

ALMA Mater Studiorum  
Università degli Studi di Bologna

---

---

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Astronomia

Dipartimento di Fisica e Astronomia

**Emissione di Corpo Nero  
e applicazioni astrofisiche**

*Elaborato Finale*

Relatore:

Prof. Daniele Dalla Casa

Candidata:

Elisabetta Morandi



---

---

Sessione II Invernale  
Anno Accademico 2013/2014

# Indice

<b>1</b>	<b>Il Corpo Nero</b>	<b>1</b>
1.1	Definizione . . . . .	1
1.2	Teorema di Kirchhoff . . . . .	1
1.3	Termodinamica della radiazione di Corpo Nero . . . . .	2
1.4	Determinazione dello spettro di Corpo Nero . . . . .	4
1.4.1	Approccio classico di Rayleigh-Jeans . . . . .	4
1.4.2	Approccio quantistico di Planck . . . . .	6
1.4.3	Approssimazioni alla legge di Planck . . . . .	7
1.4.4	Legge dello spostamento di Wien . . . . .	8
1.5	Temperature per l'emissione di Corpo Nero . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Applicazioni Astrofisiche</b>	<b>10</b>
2.1	Premessa . . . . .	10
2.2	Radiazione Cosmica di Fondo . . . . .	11
2.2.1	La scoperta della radiazione cosmica di fondo . . . . .	12
2.2.2	Lo spettro del Fondo Cosmico . . . . .	12
2.2.3	L'anisotropia di dipolo della CMB . . . . .	14
2.2.4	L'effetto Sunyaev-Zel'dovich . . . . .	15
<b>A</b>	<b>Calcolo del valor medio dell'energia <math>\bar{\epsilon}</math></b>	<b>16</b>
<b>B</b>	<b>Determinazione della legge di Stefan-Boltzmann</b>	<b>17</b>
<b>C</b>	<b>Determinazione della legge di Wien</b>	<b>18</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>19</b>

# Introduzione

Il presente elaborato si propone di illustrare un modello teorico per la radiazione termica -il *corpo nero*- e di analizzare alcuni oggetti astrofisici ai quali tale modello può essere applicato.

Nel primo capitolo studieremo, dal punto di vista teorico, il problema del corpo nero: esamineremo il teorema di Kirchhoff, che dimostra come all'interno di una cavità mantenuta a temperatura  $T$ , si stabilisce un ben definito spettro di energia elettromagnetica; passeremo poi a determinare lo spettro di corpo nero in una visione classica, con l'approccio di Rayleigh-Jeans; successivamente considereremo la visione quantistica, con la determinazione dello spettro di Planck, il quale ipotizza che la radiazione elettromagnetica possa essere emessa da oscillatori armonici per mezzo di pacchetti di energia discreti, detti *quanti*, risolvendo così il problema della *catastrofe ultravioletta* in cui si incorre con l'approccio classico; infine illustreremo le approssimazioni di Rayleigh-Jeans e di Wien, la prima utilizzabile per i fotoni a bassa energia, la seconda per i fotoni ad alta energia. Il capitolo si conclude definendo brevemente alcune temperature utili per lo studio della radiazione di corpo nero.

Nel secondo capitolo affronteremo la radiazione di alcuni corpi astrofisici, che emettono per corpo nero. Cercheremo di fornire una descrizione dettagliata sulla radiazione cosmica di fondo (CMB), e faremo accenno ai nuclei galattici attivi (AGN), ai pianeti ed alle stelle.

Concludiamo questa breve introduzione con una celebre citazione di Albert Einstein per sottolineare in che modo la quantizzazione dell'energia abbia sconvolto lo studio della fisica dell'epoca, alla luce del significativo contributo apportato da Max Planck nell'analisi quantistica dello spettro:

«Piú la teoria dei quanti ha successo e piú sembra una schiocchezza.» (A. Einstein)

# Capitolo 1

## Il Corpo Nero

### 1.1 Definizione

Definiamo **Corpo Nero** un oggetto capace di assorbire la radiazione elettromagnetica incidente per qualsiasi lunghezza d'onda  $\lambda$ .

Se pensiamo il corpo nero come una cavità la radiazione assorbita dal corpo eccita le pareti del sistema, che possono essere considerate degli oscillatori armonici carichi, e, dopo il raggiungimento dell'equilibrio termico<sup>1</sup> tra la radiazione assorbita e le pareti, queste emettono radiazione a tutte le lunghezze d'onda. Il corpo nero, pertanto, oltre ad essere un perfetto assorbitore di tutta la radiazione, é anche un perfetto emettitore.

Innanzitutto occorre partire dall'osservazione sperimentale che tutti i corpi all'equilibrio termodinamico emettono energia sotto forma di radiazione, con un ben definito spettro. Per questo motivo andiamo a definire due quantità importanti. La prima é l'energia media emessa alla frequenza  $\nu$  da un corpo a temperatura  $T$ , per unità di superficie, per unità di tempo e di angolo solido; é misurata dalla funzione  $e(\nu, T)$ , detta **potere emissivo**. La seconda, detta **potere assorbente** e denotata con  $a(\nu, T)$ , é il rapporto tra la potenza elettromagnetica assorbita e quella incidente. Questa funzione é adimensionale e può solo essere minore o uguale a 1, uguale nel caso in cui tutta la radiazione venga assorbita:

$$a(\nu, T) = \frac{\text{potenza e.m. assorbita}}{\text{potenza e.m. incidente}} \leq 1 \quad (1.1)$$

### 1.2 Teorema di Kirchhoff

Nel 1860 il fisico tedesco Gustave Kirchhoff, con l'utilizzo della termodinamica, dimostró che ad una data frequenza  $\nu$  e ad una data temperatura  $T$ , il rapporto tra potere emissivo e potere assorbente é lo stesso per tutti i corpi; quindi il loro rapporto definisce una funzione universale  $f(\nu, T)$ :

$$\frac{e(\nu, T)}{a(\nu, T)} = f(\nu, T) \quad (1.2)$$

---

<sup>1</sup>Un sistema si definisce all'equilibrio termico se le sue variabili termodinamiche, ad esempio pressione, volume e temperatura, sono ben definite e non variano nel tempo.

Kirchhoff, poi, definí corpo nero un corpo il cui potere assorbente, per ogni frequenza e temperatura, é pari a 1. Da questo deriva che la funzione universale  $f(\nu, T)$  eguaglia il potere emissivo:  $e(\nu, T) = f(\nu, T)$ .

Dimostriamo facilmente tale teorema attraverso un esperimento concettuale.<sup>2</sup> Prendiamo due corpi neri, alla stessa temperatura, avvolti da pareti completamente riflettenti, separati dal vuoto (figura 1.1).

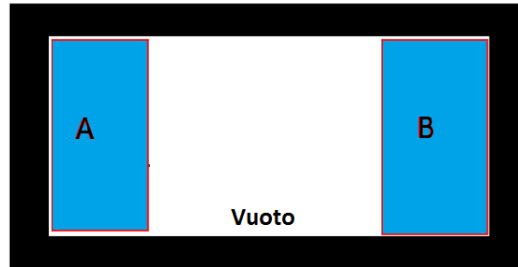


Figura 1.1: Due corpi neri separati dal vuoto.

Se i due corpi non avessero lo stesso potere emissivo, pur avendo la stessa temperatura, una certa quantità di calore passerebbe spontaneamente da un corpo all'altro. Essendo corpi neri, infatti, assorbono tutta la radiazione incidente su di essi e, quindi, dovrebbero assorbire tutta la radiazione emessa dal corpo che hanno vicino. Questo violerebbe il secondo principio della termodinamica.<sup>3</sup> Sempre utilizzando un ragionamento analogo si potrebbe dimostrare che, in condizioni di equilibrio, anche se i due corpi A e B non fossero neri la radiazione contenuta nel sistema sarebbe la stessa di quella che si avrebbe se fossero neri. Non riportiamo tale dimostrazione.

I risultati precedenti valgono indipendentemente dalla forma della cavità e dei due corpi. Non é necessario, poi, che le pareti siano riflettenti: in una cavità di qualsiasi materiale c'è radiazione di corpo nero, a condizione che questa sia all'equilibrio termico. Infine, poiché le pareti emettono energia in tutte le direzioni e questa si riflette a sua volta in ogni direzione, nella cavità vi é una densità di energia uniforme ed isotropa.

### 1.3 Termodinamica della radiazione di Corpo Nero

La radiazione di corpo nero, come tutti i sistemi all'equilibrio termico, può essere studiata con la termodinamica. Consideriamo una cavità di corpo nero con un pistone, così che il lavoro possa essere fatto o sul sistema o dal sistema, come in figura 1.2.

Dal primo e dal secondo principio della termodinamica abbiamo rispettivamente:

$$dQ = dU + pdV \quad (I \text{ PTD}) \quad (1.3)$$

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (II \text{ PTD}) \quad (1.4)$$

<sup>2</sup>Generalizzazione della dimostrazione presente in G. Rybicki and A. Lightman, *Radiative Processes in Astrophysics*, cit., p.16.

<sup>3</sup>Il secondo principio della termodinamica afferma che sia 'impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia una trasformazione in lavoro di calore tratto da una sorgente a temperatura uniforme.' (Postulato di Kelvin).

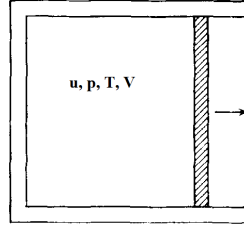


Figura 1.2: Cavità di corpo nero con pistone.

Inserendo, quindi, la (1.3) in (1.4) e sapendo che  $U = uV$  e  $p = \frac{u}{3}$ , dove  $u$  é una funzione che dipende solo dalla temperatura<sup>4</sup>, otteniamo:

$$dS = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} dT + \frac{u}{T} dV + \frac{1}{3} \frac{u}{T} dV = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} dT + \frac{4u}{3T} dV$$

Siccome  $dS$  é un differenziale esatto, possiamo scrivere:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{V}{T} \frac{du}{dT}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{4u}{3T}$$

Cosí derivando per  $\partial V$  e per  $\partial T$  rispettivamente, otteniamo:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{1}{T} \frac{du}{dT} = -\frac{4u}{3T^2} + \frac{4}{3T} \frac{du}{dT}$$

e infine si trova

$$\frac{du}{dT} = \frac{4u}{T} \Rightarrow \frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T}$$

che integrata dá il seguente risultato:

$$\log u = 4 \log T + \log a \quad (1.5)$$

dove  $\log a$  é la costante di integrazione.

Cosí abbiamo ottenuto la **legge di Stefan-Boltzmann**:

$$u(T) = aT^4. \quad (1.6)$$

La formula (1.6) mette in relazione l'energia di radiazione con la quarta potenza della temperatura. Un'altra formulazione della legge di Stefan-Boltzmann, piú utilizzata, mette in relazione il flusso di radiazione con la temperatura:

$$F = \sigma T^4. \quad (1.7)$$

Dove si trovano i seguenti valori delle costanti  $a$  e  $\sigma$ :<sup>5</sup>

$$\sigma = \frac{ac}{4} = 5.67 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ deg}^{-4} \text{ s}^{-1} \quad (1.8)$$

$$a = \frac{4\sigma}{c} = 7.56 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ deg}^{-4} \quad (1.9)$$

Successivamente verranno utilizzati due approcci che porteranno ad una formula simile per la radiazione di corpo nero, il primo si basa sui principi della fisica newtoniana e dell'elettromagnetismo classico (*approccio classico di Rayleigh-Jeans*); il secondo utilizza la meccanica quantistica (*approccio di Planck*).

<sup>4</sup> $u = (4\pi/c) \int J_\nu$  dove  $J_\nu$  rappresenta l'intensitá di radiazione del corpo nero.

<sup>5</sup>Le due costanti  $a$  e  $\sigma$  non possono essere calcolate attraverso argomenti di termodinamica macroscopica, per questo ci siamo limitati a darne i valori.

## 1.4 Determinazione dello spettro di Corpo Nero

Passiamo, ora, allo studio dello spettro di emissione di corpo nero, cercando di trovare una legge per l'intensità della radiazione  $B_\lambda$  in funzione della lunghezza d'onda  $\lambda$ . Inizialmente useremo l'approccio classico, per poi passare a quello quantistico.

### 1.4.1 Approccio classico di Rayleigh-Jeans

Nei primi anni del '900 i due fisici britannici John William Strutt Rayleigh e James Jeans proposero una relazione per l'intensità di radiazione  $B_\lambda$ , in accordo con gli esperimenti per grandi valori di  $\lambda$ , ma errata per piccoli  $\lambda$ :

$$B_\lambda \propto \frac{T}{\lambda^4} \quad (1.10)$$

Questa si può anche scrivere, in funzione della frequenza, nel modo seguente:

$$B_\nu \propto \frac{\nu^2 T}{c^2} \quad (1.11)$$

Per ricavare tale relazione prendiamo nuovamente una cavità di corpo nero e calcoliamo la densità di energia di radiazione  $u(\nu)$  contenuta in essa, di frequenza compresa tra  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ :

$$u(\nu)d\nu = \bar{\epsilon}N(\nu)d\nu \quad (1.12)$$

dove  $\bar{\epsilon}$  rappresenta l'energia media degli oscillatori delle pareti della cavità in risonanza con la frequenza  $\nu$ ,  $N(\nu)d\nu$  è il numero di onde stazionarie all'interno della cavità, che assumiamo di forma cubica di lato  $L$ . Le onde si propagano in tutte le direzioni con vettore di propagazione di componenti  $(\cos \theta_1, \cos \theta_2, \cos \theta_3)$ . Un'onda stazionaria risonante ha un numero di nodi<sup>6</sup> pari a:

$$n_i = \frac{2L}{\lambda} \cos \theta_i \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

da cui, facendone il quadrato e sommando, otteniamo:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \frac{4L^2}{\lambda^2} = \frac{4\nu^2}{c^2}L^2 \quad (1.13)$$

che rappresenta l'equazione dei punti a coordinate intere positive o nulle sulla sfera di raggio  $R = \frac{2\nu L}{c}$ . Il numero di onde stazionarie tra  $\nu$  e  $\nu + d\nu$  è uguale al numero di punti a coordinate intere nell'ottante positivo del guscio sferico compreso tra  $R$  e  $R + dR$ , con  $dR = \frac{2Ld\nu}{c}$ . Quando tale numero è molto grande, cioè nel limite termodinamico<sup>7</sup>, esso approssima il volume dell'ottante:

$$V = \frac{1}{8}4\pi R^2 dR = \frac{1}{8}4\pi \left(\frac{2L\nu}{c}\right)^2 \frac{2Ld\nu}{c} = \frac{4\pi\nu^2}{c^3}L^3 d\nu \quad (1.14)$$

La densità di modi di vibrazione permessi è uguale al numero di onde stazionarie diviso il volume della cavità cubica moltiplicato per 2, in quanto esistono due direzioni di polarizzazione indipendenti per le onde elettromagnetiche. Quindi:

$$N(\nu)d\nu = 8\pi \frac{\nu^2 d\nu}{c^3} \quad (1.15)$$

<sup>6</sup>I nodi di un'onda sono quei punti che rimangono fissi, cioè dove l'onda è sempre nulla.

<sup>7</sup>Il limite termodinamico in un sistema viene raggiunto quando il numero  $N$  di particelle tende all'infinito ( $N \rightarrow \infty$ ).

Ultimo passaggio, prima di trovare la densità di energia  $u(\nu)$ , é il calcolo del valor medio dell'energia di un oscillatore  $\bar{\epsilon}$ . Per fare questo calcolo usiamo la procedura di media statistica, con la distribuzione di Boltzmann:

$$f(\epsilon) = Ce^{-\frac{\epsilon}{kT}}, \quad \text{dove} \quad k^8 = 1.38 \times 10^{-16} \frac{\text{erg}}{K} \quad (1.16)$$

La formula (1.16) in meccanica statistica dá la probabilità che un oscillatore abbia energia compresa tra  $\epsilon$  e  $\epsilon + d\epsilon$ . Da questo, il valor medio dell'energia é:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^\infty \epsilon f(\epsilon) d\epsilon}{\int_0^\infty f(\epsilon) d\epsilon} = kT \quad (1.17)$$

Per il calcolo del valor medio dell'energia  $\bar{\epsilon}$  vedere Appendice A.

Inserendo nell'equazione (1.12) i due risultati trovati dalle formule (1.15) e (1.17) otteniamo la densità di energia:

$$u(\nu)d\nu = 8\pi kT \frac{\nu^2}{c^3} d\nu \quad (1.18)$$

Per ottenere la legge di Rayleigh-Jeans espressa in funzione di  $\lambda$  scriviamo l'equazione (1.18) sostituendo le seguenti relazioni:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \quad d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda, \quad u(\lambda)d\lambda = -u(\nu)d\nu \quad (1.19)$$

Cosí facendo otteniamo la **legge di Rayleigh-Jeans**:

$$u(\lambda) = 8\pi \frac{kT}{\lambda^4}. \quad (1.20)$$

Questa legge, dedotta usando principi classici in cui la radiazione é trattata come un'onda che, ad ogni frequenza, puó essere emessa con qualunque energia, diverge per piccole lunghezza d'onda, prevedendo un'emissione altissima per lunghezze d'onda corrispondenti all'ultravioletto e ai raggi X, e ció non si osserva sperimentalmente. Il grafico in figura 1.3 mostra quanto la curva disegnata attraverso la teoria classica si discosti dalla curva della teoria quantistica. Questo problema viene chiamato **catastrofe ultravioletta**, che una corretta teoria del corpo nero deve evitare.

---

<sup>8</sup>k é la costante di Boltzmann.



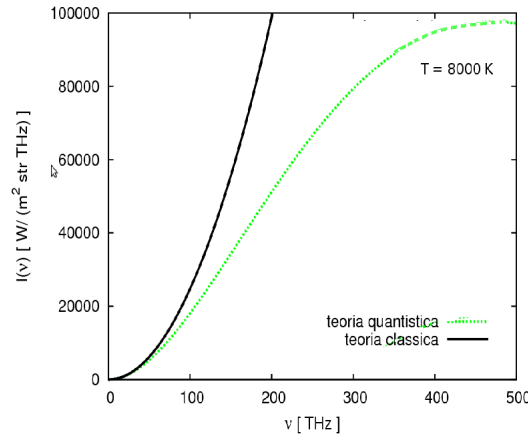


Figura 1.3: Confronto tra teoria classica e teoria quantistica nello spettro di corpo nero.

### 1.4.2 Approccio quantistico di Planck

La soluzione alla catastrofe ultravioletta arrivó qualche anno dopo con l'introduzione da parte di Planck di una nuova ipotesi, dalle implicazioni sconvolgenti. Planck ipotizzó che la radiazione potesse essere emessa dagli oscillatori delle pareti solo a pacchetti discreti, detti **quanti** che, per ogni frequenza, potevano trasportare solo una ben precisa quantità di energia  $\epsilon = h\nu$ , dove  $h$  é una costante universale, detta **costante di Planck**. Quindi, l'emissione ad una data frequenza, puó solo essere del tipo:  $\epsilon_n = n\epsilon = nh\nu$ . La modifica che questa ipotesi comporta nei conti di Rayleigh e Jeans riguarda solo il calcolo del valore medio dell'energia degli oscillatori. Infatti, la formula (1.17) diventa:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n e^{-\epsilon_n/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\epsilon_n/kT}} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (1.21)$$

Per il calcolo del valor medio dell'energia  $\bar{\epsilon}$  vedere Appendice A.

Inserendo questo nuovo valore dell'energia media nella formula (1.12) per il calcolo della densità di energia, otteniamo:

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \quad (1.22)$$

Quindi, passando dalla  $u(\nu)$  alla  $u(\lambda)$  utilizzando le relazioni espresse in (1.19), abbiamo:

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/kT\lambda} - 1} \quad (1.23)$$

che rappresenta la fondamentale **legge di Planck** per l'intensità di spettro di corpo nero, la prima in  $\nu$ , la seconda in  $\lambda$ . Essa risulta in perfetto accordo con i dati sperimentali se la costante di Planck viene fissata al valore  $h \simeq 6.626 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$ . Con questa assunzione non solo si dá ragione dei dati sperimentali, ma si possono giustificare le leggi empiriche di Stefan-Boltzmann e quella di Wien, sulla quale forniremo qualche accenno piú avanti. I calcoli che portano a giustificare tali leggi si possono trovare rispettivamente in Appendice B e Appendice C.

Abbiamo cosí ottenuto due formulazioni della legge di Planck, una in funzione della frequenza e l'altra della lunghezza d'onda. Le riportiamo entrambe utilizzando la radianza spettrale:

$$B(\nu, T) = 2 \frac{h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad B(\lambda, T) = 2 \frac{hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (1.24)$$

Queste due distribuzioni sono diverse, e hanno il picco di emissione in due zone dello spettro differenti, come si puó notare dalla figura 1.4.

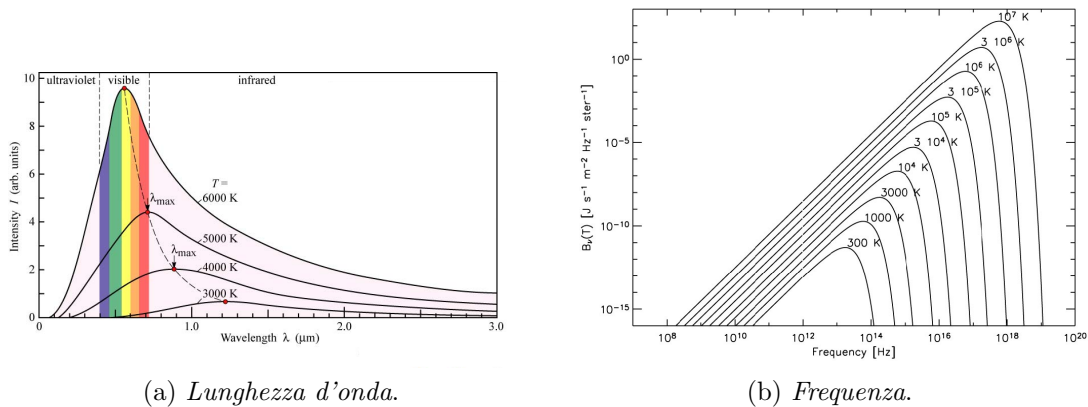


Figura 1.4: Legge di Planck: (a) in funzione della lunghezza d'onda  $\lambda$  e (b) in funzione della frequenza  $\nu$ .

Le curve che descrivono la legge di Planck si chiamano **planckiane** e danno importanti informazioni sul corpo in esame, ad esempio la sua temperatura: una certa curva, infatti, é determinata proprio dalla temperatura dell'oggetto. Si puó inoltre seguire il ragionamento inverso: avendo un punto sulla planckiana é possibile ricavare la temperatura dell'oggetto che l'ha prodotta. La temperatura, una volta disegnata la curva, viene determinata in maniera univoca perché le planckiane non si intersecano mai.

### 1.4.3 Approssimazioni alla legge di Planck

Ci sono due approssimazioni che si possono adottare per la funzione di Planck, una valida alle basse frequenze e l'altra alle alte frequenze:

- **Approssimazione di Rayleigh-Jeans:** valida per i fotoni a bassa energia. L'esponenziale nella formula di Planck assume un valore molto piccolo, quindi abbiamo:

$$h\nu \ll kT \Rightarrow B(\nu, T) \simeq 2 \frac{h\nu^3}{c^2} \frac{kT}{h\nu} = 2kT \left(\frac{\nu}{c}\right)^2 \quad (1.25)$$

Questa approssimazione viene spesso usata per la banda radio.

- **Approssimazione di Wien:** valida per i fotoni ad alta energia. L'esponenziale risulta cosí grande che il termine unitario nella formula puó venire trascurato:

$$h\nu \gg kT \Rightarrow B(\nu, T) \simeq 2 \frac{h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT}. \quad (1.26)$$

In figura 1.5 viene mostrato in quale parte dello spettro valgono tali approssimazioni.

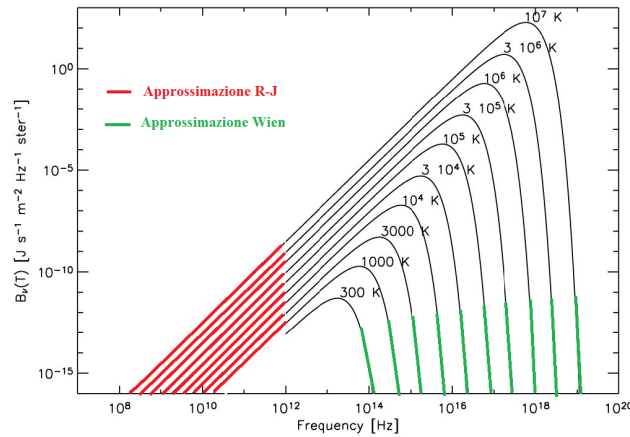


Figura 1.5: Approssimazioni di Wien e R-J.

#### 1.4.4 Legge dello spostamento di Wien

La legge dello spostamento di Wien, inizialmente trovata solo in via sperimentale é stata in seguito un' ulteriore conferma della validit  del modello di Planck. Tale legge mostra come la densit  di energia, emessa da un corpo nero ad una data temperatura, presenti un massimo caratteristico che si sposta al variare di  $T$ . La frequenza  $\nu_{max}$  alla quale si verifica il picco di  $B_\nu$  pu  essere trovata risolvendo:

$$\left. \frac{\partial B_\nu}{\partial \nu} \right|_{\nu=\nu_{max}} = 0$$

Imponendo che  $x = h\nu_{max}/kT$ , risolvere l'equazione precedente corrisponde a trovare la soluzione a  $x = 3(1 - e^{-x})$ , con il quale si ha un valore approssimato di  $x = 2.82$ . In questo modo troviamo la **Legge di Wien** in funzione della frequenza:

$$h\nu_{max} = 2.82 kT \quad oppure \quad \frac{\nu_{max}}{T} = 5.88 \times 10^{10} \quad Hz/deg \quad (1.27)$$

Con calcoli simili troviamo la lunghezza d'onda  $\lambda_{max}$  alla quale si verifica il massimo di  $B_\lambda$ , risolvendo:

$$\left. \frac{\partial B_\lambda}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_{max}} = 0$$

In questo modo si ottiene la forma della legge di Wien pi  conosciuta:

$$\lambda_{max}T = 0.29 \quad cm \ deg \quad (1.28)$$

Da queste due formulazioni   ancora pi  immediato notare come il picco di emissione di  $B_\nu$  e  $B_\lambda$  si trovi in due posti diversi nel grafico di frequenza o lunghezza d'onda; questo perch   $\lambda_{max}\nu_{max} \neq c$ . La legge di spostamento di Wien d  un modo conveniente per caratterizzare il range di frequenza in cui vale l'approssimazione di Rayleigh-Jeans, cio  per  $\nu \ll \nu_{max}$ . Allo stesso modo d  il range per l'approssimazione di Wien, che    $\nu \gg \nu_{max}$ .

## 1.5 Temperature per l'emissione di Corpo Nero

Per studiare la radiazione di corpo nero può essere utile considerare alcune temperature specifiche, diverse a seconda del campo fisico a cui si vuol far riferimento. Le più importanti ed usate sono:

1. **Temperatura di brillantezza**  $T_b$ : è definita come la temperatura che dovrebbe possedere un corpo nero per avere la radiazione osservata. Si noti che questa non è la temperatura a cui si trova il corpo se questo non è un corpo nero, ma rappresenta un modo diverso per esprimere la potenza irradiata. Questa temperatura è molto utile nel campo della radioastronomia, dove la legge di Planck può essere approssimata a quella di Rayleigh-Jeans, e in questo caso la  $T_b$  corrisponde alla temperatura fisica dell'oggetto. Usando l'equazione (1.25) per ogni valore di  $B_\nu$  possiamo definire la  $T_b$  con la relazione  $B_\nu = B_\nu(T_b)$ . In questo caso, in cui abbiamo  $h\nu \ll kT$  e quindi la  $B(\nu)$  di R-J, la temperatura di brillantezza è definita come:

$$T_b = \frac{c^2}{2\nu^2 k} B_\nu \quad (1.29)$$

In generale questa temperatura è in funzione di  $\nu$  ma solo nel caso in cui la sorgente sia un corpo nero, la temperatura di brillantezza è la stessa a tutte le frequenze. Nella regione di Wien non è molto utile usare la  $T_b$  a causa della rapida decrescita di  $B_\nu$  con  $\nu$  e del fatto che non è possibile formulare un'equazione del trasporto lineare in funzione di  $T_b$ .

2. **Temperatura di colore**  $T_c$ : siccome una sorgente reale differisce da un corpo nero ideale, si definisce temperatura di colore di una data radiazione luminosa la temperatura che dovrebbe avere un corpo nero affinché la radiazione luminosa emessa da quest'ultimo appaia cromaticamente la più vicina possibile alla radiazione considerata.
3. **Temperatura effettiva**  $T_{eff}$ : deriva dal flusso totale emesso dalla sorgente, integrato su tutte le frequenze. Si definisce anche come la temperatura che avrebbe la sorgente se questa emettesse realmente come corpo nero. Questa è spesso utilizzata per calcolare la temperatura superficiale delle stelle. Si ottiene uguagliando il flusso della sorgente, al flusso di corpo nero alla temperatura  $T_{eff}$ :

$$F = \int \cos \theta B_\nu d\nu d\Omega = \sigma T_{eff}^4. \quad (1.30)$$

Notiamo che  $T_{eff}$  e  $T_b$  dipendono dall'intensità della magnitudine della sorgente, mentre  $T_c$  dipende solo dalla forma dello spettro osservato.

# Capitolo 2

## Applicazioni Astrofisiche

### 2.1 Premessa

La radiazione di corpo nero é un modello ideale che ha svariate applicazioni nel campo astrofisico, in quanto riesce ad offrire una buona rappresentazione di tutti i fenomeni che hanno una radiazione completamente termalizzata.

Gli ambiti piú importanti in cui troviamo applicato tale modello sono:

1. **le Stelle:** possono essere approssimate a corpi neri perché le uniche onde elettromagnetiche che non assorbono sono quelle aventi lunghezza d'onda di dimensione pari o maggiore del loro diametro. Grazie allo studio di questa radiazione si riesce anche a definire una classificazione spettrale in cui vengono catalogate i vari tipi di stelle, a seconda della loro temperatura e del loro colore;
2. **i Nuclei Galattici Attivi (AGN):** sono oggetti altamente energetici, con uno spettro continuo che si estende dalla *banda Radio* alla *banda Gamma*. In corrispondenza della *banda Ottica-UV* é possibile identificare il tipico andamento da corpo nero a temperature dell'ordine di  $T \simeq 10^4 - 10^6 K$ . Lo spettro reale é caratterizzato da una sovrapposizione multipla di spettro di corpo nero;
3. **i Pianeti:** la radiazione proveniente dal Sole assorbita dai pianeti é controbilanciata dalla riemissione nello spazio di radiazione infrarossa, ad opera del pianeta, quando questo raggiunge l'equilibrio termico. La riemissione di radiazione segue la curva di corpo nero. Per la Terra, ad esempio, l'irradianza disegna una planckiana ad una temperatura di  $300 K$ ;
4. **la Radiazione Cosmica di Fondo (CMB):** é una radiazione isotropa di fondo, presente in tutto l'universo, che non é associata ad alcuna stella, galassia, o altro corpo celeste. Questa ha una distribuzione spettrale di energia corrispondente alla temperatura di corpo nero di  $2.73 K$ .

Nel prossimo paragrafo si prenderá in esame la CMB, in quanto rappresenta la miglior approssimazione di spettro di corpo nero che é possibile riscontrare in natura.

In figura 2.1 si mostra lo spettro caratteristico di un AGN e quello dell'irradianza terrestre e solare, riportate come esempio per far notare la somiglianza con lo spettro di corpo nero, presentato nelle pagine precedenti.

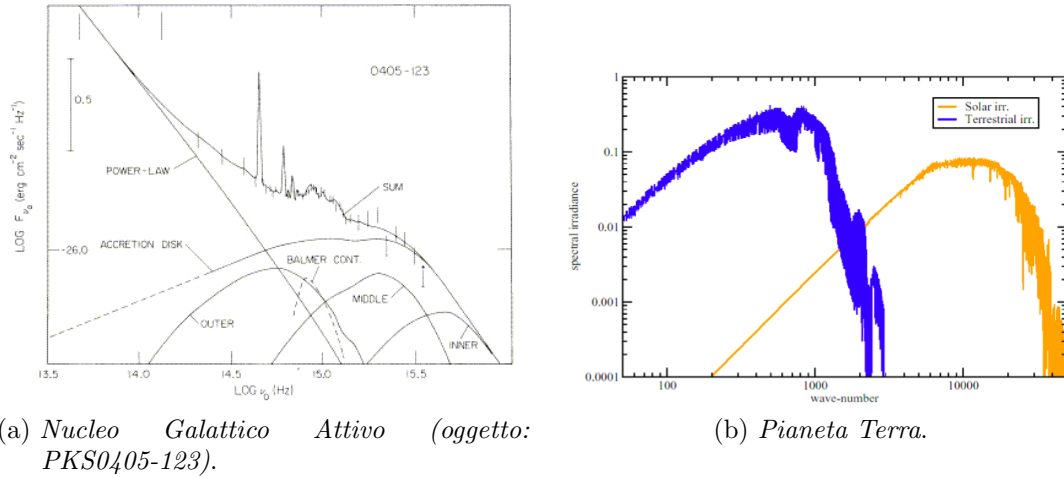


Figura 2.1: Distribuzione spettrale di energia approssimabile a spettri di corpo nero: (a) rappresenta una semplificazione a tre spettri di corpo nero relativi a diverse regioni del disco di accrescimento attorno al buco nero centrale, (b) rappresenta l'irradianza terrestre e solare misurata sulla superficie dell'atmosfera.

## 2.2 Radiazione Cosmica di Fondo

La radiazione di fondo é la radiazione residua proveniente dalle fasi iniziali della nascita dell'universo, la sua scoperta é considerata una conferma chiave del modello del Big Bang.

L'universo, nelle fasi iniziali della sua vita e prima della formazione di stelle e pianeti, aveva dimensioni molto piú contenute di quelle attuali, era molto piú caldo e permeato da una radiazione uniforme in stretta interazione con il plasma di idrogeno. L'elevata energia dei fotoni impediva agli elettroni di legarsi ai protoni, ostacolando la formazione degli atomi. Con l'espansione dell'universo il plasma e la radiazione iniziarono a raffreddarsi fino a raggiungere una temperatura a cui l'energia piú bassa dei fotoni non era piú in grado di impedire la formazione dei primi atomi stabili. Questi atomi non poterono piú assorbire la radiazione termica cosicché l'universo, che fino a quel momento era opaco, divenne trasparente alla radiazione. I fotoni che esistevano in quel momento iniziarono a propagarsi, divenendo tuttavia piú deboli e meno energetici, in quanto andavano a riempire un universo piú grande.

Le misure precise della radiazione cosmica di fondo sono fondamentali per la cosmologia poiché qualsiasi modello proposto dell'universo deve essere in grado di spiegare questa radiazione. Come già esposto precedentemente la CMB presenta uno spettro termico di corpo nero ad una temperatura di  $T_{CMB} = 2.725 K$  ed utilizzando la legge di Wien, si può calcolare dove cade il picco di emissione. Quest'ultimo si trova nella zona delle microonde alla frequenza  $\nu_{max} = 160.2 GHz$ , corrispondenti ad una lunghezza d'onda  $\lambda_{max} = 1.9 mm$ . L'emissione é pressoché uniforme in tutte le direzioni, e mostra un andamento corrispondente a quello che si otterrebbe da un gas molto caldo e quasi uniforme che si espandesse fino alle attuali dimensioni dell'universo. In particolare, la distribuzione spaziale dell'energia dello spettro contiene piccole anisotropie, o fluttuazioni, che variano con la dimensione della regione in esame.

Anche se molti processi differenti possono produrre la forma generale di uno spettro di corpo nero, nessun modello diverso dal Big Bang ha finora spiegato le fluttuazioni. Per questo la maggior parte dei cosmologi ritiene che il modello del Big Bang sia quello

che dá la miglior interpretazione della radiazione di fondo.

### 2.2.1 La scoperta della radiazione cosmica di fondo

Nel 1948 Gamow, insieme ad Alpher e Bethe, nella *teoria  $\alpha - \beta - \gamma$* , propose che il denso universo primordiale fosse molto caldo. In questo universo molto denso e caldo il libero cammino medio dei fotoni era cosí breve da mantenere l'equilibrio termodinamico. Sotto queste condizioni il campo di radiazione ha uno spettro di corpo nero. Nella loro teoria spiegavano, inoltre, come questa radiazione si fosse raffreddata durante l'espansione dell'universo. Predirono anche che della fase iniziale ad altissima temperatura sarebbe dovuta rimanere una traccia rilevabile ancora oggi, sotto forma di radiazione ad una temperatura scesa, per espansione adiabatica, dal valore iniziale ad un valore che Gamow stimó intorno ai 5  $K$ . Questa fu una delle prime teorizzazioni della CMB, che però non poté essere osservata a causa dell'immaturo tecnologia. Questa teoria fu presto abbandonata perché non era in grado di prevedere elementi piú pesanti dell'elio.

Nel 1964 Robert Dicke ed un suo studente, P.J.E. Peebles, calcolarono che la radiazione residua dal Big Bang avrebbe dovuto avere una temperatura di circa 10  $K$ . Diversamente da Gamow, Dicke era interessato alla ricerca dei residui della radiazione.

Quasi contemporaneamente, nel 1965, Penzias e Wilson, mettendo a punto una sensibilissima antenna per ricevere i segnali nelle microonde e per comunicare con il nuovo satellite Telstar, rilevarono un segnale isotropo alla lunghezza d'onda  $\lambda = 7.35 \text{ cm}$ . Inizialmente pensarono fosse dovuto al "rumore" dello strumento, ma nonostante tutti i loro tentativi per migliorare la qualità del segnale, questo eccesso nella radiazione rimase. Calcolarono, inoltre, che l'interferenza era uguale a quella di un corpo nero a 3  $K$  ed osservarono che era una radiazione diffusa ed uniforme su tutto il cielo. Dicke e Peebles, appena vennero informati di tale scoperta, unirono il loro modello teorico con tale osservazione, spiegando che questa radiazione é il residuo dell'esplosione iniziale, il Big Bang, che aveva dato inizio all'espansione dell'universo.<sup>1</sup> Questa fu la prima misura diretta del **Fondo Cosmico a Microonde**, detta **Cosmic Microwave Background (CMB)**.

### 2.2.2 Lo spettro del Fondo Cosmico

Misure accurate della radiazione di fondo sono molto difficili da effettuare, a causa dei contributi alla radiazione da parte dell'emissione radio della Galassia alle lunghezze d'onda centimetriche, dell'emissione termica della polvere interstellare ed interplanetaria e, soprattutto, dell'atmosfera terrestre alle lunghezze d'onda millimetriche, che bisogna valutare e rimuovere. Le prime misure, a lunghezza d'onda centimetriche e nel lontano infrarosso, mediante palloni, avevano mostrato che la brillantezza seguiva la legge  $B(\nu) \propto \nu^2$ , con una temperatura  $T_B \lesssim 3 \text{ K}$ , corrispondente allo spettro di corpo nero nell'approssimazione di Rayleigh-Jeans. Le misure piú accurate sono state effettuate fra  $\lambda = 3 \text{ cm}$  e  $\lambda = 2 \text{ mm}$ , dove la contaminazione galattica é minima. Nel 1986, con misurazioni da palloni ad alta quota, fu messo in evidenza il picco della curva di Planck a  $\lambda \simeq 1.5 \text{ mm}$ .

---

<sup>1</sup>Dicke, Peebles ed i loro collaboratori scrissero subito al *Astrophysical Journal Letters* descrivendo la teoria della CMB; mentre Penzias e Wilson scrissero una lettera dal titolo *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Megacycles per Second* per descrivere la loro scoperta.

Lo spettro della CMB fu per primo misurato accuratamente dal satellite **COBE** (**CO**smic **B**ackground **E**xplorer), lanciato in orbita nel novembre del 1989, ad una distanza di 900 km dalla superficie terrestre, e operante a varie lunghezze d'onda comprese fra  $1\text{ cm} \leq \lambda \leq 0.5\text{ mm}$ , che comprende il massimo della curva di emissione. Tra i vari importanti risultati provenienti dall'analisi dei dati di COBE, abbiamo che ad ogni posizione angolare  $(\theta, \phi)$  nel cielo, lo spettro del fondo cosmico a microonde é molto simile a quello di un corpo nero ideale, come illustrato in figura 2.2. Il satellite ha rilevato fluttuazione dallo spettro piú piccole di  $\Delta\epsilon/\epsilon \simeq 10^{-4}$ , quindi si discosta in minima misura dalla curva di corpo nero. Queste misure hanno confermato definitivamente la natura della CMB, ad una temperatura di:

$$T_{CMB} = 2.725 \pm 0.002\text{ K}^2 \quad (2.1)$$

La figura 2.2 mostra lo spettro della radiazione misurato da COBE. La mancanza di anche piccole distorsioni dalla legge di Planck<sup>3</sup> indica che nessun evento importante dal punto di vista termodinamico, come interazioni della radiazione di fondo con la materia aggregata o in fase di aggregazione, é avvenuto in tempi “recenti”. La precisione con cui si puó determinare oggi la temperatura é tale da permettere di cercare possibili deviazioni dall'uniformitá spaziale, che potrebbero essere dovuti a fenomeni avvenuti prima di  $z = 1000$ , etá del disaccoppiamento fra radiazione e materia, e che poi si sono propagate fino ad oggi. Ad epoche piú recenti,  $z \simeq 1000$ , l'universo ha continuato a raffreddarsi, ma, dato che radiazione e materia non sono piú in equilibrio termodinamico tra loro, ciascuna delle due ha proseguito il suo cammino indipendentemente dall'altra: la temperatura della radiazione ha continuato a diminuire piú lentamente rispetto a quella della materia.

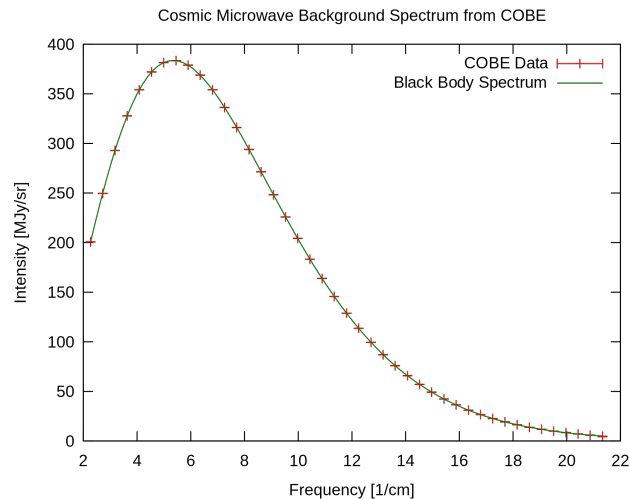


Figura 2.2: Spettro della CMB determinato da COBE. I segni rossi indicano le misure effettive, e le loro dimensioni rappresentano gli errori di misura, che sono davvero piccoli.

<sup>2</sup>Il valore cosí preciso della temperatura é stato misurato da **WMAP** nel 2003, altro satellite mandato in orbita per studiare anche il fondo cosmico a microonde. Informazioni piú precise sono state poi raccolte anche da **Planck**, fino ad ottobre del 2013.

<sup>3</sup>Le deviazioni dalla legge denuncerebbero aumenti o diminuzioni della temperatura ad epoche posteriori a quella a cui la radiazione si é disaccoppiata dalla materia.



### 2.2.3 L'anisotropia di dipolo della CMB

Un'ulteriore importante scoperta di COBE fu la distorsione di *dipolo* nella temperatura della radiazione di fondo.<sup>4</sup> Sebbene in ogni punto del cielo la radiazione ha uno spettro di corpo nero, in una metà di cielo lo spettro viene leggermente spostato verso il blu a temperature piú alte, mentre nell'altra parte lo spettro é debolmente spostato verso il rosso a temperature piú basse. La distorsione di dipolo, quindi, é un semplice spostamento Doppler, causato dal moto del satellite rispetto al sistema di riferimento in cui la CMB é isotropa. Infatti, un osservatore in moto con velocità  $v$  rispetto alla radiazione di fondo, a causa dell'effetto Doppler, vede una variazione della temperatura pari a:

$$\frac{\Delta T_{CMB}}{T_{CMB}} = \gamma \frac{v \cos \theta}{c} \quad (2.2)$$

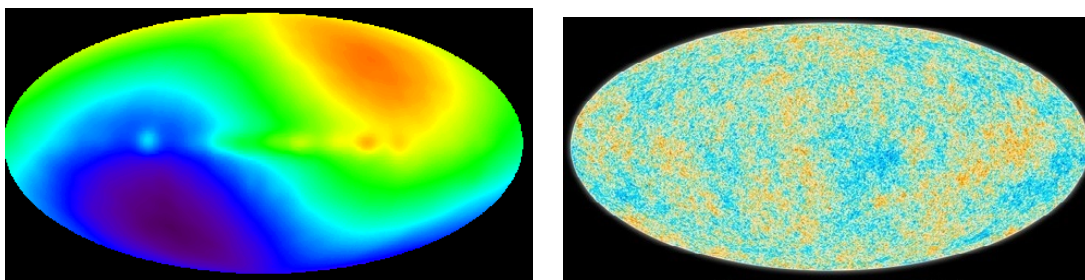
dove  $\gamma$  é il fattore di Lorentz e  $\theta$  é l'angolo compreso fra la linea di vista e la direzione del moto. Questo effetto permette di determinare la velocità assoluta del Sole rispetto alla radiazione di fondo, e quindi rispetto all'universo.

Dopo aver sottratto all'immagine della CMB la distorsione di dipolo, le fluttuazioni di temperatura rimaste sono minime. Se consideriamo la temperatura media della CMB come  $\langle T_{CMB} \rangle = 2.725 \text{ K}$  e la temperatura in un punto del cielo  $T(\theta, \phi)$ , possiamo calcolare le fluttuazioni adimensionali di temperatura in un determinato punto del cielo:

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \frac{T(\theta, \phi) - \langle T_{CMB} \rangle}{\langle T_{CMB} \rangle} \Rightarrow \langle \frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) \rangle \simeq 1.1 \times 10^{-5}. \quad (2.3)$$

La temperatura cambia di soli  $30 \mu\text{K}$  attraverso il cielo, questo vuol dire che la radiazione é notevolmente vicino ad essere una radiazione isotropa.

In figura 2.3 vengono mostrate due immagini della radiazione cosmica di fondo. La prima mostra le anisotropie di dipolo ottenute dal satellite COBE, la seconda le fluttuazioni di temperatura del satellite **Planck**.



(a) *Distorsione di dipolo della CMB.*

(b) *Fluttuazioni di temperatura di CMB.*

Figura 2.3: (a) Raffigura l'anisotropia di dipolo della CMB misurata da COBE, causata dal moto proprio del satellite. Le zone verdi e gialle rappresentano le parti piú calde, mentre quelle blu le piú fredde. (b) Mostra le fluttuazioni in temperatura rimaste dopo la sottrazione della distorsione di dipolo. Questa immagine é stata ottenuta dalla recente missione **Planck Surveyor**, terminata nell'ottobre 2013, che ha fornito importanti informazioni sul fondo cosmico a microonde.

<sup>4</sup>La distorsione fu scoperta per la prima volta nel 1977, usando uno strumento a bordo di un aereo.

### 2.2.4 L'effetto Sunyaev-Zel'dovich

Quando i fotoni di bassa energia della CMB passano attraverso un gas ionizzato e caldo ( $T \simeq 10^8 K$ ) in un ricco ammasso di galassie, una piccola frazione di questi fotoni (tipicamente tra i  $10^{-3}$  e i  $10^{-2}$ ) vengono scatterati ad energie piú alte a causa dell'interazione con gli elettroni ad alta energia presenti nel gas. Questo processo di scattering, chiamato **Compton inverso**, fa crescere la frequenza dei fotoni scatterati di una quantità media  $\Delta\nu$  pari a:

$$\left\langle \frac{\Delta\nu}{\nu} \right\rangle = 4 \frac{kT_e}{m_e c^2} \quad (2.4)$$

Dove  $T_e$  rappresenta la temperatura degli elettroni del gas. La modifica risultante nello spettro della CMB, mostrato in figura 2.4, é chiamato **effetto Sunyaev-Zel'dovich termico**.<sup>5</sup> Sebbene lo spettro non ha piú la forma precisa di corpo nero, il suo spostamento a frequenze piú alte puó essere usato per trovare una decrescita  $\Delta T$  nella temperatura iniziale  $T_0$  della CMB:

$$\frac{\Delta T}{T_0} \simeq -2 \frac{kT_e}{m_e c^2} \tau \quad (2.5)$$

Dove  $\tau$  é il cammino ottico del gas presente nell'ammasso lungo la linea di vista. Tipici valori della variazione della temperatura sono dell'ordine di  $10^{-4}$ . L'osservazione di tale effetto in molti ammassi di galassie conferma che é indipendente dal redshift dell'ammasso.

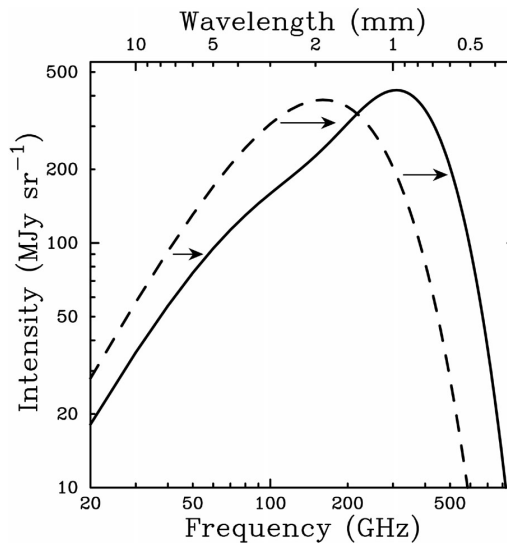


Figura 2.4: Spettro non modificato della CMB (linea tratteggiata) e spettro distorto dall'effetto S-Z (linea continua). Per frequenze minori del picco, molti fotoni sono scatterati fuori dall'intervallo di frequenza cosí che l'intensitá decresce. In modo analogo, a frequenze maggiori del picco, pochi fotoni vengono scatterati e l'intensitá aumenta. Il risultato totale é uno spostamento dello spettro a frequenze maggiori.

<sup>5</sup>Se l'ammasso di galassie ha un moto reale nella direzione radiale rispetto alle CMB si viene a creare uno spostamento Doppler aggiuntivo dei fotoni scatterati. Questa piccola perturbazione ulteriore dello spettro del fondo cosmico é chiamata **effetto Sunyaev-Zel'dovich cinetico**.

# Appendice A

## Calcolo del valor medio dell'energia

$\bar{\epsilon}$

### $\bar{\epsilon}$ nel caso classico

Nel caso classico calcolato da Rayleigh-Jeans abbiamo:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon f(\epsilon) d\epsilon}{\int_0^{\infty} f(\epsilon) d\epsilon}$$

dove  $f(\epsilon) = C e^{-\epsilon\beta}$  e  $\beta = 1/kT$ . Andando a sostituire questi valori nella formula precedente troviamo:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon e^{-\epsilon\beta} d\epsilon}{\int_0^{\infty} e^{-\epsilon\beta} d\epsilon} = -\frac{d}{d\beta} \log \int_0^{\infty} e^{-\epsilon\beta} d\epsilon = \frac{d}{d\beta} \log \beta = \frac{1}{\beta} = kT.$$

Questo risultato, in termodinamica statistica, é il fondamentale **teorema di equipartizione dell'energia**.

### $\bar{\epsilon}$ nel caso quantistico

In questo caso invece di avere integrali abbiamo sommatorie, in quanto l'energia é discretizzata in pacchetti detti quanti.

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n e^{-\epsilon_n\beta}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\epsilon_n\beta}} = -\frac{d}{d\beta} \log \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\epsilon_n\beta} = -\frac{d}{d\beta} \log \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta h\nu})^n$$

Usando, ora, la serie geometrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

otteniamo:

$$\bar{\epsilon} = -\frac{d}{d\beta} \log \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

# Appendice B

## Determinazione della legge di Stefan-Boltzmann

A partire dalle legge di Planck per l'intensità di spettro di corpo nero possiamo determinare la legge di Stefan-Boltzmann.

Prendiamo la densità totale di energia, integrando  $u(\nu)$  su tutto lo spettro:

$$u = \int_0^{\infty} u(\nu) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Per agevolare il calcolo imponiamo  $a = \frac{8\pi h}{c^3}$  e  $b = \frac{h}{kT}$  e otteniamo:

$$\begin{aligned} u &= a \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{b\nu} - 1} = a \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 e^{-b\nu} d\nu}{1 - e^{-b\nu}} = a \int_0^{\infty} \nu^3 e^{-b\nu} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-b\nu})^n d\nu = \\ &= a \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \nu^3 e^{-b\nu n} d\nu = -a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^3}{d(bn)^3} \int_0^{\infty} e^{-b\nu n} d\nu = \\ &= -a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^3}{d(bn)^3} \frac{1}{bn} = \frac{6a}{b^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}. \end{aligned}$$

Sapendo che la serie all'ultimo membro é uguale a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

abbiamo il seguente risultato:

$$u = \frac{8\pi^5 h k^4}{15c^3} T^4$$

Inserendo i valori numerici delle costanti  $h, k, c$  si ottiene il valore misurato sperimentalmente della costante di Stefan-Boltzmann  $\sigma$ . E, quindi, otteniamo  $u = F = \sigma T^4$ .

# Appendice C

## Determinazione della legge di Wien

Dalla legge di Planck possiamo ricavare anche la legge dello spostamento di Wien. Per farlo, riscriviamo la legge in una forma piú agevole, ponendo  $\alpha = 8\pi hc$  e  $\gamma = hc/kT$ :

$$u(\lambda) = \frac{\alpha}{\lambda^5} (e^{\gamma/\lambda} - 1)^{-1}$$

Per trovare dove cade il massimo di questa funzione (e quindi il picco di emissione), calcoliamo la derivata rispetto a  $\lambda$  e la poniamo uguale a zero:

$$\frac{du}{d\lambda} = -\frac{\alpha}{\lambda^6} (e^{\gamma/\lambda} - 1)^{-1} \left( 5 - \frac{\gamma/\lambda e^{\gamma/\lambda}}{e^{\gamma/\lambda} - 1} \right) = 0.$$

La soluzione si ha per  $\lambda \rightarrow \infty$  e per  $\lambda = \lambda_{max}$ , soluzione dell'equazione trascendente:

$$5(e^x - 1) = xe^x$$

dove si é posto  $x = \gamma/\lambda$ . La soluzione diversa da 0 é unica, e il suo valore numerico puó essere calcolato per via grafica, e corrisponde all'intersezione delle due funzioni presenti nell'equazione. La soluzione, quindi, é in  $x_0 \simeq 4.9651$  e ci permette di scrivere:

$$\lambda_{max} T = \frac{hc}{kx_0} = \text{cost.}$$

forndo cosí la legge di Wien:

$$\lambda_{max} = \frac{\text{cost.}}{T} = \frac{0.29}{T}$$

Dove nell'ultimo passaggio abbiamo semplicemente sostituito i valori numerici alle costanti. Con dei calcoli analoghi si ottiene la legge di Wien in funzione della frequenza.

# Bibliografia

## Libri:

- [1] Rybicki G. B. and Lightman A. P., *Radiative Processes in Astrophysics*, WILEY-VCH, Weinheim, 2004.
- [2] Carroll B. W. and Ostlie D. A. , *An Introduction to Modern Astrophysics*, Pearson International Edition, San Francisco, 2007.
- [3] Ryden B., *Introduction to Cosmology*, Addison Wesley, San Francisco, 2003.

## Dispense:

- [4] Dallacasa D. , *Processi di Radiazione e MHD*, Dispense del corso di Processi di Radiazione e MHD, Università degli studi di Bologna, a.a.= 2013-2014.
- [5] Ravanini F., *Istituzioni di Fisica Teorica*, Dispense del corso di Fisica Teorica, Università degli studi di Bologna, a.a.= 2013-2014.
- [6] Maestri T., *Physics of Planetary Atmospheres*, Dispense del corso di Atmosfere Planetarie, Università degli studi di Bologna, a.a.= 2013-2014.
- [7] C. Fanti e R. Fanti, *Una Finestra sull'Universo "Invisibile"- Lezioni di Radioastronomia*, Università degli studi di Bologna, 2012.

## Sitografia:

- [8] Wright E.L., URL: <http://www.astro.ucla.edu/wright/cosmolog.htm>.
- [9] Waynehu, Professor of Department of Astronomy and Astrophysics University of Chicago, URL: <http://background.uchicago.edu/whu/index.html>.