame del fenomeno iniziale

Ripercorrere la strada di Galileo nello studio del moto (moto uniforme, caduta dei gravi)

"Diamo avvio a una **nuovissima scienza** intorno a un **soggetto antichissimo**. Nulla v'è, forse, in natura, di più antico del moto, e su di esso ci sono non pochi volumi, né di piccola mole, scritti dai filosofi; tuttavia tra le sue proprietà ne trova molte che, pur degne di essere conosciute, **non sono mai state finora osservate, nonché dimostrate**. Se ne rilevano alcune più immediate, come quella, ad esempio, che il moto naturale dei gravi discendenti accelera continuamente; però, secondo quale proporzione tale accelerazione avvenga, non è stato sin qui mostrato: nessuno, che io sappia, infatti, ha dimostrato che un mobile discendente a partire dalla quiete percorre, in tempi eguali, spazi che ritengono tra di loro la medesima proporzione che hanno i numeri impari successivi *ab unitate. È stato osservato che i corpi lanciati, ovverossia i proietti, descrivono una linea* curva di un qualche tipo; però, che essa sia una parabola, nessuno l'ha mostrato. Che sia così, lo dimostrerò insieme ad altre non poche cose, né meno degne di essere conosciute, e, ciò che ritengo ancor più importante, **si apriranno le porte a una vastissima e importantissima scienza, della quale queste nostre ricerche costituiranno gli elementi; altri ingegni più acuti del mio ne penetreranno poi più ascosi recessi."**

Discorsi e dimostrazioni matematiche su due nuove scienze – Terza giornata

Il moto rettilineo uniforme

- Si riprende il concetto di moto rettilineo uniforme

"Tutte le volte che la distanza s percorsa è proporzionale al tempo impiegato a percorrerla si dice che il moto è uniforme."

Amaldi, "Dal pendolo al quark"

- Discussione sulla pallina o una macchinina sul piano orizzontale

- Si commenta la definizione di Galileo

"Moto eguale o uniforme intendo quello in cui gli spazi percorsi da un mobile in tempi eguali, **comunque presi**, risultano tra di loro eguali.

L’AVVERTENZA di Galileo

Ci è parso opportuno aggiungere alla vecchia definizione (che semplicemente parla di moto equabile, allorché in tempi eguali vengono percorsi spazi eguali) l'espressione *comunque presi, cioè per tutti i tempi* che siano eguali: infatti, può accadere che in determinati tempi eguali un mobile percorra spazi eguali, mentre spazi, percorsi in **frazioni di tempo minori**, sebbene eguali, non siano eguali.”

Il moto rettilineo uniforme

Si analizza come Galileo caratterizza il moto equabile

ASSIOMA 1

In uno stesso moto equabile, lo spazio percorso in un tempo più lungo è maggiore dello spazio percorso in un tempo più breve.

ASSIOMA 2

In uno stesso moto equabile, il tempo in cui è percorso uno spazio maggiore è più lungo del tempo impiegato a percorrere uno spazio minore.

ASSIOMA 3

Lo spazio, percorso in un dato tempo a velocità maggiore, è maggiore di quello percorso, nello stesso tempo, a velocità minore.

ASSIOMA 4

La velocità, con cui in un dato tempo viene percorso uno spazio maggiore, è maggiore di quella con cui, nello stesso tempo, viene percorso uno spazio minore.

TEOREMA 1. PROPOSIZIONE 1

Se un mobile, dotato di moto equabile, percorre due spazi con una stessa velocità, i tempi dei moti staranno tra di loro come gli spazi percorsi.

TEOREMA 2. PROPOSIZIONE 2

Se un mobile percorre due spazi in tempi eguali, quegli spazi staranno tra loro come le velocità. E se gli spazi stanno tra loro come le velocità, i tempi saranno eguali.

TEOREMA 3. PROPOSIZIONE 3

Se il medesimo spazio viene percorso con velocità diseguali, i tempi dei moti rispondono contrariamente [*sono inversamente proporzionali*] alle velocità.

TEOREMA 4. PROPOSIZIONE 4

Se due mobili si muovono di moto equabile, ma con diseguale velocità, gli spazi percorsi da essi in tempi diseguali avranno tra di loro una proporzione composta della proporzione tra le velocità e della proporzione tra i tempi.

TEOREMA 5. PROPOSIZIONE 5

Se due mobili si muovono di moto equabile, ma le loro velocità sono diseguali e diseguali gli spazi percorsi, la proporzione tra i tempi risulterà composta della proporzione tra gli spazi e della proporzione tra le velocità permutatamente prese [*proporzione inversa delle velocità*].

Spunti di riflessione

A scuola molto spesso si danno per scontate molte cose, mentre nel momento in cui qualcuno apprende è necessario esplorare tutti i casi possibili per essere sicuri di aver capito bene.

Il moto rettilineo uniforme

- Si confronta la definizione moderna con quella di Galileo

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{s_1}{s_2} \times \frac{t_2}{t_1}$$

- La matematica di Galileo è quella delle proporzioni

Il ruolo della matematica

"Parmi, oltre a ciò, di scorgere nel Sarsi ferma credenza, che nel filosofare sia necessario appoggiarsi all'opinioni di qualche celebre autore, sì che la mente nostra, quando non si maritasse col discorso d'un altro, ne dovesse in tutto rimanere sterile o infeconda; e forse stima che la filosofia sia un libro e la fantasia d'un uomo, come l'Iliade e l'Orlando Furioso, libri ne' quali la meno importante cosa è che quello che vi e` scritto sia vero. Signor Sarsi, la cosa non istà così. **La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali e` scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, e altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi e` un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.**"

Il Saggiatore

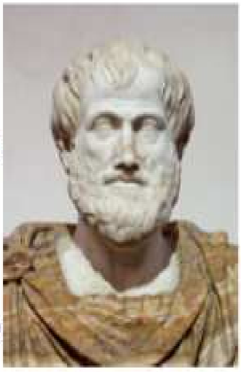
Il metodo di Galileo

Riflessione in cui si confrontano tra Aristotele e Galileo riguardo al metodo per fare indagini:

- La concezione delle regole del mondo
- L'esperimento mentale
- La visione delle sensate esperienze
- La considerazione di casi limite
- Il ruolo delle dimostrazioni necessarie

La caduta dei gravi

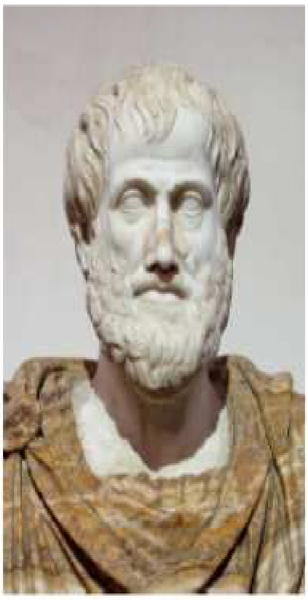
- Come cadono i corpi? Cadono tutti in modo uguale?
- La voce di Aristotele
  - Come si muovono i corpi vicino alla terra?
  - Può esistere il movimento senza una causa?
  - Come il peso dei corpi influenza la loro velocità di caduta?
  - Come si muovono i corpi celesti?
  - È possibile il movimento nel vuoto?
  - È possibile descrivere il movimento di un corpo terrestre con la matematica?
- Discussione di commento alla voce di Aristotele



Come si muovono i corpi vicino alla terra?

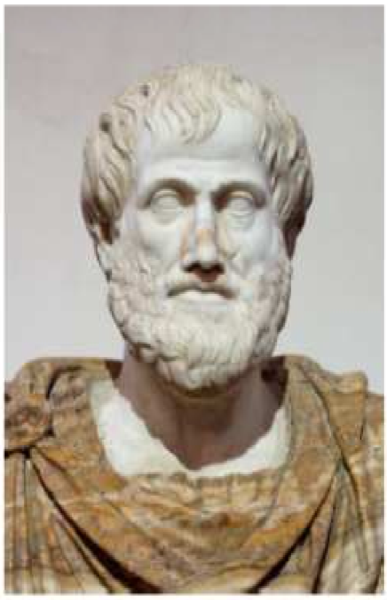
Si definisca, così come appare a tutti, "pesante in assoluto" ciò che sta al di sotto di tutti gli altri corpi, "leggero in assoluto" ciò che sta al di sopra di tutti[...]Così vediamo che qualsiasi quantità di fuoco si prenda, questa si muove verso l'alto, se non v'è qualcos'altro che glielo impedisca, e qualsiasi quantità di terra verso il basso, e nello stesso modo, e anzi più rapidamente, se si tratta di quantità maggiori.
In altro senso invece dico pesante e leggero, riferendomi ai corpi che posseggono entrambe le qualità[...] come fanno l'aria e l'acqua. Nè l'uno nè l'altro infatti di questi due è leggero o pesante in assoluto, perchè entrambi sono più leggeri della terra - infatti qualsiasi parte di essi rimane al di sopra di questa - ma sono più pesanti del fuoco - qualsiasi loro parte infatti rimane sotto a questo. E' invece solo nel rapporto tra loro stessi che l'acqua e l'aria sono l'uno pesante e l'altro leggero: l'aria infatti, per grande che ne sia la quantità, sta sempre al di sopra dell'acqua, e l'acqua, quanta che sia, rimane sempre sotto all'aria.
Siccome poi anche tra gli altri corpi alcuni hanno peso, altri leggerezza è chiaro che anche per tutti questi la causa va ricercata nella differenza che c'è nei corpi semplici che li compongono: a seconda infatti che si trovano a contenere maggiore o minor parte di questo o di quel corpo semplice, si ha che alcuni corpi sono leggeri, altri pesanti
Accade peraltro che non dovunque i medesimi corpi paiano essere pesanti, o leggeri, e questo avviene per effetto della differenza dei corpi primi in essi presenti: ad esempio, nell'aria un talento di legno sarà più pesante di una mina di piombo, nell'acqua invece sarà più leggero.
La causa di tutto ciò è che tutti i corpi hanno peso, eccetto il fuoco, e tutti leggerezza, eccetto la terra. La terra dunque, e i corpi che contengono maggior quantità di terra, hanno necessariamente peso dovunque, l'acqua dovunque tranne che nella terra, l'aria tranne che nell'acqua e nella terra[...]. Anche l'aria ha peso:ne è segno il fatto che un otre gonfio pesa più di un otre vuoto. Per modo che se un corpo contiene più aria che terra, o che acqua, potrà essere nell'acqua più leggero di un altro, nell'aria invece più pesante; non galleggia infatti sull'aria, ma galleggia sull'acqua....

"De coelo", libro IV, cap. 4



Può esistere il movimento senza una causa?

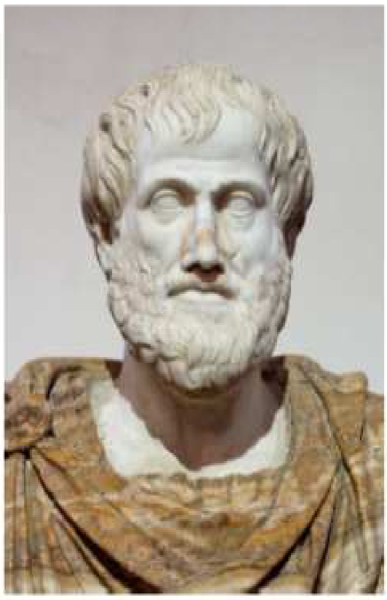
" (se allontanato a forza) *ciascun corpo si muove verso il proprio luogo[[...]].* *e* (se non allontanata a forza)*ciascuna cosa rimane nel suo proprio luogo[[...]].*
Il fuoco è portato per natura secondo uno spostamento che tende all'alto, la terra secondo quello che tende al basso; ed ecco che anche i loro spostamenti sono contrari. Il fuoco è portato in alto per natura, in basso contro natura[...]. Per la terra la quiete in alto si genera contro natura, mentre il movimento in basso è conforme a natura[...]..



Cosa rende possibile il movimento dei corpi nell'aria?

...La forza si avvale dell'aria come di organo per trasmettere il moto. L'aria infatti ha per natura proprietà d'essere sia leggera che pesante; perciò, quando venga spinta e riceva il principio del moto dalla forza, effettuerà (secondo la spinta ricevuta) il movimento verso l'alto in quanto è leggera, o verso il basso viceversa in quanto è pesante.
La forza in entrambi i casi comunica il moto al corpo quasi imprimendolo attraverso il contatto dell'aria. Perciò anche quando ciò che ha impresso il moto non lo accompagna più, il corpo mosso per costrizione continua il suo movimento. E se non ci fosse un corpo dotato di questa proprietà, non vi sarebbe movimento per costrizione. E anche il movimento secondo natura di ciascun corpo viene assecondato in questo stesso modo....

"De coelo", libro III, cap 2



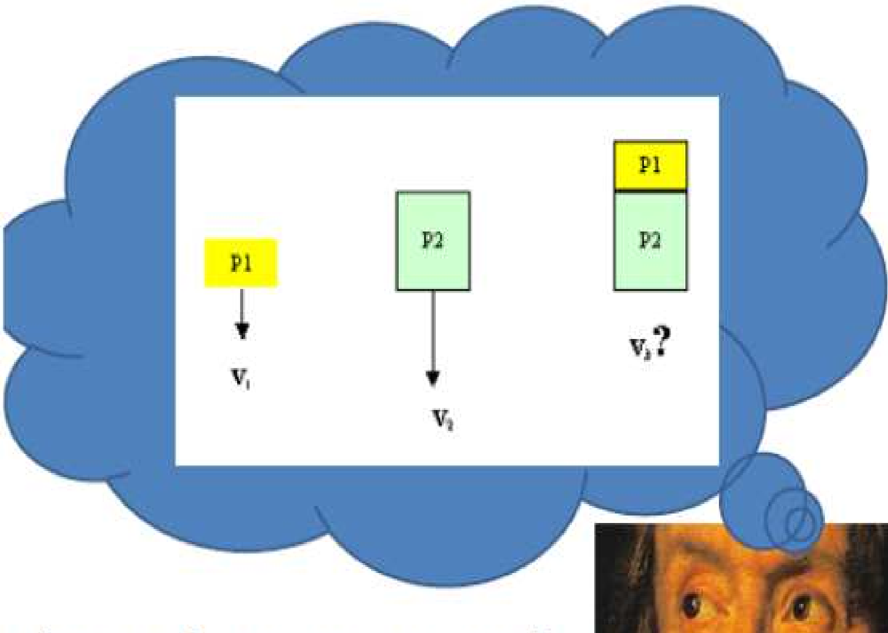
Come il peso dei corpi influenza la loro velocità di caduta?

Noi vediamo che ogni corpo naturale ha in sé un principio di movimento; se pertanto tutti i corpi si riducono ad un unico elemento, ne viene che per tutti dovrebbe esservi un movimento unico.
Ed è necessario che quanto più aumenta il loro numero, tanto più si muovono, come anche il fuoco, quanto più aumenta tanto più rapidamente si porta verso l'alto secondo il moto che ad esso è proprio. E accade che anche verso il basso quantità rilevanti si muovano più velocemente...

"De coelo", libro III, cap 2

Discussione di commento alla voce di Aristotele

- Quali sono le caratteristiche del moto di un corpo terrestre descritte da Aristotele? (il moto di un corpo dipende dalla sua composizione)
- Quali sono le differenze tra corpi celesti e corpi terrestri per Aristotele?
- Se tu fossi Aristotele, come spiegheresti, ad un tuo allievo, perché il fumo sale in alto?
- Come Aristotele argomenta le sue convinzioni?
- Siete d'accordo con Aristotele? Perché?
- Quali sono le esperienze/osservazioni che confermano o smentiscono le sue teorie?



L'esperimento mentale di Galileo

La resistenza dell'aria per Galileo

Simp. **: *Il vostro discorso procede benissimo veramente: tuttavia mi par duro a credere che una lagrima di piombo si abbia a muover così veloce come una palla d'artiglieria.***

Salv. : Voi dovevi dire, un grano di rena come una macina da guado. Io non vorrei, Sig. Simplicio, che voi faceste come molt'altri fanno, che, divertendo il discorso dal principale intento, vi attaccaste a un mio detto che mancasse dal vero quant'è un capello, e che sotto questo capello voleste nasconder un difetto d'un altro, grande quant'una gomona da nave. ***Aristotele dice: "una palla di ferro di cento libbre, cadendo dall'altezza di cento braccia, arriva in terra prima che una di una libbra sia scesa un sol braccio"; io dico ch'ell'arrivano nell'istesso tempo; voi trovate, nel farne l'esperienza, che la maggiore anticipa due dita la minore, cioè che quando la grande percuote in terra, l'altra ne è lontana due dita: ora vorreste dopo queste due dita appiattare le novantanove braccia di Aristotele, e parlando solo del mio minimo errore, metter sotto silenzio l'altro massimo.*** *Aristotele pronunzia che mobili di diversa gravità nel medesimo mezzo si muovono (per quanto depende dalla gravità) con velocita di proporzionate a i pesi loro, e l'esemplifica con mobili ne i quali si possa scorgere il puro ed assoluto effetto del peso, lasciando l'altre considerazioni sì delle figure come de i minimi momenti, le quali cose grande alterazione ricevono dal mezzo, che altera il semplice effetto della sola gravità: che perciò si vede l'oro, gravissimo sopra tutte l'altre materie, ridotto in una sottilissima foglia andar vagando per aria; l'istesso fanno i sassi pestati in sottilissima polvere.* ***Ma se voi volete mantenere la proposizione universale, bisogna che voi mostriate, la proporzione delle velocità osservarsi in tutti i gravi, e che un sasso di venti libbre si muova dieci volte più veloce che uno di due; il che vi dico esser falso, e che, cadendo dall'altezza di cinquanta o cento braccia, arrivano in terra nell'istesso momento.***"

Spunti di riflessione

Per lo sviluppo della scienza, imparare che cosa doveva essere trascurato è stato importante quasi quanto imparare che cosa doveva essere preso in considerazione. Quanto spesso a scuola si insegna a capire ciò che è importante e ciò che non lo è?

Discussione di commento alla voce di Galileo

- Se un chiodo e uno stuzzicadenti vengono lasciati cadere dalla stessa altezza, essi non toccano terra nello stesso istante. In che modo avrebbe spiegato questo un aristotelico? Qual era la spiegazione di Galileo?
- Analizza i brani letti in classe. Qual è la strategia con cui Galileo argomenta la sua confutazione ad Aristotele?
- Ci sono ed, eventualmente, quali sono, le differenze tra il metodo di Aristotele e quello di Galileo?
- Ti hanno convinto le parole di Galileo? Perché?

Le dimostrazioni necessarie

"Adunque, tuttavolta che in concreto voi applicate una sfera materiale a un piano materiale, voi applicate una sfera non perfetta a un piano non perfetto; e questi dite che non si toccano in un punto. Ma io vi dico che anco in astratto una sfera immateriale, che non sia sfera perfetta, può toccare un piano immateriale, che non sia piano perfetto, non in un punto, ma con parte della sua superficie; ***talché sin qui quello che accade in concreto, accade nell'istesso modo in astratto: e sarebbe ben nuova cosa che i computi e le ragioni fatte in numeri astratti, non rispondessero poi alle monete d'oro e d'argento e alle mercanzie in concreto.*** *Ma sapete, signor Simplicio, quel che accade? Sì come a voler che i calcoli tornino sopra i zuccheri, le sete e le lane, bisogna che il computista faccia le sue tare di casse, invoglie ed altre bagaglie, così,* ***quando il filosofo geometra vuol riconoscere in concreto gli effetti dimostrati in astratto, bisogna che difalchi gli impedimenti della materia; che se ciò saprà fare, io vi assicuro che le cose si riscontreranno non meno aggiustatamente che i computi aritmetici. Gli errori dunque non consistono né nell'astratto né nel concreto, né nella geometria o nella fisica, ma nel calcolatore, che non sa fare i conti giusti."***

Come Galileo studia la caduta

- Propone una definizione di accelerazione
- Enuncia l'ipotesi che nel moto di caduta la velocità sia proporzionale al tempo
- Ricava previsioni da un'ipotesi fatta in precedenza
- Progetta un esperimento in cui le grandezze siano misurabili
- Controlla sperimentalmente le sue previsioni

La definizione di accelerazione

"E in primo luogo conviene investigare e spiegare la definizione che corrisponde esattamente al moto accelerato di cui si serve la natura. [...] Questa coincidenza crediamo di averla raggiunta finalmente, dopo lunghe riflessioni; soprattutto per il fatto che le proprietà, da noi successivamente dimostrate [*dalla nostra definizione*], sembrano esattamente corrispondere e coincidere con ciò che gli esperimenti naturali presentano ai sensi. Infine a studiare il moto naturalmente accelerato siamo stati condotti quasi per mano dall'osservazione della consuetudine e della regola seguite dalla natura medesima in tutte le altre sue opere, nella cui attuazione suole far uso dei mezzi più immediati, più semplici, più facili. [...] **Quando, dunque, osservo che una pietra, che discende dall'alto a partire dalla quiete, acquista via via nuovi incrementi di velocità, perché non dovrei credere che tali aumenti avvengano secondo la più semplice e più ovvia proporzione?** Ora, se consideriamo attentamente la cosa, non troveremo nessun aumento o incremento più semplice di quello che aumenta sempre nel medesimo modo. Il che facilmente intenderemo considerando la stretta connessione tra tempo e moto: come infatti la equabilità e uniformità del moto si definisce e si concepisce sulla base della eguaglianza dei tempi e degli spazi (infatti chiamiamo equabile il moto, allorché in tempi eguali vengono percorsi spazi eguali), così, mediante una medesima suddivisione uniforme del tempo, possiamo concepire che gli incrementi di velocità avvengano con [altrettanta] semplicità; [lo possiamo] in quanto stabiliamo in astratto che risulti uniformemente e, nel medesimo modo, continuamente accelerato, quel moto che in tempi eguali, comunque presi, acquista eguali aumenti di velocità.[...] E così ci sembra di non discordare affatto dalla retta ragione se ammettiamo che l'intensità della velocità cresca secondo l'estensione del tempo [*la velocità sia proporzionale al tempo*]. Possiamo quindi ammettere la seguente definizione del moto di cui tratteremo: **Moto equabilmente, ossia uniformemente accelerato, dico quello che, a partire dalla quiete, in tempi eguali acquista eguali momenti di velocità."**

Spunti di riflessione

Galileo poteva definire l'accelerazione anche in un altro modo, ossia come rapporto tra incremento di velocità e spazio percorso. Anche nel linguaggio comune, affermare che un corpo sta accelerando può significare che la velocità cresce quando aumenta lo spazio percorso, tuttavia Galileo preferisce intuitivamente quella in cui la velocità cresce con lo scorrere del tempo, perché gli permette di arrivare con passaggi matematici ad una relazione che può verificare perché è più semplice e gli permette di arrivare con passaggi matematici ad una relazione che può verificare. La dipendenza della velocità da una radice quadrata dello spazio, probabilmente, portò Galileo ad abbandonare questa strada che portava a numeri irrazionali.

L'ipotesi matematica

Attraverso un ragionamento matematico Galileo giunge alla considerazione che

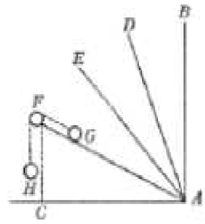
$$s \propto t^2$$

In termini moderni diremmo

$$\frac{s1}{t1^2} = \frac{s2}{t2^2} = \frac{s3}{t3^2}$$

Ricava previsioni da un'ipotesi fatta in precedenza

- Nel caso particolare in cui l'inclinazione è di 90°, la sfera scende lungo la verticale e la situazione così ottenuta coincide con quella di un oggetto in caduta libera



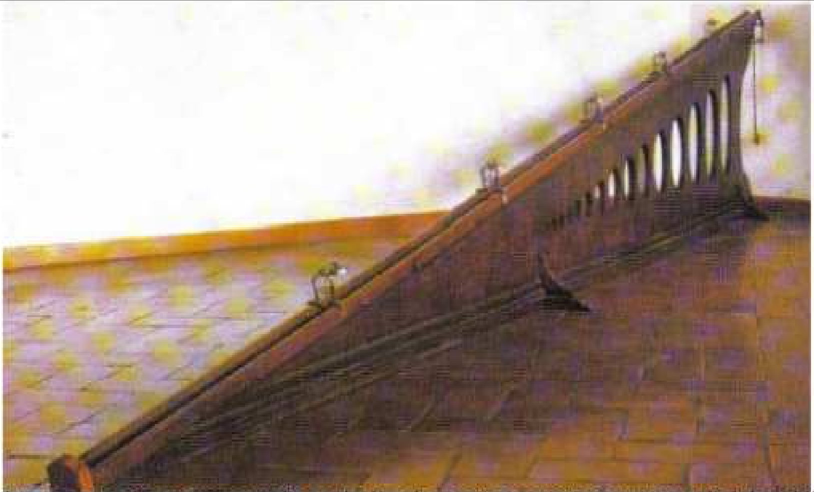
Ricava previsioni da un'ipotesi fatta in precedenza

Solo pochissime volte gli insegnanti elaborano situazioni in cui gli studenti siano portati ad analizzare dei casi limite allo scopo di trarne idee o conclusioni.

L'esperimento di Galileo

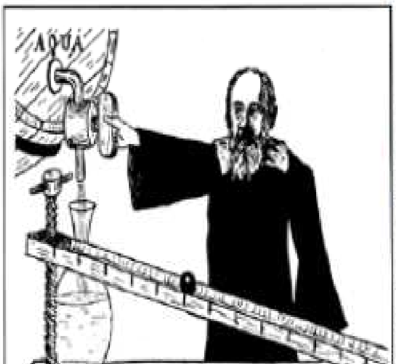
"In un regolo, o vogliàn dir corrente, di legno, lungo circa 12 braccia, e largo per un verso mezo bracio e per l'altro 3 dita, si era in questa minor larghezza incavato un canaletto, poco più largo d'un dito; tiratolo drittissimo, e, per averlo ben pulito e liscio, incollatovi dentro una carta pecora zannata e lustrata al possibile, si faceva in esso scendere una palla di bronzo durissimo, ben rotondata e pulita; costituito che si era il detto regolo pendente, elevando sopra il piano orizontale una delle sue estremità un braccio o due ad arbitrio, si lasciava (come dico) scendere per il detto canale la palla, notando, nel modo che appresso dirò, il tempo che consumava nello scorrerlo tutto, replicando il medesimo atto molte volte per assicurarsi bene della quantità del tempo, nel quale non si trovava mai differenza né anco della decima parte d'una battuta di polso. Fatta e stabilita precisamente tale operazione, facemmo scender la medesima palla solamente per la quarta parte della lunghezza di esso canale; e misurato il tempo della sua scesa, si trovava sempre puntualissimamente esser la metà dell'altro: e facendo poi l'esperienze di altre parti, esaminando ora il tempo di tutta la lunghezza col tempo della metà, o con quello delli duo terzi o de i 3/4, o in conclusione con qualunque altra divisione, per esperienze ben cento volte replicate sempre s'incontrava, gli spazii passati esser tra di loro come i quadrati e i tempi, e questo in tutte le inclinazioni del piano, cioè del canale nel quale si faceva scender la palla…"

Si potrebbe anche...



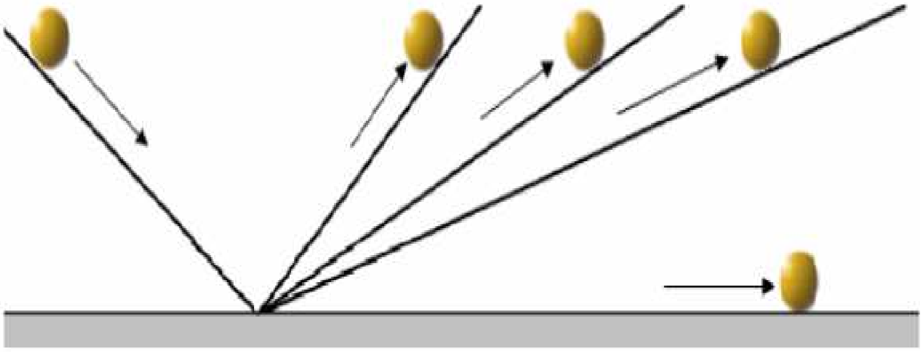
Vedesi dunque anco in questo semplice calcolo, gli spazii passati in tempi uguali dal mobile che, partendosi dalla quiete, va acquistando velocità conforme all'accrescimento del tempo, esser tra di loro come i numeri impari ab unitate1, 3, 5, e, congiuntamente presi gli spazii passati, il passato nel doppio tempo esser quadruplo del passato nel sudduplo, il passato nel tempo triplo esser nonuplo, ed in somma gli spazii passati essere in duplicata proporzione de i tempi, cioè come i quadrati di essi tempi."

La strumentazione



"Quanto poi alla misura del tempo, si teneva una gran secchia piena d'acqua, attaccata in alto, la quale per un sottil cannellino, saldatogli nel fondo, versava un sottil filo d'acqua, che s'andava ricevendo con un piccol bicchiero per tutto 'l tempo che la palla scendeva nel canale e nelle sue parti: le particelle poi dell'acqua, in tal guisa raccolte, s'andavano di volta in volta con esattissima bilancia pesando, dandoci le differenze e proporzioni de i pesi loro le differenze e proporzioni de i tempi; e questo con tal giustezza, che, come ho detto, tali operazioni, molte e molte volte replicate, già mai non differivano d'un notabil momento."

Si potrebbe anche…



Parlando del piano inclinato, si potrebbe introdurre il principio di inerzia che Galileo dimostrò ancora con un esperimento mentale.

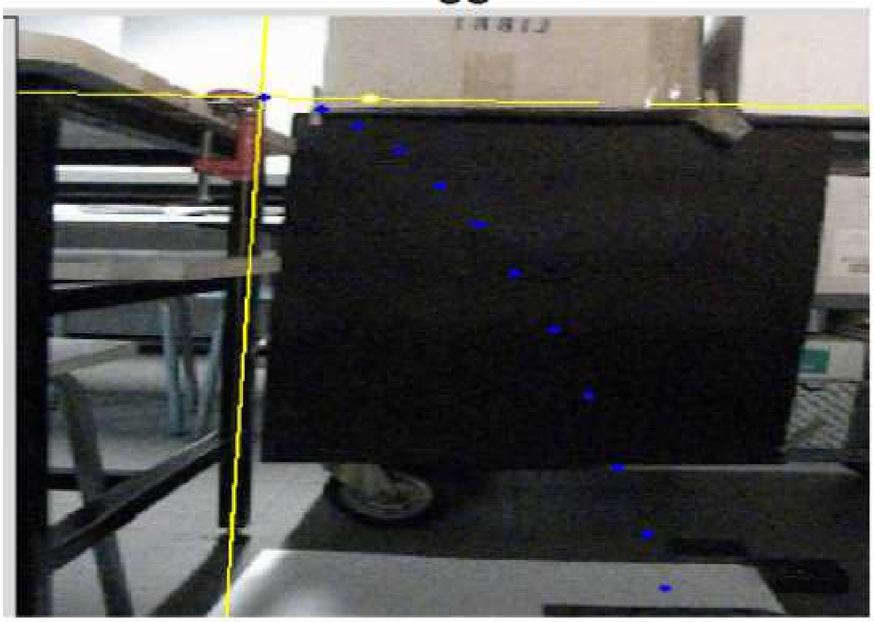
Filo logico

- Partire da un fenomeno reale e cercare una giustificazione
- Introdurre la spiegazione di Galileo come ipotesi (antiintuitiva) da controllare
- Ripercorrere la strada di Galileo nello studio del moto (moto uniforme, caduta dei gravi)
- Mettere alla prova l'ipotesi di Galileo
    1. Moto di caduta da diversi sistemi di riferimento (filmato)
    2. Analisi del filmato dell'esperimento con LoggerPro)
    3. Previsioni del moto di un proiettile con Geogebra (nota v_i e la posizione iniziale)
- Riesame del fenomeno iniziale

Moto di caduta da diversi sistemi di riferimento

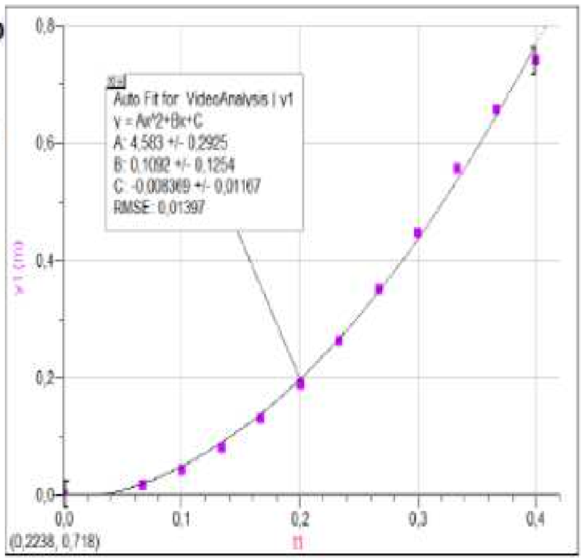
https://www.youtube.com/watch?v=DejaKlkaVc0

Analisi del filmato dell'esperimento con LoggerPro



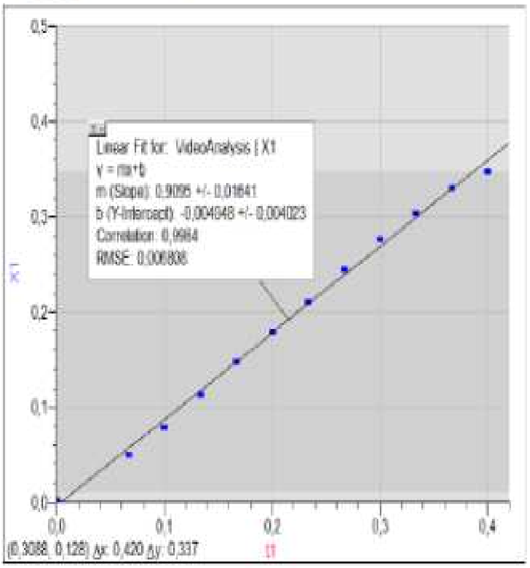
Analisi del filmato dell'esperimento con LoggerPro

- Analizziamo il moto lungo l'asse y
- Si prende la misura di una lunghezza equivale ad un certo numero di pixel nel video
- Si fa un fit quadratico
- Si ricava g dal grafico



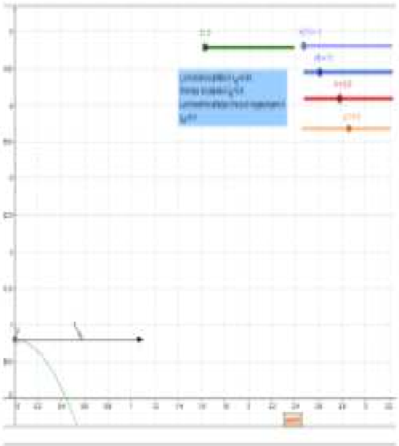
Analisi del filmato dell'esperimento con LoggerPro

- Analizziamo il moto lungo l'asse x
- Si prende la misura di una lunghezza equivale ad un certo numero di pixel nel video
- Si fa un fit lineare



Previsioni del moto di un proiettile con Geogebra

Moto parabolico di Geogebra



- Si può mettere la velocità lungo l'asse x misurata e l'altezza
- Si controlla che la gittata sia la stessa
- Si può utilizzare il programma anche per esplorare le caratteristiche del moto parabolico in modo autonomo

Filo logico

- Partire da un fenomeno reale e cercare una giustificazione
- Introdurre la spiegazione di Galileo come ipotesi (antiintuitiva) da controllare
- Ripercorrere la strada di Galileo nello studio del moto (moto uniforme, caduta dei gravi)
- Mettere alla prova l'ipotesi di Galileo
  1. Moto di caduta da diversi sistemi di riferimento (filmato)
  2. Previsioni del moto di un proiettile con Geogebra (nota v_i e la posizione iniziale)
  3. Analisi del filmato dell'esperimento con LoggerPro)
- Riesame del fenomeno iniziale

Riesame del fenomeno iniziale

Grafico di LoggerPro con fit quadratico

Spunti di riflessione

- Quale ruolo assume la storia nel percorso didattico?
- Quale ruolo assume l'esperimento nel percorso didattico?
- È utile, e se sì in cosa, far studiare la costruzione del moto rettilineo uniforme fatta da Galileo?
- Trovate che il confronto tra le due definizioni aiuti ad approfondire?
- È utile sottolineare la meraviglia di Galileo, dal punto di vista didattico?
- Quali proposte alternative (Si potrebbe anche fare...) trovate più interessati? Ci potrebbero essere altre proposte per migliorare il percorso?
- Sarebbe opportuno fare altri collegamenti interdisciplinari?
- Ritenete efficace il modo in cui viene affrontato il percorso riguardo il metodo sperimentale?
- Quanto è efficace iniziare con un filmato?
- È rispettato il filo logico?

Grazie per l'attenzione

Bibliografia

[Accomazzo et al. 2013] Accomazzo, Beltramino, Sargenti: ‘Esplorazioni matematiche con Geogebra’, Ledizioni, 2013.
[Arons, 1992] Arnold B. Arons“Guida all’insegnamento della fisica” , Zanichelli (Bologna) 1992.
[Bagni, 2004] G. Bagni, “Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche”, La matematica e la sua didattica, 2, 51-70 (2004).
[Boero et al. 2003] Boero P., Garuti R., Pedemonte B., Robotti E., Il gioco voci-echi come metodologia per la mediazione degli aspetti salienti delle teorie, in Processi didattici innovativi per la matematica nella scuola dell'obbligo, a cura di N. Malara & al., Pitagora Editrice Bologna, 2003.
[Bolondi, 2012, 1] “La matematica è difficile?” Conversazione con Rosetta Zan in Perché studiare la matematica? A cura di Giorgio Bolondi, Pearson 2012.
[Bolondi,2012,2] “Insegnare la matematica. Apprendere la matematica.” Conversazione con Martha Fandino Pinila, in “Perché studiare la matematica”, A cura di Giorgio Bolondi, Pearson, 2012.
[Boncinelli, Bottazzini 2000] Boncinelli E., Bottazzini U.,”La serva padrona: fascino e potere della matematica”, Cortina, Milano 2000.
[D’Amore, 1999] Bruno D’Amore, “Elementi di Didattica della Matematica” Pitagora ed. 1999.
[Drake, 1988] Drake, “Galileo: una biografia scientifica”, il Mulino, 1988.
[Framework, 2012] Framework OCSE PISA 2012.
[Galileo, 1990] Galileo, “Discorsi e dimostrazioni matematiche”, Einaudi, 1990. A cura di Enrico Giusti.
[Galili, 2013] Igal Galili, “Excurse to the history of understanding of motion – De motu” in The Pleasure of understanding, Amos de Shalit Science Teaching Center, 2013.
[Giaquinta, 2011]Giaquinta, “La forma delle cose: idee e metodi di matematica tra storia e filosofia”, Edizioni di storia e letteratura 2011.
[Giordano, Bonelli Majorino, 2009] Giordano, E., Bonelli Majorino, P. (2009). Esempi di interferenze costruttive tra matematica e fisica per il successo formativo nella scuola di base: la proporzionalità. In O. Robutti, & M. Mosca (a cura di), Curriculum e successo formativo in matematica e fisica (pp. 304-317). Torino : Ambert.
http://boa.unimib.it/bitstream/10281/9781/3/Esempi_di_interferenze_costruttive.pdf

[Giusti, 1990] Giusti E. “Galileo e le leggi del moto” in “Discorsi e dimostrazioni matematiche” di Galilei, Einaudi, Torino, 1990.
[Guidoni, 2003] Guidoni P., Ripensando il pensiero proporzionale: schemi per la riflessione e per la progettazione didattica proposti nel corso di “Didattica della Matematica” della laurea in “Formazione Primaria”, Materiali Progetto CNR-Villani www.didmat.dima.unige.it, 2003.
[Guidoni, 2006] Guidoni, “Movimento – spunti di riflessione”, 2006. http://www.seminariodidama.unito.it/guidonic3.pdf;
[Iannace, Tortora, 2007] Iannace, Tortora, “La risonanza nei processi di apprendimento”, 2007. http://www.dm.unito.it/semdidattica/iannecetortorad.pdf
[Israel, 2009] Israel, G., Modelli matematici. Introduzione alla matematica applicata, Torino: Franco Muzzio Editore, 2009.
[Marelli, 2014] Marelli Silvia: ‘Introduzione al concetto di funzione: una proposta didattica di approccio coordinato tra matematica e fisica’, Tesi di Laurea Magistrale in Matematica, Università di Bologna, 2014.
[Mellone, Pezzia, 2007] Mellone, Pezzia, Un progetto di ricerca-azione sulle strutture aritmetiche nella scuola di base, 2007. http://www.seminariodidama.unito.it/mellonepezziae.pdf
[Miur, 2012] Ministero dell’Istruzione dell’Università e della Ricerca, Indicazioni nazionali per il liceo scientifico, 2012.
[OCSEPISA2012]Rapporto nazionale OCSE PISA 2012. http://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2012/rappnaz/Rapporto_NAZIONALE_OCSE_PISA2012.pdf
[Paola, 2003] Paola, D., ’Introduzione al concetto di funzione in un primo anno di scuola secondaria’, L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate, v. 26 B, 548 – 575, 2003.
[PCC, 1980] “PCC:The Project Physics Course: Unità 1 IL MOTO”, Zanichelli 1980.
[Rossi, 1994] Rossi, “Il pensiero di Galileo: un’antologia di scritti”, Loescher 1994.
[Sfard,1991] Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conception: reflection on processes and objects as different sides of the same coin, Educational Studies in Mathematics 22: 1-36.
[Skemp, 1976] Skemp R.R.: 1976, Relational understanding and instrumental understanding, Mathematics teaching, 77, 20-26.
[Zan, 2006] Zan, R., Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire, Milano: Springer, 2006.
[Zanarini, 1992] Zanarini G., “Immagini del sapere e formazione scientifica”, La fisica nella Scuola, XXV, 4, 299-310, 1992.

Ringraziamenti

Desidero innanzitutto ringraziare il Professor Bolondi per la supervisione e la disponibilità a seguirmi in questo progetto. Ringrazio la Professoressa Pecori per le preziosi indicazioni, la sensibilità e la pazienza. La sua passione e l'atteggiamento socratico con cui mi ha seguito sono stati un grande aiuto e uno spunto di riflessione per il futuro. Ringrazio i miei genitori che mi hanno permesso di studiare a Bologna, il loro incoraggiamento e il loro appoggio non sono mai mancati. Non avrei mai potuto arrivare a questo traguardo senza di loro. Ringrazio Vero e Virgi per le risate, la comprensione e la complicità e non c'è bisogno di aggiungere altro. Ringrazio Andrea per aver corretto le bozze, sopportato in silenzio le bizze quando sembrava tutto perduto e per le lunghe discussioni sull'insegnamento e su altri argomenti. Infine ringrazio Mario per essermi stato sempre accanto, per aver capito quando sembravo preferire lo studio a lui e aver portato pazienza, per aver messo alla prova la mia determinazione e per essere stato prima il mio allievo di riferimento preferito e poi 'portaborse'.