

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

INFLAZIONE COSMICA E ONDE GRAVITAZIONALI PRIMORDIALI

Relatore:

Dott. Michele Cicoli

Presentata da:

Daniele Gregori

Sessione II

Anno Accademico 2013/2014

Abstract

La teoria dell'inflazione risolve alcuni problemi fondamentali posti dalla teoria standard dell'origine dell'universo, in particolare chiarisce perché l'universo è piatto e omogeneo quando secondo la cosmologia standard non lo dovrebbe essere (o meglio: lo potrebbe essere solo con probabilità molto bassa). Inoltre la teoria dell'inflazione spiega l'origine delle anisotropie della radiazione cosmica di fondo e in tal modo l'inflazione è responsabile anche dell'origine della struttura a grande scala dell'universo. La teoria inflazionaria presenta la possibilità di una conferma sperimentale. Alcune sue predizioni sono già state verificate e una forte prova era sembrata venire dall'esperimento BICEP2, ma per ora (novembre 2014) non c'è stata una conferma. Nello specifico, l'esperimento BICEP2 aveva dichiarato a marzo 2014 di aver rilevato nella radiazione cosmica di fondo il segnale di onde gravitazionali che potevano essere state provocate soltanto dall'inflazione. La presente tesi descrive gli aspetti classici (non quantistici) della teoria dell'inflazione, riporta i risultati relativi alla trattazione quantistica delle perturbazioni della radiazione cosmica di fondo e illustra la questione delle verifiche sperimentali della teoria dell'inflazione, dedicando particolare rilievo al recente esperimento BICEP2.

Indice

1	Introduzione	5
1.1	La teoria dell'inflazione	6
1.2	Argomenti trattati	6
1.3	Ringraziamenti	7
2	Cosmologia del Big Bang Caldo	8
2.1	L'espansione dell'universo	9
2.1.1	La metrica di Friedmann-Robertson-Walker	9
2.1.2	Tempo conforme e geodesiche nulle	10
2.1.3	Campi vettoriali, tensoriali e l'equazione di continuità	10
2.2	Le equazioni di Friedmann	11
2.3	Scale	14
2.3.1	Scale caratteristiche	14
2.3.2	Orizzonti	16
2.4	Storia dell'universo	17
2.4.1	Considerazioni generali	17
2.4.2	Periodo $M_{\text{pl}} > \rho^{1/4} > 100 \text{ GeV}$	18
2.4.3	Periodo $100 \text{ GeV} > \rho^{1/4} > 10 \text{ eV}$	18
2.4.4	Periodo $1 \text{ eV} > \rho^{1/4}$	19
3	Dinamica classica dell'Inflazione	21
3.1	Motivazioni per l'ipotesi inflazionaria	22
3.1.1	Il problema dell'orizzonte	22
3.1.2	Il problema della piattezza	23
3.1.3	Il problema dei retaggi indesiderati	25
3.1.4	L'origine delle disomogeneità	25
3.2	Definizione di inflazione	26
3.3	Risoluzione dei problemi della cosmologia del Big Bang standard	27
3.3.1	Risoluzione del problema dell'orizzonte	27
3.3.2	Risoluzione del problema della piattezza	28
3.3.3	Risoluzione del problema dei retaggi	28
3.3.4	Evoluzione delle scale e generazione delle perturbazioni	28
3.3.5	Diagramma conforme per l'inflazione	30
3.4	Fisica dell'inflazione	33
3.4.1	Dinamica dei campi scalari	33
3.4.2	Inflazione Slow-roll	35
3.4.3	Formulazione Hamilton-Jacobi per l'inflazione	37
3.4.4	Ammontare di inflazione	38

3.5	Inflazione e storia dell'universo	39
3.5.1	Evoluzione delle scale	39
3.5.2	Condizioni iniziali per l'inflazione	40
3.5.3	Reheating	41
4	Fluttuazioni quantistiche durante l'Inflazione	43
4.1	Teoria perturbativa cosmologica	44
4.1.1	Generalità	44
4.1.2	Disomogenità dell'universo	45
4.1.3	Statistica delle perturbazioni cosmologiche	47
4.2	Origine quantistica delle strutture	48
4.3	Spettri primordiali	49
4.3.1	Risultati generali	49
4.3.2	Risultati slow-roll	49
4.4	Scala energetica dell'inflazione e limite di Lyth	50
4.4.1	Scala energetica dell'inflazione	50
4.4.2	Il limite di Lyth	50
5	Modelli di Inflazione	51
5.1	Modelli a un campo slow-roll	52
5.1.1	Inflazione a piccolo campo	52
5.1.2	Inflazione a grande campo	53
5.2	Altri modelli	54
5.3	Spettri di potenza per il modello $m^2\phi^2$	54
6	Contatto con le osservazioni	56
6.1	Ricavare informazioni sugli spettri primordiali	57
6.2	Anisotropie della radiazione cosmica di fondo	57
6.2.1	Campo di anisotropia	57
6.2.2	Modi E e B	58
6.2.3	Spettri di potenza angolari	59
6.3	Struttura a grande scala	59
6.4	Test per l'inflazione	60
6.4.1	Evidenze correnti	60
6.4.2	Test futuri	61
6.4.3	Esperimento BICEP2	62
	Bibliografia	65

Capitolo 1

Introduzione

1.1 La teoria dell'inflazione

La teoria dell'inflazione è nata per risolvere alcuni problemi fondamentali posti dalla teoria del Big Bang. Senza l'inflazione, infatti, risultano inspiegabili l'omogeneità a grande scala dell'universo e la sua piattezza. Queste due proprietà, senza la teoria dell'inflazione, dovrebbero entrare a far parte delle condizioni iniziali per l'origine dell'universo; e i calcoli mostrano che si tratterebbe di condizioni iniziali molto particolari e non generiche, come invece sarebbe naturale assumere. Inoltre, l'inflazione permette di spiegare perché alcune entità fisiche (come per esempio i monopoli magnetici) non siano osservate, nonostante alcune teorie predicano che nell'universo primordiale dovrebbero esserne state prodotte in abbondanza.

Oltre a risolvere questi problemi concernenti l'origine dell'universo, l'inflazione permette anche di spiegare l'origine delle strutture a grande scala dell'universo (ammassi e superammassi di galassie, filamenti di galassie, ecc.). Infatti, da una parte, l'inflazione permette di cancellare qualsiasi disomogeneità dell'universo che sia presente prima che essa avvenga, dall'altra, essa stessa provoca la nascita di piccole disomogeneità. Queste piccole disomogeneità prodotte dall'inflazione hanno un'origine quantistica, ovvero, sarebbero fluttuazioni quantistiche microscopiche che l'inflazione avrebbe esteso fino a fargli raggiungere scale cosmologiche. Una volta terminata l'inflazione, queste piccole irregolarità sarebbero andate incontro a un processo di accrescimento per collasso gravitazionale, portando così all'origine delle strutture a grandi scale dell'universo.

La teoria dell'inflazione non è soltanto una teoria speculativa ma porta anche a delle previsioni. Alcune previsioni sono già state verificate, tra le quali le più importanti sono la quasi invarianza di scala e la gaussianità dello spettro di potenza delle perturbazioni scalari¹. Tali verifiche sono state eseguite dagli esperimenti COBE, WMAP e Planck. In marzo 2014, gli autori dell'esperimento BICEP2 hanno dichiarato di aver trovato una prova sperimentale decisiva dell'inflazione [5]. In realtà, come gli stessi sperimentatori hanno poi ammesso, l'esperimento non è conclusivo, nel senso che per interpretare correttamente i suoi risultati è necessario esaminare altri dati. In giugno 2014, i risultati dell'esperimento Planck hanno dato forte indicazione che l'interpretazione che BICEP2 ha attribuito ai propri dati sia sbagliata [9]. A seconda del risultato di ulteriori analisi, potrebbe essere confermata o smentita la conclusione iniziale fatta dal gruppo di ricerca di BICEP2, ovvero che l'esperimento ha rilevato, nella radiazione cosmica di fondo, un segnale riconducibile a onde gravitazionali prodotte dall'inflazione. La rilevazione di tali onde gravitazionali inflazionarie sarebbe una forte prova della teoria dell'inflazione.

1.2 Argomenti trattati

Questa tesi ha lo scopo di illustrare la teoria dell'inflazione, dal punto di vista della sua dinamica classica e della generazione quantistica delle perturbazioni cosmologiche, tralasciando gli aspetti legati alla gravità quantistica.

¹La quasi invarianza di scala dello spettro consiste nel fatto che l'indice spettrale è molto prossimo ma non esattamente uguale a uno, mentre la gaussianità corrisponde al fatto che gli effetti di non-gaussianità sono trascurabili.

Nel capitolo 2 viene esposta brevemente la teoria dell'espansione dell'universo, dal punto di vista geometrico e dinamico; inoltre viene illustrata sinteticamente la storia dell'universo, a partire dalla sua origine. Il titolo di questo capitolo è "Cosmologia del Big Bang Caldo" perché in esso non viene considerata la dinamica inflazionaria, che avrebbe avuto luogo in un momento anteriore al cosiddetto Big Bang Caldo, ovvero l'origine delle particelle del Modello Standard (della fisica delle particelle).

Nel capitolo 3 viene illustrata la dinamica classica dell'inflazione, ovvero basata sulla sola relatività generale, senza tenere conto degli effetti quantistici. Il capitolo inizia mostrando i problemi a cui porta la cosmologia del big bang caldo riguardo all'origine dell'universo e come l'inflazione, opportunamente definita, li risolva. In seguito viene anche esposta la base fisica dell'inflazione, ovvero la dinamica (classica) di un campo scalare chiamato inflatone. Infine, vengono accennate le teorie concernenti le condizioni iniziali per l'inflazione (l'inflazione caotica e l'inflazione eterna) e viene trattato brevemente il fenomeno del reheating, che descrive la transizione tra dinamica inflazionaria e dinamica cosmologica standard.

Nel capitolo 4 vengono trattate le perturbazioni di origine quantistica prodotte dall'inflazione. Nella prima parte del capitolo vengono illustrate alcune nozioni di teoria perturbativa cosmologica. Viene poi spiegato, in termini qualitativi, il meccanismo tramite il quale l'inflazione dà origine alle perturbazioni della metrica e della materia nell'universo primordiale; le predizioni quantitative di questo processo sono mostrate senza dimostrazione perché esse vengono ricavate utilizzando la teoria quantistica dei campi in spaziotempi curvi.

Nel capitolo 5 vengono trattati sommariamente i modelli di inflazione, illustrandone le generalità e mostrandone alcuni esempi. Viene dedicata particolare attenzione al cosiddetto modello $m^2\phi^2$, che è un modello di inflazione consistente con i recenti risultati sperimentali.

Nel capitolo 6, infine, viene trattato il lato sperimentale della teoria dell'inflazione. Nella prima parte del capitolo viene mostrato il modo in cui le previsioni teoriche degli spettri di potenza delle perturbazioni primordiali (trattate nel capitolo 4) vengono messe in relazione con le osservazioni sperimentali della radiazione cosmica di fondo e della struttura a grande scala dell'universo. Nella seconda parte del capitolo vengono esposti i veri e propri test sperimentali per l'inflazione. A termine del capitolo, viene spiegato brevemente l'esperimento BICEP2.

1.3 Ringraziamenti

Ringrazio il dott. Michele Cicoli, per il suo lavoro di relatore di questa tesi, e ringrazio la mia famiglia, per avermi permesso di portare a compimento questo corso di laurea.

Daniele Gregori

Capitolo 2

Cosmologia del Big Bang Caldo

2.1 L'espansione dell'universo

2.1.1 La metrica di Friedmann-Robertson-Walker

Alla base della cosmologia moderna sta l'assunzione che l'universo è omogeneo e isotropo. L'omogeneità è verificata, osservando la distribuzione delle galassie, per distanze maggiori di 300 milioni di anni luce; l'isotropia è invece verificata anche osservando la radiazione cosmica di fondo, che presenta un livello di anisotropia pari a una parte su 10^5 [3]. Nel formulare la nozione di isotropia, è necessario specificare una classe di osservatori rispetto ai quali essa è valida. Si tratta degli osservatori "in caduta libera" (o liberi), ovvero, degli osservatori che si muovono con velocità pari alla velocità media delle galassie nelle loro vicinanze.

Omogeneità e isotropia identificano, in maniera univoca, la metrica di *Friedmann-Robertson-Walker*. In coordinate cartesiane essa si esprime come segue [3]:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \left[d\mathbf{x}^2 + k \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - k\mathbf{x}^2} \right], \quad (2.1)$$

ovvero, il tensore metrico ha componenti:

$$g_{ij} = a^2(t) \left(\delta_{ij} + k \frac{x^i x^j}{1 - k\mathbf{x}^2} \right), \quad g_{i0} = 0, \quad g_{00} = -1 \quad ; \quad (2.2)$$

in coordinate polari, invece:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (2.3)$$

Nelle espressioni precedenti, $a(t)$ si chiama *fattore di scala* ed è conveniente normalizzarlo a 1 all'epoca attuale: $a_0 = 1$. Il fattore di scala $a(t)$ caratterizza la dimensione dell'ipersuperficie di tipo spazio Σ a diversi istanti di tempo.

k è il *parametro di curvatura* e caratterizza la curvatura dell'ipersuperficie di tipo spazio Σ (Σ è individuata dalla parte spaziale della metrica).

- $k = +1$: per Σ con curvatura positiva e l'universo si dice *chiuso*;
- $k = 0$ per Σ euclidea e l'universo si dice *piatto*;
- $k = -1$ per Σ con curvatura negativa e l'universo si dice *aperto*.

Considerando, per la metrica di Friedmann-Robertson-Walker, l'equazione del moto per particelle libere (ovvero l'equazione per le geodetiche) si verifica che osservatori in quiete nelle coordinate x^μ rimangono in quiete; per questo, tali coordinate sono dette *comoventi* [3]. Si definisce anche *punto comovente* la posizione di un osservatore che misura una densità di momento nulla.

Si ritiene che $a(t)$ sia sempre stata una funzione crescente del tempo per tutta l'evoluzione dell'universo ¹. La distanza propria di un oggetto a distanza radiale r è pari a:

$$d(t) = a(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}}, \quad (2.4)$$

¹Secondo la cosmologia *ekpirotica* e la cosmologia *ciclica*, è possibile che $a(t)$ sia stata una funzione decrescente del tempo durante un periodo di tempo (ipotetico) anteriore al Big Bang.

che, come si vede, è funzione solo di t . Pertanto $d(t)$ aumenta col tempo, ovvero, l'universo si espande.

Un'importante grandezza che caratterizza lo spazio-tempo di Friedmann-Robertson-Walker è il *parametro di Hubble*:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} . \quad (2.5)$$

Esso fornisce il tasso di espansione dell'universo, in quanto i termini della parte spaziale della metrica sono fattorizzati da $a^2(t)$ e \dot{a} è interpretabile come velocità di crescita di a .

Il valore attuale del parametro di Hubble non è noto con grande precisione, pertanto si è soliti esprimerlo come:

$$H_0 = h \, 100 \, \text{km Mpc}^{-1} \, \text{s}^{-1} , \quad (2.6)$$

con il parametro adimensionale h prossimo a 0.7 (le sue stime vanno da 0.65 a 0.75 circa [10]).

2.1.2 Tempo conforme e geodesiche nulle

Per particelle che si muovono alla velocità della luce è utile definire il *tempo conforme*:

$$\tau = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} , \quad (2.7)$$

dove si è assunto a $t = 0$ l'origine dell'universo.

La *distanza comovente* χ è definita tale che:

$$\frac{dr^2}{1 - kr^2} = d\chi^2 . \quad (2.8)$$

Se ora si considera un moto puramente radiale, la metrica (2.3) si esprime come:

$$ds^2 = a^2(\tau) [-d\tau^2 + d\chi^2] . \quad (2.9)$$

Si vede che, in queste condizioni e in queste coordinate, la metrica di Friedmann-Robertson-Walker assume una forma molto simile alla metrica di Minkowski, differendo da essa solo per un fattore comune $a^2(t)$. Pertanto le geodesiche nulle sono determinate dall'equazione:

$$\chi(\tau) = \pm\tau + \text{cost} . \quad (2.10)$$

2.1.3 Campi vettoriali, tensoriali e l'equazione di continuità

La corrente di galassie e il tensore energia impulso sono esempi di campi vettoriali e tensoriali i cui valori medi soddisfano le condizioni di omogeneità e isotropia [3]. Queste due proprietà permettono di dedurre alcune caratteristiche generali di questi campi.

A causa dell'isotropia, i valori medi $\langle v^i \rangle$ delle componenti di un vettore spaziale devono annullarsi. A causa dell'omogeneità, il valor medio di uno scalare spaziale (ovvero, una quantità invariante per trasformazioni di coordinate

spaziali) deve essere funzione soltanto del tempo. Quindi, la corrente di galassie (o di barioni, o altro) ha componenti:

$$J^i = 0, \quad J^0 = n(t), \quad (2.11)$$

con $n(t)$ il numero di galassie, barioni, ecc. in unità di volume proprio, in un sistema di riferimento comovente. Se il quadrivettore è conservato ($J^\mu{}_{;\mu} = 0$) si verifica facilmente che:

$$n(t) \propto \frac{1}{a^3(t)}. \quad (2.12)$$

Considerando ora tensori, l'isotropia richiede che il valor medio di un tensore spaziale t^{ij} sia proporzionale a δ^{ij} . Siccome a $\mathbf{x} = 0$ (si verifica dalla (2.2)) $g^{ij} = a^2(t)\delta^{ij}$, allora t^{ij} è anche proporzionale a g^{ij} . Similmente a prima, l'omogeneità richiede che i coefficienti di proporzionalità siano funzioni soltanto del tempo. Siccome si tratta di una proporzionalità tra tensori, essa vale in qualunque altro sistema di coordinate spaziali, ovvero vale anche per $\mathbf{x} \neq 0$. Quindi:

$$T^{00} = \rho(t), \quad T^{0i} = 0, \quad T^{ij} = g^{ij}(\mathbf{x}) a^{-2}(t) p(t). \quad (2.13)$$

Queste sono le definizioni convenzionali di densità di energia propria e di pressione propria. Il tensore $T_{\mu\nu}$ così definito risulta conservato; tale conservazione porta all'*equazione di continuità*:

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{3\dot{a}}{a}(p + \rho) = 0. \quad (2.14)$$

Le soluzioni di questa equazione sono trattate nel paragrafo seguente.

Il tensore energia impulso per un fluido perfetto è dato da [4]:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

con u^μ la quadrivelocità. In un sistema di riferimento comovente con il fluido, il tensore assume la forma (2.13), ovvero:

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p). \quad (2.16)$$

2.2 Le equazioni di Friedmann

Se la gravità fosse trascurabile, risulterebbe $\ddot{a} = 0$: l'espansione non accelererebbe, né decelererebbe mai. Le cose non stanno in questo modo se si tiene conto della gravità.

Le equazioni di Einstein si possono scrivere come [4]:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right), \quad (2.17)$$

in cui $R_{\mu\nu}$ è il tensore di Ricci per la metrica di Friedmann-Robertson-Walker, $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia impulso (2.13) e T è la sua traccia. D'ora in avanti fissiamo le unità in modo che $8\pi G = 1$. Sviluppando l'equazione precedente, si giunge alle due equazioni accoppiate di Friedmann [1]:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{1}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (2.18)$$

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p). \quad (2.19)$$

Queste equazioni permettono di calcolare l'andamento del fattore di scala a rispetto al tempo t o, con una trasformazione, rispetto al tempo conforme τ . L'equazione (2.18) viene chiamata *equazione di Friedmann fondamentale*.

Si vede subito dalla (2.19) che in un universo in espansione ($\dot{a} > 0$) in cui la materia presente sia di tipo ordinario (ovvero soddisfi la *strong energy condition*: $\rho + 3p \geq 0$) risulta $\ddot{a} < 0$. Inoltre, si verifica facilmente sempre dall'equazione di Friedmann fondamentale che è possibile che l'espansione si arresti (e si inverta) solo per un universo chiuso ($k = 1$).

Definendo la *densità critica*:

$$\rho_c = 3H^2 \quad (2.20)$$

e il *parametro di densità*:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (2.21)$$

si può riscrivere l'equazione di Friedmann fondamentale come:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \quad (2.22)$$

Da questa equazione si deduce che:

- Se $\Omega = 1$, ovvero la densità è pari alla densità critica, allora $k = 0$ e l'universo è piatto.
- Se $\Omega > 1$, ovvero la densità è maggiore della densità critica, allora $k = +1$ e l'universo è chiuso.
- Se $\Omega < 1$, ovvero la densità è minore della densità critica, allora $k = -1$ e l'universo è aperto.

Le due equazioni (2.18) e (2.19) possono essere combinate a dare:

$$\frac{d\rho}{dt} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (2.23)$$

che non è altro che l'equazione di continuità (2.14). Per risolvere questa equazione, si può assumere che la pressione e la densità siano legate dalla seguente equazione:

$$p = w\rho. \quad (2.24)$$

Risulta quindi:

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (2.25)$$

A seconda del valore di w , si possono distinguere tre tipi di fluido [3]:

Materia Si tratta di materia non relativistica, per essa $p = 0$, $w = 0$ e

$$\rho \propto a^{-3}. \quad (2.26)$$

Questo risultato può anche essere ottenuto considerando che $E \sim m_0 = \text{cost.}$ e $V \propto a^3$.

Radiazione Si tratta di materia relativistica o radiazione. Per essa è trascurabile la massa e quindi la traccia del tensore energia impulso:

$$T = -\rho + 3p = 0. \quad (2.27)$$

Pertanto: $w = \frac{1}{3}$ e:

$$\rho \propto a^{-4}, \quad (2.28)$$

risultato che può essere ancora una volta dedotto dal fatto che $V \propto a^3$ e $E \propto a^{-1}$, a causa del redshift cosmologico.

Energia del vuoto L'energia del vuoto è caratterizzata dal seguente tensore energia impulso [4]:

$$T^{\mu\nu} = -\rho_{\text{vac}} g_{\mu\nu}. \quad (2.29)$$

L'espressione precedente si ricava richiedendo che nell'espressione (2.15) il termine moltiplicante il prodotto delle quadrivelocità si annulli ($\rho + p = 0$), poichè in questo modo non c'è una direzione preferenziale per l'energia del vuoto. Quindi $p = -\rho$, $w = -1$. Pertanto:

$$\rho = \text{cost.} \quad (2.30)$$

Volendo far rientrare il termine di energia del vuoto nel lato sinistro delle equazioni di Einstein, è sufficiente definire la *costante cosmologica*:

$$\Lambda = \rho_{\text{vac}} \quad (2.31)$$

che porta a scrivere le equazioni di Einstein così:

$$R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}. \quad (2.32)$$

Facendo ora le assunzioni che l'universo sia piatto ($k = 0$) e che il suo contenuto di materia sia di un solo tipo, si può combinare il risultato (2.25) con l'equazione di Friedmann fondamentale (2.18) trovando:

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{2/3(1+w)} & w \neq -1, \\ e^{Ht} & w = -1. \end{cases} \quad (2.33)$$

Se $w = -1$ allora il parametro di Hubble è costante: $H = \sqrt{\Lambda/3}$ (si verifica da (2.25) e (2.18)).

Per tenere conto del fatto che possono essere presenti più di un solo tipo di fluido, per risolvere le equazioni di Friedmann si procede nel modo seguente [1]. Le densità e le pressioni sono additive:

$$\rho = \sum_i \rho_i, \quad p = \sum_i p_i, \quad (2.34)$$

dove ogni termine i -esimo corrisponde a una diversa specie. Si definiscono il rapporto *presente* tra la densità e la densità critica per la componente i -esima:

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c} \quad (2.35)$$

	w	$\rho(a)$	$\rho(t)$	$a(t)$	$a(\tau)$	τ_i
MD	0	a^{-3}	t^{-2}	$t^{2/3}$	τ^2	0
RD	$\frac{1}{3}$	a^{-4}	t^{-2}	$t^{1/2}$	τ	0
Λ	-1	a^0	t^0	e^{Ht}	$-\tau^{-1}$	$-\infty$

Tabella 2.1: Questa tabella esprime l'andamento della densità di energia col fattore di scala e col tempo; l'andamento del fattore di scala col tempo e col tempo conforme; il valore del tempo conforme τ_i tale che $a(\tau_i) = 0$. MD si riferisce a un universo dominato dalla materia, RD a un universo dominato dalla radiazione e Λ a un universo dominato dalla costante cosmologica.

e l'equazione di stato:

$$w_i \equiv \frac{p_i}{\rho_i}. \quad (2.36)$$

Tenuto conto del risultato (2.25), l'equazione di Friedmann fondamentale (2.18) si esprime come:

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \sum_i \Omega_i a^{-3(1+w_i)} + \Omega_k a^{-2}, \quad (2.37)$$

con $\Omega_k \equiv -k/a_0^2 H_0^2$ che parametrizza la curvatura. Valutando questa equazione al presente, si ricava una relazione di consistenza:

$$\sum_i \Omega_i + \Omega_k = 1. \quad (2.38)$$

Valutando l'altra equazione di Friedmann (2.19) al tempo presente, si ottiene anche la condizione di espansione accelerata oggi:

$$\frac{1}{a_0 H_0^2} \frac{d^2 a_0}{dt^2} = -\frac{1}{2} \sum_i \Omega_i (1 + 3w_i). \quad (2.39)$$

Le osservazioni indicano [1] che, al presente, l'universo è piatto oppure molto prossimo a ciò:

$$\Omega_k \sim 0 \quad (2.40)$$

ed è composto al 4% da atomi (barioni), 23% da materia oscura fredda e dal 73% da energia oscura (quest'ultima sembra risultare essere energia del vuoto, $w_\Lambda \simeq 1$):

$$\Omega_b \simeq 0.04, \quad \Omega_{dm} \simeq 0.23, \quad \Omega_\Lambda \simeq 0.73 \quad \Omega_{tot} \simeq 1. \quad (2.41)$$

Inoltre [11]:

$$\rho_{tot} \simeq 9.9 \times 10^{-30} \text{ g cm}^{-3}. \quad (2.42)$$

2.3 Scale

2.3.1 Scale caratteristiche

La *scala di Hubble* è pari a H^{-1} e può indicare sia un intervallo temporale che una lunghezza. Il tempo di Hubble rappresenta la scala di tempo caratteristica

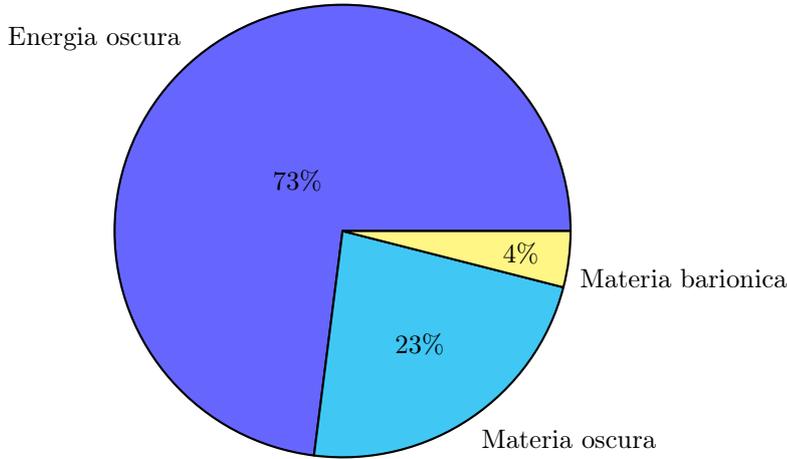


Figura 2.1: La composizione energetica dell'universo

dell'evoluzione del fattore di scala: durante un tempo di Hubble, $a(t)$ cresce di un fattore e [2].

Il tempo di Hubble fornisce anche una buona stima dell'età dell'universo [2]. Si usa la seguente espressione [3], invece, per calcolare l'età esatta dell'universo al tempo in cui è stata emessa luce osservata con redshift z :

$$t(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^{1/(1+z)} \frac{dx}{x\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_k x^{-2} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_R x^{-4}}}, \quad (2.43)$$

in cui $\Omega_M = \Omega_{dm} + \Omega_b$ e Ω_R si riferisce alla radiazione. Per calcolare l'età attuale dell'universo t_0 , è sufficiente porre in (2.43) $z = 0$.

Interpretando H^{-1} come lunghezza, risulta che esso stima l'ordine di grandezza del raggio dell'universo osservabile [2]. H^{-1} è chiamato quindi anche *raggio di Hubble*. Esso fornisce solo l'ordine di grandezza perché l'universo (osservabile) si espande: per calcolare il vero raggio dell'universo non è sufficiente moltiplicare la velocità della luce ($c = 1$) per l'età dell'universo ($t_0 = H^{-1}(t_0)$), perché ciò sarebbe lecito solo in uno spazio statico, mentre lo spazio reale si espande e "trasporta" la luce.

La curvatura spaziale di un universo non euclideo diventa significativa se esso viene osservato a distanze dell'ordine della *scala di curvatura* [2]:

$$r_{\text{curv}} = a|k|^{-1/2} \quad (2.44)$$

Si può dire che la scala di curvatura di un universo piatto sia infinita.

Le due scale caratteristiche sono legate dall'equazione di Friedmann:

$$\sqrt{|\Omega - 1|} = \frac{H^{-1}}{r_{\text{curv}}}. \quad (2.45)$$

In universi aperti, la scala di Hubble è sempre inferiore alla scala di curvatura, ma si avvicina ad essa nel limite $\Omega \rightarrow 0$, tipico del comportamento a tempi lunghi. In universi chiusi, la scala di Hubble può superare la scala di curvatura (l'equazione (2.45) deve essere modificata per la fase di contrazione di un universo chiuso) [2].

2.3.2 Orizzonti

Nelle moderne teorie cosmologiche ci sono orizzonti di due tipi: orizzonti di particella e orizzonti degli eventi.

In termini di distanza comovente χ , l'*orizzonte di particella* si definisce nel modo seguente. Dato un punto dell'universo P e un dato istante temporale t , l'orizzonte di particella comovente $\chi_p(t)$ è la massima distanza comovente a cui si può trovare un altro punto P' che può aver mandato informazione a P in un qualche istante di tempo passato t_i (dopo la nascita dell'universo). Se $\chi_p(t)$ è finito, un punto Q che si trova a una distanza maggiore di $\chi_p(t)$ non può aver mandato mai informazione a P ; allo stesso modo anche P non può aver mandato informazione a Q , ovvero, P e Q non possono essere stati in contatto causale.

Per calcolare $\chi_p(t)$, è sufficiente considerare il moto della luce.

$$\chi_p(t) = \int_0^{r_p(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \tau - \tau_i. \quad (2.46)$$

La corrispondente distanza propria è:

$$d_p(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.47)$$

Per esempio, se l'universo è dominato dalla radiazione: $d_p(t) = 2t = H^{-1}$; e se invece è dominato dalla materia: $d_p(t) = 3t = 2H^{-1}$. Al presente, in cui valgono le (2.41) e (2.40) [3]:

$$d_p(t_0) = H_0^{-1} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_k x^{-2} + \Omega_M x^{-3}}}, \quad (2.48)$$

(con $\Omega_M = \Omega_b + \Omega_{dm}$, inoltre si è considerata la possibilità di un Ω_k non esattamente nullo).

In termini di distanza comovente, l'*orizzonte degli eventi* si definisce nel modo seguente. Dato un punto dell'universo P e un dato istante temporale t , l'orizzonte degli eventi comovente $\chi_e(t)$ è la massima distanza comovente a cui si può trovare un altro punto P' al quale P potrà mandare informazione in un qualunque istante di tempo futuro t' (prima di un eventuale fine dell'universo al tempo T). Se $\chi_e(t)$ è finito, un punto Q che si trova a una distanza da P maggiore di $\chi_e(t)$ non gli potrà mai mandare informazione; similmente, anche Q non potrà mai mandare informazione a P ; ovvero, P e Q non potranno essere in contatto causale per tempi successivi a t . Ci sarebbero quindi punti dell'universo che non potremo mai vedere nè raggiungere viaggiando.

Per calcolare l'orizzonte degli eventi si procede in maniera analoga a quanto fatto per l'orizzonte di particella. La condizione che lo determina è la seguente:

$$\chi_e(t) = \int_t^T \frac{dt'}{a(t')} = \tau_T - \tau = \int_0^{r_e(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.49)$$

Anche se l'universo non terminasse ($T = \infty$), se l'integrale converge a $t = \infty$ l'orizzonte degli eventi è determinato da:

$$\chi_e(t) = \int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{r_e(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (2.50)$$

e la corrispondente distanza propria è:

$$d_e(t) = a(t) \int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.51)$$

In un universo dominato dalla materia, $a(t) \propto t^{2/3}$, pertanto l'integrale (2.50) non converge e non c'è orizzonte degli eventi. Tuttavia se nell'universo è presente anche una costante cosmologica, a tempi lunghi $a(t) \propto \exp Ht$ (con $H = H_0 \Omega_\Lambda^{1/2}$) e c'è un orizzonte degli eventi.

2.4 Storia dell'universo

2.4.1 Considerazioni generali

Al momento attuale, ci sono forti evidenze sperimentali per credere che l'espansione dell'universo sia stato un processo iniziato quando esso era molto più piccolo e caldo di quanto lo sia ora [1]. Infatti, l'unica spiegazione convincente per la radiazione cosmica di fondo è che essa sia stata rilasciata in un momento in cui l'universo era molto più caldo (la radiazione cosmica di fondo è costituita da radiazione elettromagnetica alla lunghezza d'onda delle microonde e pervade interamente l'universo in maniera molto uniforme). Inoltre, la misura delle abbondanze di elementi leggeri nell'universo (H, He, Li) corrisponde esattamente alle predizioni teoriche della teoria della nucleosintesi primordiale. Questo fa sì che si abbiano prove sperimentali della teoria del Big Bang fino a circa 1 s dopo l'origine dell'universo, corrispondente a densità di energia dell'ordine di 1 MeV.

Solitamente, si suppone che la storia dell'universo si estenda a ritroso nel tempo fino al momento in cui la sua densità di energia è pari alla scala di Planck: $\rho^{1/4} \sim 10^{18}$ GeV [2]. Per studiare l'universo a densità di energia maggiori è necessario considerare un completamento alla teoria della relatività generale che includa effetti di gravità quantistica.

Per tempi compresi tra 1 s e 10^{-11} s la dinamica dell'universo primordiale è teorizzata per estrapolazione dalle teorie fisiche ben comprese e verificate sperimentalmente [1]. In questo modo è possibile studiare l'universo fino a che esso raggiunge densità di energia dell'ordine di $\rho^{1/4} \sim 10^3$ GeV. C'è poca speranza che i futuri acceleratori di particelle permettano di superare questo valore di più di un paio di ordini di grandezza ². Pertanto, al di sotto dei 10^{-11} s dopo l'origine dell'universo la fisica dell'universo primordiale è fortemente speculativa.

In generale, due principi regolano la termodinamica e la fisica delle particelle in un universo in espansione [1]:

- le interazioni tra particelle cessano quando la velocità di interazione scende al di sotto della velocità di espansione;
- le simmetrie rotte nelle leggi fisiche possono essere reinstaurate ad alte densità di energia.

Vediamo ora i principali eventi nella storia dell'universo.

²È anche vero che si potrebbe trarre qualcosa dall'osservazione di raggi cosmici ultra-energetici: ne sono stati osservati con energie fino ai 10^{11} GeV. Tuttavia, si tratta di eventi estremamente rari [2].

2.4.2 Periodo $M_{\text{pl}} > \rho^{1/4} > 100 \text{ GeV}$

Tra i primi eventi della storia dell'universo, si teorizza che sia avvenuto un periodo di *inflazione*, a una energia pari all'energia di Planck o poco inferiore (10^{15} GeV), corrispondente a tempi compresi tra 10^{-43} s e 10^{-32} s dopo l'origine dell'universo. In questo periodo, la densità di energia dell'universo è dominata dal potenziale del campo scalare *inflatone* (definizioni più precise di inflazione saranno date in seguito). Si suppone che l'inflazione abbia determinato le condizioni iniziali per il Big Bang [2].

Dopo il termine dell'inflazione, per qualche tempo, l'universo è dominato da particelle non relativistiche (ovvero è dominato dalla materia). Questa era è chiamata *Big Bang Freddo*.

Alla fine di questo periodo le particelle non relativistiche decadono in particelle relativistiche e fanno sì che l'universo sia dominato dalla radiazione. Questo processo è chiamato *reheating* e porta al *Big Bang Caldo*. I prodotti di decadimento sono le particelle del Modello Standard. Nello scenario più semplice, questo periodo di dominazione della radiazione è unico e il successivo periodo di dominazione della materia non cede il posto a un altro periodo di dominazione della radiazione; in altri scenari, ci può essere un alternarsi di periodi di dominazione della materia e di dominazione della radiazione [2].

2.4.3 Periodo $100 \text{ GeV} > \rho^{1/4} > 10 \text{ eV}$

Appena sopra i 100 GeV i bosoni Z e W^\pm sono privi di massa. Le interazioni sono abbastanza forti da mantenere quark e leptoni in equilibrio termico [1].

Ammettendo il Big Bang caldo inizi al di sopra dei 100 GeV , questa soglia è l'ultimo momento possibile per generare l'*asimmetria barionica* (ovvero uno sbilanciamento tra barioni e antibarioni) tramite un meccanismo termico [2].

L'universo raggiunge densità di energia inferiore ai 100 GeV a circa 10^{-10} s dopo l'origine dell'universo. I bosoni Z e W^\pm acquisiscono massa e la sezione d'urto delle interazioni deboli diminuisce sempre più con il calo di temperatura dell'universo.

A 100 MeV (10^{-4} s) avviene la transizione di fase quark-adroni, ovvero diventa energeticamente favorevole per i quark condensare in adroni [2].

Al massimo, il Big Bang Caldo deve essere iniziato a 10 MeV (10^{-2} s), perchè altrimenti, sarebbe invalidata una corretta nucleosintesi, che avverrà a 0.1 MeV [2].

A 1 MeV (1 s) i neutrini si disaccoppiano dal resto della materia [1]. In altre parole, al di sopra di questa energia, i neutrini erano in equilibrio termico con l'altra materia e l'energia era sufficiente per far sì che coppie neutrino-antineutrino si trasformassero in coppie particella-antiparticella (dei tipi precedenti). Esiste pertanto, oltre a una radiazione cosmica di fondo fatta di microonde (CMB: *cosmic microwave background*), anche una radiazione cosmica di fondo fatta di neutrini (CNB: *cosmic neutrino background*), che peraltro risale a un momento della storia dell'universo molto anteriore. Tuttavia, considerata la difficoltà di osservazione dei neutrini, la CNB potrebbe non essere mai osservata.

Subito dopo, a 0.5 MeV , l'energia scende al di sotto della massa a riposo dell'elettrone e quindi elettroni e positroni si annichilano efficientemente. Solamente un'asimmetria materia-antimateria di una parte su un miliardo sopravvive [1].

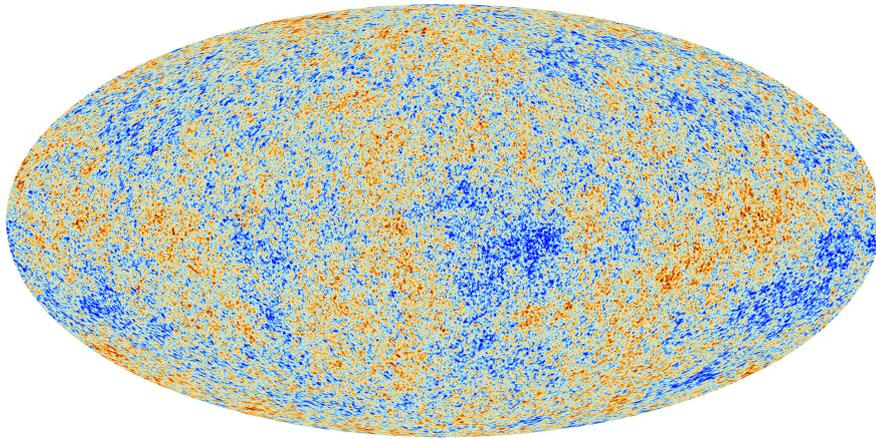


Figura 2.2: La radiazione cosmica di fondo osservata dalla sonda Planck [6]. Il colore blu indica zone in cui la temperatura è inferiore alla media, i colori giallo e rosso indicano zone in cui la temperatura è superiore alla media.

La nucleosintesi avviene a 0.1 MeV (100 s): i protoni e i neutroni si legano per formare nuclei leggeri (prevalentemente idrogeno e elio-4) [2].

A 1 eV (10^4 anni) la densità di materia non-relativistica eguaglia la densità di materia relativistica e quindi l'era della radiazione ha termine [2].

2.4.4 Periodo $1 \text{ eV} > \rho^{1/4}$

2.4.4.1 La CMB - radiazione cosmica di fondo

Il primo evento significativo dell'era di dominazione della materia è il disaccoppiamento tra radiazione e materia, a un'energia di 0.1 eV, corrispondente a una temperatura di 3000 K e a un'età dell'universo pari a 380 000 anni. Si tratta in realtà di una sequenza di eventi. Il primo evento è la *ricombinazione*, in cui la maggioranza degli elettroni si legano con i nuclei per formare gli atomi, poiché l'energia dei fotoni non è più sufficiente per rimuoverli. Rimangono ancora elettroni liberi ed essi sono accoppiati ai fotoni. Subito dopo, però, avviene il disaccoppiamento completo e i fotoni possono muoversi liberamente [2].

Viene così rilasciata la *radiazione cosmica di fondo*, il più antico segnale che possiamo oggi vedere. L'enorme redshift cosmologico della CMB ($z = 1100$) fa sì che oggi la sua radiazione ci appaia alla lunghezza d'onda delle microonde. Inoltre, il suo spettro corrisponde a quello di un corpo nero alla temperatura di circa 2.73 K [1].

La CMB presenta delle leggere anisotropie, corrispondenti a variazioni di temperatura rispetto alla media di 2.73 K dell'ordine di una parte su 10^5 [1]. Queste anisotropie forniscono evidenza di fluttuazioni nella densità di materia primordiale. Inoltre, le anisotropie sono i "semi" dai quali in seguito si sono generate le grandi strutture dell'universo, attraverso un meccanismo di collasso gravitazionale. Secondo la teoria dell'inflazione, le fluttuazioni nella densità di materia primordiale hanno un'origine quantistica: si tratterebbe di fluttuazioni microscopiche che l'inflazione avrebbe esteso a dimensioni macroscopiche [1].

2.4.4.2 La crescita delle strutture

È possibile descrivere matematicamente le perturbazioni nella densità di materia nel seguente modo [1]:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \bar{\rho}(t)[1 + \delta(\mathbf{x}, t)], \quad (2.52)$$

in cui $\bar{\rho}$ rappresenta il valor medio della densità e δ rappresenta la perturbazione.

La formazione delle strutture a grandi scala dell'universo è avvenuta attraverso la crescita di queste fluttuazioni di densità, a causa della combinazione degli effetti di attrazione gravitazionale e di pressione di fondo. Durante il periodo di dominazione della radiazione, la crescita è lenta: $\delta \sim \ln a$ (a è il fattore di scala). Durante il periodo di dominazione della materia, l'aggregazione è più efficiente: $\delta \sim a$. Le piccole scale diventano non lineari - $\delta \gtrsim 1$ - prima; avviene così una formazione delle strutture in maniera gerarchica, con le strutture più piccole (stelle e galassie) che si formano per prime e in seguito si aggregano tra loro in strutture più grandi (ammassi e superammassi di galassie).

A $z \approx 1$, ovvero a un'età dell'universo $\sim 10^9$ anni, l'energia oscura comincia a dominare l'universo. Lo spaziotempo accelera la sua espansione e la crescita di strutture cessa: $\delta \sim \text{cost.}$ [1].

Se l'universo non è esattamente euclideo, ci sarà un'altra transizione quando la scala di Hubble diventerà dell'ordine della scala di curvatura: l'universo diventerà dominato dalla curvatura. Se l'universo fosse chiuso, questo porterebbe a un collasso [2].

Evento	t	$\rho^{1/4}$
Epoca di Planck?	$< 10^{-43}$ s	10^{18} GeV
Inizia l'Inflazione?	10^{-42} s	10^{18} GeV
Epoca di Grande Unificazione?	10^{-36} s	10^{16} GeV
Finisce l'Inflazione, inizia il Big Bang Freddo?	$10^{-32 \pm 6}$ s	$10^{13 \pm 3}$ GeV
Inizia il Big Bang Caldo?	$10^{-18 \pm 6}$ s	$10^{6 \pm 3}$ GeV
Rottura della Supersimmetria?	$< 10^{-10}$ s	> 1 TeV
Fine epoca di unificazione Elettrodebole	10^{-10} s	100 GeV
Transizione Quark-Adroni	10^{-4} s	100 MeV
$\gamma, \nu, e, \bar{e}, n, p$ in equilibrio termico	10^{-2} s	10 MeV
Disaccoppiamento ν , Annichilazione $e\bar{e}$	1 s	1 MeV
Nucleosintesi primordiale	100 s	0.1 MeV
Eguaglianza materia-radiazione	10^4 anni	1 eV
Formazione atomi, Disaccoppiamento fotoni	10^5 anni	0.1 eV
Formazione delle prime strutture	$\sim 10^8$ anni	
Dominazione Energia Oscura	$\sim 10^9$ anni	
Il presente	13.8×10^9 anni	1 meV

Tabella 2.2: Gli eventi nella storia dell'universo [2] [1].

Capitolo 3

Dinamica classica dell'Inflazione

3.1 Motivazioni per l'ipotesi inflazionaria

Nella visione moderna, la proprietà dell'inflazione di gran lunga più importante è che essa può aver generato le irregolarità nell'universo primordiale [2], le quali poi, avrebbero formato le strutture a grandi scala che osserviamo oggi.

Tuttavia, storicamente, l'ipotesi inflazionaria è stata introdotta per risolvere altri problemi posti dalla cosmologia del Big Bang standard. Questa, infatti, mostra che l'universo che oggi osserviamo è il risultato di condizioni iniziali estremamente particolari e improbabili (si dice che l'universo necessita di un *fine tuning*).

Come sarà spiegato tra poco, i problemi dell'orizzonte e della piatezza corrispondono, nel problema delle condizioni iniziali, rispettivamente alla parte di posizioni iniziali e alla parte di velocità iniziali. Per specificare questi parametri, considereremo una sezione spaziale dell'universo Σ a un determinato tempo t (ovvero faremo un'operazione di *slicing*). Le leggi usate per evolvere nel tempo questo sistema sono le leggi della gravità e della meccanica dei fluidi [1].

3.1.1 Il problema dell'orizzonte

La distribuzione spaziale di materia nell'universo, ad un dato tempo, è descritta dai campi di densità e pressione: $\rho(\mathbf{x})$ e $p(\mathbf{x})$ [1]. L'osservazione della radiazione cosmica di fondo mostra che, rispetto all'epoca attuale, le disomogeneità erano molto più lievi al tempo di emissione della radiazione che oggi osserviamo (si tratta di fluttuazioni di una parte su 10^5 [1]). La radiazione cosmica di fondo che può essere osservata, in un particolare momento, corrisponde alla radiazione emessa dalla cosiddetta *superficie di last scattering*: ovvero, l'insieme dei punti dell'universo che, al momento del disaccoppiamento fotoni-materia, si trovava alla giusta distanza da noi in modo che la sua radiazione ci raggiungesse in quel particolare momento in cui noi la osserviamo.

È possibile calcolare esattamente la distanza comovente entro la quale era stato possibile contatto causale tra differenti punti dell'universo prima del tempo di disaccoppiamento fotoni-materia (l'orizzonte di particella). Il risultato di tale calcolo è [2]:

$$\chi_{p,\text{dec}} = 180 (\Omega - \Omega_\Lambda)_0^{-1/2} h^{-1} \text{Mpc}. \quad (3.1)$$

Qui $(\Omega - \Omega_\Lambda)_0$ corrisponde al valore attuale di $\Omega - \Omega_\Lambda$ e si trova tra 0.2 e 0.5 (inoltre $\Omega \equiv \Omega_{\text{tot}}$, di qui in avanti). La distanza comovente che la radiazione percorre dopo il disaccoppiamento risulta invece decisamente maggiore [2]:

$$\chi_{\text{obs}} = 5820 h^{-1} \text{Mpc}. \quad (3.2)$$

La discrepanza tra i due valori mostra che la superficie di last scattering occupa una superficie maggiore di quella che le avrebbe permesso di essere in contatto causale con se stessa. Infatti, poichè l'orizzonte di particella comovente non dipende dal tempo, il raggio della sfera la cui superficie è la superficie di last scattering è dato da (3.2). Non solo, considerato che la discrepanza è grande, *molte* regioni della superficie di last scattering non possono essere state in contatto causale tra loro (si stima che esse siano 10^5). Il problema dell'orizzonte consiste nello spiegare questo: come è possibile che regioni che non sono mai state in contatto causale possono avere proprietà fisiche estremamente simili.

Questo problema si ripete anche se si considera la teoria della nucleosintesi primordiale: affinché le predizioni di questa teoria siano corrette, l'universo deve essere omogeneo ad una scala molto maggiore dell'orizzonte di particella a quel tempo [2].

Si può esporre il problema dell'orizzonte anche nel modo seguente. È possibile esprimere l'orizzonte di particella nei modi equivalenti:

$$\chi_p \equiv \tau = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^a \frac{da'}{Ha'^2} = \int_0^a d \ln a' \left(\frac{1}{a'H} \right). \quad (3.3)$$

Ora, se l'universo è dominato da materia costituita da un fluido con equazione di stato con parametro w , allora il *raggio di Hubble comovente* risulta (da (2.33)):

$$(aH)^{-1} = H_0^{-1} a^{(1+3w)/2}. \quad (3.4)$$

L'equazione precedente mostra che il comportamento qualitativo del raggio di Hubble comovente dipende dal segno del fattore $(1 + 3w)$. Durante l'espansione standard, l'universo è dominato da una combinazione di materia (non relativistica) e radiazione: pertanto $w \geq 0$ [2]. Quindi il raggio di Hubble comovente $(aH)^{-1}$ aumenta in maniera monotona col tempo e l'orizzonte comovente τ fa lo stesso. Questo significa che scale comoventi che oggi entrano nell'orizzonte, al momento del disaccoppiamento fotoni-materia erano molto al di fuori di esso, perché esso era molto minore di oggi. Ancora una volta, non si spiega l'estrema similarità fisica di regioni che non possono essere state in contatto causale tra loro in passato.

Concludendo, la teoria del Big Bang standard è costretta ad assumere, come condizione iniziale per il Big Bang, un universo estremamente omogeneo. La teoria dell'inflazione permette di evitare questo e consente all'universo di avere avuto origine anche con un elevato livello di non-omogeneità, ovvero, di avere avuto origine in uno stato generico.

3.1.2 Il problema della piattezza

Per completare la definizione delle condizioni iniziali dell'universo (ovvero, il *problema di Cauchy* per l'universo) è necessario specificare le velocità iniziali delle particelle dell'universo. Se tali particelle hanno velocità troppo elevate, l'universo si espande troppo velocemente e diventa presto vuoto; se invece esse sono troppo basse, l'universo collasa subito su se stesso [1]. Si ha quindi, ancora, una necessità di condizioni iniziali particolari, se si vuole che l'universo si espanda correttamente. Inoltre, il problema appare ancora maggiore considerandolo in combinazione con il problema dell'orizzonte: le velocità delle particelle dovrebbero essere state del valore giusto in regioni dell'universo primordiale causalmente disconnesse [1].

Le velocità delle particelle sono in realtà legate alla curvatura dello spazio. Infatti, il *parametro di curvatura*:

$$\Omega_k \equiv \Omega - 1 = \frac{\rho - \rho_c}{\rho_c}, \quad (3.5)$$

(con $\rho_c \equiv 3H^2$) può essere interpretato come la differenza tra l'energia potenziale media e l'energia cinetica media di una regione di spazio [1]. Questo vuol dire

che, se l'universo è piatto $\Omega_k = 0$, l'energia cinetica media è uguale all'energia potenziale media e quindi, per la data regione di spazio, non c'è accelerazione globale per le particelle che la occupano (perché le accelerazioni si compensano).

Vediamo allora di formulare il problema della piatezza in termini quantitativi. Dall'equazione di Friedmann fondamentale

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}, \quad (3.6)$$

si vede che: se $\Omega = 1$, esso rimane tale per sempre (ma $\Omega = 1$ è un valore particolare, non generico); se $\Omega \neq 1$, esso evolve. Nella cosmologia del Big Bang standard, come già visto, $(aH)^{-1}$ aumenta col tempo; pertanto, poiché:

$$|\Omega - 1| = (aH)^{-2}, \quad (3.7)$$

Ω si allontana sempre più dall'unità col passare del tempo [2]. Siccome all'epoca presente Ω risulta molto prossimo a 1, molto tempo fa deve esservi stato ancora più prossimo. In particolare, i calcoli mostrano [1]:

$$|\Omega(a_{\text{nuc}}) - 1| \leq 10^{-16}, \quad (3.8)$$

$$|\Omega(a_{\text{GUT}}) - 1| \leq 10^{-55}, \quad (3.9)$$

$$|\Omega(a_{\text{pl}}) - 1| \leq 10^{-61}, \quad (3.10)$$

rispettivamente per la nucleosintesi primordiale, per l'epoca di grande unificazione e per l'epoca di Planck. Si capisce che, se la cosmologia del Big Bang standard è corretta, è necessario che l'universo si sia originato con uno stato di curvatura molto particolare.

Inoltre, risulta che il punto $\Omega = 1$ è un punto instabile. Infatti, differenziando l'equazione di Friedmann fondamentale e usando l'equazione di continuità, si giunge all'espressione [1]:

$$\frac{d\Omega}{d \ln a} = (1 + 3w)\Omega(\Omega - 1); \quad (3.11)$$

da qui, si vede che $\Omega = 1$ è un punto instabile:

$$\frac{d|\Omega - 1|}{d \ln a} > 0 \quad (3.12)$$

se e solo se è soddisfatta la (*strong energy condition*):

$$1 + 3w > 0. \quad (3.13)$$

Come visto nel paragrafo precedente, la strong energy condition è la condizione che caratterizza la materia ordinaria, ovvero, la materia che, secondo la teoria del Big Bang standard, dovrebbe aver dominato l'universo primordiale [2]. Dall'ultimo risultato, si vede, però, che tale condizione energetica fa sì che il parametro Ω tenda ad allontanarsi da 1. È evidente quindi, ancora una volta, il bisogno di condizioni iniziali molto particolari per l'universo, tutt'altro che generiche.

3.1.3 Il problema dei retaggi indesiderati

Secondo diverse estensioni del Modello Standard delle particelle, se il Big Bang Caldo è cominciato a una temperatura molto alta, si sarebbero dovute produrre una serie di particelle, o altre entità fisiche, che sarebbero ancora oggi presenti nell'universo, con un'abbondanza tale da contraddire le osservazioni, le quali non le rilevano. La teoria dell'inflazione permette di giustificare il fatto che queste entità fisiche non sono osservate. Vediamo alcuni esempi [2]:

Gravitino Questa particella compare nella supergravità e rappresenta il partner supersimmetrico del gravitone: ha spin pari a $3/2$ e interagisce solo gravitazionalmente.

Moduli Si tratta di particelle che emergono dalla teoria delle superstringhe. Tipicamente, i moduli hanno masse dello stesso ordine del gravitino.

Difetti topologici In teoria quantistica dei campi, un difetto topologico è una soluzione di un sistema di equazioni differenziali parziali omotopicamente distinta dalla soluzione del vuoto. I difetti topologici sono caratterizzati dall'essere stabili rispetto a piccole perturbazioni e di non decadere né annullarsi mai. I difetti topologici indesiderati includono:

Monopoli magnetici I monopoli magnetici vengono prodotti nel momento in cui la simmetria di Grande Unificazione viene rotta. Normalmente essi sono prodotti in sovrabbondanza, a meno che siano connessi da stringhe. Il problema dei monopoli magnetici è stato storicamente una delle motivazioni principali per sostenere l'inflazione.

Stringhe cosmiche Le stringhe cosmiche sono difetti topologici unidimensionali, hanno lunghezze di ordine cosmologico e masse immense. Se le stringhe cosmiche hanno un'energia per unità di lunghezza molto al di sotto dei 10^{16} GeV esse non creano problemi di sovrabbondanza.

Difetti di trama Si tratta di difetti nella struttura dello spaziotempo, paragonabili, in un certo senso, a "nodi di energia". Essi non costituiscono un problema se la loro scala energetica è molto inferiore ai 10^{16} GeV.

Muri di dominio In fisica, in generale, un muro di dominio (domain wall) è un difetto topologico che compare ogni volta che una simmetria discreta viene rotta. In teoria delle stringhe, un muro di dominio è una singolarità bidimensionale. I muri di dominio costituiscono un problema se la scala energetica di rottura della simmetria a cui sono associati inferiore a circa 10^6 eV.

3.1.4 L'origine delle disomogeneità

La più semplice interpretazione delle anisotropie della radiazione cosmica di fondo è che esse corrispondano a irregolarità della superficie di last scattering [2]. Se è così, queste ultime sono caratterizzate da scale di lunghezza molto maggiori dell'orizzonte di particella al tempo del disaccoppiamento fotoni-materia. Quindi, ancora una volta, secondo la teoria del Big Bang standard, esse non possono essere state generate causalmente e dovrebbero essere considerate condizioni iniziali per il Big Bang. Si tratterebbe inoltre di condizioni iniziali particolari,

perché: i) esse sono molto piccole; ii) esse si presentano pressoché della stessa ampiezza in tutta la superficie di last scattering.

È anche vero che alcune teorie (come le teorie di formazione delle strutture con difetti topologici) permettono di spiegare le irregolarità della CMB all'interno della teoria del Big Bang standard, ipotizzando che esse si siano generate per effetti gravitazionali in periodi molto più recenti del disaccoppiamento [2].

Nonostante questo, però, la soluzione al problema della generazione delle irregolarità che viene ritenuta più attraente è la teoria dell'inflazione. Come già detto, secondo l'inflazione, le irregolarità hanno avuto origine come fluttuazioni quantistiche microscopiche e sono state portate a scale cosmologiche da un processo di espansione dell'universo fortemente accelerato. In questo modo, l'inflazione sarebbe responsabile, allo stesso tempo: i) dell'omogeneità e isotropia a grande scala dell'universo; ii) delle piccole disomogeneità della CMB e, di conseguenza, della formazione delle strutture [2].

3.2 Definizione di inflazione

Ci sono tre definizioni equivalenti di inflazione [1]:

- L'espansione è accelerata, ovvero:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} > 0. \quad (3.14)$$

- Il raggio di Hubble comovente diminuisce, ovvero:

$$\frac{d}{dt} \frac{H^{-1}}{a} < 0. \quad (3.15)$$

Questa condizione, rispetto alla precedente, ha una migliore interpretazione fisica, come vedremo tra poco.

- La natura dei campi presenti nell'universo durante l'inflazione è tale da violare la strong energy condition:

$$\rho + 3p < 0. \quad (3.16)$$

Se si assume che la densità di energia sia positiva, la disequazione precedente implica che il campo che produce l'inflazione eserciti una pressione negativa. Le condizioni fisiche che permettono la violazione della strong energy condition saranno illustrate nel paragrafo 3.4.

L'equivalenza tra le prime due definizioni è immediata. Infatti:

$$\frac{d}{dt} \frac{H^{-1}}{a} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\dot{a}} = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \quad (3.17)$$

Anche senza passare per l'equivalenza tra le due condizioni (3.14) e (3.15), da entrambe si verifica facilmente che l'inflazione richiede la violazione della strong energy condition (per verificarlo basta usare, rispettivamente, l'equazione di Friedmann (2.19) e la (3.4)).

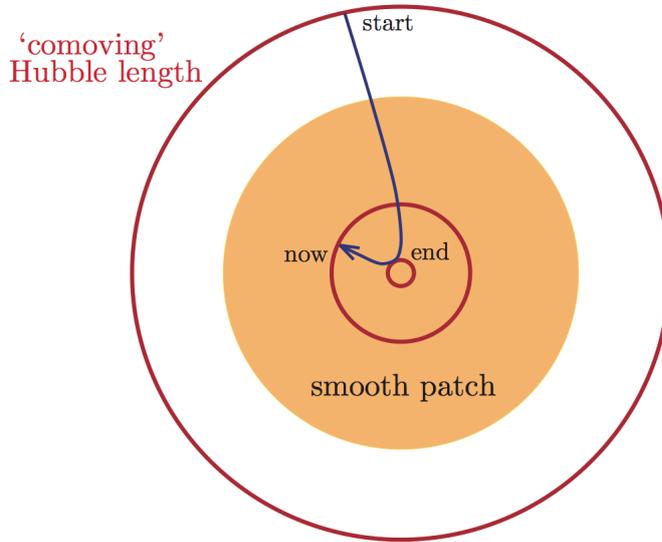


Figura 3.1: In questa figura viene illustrato il comportamento del raggio di Hubble comoviente, indicato con una circonferenza rossa. Prima dell'inflazione esso è molto più grande dell'orizzonte di particella (indicato con la regione arancio); al termine dell'inflazione è più piccolo e da quel momento torna a crescere. (Figura tratta da [1])

3.3 Risoluzione dei problemi della cosmologia del Big Bang standard

3.3.1 Risoluzione del problema dell'orizzonte

Consideriamo il problema dell'orizzonte. Come detto in precedenza, il raggio di Hubble comoviente $(aH)^{-1}(t)$ corrisponde all'ordine di grandezza del raggio comoviente dell'universo osservabile a un dato momento t . Quindi, al tempo t_2 , regioni che si trovano separate da una distanza comoviente χ maggiore di $(aH)^{-1}(t_2)$ non possono essere in contatto causale a t_2 . Questo però non vuol dire che tali regioni non possono essere state in contatto causale in qualche momento passato t_1 . Infatti, ciò è vero solo se la distanza comoviente che le separa è maggiore dell'orizzonte di particella comoviente $\tau(t_2)$ [1].

Se si ipotizza che $\tau(t_2) \gg \chi \gtrsim (aH)^{-1}(t_2)$, le due regioni possono essere state in contatto causale in passato. Per vedere come questo sia possibile basta considerare l'espressione di τ (3.3):

$$\tau = \int_0^a d \ln a' \frac{1}{a'H(a')}. \quad (3.18)$$

Da quest'espressione si vede che è sufficiente ipotizzare che in passato $(aH)^{-1}$ fosse molto maggiore di adesso, in modo che l'integrale assuma un valore molto grande. Ma, se è così, per fare assumere al raggio di Hubble comoviente il valore attuale, è necessario che ci sia stata una fase in cui esso è diminuito, ovvero, si deve avere avuto un periodo di inflazione [1].

Quindi, secondo l'inflazione, le regioni della CMB possono essere state in contatto causale tra loro prima del disaccoppiamento se si ammette che l'intera superficie di last scattering, a un tempo t_1 antecedente all'inflazione, si trovasse in una regione molto piccola bene all'interno di $(aH)^{-1}(t_1)$ [2].

3.3.2 Risoluzione del problema della piatezza

Il problema della piatezza ha una soluzione immediata se si tiene conto che durante l'inflazione il raggio di Hubble comovente diminuisce. Infatti, dall'equazione di Friedmann:

$$|\Omega - 1| = (aH)^{-2}, \quad (3.19)$$

pertanto, Ω si avvicina a 1 al passare del tempo, al contrario di quanto avviene nella cosmologia del Big Bang standard [1].

3.3.3 Risoluzione del problema dei retaggi

Il problema dei retaggi indesiderati si risolve assumendo che essi siano prodotti prima dell'inizio dell'inflazione. Infatti, se durante l'inflazione l'universo si è espanso a sufficienza, allora la densità di queste entità fisiche può essere ridotta a livelli talmente bassi da giustificarne la non osservazione [2].

3.3.4 Evoluzione delle scale e generazione delle perturbazioni

Solitamente, per studiare la produzione e l'evoluzione delle perturbazioni di densità, le si esprime in serie di Fourier e si analizza la storia di ogni singolo numero d'onda comovente k [2]. $1/k$ definisce una scala di lunghezza comovente che caratterizza un particolare modo della perturbazione. È opportuno usare lunghezze comoventi poiché la perturbazione si espande con l'espansione dell'universo (sempre che la sua ampiezza non sia troppo grande).

Se una scala $1/k$ è minore del raggio di Hubble comovente $(aH)^{-1}$, allora essa può essere influenzata da processi fisici causali; ciò non è vero se $1/k$ è maggiore di $(aH)^{-1}$ [2]. Si dice che la scala è uguale al raggio di Hubble comovente quando $k = aH$. Le grandezze che si riferiscono al momento in cui questo si verifica saranno denotate dal pedice: \star .

Sfruttando ancora una volta il fatto che durante l'inflazione $(aH)^{-1}$ diminuisce, risulta semplice spiegare come si possono essere generate le anisotropie della radiazione cosmica di fondo [1]. Infatti, esse corrispondono a perturbazioni i cui modi corrispondono a lunghezze comoventi che, prima dell'inflazione, erano all'interno dell'orizzonte di Hubble comovente; così, esse possono essere state generate da meccanismi causali. Poi, durante l'inflazione, a seguito della drastica diminuzione del raggio di Hubble comovente, tali scale comoventi sono diventate maggiori di esso o, in altre parole, esse sono state allungate dall'inflazione talmente tanto da non risultare più connesse causalmente. Una volta terminata l'inflazione, esse possono rientrare all'interno dell'orizzonte col passare del tempo, poiché il raggio di Hubble comovente è tornato a crescere. Quindi, al tempo dell'emissione della radiazione cosmica di fondo, le perturbazioni risultano sconnesse causalmente perché esse avevano ancora lunghezze maggiori del raggio di Hubble comovente.

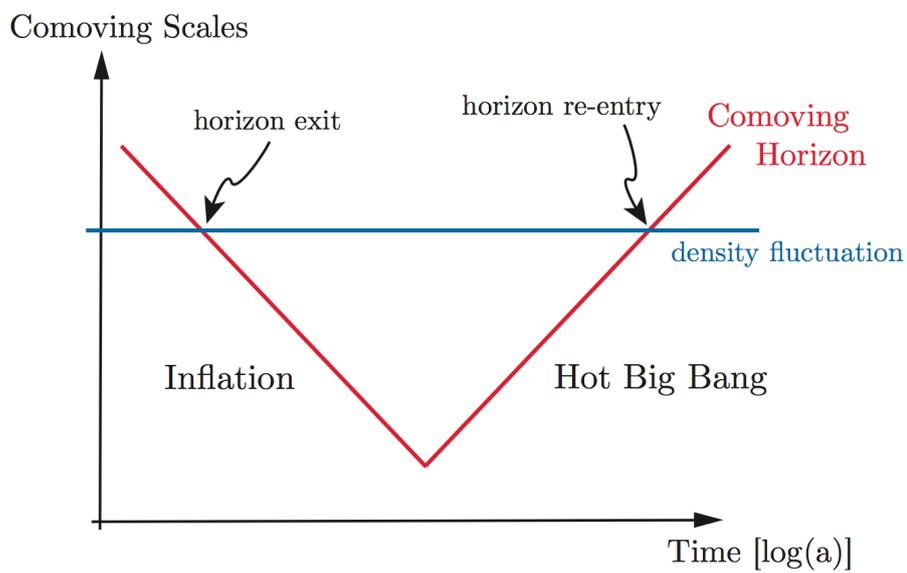


Figura 3.2: Questa figura illustra l'evoluzione delle scale in termini di lunghezze comoventi. Prima dell'inflazione, la particolare fluttuazione di densità o generica scala si trova all'interno dell'orizzonte di Hubble. Successivamente, in un certo momento durante l'inflazione, essa ne esce al di fuori, poiché il raggio di Hubble comovente diminuisce. Infine, dopo il termine dell'inflazione, siccome il raggio di Hubble comovente è tornato a crescere, essa può tornare all'interno dell'orizzonte di Hubble. (Figura tratta da [1])

3.3.5 Diagramma conforme per l'inflazione

3.3.5.1 Ammontare di inflazione

La grandezza usata per quantificare l'ammontare di inflazione è il *numero di e-foldings* [2]:

$$N(t) \equiv \ln \frac{a(t_{\text{end}})}{a(t)}, \quad (3.20)$$

dove t_{end} si riferisce al tempo in cui l'inflazione ha avuto termine. $N(t)$ rappresenta, al tempo $t < t_{\text{end}}$, la quantità di inflazione che deve ancora avvenire. L'utilizzo del logaritmo è giustificato dal fatto che, per risolvere i problemi della cosmologia del Big Bang standard, l'inflazione deve portare a un enorme incremento del fattore di scala. In particolare, per risolvere i problemi dell'orizzonte e della piattezza sono necessari [1]:

$$N_{\text{tot}} \gtrsim 50-60. \quad (3.21)$$

Considerato il fatto che la migliore caratterizzazione dell'inflazione è quella secondo la quale il raggio comovente di Hubble deve diminuire, sembra più naturale quantificare l'ammontare in quest'altro modo [2]:

$$\tilde{N}(t) \equiv \ln \frac{a(t_{\text{end}})H(t_{\text{end}})}{a(t)H(t)}. \quad (3.22)$$

Tuttavia, come vedremo in 3.3.5.2, durante l'inflazione, $a(t)$ varia molto più velocemente di $H(t)$, quindi, usare (3.20) o (3.21), fa poca differenza.

3.3.5.2 Un'altra condizione equivalente per l'inflazione

La condizione $\ddot{a} > 0$ permette di derivare un'altra condizione per l'inflazione [1], in funzione del parametro:

$$\epsilon_H \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{d \ln H}{dN}, \quad (3.23)$$

in cui $dN = -H dt = -d \ln a$, ovvero N è il numero di e-foldings (3.20). Il parametro ϵ_H rappresenta dunque la variazione relativa per e-fold del parametro di Hubble:

$$dN = 1 \quad \implies \quad \epsilon_H = d \ln H = \frac{dH}{H}. \quad (3.24)$$

Si può riscrivere l'equazione di Friedmann (2.19) attraverso il parametro ϵ :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2 + \dot{H} = H^2(1 - \epsilon_H). \quad (3.25)$$

La definizione di inflazione $\ddot{a} > 0$ implica quindi:

$$\epsilon_H < 1, \quad (3.26)$$

ovvero, durante l'inflazione la variazione relativa per e-fold del parametro di Hubble è piccola. Risulta quindi che, durante l'inflazione, lo spaziotempo è approssimativamente de Sitter [1]:

$$a(t) \sim e^{Ht}. \quad (3.27)$$

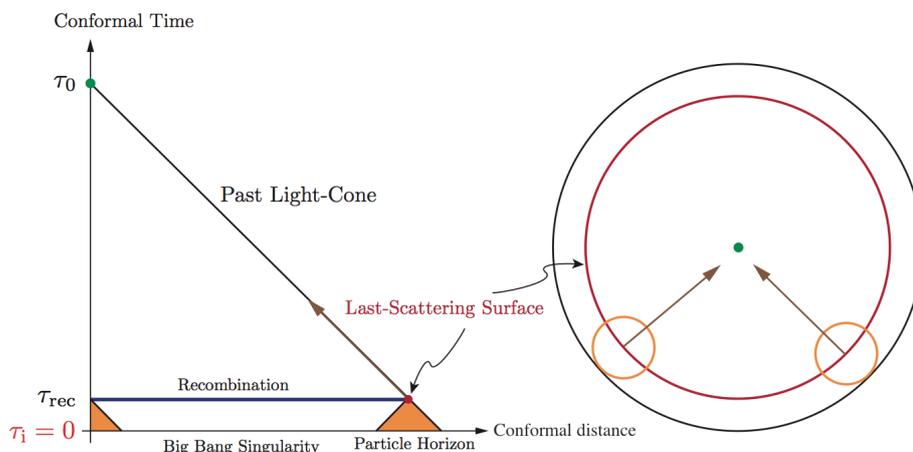


Figura 3.3: La figura di sinistra illustra il diagramma conforme per la cosmologia del Big Bang standard, spiegato nel testo. La figura di destra mostra in un altro modo che la superficie di last scattering non può essere connessa causalmente, secondo la cosmologia standard. La circonferenza rossa rappresenta la superficie di last scattering e la circonferenza nera rappresenta la superficie che corrisponde alla singolarità iniziale. Siccome la distanza tra le due circonferenze è finita e molto piccola, solo poche regioni della superficie di last scattering possono essere connesse causalmente (i loro coni di luce sono rappresentati dalle circonferenze arancio). (Figure tratte da [1])

3.3.5.3 Diagramma conforme per l'inflazione

Durante la dominazione della radiazione (indicata con RD) o la dominazione della materia (indicata con MD) il fattore di scala evolve come:

$$a(\tau) \propto \begin{cases} \tau & \text{RD} \\ \tau^2 & \text{MD} \end{cases} \quad (3.28)$$

Questo implica che, alla singolarità iniziale ($a \equiv 0$), $\tau_i = 0$ e il diagramma conforme secondo la cosmologia del Big Bang standard si presenta come nella figura 3.3 [1]. Tale figura mostra ancora una volta i problemi della cosmologia standard. Infatti, due punti di una data superficie $\tau = \text{cost.}$ sono in contatto causale se i loro coni di luce diretti verso il passato si intersecano al Big Bang, corrispondente a $\tau_i = 0$. Ma, come si vede dalla figura, i coni di luce di due punti della superficie di last scattering non si intersecano, a meno che non siano molto vicini. Così, la superficie di last scattering appare costituita da molte zone sconnesse causalmente.

Durante l'inflazione $H \simeq \text{cost.}$, quindi:

$$a(\tau) = -\frac{1}{H\tau} \quad (3.29)$$

e la singolarità iniziale è posta a $\tau_i = -\infty$. Pertanto, i coni di luce verso il passato possono intersecarsi (figura 3.4). Si può dire che, secondo l'inflazione, "c'è stato più tempo (conforme) prima della ricombinazione di quanto ne prevede

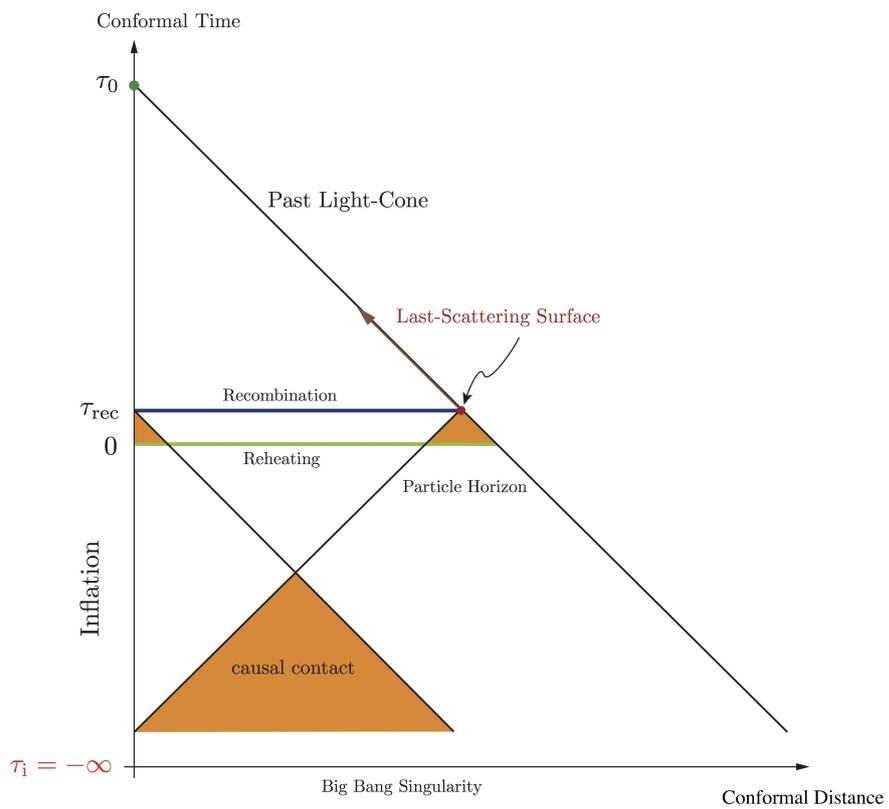


Figura 3.4: La figura mostra il diagramma conforme per la cosmologia inflazionaria. Il fatto che la singolarità iniziale è posta a $\tau_i = -\infty$ fa sì che tutti i coni di luce verso il passato dei punti della superficie di last scattering si possano intersecare. (Figura tratta da [1])

la teoria del Big Bang standard" [1]. Si può osservare che, per $\tau = 0$, il fattore di scala $a(\tau)$ diverge. Questo, però, vale se l'universo rimane sempre uno spazio di de Sitter, il che è falso, perchè l'inflazione ha termine e l'approssimazione (3.29) non vale più verso la fine dell'inflazione. Quindi, la superficie $\tau = 0$ corrisponde alla fine dell'inflazione (cioè al *reheating*) [1].

3.4 Fisica dell'inflazione

3.4.1 Dinamica dei campi scalari

Il campo che genera l'inflazione deve essere caratterizzato dal produrre una pressione negativa. I campi che hanno questa proprietà sono i campi scalari, ovvero quelli associati a particelle con spin 0.

Considerando i campi scalari in un contesto cosmologico, risulta che essi hanno la proprietà insolita di avere un'energia potenziale che può variare molto lentamente con l'espansione dell'universo, nel senso che quasi non mostra redshift. È questo fatto che fa sì che la sua equazione di stato abbia una pressione negativa [2].

I modelli più semplici di inflazione prevedono un solo campo scalare ϕ , che in tal caso si chiama *inflatone*. A questo livello, non è necessario specificare la natura fisica di ϕ , ma basta considerarlo un parametro d'ordine per parametrizzare l'evoluzione temporale della densità di energia inflazionaria [1]. In fisica delle particelle, per determinare la dinamica di un campo, è necessario specificare la sua azione [1]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] = S_{\text{EH}} + S_\phi. \quad (3.30)$$

L'azione dell'inflatone è quindi la somma dell'azione di Einstein-Hilbert e dell'azione di un campo scalare con termine cinetico canonico. Inoltre, $V(\phi)$ descrive le autointerazioni dell'inflatone e dovrebbe essere derivabile da qualche motivazione di fisica delle particelle. I diversi modelli inflazionari corrispondono a diverse scelte del potenziale $V(\phi)$.

Il tensore energia-impulso e l'equazione del moto del campo sono:

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi + V(\phi) \right]; \quad (3.31)$$

$$\frac{\delta S_\phi}{\delta \phi} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \phi) + V_{,\phi} = 0. \quad (3.32)$$

Se si considera un campo omogeneo ($\phi(t, \mathbf{x}) = \phi(t)$) e la metrica di Friedmann-Robertson-Walker, il tensore energia-impulso assume la forma di un fluido perfetto (2.15), con:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.33)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.34)$$

Quindi l'equazione di stato risulta:

$$w_\phi \equiv \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)}, \quad (3.35)$$

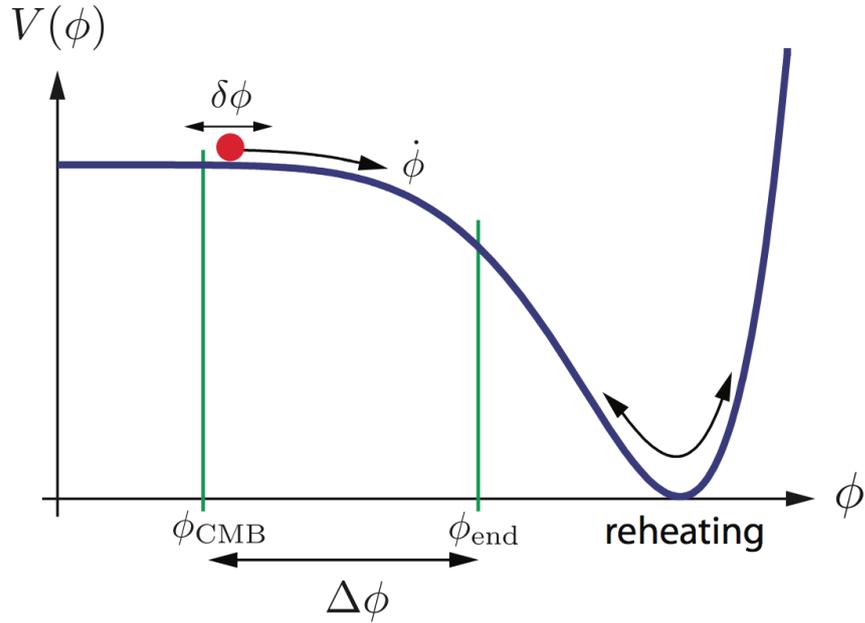


Figura 3.5: Un possibile potenziale per l'inflazione. L'inflazione avviene quando il potenziale domina sul termine cinetico e ha termine quando essi sono comparabili. Al minimo del potenziale l'energia del campo viene convertita in radiazione. (Figura tratta da [1])

da questa equazione si può vedere che è possibile avere inflazione ($w_\phi < -1/3$) se il potenziale $V(\phi)$ domina sul termine cinetico $\dot{\phi}^2/2$. Tuttavia, questa condizione non può perdurare illimitatamente se il potenziale non è completamente piatto, perché il termine cinetico aumenta fino al punto da far cessare l'inflazione. Terminata l'inflazione, al reheating (che sarà trattato in seguito), il potenziale incontra un minimo e l'energia dell'inflatone è convertita in radiazione [1]. È possibile quindi illustrare l'inflazione come in figura 3.5.

Per ottenere le equazioni del moto, in realtà, non è necessario passare per (3.32), ma è sufficiente inserire le espressioni della densità e della pressione nell'equazione di Friedmann fondamentale e nell'equazione di continuità. Così si ottiene:

$$H^2 = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right], \quad (3.36)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0. \quad (3.37)$$

3.4.2 Inflazione Slow-roll

3.4.2.1 Semplificazione delle equazioni del moto

È possibile introdurre delle condizioni, le *condizioni di slow-roll*, che permettono di semplificare le equazioni del moto (3.36) e (3.37), nella forma:

$$H^2 \simeq \frac{1}{3}V(\phi), \quad (3.38)$$

$$\dot{\phi} \simeq -\frac{V_{,\phi}}{3H}. \quad (3.39)$$

Le equazioni complete del moto del campo scalare (3.36) e (3.37) possono essere risolte in maniera esatta solo per pochissime semplici scelte del potenziale; mentre è più semplice risolvere le equazioni in regime di slow-roll (3.38) e (3.39) [1].

Si introducono quindi i *parametri slow-roll (del potenziale)* [2]:

$$\epsilon_V \equiv \frac{M_{\text{pl}}^2}{2} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2, \quad (3.40)$$

$$\eta_V \equiv M_{\text{pl}}^2 \frac{V_{,\phi\phi}}{V}, \quad (3.41)$$

(sono stati espressi in unità in cui la massa di Planck ridotta M_{pl} non è posta uguale a 1, ma di seguito sarà posto $M_{\text{pl}} = 1$). Le condizioni di slow-roll sono [2]:

$$\epsilon_V, |\eta_V| \ll 1 \quad (3.42)$$

Esse sono condizioni *necessarie* affinché valgano le equazioni approssimate (3.38) e (3.39), tuttavia esse non sono sufficienti.

Verifichiamo che si tratta di condizioni necessarie (poniamo nel seguito $M_{\text{pl}} = 1$). La riduzione di (3.36) a (3.38) implica:

$$\dot{\phi}^2 \ll V \quad (3.43)$$

mentre (3.39) implica:

$$\dot{\phi}^2 \sim \frac{V_{,\phi}^2}{H^2} \ll V. \quad (3.44)$$

Poichè, da (3.38) $H^2 \sim V$, allora:

$$V_{,\phi}^2 \ll V^2 \quad (3.45)$$

ed è dimostrato che $\epsilon_V \ll 1$. Mostriamo ora l'altra condizione. Da (3.39) e (3.38):

$$V_{,\phi} \sim -H\dot{\phi} \sim -\sqrt{V}\dot{\phi}. \quad (3.46)$$

Derivando rispetto a ϕ e applicando $\epsilon_V \ll 1$ e (3.43) si ottiene:

$$V_{,\phi\phi} \sim -\frac{V_{,\phi}}{\sqrt{V}}\dot{\phi} = -\frac{V_{,\phi}}{V}\sqrt{V}\dot{\phi} \ll V, \quad (3.47)$$

dimostrando così anche la necessità di $\eta_V \ll 1$.

Come preannunciato, le condizioni (3.42) non sono sufficienti. Infatti, siccome l'equazione completa (3.37) è un'equazione del secondo ordine, il valore di $\dot{\phi}$

può essere scelto in maniera arbitraria, in particolare, in modo da violare l'equazione approssimata (3.39). Pertanto, bisogna fare l'ulteriore assunzione che $\dot{\phi}$ soddisfi l'equazione (3.39). In realtà, però, tale assunzione può essere provata considerando il comportamento da attrattore delle soluzioni delle equazioni del moto (che qui non sarà trattato) [2].

Per ottenere molti risultati, è sufficiente prendere in considerazione solo le equazioni (3.39) e (3.42) [2]. In particolare, l'equazione (3.38) è una conseguenza di (3.39) e $\epsilon_V \ll 1$.

3.4.2.2 Condizioni slow-roll e inflazione

Le condizioni slow-roll sono condizioni *sufficienti ma non necessarie* per l'inflazione. Vediamo perché esse sono sufficienti. Se l'inflazione avviene, allora, dall'equazione di Friedmann dell'accelerazione:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 > 0. \quad (3.48)$$

Questa equazione è soddisfatta automaticamente se $\dot{H} > 0$, altrimenti si deve richiedere:

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} < 1. \quad (3.49)$$

Ora, derivando rispetto al tempo (3.38) e applicando (3.39) si ottiene:

$$\dot{H} \simeq \frac{1}{6H} V_{,\phi} \dot{\phi} \simeq -\frac{1}{18H^2} V_{,\phi}^2 \quad (3.50)$$

e, applicando (3.38):

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 \equiv \epsilon_V. \quad (3.51)$$

Quindi, se $\epsilon_V \ll 1$ si ha inflazione.

Le condizioni slow-roll non sono condizioni necessarie per l'inflazione perché, nella dimostrazione precedente, si è giunti ad esprimere la condizione di inflazione (3.49) in funzione di ϵ_V utilizzando le equazioni del moto approssimate, si è quindi assunto che si fosse in regime di slow-roll¹. In principio, pertanto, potrebbero non valere le condizioni di slow-roll e non valere le equazioni del moto approssimate e l'inflazione potrebbe verificarsi lo stesso [2].

Veniamo all'interpretazione fisica delle condizioni di slow-roll. Il fatto che l'equazione (3.37) si riduca a (3.39) vuol dire che l'inflazione dura abbastanza a lungo e permettere all'universo di espandersi a sufficienza (cosa che è necessaria per il nostro universo). Infatti, tale proprietà è espressa dalla lenta variazione di $\dot{\phi}$:

$$|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|, |V_{,\phi}|. \quad (3.52)$$

Inoltre, da (3.51), risulta che $\epsilon_V \simeq \epsilon_H$ e quindi la condizione $\epsilon_V \ll 1$ corrisponde al fatto che lo spaziotempo dell'inflazione slow-roll è approssimato molto bene dallo spaziotempo di de Sitter (si veda il paragrafo 3.3.5.2) [1].

Avendo a questo punto una *quasi*-equivalenza tra condizioni slow-roll e inflazione, ciò comporta che, solitamente, calcolare i parametri di slow-roll permette di verificare facilmente se un dato potenziale $V(\phi)$ può permettere o no l'inflazione [2].

¹Inoltre, nell'equazione (3.51) è necessario solo che sia $\epsilon_V < 1$ e non per forza $\epsilon_V \ll 1$.

3.4.2.3 Termine dell'inflazione

Ci sono diversi modi affinché l'inflazione abbia termine ed essi dipendono dal particolare modello inflazionario. Un modo per far terminare l'inflazione è che siano violate le condizioni slow-roll, quando il campo si avvicina a un minimo del potenziale di valore nullo o trascurabile. In questo caso si può assumere che l'inflazione abbia termine quando $\epsilon_V(\phi_{\text{end}}) = 1$.

In modelli come l'*inflazione ibrida*, l'inflazione può avere termine anche se le condizioni di slow-roll sono ancora rispettate, poiché, alla fine dell'inflazione interviene altra fisica [2].

3.4.3 Formulazione Hamilton-Jacobi per l'inflazione

3.4.3.1 Equazione di Hamilton-Jacobi

La formulazione Hamilton-Jacobi per l'inflazione permette di derivare in maniera più semplice molti risultati e di evitare approssimazioni [2]. Considereremo il caso di un universo piatto.

Nell'equazione di Hamilton-Jacobi per l'inflazione, la variabile tempo è sostituita dal campo ϕ . La condizione per l'applicazione del metodo di Hamilton-Jacobi è che il campo scalare sia in una zona slow-roll e vari in maniera monotona col tempo. Nella sua versione più semplice, la descrizione Hamilton-Jacobi perde di validità durante l'epoca in cui il campo è oscillante, alla fine dell'inflazione. Assumeremo $\dot{\phi} > 0$, cosa che si può sempre ottenere ridefinendo $\phi \rightarrow -\phi$.

Derivando l'equazione (3.37) rispetto al tempo e utilizzando (3.36) si ottiene:

$$2\dot{H} = \frac{1}{3H} \left(\frac{dV}{d\phi} \dot{\phi} + \dot{\phi} \ddot{\phi} \right) = -\dot{\phi}^2. \quad (3.53)$$

Dividendo entrambi i membri di quest'equazione per $\dot{\phi}$ (ciò è permesso dalla monotonicità) si ottiene:

$$\dot{\phi} = -2H_{,\phi}, \quad (3.54)$$

che dà la relazione tra ϕ e t . Inserendo questa espressione nell'equazione del moto (3.36) si ottiene l'equazione di Hamilton-Jacobi [2]:

$$H^2_{,\phi}(\phi) - \frac{3}{2}H^2(\phi) = -\frac{1}{2}V(\phi). \quad (3.55)$$

La struttura dell'equazione di Hamilton-Jacobi permette di considerare $H(\phi)$ come quantità fondamentale, invece di $V(\phi)$. Ciò è più naturale perché H è una quantità geometrica (e l'inflazione è un fenomeno geometrico) [2]. Dato $H(\phi)$, attraverso (3.55) è possibile calcolare $V(\phi)$ e attraverso (3.54) $H(t)$ e da questo $a(t)$. Si vede quindi che utilizzare l'equazione di Hamilton-Jacobi è il modo più diretto per ottenere molti risultati per l'inflazione.

3.4.3.2 Inflazione slow-roll

Attraverso il formalismo di Hamilton-Jacobi, è possibile formulare un tipo di inflazione slow-roll che differisce leggermente da quella definita precedentemente.

Si definiscono quindi i *parametri slow-roll di Hubble* [2]:

$$\epsilon_H = 2M_{\text{pl}}^2 \left(\frac{H_{,\phi}(\phi)}{H(\phi)} \right)^2, \quad (3.56)$$

$$\eta_H = 2M_{\text{pl}}^2 \frac{H_{,\phi\phi}(\phi)}{H(\phi)}. \quad (3.57)$$

Si verifica che, nell'approssimazione di slow-roll (3.42) [2]:

$$\epsilon_H \rightarrow \epsilon_V, \quad \eta_H \rightarrow \eta_V - \epsilon_V. \quad (3.58)$$

Facendo alcune manipolazioni, si ottiene anche [2]:

$$\epsilon_H = 3 \frac{\dot{\phi}^2/2}{V + \dot{\phi}^2/2} = -\frac{d \ln H}{d \ln a}, \quad (3.59)$$

$$\eta_H = -3 \frac{\ddot{\phi}}{3H\dot{\phi}} = -\frac{d \ln \dot{\phi}}{d \ln a} = -\frac{d \ln (H_{,\phi})}{d \ln a}. \quad (3.60)$$

Confrontando con le equazioni del moto complete (3.36) e (3.37) si vede immediatamente che le condizioni slow-roll $\epsilon_H \ll 1$, $\eta_H \ll 1$ sono condizioni *necessarie e sufficienti* affinché valgano le equazioni approssimate (3.38) e (3.39). La validità dell'approssimazione di slow-roll non dipende così da assunzioni sul comportamento da attrattore delle equazioni del moto. Inoltre, nel contesto dell'equazione di Hamilton-Jacobi, si può considerare $\epsilon_H \ll 1$ come la condizione per trascurare il primo termine a sinistra di (3.55), mentre $\eta_H \ll 1$ come la condizione per trascurare il primo termine a sinistra della derivata rispetto a ϕ di (3.55) [2].

Come indicato dalla notazione, il parametro ϵ_H qui definito coincide con l'omonimo parametro definito nel paragrafo 3.3.5.2:

$$\epsilon_H = -\frac{d \ln H}{d \ln a} \equiv \frac{d \ln H}{d \ln N}. \quad (3.61)$$

Con i parametri slow-roll normali (ovvero, del potenziale), è stato mostrato solo tramite approssimazioni che la condizione $\epsilon_V < 1$ è sufficiente per l'inflazione. Ora, usando i parametri slow-roll di Hubble e tenendo conto del ragionamento del paragrafo 3.3.5.2, risulta in maniera esatta che $\epsilon_H < 1$ è una condizione sufficiente e anche necessaria per l'inflazione.

3.4.4 Ammontare di inflazione

È possibile calcolare, in termini del potenziale, il numero di e-folding prima che l'inflazione finisca [2]:

$$\begin{aligned} N(\phi) &\equiv \ln \frac{a_{\text{end}}}{a} \\ &= \int_t^{t_{\text{end}}} H dt' = \int_{\phi}^{\phi_{\text{end}}} \frac{H}{\dot{\phi}'} d\phi' \\ &\simeq \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi} \frac{V}{V_{,\phi}} d\phi', \end{aligned} \quad (3.62)$$

in cui sono state usate le equazioni del moto semplificate in regime di slow-roll (3.38) e (3.39). Inoltre, da (3.40):

$$N(\phi) \simeq \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi} \frac{d\phi'}{\sqrt{2\epsilon_V}} \equiv \frac{1}{M_{\text{pl}}} \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi} \frac{d\phi'}{\sqrt{2\epsilon_V}}. \quad (3.63)$$

Oppure, sfruttando la formulazione di Hamilton-Jacobi:

$$N(\phi) = \int_{\phi}^{\phi_{\text{end}}} \frac{H}{\dot{\phi}'} d\phi' = \frac{1}{2} \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi} \frac{H}{H_{,\phi}} d\phi' \quad (3.64)$$

$$= \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi} \frac{d\phi'}{\sqrt{2\epsilon_H}} \equiv \frac{1}{M_{\text{pl}}} \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi} \frac{d\phi'}{\sqrt{2\epsilon_H}}, \quad (3.65)$$

in cui si è sfruttato (3.54). Come si vede, il formalismo di Hamilton-Jacobi permette di evitare approssimazioni.

3.5 Inflazione e storia dell'universo

3.5.1 Evoluzione delle scale

Per risolvere i problemi della piattezza e dell'omogeneità è necessario che:

$$N_{\text{tot}} \equiv \ln \frac{a_{\text{end}}}{a_{\text{start}}} \gtrsim 50-60, \quad (3.66)$$

il cui valore preciso dipende dalla scala energetica dell'inflazione e dai dettagli del reheating [1].

Determiniamo ora il numero di e-folding di inflazione rimanenti una volta che una generica scala di lunghezza comovente è pari al raggio di Hubble comovente ($k = aH$). Se assumiamo la cosmologia più semplice per la storia dell'universo, possiamo dividere l'evoluzione di k^{-1} in quattro fasi [2]:

1. Dal momento in cui $k = aH$ alla fine dell'inflazione (pedice *end*).
2. Dalla fine dell'inflazione al Big Bang Caldo (pedice *reh*). Assumeremo che in questo periodo l'universo sia dominato dalla materia.
3. L'era di dominazione della radiazione: dalla fine del reheating al tempo in cui la materia eguaglia la radiazione (pedice *eq*).
4. Dall'inizio dell'era della materia al presente (pedice 0).

Assumiamo inoltre che le transizioni tra queste fasi siano istantanee. Possiamo quindi scrivere:

$$\frac{k}{a_0 H_0} = \frac{a_* H_*}{a_0 H_0} = \frac{a_*}{a_{\text{end}}} \frac{a_{\text{end}}}{a_{\text{reh}}} \frac{a_{\text{reh}}}{a_{\text{eq}}} \frac{H_*}{H_0}. \quad (3.67)$$

La prima frazione al membro di destra permette di calcolare il numero di e-folding rimanenti prima che l'inflazione abbia termine, ovvero:

$$N(k) = 62 - \ln \frac{k}{a_0 H_0} - \ln \frac{10^{16} \text{GeV}}{V_*^{1/4}} + \ln \frac{V_*^{1/4}}{V_{\text{end}}^{1/4}} - \frac{1}{3} \ln \frac{V_{\text{end}}^{1/4}}{\rho_{\text{reh}}^{1/4}}. \quad (3.68)$$

Gli ultimi tre termini rappresentano l'incertezza nelle varie scale energetiche associate all'inflazione. Nei modelli inflazionari tipici, essi non dovrebbero risultare grandi. Solitamente, inoltre, il numero di e-folding corrispondenti a quando la attuale scala di Hubble $(a_0 H_0)^{-1} = k^{-1}$ ha eguagliato la scala di Hubble durante l'inflazione $(a_* H_*)^{-1}$ non dovrebbe essere rilevante e lo si può assumere pari a 50 [2].

Le fluttuazioni osservate nella CMB sono create a:

$$N_{\text{cmb}} = \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi_{\text{cmb}}} \frac{d\phi'}{\sqrt{2\epsilon_V}} \simeq 50 - 60, \quad (3.69)$$

il cui valore preciso dipende dai dettagli del reheating e dalla storia termica dell'universo dopo l'inflazione [1].

Si può parlare di struttura a grande scala solo a partire da 1 Mpc. Questa scala, durante l'inflazione, ha eguagliato il raggio di Hubble comovente circa 9 e-folding dopo che l'universo osservabile $(a_0 H_0)$ lo aveva fatto. Ciò comporta che tutte le scale rilevanti per la struttura a grande scala hanno attraversato l'orizzonte di Hubble durante un piccolo numero di e-folding prima della fine dell'inflazione [2].

3.5.2 Condizioni iniziali per l'inflazione

Un modello completo di inflazione (che assumiamo slow-roll), deve fornire, oltre al potenziale, anche una giustificazione del perché l'inflatone si trovi in un intervallo giusto, nello spazio dei campi, affinché il potenziale abbia una forma corretta (si pensi alla figura 3.5) [2].

L'inflazione slow-roll è molto efficace nel cancellare informazione e, pertanto, l'universo che noi vediamo non può recare memoria del periodo compreso tra l'origine dell'universo e il momento in cui l'universo osservabile esce dall'orizzonte di Hubble, durante l'inflazione. La necessità di spiegare quale meccanismo abbia consentito all'inflatone di trovarsi in un intervallo corretto di valori non nasce quindi dalla necessità di spiegare dati sperimentali, ma da necessità teoriche [2].

Si assume sempre che l'inflazione sia cominciata dopo il termine dell'era di Planck, poiché non esiste al momento una teoria di gravità quantistica soddisfacente che sia in grado di descrivere l'universo a energie maggiori o uguali all'energia di Planck.

3.5.2.1 Inflazione caotica e inflazione eterna

Una ipotesi largamente accettata è che l'universo emerga dall'era di Planck in situazioni generiche anche dal punto di vista del campo inflatone ϕ . Ovvero, che tale campo assuma diversi valori in diverse parti dell'universo e che di conseguenza il potenziale $V(\phi)$ abbia in corrispondenza valori molto diversi (di valore tipico pari all'energia di Planck). Questo fa sì che in certe regioni ci può essere inflazione, mentre in altre no, a seconda del valore del potenziale nella particolare regione. Questa è la teoria dell'*inflazione caotica*. La teoria dell'inflazione caotica è stata studiata nei dettagli a livello numerico. Uno dei risultati a cui così si è giunti è che i gradienti spaziali del campo inflatone non possono impedire l'avvenimento dell'inflazione, almeno in alcune regioni [2].

Sembra ragionevole anche ipotizzare che le perturbazioni nella densità di energia non devono essere necessariamente piccole, ma possono avere anche

valore unitario; e ciò, anche se l'energia del campo è molto al di sotto della scala di Planck. Questo scenario porta all'*inflazione eterna*, in cui le fluttuazioni quantistiche dominano sul comportamento classico. La conseguenza è che, anche se il campo si trovasse in un minimo del potenziale, sarebbe possibile che esso ritornasse lontano dal minimo, "scalando il potenziale". In tali regioni ad alti valori di potenziale, l'espansione è molto più rapida (avviene l'inflazione) e questo suggerisce che l'universo potrebbe essere costituito per la maggior parte da regioni come queste. Lo scenario che si presenta è quello di un universo (o meglio, un *multiverso*) in cui, *perpetuamente*, ci sono regioni (*universi*) soggette ad inflazione, ognuna delle quali, una volta terminata l'inflazione, può costituire un universo soggetto a espansione convenzionale. L'inflazione eterna può avvenire, oltre che ad alti valori del potenziale, anche in prossimità di un suo massimo [2].

L'inflazione non deve necessariamente essere un fenomeno comune alla scala di Planck, tutto ciò che serve è che il *nostro* universo (ovvero la nostra parte di multiverso) sia stato soggetto a inflazione. Questa considerazione conduce a ritenere probabile che il nostro universo si sia originato da un processo di inflazione eterna. Infatti, tale tipo di inflazione renderebbe probabile l'avvenimento dell'inflazione nel nostro universo, perché, appunto, nel multiverso dell'inflazione eterna prevalgono regioni soggette a inflazione (scegliendo casualmente un punto nel multiverso è molto probabile che esso faccia parte di un universo che ha subito inflazione) [2].

Tra l'epoca di Planck e il momento in cui l'universo osservabile esce dall'orizzonte di Hubble possono accadere diverse cose (si ricordi che l'universo osservabile non ne reca memoria). La possibilità più semplice è che i campi scalari dominino sempre l'universo e che quindi l'inflazione continui ad avvenire per la maggior parte del tempo (l'inflazione potrebbe avere dei periodi di interruzione, se il campo scalare si mettesse a oscillare intorno a un minimo del potenziale) [2]. Un'alternativa potrebbe essere che l'universo in questo periodo sia dominato dalla radiazione e sia in equilibrio termico. In altre parole, ci sarebbe un altro big bang caldo che precede il Big Bang Caldo definito nel capitolo precedente e a cui ci riferiamo normalmente [2].

Sia l'inflazione eterna che l'inflazione caotica possono avvenire, oltre che ad alti valori di potenziale dell'inflazione, anche in prossimità di un massimo. Se l'inflazione è caotica, si può ipotizzare che il nostro universo si sia trovato semplicemente per caso in uno stato in cui il potenziale è vicino a un massimo. Tuttavia, esiste anche un meccanismo che può portare il campo in prossimità di un massimo. Se infatti il massimo corrisponde a un punto fisso rispetto alle simmetrie di un certo modello, il campo scalare può essere spinto verso il massimo dall'interazione con altri campi scalari o da effetti termici (se c'è equilibrio termico) [2].

3.5.3 Reheating

Il reheating è il processo attraverso il quale, al termine dell'inflazione, ha origine il Big Bang Caldo e l'universo comincia a seguire l'evoluzione standard (non inflazionaria) [1].

I dettagli del reheating generalmente hanno poca importanza per lo studio delle fluttuazioni di densità che hanno portato alle anisotropie della CMB, anche se essi hanno qualche influenza sull'evoluzione delle scale, attraverso l'espressione (3.68). Lo studio reheating è invece importante per risolvere il

problema dei retaggi indesiderati e per capire se la bariogenesi può avvenire in maniera soddisfacente [2].

Tipicamente, il reheating viene diviso in tre parti [2]:

1. dinamica non-inflazionaria del campo scalare;
2. decadimento delle particelle di inflatone;
3. termalizzazione dei prodotti di decadimento.

3.5.3.1 Oscillazioni del campo scalare

Una volta terminata l'inflazione, il campo ϕ si muove velocemente (in confronto al tempo di Hubble) lungo la curva del potenziale e si trova a oscillare attorno a un minimo. Se il campo non decade rapidamente (vita media molto maggiore del tempo di Hubble) questa oscillazione dura a lungo. L'oscillazione è coerente, nel senso che tutti i punti di una regione omogenea sono caratterizzati dalla stessa fase di oscillazione [2].

Questa situazione può essere descritta considerando il comportamento medio, rispetto al tempo, del campo ϕ . Se il potenziale intorno al minimo può essere approssimato come $V(\phi) \sim \phi^2$, il comportamento è quello di un oscillatore armonico e la densità media $\bar{\rho}_\phi = \langle \dot{\phi}^2 \rangle$ soddisfa l'equazione [2]:

$$\dot{\bar{\rho}}_\phi + 3H\bar{\rho}_\phi = 0. \quad (3.70)$$

Questa equazione ha come soluzione $\bar{\rho}_\phi \sim 1/a^3$ (si tratta della stessa equazione della materia non relativistica). Ciò corrisponde al fatto che l'ampiezza delle oscillazioni diminuisce con l'espandersi dell'universo [2].

3.5.3.2 Decadimenti coerenti dell'inflatone

Quando il tempo di Hubble raggiunge il tempo caratteristico del decadimento, l'inflatone decade in altre particelle.

Se il decadimento è perturbativo e se non si è lontani dalla fase di oscillazione, vale la seguente estensione dell'equazione (3.70) [2]:

$$\dot{\bar{\rho}}_\phi + (3H + \Gamma_\phi)\bar{\rho}_\phi = 0, \quad (3.71)$$

che include un termine fenomenologico $\Gamma_\phi\bar{\rho}$, che esprime il decadimento. Si può considerare che l'equazione precedente, poiché comprende termini mediati, descriva l'"involuppo" delle oscillazioni. Nel decadimento perturbativo l'inflatone può decadere sia in bosoni che fermioni.

Se il decadimento non è perturbativo, l'inflatone decade solo in bosoni ed è possibile che il decadimento avvenga per risonanza parametrica. Questo permette un decadimento estremamente rapido che viene chiamato *preheating*. I bosoni creati sono molto lontani dall'equilibrio termico [2].

3.5.3.3 Termalizzazione

Una volta compiuti i processi precedenti, il resto del reheating procede per decadimento lento e alla fine le particelle raggiungono l'equilibrio termico. I dettagli variano molto a seconda della teoria dei campi adottata e, di conseguenza, varia anche la temperatura prevista a cui si pensa che l'universo raggiunga l'equilibrio termico ed entra nel comportamento standard del Big Bang Caldo [2].

Capitolo 4

Fluttuazioni quantistiche durante l'Inflazione

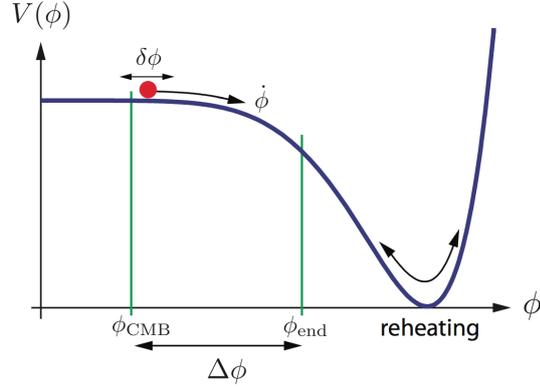


Figura 4.1: Potenziale tipico per l'inflazione. Sono evidenziate le fluttuazioni quantistiche $\delta\phi$ dell'inflatone. (Figura tratta da [1])

Finora è stata considerata la dinamica classica dell'inflatone, ovvero non si è tenuto conto degli effetti quantistici. Si può dire che la dinamica classica dell'inflatone corrisponde al suo comportamento medio $\bar{\phi}(t)$, ma le fluttuazioni quantistiche fanno sì che, in ogni punto, ci sia un diverso $\delta\phi(t, \mathbf{x}) \equiv \phi(t, \mathbf{x}) - \bar{\phi}(t)$. Chiaramente, un diverso valore di ϕ comporta un diverso valore di $V(\phi)$, ossia: $V = V(\mathbf{x})$. Siccome il fatto che l'inflazione avvenga dipende dal valore di $V(\mathbf{x})$, si deduce che l'inflazione ha termine in momenti t diversi in differenti punti dell'universo \mathbf{x} . Ciò ha come conseguenza la creazione di fluttuazioni di densità $\delta\rho(t, \mathbf{x})$ (poiché l'inflazione modifica la densità di una certa regione di universo). Sono queste fluttuazioni di densità che hanno dato origine alle anisotropie della CMB e hanno permesso così la formazione delle strutture dell'universo [1].

4.1 Teoria perturbativa cosmologica

4.1.1 Generalità

4.1.1.1 Perturbazioni lineari

Come già detto, le anisotropie della CMB corrispondono a variazioni relative di temperatura dell'ordine di 10^{-5} . La piccolezza di questo valore permette di usare la teoria perturbativa *lineare* per trattare una generica quantità $X(t, \mathbf{x})$, al tempo del disaccoppiamento fotoni-materia [1]. Si considera quindi la variazione di $X(t, \mathbf{x})$ rispetto alla sua media $\bar{X}(t)$:

$$\delta X(t, \mathbf{x}) = X(t, \mathbf{x}) - \bar{X}(t). \quad (4.1)$$

Inoltre, le equazioni di Einstein si espandono al primo ordine:

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta T_{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

4.1.1.2 Scelta di gauge

La decomposizione della quantità X nel fondo \bar{X} e nella perturbazione δX non è unica, ma dipende dalla scelta delle coordinate, ovvero dalla scelta del gauge. Lo spaziotempo può essere pensato in due modi: i) come un insieme di

ipersuperfici spaziali per ogni tempo t , chiamato *slicing*; ii) come un insieme di linee di mondo di tipo tempo di posizione \mathbf{x} costante, chiamato *threading*. La decomposizione (4.1) non è unica proprio perché, in uno spazio tempo perturbato, lo slicing e il threading non sono univoci; inoltre, uno spaziotempo non omogeneo spesso non presenta neanche una scelta preferenziale di coordinate [1].

Scegliendo un gauge, si determinano implicitamente anche le perturbazioni. Questa dipendenza delle perturbazioni dal gauge può far comparire perturbazioni fittizie (non fisiche) dovute alla scelta delle coordinate e, similmente, può far scomparire perturbazioni reali. Per risolvere questo problema è necessario considerare contemporaneamente le perturbazioni della metrica e quelle della materia; inoltre, è utile considerare combinazioni di perturbazioni gauge-invarianti, che non possono essere alterate da trasformazioni coordinate e che quindi corrispondono sempre a perturbazioni reali [1].

4.1.1.3 Decomposizione SVT

Lo spaziotempo di fondo spazialmente piatto, omogeneo e isotropo possiede molte simmetrie. Queste simmetrie fanno sì che il tensore metrico e il tensore energia-impulso siano scomponibili in componenti indipendenti di tipo scalare (S), vettoriale (V) e tensoriale (T), a seconda delle loro proprietà di trasformazione sotto rotazioni spaziali.

Tale decomposizione è descritta nel modo più semplice nello spazio di Fourier:

$$X_{\mathbf{k}}(t) = \int d^3\mathbf{x} X(t, \mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (4.3)$$

in cui X rappresenta una generica perturbazione e \mathbf{k} indica il numero d'onda. La linearità delle equazioni del moto per le perturbazioni comporta che i diversi modi di Fourier non interagiscono tra loro e che quindi possono essere studiati indipendentemente [1].

4.1.2 Disomogenità dell'universo

4.1.2.1 Perturbazioni della metrica

La perturbazione della metrica di Friedmann-Robertson-Walker al primo ordine più generale è:

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + 2a(t)B_i dx^i dt + a^2(t)[(1 - 2\Psi)\delta_{ij} + E_{ij}]dx^i dx^j, \quad (4.4)$$

in cui Φ è uno scalare spaziale chiamato *lapse*, B_i è un vettore spaziale chiamato *shift*, Ψ è uno scalare spaziale chiamato perturbazione della *curvatura* spaziale, E_{ij} è un tensore spaziale simmetrico e a traccia nulla chiamato *shear* [1].

Nello spazio reale, la decomposizione SVT delle perturbazioni metriche è [1]:

$$B_i \equiv \partial_i B - S_i, \quad \text{con } \partial^i S_i = 0, \quad (4.5)$$

$$E_{ij} \equiv 2\partial_{ij} E + 2\partial_{(i} F_{j)} + h_{ij}, \quad \text{con } \partial^i F_i = 0, \quad h_i^i = \partial^i h_{ij} = 0. \quad (4.6)$$

Chiariamo ora il significato di B , S_i , E e F_i . B e E sono scelti in modo da soddisfare [1]:

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + 2a(t)B_{,i} dx^i dt + a^2(t)[(1 - 2\Psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}]dx^i dx^j. \quad (4.7)$$

Invece S_i e F_i soddisfano [1]:

$$ds^2 = -dt^2 + 2a(t)S_i dx^i dt + a^2(t)[\delta_{ij} + 2F_{(i,j)}]dx^i dx^j . \quad (4.8)$$

Considerando la trasformazione di gauge:

$$t \rightarrow t + \alpha \quad (4.9)$$

$$x^i \rightarrow x^i + \delta^{ij}\beta_{,j} , \quad (4.10)$$

risulta che E_{ij} rimane invariato, mentre le perturbazioni scalari variano [1]:

$$\Phi \rightarrow \Phi - \dot{\alpha} \quad (4.11)$$

$$B \rightarrow B + a^{-1}\alpha - a\dot{\beta} \quad (4.12)$$

$$E \rightarrow E - \beta \quad (4.13)$$

$$\Psi \rightarrow \Psi + H\alpha . \quad (4.14)$$

4.1.2.2 Perturbazioni della materia

Durante l'inflazione, l'universo è dominato dal campo scalare. In questa situazione le variazioni $\delta\phi$ provocano variazioni della metrica; tale accoppiamento è descritto dalle equazioni di Einstein [1].

Dopo l'inflazione, le perturbazioni del tensore energia-impulso dell'universo (si considera un fluido imperfetto) sono [1]:

$$T_0^0 = -(\bar{\rho} + \delta\rho) \quad (4.15)$$

$$T_i^0 = (\bar{\rho} + \bar{p})av_i \quad (4.16)$$

$$T_0^i = -(\bar{\rho} + \bar{p})(v^i - B^i)a^{-1} \quad (4.17)$$

$$T_j^i = \delta_j^i(\bar{p} + \delta p) + \Sigma_j^i . \quad (4.18)$$

Lo stress anisotropico Σ_j^i è un invariante di gauge, mentre densità, pressione e densità di momento (δq , definita tale che $(\delta q)_{,i} \equiv (\bar{\rho} + \bar{p})v_i$) sotto trasformazione di gauge si comportano come segue [1]:

$$\delta\rho \rightarrow \delta\rho - \dot{\rho}\alpha \quad (4.19)$$

$$\delta p \rightarrow \delta p - \dot{p}\alpha \quad (4.20)$$

$$\delta q \rightarrow \delta q + (\bar{\rho} + \bar{p})\alpha . \quad (4.21)$$

4.1.2.3 Variabili gauge-invarianti

Un importante scalare gauge-invariante è la *perturbazione di curvatura su ipersuperfici a densità costante*:

$$-\zeta \equiv \Psi + \frac{H}{\bar{\rho}}\delta\rho , \quad (4.22)$$

che misura la curvatura spaziale delle ipersuperfici a densità costante [1]. Un'importante proprietà di ζ è che essa rimane costante fuori dall'orizzonte di Hubble se le perturbazioni sono adiabatiche, ovvero se soddisfano:

$$\delta p_{\text{en}} \equiv \delta p - \frac{\dot{p}}{\bar{\rho}}\delta\rho = 0 . \quad (4.23)$$

La condizione (4.23) è sempre soddisfatta per inflazione a singolo campo e così la perturbazione $\zeta_{\mathbf{k}}$ non evolve al di fuori dell'orizzonte ($k \ll aH$). Se le ipersuperfici sono piatte, ζ equivale alla perturbazione di densità adimensionale $\frac{1}{3}\delta\rho/(\bar{\rho} + \bar{p})$. È possibile collegare le osservazioni della struttura a grande scala dell'universo e della CMB al valore primordiale di ζ , ottenendo come risultato, durante il periodo di inflazione slow-roll [1]:

$$-\zeta \simeq \Psi + \frac{H}{\dot{\phi}} \delta\phi. \quad (4.24)$$

Un altro scalare gauge-invariante è la *perturbazione di curvatura comovente* [1]:

$$\mathcal{R} \equiv \Psi - \frac{H}{\bar{\rho} + \bar{p}} \delta q. \quad (4.25)$$

Durante l'inflazione:

$$\mathcal{R} = \Psi + \frac{H}{\dot{\phi}} \delta\phi. \quad (4.26)$$

\mathcal{R} misura la curvatura spaziale di ipersuperfici comoventi (o con ϕ costante).

Le equazioni di Einstein linearizzate legano ζ e \mathcal{R} come segue [1]:

$$-\zeta = \mathcal{R} + \frac{k^2}{(aH)^2} \frac{2\bar{p}}{3(\bar{\rho} + \bar{p})} [\psi + a^2 H(\dot{E} - B/a)], \quad (4.27)$$

pertanto, le due perturbazioni sono uguali (a meno di un segno) per scale super-orizzonte, $k \ll aH$. Inoltre esse sono uguali anche durante l'inflazione slow-roll (per le equazioni (4.24) e (4.26)). Quindi, le funzioni di correlazione di ζ e \mathcal{R} sono uguali all'attraversamento dell'orizzonte e sia ζ che \mathcal{R} sono conservate a scale super-orizzonte. Per questo motivo successivamente mostreremo i risultati del calcolo dello spettro di \mathcal{R} al momento dell'attraversamento dell'orizzonte.

4.1.2.4 Non-evoluzione a scale super-orizzonte

Le equazioni di Einstein permettono di ricavare [1]:

$$\dot{\mathcal{R}} = -\frac{H}{(\bar{\rho} + \bar{p})} \delta p_{\text{en}} + \frac{k^2}{(aH)^2} (\dots), \quad (4.28)$$

pertanto perturbazioni di materia adiabatiche fanno sì che \mathcal{R} sia conservata per scale super-orizzonte $k < aH$.

4.1.3 Statistica delle perturbazioni cosmologiche

Una importante misura statistica delle fluttuazioni primordiali scalari è lo *spettro di potenza* di \mathcal{R} [1]:

$$\Delta_s^2 \equiv \Delta_{\mathcal{R}}^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\mathcal{R}}(k), \quad (4.29)$$

$$\text{con } P_{\mathcal{R}}(k) \text{ tale che } \langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}} \mathcal{R}_{\mathbf{k}'} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_{\mathcal{R}}(k), \quad (4.30)$$

dove per $\langle \dots \rangle$ si intende la media sull'ensemble di fluttuazioni. La dipendenza dello spettro di potenza dalla scala è definita dall'*indice spettrale* o *tilt*:

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \ln \Delta_s^2}{d \ln k}, \quad (4.31)$$

con l'invarianza di scala corrispondente a $n_s = 1$. Si può anche definire il *running* dell'indice spettrale:

$$\alpha_s \equiv \frac{dn_s}{d \ln k}. \quad (4.32)$$

Attraverso α_s è possibile approssimare lo spettro di potenza [1]:

$$\Delta_s^2(k) = A_s(k_*) \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s(k_*) - 1 + \frac{1}{2} \alpha_s(k_*) \ln(k/k_*)}, \quad (4.33)$$

in cui k_* è una scala di riferimento arbitraria (di *pivot*).

Se \mathcal{R} segue una distribuzione gaussiana, lo spettro di potenza contiene tutte le informazioni statistiche necessarie. Altrimenti, la *non-gaussianità primordiale* si manifesta nelle correlazioni di ordine superiore. Se l'inflazione è a singolo campo e slow-roll la non-gaussianità è piccola; in altri modelli può essere significativa [1].

Il tensore h_{ij} (cf. (4.6)) presenta due modi di polarizzazione: $h \equiv h^+$, h^\times [1]. Così:

$$\langle h_{\mathbf{k}} h_{\mathbf{k}'} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_h(k), \quad \Delta_h^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} P_h(k). \quad (4.34)$$

Si definisce lo spettro di potenza per le perturbazioni tensoriali come la somma degli spettri di potenza per le due polarizzazioni [1]:

$$\Delta_t^2 \equiv 2\Delta_h^2. \quad (4.35)$$

La dipendenza di scala è definita come:

$$n_t \equiv \frac{d \ln \Delta_t^2}{d \ln k} \quad (4.36)$$

e questo permette di scrivere [1]:

$$\Delta_t^2(k) = A_t(k_*) \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_t(k_*)}. \quad (4.37)$$

4.2 Origine quantistica delle strutture

Come già detto, le fluttuazioni quantistiche durante l'inflazione sono all'origine delle perturbazioni cosmologiche che, a loro volta, hanno dato origine alle strutture. Quindi le fluttuazioni quantistiche sono anche all'origine degli spettri di potenza delle perturbazioni scalari e tensoriali ($P_s(k)$ e $P_t(k)$).

Le fluttuazioni sono create a tutte le scale di lunghezza, ovvero con uno spettro di numeri d'onda k . Le fluttuazioni di rilevanza cosmologica hanno origine all'interno dell'orizzonte di Hubble: $k \gg aH$ (sub-orizzonte). A causa dell'inflazione, queste fluttuazioni escono dall'orizzonte: $k < aH$ (super-orizzonte) e, una volta terminata l'inflazione, cominciano a rientrare all'interno dell'orizzonte [1].

Le disomogenità cosmologiche possono essere descritte da \mathcal{R} e ζ . Entrambe queste quantità, come visto nel paragrafo 4.1.2.4, rimangono costanti al di fuori dell'orizzonte ($k < aH$). Questo fatto le rende interessanti perché gli permette di non essere influenzate da proprietà fisiche sconosciute dell'universo appena dopo l'inflazione [1].

Nel prossimo paragrafo saranno mostrati i risultati del calcolo degli spettri di potenza delle fluttuazioni scalari e tensoriali al momento di attraversamento

dell'orizzonte (il calcolo richiede la teoria quantistica dei campi in spaziotempi curvi). Nel capitolo 6, invece, sarà mostrata la relazione tra tali fluttuazioni e gli osservabili cosmologici.

4.3 Spettri primordiali

4.3.1 Risultati generali

I risultati del calcolo degli spettri di potenza delle fluttuazioni scalari e tensoriali sono [1]:

$$\Delta_s^2(k) \equiv \Delta_{\mathcal{R}}^2(k) = \frac{1}{8\pi^2} \frac{H^2}{M_{\text{pl}}^2} \frac{1}{\epsilon} \Big|_{k=aH}, \quad (4.38)$$

$$\Delta_t^2(k) \equiv 2\Delta_h^2(k) = \frac{2}{\pi^2} \frac{H^2}{M_{\text{pl}}^2} \Big|_{k=aH}, \quad (4.39)$$

in cui

$$\epsilon = -\frac{d \ln H}{dN}. \quad (4.40)$$

(D'ora in avanti sarà omesso il pedice 'H' ai parametri slow-roll di Hubble.)

Il rapporto tensore-scalare è:

$$r \equiv \frac{\Delta_t^2}{\Delta_s^2} = 16\epsilon_*. \quad (4.41)$$

Il rapporto tensore-scalare nasce con lo scopo di normalizzare le fluttuazioni tensoriali all'ampiezza delle fluttuazioni scalari. Le fluttuazioni scalari sono state misurate dell'ordine $\Delta_s^2 \sim 10^{-9}$, mentre quelle tensoriali non hanno ancora avuto una misura certa (si veda il capitolo 6) [1].

Per quanto riguarda la dipendenza dalla scala, si trova che, al primo ordine nei parametri slow-roll di Hubble [1]:

$$n_s - 1 = 2\eta_* - 4\epsilon_*, \quad (4.42)$$

$$n_t = -2\epsilon_*. \quad (4.43)$$

Pertanto, ogni deviazione dalla perfetta invarianza di scala ($n_s = 1$ e $n_t = 0$) permette di capire qualcosa della dinamica inflazionaria, attraverso i parametri ϵ e η . Inoltre, dalle equazioni (4.42) e (4.43) si vede che l'inflazione slow-roll prevede che gli spettri delle perturbazioni non siano perfettamente invarianti rispetto alla scala, poiché i parametri slow-roll, se pur molto piccoli, non sono nulli.

4.3.2 Risultati slow-roll

Nell'approssimazione slow-roll gli spettri di potenza si esprimono come [1]:

$$\Delta_s^2(k) \simeq \frac{1}{24\pi^2} \frac{V}{M_{\text{pl}}^4} \frac{1}{\epsilon_V} \Big|_{k=aH}, \quad (4.44)$$

$$\Delta_t^2(k) \simeq \frac{2}{3\pi^2} \frac{V}{M_{\text{pl}}^4} \Big|_{k=aH}. \quad (4.45)$$

Sfruttando il fatto che $\epsilon \simeq \epsilon_V$ e $\eta \simeq \eta_V - \epsilon_V$, dai sottoparagrafi precedenti risulta:

$$n_s - 1 = 2\eta_V^* - 6\epsilon_V^*, \quad (4.46)$$

$$n_t = -2\epsilon_V^*, \quad (4.47)$$

$$r = 16\epsilon_V^*. \quad (4.48)$$

Da (4.47) e (4.48) si deduce che, affinché esse siano consistenti, deve valere la *relazione di consistenza* [1]:

$$r = -8n_t \quad (4.49)$$

Nell'approssimazione slow-roll, è possibile mettere in relazione le misure degli spettri di potenza con la forma del potenziale $V(\phi)$. Infatti, H misura la scala del potenziale, ϵ_V la sua derivata prima $V_{,\phi}$, η_V la sua derivata seconda $V_{,\phi\phi}$; ed è possibile quindi ricostruire una serie di potenze del potenziale attorno a ϕ_{cmb} [1].

4.4 Scala energetica dell'inflazione e limite di Lyth

4.4.1 Scala energetica dell'inflazione

Risulta che Δ_s^2 è fisso, mentre $\Delta_t^2 \propto H^2 \simeq V$ [1]. Pertanto, il rapporto tensore-scalare è una misura diretta della scala energetica dell'inflazione [1]:

$$V^{1/4} \sim \left(\frac{r}{0.01} \right)^{1/4} 10^{16} \text{GeV}. \quad (4.50)$$

Grandi valori di r , $r \geq 0.01$, corrispondono al fatto che l'inflazione è avvenuta alla scala di grande unificazione (GUT), ovvero 10^{16} GeV [1].

4.4.2 Il limite di Lyth

Risulta che il rapporto tensore-scalare è legato all'evoluzione dell'inflatone da [1]:

$$r = \frac{8}{M_{\text{pl}}^2} \left(\frac{d\phi}{dN} \right)^2. \quad (4.51)$$

Pertanto, l'evoluzione totale dell'inflatone tra il momento in cui le fluttuazioni della CMB escono dall'orizzonte e la fine dell'inflazione è dato da:

$$\frac{\Delta\phi}{M_{\text{pl}}} = \int_{N_{\text{end}}}^{N_{\text{cmb}}} dN \sqrt{\frac{r}{8}}. \quad (4.52)$$

Considerando che durante il periodo slow-roll $r(N)$ non evolve molto, si può ottenere la relazione (*limite di Lyth*) [1]:

$$\frac{\Delta\phi}{M_{\text{pl}}} = \mathcal{O}(1) \times \left(\frac{r(N_{\text{cmb}})}{0.01} \right)^{1/2}. \quad (4.53)$$

Quindi, grandi valori del rapporto tensore-scalare ($r > 0.01$) sono legati a inflazione a grande campo, $\Delta\phi > M_{\text{pl}}$.

Con gli strumenti attuali, per rilevare onde gravitazionali con un sufficiente livello di confidenza è necessario che $r \gtrsim 0.1$ [2]. Pertanto, da (4.53) si vede che è necessario che $\Delta\phi \gtrsim M_{\text{pl}}$.

Capitolo 5

Modelli di Inflazione

In questo capitolo si illustreranno diversi modelli di inflazione, attraverso la specificazione di un'azione per il campo scalare (contenente termini cinetici e di potenziale) e il suo accoppiamento con la gravità. Sarà seguito un approccio fenomenologico: si descriverà un potenziale $V(\phi)$ *postulato* e si indicheranno le previsioni sperimentali a cui esso porta. Recentemente, sono stati fatti progressi anche in una descrizione sistematica dell'inflazione attraverso teorie di campo effettivo e nella derivazione di potenziali a partire dalla teoria delle stringhe [1].

5.1 Modelli a un campo slow-roll

I modelli a un solo campo scalare corrispondono a una azione del tipo [1]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]. \quad (5.1)$$

Le diverse possibilità per $V(\phi)$ sono classificate in base a quanto è grande $\Delta\phi \equiv \phi_{\text{cmb}} - \phi_{\text{end}}$, misurata in unità di Planck.

5.1.1 Inflazione a piccolo campo

In modelli a piccolo campo: $\Delta\phi < M_{\text{pl}}$.

Tale proprietà fa sì che le onde gravitazionali generate durante l'inflazione abbiano un'ampiezza troppo piccola per essere rilevate, come è stato mostrato nel paragrafo 4.4.2.

I potenziali dei modelli a piccolo campo spesso nascono in meccanismi di rottura spontanea di simmetria, in cui il campo si trova inizialmente in una situazione di equilibrio instabile e si dirige verso uno stato di vuoto a $\phi \neq 0$ [1].

Un esempio è il potenziale di Higgs [1]:

$$V(\phi) = V_0 \left[1 - \left(\frac{\phi}{\mu} \right)^2 \right]^2, \quad (5.2)$$

in cui V_0 è una costante con le dimensioni di un'energia alla quarta e μ è una costante con le dimensioni di un'energia. V_0 e μ , insieme, determinano la scala di energia e la massa dell'inflatone¹. In generale, lontano dalla fine dell'inflazione e dal reheating, i potenziali di piccolo campo possono essere approssimati localmente da [1]:

$$V(\phi) \simeq V_0 \left[1 - \left(\frac{\phi}{\mu} \right)^p \right], \quad (5.3)$$

in cui p è una costante positiva e V_0 e μ hanno lo stesso significato di prima.

¹In particolare, espandendo la teoria intorno al minimo, risulta che la derivata seconda del potenziale è la massa al quadrato dell'inflatone. Per esempio, col potenziale (5.2) il minimo è in $\phi = \mu$ e la derivata seconda è $8V_0/\mu^2$, quindi la massa dell'inflatone è $\sqrt{8V_0}/\mu$. Inoltre V_0 è il valore di $V(\phi)$ in $\phi = 0$, che è un punto di massimo; quindi V_0 dà una buona stima della scala energetica dell'inflazione con questo potenziale.

5.1.2 Inflazione a grande campo

Nei modelli di inflazione a grande campo, ϕ parte a valori di $V(\phi)$ alti, ovvero dell'ordine della massa di Planck, e si muove verso un minimo posto a $\phi = 0$; inoltre, il campo è soggetto a $\Delta\phi \gtrsim M_{\text{pl}}$.

Le onde gravitazionali prodotte dall'inflazione a grande campo hanno un'ampiezza sufficiente per essere rilevate [1] (si veda il paragrafo 4.4.2).

5.1.2.1 Modello $m^2\phi^2$

Trattiamo ora quello che si può forse ritenere il modello più semplice di inflazione [1]: inflazione a un solo campo indotta da un termine di massa:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (5.4)$$

Seguendo la procedura indicata nella nota 1 alla pagina precedente si trova che la massa dell'inflatone per questo potenziale è m . È immediato verificare, da (3.40) e (3.41) che i parametri slow-roll sono:

$$\epsilon_V(\phi) = \eta_V(\phi) = 2\frac{M_{\text{pl}}^2}{\phi^2}. \quad (5.5)$$

Affinché le condizioni di slow-roll siano soddisfatte è necessario che:

$$\phi > \sqrt{2}M_{\text{pl}}, \quad (5.6)$$

si tratta quindi di un modello a grande campo. L'inflazione ha termine quando:

$$\phi_{\text{end}} = \sqrt{2}M_{\text{pl}}. \quad (5.7)$$

Il numero di e-folding è dato da (3.63):

$$N(\phi) = \frac{\phi^2}{4M_{\text{pl}}^2} - \frac{1}{2}. \quad (5.8)$$

Da questa espressione (e attraverso (3.69)) è possibile calcolare il valore del campo a cui sono create le fluttuazioni della CMB:

$$\phi_{\text{cmb}} \simeq 2\sqrt{N_{\text{cmb}}}M_{\text{pl}} \sim 15M_{\text{pl}}. \quad (5.9)$$

Lo studio dello spettro delle fluttuazioni per il modello $m^2\phi^2$ sarà esposto nel paragrafo 5.3.

5.1.2.2 Modelli di inflazione caotica

È possibile generalizzare il modello $m^2\phi^2$, ottenendo i modelli di *inflazione caotica*, in cui i potenziali sono costituiti da monomi [2]:

$$V = \lambda_\alpha M_{\text{pl}}^{4-\alpha} \phi^\alpha. \quad (5.10)$$

in cui α è un intero positivo (tipicamente pari) e λ è adimensionale. I parametri slow-roll risultano:

$$\epsilon_V = \frac{\alpha^2}{2} \frac{M_{\text{pl}}^2}{\phi^2}, \quad \eta_V = \alpha(\alpha - 1) \frac{M_{\text{pl}}^2}{\phi^2}. \quad (5.11)$$

Le condizioni slow-roll sono soddisfatte per $\phi > M_{\text{pl}}$ e sono indipendenti dalla costante di accoppiamento λ_α . Tuttavia, affinché le fluttuazioni di densità previste per la CMB siano piccole, deve risultare $\lambda_\alpha \ll 1$. Questa condizione garantisce, tra l'altro, che la densità di energia di queste fluttuazioni è sub-planckiana: $\rho^{1/4} \ll M_{\text{pl}}$ e che quindi che gli effetti della gravità quantistica non sono necessariamente importanti [1].

5.2 Altri modelli

Si può estendere l'azione (5.1) in una serie di modi diversi.

Accoppiamento gravitazionale non-minimale L'azione (5.1) non presenta un accoppiamento diretto tra l'inflatone e il campo gravitazionale, in questo senso si dice che è *minimalmente accoppiata*. Si può quindi introdurre un accoppiamento non minimale tra l'inflatone e il gravitone, anche se, teorie con accoppiamento non minimale si possono ricondurre a teorie con accoppiamento minimale attraverso una ridefinizione del campo [1].

Gravità modificata È possibile modificare la parte Einstein-Hilbert dell'azione per alte energie. Tuttavia, le teorie più semplici di gravità modificata, le teorie $f(R)$, si possono ricondurre ancora all'azione (5.1) [1].

Termine cinetico non canonico L'azione (5.1) presenta il termine canonico:

$$\mathcal{L}_\phi = X - V(\phi), \quad X \equiv \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi. \quad (5.12)$$

Con questa azione, come abbiamo visto, l'inflazione può avvenire correttamente solo se il potenziale $V(\phi)$ è molto piatto (inflazione slow-roll). Tuttavia, si può considerare un termine più generale per una teoria delle alte energie:

$$\mathcal{L}_\phi = F(\phi, X) - V(\phi), \quad (5.13)$$

ovvero, $F(\phi, X)$ è una funzione del campo e delle sue derivate. Con azioni del tipo (5.13) è possibile avere inflazione anche con un potenziale ripido [1].

Diversi campi È possibile ipotizzare che l'inflazione sia il risultato dell'azione di più di un campo scalare. In questa situazione le possibilità di dinamiche inflazionarie aumentano grandemente [1].

5.3 Spettri di potenza per il modello $m^2\phi^2$

Calcoliamo ora i valori dei vari parametri legati alle fluttuazioni quantistiche primordiali per il modello $m^2\phi^2$. Valutando i parametri slow-roll per il modello $m^2\phi^2$ a $\phi_\star = \phi_{\text{cmb}}$ si ottiene:

$$\epsilon_V^\star = \eta_V^\star = 2\left(\frac{M_{\text{pl}}}{\phi_{\text{cmb}}}\right)^2 = \frac{1}{2N_{\text{cmb}}}. \quad (5.14)$$

Inserendo l'espressione del potenziale in (4.44) e utilizzando (5.14) si ottiene:

$$\Delta_s^2 = \frac{m^2}{M_{\text{pl}}^2} \frac{N_{\text{cmb}}^2}{6} \quad (5.15)$$

da questa equazione e dal fatto che $\Delta_s^2 \sim 10^{-9}$ si può ottenere la massa dell'inflatone: $m \sim 10^{-6} M_{\text{pl}}$.

Si ottiene anche ($N_{\text{cmb}} \simeq 40\text{--}60$):

$$n_s = 1 + 2\eta_V^* - 6\epsilon_V^* = 1 - \frac{2}{N_{\text{cmb}}} \simeq 0.95\text{--}0.97, \quad (5.16)$$

$$r = 16\epsilon_V^* = \frac{8}{N_{\text{cmb}}} \simeq 0.1\text{--}0.2. \quad (5.17)$$

Capitolo 6

Contatto con le osservazioni

6.1 Ricavare informazioni sugli spettri primordiali

Nel capitolo 4 sono stati calcolati gli spettri di potenza delle perturbazioni \mathcal{R} e h al momento di attraversamento dell'orizzonte di Hubble. L'obiettivo della prima parte di questo capitolo è di mostrare la relazione tra tali spettri e gli osservabili cosmologici, ovvero la radiazione cosmica di fondo e la struttura a grande scala dell'universo.

A tale scopo è necessario fare due cose [1]:

1. Mettere in relazione le perturbazioni \mathcal{R} e h con l'osservabile cosmologico \mathcal{Q} , il quale può consistere nelle fluttuazioni di temperatura della CMB o nella densità di galassie.
2. Tenere conto dell'evoluzione temporale delle perturbazioni e dell'osservabile dopo che le perturbazioni sono rientrate nell'orizzonte.

Pertanto, si può scrivere schematicamente [1]:

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(\tau) = T_{\mathcal{Q}}(k, \tau, \tau_{\star}) \mathcal{R}_{\mathbf{k}}(\tau_{\star}), \quad (6.1)$$

in cui $T_{\mathcal{Q}}$ è la *funzione di trasferimento* tra \mathcal{R} al tempo τ_{\star} e \mathcal{Q} a qualche tempo successivo τ . La funzione di trasferimento può dipendere dalla scala.

6.2 Anisotropie della radiazione cosmica di fondo

6.2.1 Campo di anisotropia

La radiazione cosmica di fondo possiede anisotropie di temperatura e polarizzazione.

La polarizzazione della CMB è il risultato dell'interazione tra i fotoni e gli elettroni liberi per diffusione Thomson¹. La polarizzazione compare se, nel sistema di riferimento dell'elettrone, la radiazione incidente *non* appare isotropa e presenta un momento di quadrupolo non nullo. Tale momento di quadrupolo compare quando i fotoni si disaccoppiano dalla materia [1].

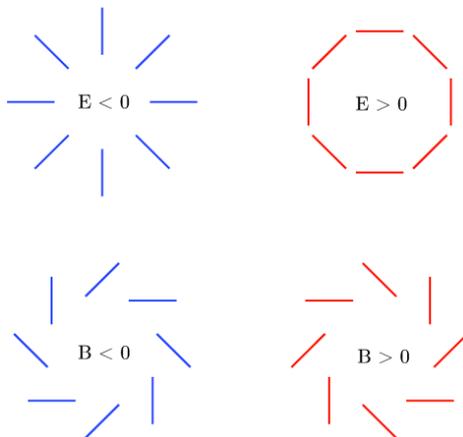
Il campo di anisotropia della CMB è descritto da un tensore di intensità 2×2 $I_{ij}(\hat{n})$, con \hat{n} la direzione del cielo [1]. Le componenti I_{ij} sono definite relative a due vettori di base perpendicolari a \hat{n} . La polarizzazione lineare è descritta dai *parametri di Stokes* $Q = \frac{1}{4}(I_{11} - I_{22})$ e $U = \frac{1}{2}I_{12}$, mentre le anisotropie di temperatura sono $T = \frac{1}{4}(I_{11} + I_{22})$. A causa delle diverse proprietà sotto rotazioni nel piano perpendicolare a \hat{n} , queste tre variabili devono essere trattate diversamente: T può essere espansa in termini delle armoniche sferiche scalari (spin 0) Y_{lm} [1]:

$$\Theta(\hat{n}) \equiv \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\hat{n}), \quad (6.2)$$

$$\text{con } a_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{n}) \Theta(\hat{n}), \quad (6.3)$$

¹La diffusione Thomson corrisponde al limite non relativistico della diffusione Compton.

Figura 6.1: Rappresentazione dei vettori di polarizzazione dei modi E e dei modi B. Il colore blu indica regioni più fredde mentre il rosso indica regioni più calde. (Figura tratta da [1])



mentre $Q \pm iU$ si espande nelle armoniche sferiche tensoriali (spin 2) ${}_{\pm 2}Y_{lm}$:

$$(Q \pm iU)(\hat{n}) = \sum_{l,m} a_{\pm 2,lm} {}_{\pm 2}Y_{lm}(\hat{n}). \quad (6.4)$$

6.2.2 Modi E e B

Invece dei momenti $a_{\pm 2,lm}$ nell'espansione (6.4), è conveniente introdurre delle loro combinazioni lineari:

$$a_{E,lm} \equiv -\frac{1}{2}(a_{2,lm} + a_{-2,lm}), \quad a_{B,lm} \equiv -\frac{1}{2i}(a_{2,lm} - a_{-2,lm}). \quad (6.5)$$

Attraverso di esse si definiscono i campi scalari

$$E(\hat{n}) = \sum_{l,m} a_{E,lm} Y_{lm}(\hat{n}), \quad B(\hat{n}) = \sum_{l,m} a_{B,lm} Y_{lm}(\hat{n}), \quad (6.6)$$

che sostituiscono le quantità Q e U , caratterizzando completamente il campo di polarizzazione lineare [1].

Il modo di polarizzazione E viene chiamato anche modo a rotore nullo, perché i suoi vettori di polarizzazione si dipartono radiali dai punti più freddi e sono tangenziali alle regioni più calde. Analogamente, il modo di polarizzazione B viene chiamato modo a divergenza nulla e i suoi vettori hanno vorticità non nulla attorno a qualsiasi punto. (Tutto questo è illustrato nella figura 6.1) [1].

La relazione tra tipo di perturbazione e modo da essa creato è la seguente [1]:

- le perturbazioni scalari (di densità) creano solo modi E;
- le perturbazioni vettoriali (di vorticità) creano principalmente modi B, ma i vettori decadono con l'espansione dell'universo e sono sottodominanti alla ricombinazione;
- la perturbazioni tensoriali (di onde gravitazionali) creano sia modi E che modi B.

6.2.3 Spettri di potenza angolari

Per ogni coppia di variabili scelta tra T,E,B, definiamo lo *spettro di potenza angolare* [1]:

$$C_l^{XY} \equiv \frac{1}{2l+1} \sum_m \langle a_{X,lm}^* a_{Y,lm} \rangle, \quad X, Y = T, E, B. \quad (6.7)$$

Risulta in generale che gli spettri primordiali $P(k) \equiv P_{\mathcal{R}}(k), P_h(k)$ e gli spettri angolari delle fluttuazioni della CMB sono legati da questa relazione [1]:

$$C_l^{XY} = \frac{2}{\pi} \int k^2 dk \underbrace{P(k)}_{\text{Inflazione}} \underbrace{\Delta_{Xl}(k) \Delta_{Yl}(k)}_{\text{Anisotropie}}, \quad (6.8)$$

$$\text{con } \Delta_{Xl}(k) = \int_0^{\tau_0} d\tau \underbrace{S_X(k, \tau)}_{\text{Sorgenti}} \underbrace{P_{Xl}(k[\tau_0 - \tau])}_{\text{Proiezione}}. \quad (6.9)$$

Le funzioni $\Delta_{Xl}(k)$ e $\Delta_{Yl}(k)$ sono funzioni di trasferimento. Per ricavare $P(k)$ da (6.8) è necessario eseguire una deconvoluzione.

Degli spettri angolari di potenza, quelli relativi alle combinazioni TB e EB sono nulli per ragioni di simmetria, mentre gli altri sono dati da [1]:

$$C_l^{TT} = \frac{2}{\pi} \int k^2 dk P_{\mathcal{R}}(k) \Delta_{Tl}^2(k), \quad (6.10)$$

$$C_l^{EE} \simeq (4\pi)^2 \int k^2 dk P_{\mathcal{R}}(k) \Delta_{El}^2(k), \quad (6.11)$$

$$C_l^{TE} \simeq (4\pi)^2 \int k^2 dk P_{\mathcal{R}}(k) \Delta_{Tl}(k) \Delta_{El}(k), \quad (6.12)$$

$$C_l^{BB} = (4\pi)^2 \int k^2 dk P_h(k) \Delta_{Bl}^2(k). \quad (6.13)$$

6.3 Struttura a grande scala

Nello studio delle fluttuazioni della distribuzione della materia a grande scala si utilizza il parametro *contrasto di densità* $\delta \equiv \delta\rho/\rho$. Esso si può riferire sia alla distribuzione di materia oscura (δ) che alla distribuzione di galassie (δ_g). È un'assunzione comune che la distribuzione di galassie sia legata alla distribuzione di materia oscura dalla relazione:

$$\delta_g = b\delta, \quad (6.14)$$

in cui b è il parametro di *bias*, che può essere ottenuto in maniera indipendente [1].

Nel limite di tempi lunghi, lo spettro di potenza delle fluttuazioni di curvatura primordiali è legato allo spettro di potenza delle fluttuazioni di densità della materia oscura dalla relazione:

$$P_\delta(k, \tau) = \frac{4}{25} \left(\frac{k}{aH} \right)^4 T_\delta^2(k, \tau) P_{\mathcal{R}}(k), \quad (6.15)$$

in cui T_δ è la funzione di trasferimento, che solitamente deve essere calcolata numericamente [1].

6.4 Test per l'inflazione

6.4.1 Evidenze correnti

Al momento, non ci sono vere prove dell'inflazione, ma solo indicazioni incoraggianti [1]. Vediamo quali sono.

Piattezza L'inflazione predice che [1]:

$$\Omega_{\text{tot}} = 1 \pm 10^{-5}, \quad (6.16)$$

mentre i dati mostrano [1]:

$$\Omega_{\text{tot}} = 1 \pm 0.02. \quad (6.17)$$

Tuttavia, questa concordanza non è sufficiente per provare l'inflazione perché si potrebbe argomentare che l'inflazione è stata ideata proprio per spiegare la piattezza dell'universo [1].

Picchi nello spettro Considerando lo spettro di potenza angolare TT, mostrato in figura 6.2, si osservano dei picchi che possono essere spiegati dall'inflazione. L'inflazione predice che le perturbazioni generate da essa sono caratterizzate dal fatto che tutti i loro modi di Fourier hanno la stessa fase. Questo permette ad essi di interferire in maniera coerente e di formare così dei picchi e dei ventri nello spettro TT.

In realtà, i picchi dello spettro TT sono in un intervallo di momento di multipolo tale ($l > 200$) da poter essere stati prodotti da meccanismi causali prima della ricombinazione e senza bisogno dell'inflazione. Tuttavia, se si considera anche lo spettro TE, si nota un picco nell'intervallo $100 < l < 200$, che è spiegabile solo ricorrendo all'inflazione [1].

Invarianza di scala Misurando C_l^{TT} , C_l^{TE} e C_l^{EE} si può inferire $P_{\mathcal{R}}(k)$, da cui si può ulteriormente dedurre n_s . Risulta che $n_s \simeq 1$, ovvero che lo spettro è approssimativamente invariante in scala. Questo corrisponde alle predizioni dei più semplici modelli inflazionari [1].

La sola osservazione delle perturbazioni scalari non è di per sé una prova dell'inflazione.

Recentemente, l'esperimento Planck, assumendo il modello standard cosmologico Λ CDM, ha fornito un valore dell'indice spettrale scalare pari a [8]:

$$n_s = 0.9603 \pm 0.0073. \quad (6.18)$$

La deviazione dalla perfetta invarianza di scala corrisponde al fatto che l'espansione inflazionaria è dipendente dal tempo, poiché il parametro di Hubble H deve cambiare se l'inflazione deve avere termine [1].

Gaussianità Si misura che \mathcal{R} è approssimativamente gaussiana (e potrebbe anche esserlo esattamente). Questo corrisponde alle aspettative dell'inflazione slow-roll a singolo campo. Oltre all'inflazione, non ci sono altre spiegazioni del perché la CMB sia gaussiana [1].

Adiabaticità L'inflazione a campo singolo predice che le perturbazioni di densità primordiali siano puramente adiabatiche. Le osservazioni confermano questa ipotesi [1].

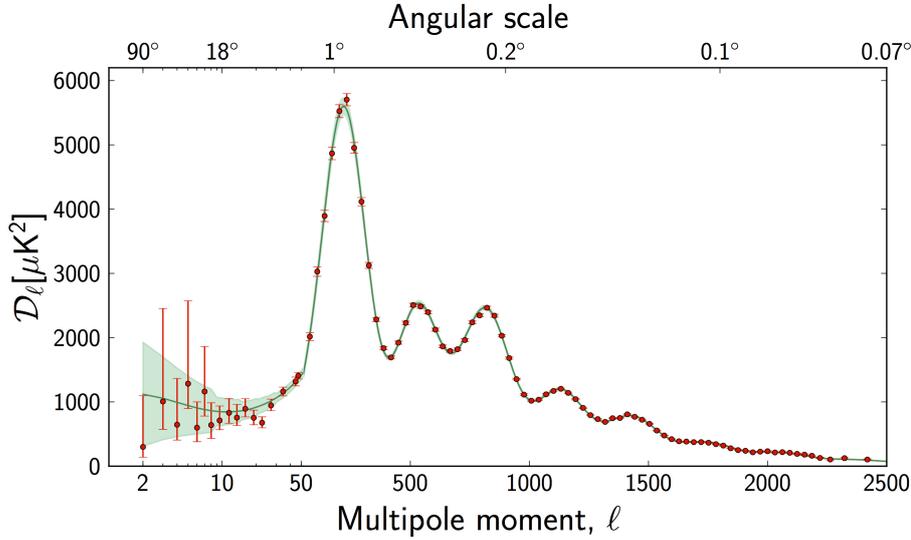


Figura 6.2: Lo spettro di potenza angolare per le fluttuazioni di temperatura della CMB secondo l'esperimento Planck [7]. In particolare, viene indicata in ordinata la quantità $l(l+1)C_l^{TT}/2\pi$. Si nota la struttura a picchi.

6.4.2 Test futuri

Ampiezza dei modi tensoriali Probabilmente, il singolo più importante pezzo di evidenza per l'inflazione è la misurazione dei modi B della CMB, perché ciò praticamente non sarebbe spiegabile da altro che non siano le onde gravitazionali primordiali. Da questa misura sarebbe anche possibile stimare la scala energetica dell'inflazione [1].

Dipendenza dalla scala dei modi scalari Se l'inflazione è slow-roll, il running dell'indice spettrale deve essere del secondo ordine nel parametro slow-roll ϵ : $\alpha_s \sim \mathcal{O}(\epsilon^2)$. Se questo non fosse verificato, sarebbe necessario rivedere alcune semplici assunzioni della teoria dell'inflazione e della generazione delle perturbazioni [1].

Dipendenza dalla scala dei modi tensoriali Verificare la relazione di consistenza $r = -8n_t$ permetterebbe di falsificare la versione a campo unico slow-roll dell'inflazione [1].

Non-gaussianità Se le fluttuazioni primordiali fossero anche solo poco non-gaussiane, si potrebbe ricavare da ciò molte informazioni sull'azione dell'inflazione [1].

Fluttuazioni di isocurvatura Se l'inflazione è a campo multiplo, possono sorgere perturbazioni di isocurvatura. Esse influenzano la densità relativa tra diverse specie di materia, ma non alterano la densità totale, lasciando così invariata la curvatura spaziale. Se le perturbazioni sono adiabatiche (cosa non garantita con più di un campo scalare) esse modificano la struttura a picchi delle fluttuazioni della CMB. La CMB mostra già, pertanto, che le perturbazioni di isocurvatura sono una componente sottodominante. Le

predizioni teoriche delle ampiezze delle perturbazioni di isocurvatura sono complicate dal fatto che esse dipendono fortemente dal modello inflazionario e dal modello di evoluzione post-inflazionario [1].

6.4.3 Esperimento BICEP2

L'esperimento BICEP2 [5] consiste nell'utilizzo di un polarimetro per la ricerca del segnale dei modi B nella radiazione cosmica di fondo predetto a $l \sim 80$ nello spettro di potenza angolare BB, risultato delle onde gravitazionali inflazionarie. Per fare ciò, tra il 2010 e il 2012, BICEP2 ha osservato dal Polo Sud un'area di 380 deg^2 alla profondità di 87 nK deg nei parametri di Stokes Q e U ².

I risultati dell'esperimento effettivamente mostrano un eccesso di modi B rispetto a quanto predetto dal modello standard cosmologico ΛCDM , nella regione dove ci si aspetta un picco del segnale di onda gravitazionale inflazionaria³. Il segnale spurio (ovvero che presenta altri contributi oltre alle onde gravitazionali) corrisponde a un rapporto tensore-scalare

$$r = 0.20_{-0.05}^{+0.07} \quad (6.19)$$

e l'ipotesi nulla ($r = 0$) è esclusa con una probabilità di 7.0σ o 3.3×10^{-12} (indicata con PTE: *probability to exceed*). Risulta anche che i dati corrispondono bene alle aspettative del modello $\text{lensed-}\Lambda\text{CDM} + \text{rumore} + r$ [5].

La combinazione del risultato di BICEP2 (6.19) e del valore dell'indice spettrale scalare fornito da Planck (6.18) è in accordo con le previsioni del modello inflazionario $m^2\phi^2$, come si verifica confrontando con (5.17) e (5.16).

Il contributo al segnale dovuto all'emissione di radiazione di sincrotrone polarizzata dalla nostra galassia è stato stimato trascurabile sulla base di mappe fornite dall'esperimento WMAP. Al momento della pubblicazione dei risultati di BICEP2 (giugno 2014) [5], la mappa dell'emissione di radiazione polarizzata da parte della polvere galattica non era ancora disponibile. Pertanto, per stimare questo contributo, gli autori dell'esperimento si sono basati su alcuni modelli e su informazioni parziali dell'esperimento *Planck*. Il risultato di questa procedura è che il valore di r diminuisce leggermente e che la PTE diminuisce, anche se si mantiene un'alta significatività di rilevazione. Tuttavia, nella loro pubblicazione, gli stessi autori dell'esperimento hanno ammesso che questo e altre indicazioni non sono sufficienti per escludere che l'emissione della polvere non sia così intensa, in realtà, da produrre l'intero segnale⁴ [5].

Inoltre, il risultato (6.19) appare in contrasto con esperimenti precedenti che avevano posto un limite superiore a r minore di 0.20 (per esempio $r < 0.11$). Tuttavia, questa incompatibilità potrebbe essere rimossa estendendo il modello standard ΛCDM , per esempio introducendo il parametro di running $\alpha_s = dn_s/d \ln k$ oppure aumentando il numero effettivo di neutrini [5].

²La teoria dell'inflazione prevede un picco di modi B nella regione $l \simeq 80$, ma anche un altro nella regione $l < 10$. Tuttavia, per osservare quest'ultimo sarebbe stato necessario osservare una regione che copre una frazione sostanziale dell'intero cielo.

³Il modello ΛCDM prevede che una piccola frazione di modi E sia convertita in modi B, per effetti di lente gravitazionale.

⁴Articoli successivi a quello di BICEP2 hanno mostrato che l'analisi della polvere fatta da BICEP2 è sbagliata.

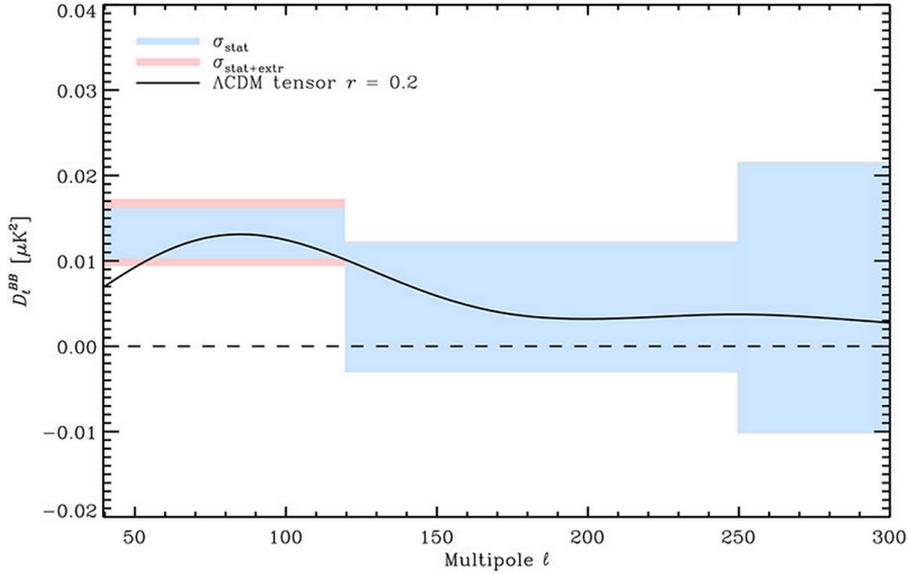


Figura 6.3: Il centro delle bande colorate individua lo spettro angolare di potenza D_l^{BB} per la polvere misurato da Planck a 353 Hz e estrapolato a 150 Hz, frequenza utilizzata da BICEP2. Le bande colorate rappresentano le incertezze $\pm 1\sigma$: azzurro per le incertezze statistiche da parte del rumore e rosso per le aggiunte dovute all'estrapolazione a 150 Hz. La linea nera corrisponde al best fit dell'esperimento Planck (2013) per il modello Λ CDM con $r = 0.2$, come sostenuto da BICEP2. Poiché la linea è perfettamente all'interno delle bande delle incertezze, il segnale registrato da BICEP2 potrebbe essere del tutto dovuto alla polvere. (Figura tratta da [9].)

In settembre 2014, l'esperimento Planck ha reso pubblici i propri risultati [9] riguardo all'emissione di radiazione polarizzata da parte della polvere galattica. In particolare, l'esperimento ha misurato gli spettri di potenza C_l^{EE} e C_l^{BB} per la radiazione polarizzata emessa dalla polvere nell'intervallo di multipolo $40 < l < 600$ su ampie frazioni del cielo. Da questi spettri di potenza sono state ricavate poi informazioni statistiche sulla polarizzazione della polvere, necessarie per identificare il contributo della polvere alla polarizzazione complessiva della radiazione cosmica di fondo.

I risultati mostrano che non ci sono regioni del cielo abbastanza "pulite" da rendere non necessaria la sottrazione del contributo della polvere nelle misure della polarizzazione dei modi B. Nell'intervallo di multipolo di interesse per il confronto coi risultati di BICEP2 ($40 < l < 120$) la quantità $D_l^{BB} \equiv l(l+1)C_l^{BB}/(2\pi)$ misurata da Planck per la polvere è risultata di grandezza paragonabile a quella rilevata da BICEP2 (figura 6.3). Questo significa che il segnale che BICEP2 ha individuato potrebbe facilmente essere dovuto alla radiazione polarizzata emessa dalla polvere galattica e non dalle onde gravitazionali primordiali provocate dall'inflazione.

Per avere la certezza che BICEP2 *non* ha rilevato onde gravitazionali primordiali è necessaria un'analisi congiunta con Planck, in cui i due esperimenti condividano nel dettaglio i dati pertinenti alla questione. I due esperimenti sono

complementari tra loro: BICEP2 presenta una più alta sensibilità, mentre Planck una molto migliore copertura di frequenze e la mappatura completa del cielo, quindi non si può scartare completamente la possibilità che un segnale di onde gravitazionali primordiali sia estratto dall'analisi congiunta [12].

L'esperimento Planck ha anche individuato regioni del cielo in cui l'ampiezza della quantità D_l^{BB} è risultata significativamente inferiore rispetto alla regione di osservazione scelta da BICEP2 (di circa un fattore 2) [9]. Se i risultati definitivi della collaborazione Planck-BICEP2 escluderanno la rilevazione di onde gravitazionali primordiali, queste altre regioni di cielo rappresenteranno un'ulteriore possibilità di ricerca per tale intento [12].

Bibliografia

- [1] Daniel Baumann (2012), *TASI Lectures on Inflation*, <http://arxiv.org/abs/0907.5424> .
- [2] Andrew. R. Liddle, David. H. Lyth (2000), *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press.
- [3] Steven Weinberg (2008), *Cosmology*, Oxford University Press.
- [4] Sean M. Carroll (2004), *Spacetime and Geometry, an Introduction to General Relativity*, Pearson Education (Addison Wesley).
- [5] BICEP2 collaboration (2014): P. A. R. Ade, R. W. Aikin, D. Barkats, S. J. Benton, C. A. Bischoff, J. J. Bock, J. A. Brevik, I. Buder, E. Bullock, C. D. Dowell, L. Duband, J. P. Filippini, S. Fliescher, S. R. Golwala, M. Halpern, M. Hasselfield, S. R. Hildebrandt, G. C. Hilton, V. V. Hristov, K. D. Irwin, K. S. Karkare, J. P. Kaufman, B. G. Keating, S. A. Kernasovskiy, J. M. Kovac, C. L. Kuo, E. M. Leitch, M. Lueker, P. Mason, C. B. Netterfield, H. T. Nguyen, R. O'Brient, R. W. Ogburn IV, A. Orlando, C. Pryke, C. D. Reintsema, S. Richter, R. Schwarz, C. D. Sheehy, Z. K. Staniszewski, R. V. Sudiwala, G. P. Teply, J. E. Tolan, A. D. Turner, A. G. Vieregg, C. L. Wong, and K. W. Yoon, *Detection of B-Mode Polarization at Degree Angular Scales by BICEP2*, Phys. Rev. Lett. **112**, 241101, <http://arxiv.org/abs/1403.3985> .
- [6] Planck collaboration (2013), *Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results* <http://arxiv.org/abs/1303.5062> .
- [7] Planck collaboration (2013), *Planck 2013 results. XV. CMB power spectra and likelihood* <http://arxiv.org/pdf/1303.5075v2> .
- [8] Planck collaboration (2013), *Planck 2013 results. XXII. Constraints on inflation* <http://arxiv.org/abs/1303.5082> .
- [9] Planck collaboration (2014), *Planck intermediate results. XXX. The angular power spectrum of polarized dust emission at intermediate and high Galactic latitudes* <http://arxiv-web3.library.cornell.edu/abs/1409.5738?context=astro-ph>
- [10] http://en.wikipedia.org/wiki/Hubble's_law (19-9-2014).
- [11] http://map.gsfc.nasa.gov/universe/uni_matter.html (10-2-2006).

- [12] Tushna Commissariat (22-9-2014), *BICEP2 gravitational wave result bites the dust thanks to new Planck data*, physicsworld.com
<http://physicsworld.com/cws/article/news/2014/sep/22/bicep2-gravitational-wave-result-bites-the-dust-thanks-to-new-planck-data>