

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Astrofisica e Cosmologia

Dipartimento di Fisica e Astronomia

**Accrescimento di Bondi con electron scattering
per buchi neri al centro di galassie**

Elaborato Finale

Candidato:

Valeriya Korol

Relatore:

Chiar.mo Prof.:

Luca Ciotti

Co-relatrice:

Chiar.ma Prof.ssa:

Silvia Pellegrini

*Il mio personale interesse per la scienza
riguarda solo la possibilità di scoprire cose sul mondo,
e più scopro, più aumenta il piacere della scoperta.*
R.P.Feynman

Abstract

Mass accretion on to compact objects (such as black holes, neutron stars, white dwarfs, etc.) is one of the fundamental processes in astrophysics, since the accretion phenomenon releases an enormous amount of gravitational energy. In fact, the extraction of gravitational potential energy from material which accretes on to a black hole is believed to provide the power supply in active galactic nuclei and quasars since the discovery of this sources. On the other hand, a normal elliptical galaxies of the local universe are believed to host supermassive black holes, and most also contain significant amounts of hot gas capable of accreting on to the central black hole. The latter case is particularly interesting, as it can be described by a simple accretion model, due to H. Bondi (1952).

The classic Bondi accretion is the simplest model, because it studies spherically-symmetric, stationary accretion of infinite gas distribution on to an isolated black hole. Accordingly, the problem is purely hydrodynamic and it does not take into account many important aspects, such as the angular momentum, the magnetic field, relativistic effects, etc. The aim of this thesis is to improve the Bondi model by adding some new components. In particular, we want to study how these components can affect the rate of matter accretion.

After an Introduction (**Chapter 1**), in **Chapter 2** we have reviewed the classical spherical accretion problem, with the aim of reconstructing the mathematical procedure, used to derive its solution, and testing the numerical code written for the solution of the final Bondi equation: $g(m) = \Lambda f(x)$. This code was written using C++ as the programming language and the bisection algorithm as the root-finding method for the Bondi equation; thus the code is extremely fast and stable.

However, the stationary spherical accretion model considers the gravitational potential of an isolated point object, while in this work we want to consider the black holes that lie at the center of galaxies. Therefore, in **Chapter 3** we revised the mathematical treatment of the problem by adding to the hydrodynamical equations the gravitational potential produced by a

galaxy with a density profile described by the Hernquist model.

Moreover, it is expected that the gravitational potential energy released during the accretion phenomenon, at least partially, must be converted into radiation. In the optically thin regime, the interaction between radiation and matter is dominated by electron scattering, so it is possible to extend in a simple way the classical Bondi accretion solution to take into account the radiation pressure effect. The result is obtained basically by noting that in the optically thin regime the radiation pressure scales as $1/r^2$, thus reducing the effective gravitational force at each radius by the same amount. This argument is the subject of **Chapter 4**.

The original idea behind this work, that consists into combining the two models described above (the Bondi model with Hernquist galaxy and that with radiative feedback) in a single model, was developed in **Chapter 5**. By using this new model we tried to determine the “recipes” for estimating the accretion rate to be used in the analysis of observational data or in numerical simulations.

Finally, in **Chapter 6** we analyzed a number of useful applications of the developed model: a possible solution to the problem of the underluminosity of supermassive black holes at the center of local galaxies, that show very low levels of activity, $L/L_{Edd} < 10^{-8}$; the estimate of the mass of the black hole by imposing the condition of hydrostatic equilibrium; and a possible use of the results in field of semi-analytic models of coevolution of galaxies and central black holes.

Sommario

L'accrescimento su oggetti compatti (buchi neri, stelle di neutroni, nane bianche, ecc) è uno dei processi di fondamentale interesse per l'astrofisica, dal momento che durante questo fenomeno si libera un'enorme quantità di energia gravitazionale. Infatti, fin dalla scoperta delle radiogalassie e dei quasar fu accettata l'ipotesi che la grande quantità di energia emessa da esse avesse origine gravitazionale, prodotta per accrescimento di materia su un buco nero supermassiccio al centro di queste sorgenti. D'altro canto, si ipotizza che anche un gran numero di galassie ellittiche "normali" (ossia non ospiti di AGN) dell'universo locale ospiti un buco nero centrale in grado di accrescere il gas caldo spesso presente in queste galassie. Quest'ultimo caso risulta particolarmente interessante, poiché in prima approssimazione può essere descritto da un modello di accrescimento semplice, dovuto a H. Bondi (1952).

Il modello di Bondi rappresenta il modello di accrescimento più semplice, in quanto studia l'accrescimento su un buco nero isolato immerso in una distribuzione di gas infinita. In questa semplice trattazione puramente idrodinamica vengono trascurati molti aspetti importanti, come ad esempio il momento angolare, il campo magnetico, gli effetti relativistici, ecc. Pertanto, l'obiettivo di questa Tesi consiste nell'affinare tale modello aggiungendo alcune nuove componenti. In particolare, vogliamo studiare come queste nuove componenti possano influire sul tasso di accrescimento di materia.

Dopo una Introduzione (**Capitolo 1**), nel **Capitolo 2** viene presentato il modello di Bondi originale, con lo scopo di ricostruire il procedimento matematico che porta alla soluzione e di verificare il funzionamento del codice numerico scritto per la soluzione dell'equazione di Bondi finale: $g(m) = \Lambda f(x)$. Questo codice è scritto utilizzando come linguaggio di programmazione C++ e come metodo risolutivo dell'equazione di Bondi quello della bisezione; dunque è un codice stabile ed estremamente veloce.

Tuttavia il modello di accrescimento sferico stazionario tratta il potenziale gravitazionale di un oggetto puntiforme isolato, mentre in questo lavoro di Tesi si vogliono considerare i buchi neri che si trovano al centro delle galassie. Pertanto, nel **Capitolo 3** è stata rivisitata la trattazione matematica

del problema di Bondi aggiungendo alle equazioni il potenziale gravitazionale prodotto da una galassia con profilo di densità descritto dal modello di Hernquist.

D'altronde, ci si aspetta che l'energia potenziale gravitazionale liberata nell'accrescimento, almeno parzialmente, venga convertita in radiazione. In regime otticamente sottile, nell'interazione tra la radiazione e la materia domina l'electron scattering, il che permette di estendere in maniera rigorosa la trattazione matematica del problema di Bondi prendendo in considerazione gli effetti dovuti alla pressione di radiazione. Infatti, in un sistema a simmetria sferica la forza esercitata dalla pressione di radiazione segue l'andamento $1/r^2$, il che comporta una riduzione della forza gravitazionale della stessa quantità per tutti i raggi. Tale argomento rappresenta l'oggetto di studio del **Capitolo 4**.

L'idea originale alla base di questo lavoro di Tesi, che consiste nell'unire i due modelli sopra descritti (ossia il modello di Bondi con la galassia e il modello di Bondi con feedback radiativo) in un unico modello, è stata sviluppata nel **Capitolo 5**. Utilizzando questo nuovo modello abbiamo cercato di determinare delle "ricette" per la stima del tasso di accrescimento da utilizzare nell'analisi dei dati osservativi oppure da considerare nell'ambito delle simulazioni numeriche.

Infine, nel **Capitolo 6** abbiamo valutato alcune applicazioni del modello sviluppato: come una possibile soluzione al problema di sottoluminosità dei buchi neri al centro di alcune galassie dell'universo locale, che mostrano livelli di attività molto bassi ($L/L_{Edd} < 10^{-8}$); per la stima della massa del buco nero imponendo la condizione di equilibrio idrostatico; un possibile impiego dei risultati nell'ambito dei modelli semi-analitici di coevoluzione di galassie e di buchi neri al centro di esse.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	L'accrescimento come sorgente di energia	1
1.2	Modelli di accrescimento: quadro generale	5
1.3	Il Lavoro di Tesi	7
1.4	Possibili applicazioni	10
1.4.1	Il problema della sottoluminosità	10
1.4.2	Evoluzione galassia-SMBH: modelli semi-analitici	12
1.4.3	Stime di massa del SMBH centrale	13
2	Accrescimento di Bondi classico	15
2.1	Ipotesi del modello	15
2.2	Equazioni fondamentali	16
2.3	Alcune proprietà delle funzioni $g(m)$ e $f(x)$	19
2.4	Soluzione numerica	22
2.4.1	Soluzione per il caso adiabatico	30
2.5	Tasso di accrescimento	33
3	Accrescimento di Bondi in presenza di una galassia	37
3.1	Equazioni per il modello di Bondi con galassia	37
3.2	Galassia di Hernquist	39
3.3	Soluzione numerica	39
3.4	Tasso di accrescimento in presenza di galassia	50
4	Accrescimento di Bondi con electron scattering	55
4.1	Limite di Eddington	55
4.2	Equazioni per il modello di Bondi con electron scattering	58
4.3	Tasso di accrescimento	60
4.4	Bias	62

5	Accrescimento di Bondi con electron scattering in presenza di galassia	65
5.1	Luminosità di Eddington in presenza di galassia	65
5.2	Equazioni per il modello di Bondi con electron scattering in presenza di galassia	68
5.3	Soluzione numerica	69
5.4	Tasso di accrescimento	74
5.5	Bias	79
6	Discussione e Conclusioni	81
6.0.1	Il problema della sottoluminosità	86
6.0.2	Evoluzione galassia-SMBH: modelli semi-analitici . . .	88
6.0.3	Stime di massa del SMBH centrale	90
A	Trasformazioni politropiche	93
A.1	Brevi richiami di termodinamica	93
A.2	Trasformazioni politropiche	95
A.3	Equazione del moto	97
B	Luminosità di Eddington	99
C	Soluzione numerica	103
C.1	Metodo della bisezione	103
C.2	Algoritmo di soluzione	104
C.3	Codice numerico	108
	Elenco delle tabelle	115
	Elenco delle figure	117
	Bibliografia	123

Elenco dei simboli

c_s	velocità del suono
\tilde{c}_s	velocità del suono normalizzata al valore assunto all'infinito $c_{s\infty}$
G	costante di gravitazione universale
k_B	costante di Boltzmann
L_{Edd}	luminosità di Eddington
$L_{Edd,g}$	luminosità di Eddington in presenza di galassia
m	numero di Mach
M_{BH}	massa del buco nero
M_g	massa totale della galassia
m_e	massa dell'elettrone
m_p	massa del protone
\dot{M}_B	tasso di accrescimento nel modello di Bondi classico
\dot{m}_B	tasso di accrescimento normalizzato al tasso di accrescimento di Eddington, nel modello di Bondi classico
\dot{M}_{Edd}	tasso di accrescimento corrispondente al limite di Eddington
\dot{M}_e	tasso di accrescimento nel modello di Bondi con electron scattering
\dot{m}_e	tasso di accrescimento normalizzato al tasso di accrescimento di Eddington, nel modello di Bondi con electron scattering
\dot{M}_g	tasso di accrescimento nel modello di Bondi con la galassia

\dot{m}_g	tasso di accrescimento normalizzato al tasso di accrescimento di Eddington, nel modello di Bondi con la galassia
\dot{M}_t	tasso di accrescimento nel modello di Bondi con electron scattering e in presenza di galassia
\dot{m}_t	tasso di accrescimento normalizzato al tasso di accrescimento di Eddington, nel modello di Bondi con electron scattering e in presenza di galassia
n_e	densità numerica degli elettroni
n_p	densità numerica dei protoni
R_{BH}	raggio della sfera di influenza del buco nero
r_B	raggio di Bondi
r_g	raggio di scala caratteristico della galassia
r_S	raggio di Schwarzschild
\mathcal{R}	massa totale della galassia, M_g , normalizzata alla massa del buco nero M_{BH}
\tilde{T}	temperatura del gas normalizzata al valore assunto all'infinito T_∞
\tilde{v}	velocità del gas normalizzata al valore assunto all'infinito v_∞
x	distanza normalizzata al raggio di Bondi r_B
γ	indice politropico
γ'	indice adiabatico
ε	efficienza di accrescimento
Θ	rapporto tra l'autovalore del problema di Bondi con electron scattering e in presenza di galassia, $\lambda_{cr,t}$, e l'autovalore del problema di Bondi classico, $\lambda_{cr,0}$
θ	rapporto tra l'autovalore del problema di Bondi con la galassia, $\lambda_{cr,g}$, e l'autovalore del problema di Bondi classico, $\lambda_{cr,0}$
$\lambda_{cr,0}$	autovalore del problema di Bondi classico

$\lambda_{cr,e}$	autovalore del problema di Bondi con electron scattering
$\lambda_{cr,g}$	autovalore del problema di Bondi con la galassia
$\lambda_{cr,t}$	autovalore del problema di Bondi con electron scattering e in presenza di galassia
μ	peso molecolare medio
ξ	raggio scala caratteristico della galassia normalizzato al raggio di Bondi
$\tilde{\rho}$	densità del gas normalizzata al valore assunto all'infinito ρ_∞
σ_T	sezione d'urto Thomson
σ_*	dispersione di velocità centrale della galassia
ϕ	potenziale gravitazionale

Capitolo 1

Introduzione

1.1 L'accrescimento come sorgente di energia

Fino al XIX secolo la gravità era ritenuta l'unica sorgente di energia in grado di alimentare i corpi celesti. Tuttavia essa si rivelò inadeguata a spiegare molti fenomeni, tra cui l'emissione stessa da parte delle stelle. Difatti, nel XX secolo, l'attenzione della comunità scientifica si rivolse in particolare alle forze di natura nucleare. La gravità al giorno d'oggi ha riacquisito un ruolo di centrale importanza, in quanto sembra essere la fonte di energia principale degli oggetti più luminosi dell'Universo. Infatti, si ritiene che un'elevata emissione energetica prodotta dagli AGN¹ e da alcuni tipi di sistemi binari sia dovuta al rilascio dell'energia gravitazionale del materiale in caduta su un oggetto compatto, come buchi neri (BH), stelle di neutroni, nane bianche, ecc (Lynden-Bell 1969; Salpeter 1964; Zel'dovich and Novikov 1964), ossia attraverso il processo che in astrofisica viene chiamato *accrescimento*.

Sotto certe circostanze la gravità può effettivamente produrre efficienze di produzione energetica più alte persino delle forze nucleari. Per fare una stima qualitativa dell'energia che può essere liberata nel processo di accrescimento, consideriamo un oggetto di massa M e raggio R , che accresce una particella di massa m . Come ordine di grandezza l'energia gravitazionale rilasciata sarà pari a

$$\Delta E_{acc} = \frac{GMm}{R} \quad (1.1)$$

dove G è la costante di gravitazione universale. È chiaro, allora, che l'efficienza di questo processo dipende dal rapporto M/R , ossia dalla *compattezza* dell'oggetto che accresce la materia: essa sarà tanto più grande quanto più l'oggetto è compatto. Una particella, che cade dall'infinito su un buco nero

¹Active Galactic Nuclei

di massa M_{BH} e raggio pari al raggio di Schwarzschild r_s (il raggio caratteristico di un corpo di massa M_{BH} in corrispondenza del quale la velocità di fuga diventa pari alla velocità della luce)

$$r_s = \frac{2GM_{BH}}{c^2}, \quad (1.2)$$

libera in una caduta quasi-viriale, un'energia pari a

$$\Delta E_{acc} = \frac{GM_{BH}m}{2r_s} = \frac{mc^2}{4}, \quad (1.3)$$

che in termini di efficienza, definita come

$$\varepsilon = \frac{\Delta E_{acc}}{mc^2}, \quad (1.4)$$

vuol dire $\varepsilon = 0.25$. Stime più accurate darebbero un valore di circa 0.1, che viene usato nella maggior parte delle applicazioni. Risulta, dunque, che l'accrescimento su un buco nero è il modo più efficiente di convertire la massa in energia, dato che se si considera, ad esempio, l'efficienza per unità di massa delle comuni reazioni chimiche si ha $\varepsilon \sim 10^{-10}$, mentre se consideriamo le reazioni nucleari che avvengono negli interni stellari si arriva a valori di $\varepsilon \sim 8 \times 10^{-3}$.

Ci si aspetta che questa energia, ΔE_{acc} , almeno in parte, sia rilasciata sotto forma di radiazione elettromagnetica. Pertanto, per un fissato valore di M/R , dalla (1.3) segue che la luminosità emessa dipenderà dalla quantità di materia che cade all'interno del buco nero per unità di tempo, \dot{M} , secondo la relazione

$$L_{acc} = \varepsilon \dot{M} c^2. \quad (1.5)$$

Assumendo $\varepsilon = 0.1$ risulta che un buco nero di massa solare, che accresce materia con ritmo pari ad $1 M_{\odot}/\text{yr}$, può produrre luminosità dell'ordine di 10^{45}erg/s , cioè più di un'intera galassia. Tuttavia per valori di luminosità molto alti il rate di accrescimento, \dot{M} , viene autolimitato attraverso la forza che esercita la radiazione stessa sulla materia in accrescimento, ossia attraverso l'impulso trasferito dalla radiazione al materiale circostante tramite i processi di scattering e di assorbimento. Nell'approssimazione di accrescimento sferico stazionario tale fenomeno comporta l'esistenza di un limite massimo per la luminosità di un oggetto che accresce la materia, noto come il *limite di Eddington*, una volta raggiunto il quale il processo di accrescimento viene completamente bloccato dalla pressione di radiazione (per una trattazione dettagliata si veda l'appendice B a pagina 99). Tale limite è definito come:

$$L_{Edd} = \frac{4\pi GM_{BH}m_p}{\sigma_T}, \quad (1.6)$$

che per un BH di massa solare vale circa 10^{38} erg/s.

Una stima qualitativa dell'intervallo spettrale in cui ci si aspetta di osservare l'emissione dovuta al fenomeno di accrescimento può essere fatta nella maniera seguente. Per prima cosa ricordiamo che uno spettro in emissione è caratterizzato dalla temperatura T , definita secondo la relazione $k_B T = h\nu$, dove $h\nu$ rappresenta l'energia di un fotone tipico emesso dalla sorgente. Per una sorgente di raggio R , che emette luminosità L_{acc} , è possibile definire la temperatura T_b , come la temperatura che avrebbe la sorgente se emettesse come un corpo nero:

$$T_b = \left(\frac{L_{acc}}{4\pi R^2 \sigma} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (1.7)$$

Inoltre, si può definire la temperatura T_{th} , come la temperatura che avrebbe il materiale in accrescimento se l'energia potenziale gravitazionale fosse interamente convertita in energia termica. In questo caso per ogni coppia protone-elettrone, l'energia potenziale sarà data da $GM(m_p + m_e)/R \simeq GMm_p/R$, mentre l'energia termica da $2 \times 3/2 k_B T$, per cui possiamo definire

$$T_{th} = \frac{GMm_p}{3k_B R}. \quad (1.8)$$

Se il fluido in accrescimento è otticamente spesso, allora la radiazione raggiungerà l'equilibrio termico con il materiale in accrescimento prima di fuoriuscire verso l'osservatore, in questo caso $T \sim T_b$. Invece in regime otticamente sottile l'energia gravitazionale viene convertita direttamente in radiazione, che può fuoriuscire senza essere ostacolata, pertanto $T \sim T_{th}$. Dato che in generale ci si aspetta che la temperatura di radiazione sia compresa tra T_b e T_{th} e, che il sistema non può irraggiare ad una temperatura inferiore a quella del corpo nero, si avrà

$$T_b \leq T \leq T_{th}. \quad (1.9)$$

Dunque, per un BH di circa $10^8 M_\odot$ e raggio r_S corrispondente, definito dalla (1.2), pari a 10^{13} cm, si trova: $T_b \approx 10^6$ K e $T_{th} \approx 10^{12}$ K. Quindi gli effetti dovuti all'accrescimento possono essere osservati tra $0.3 \text{ keV} \leq h\nu \leq 150 \text{ MeV}$ circa, ossia in un range spettrale che si estende dall'ultravioletto fino al gamma.

Con queste semplici considerazioni abbiamo trovato un fenomeno fisico in grado di spiegare le luminosità caratteristiche degli AGN. Infatti, fin dalla scoperta delle radiogalassie e delle quasar, negli anni '60, fu accettata l'ipotesi che la grande quantità di energia emessa da esse avesse origine gravitazionale, prodotta per accrescimento di materia su un buco nero supermassiccio (SMBH) al centro di queste sorgenti (Rees 1984).

Grazie ad alcune tecniche osservative indirette, sappiamo oggi che anche un gran numero di galassie ellittiche “normali”² dell’universo locale (ma lo stesso vale anche per i bulge³ delle galassie a spirale, tra cui anche la nostra Galassia) ospitano un SMBH centrale (Ferrarese and Ford 2005). Queste ultime spesso contengono anche una quantità significativa di gas caldo, che può essere coinvolto nel processo di accrescimento (Canizares et al. 1987; Fabbiano 1989; Forman et al. 1979, 1985).

Attualmente si conoscono decine di galassie che presentano delle forti indicazioni della presenza di un SMBH al centro di esse. Per queste è stato possibile determinare la massa del SMBH centrale e, quindi, definire alcune correlazioni tra le proprietà della galassia ospite e la massa dell’oggetto centrale. Ad esempio, è stato stabilito che la massa del SMBH è legata alla luminosità assoluta della componente sferoidale della galassia ospite L_{bulge} (Kormendy and Richstone 1995), secondo la relazione

$$M_{BH} \simeq 0.93 \times 10^8 M_{\odot} \left(\frac{L_{bulge}}{10^{10} L_{\odot}} \right)^{1.11}, \quad (1.10)$$

riportata nella Figura 1.1. Un modo alternativo di esprimere questa correlazione si ottiene utilizzando la relazione $M_{bulge}/L_{bulge} \propto L_{bulge}^{0.25}$ (Bender et al. 1992), nota come il tilt del piano fondamentale delle galassie ellittiche, secondo la quale è possibile riformulare la (1.10) come

$$M_{BH} \propto M_{bulge}^{0.9} \quad (1.11)$$

da cui risulta evidente che i BH più massicci risiedono nelle galassie più massicce. Un’altra correlazione trovata lega la massa del SMBH centrale con la dispersione di velocità centrale σ_* delle stelle della componente sferoidale della galassia, tramite la relazione (Gebhardt et al. 2000):

$$M_{BH} \simeq 1.35 \times 10^8 \left(\frac{\sigma_*}{200 \text{ km/s}} \right)^4. \quad (1.12)$$

Quindi, secondo quest’ultima i buchi neri più massicci si trovano in galassie in cui la dispersione di velocità della componente stellare è più grande.

Queste correlazioni implicano una stretta relazione tra la formazione ed evoluzione delle galassie e i SMBH al centro di esse; inoltre, comportano una serie di ulteriori domande, ad esempio, cosa distingue le galassie “normali” dagli AGN se entrambi contengono un SMBH al centro? La massa del BH,

²Con questo termine solitamente vengono indicate le galassie che non presentano elevata attività nucleare.

³Componente sferoidale delle galassie a spirale.

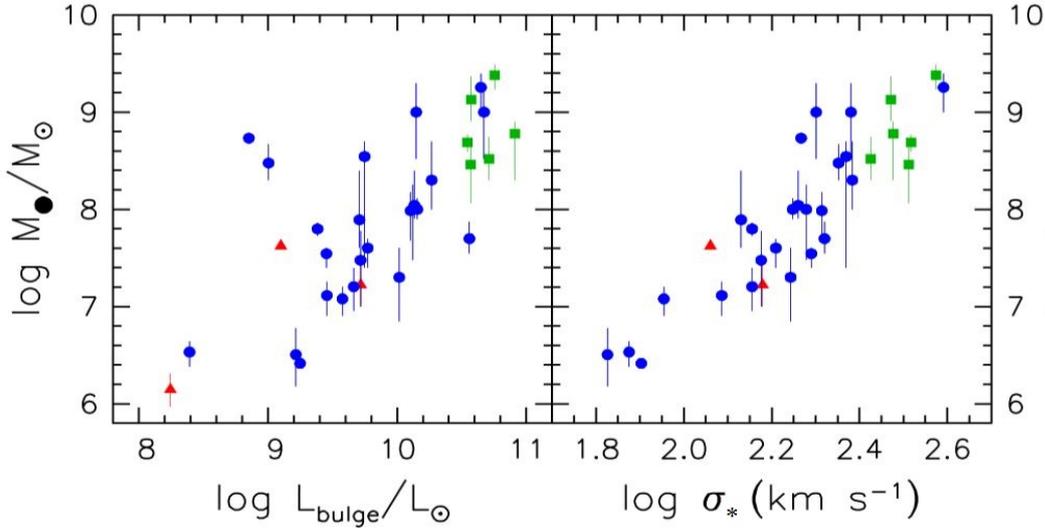


Figura 1.1: Correlazioni trovate per la massa di SMBH: M_{BH} e la luminosità L_{bulge} (a sinistra), M_{BH} e la dispersione di velocità σ_* della componente sferoidale (bulge) della galassia ospite (a destra). I simboli differenti si riferiscono alle tecniche di misura della M_{BH} diverse (Kormendy 2000).

il rate di accrescimento oppure il meccanismo che genera l'energia? Per rispondere, almeno parzialmente, a queste domande dal punto di vista teorico è necessario sviluppare dei modelli che descrivono il funzionamento del motore centrale di queste sorgenti e dei fenomeni da esso generati.

1.2 Modelli di accrescimento: quadro generale

La fisica dei processi di accrescimento, a parte gli aspetti più generali, è estremamente complessa e tuttora poco conosciuta. Attualmente esistono diverse famiglie di modelli che rappresentano tale fenomeno, la suddivisione nei quali deriva da alcune assunzioni specifiche fatte nella soluzione delle equazioni idrodinamiche che descrivono il fluido in accrescimento. Ad esempio, l'assunzione sul momento angolare del fluido in accrescimento incide sulla simmetria del sistema. Vedremo, nel caso del modello di Bondi, come in assenza del quale il problema assume simmetria perfettamente sferica, mentre se il materiale in accrescimento è dotato di una, anche piccola, quantità di momento angolare, il fluido forma una struttura assisimmetrica, come un disco oppure un toro. Ruolo di fondamentale importanza gioca nello studio del problema il feedback dovuto alla radiazione emessa dalla materia in accrescimento, che, come è stato accennato in precedenza, regola il tasso di accrescimento attra-

verso la luminosità di Eddington. Inoltre, un aspetto rilevante nel processo di accrescimento hanno il campo magnetico, lo spessore ottico della materia, la convezione, la conduzione, ecc.

Tabella 1.1: Possibili modelli di accrescimento stazionario per un fluido non viscoso (Frank et al. 2002)

	Keeping	Gives
gravity+rotation	$0 = -\nabla\phi + \Omega^2\mathbf{R}$	Thin discs
gravity+pressure	$0 = -\nabla\phi - \frac{1}{\rho}\nabla P$	Envelopes
adv+gravity	$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla\phi$	Grav. collapse
adv+gravity+rot	$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla\phi + \Omega^2\mathbf{R}$	Slim discs
pre+gravity+rot	$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla\phi + \Omega^2\mathbf{R}$	Thick discs, tori
adv+pre+gravity	$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla\phi$	Bondi accretion
adv+pre+grav+rot	$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla\phi + \Omega^2\mathbf{R}$	ADAFs

Riportiamo in Tabella 1.1 esempi di strutture che si formano trascurando alcuni termini dell'equazione del moto per un fluido non viscoso:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla\phi + \Omega^2\mathbf{R} \quad (1.13)$$

dove, utilizzando un sistema di coordinate cilindriche, il vettore velocità è stato scomposto in $\mathbf{v} = (v_R, v_z)$ e $v_\phi = \Omega R$, con Ω che rappresenta la velocità angolare di un elemento di fluido, ρ e P sono rispettivamente la densità e la pressione, ϕ è il potenziale gravitazionale ed R è la coordinata cilindrica radiale.

Un'ulteriore suddivisione dei modelli si ottiene adottando alcune approssimazioni specifiche per l'equazione dell'energia e per l'equazione di stato del fluido in accrescimento.

Questi e molti altri aspetti del fenomeno vanno a comporre un quadro reale più complesso, che tuttavia rimane ancora lontano da avere una descrizione completa, poiché, i modelli, da quelli più semplici a quelli più complessi, oltre ad essere consistenti dal punto di vista teorico, devono riprodurre le caratteristiche degli oggetti realmente osservati: luminosità, morfologia, caratteristiche spettrali, classificazione, ecc.

In questa panoramica generale, il modello di Bondi (1952) rappresenta il modello più semplice (si veda la Figura 1.2), in quanto studia l'accrescimento su un BH isolato immerso in una distribuzione di gas infinita. In questa semplice trattazione puramente idrodinamica non vengono considerati molti aspetti importanti, quali: il momento angolare della materia in accrescimento, il campo magnetico, gli effetti relativistici dovuti alla presenza del buco nero, e quelli della radiazione generata durante tale fenomeno. . Ciononostante questo modello viene spesso usato in ambito astrofisico: in campo osservativo, per stimare l'emissione attesa da un buco nero al centro delle galassie circondato da un gas di data densità e temperatura, e in campo teorico nelle simulazioni numeriche dei processi fisici coinvolti nell'accrescimento.

Infine, un breve accenno anche ai modelli ADAF (Advection Dominated Accretion Flows), che tuttavia non tratteremo in dettaglio nel seguito. Per questi modelli la differenza fondamentale rispetto al modello di Bondi è costituita dalla presenza del momento angolare, che in Tabella 1.1 è contenuto nel termine $\Omega^2 R$. Nei modelli ADAF il gas in accrescimento è caldo, dal momento che l'energia potenziale gravitazionale viene immagazzinata sotto forma dell'energia termica piuttosto di essere irraggiata, la forza della pressione del gas è importante, e, pertanto, il fluido in accrescimento forma una struttura geometricamente spessa. Di conseguenza il gas rarefatto emette con efficienza $\varepsilon \ll 0.1$. Inoltre, questi modelli sono caratterizzati dal tasso di accrescimento comparabile con il tasso di accrescimento del modello di Bondi: $\dot{M}_{ADAF} \sim \dot{M}_B$ (Quataert 2003).

1.3 Il Lavoro di Tesi

Nell'ambito di questo lavoro di Tesi si vuole affinare il modello di accrescimento sferico stazionario, ossia il modello di Bondi, aggiungendo alcune nuove componenti. Dopodiché si vuole studiare come queste influiscono sul tasso di accrescimento della materia sul BH centrale.

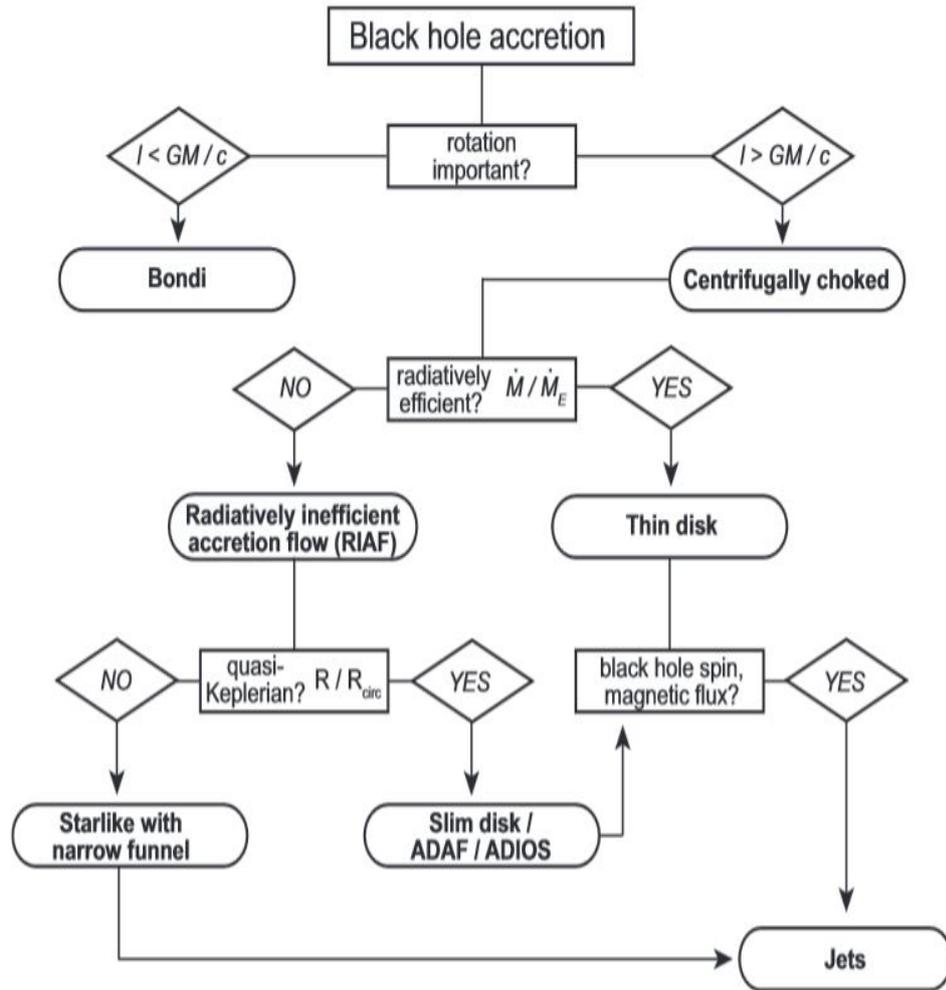


Figura 1.2: Diagramma di flusso che illustra come alcuni fattori determinano la dinamica di accrescimento: il momento angolare specifico l , l'efficienza di accrescimento \dot{M}/\dot{M}_{Edd} , il campo magnetico e lo spin del BH (Begelman 2014).

Dal momento che un flusso puramente sferico è fisicamente ben definito, è possibile, sfruttando la simmetria del problema, dare una trattazione idrodinamica della distribuzione di materia in accrescimento ed includere in maniera matematica rigorosa alcuni nuovi processi fisici. In questo modo, pur rimanendo in un contesto fortemente idealizzato, vogliamo compiere alcuni passi verso una descrizione più realistica del fenomeno.

Innanzitutto si vuole passare da una situazione astratta, in cui l'accrescimento avviene su un oggetto isolato, ad una situazione reale *in cui il fenomeno avviene all'interno del potenziale gravitazionale di una galassia*. In particolare, andremo a trattare il caso delle galassie ellittiche e sferoidali, caratterizzate dal potenziale che gode di simmetria ben descritta dall'approssimazione sferica. Pertanto quest'ultimo può essere inserito nella trattazione del problema di accrescimento sferico in maniera del tutto generale.

Sappiamo che il potenziale di un BH è dominante all'interno della cosiddetta *sfera di influenza* delimitata dal raggio:

$$R_{BH} = \frac{GM_{BH}}{\sigma_*^2} \quad (1.14)$$

dove σ_* è la dispersione di velocità della galassia. Dall'altra parte si può definire il *raggio di Bondi*, che come vedremo in seguito, è caratteristico del fenomeno di accrescimento

$$r_B = \frac{GM_{BH}}{c_{s\infty}^2} \quad (1.15)$$

dove $c_{s\infty}$ è la velocità del suono all'infinito.

Se r_B risulta più piccolo di R_{BH} , allora il processo di accrescimento sarà governato soltanto dal potenziale gravitazionale del BH. In questo caso sarà ragionevole considerare i valori di densità e di temperatura della distribuzione di gas all'interno della sfera dell'influenza come le condizioni al contorno del problema di Bondi (che dal punto di vista teorico vedremo essere dati all'infinito). Tuttavia per le condizioni interstellari tipiche si trova:

$$R_{BH} \simeq 10 \text{ pc} \left(\frac{M_{BH}}{10^8 M_\odot} \right) \left(\frac{\sigma_*}{200 \text{ km/s}} \right)^{-2}$$

e

$$r_B \simeq 2 \text{ kpc} \left(\frac{M_{BH}}{10^8 M_\odot} \right) \left(\frac{T}{10^4 \text{ K}} \right)^{-1}.$$

Ciò significa che tipicamente $r_B > R_{BH}$ e, quindi, nel processo di accrescimento l'effetto dovuto alla presenza della galassia non può essere trascurato. In particolare, se la galassia gioca un ruolo importante, vogliamo valutare

come esattamente i parametri che la descrivono (come massa e dimensione) influiscono sull'andamento del tasso di accrescimento di materia.

Inoltre, come abbiamo accennato in precedenza, durante il processo di accrescimento ci si aspetta che l'energia potenziale gravitazionale debba essere convertita in radiazione. Dal momento che anche la radiazione è in grado di esercitare una forza sul gas in accrescimento (in direzione opposta alla forza gravitazionale), gli effetti che essa produce non possono essere trascurati e, anzi, ci si aspetta che il fenomeno venga influenzato radicalmente da essa. *Nell'ipotesi che il gas in accrescimento sia pressoché trasparente alla radiazione, è possibile includere in maniera semplice nella trattazione matematica del problema di Bondi anche il fenomeno di electron scattering da parte della radiazione uscente*, grazie al fatto che in un sistema a simmetria sferica la forza dovuta alla pressione di radiazione varia con l'inverso del quadrato della distanza (come avviene per la forza gravitazionale). Infatti, in questo senso sono già stati sviluppati diversi lavori (Fukue 2001; Lusso and Ciotti 2011), i risultati dei quali verranno approfonditi ed estesi in seguito.

L'idea originale alla base di questo lavoro di Tesi consiste, quindi, nell'implementare i due effetti sopracitati, cioè la presenza di un potenziale esterno e del feedback radiativo, in un unico modello e studiare l'effetto complessivo che essi producono sul processo di accrescimento, in particolar modo sul tasso di accrescimento. Dopodiché, utilizzando il nuovo modello, vogliamo trovare delle "ricette" per una stima del rate di accrescimento da utilizzare nell'analisi dei dati osservativi oppure da considerare nelle simulazioni numeriche del processo.

1.4 Possibili applicazioni

Concludiamo elencando qualche utile applicazione del modello che verrà sviluppato: il problema della sottoluminosità di alcune galassie vicine, l'utilizzo nelle simulazioni numeriche e, infine, faremo alcune considerazioni per quanto riguarda la stima della massa dei SMBH.

1.4.1 Il problema della sottoluminosità

Come è stato già accennato, esistono diverse indicazioni osservative che mostrano la presenza di un oggetto oscuro di massa che può variare da 10^7 a $10^9 M_{\odot}$ al centro di galassie ellittiche e sferoidali dell'universo locale. Probabilmente, nella maggior parte dei casi, si tratta di buchi neri supermassicci (Magorrian et al. 1998; van der Marel 1999). Alcune di queste galassie sono caratterizzate da livelli di attività molto bassi, che in termini di luminosità

di Eddington significa $L/L_{Edd} < 10^{-8}$ (mentre per gli AGN potenti si ha $L/L_{Edd} \sim 1$). Questo succede, ad esempio, nel caso delle galassie NGC 1399, 4636 e 4472 (Loewenstein et al. 2001), NGC 4594, altrimenti conosciuta come galassia Sombbrero, (Pellegrini et al. 2003), e diverse altre galassie. In questo paragrafo vogliamo introdurre una possibile spiegazione per questo fenomeno.

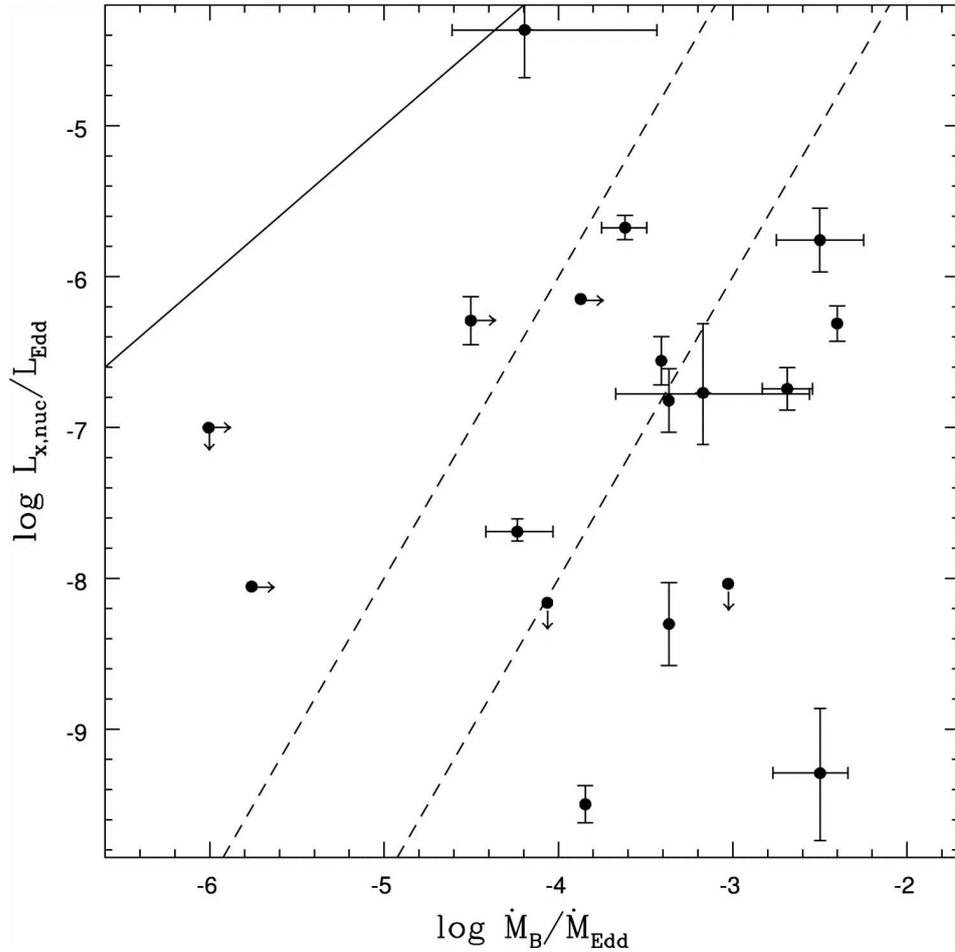


Figura 1.3: Relazione tra $L_{X,nuc}$ e \dot{M}_B , normalizzate ai corrispettivi valori di Eddington, la linea continua rappresenta L_{acc}/L_{Edd} , mentre le linee tratteggiate corrispondono a L_{ADAF}/L_{Edd} per due diversi modelli ADAF (Pellegrini 2005).

In Figura 1.3 viene mostrato un campione di galassie vicine osservate con *Chandra*, analizzato in (Pellegrini 2005), per il quale è stato stimato il tasso di accrescimento usando la teoria di Bondi. Possiamo notare come tutte le galassie del campione risultino sistematicamente meno luminose rispetto al

valore atteso (linea continua), ossia secondo l'espressione (1.5). Inoltre una porzione significativa del campione risulta meno luminosa anche rispetto ai modelli ADAF con efficienze $\varepsilon \ll 0.1$ (linee tratteggiate). In questo lavoro di Tesi vogliamo esaminare se una possibile causa possa risiedere nel fatto che gli \dot{M}_B in Figura 1.3 sono stati sovrastimati.

È possibile, che diverse ipotesi alla base del modello assunto per il calcolo di \dot{M}_B comportino una sovrastima del tasso di accrescimento reale. Innanzitutto, il modello di Bondi prevede l'utilizzo dei valori di densità e velocità del suono del gas in accrescimento (o equivalentemente della temperatura) all'infinito, mentre nella stima reale si dispone dei dati, rivelati da satelliti X, in prossimità del nucleo. Pertanto, si vuole esaminare se considerare le condizioni al contorno, necessarie per stimare \dot{M} , in un punto che non sia l'infinito possa introdurre una sorta di "bias" osservativo. Quindi, si vuole valutare quanto esattamente quest'assunzione possa incidere sulla stima della luminosità delle sorgenti. Inoltre, anche il potenziale gravitazionale della galassia e gli effetti dovuti alla radiazione emessa durante il processo, non trattati nella teoria di Bondi standard, potrebbero giocare un ruolo importante nella dinamica del gas in accrescimento e, di conseguenza, influenzare la stima di grandezze fisiche descriventi il gas e dei parametri di accrescimento.

1.4.2 Evoluzione galassia-SMBH: modelli semi-analitici

Nel corso degli ultimi decenni, le simulazioni numeriche hanno assunto grande rilevanza in astrofisica, in particolar modo in cosmologia, per quanto riguarda la modellistica teorica, l'interpretazione dei dati osservativi e la pianificazione di progetti futuri. Nell'ambito di diverse categorie di simulazioni numeriche (N-body, idrodinamiche, ecc) esiste una classe di simulazioni particolare, i cosiddetti *modelli semi-analitici* (SAM), che rappresentano un approccio assolutamente complementare alle simulazioni numeriche dirette. Questi modelli sono diventati uno strumento ampiamente utilizzato per lo studio della formazione e dell'evoluzione delle galassie grazie a modeste esigenze di calcolo e una grande quantità di ipotesi fisiche trattate.

I modelli SAM descrivono diversi fenomeni astrofisici adottando delle "ricette" analitiche semplici basate su argomenti teorici o empirici, che permettono di stimarne l'effetto su scale più grandi delle scale su cui avviene il fenomeno stesso. In questo modo i SAM possono produrre una vasta quantità di previsioni per l'evoluzione delle diverse proprietà delle galassie (come la distribuzione di massa stellare, la luminosità, il tasso di formazione stellare, la dimensione, la morfologia, la metallicità, ecc) e le relazioni di scala che legano insieme queste proprietà (Di Matteo et al. 2008; Lu et al. 2014; Springel et al. 2005). Pertanto, i risultati che ci si aspetta di ottenere in

questo lavoro di Tesi, a riguardo dello studio del tasso di accrescimento per il modello di accrescimento sferico, possono essere utilizzati come “ricette” nel campo dei modelli SAM per la trattazione dei fenomeni legati a coevoluzione delle galassie e i SMBH centrali.

1.4.3 Stime di massa del SMBH centrale

La presenza dell'emissione X estesa nelle galassie ellittiche normali può essere utilizzata per determinare le proprietà dinamiche di queste sorgenti (Fabiano 1989; Pellegrini and Ciotti 2006). Ad esempio, il profilo di massa e la massa totale possono essere calcolati imponendo condizione di equilibrio idrostatico, ossia che ad ogni raggio la forza dovuta al gradiente di pressione di radiazione viene bilanciata dalla forza di gravità secondo l'equazione

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \quad (1.16)$$

dove $P(r)$, nell'ipotesi che il gas sia un gas perfetto, è data dalla

$$P(r) = \frac{k_B \rho(r) T(r)}{\mu m_p} \quad (1.17)$$

in cui $\rho(r)$ e $T(r)$ sono profili di densità e temperatura radiali ottenuti dai dati osservativi utilizzando la tecnica di de-proiezione, k_B è la costante di Boltzmann, m_p è la massa del protone e μ è il peso molecolare medio.

Nell'ambito di questa Tesi vogliamo, invece, calcolare numericamente M_{BH} , adoperando la (1.16) ed inserendo M_{BH} al posto di $M(r)$, con utilizzo dei profili di densità e temperatura forniti dal modello di Bondi che andremo a sviluppare.

Capitolo 2

Accrescimento di Bondi classico

Esistono diversi modelli di accrescimento, che trattano diverse situazioni e processi fisici ad esso correlati. Il modello di Bondi studia l'accrescimento su un oggetto isolato e a riposo, immerso in una nube di gas infinita, perciò rappresenta una situazione stazionaria caratterizzata da simmetria sferica. In questo capitolo, di natura introduttiva al lavoro di Tesi vero e proprio, si illustreranno le ipotesi di base di tale modello e le proprietà più importanti delle soluzioni numeriche trovate.

2.1 Ipotesi del modello

Si considera un oggetto compatto e isolato (nel nostro caso un buco nero di massa M_{BH}) al centro del sistema ed una distribuzione di gas uniforme infinitamente estesa, anch'essa a riposo all'infinito, dove assume valori di densità ρ_∞ , temperatura T_∞ e pressione P_∞ . Si assume che:

1. il problema sia stazionario ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$);
2. il gas non abbia momento angolare ($\vec{J} = 0$);
3. si trascura l'esistenza dei campi magnetici ($\vec{B} = 0$);
4. si considera il campo gravitazionale dovuto solo al BH centrale, trascurando gli effetti relativistici e il contributo gravitazionale del gas stesso:

$$\phi(r) = -\frac{GM_{BH}}{r} \quad (2.1)$$

5. il gas sia un gas perfetto non viscoso:

$$p = \frac{k_B \rho T}{\mu m_H} \quad (2.2)$$

dove k_B è la costante di Boltzmann, μ è il peso molecolare medio e m_H è la massa dell'atomo dell'idrogeno;

6. la pressione e la densità del gas siano legate dalla legge politropica:

$$p = p_\infty \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^\gamma \quad \text{con} \quad 1 < \gamma \leq \frac{5}{3}. \quad (2.3)$$

Si noti che $\gamma = 1$ corrisponde ad un accrescimento isoterma, mentre $\gamma = \frac{5}{3}$ ad un accrescimento adiabatico di un gas monoatomico, che in seguito verrà trattato separatamente dato che comporta una fisica differente.

Pertanto la velocità del suono all'interno del fluido sarà definita come

$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}. \quad (2.4)$$

2.2 Equazioni fondamentali

Ricaviamo adesso le equazioni principali che descrivono il problema. Consideriamo innanzitutto l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0. \quad (2.5)$$

Una volta imposta la condizione di stazionarietà, essa diventa semplicemente

$$\nabla(\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.6)$$

Inoltre, in assenza del momento angolare il sistema assume simmetria sferica, per cui tutte le grandezze che descrivono il fluido dipenderanno soltanto dal raggio r . Di conseguenza l'equazione di continuità può essere facilmente integrata utilizzando il teorema di Gauss, per cui si ottiene

$$4\pi r^2 \rho(r) v(r) = \text{const} = \dot{M}_B \quad \forall r. \quad (2.7)$$

Da quest'ultima relazione segue che la quantità di materia che attraversa una superficie sferica di raggio r per unità di tempo, la quale verrà indicata in seguito con \dot{M}_B , è una costante. Affinché il problema rimanga stazionario, il segno di questa quantità, determinato dal segno di $v(r)$, non può cambiare. Pertanto si potrà avere due tipi di moto: o dall'esterno verso il centro del sistema (soluzione di accrescimento) oppure dal centro del sistema verso l'esterno (soluzione di vento).

Consideriamo ora l'equazione del moto:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi \quad (2.8)$$

Imponendo la condizione di stazionarietà e le condizioni all'infinito, essa può essere integrata lungo una linea di flusso (i dettagli della trattazione matematica sono riportati nell'appendice A.3 a pagina 97); tale operazione fornisce come risultato l'equazione di Bernoulli in forma:

$$\frac{v^2}{2} + \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho} + \phi = 0. \quad (2.9)$$

Per esplicitare gli ultimi due termini della (2.9) utilizziamo le assunzioni fatte sul potenziale e sulla trasformazione che esegue il gas, per cui si ottiene:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c_{s\infty}^2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] - \frac{GM_{BH}}{r} = 0. \quad (2.10)$$

Entrambe le equazioni, (2.7) e (2.10), posso essere scritte in forma adimensionale normalizzando la densità, la velocità e la pressione rispetto al valore assunto da queste grandezze all'infinito. Si introducono quindi:

$$\tilde{\rho}(r) = \frac{\rho(r)}{\rho_\infty} \quad \tilde{v}(r) = \frac{v(r)}{c_{s\infty}} \quad \tilde{p}(r) = \frac{p(r)}{p_\infty}. \quad (2.11)$$

Si definisce inoltre il raggio adimensionale

$$x = \frac{r}{r_B} \quad (2.12)$$

dove r_B è il *raggio di Bondi* definito dalla (1.15), che può essere interpretato come la distanza caratteristica dal BH alla quale l'energia gravitazionale diventa comparabile con l'energia termica del gas all'infinito.

Dopo alcuni passaggi algebrici le equazioni (2.10) e (2.7) diventano rispettivamente:

$$\frac{\tilde{v}^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} (\tilde{\rho}^{\gamma-1} - 1) - \frac{1}{x} = 0 \quad (2.13)$$

$$\lambda = \tilde{\rho} \tilde{v} x^2 \quad (2.14)$$

dove λ è l'autovalore del problema di Bondi, che rappresenta il tasso di accrescimento adimensionale e viene definito dall'espressione:

$$\lambda = \frac{\dot{M}_B}{4\pi r_B^2 \rho_\infty c_\infty}. \quad (2.15)$$

Di conseguenza se si conosce λ , data la massa del buco nero M_{BH} e le condizioni all'infinito (ρ_∞ e $c_{s\infty}$), è possibile determinare il tasso di accrescimento risolvendo l'equazione (2.15) per M_B .

Entrambe le equazioni possono essere ulteriormente trasformate introducendo il *numero di Mach*, m , definito come rapporto tra la velocità e la velocità del suono del fluido: $m = v/c_s$. Tale grandezza diventa discriminante tra il regime in cui il fluido è subsonico ($m < 1$) e il regime in cui il fluido è supersonico ($m > 1$). Si ottiene per la (2.13) e la (2.15):

$$\frac{m^2 \tilde{c}_s^2}{2} + \frac{\tilde{\rho}^{\gamma-1}}{\gamma-1} - \frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{x} = 0 \quad (2.16)$$

$$\lambda = mx^2 \tilde{\rho}^{\frac{\gamma+1}{2}} \quad (2.17)$$

Combinando insieme le equazioni ottenute e raggruppando le quantità dipendenti da m a sinistra e le quantità dipendenti da x a destra, si giunge all'espressione finale del problema di Bondi:

$$m^{\frac{2(1-\gamma)}{1+\gamma}} \left[\frac{m^2}{2} + \frac{1}{(\gamma-1)} \right] = \Lambda x^{\frac{4(\gamma-1)}{\gamma+1}} \left[\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{x} \right] \quad (2.18)$$

con

$$\Lambda = \lambda^{-\frac{2(1-\gamma)}{(1+\gamma)}}. \quad (2.19)$$

Infine, il problema può essere scritto in forma sintetica chiamando $g(m)$ l'espressione a sinistra dell'uguaglianza ed $f(x)$ l'espressione a destra, cioè:

$$g(m) = \Lambda f(x) \quad \forall x \geq 0 \quad (2.20)$$

dove

$$g(m) = m^{\frac{2(1-\gamma)}{1+\gamma}} \left[\frac{m^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \right] \quad (2.21)$$

e

$$f(x) = x^{\frac{4(\gamma-1)}{\gamma+1}} \left[\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{x} \right]. \quad (2.22)$$

Risolvere l'equazione (2.20) significa trovare il valore di m a tutti i raggi, dato che le grandezze fisiche coinvolte nel problema possono essere derivate in seguito dal numero di Mach. Dunque, una volta fissati i valori dell'indice politropico γ e del parametro λ , ad ogni valore di x corrisponderà un determinato valore di m , tale che l'equazione $g(m(x)) = \Lambda f(x)$ sia identicamente soddisfatta. Tuttavia l'equazione (2.20) è un'equazione trascendente e deve, pertanto, essere risolta numericamente. A tale scopo è necessario costruire una procedura numerica (descritta in maniera dettagliata nell'appendice C)

che fornisce come risultato una funzione $m = m(x)$, la quale ad ogni valore di x associa una soluzione del problema di Bondi in termini di m .

È possibile dimostrare analiticamente che, per ogni valore di λ , esistono due soluzioni, $m(x)$, determinati dalla scelta delle condizioni all'infinito (una di vento e una di accrescimento). Una volta ottenuta la soluzione il problema dell'accrescimento può essere considerato completamente risolto, poiché partendo dall'equazione (2.17) si possono ricavare gli andamenti di densità, velocità e temperatura del gas in funzione della distanza dal centro del sistema:

$$\tilde{\rho} = \left(\frac{\lambda}{x^2 m} \right)^{\frac{2}{\gamma+1}} \quad (2.23)$$

$$\tilde{v} = m \tilde{\rho}^{\frac{\gamma-1}{2}} \quad (2.24)$$

$$\tilde{T} = \tilde{\rho}^{\gamma-1}. \quad (2.25)$$

2.3 Alcune proprietà delle funzioni $g(m)$ e $f(x)$

Il primo passo per la soluzione del problema consiste nello studio delle funzioni $g(m)$ e $f(x)$ rappresentate in Figura 2.1.

Consideriamo innanzitutto la funzione $g(m)$. Essa deve necessariamente avere un minimo, dato che è una funzione positiva ovunque e divergente asintoticamente sia per $m \ll 1$ sia per $m \gg 1$ (come si può vedere in Figura 2.1). Dallo studio della sua derivata si trova che tale minimo è situato in $m = 1$, indipendentemente dall'indice politropico γ . Quindi, quando il fluido diventa sonico la funzione $g(m)$ assume il suo valore minimo, dato dall'espressione

$$g_{min} = g(m_{min}) = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}. \quad (2.26)$$

Inoltre, la funzione $g(m)$ rappresenta la somma dell'energia cinetica e l'entalpia del gas. Pertanto, essa esprime le proprietà intrinseche del gas e non dipende dal particolare potenziale gravitazionale, quindi da questo punto di vista si tratta di una funzione "universale" per il problema di accrescimento sferico.

La funzione $f(x)$, definita dall'equazione (2.22), invece è tipica del problema, poiché dipende dal potenziale gravitazionale del sistema considerato. Anch'essa è una funzione sempre positiva, continua e divergente asintoticamente sia per $x \ll 1$ che per $x \gg 1$, perciò essa ammette un minimo che,

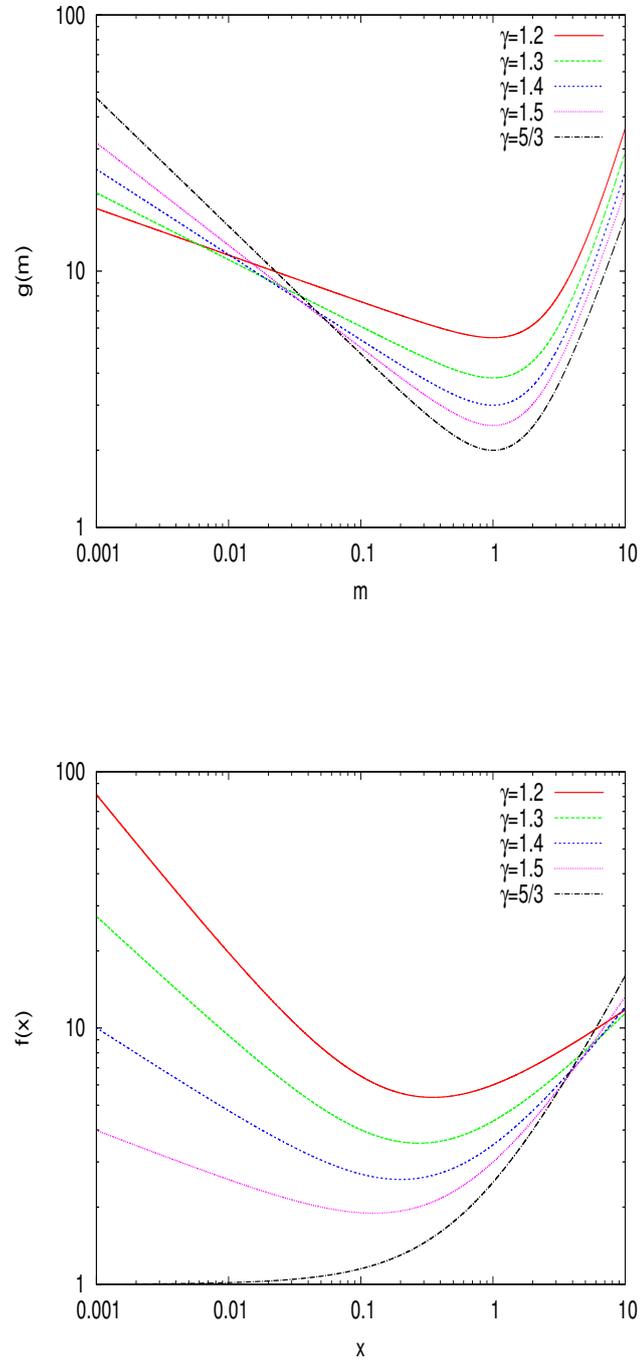


Figura 2.1: Funzioni $g(m)$ e $f(x)$ del problema di Bondi classico al variare dell'indice politropico γ .

nel caso di accrescimento su un BH isolato, si trova in corrispondenza a

$$x_{min} = \frac{5 - 3\gamma}{4}. \quad (2.27)$$

Il minimo della $f(x)$, quindi, cade ad un raggio vicino al raggio di Bondi ($x_{min} \approx 1$ per $1 < \gamma < \frac{5}{3}$), ma non coincidente con esso. In particolare, il valore di x_{min} si sposta verso l'origine al crescere di γ e diventa pari a zero per $\gamma = 5/3$, ossia nel caso in cui il gas in accrescimento esegue una trasformazione adiabatica. Dunque, il valore della $f(x)$ nel minimo sarà dato da

$$f_{min} = f(x_{min}) = \frac{\gamma + 1}{4(\gamma - 1)} \left[\frac{5 - 3\gamma}{4} \right]^{-\frac{5-3\gamma}{\gamma+1}}. \quad (2.28)$$

Si noti che f_{min} tende al valore unitario per γ che tende a $\frac{5}{3}$ (si veda anche la Figura 2.1).

L'esistenza di un valore minimo per le funzioni $g(m)$ ed $f(x)$ implica che l'autovalore Λ non possa essere arbitrario, affinché l'equazione (2.20) ammetta una soluzione. Esisterà pertanto un autovalore critico, definito implicitamente dalla condizione $g_{min} = \Lambda_{cr} f_{min}$. Infatti, per i valori di x prossimi ad x_{min} , il prodotto $\Lambda f(x)$, con $\Lambda < \Lambda_{cr}$, sarebbe più piccolo di g_{min} , quindi l'equazione (2.20) in questo caso non risulterebbe più vera. Di conseguenza l'autovalore critico, che per comodità possiamo esprimere in termini di λ , direttamente proporzionale al tasso di accrescimento fisico, combinando le equazioni (2.26), (2.28) e (2.19), rappresenta un limite superiore e risulta pari a:

$$\lambda_{cr} = \left(\frac{g_{min}}{f_{min}} \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \left(\frac{5 - 3\gamma}{4} \right)^{-\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)}}. \quad (2.29)$$

Dal momento che quest'ultimo è legato al tasso di accrescimento \dot{M}_B dalla relazione (2.15), l'esistenza di un λ_{cr} si traduce in un limite superiore che il tasso di accrescimento non può superare. Si noti inoltre che λ_{cr} dipende soltanto dall'indice politropico γ , ossia dal tipo di fluido che viene accresciuto.

Riportiamo in Tabella 2.1 alcuni valori di λ_{cr} , ottenuti utilizzando il codice numerico, esposto nell'appendice C a pagina 103, per alcuni valori dell'indice politropico γ .

Tabella 2.1: Risultati numerici per x_{min} , f_{min} , g_{min} e λ_{cr} al variare di γ

γ	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	$\frac{5}{3}$
x_{min}	0.35	0.26	0.20	0.13	0.05	0
f_{min}	5.36	3.55	2.56	1.89	1.36	1
g_{min}	5.5	3.8	3	2.5	2.17	2
λ_{cr}	0.87	0.75	0.63	0.5	0.37	0.25

2.4 Soluzione numerica

Abbiamo visto in precedenza, che il problema di Bondi ammette non soltanto una soluzione, ma una coppia di soluzioni, ossia una soluzione per ogni parametro λ scelto nell'intervallo $[0, \lambda_{cr}]$. Riportiamo in Figura 2.2 due coppie di soluzioni, per $\lambda = \lambda_{cr}$ e $\lambda = \lambda_{cr}/4$.

Le soluzioni ottenute per $\lambda = \lambda_{cr}$, che in Figura 2.2 sono raffigurate in rosso e blu, vengono chiamate *soluzioni critiche*. Questa coppia di soluzioni presenta un punto in comune in corrispondenza di x_{min} (da Tabella 2.1 per $\gamma = 1.4$ si ha $x_{min} = 0.2$), in cui il numero di Mach assume valore pari ad uno. Quindi, per definizione in tal punto la velocità del gas diventa pari alla velocità del suono, perciò questo punto viene anche chiamato *punto sonico*. Pertanto, per questa famiglia di soluzioni è possibile che il fluido da subsonico diventi supersonico (o viceversa), di conseguenza queste soluzioni possono anche essere chiamate *transoniche*.

Un andamento differente si ha in regime subcritico, cioè per $\lambda < \lambda_{cr}$. In tal caso le soluzioni divergono sia nel campo vicino che nel campo lontano e presentano un estremo in corrispondenza di x_{min} , tuttavia una delle curve non assume mai valori superiori all'unità (curva verde), conseguentemente possiamo dire che essa descrive un fluido che rimane sempre subsonico, mentre l'altra soluzione (magenta) rimane sempre maggiore dell'unità, quindi il fluido che descrive è sempre supersonico.

Si noti che ogni soluzione trovata corrisponde a due regimi di flusso, dal momento che l'equazione di continuità e l'equazione di Bernoulli ammettono soluzioni sia con velocità positive sia con velocità negative. Questo significa che ciascuna curva può essere percorsa in un senso o nell'altro. Una curva percorsa con velocità negativa (che significa muoversi dall'esterno verso il centro) corrisponderà ad una situazione di accrescimento, mentre la stessa curva percorsa con velocità positiva (quindi muovendosi dal centro del sistema verso l'esterno) corrisponderà ad una situazione di vento. In questo modo risolvendo il problema di Bondi abbiamo ottenuto automaticamente anche le soluzioni di vento.

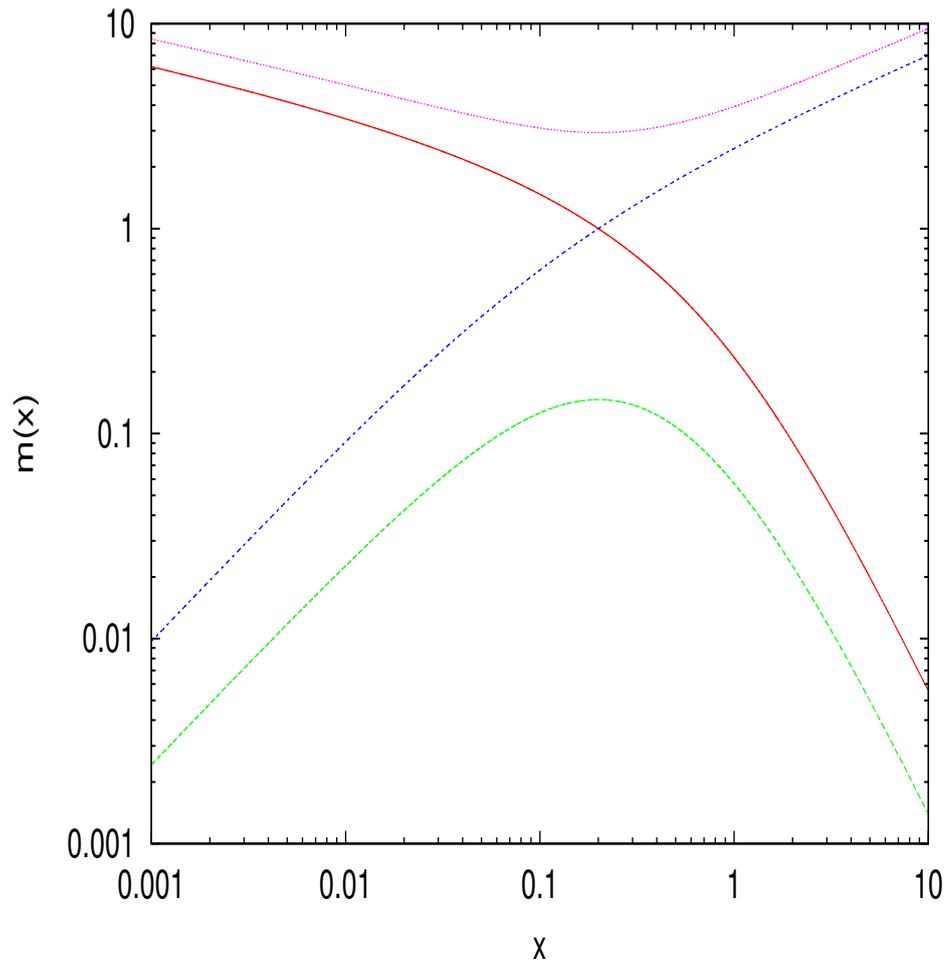


Figura 2.2: Soluzioni del problema di Bondi standard per $\gamma = 1.4$ fissato: soluzione transonica di accrescimento (curva rossa), soluzione transonica di vento (curva verde), soluzione di accrescimento subsonica (curva blu), soluzione di vento supersonica (curva magenta).

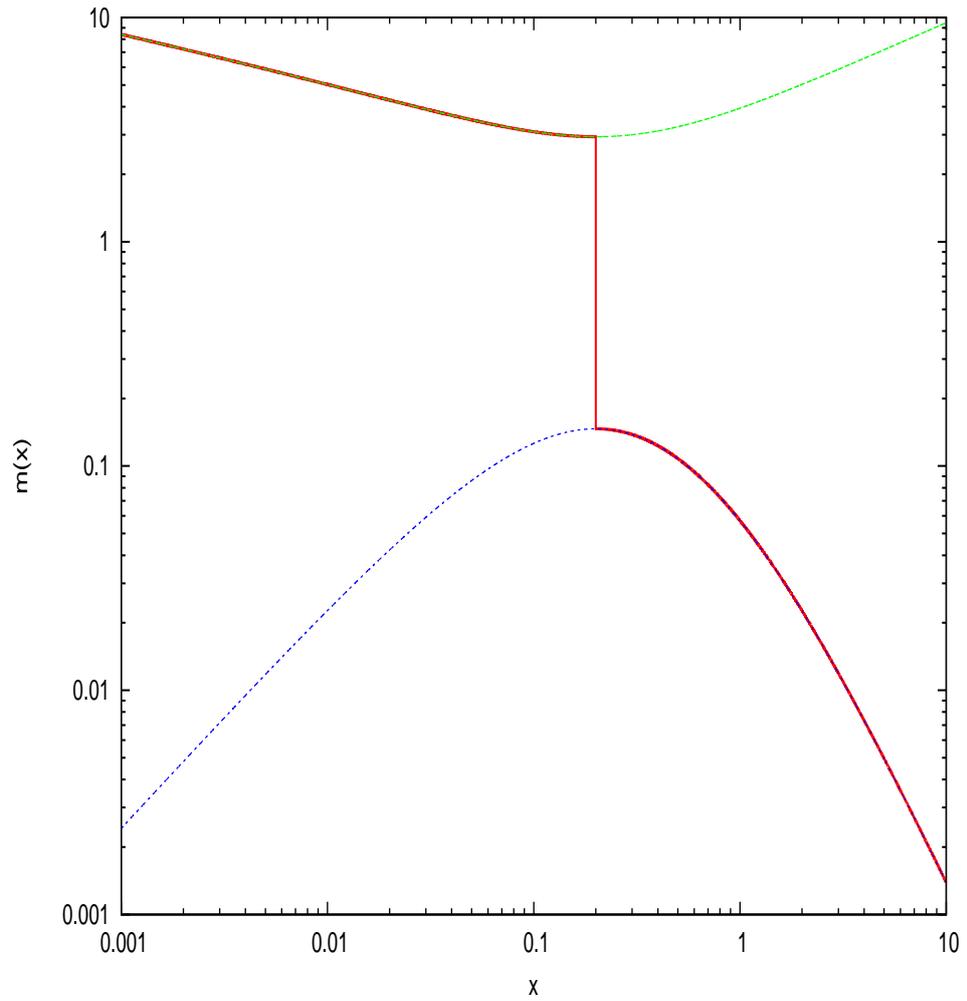


Figura 2.3: Soluzione con onda d'urto per $\gamma = 1.4$ (curva rossa) per cui si ha il passaggio dalla soluzione subsonica (curva blu) alla soluzione supersonica (curva verde) con un salto in corrispondenza del $x_{min} = 0.2$.

Inoltre, dato che un fluido può presentare delle discontinuità, è possibile avere soluzioni transoniche anche con $\lambda < \lambda_{cr}$; un esempio è rappresentato in Figura 2.3. In questo caso la soluzione “salta” dal ramo subsonico al ramo supersonico in corrispondenza del punto sonico, che in termini fisici significa che in quel punto il fluido sviluppa un’onda d’urto. Un’onda d’urto modifica necessariamente il fluido e, di conseguenza si esce presto dal regime stazionario. Pertanto, questo tipo di soluzioni sono instabili e inconsistenti con le assunzioni fatte all’inizio di questo capitolo, perciò non verranno trattate all’interno di questa Tesi.

Cerchiamo di capire il significato fisico delle soluzioni trovate. Dalle condizioni al contorno imposte nel paragrafo 1.1, ossia che all’infinito la velocità debba tendere a zero e i valori di p e ρ debbano diventare finiti, segue che all’infinito la funzione $m(x)$ debba tendere a zero. Pertanto, si devono escludere le soluzioni divergenti all’infinito (cioè le curve blu e magenta in Figura 2.2). Rimangono, dunque, soltanto due soluzioni fisicamente significative per lo studio del problema di accrescimento:

soluzione di accrescimento subsonica, riprodotta in Figura 2.2 in verde, rappresentativa della famiglia di soluzioni con $\lambda \in (0, \lambda_{cr})$. Essa descrive un fluido che a tutti i raggi rimane subsonico. Si tratta di una situazione in cui inizialmente il gas è fermo all’infinito, dopodiché inizia muoversi verso il centro, accelera fino a raggiungere una velocità massima attorno al raggio di Bondi, a distanze minori del raggio di Bondi rallenta e cade subsonico sul BH centrale.

soluzione di accrescimento transonica, rappresenta in Figura 2.2 in rosso, descrive il caso in cui il gas, partendo fermo all’infinito, si muove verso l’interno, accelera fino a raggiungere la velocità del suono in prossimità del raggio di Bondi, dopodiché accelera ancora e cade supersonico sul BH centrale.

Infine rappresentiamo nelle Figure 2.4, 2.5, 2.6 rispettivamente gli andamenti di $\tilde{\rho}(x)$, $\tilde{v}(x)$ e $\tilde{T}(x)$ ricavati dalle equazioni (2.23), (2.24), (2.25).

Dal momento che le condizioni all’infinito non permettono di distinguere quale tra le due soluzioni, critica o sub-critica, sia fisicamente più significativa nel caso specifico di accrescimento su un BH, è necessario considerare il comportamento delle soluzioni anche vicino all’origine. In Figura 2.5 si vede che per la soluzione subsonica $v \rightarrow 0$ vicino all’origine, quindi essa descrive una situazione di “quasi-equilibrio” idrostatico in prossimità del BH, ossia

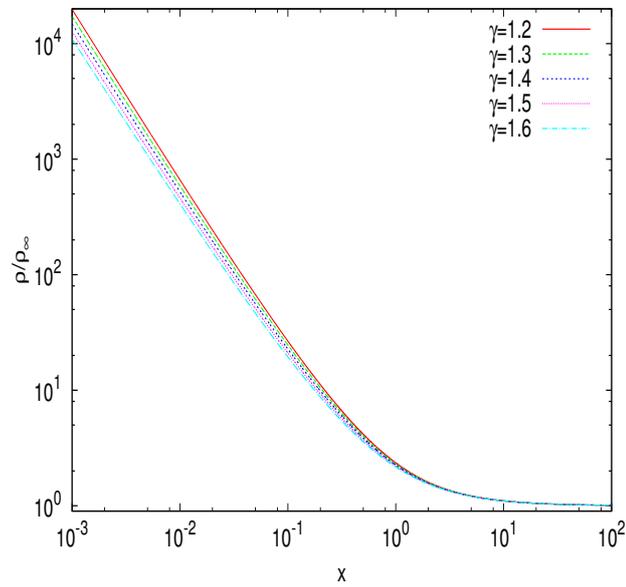
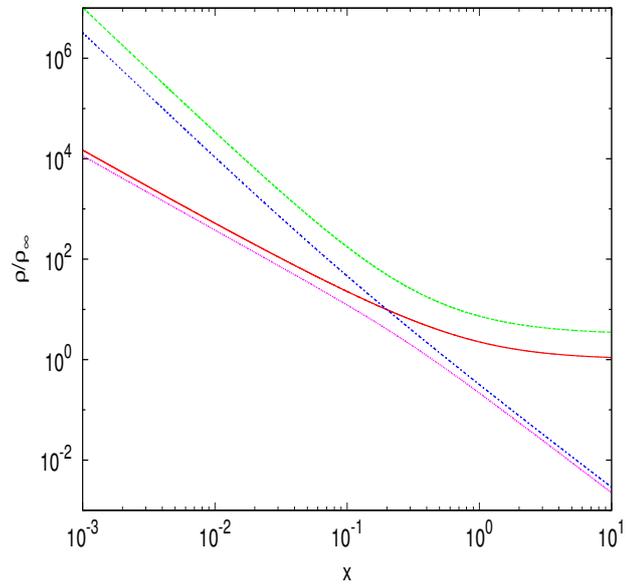


Figura 2.4: Andamento della densità con $\gamma = 1.4$ fissato (sopra) per cui sono stati utilizzati gli stessi colori e tipi di tratto come in Figura 2.2 nel rappresentare le soluzioni critiche e subcritiche; andamento della densità per la soluzione di accrescimento critica al variare di γ (sotto).

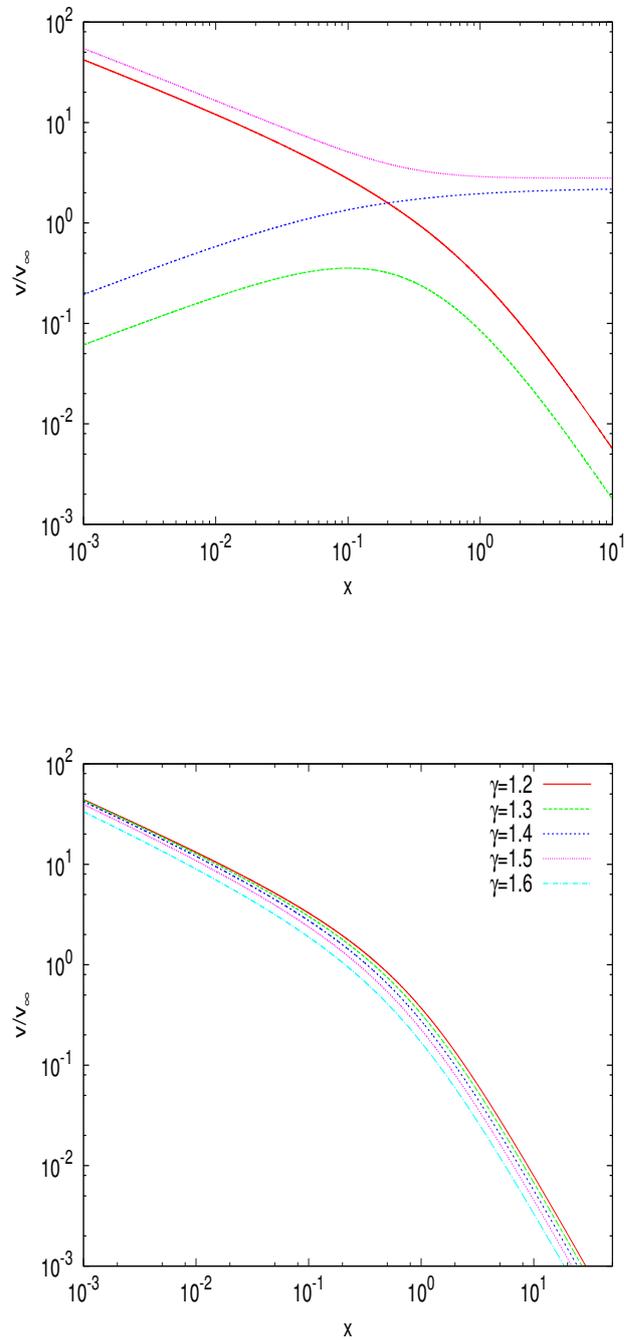


Figura 2.5: Andamento della velocità del gas con $\gamma = 1.4$ fissato (sopra) per cui sono stati utilizzati gli stessi colori e tipi di tratto come in Figura 2.2 nel rappresentare le soluzioni critiche e subcritiche; andamento della densità per la soluzione di accrescimento critica al variare di γ (sotto).

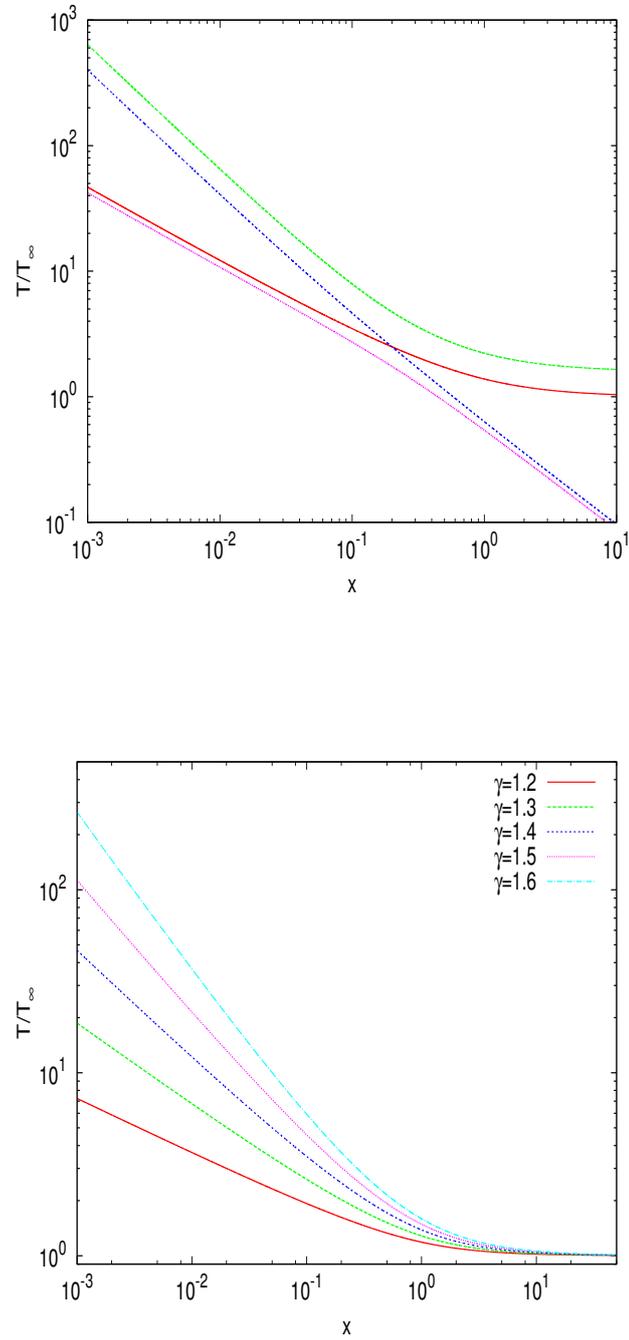


Figura 2.6: Andamento della temperatura con $\gamma = 1.4$ fissato (sopra) per cui sono stati utilizzati gli stessi colori e tipi di tratto come in Figura 2.2 nel rappresentare le soluzioni critiche e subcritiche; andamento della densità per la soluzione di accrescimento critica al variare di γ (sotto).

l'equazione del moto diventa

$$\frac{1}{\rho} \nabla p \simeq -\nabla \phi, \quad (2.30)$$

per cui la caduta viene contrastata dalla pressione generata dal gradiente di densità di materia che si accumula nella vicinanza dell'oggetto centrale. Tale soluzione è più significativa nei casi di accrescimento su oggetti collassati, quali le nane bianche o le stelle di neutroni, ossia oggetti aventi una superficie fisica su cui il materiale possa depositarsi. Poiché un BH non possiede una superficie solida, ogni singola particella in caduta finirebbe inevitabilmente entro l'orizzonte degli eventi, perciò dobbiamo richiedere che in prossimità dell'origine la velocità non si annulli. Pertanto, anche la soluzione subsonica nel nostro caso deve essere scartata.

Infine, rimane soltanto una soluzione con le proprietà da noi richieste, ossia quella transonica. Come abbiamo già visto per questa soluzione muovendosi dall'infinito verso piccoli raggi, in corrispondenza del raggio sonico la velocità di una particella del fluido diventa pari alla velocità del suono, dopodiché il fluido diventa supersonico. In tal caso, nel limite per $x \rightarrow 0$, l'equazione del moto rappresenta una situazione in cui

$$\frac{v^2}{2} \simeq \frac{GM_{BH}}{r}. \quad (2.31)$$

Di conseguenza, la densità, la velocità e la temperatura assumono gli andamenti tipici di "free fall":

$$\rho(x) \propto x^{-\frac{2}{3}} \quad (2.32)$$

$$v(x) \propto x^{-\frac{1}{2}} \quad (2.33)$$

$$T(x) \propto x^{\frac{3(1-\gamma)}{2}}. \quad (2.34)$$

Si può notare inoltre, considerando l'equazione (2.15), che tale soluzione è anche quella a cui corrisponde il tasso di accrescimento massimo.

2.4.1 Soluzione per il caso adiabatico

Consideriamo ora con maggior dettaglio il caso in cui il gas esegue una trasformazione politropica adiabatica, che si ottiene ponendo $\gamma = 5/3$ nelle relazioni trovate in precedenza. Per definizione nel corso di una trasformazione adiabatica il sistema non scambia calore con l'ambiente esterno ($dq = 0$), quindi il gas non conduce e non irraggia energia. Pertanto tale assunzione sarà valida se i tempi scala di raffreddamento del gas sono più lunghi rispetto al tempo che impiega la particella per cadere. Inoltre dal primo principio della termodinamica segue che una trasformazione adiabatica è anche isentropica, che significa che nella trasformazione si conserva l'entropia del fluido.

In tal caso il problema di Bondi assume l'aspetto analitico più semplice. Sostituendo nelle (2.22) e (2.21) valore dell'indice politropico pari a $5/3$ si ottiene

$$g(m) = 2m^{-\frac{1}{2}} \quad (2.35)$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x + 1. \quad (2.36)$$

Conseguentemente l'equazione di Bondi diventa

$$2m^{-\frac{1}{2}} = \lambda^{-\frac{2(1-\gamma)}{(1+\gamma)}} \left(\frac{3}{2}x + 1 \right). \quad (2.37)$$

Abbiamo visto nel paragrafo 2.3, che nel caso adiabatico il minimo della $f(x)$ cade nell'origine e la funzione nel minimo assume il valore pari all'unità secondo l'espressione (2.36). Mentre, come si può vedere dalla (2.35) calcolata per $m = 1$, la $g(x)$ nel minimo diventa pari a 2. Pertanto λ_{cr} in tal caso diventa

$$\lambda_{cr} = \left(\frac{f_{min}}{g_{min}} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}. \quad (2.38)$$

Riportiamo la soluzione numerica ottenuta in Figura 2.7, utilizzando gli stessi colori e stili di linea come in precedenza. Nel caso adiabatico non ci sono differenze qualitative tra le corrispettive soluzioni critiche (quella di accrescimento in rosso e quella di vento in blu) e le soluzioni di subcritiche con $\lambda = \lambda_{cr}/4$ (quella di accrescimento è raffigurata dalla curva verde e quella di vento dalla curva magenta). Le soluzioni di accrescimento rimangono ovunque subsoniche, mentre le soluzioni di vento rimangono supersoniche.

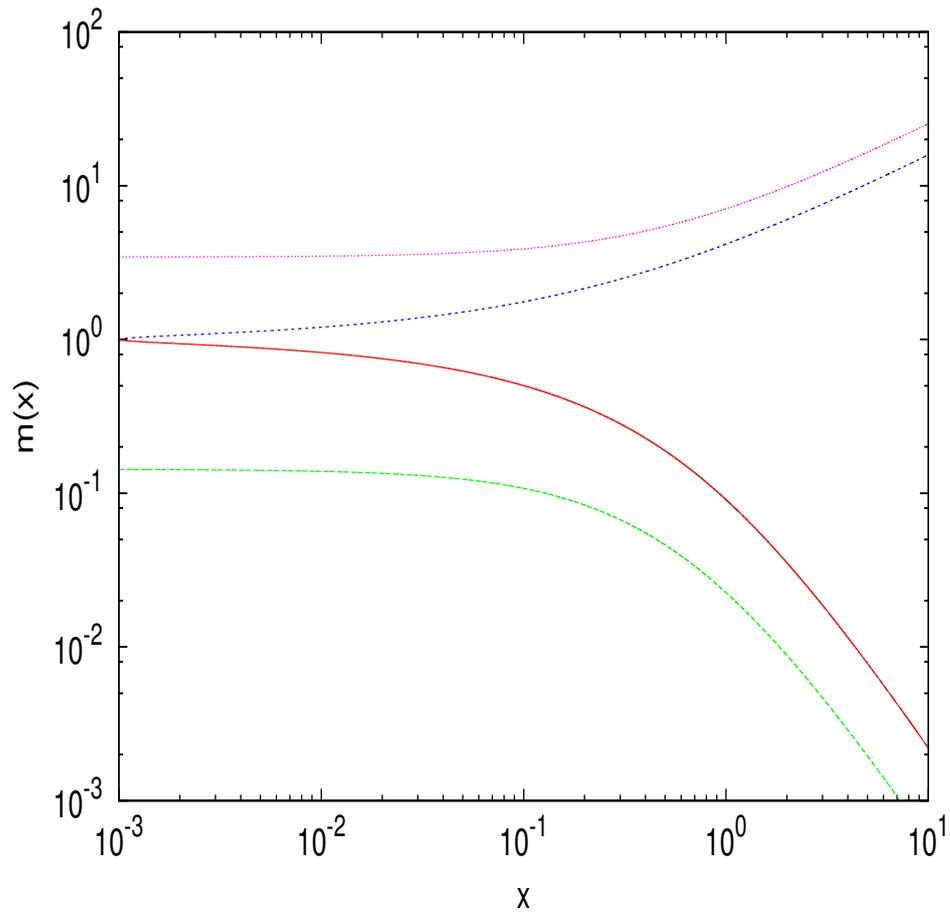


Figura 2.7: Soluzioni del problema di Bondi standard per $\gamma = 5/3$ fissato: soluzione di accrescimento transonica (curva rossa), soluzione di vento transonica (curva verde), soluzione di accrescimento subsonico (curva blu), soluzione di vento supersonico (curva magenta).

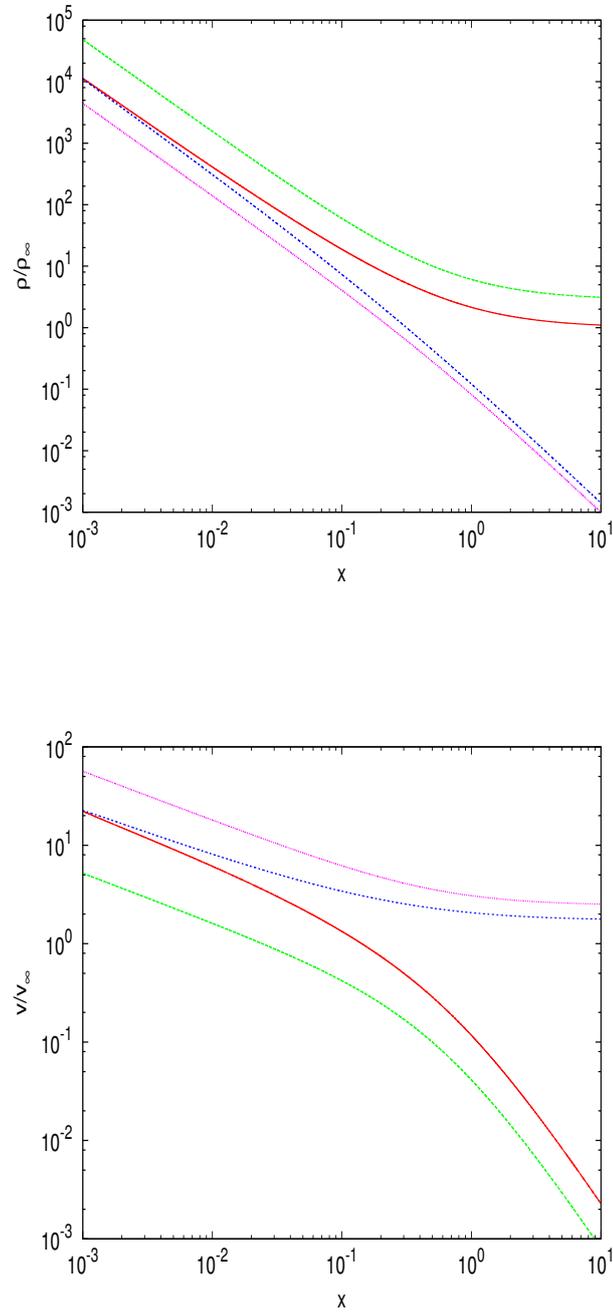


Figura 2.8: Andamento della densità (sopra) e della velocità del gas (sotto) con $\gamma = 1.4$ fissato, per cui sono stati utilizzati gli stessi colori e tipi di tratto come in Figura 2.7 nel rappresentare gli andamenti corrispondenti alle soluzioni critiche e quelle subcritiche.

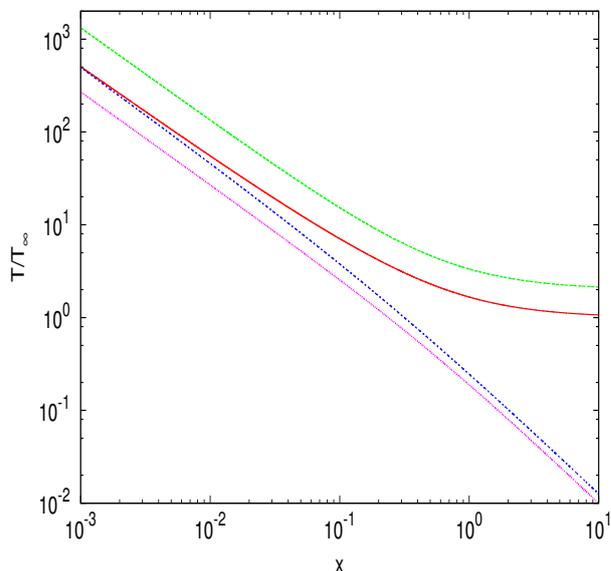


Figura 2.9: Andamento della temperatura con $\gamma = 1.4$ fissato, per cui sono stati utilizzati gli stessi colori e tipi di tratto come in Figura 2.7 nel rappresentare gli andamenti corrispondenti alle soluzioni critiche e quelle subcritiche.

2.5 Tasso di accrescimento

Prima di affrontare il lavoro di Tesi vero e proprio, è opportuno introdurre un aspetto che verrà studiato in dettaglio successivamente. Questo aspetto riguarda la necessità di quantificare il bias che si introduce nella stima del tasso di accrescimento se, invece di utilizzare i valori all'infinito di ρ e T , si usano valori ad una distanza finita dal BH (come avviene nei lavori osservativi).

Il tasso di accrescimento, \dot{M}_B , per il modello di Bondi classico, secondo la definizione (2.15), può essere scritto come¹

$$\dot{M}_B = 4\pi G^2 M_{BH}^2 \lambda_{cr} \frac{\rho_\infty}{c_{s,\infty}^3} \quad (2.39)$$

¹Si noti che la temperatura T_∞ può essere utilizzata equivalentemente alla velocità del suono $c_{s,\infty}$ nella (2.39), dal momento che possiamo esprimere una grandezza in funzione dell'altra utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti nella definizione $c_{s,\infty} = \sqrt{\gamma \frac{k_B T}{\mu m_p}}$.

dove, ricordiamo che i valori ρ_∞ e $c_{s\infty}$ sono valori corrispondenti all'infinito, ossia ad una distanza per cui la distribuzione del gas non risente più l'effetto gravitazionale esercitato dal BH al centro del sistema. Se consideriamo un punto arbitrario, x_f , definito come

$$x_f = \frac{r_f}{r_B} \quad (2.40)$$

in corrispondenza del quale si valutano i valori di ρ_f e c_{sf} , il rate di accrescimento stimato utilizzando questi valori di "fiducia" si scriverà come

$$\dot{M}_f = 4\pi G^2 M_{BH}^2 \lambda_{cr} \frac{\rho_f}{c_{sf}^3}. \quad (2.41)$$

Il rapporto tra quest'ultima quantità e il tasso di accrescimento teorico (2.39) rappresenta un "bias", dovuto al fatto di considerare le condizioni al contorno del problema in un punto diverso dall'infinito:

$$\frac{\dot{M}_f}{\dot{M}_B} = \tilde{\rho}_f^{\frac{5-3\gamma}{2}}. \quad (2.42)$$

Risulta che tale rapporto è una funzione dell'indice politropico γ . In Figura 2.10 vediamo chiaramente che una sovrastima significativa del tasso di accrescimento può avere luogo per valori di $x_f < 1$, ossia per $r_f < r_B$, e risulta tanto più grande quanto più r_f è minore di r_B . Questo fatto può costituire una sorta di "bias", se i valori osservativi di ρ e T sono presi per $r_f < r_B$. Tale bias diminuisce all'aumentare di γ , fino a scomparire per un fluido adiabatico. Questo andamento deriva dal fatto che per i valori dell'indice politropico più piccoli dell'indice adiabatico l'energia, guadagnata dal gas spostandosi dall'esterno verso l'interno del sistema, viene parzialmente persa (per il secondo principio della termodinamica), mentre nel caso adiabatico per definizione queste perdite sono nulle. Pertanto, a parità di x_f , i fluidi con γ più bassi saranno anche più freddi (si veda la Figura 2.6). Di conseguenza, utilizzando i dati rilevati a distanze più piccole del raggio di Bondi, \dot{M}_f viene sovrastimato, in quanto la temperatura che si considera è più bassa rispetto al suo valore teorico.

Nel seguito della Tesi saranno considerati altri fattori che possono portare a dei bias sistematici nella stima di \dot{M}_B .

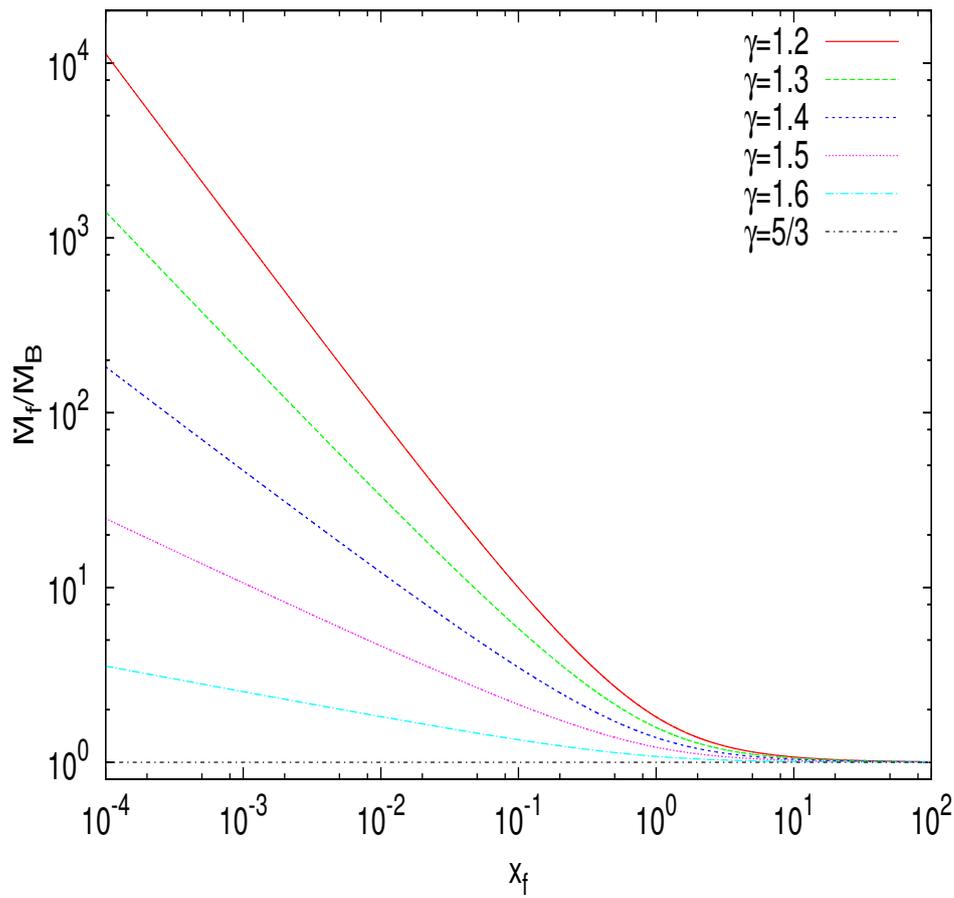


Figura 2.10: Andamento del rapporto \dot{M}_f/\dot{M}_B in funzione della distanza dal BH $x_f = r_f/r_B$ al variare dell'indice politropico γ .

Capitolo 3

Accrescimento di Bondi in presenza di una galassia

Il problema di Bondi classico tratta il potenziale gravitazionale di un oggetto puntiforme e isolato, tuttavia nella realtà un buco nero non si trova mai isolato; in particolare, i buchi neri che considereremo in questo capitolo si trovano al centro delle galassie. Estenderemo pertanto la trattazione classica del problema di Bondi presentata nel capitolo precedente, derivando le equazioni generali per l'accrescimento su un buco nero situato al centro della buca di potenziale prodotta da una galassia, avente profilo di densità descritto dal modello di Hernquist.

3.1 Equazioni per il modello di Bondi con galassia

Le equazioni fondamentali del modello sono, come nella trattazione del problema classico, l'equazione di continuità (2.5) e l'equazione del moto (2.8). I termini riguardanti l'entalpia e il campo di velocità, coinvolti nelle equazioni, rimangono immutati anche in presenza della buca di potenziale esterna, dunque l'unico termine che cambia è quello gravitazionale.

In un caso generico il potenziale gravitazionale generato da un oggetto che ha simmetria sferica, come una galassia ellittica o un bulge di una galassia a spirale, può essere espresso in forma seguente

$$\phi_g = -\frac{GM_g}{r_g} \tilde{\phi}\left(\frac{r}{r_g}\right) \quad (3.1)$$

dove M_g è la massa della galassia, r_g è il raggio di scala caratteristico della galassia e $\tilde{\phi}$ è una funzione adimensionale che descrive il potenziale della gal-

lattia, il quale verrà specificato in seguito.

Dunque, il potenziale totale del sistema, composto dalla galassia e il suo buco nero situato al suo centro, diventa la somma dei rispettivi contributi:

$$\phi_{tot} = -\frac{GM_{BH}}{r} - \frac{GM_g}{r_g} \tilde{\phi}\left(\frac{r}{r_g}\right). \quad (3.2)$$

Utilizzando le normalizzazioni introdotte nel capitolo precedente (ossia le definizioni (2.11)) il potenziale totale del sistema può essere scritto come

$$\phi_{tot} = -\frac{GM_{BH}}{r} \left[\frac{1}{x} + \frac{\mathcal{R}}{\xi} \tilde{\phi}\left(\frac{x}{\xi}\right) \right] \quad (3.3)$$

dove indichiamo col parametro adimensionale ξ il *raggio di scala della galassia* normalizzato al raggio di Bondi del problema classico¹

$$\xi = \frac{r_g}{r_B},$$

con $x = r/r_B$ e con \mathcal{R} il *parametro di massa* dato dal rapporto tra la massa della galassia e la massa del buco nero centrale

$$\mathcal{R} = \frac{M_g}{M_{BH}}.$$

Si noti che nel limite per $\mathcal{R} \rightarrow 0$ (oppure, equivalentemente, per $\xi \rightarrow \infty$) si ritorna alla trattazione classica del problema.

Anche nel caso di accrescimento con la galassia il problema di Bondi può essere scritto in forma sintetica

$$g(m) = \Lambda f(x)$$

dove l'espressione per la $g(m)$ rimane identica al caso classico (2.21), dal momento che essa descrive le proprietà intrinseche del gas in accrescimento, mentre l'espressione per la $f(x)$ assume forma:

$$f(x) = x^{\frac{4(\gamma-1)}{\gamma+1}} \left[\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{x} + \frac{\mathcal{R}}{\xi} \tilde{\phi}\left(\frac{x}{\xi}\right) \right]. \quad (3.4)$$

Di conseguenza il parametro critico, definito come rapporto tra i valori minimi assunti da queste funzioni, deve cambiare la sua espressione. Mentre nel caso classico il parametro critico dipende soltanto dall'indice politropico γ , nel caso che andremo ad esaminare in questo capitolo, l'autovalore critico, $\lambda_{cr,g}$, acquista una dipendenza anche dai parametri \mathcal{R} e ξ caratteristici della galassia.

¹Con raggio di Bondi intendiamo nel seguito sempre quello del problema classico, ossia $r_B = \frac{GM_{BH}}{c_{s\infty}^2}$

3.2 Galassia di Hernquist

Assumiamo ora come profilo per la distribuzione di densità della galassia il profilo di Hernquist, che fornisce una descrizione abbastanza accurata della densità stellare delle galassie su scale rilevanti per il problema (da qualche decina a diverse centinaia di parsec). Il profilo di Hernquist (1990) è stato introdotto per trattare analiticamente un profilo di densità, che corrisponde a una distribuzione di luminosità rappresentata dalla legge empirica di de Vaucouleurs (1948) “ $R^{\frac{1}{4}}$ ”, generalmente seguita dalle galassie ellittiche, ossia

$$\log \frac{I(R)}{I(R_e)} = -3.331 \left[\left(\frac{R}{R_e} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right] \quad (3.5)$$

dove R è il raggio della galassia proiettato sul piano del cielo, R_e è il raggio che contiene metà della luce della galassia, detto anche *raggio effettivo*, I è la brillantezza superficiale della galassia.

Per una galassia di Hernquist la distribuzione di densità si scrive come

$$\rho(r) = \frac{M_g r_g}{2\pi} \frac{1}{r (r + r_g)^3} \quad (3.6)$$

dove r_g è una scala caratteristica della galassia ($r_g \simeq R_e/1.8153$). La distribuzione di massa e il potenziale gravitazionale della galassia saranno dati rispettivamente da

$$M(r) = \frac{M_g r^2}{(r + r_g)^2} \quad (3.7)$$

$$\phi(r) = -\frac{GM_g}{r + r_g}. \quad (3.8)$$

Pertanto, il potenziale totale del sistema, che entra nella funzione $f(x)$, nella notazione adimensionale nella maniera seguente

$$\phi_{tot} = -\frac{GM_{BH}}{r_B} \left(\frac{1}{x} + \frac{\mathcal{R}}{x + \xi} \right) \quad (3.9)$$

3.3 Soluzione numerica

In analogia con la trattazione classica sviluppata in precedenza ci concentriamo innanzitutto su alcune proprietà delle funzioni $f(x)$ e $g(m)$, utili per la soluzione del problema e, pertanto, riportiamo in Figura 3.1 l'andamento di queste funzioni.

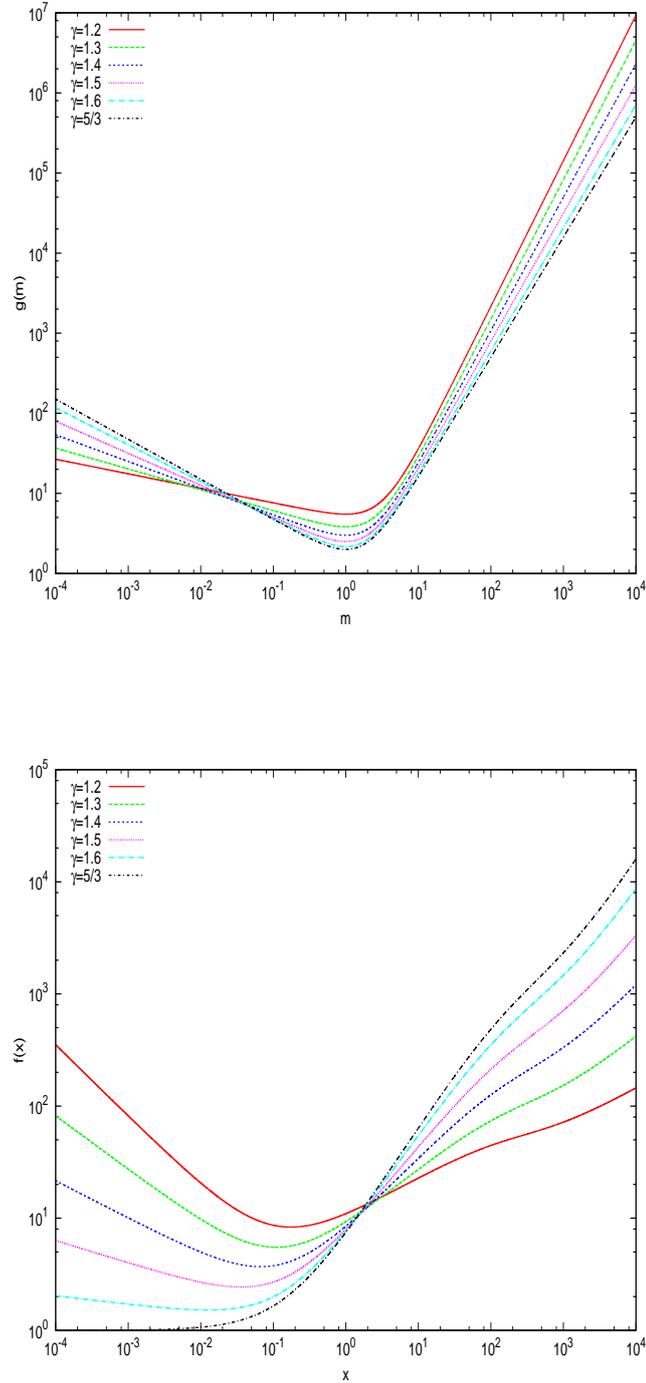


Figura 3.1: Andamento delle funzioni $f(x)$ e $g(m)$ al variare dell'indice politropico γ nel caso del problema di Bondi con galassia di Hernquist per $\mathcal{R} = 10^3$ e $\xi = 200$ fissati.

Come abbiamo già accennato, l'aspetto analitico della funzione $g(m)$, descritto dall'equazione (2.21), nel caso in cui l'accrescimento avviene in presenza di galassia, rimane immutato. Pertanto valgono ancora le considerazioni fatte nel paragrafo 2.3, cioè che il minimo della $g(x)$ si ha per $m = 1$ indipendentemente dal tipo di fluido in accrescimento.

Consideriamo ora la funzione $f(x)$ che, nel caso specifico di galassia di Hernquist, diventa

$$f(x) = x^{\frac{4(\gamma-1)}{\gamma+1}} \left(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{x} + \frac{\mathcal{R}}{x+\xi} \right). \quad (3.10)$$

Ci si aspetta che il nuovo termine nell'espressione della $f(x)$ non comporti cambiamenti rilevanti nell'andamento della funzione all'infinito, dato che all'infinito domina il primo termine dell'equazione (3.10). Avvicinandoci al centro del sistema il primo termine diventa trascurabile, mentre la somma dei contributi dovuti al potenziale della galassia e al buco nero diventa via via più importante. Chiaramente il contributo della galassia sarà tanto più grande quanto più grande è il valore del parametro \mathcal{R} .

Soffermiamoci sulla minimizzazione della funzione. In generale $f(x)$ può essere scritta come

$$f(x) = x^a \left(b + \frac{1}{x} + \frac{\mathcal{R}}{x+\xi} \right) \quad (3.11)$$

avendo definito per comodità $a = 4(\gamma-1)/(\gamma+1)$ e $b = 1/\gamma - 1$. Trovare il minimo di questa funzione equivale a risolvere l'equazione:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^{a-2} (abx + a - 1) + x^a \mathcal{R} \left[\frac{a}{x(x+\xi)} - \frac{1}{(x+\xi)^2} \right] = 0 \quad (3.12)$$

Sfortunatamente tale equazione in generale non ha soluzioni analitiche, quindi si deve concludere che nel caso di accrescimento con la galassia non è possibile giungere ad un'espressione analitica del minimo per la $f(x)$. Di conseguenza per trovare l'autovalore critico del problema, $\lambda_{cr,g}$, si deve ricorrere ai metodi numerici.

Si noti, però, come nel limite $\mathcal{R} \rightarrow 0$ con dei semplici passaggi algebrici si ritrova l'espressione (2.27), ossia l'espressione per x_{min} del problema di Bondi classico.

Riportiamo alcuni valori di x_{min} e f_{min} al variare dell'indice politropico γ in Tabella 3.1, ottenuti utilizzando il codice numerico descritto nell'appendice C, fissando il parametro $\mathcal{R} = 10^3$ secondo la relazione di Magorrian et al. (1998), il parametro $\xi = 200$, che corrisponde ad un raggio di scala di qualche kpc e un raggio di Bondi di qualche decina di pc. Si può notare come il minimo della $f(x)$ si sposta verso l'origine al crescere di γ fino a coincidere

con lo zero per $\gamma = 5/3$, similmente al caso classico. Inoltre, confrontando questi ultimi risultati con quelli del capitolo precedente, si può vedere che la buca di potenziale della galassia ha l'effetto di aumentare il minimo della $f(x)$, a parità di γ , rispetto al caso classico. Di conseguenza anche il valore del parametro $\lambda_{cr,g}$ cresce rispetto al caso classico.

Tabella 3.1: Valori assunti da $x_{min,g}$ e $\lambda_{cr,g}$ al variare di γ , per fissati $\mathcal{R} = 10^3$ e $\xi = 200$

γ	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	5/3
$x_{min,g}$	0.18	0.11	0.07	0.04	0.01	0
f_{min}	8.36	5.51	3.70	2.43	1.51	1.00
$\lambda_{cr,g}$	9.84	4.01	1.87	0.94	0.46	0.25

Vogliamo studiare ora come cambia la funzione $f(x)$ al variare dei parametri \mathcal{R} e ξ , che caratterizzano rispettivamente la massa e la dimensione della galassia. Per prima cosa fissiamo dei valori per γ e ξ e vediamo come cambia la $f(x)$ al variare di \mathcal{R} , ossia al variare della massa della galassia per una dimensione fissata. In Figura 3.2 si può vedere come la posizione del minimo della $f(x)$ si sposta verso l'origine del sistema per \mathcal{R} via via crescenti e la funzione assume valori sempre più elevati. Questo effetto è dovuto all'approfondirsi della buca di potenziale del sistema man mano che la massa della galassia aumenta. Inoltre, per valori di \mathcal{R} molto alti, la $f(x)$ presenta un minimo relativo nella regione compresa tra 10^2 e $10^4 r_B$. Quest'ultimo segna la regione in cui il termine dovuto al potenziale gravitazionale della galassia domina sugli altri termini nell'espressione della $f(x)$.

Vediamo ora come la variazione del parametro ξ influenza l'andamento della $f(x)$, fissando $\mathcal{R} = 10^3$ e $\gamma = 1.4$. Aumentare o diminuire ξ significa variare la dimensione della galassia per una massa fissata. Ci si aspetta, quindi, che al crescere di ξ la galassia diventi più "diluita", e, di conseguenza, il suo potenziale diventi via via meno rilevante rispetto al potenziale gravitazionale del BH. Pertanto, l'andamento della $f(x)$ si deve avvicinare all'andamento in assenza della galassia tanto di più quanto più estesa si assume la galassia. Tale risultato è riportato in Figura 3.2. Innanzitutto vediamo che la variazione del parametro ξ sposta il minimo della $f(x)$ verso l'origine, dato che al diminuire di ξ la stessa massa diventa concentra in un volume più piccolo, quindi la buca di potenziale al centro diventa più profonda. Inoltre, per valori di ξ piccoli (< 50) la funzione presenta un minimo relativo nella zona tra 10^2 e $10^3 r_B$, che diventa tanto più pronunciato quanto minore è ξ .

Le Figura 3.3 e 3.4 mostrano come si discostano i valori di $x_{min,g}$ e $\lambda_{cr,g}$, calcolati per il problema di Bondi in presenza della buca di potenziale pro-

dotta da una galassia di Herquist, dai valori classici, al variare dei parametri \mathcal{R} e ξ .

Tabella 3.2: Valori assunti da $x_{min,g}$ e $\lambda_{cr,g}$ all'aumentare del parametro \mathcal{R} , fissando $\gamma = 1.4$ e $\xi = 200$

\mathcal{R}	1	10	100	500	10^3	$5 \cdot 10^3$	10^4
$x_{min,g}$	0.1996	0.1961	0.1667	0.1001	0.0667	0.0181	0.0095
f_{min}	2.57	2.58	2.73	3.23	3.70	5.70	7.08
$\lambda_{cr,g}$	0.626	0.637	0.750	1.240	1.874	6.874	13.124

Tabella 3.3: Valori assunti da $x_{min,g}$ e $\lambda_{cr,g}$ all'aumentare del parametro ξ fissando $\gamma = 1.4$ ed $\mathcal{R} = 10^3$

ξ	10	20	30	50	100	200	500	700
$x_{min,g}$	0.005	0.009	0.013	0.022	0.040	0.067	0.111	0.127
f_{min}	8.84	7.07	6.23	5.33	4.39	3.70	3.12	2.98
$\lambda_{cr,g}$	25.61	13.12	8.95	5.63	3.12	1.87	1.12	0.98

Procediamo, quindi, con l'analisi della soluzione numerica del problema di Bondi con la galassia, ottenuta utilizzando il codice numerico descritto nell'appendice C. Fissando $\mathcal{R} = 10^3$, $\xi = 200$ e $\gamma = 1.4$ si ottiene la soluzione per $m(x)$ rappresentata in Figura 3.5. Dall'analisi delle Tabelle 3.1 - 3.3 e delle Figure 3.2 - 3.5 possiamo concludere che le differenze principali rispetto al problema di Bondi classico sono le seguenti:

- il punto sonico si trova più vicino al centro del sistema di quanto ottenuto per il modello classico: abbiamo discusso in precedenza come, a causa dell'approfondirsi della buca di potenziale in presenza della galassia, x_{min} si sposta verso l'origine e, dato che il punto sonico coincide con x_{min} per $\lambda = \lambda_{cr}$, lo stesso effetto si ha anche per il punto sonico;
- l'autovalore critico λ_{cr} risulta maggiore, il che comporta di conseguenza che il tasso di accrescimento sia maggiore rispetto al problema classico.

Si ricorda che, nota la funzione $m(x)$ e dato un valore del parametro critico $\lambda_{cr,g}$, valgono le relazioni (2.23), (2.24), (2.25) trovate nel capitolo precedente, per cui è possibile determinare i valori della densità, della velocità del gas e della temperatura, normalizzati al valore assunto da queste grandezze all'infinito. Rappresentiamo gli andamenti di queste grandezze rispettivamente nelle Figure 3.6, 3.7, 3.8. Vediamo che per l'accrescimento di

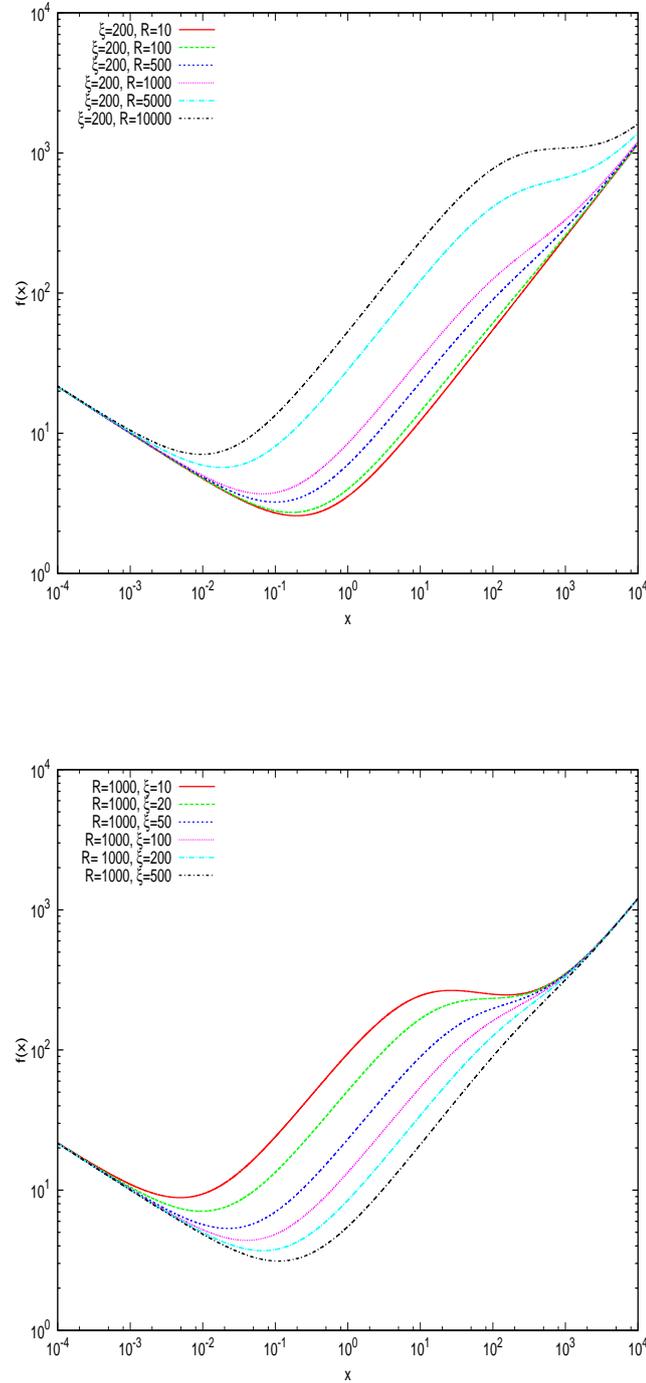


Figura 3.2: Andamento delle funzioni $f(x)$ al variare del parametro $\mathcal{R} = M_g/M_{BH}$ (sopra) e al variare del parametro $\xi = r_g/r_B$ (sotto) con $\gamma = 1.4$ fissato.

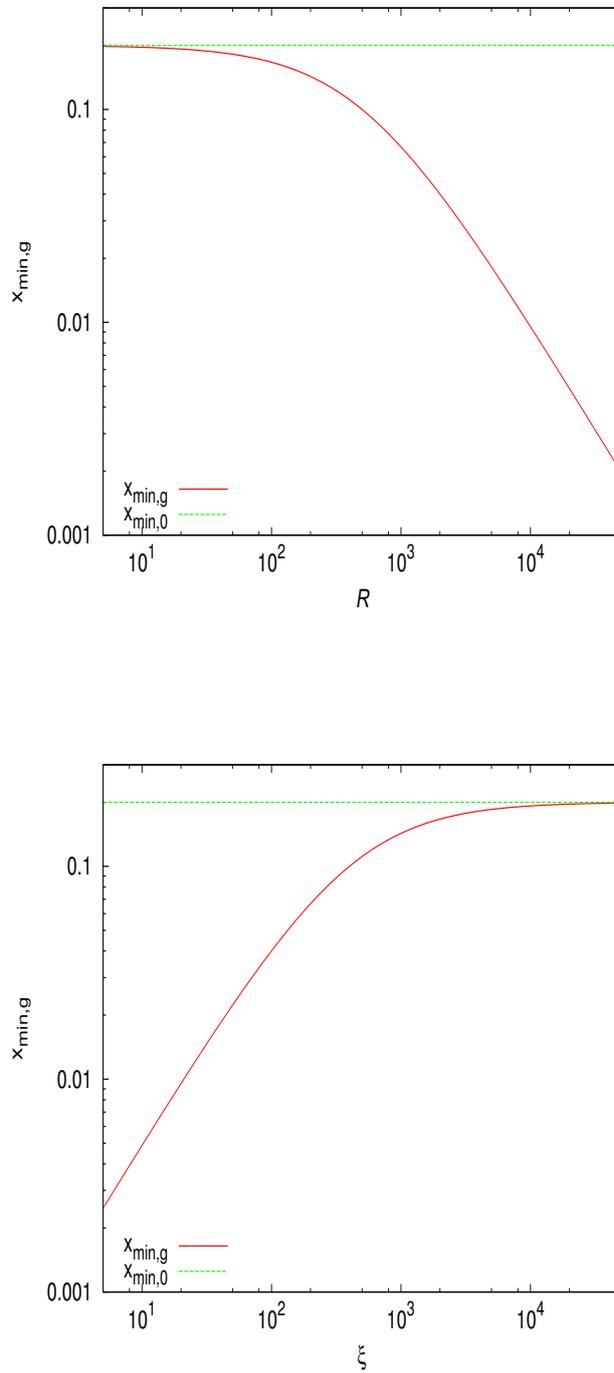


Figura 3.3: Andamento di $x_{min,g}$ in funzione della massa della galassia $\mathcal{R} = M_g/M_{BH}$ (sopra) e in funzione della dimensione della galassia $\xi = r_g/r_B$ (sotto).

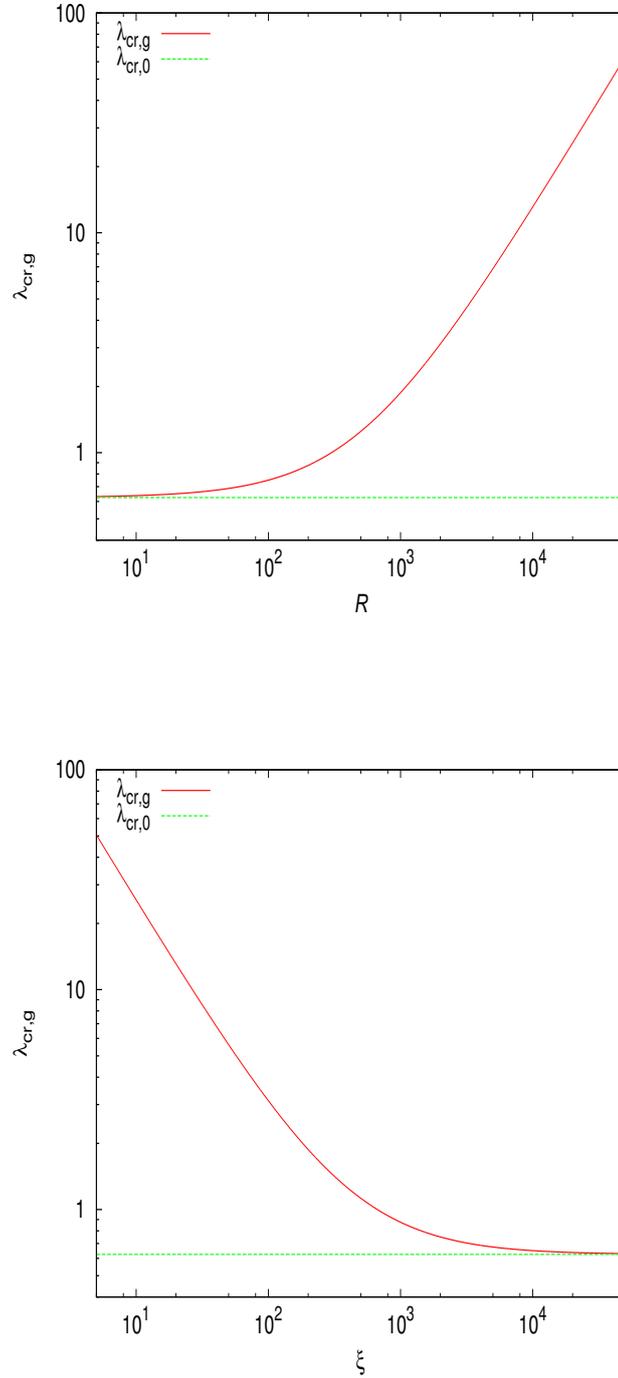


Figura 3.4: Andamento di $\lambda_{cr,g}$ in funzione della massa della galassia $\mathcal{R} = M_g/M_{BH}$ (sopra) e in funzione della dimensione della galassia $\xi = r_g/r_B$ (sotto).

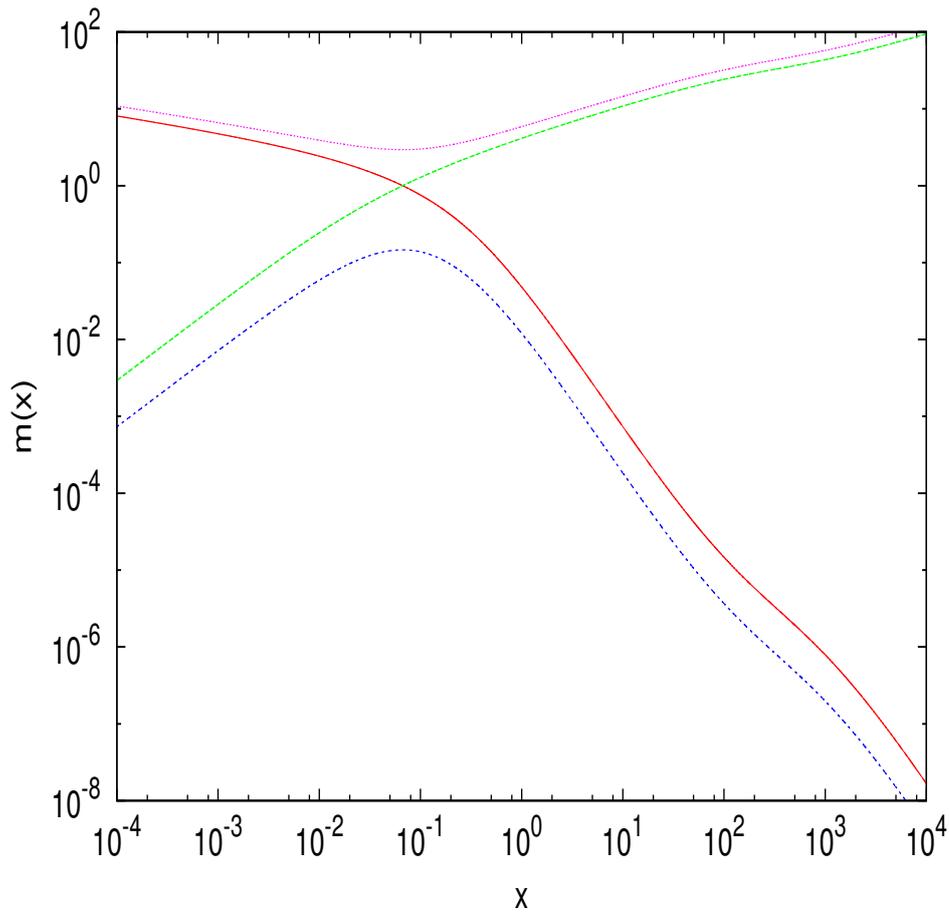


Figura 3.5: Soluzioni del problema di Bondi con galassia di Hernquist per $\gamma = 1.4$, $\mathcal{R} = 10^3$ e $\xi = 200$ fissati: soluzione di accrescimento (curva rossa), soluzione di vento (curva verde), soluzione accrescimento subsonica (curva blu), soluzione di vento supersonica (curva magenta).

Bondi con la galassia ci sono alcune differenze importanti: ad esempio, molto vicino al buco nero centrale la densità del gas assume valori di circa un ordine di grandezza più grandi rispetto al caso classico. Inoltre, essa rimane costante a quota $\approx 10 \tilde{\rho}_\infty$ nella zona in cui domina il potenziale gravitazionale della galassia ($1 < x < 10^2$). Lo stesso andamento si ha anche per la temperatura.

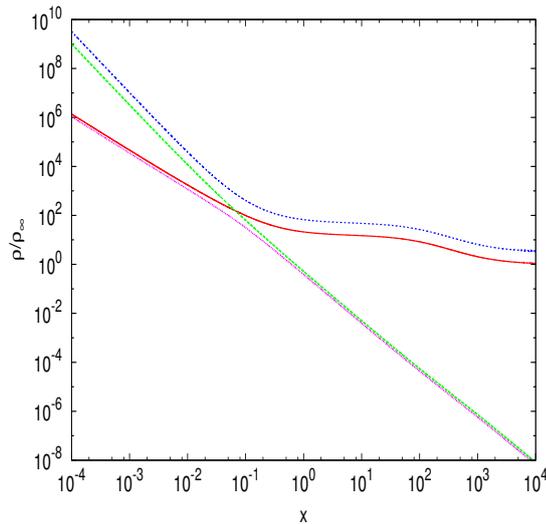


Figura 3.6: Andamento della funzione $\tilde{\rho}(x) = \rho(x)/\rho_\infty$ per $\gamma = 1.4$, $\mathcal{R} = 10^3$ e $\xi = 200$ fissati, con gli stessi colori e tipi di tratto come nella figura precedente.

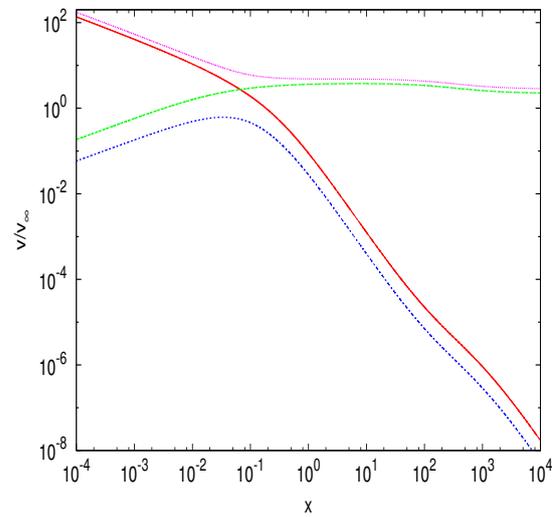


Figura 3.7: Andamento della funzione $\tilde{v}(x) = v(x)/v_\infty$ per $\gamma = 1.4$, $\mathcal{R} = 10^3$ e $\xi = 200$ fissati.

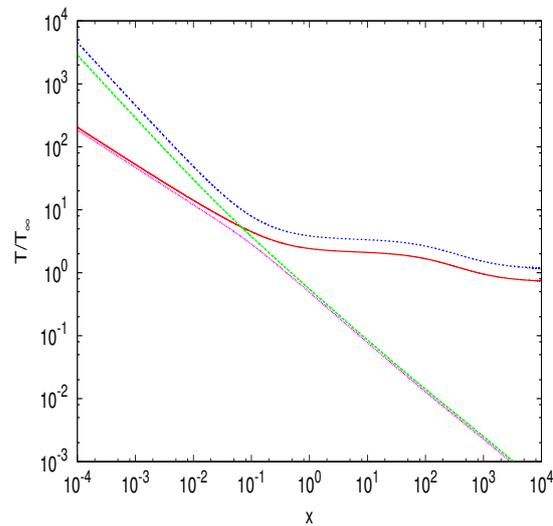


Figura 3.8: Andamento della funzione $\tilde{T}(x) = T(r)/T_\infty$ per $\gamma = 1.4$, $\mathcal{R} = 10^3$ e $\xi = 200$ fissati.

3.4 Tasso di accrescimento in presenza di galassia

Come abbiamo visto nel Capitolo 2, il tasso di accrescimento calcolato secondo il modello di Bondi standard da un osservatore, che nella stima utilizza i valori di ρ e c_s presi ad una distanza $x_f = r_f/r_B$ dal centro della galassia, è dato da

$$\dot{M}_f = 4\pi G^2 M_{BH}^2 \lambda_{cr,0} \frac{\rho_f}{c_{sf}^3}. \quad (3.13)$$

Il tasso di accrescimento vero, \dot{M}_g , che si ottiene secondo il modello di accrescimento di Bondi con galassia di Hernquist, si scrive secondo la definizione (2.39) come

$$\dot{M}_g = 4\pi G^2 M_{BH}^2 \lambda_{cr,g} \frac{\rho_\infty}{c_{s\infty}^3} \quad (3.14)$$

dove il parametro $\lambda_{cr,g}$ è l'autovalore critico del problema di Bondi modificato.

Il rapporto tra \dot{M}_f ed \dot{M}_g ci permette di valutare il bias che deriva da aver trascurato il contributo gravitazionale della galassia nella stima del tasso di accrescimento ed aver considerato le condizioni al contorno del problema di Bondi in un punto diverso dall'infinito:

$$\frac{\dot{M}_f}{\dot{M}_g} = \frac{\lambda_{cr,0}}{\lambda_{cr,g}} \tilde{\rho}_f^{\frac{5-3\gamma}{2}} \quad (3.15)$$

L'andamento del rapporto \dot{M}_f/\dot{M}_g , riportato in Figura 3.9, è qualitativamente lo stesso che in Figura 2.10 per $x_f < 10$, tuttavia il suo valore si riduce a parità di γ rispetto al caso studiato nel capitolo precedente, dato che il tasso di accrescimento aumenta in presenza di galassia. Una differenza fondamentale rispetto alla trattazione standard del problema dell'accrescimento sferico si ha per $x_f > 10$, per cui il rapporto \dot{M}_f/\dot{M}_g diventa minore dell'unità. Ciò significa che, se nella stima del tasso di accrescimento si considerano i valori di ρ_f e c_{sf} , presi ad una distanza maggiore di raggio di Bondi, il tasso risulta sottostimato. La Figura 3.9 suggerisce che, al fine di ottenere una stima esatta del tasso di accrescimento, fissati la massa e la dimensione della galassia, i valori di ρ e c_s devono essere presi ad una distanza dal centro del sistema pari a circa $1 - 10r_B$, indipendentemente dal tipo di fluido (ossia dal valore di γ) che sta accrescendo. Inoltre, come si può vedere dalle Figure 3.10 e 3.11, che rappresentano l'andamento del rapporto \dot{M}_f/\dot{M}_g al variare dei parametri \mathcal{R} e ξ , nella stima di \dot{M} si sbaglia di un fattore circa 0.5 - 2, se i dati osservativi vengono presi ad una distanza $0.1 - 20r_B$ dal centro, indipendentemente dalla massa e dimensione della galassia.

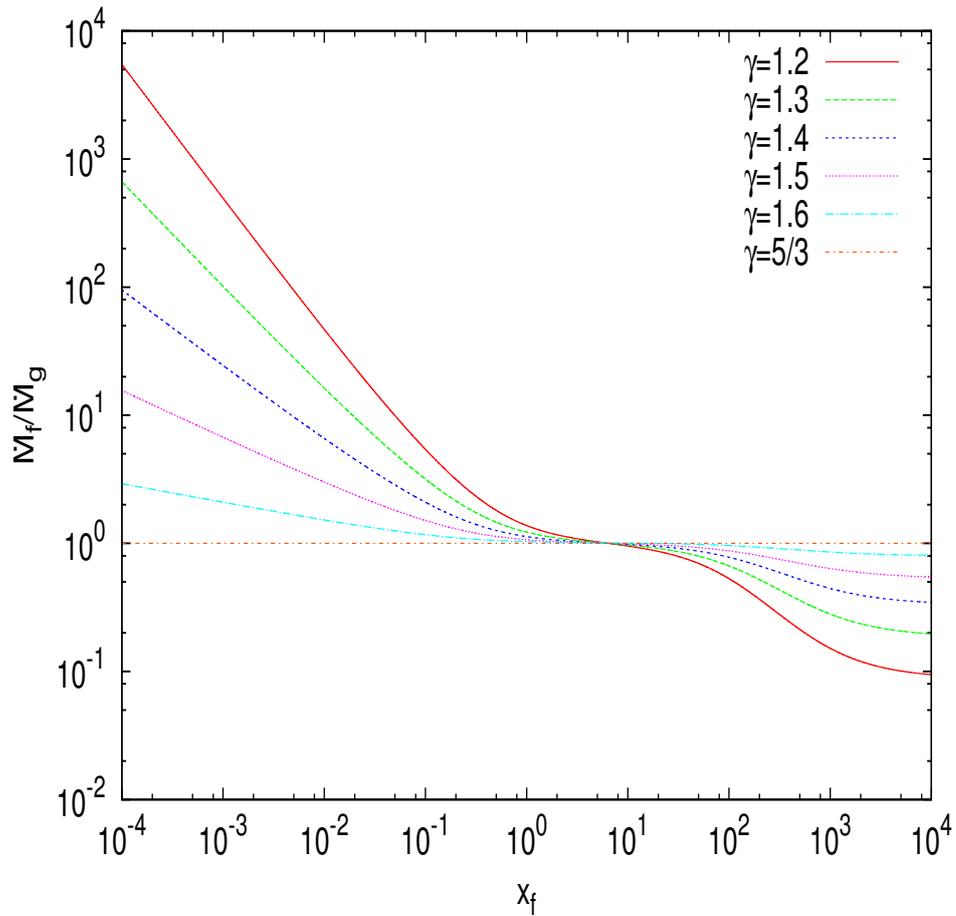


Figura 3.9: Andamento del rapporto \dot{M}_f/\dot{M}_g in funzione della distanza dal buco nero $x_f = r_f/r_B$ al variare dell'indice politropico γ per $\mathcal{R} = 10^3$, $\xi = 200$ fissati.

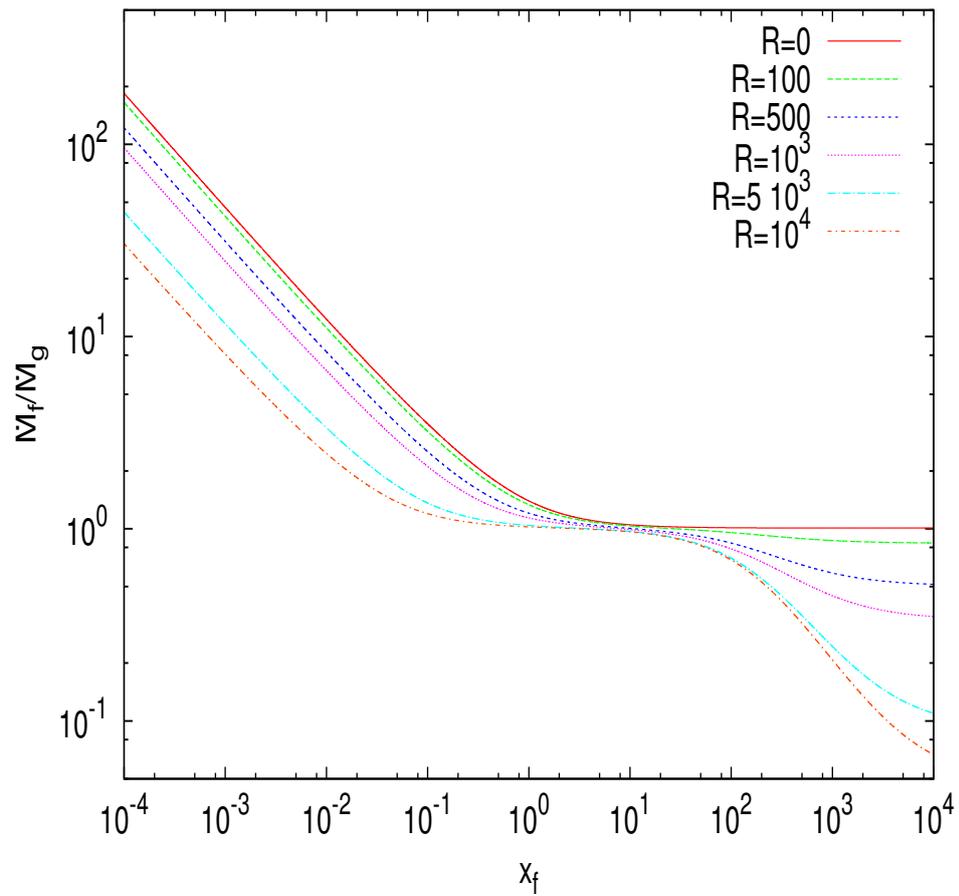


Figura 3.10: Andamento del rapporto \dot{M}_f/\dot{M}_g in funzione della distanza dal buco nero $x_f = r_f/r_B$ al variare della massa di galassia $\mathcal{R} = M_g/M_{BH}$, per $\gamma = 1.4$ e $\xi = 200$ fissati.

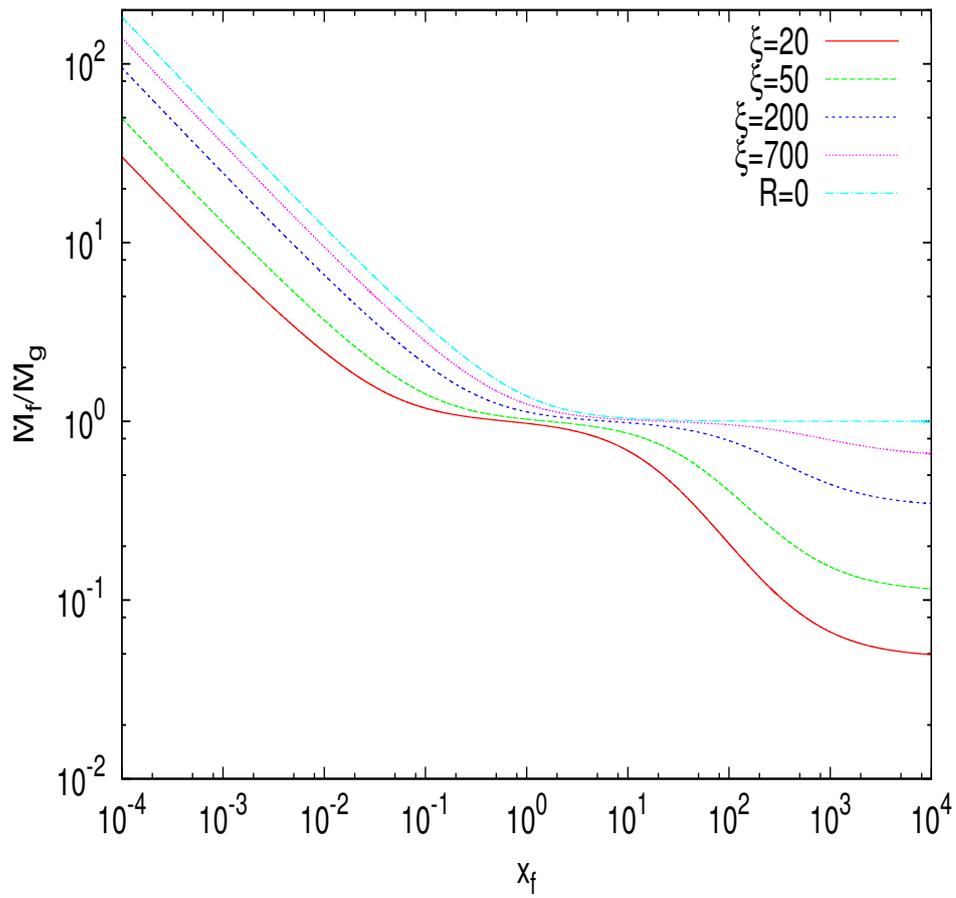


Figura 3.11: Andamento del rapporto \dot{M}_f/\dot{M}_g in funzione della distanza dal buco nero $x_f = r_f/r_B$ al variare della dimensione di galassia $\xi = r_g/r_B$, per $\gamma = 1.4$ e $\mathcal{R} = 10^3$ fissati.

Capitolo 4

Accrescimento di Bondi con electron scattering

L'accrescimento su una buca di potenziale profonda può essere molto efficiente nel convertire energia potenziale gravitazionale in radiazione, pertanto, ci si aspetta che il processo di accrescimento possa essere modificato in presenza di radiazione. In particolare, nell'ipotesi che il fluido in accrescimento sia pressoché trasparente alla radiazione, è possibile estendere la trattazione matematica del problema di Bondi in maniera semplice anche al caso in cui si vuole tenere conto del feedback radiativo, poiché la forza esercitata dalla pressione di radiazione segue la legge “ $1/r^2$ ” esattamente come la forza gravitazionale.

Pertanto, in questo capitolo verrà ampliato il modello di Bondi classico tenendo conto della radiazione emessa dal gas in accrescimento e ponendo particolare attenzione su come varia in tal caso il tasso di accrescimento.

4.1 Limite di Eddington

Durante il processo di accrescimento il gas viene compresso verso il centro del sistema sotto l'azione della forza gravitazionale del BH, la sua temperatura cresce e di conseguenza il gas emette radiazione. La luminosità prodotta in questo processo può essere scritta come

$$L = \dot{M}\varepsilon c^2 \tag{4.1}$$

dove ε è l'efficienza con cui l'energia gravitazionale viene convertita in radiazione e \dot{M} è il tasso di accrescimento.

La radiazione emessa interagisce con il mezzo circostante alterando il fenomeno di accrescimento. Se il gas in accrescimento è completamente ionizzato, la

sua opacità sarà dovuta essenzialmente agli elettroni, i quali, essendo più leggeri, hanno sezione d'urto maggiore rispetto a quella dei protoni ($\sigma_T \propto m^{-2}$), di conseguenza il processo di interazione dominante tra materia e radiazione sarà l'*electron scattering*.

La forza per unità di volume esercitata dalla radiazione sugli elettroni può essere scritta come:

$$F_{rad} = \frac{Ln_e(r)\sigma_T}{4\pi cr^2} \quad (4.2)$$

dove $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$ è la sezione d'urto Thomson, che tiene conto dell'opacità degli elettroni, ed n_e è la densità numerica degli elettroni. I protoni rimangono accoppiati agli elettroni tramite la forza coulombiana e vengono trascinati via dalla pressione di radiazione anch'essi; essendo più pesanti, risentono anche della forza di gravità esercitata dal buco nero, ossia di

$$F_g = -\frac{GM_{BH}}{r^2}\rho(r) \quad (4.3)$$

dove, nell'ipotesi in cui il fluido sia composto soltanto da idrogeno completamente ionizzato, la densità del gas può essere scritta come $\rho(r) = n_e(r)m_e + n_p(r)m_p \simeq n_e(r)m_p$, dato che $n_e \simeq n_p$ e $m_e \ll m_p$.

In definitiva la forza totale di cui risente il gas, che chiameremo forza effettiva F_{eff} , sarà data dalla somma di due contributi di segno opposto:

$$\begin{aligned} F_{eff}(r) &= -\frac{GM_{BH}}{r^2}\rho(r) + \frac{Ln_e(r)\sigma_T}{4\pi cr^2} \\ &= -\frac{GM_{BH}}{r^2}\rho(r) \left(1 - \frac{Ln_e(r)\sigma_T}{4\pi c} \frac{1}{GM_{BH}\rho(r)}\right) \\ &= -\frac{GM_{BH}}{r^2}\rho(r) \left(1 - \frac{L}{L_{Edd}}\right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

dove abbiamo utilizzato la relazione $n_e(r)/\rho(r) \simeq 1/m_p$ e la definizione della *luminosità di Eddington*:

$$L_{Edd} \equiv \frac{4\pi GM_{BH}cm_p}{\sigma_T}. \quad (4.5)$$

Si noti che, affinché il materiale possa cadere sul buco nero centrale, è necessario che la forza esercitata dalla radiazione non superi quella gravitazionale, quindi dato un valore di L possiamo distinguere le seguenti situazioni:

- per $L > L_{Edd}$ il gas viene spinto fuori dalla pressione di radiazione;
- per $L < L_{Edd}$ domina la forza gravitazionale, quindi si ha l'accrescimento;

- per $L = L_{Edd}$ si ha una situazione statica, in cui la forza effettiva si annulla, in quanto la forza di gravità viene esattamente bilanciata dal feedback radiativo.

Quest'ultima situazione rappresenta il caso limite noto come “*limite di Eddington*”, che esprime limite fisico per il tasso di accrescimento in un sistema sferico stazionario attraverso la relazione

$$\dot{M}_{Edd} = \frac{L_{Edd}}{\varepsilon c^2}. \quad (4.6)$$

Pertanto, in virtù delle considerazioni appena fatte, possiamo dire che il processo di accrescimento può essere autoregolato attraverso il feedback radiativo, cioè il rate di accrescimento viene ridotto man mano che la luminosità prodotta nell'accrescimento aumenta, e, una volta raggiunto il limite di Eddington, attrazione gravitazionale dell'oggetto centrale viene bilanciata dalla pressione di radiazione e l'accrescimento si interrompe.

Inoltre, dall'equazione (4.4) segue che, fissando un raggio r , la forza gravitazionale esercitata sul gas in accrescimento viene ridotta di un fattore costante, se L è costante su tutta la superficie sferica di raggio r . Dunque, gli effetti dovuti alla radiazione possono essere introdotti in maniera semplice nella trattazione matematica del modello di Bondi, se si richiede che il processo di accrescimento avvenga in regime otticamente sottile, ossia che la luminosità non venga assorbita dal mezzo stesso. In tal caso basta semplicemente sostituire nel problema di Bondi al posto della forza gravitazionale la forza effettiva data dall'equazione (4.4).

Un approccio alternativo, ma del tutto equivalente, potrebbe essere quello di dire che la massa M_{BH} viene “vista” ad ogni raggio r ridotta della quantità pari ad $(1 - L/L_{Edd})$, costante su tutta la superficie sferica di raggio r ¹. Si potrebbe quindi utilizzare al posto di M_{BH} una massa effettiva $M_{BH,eff} = M_{BH} (1 - L/L_{Edd})$. Nell'ambito di questa Tesi si preferisce, però, seguire il primo ragionamento, poiché in seguito vogliamo mantenere la normalizzazione delle distanze rispetto al raggio di Bondi del problema classico (cioè r_B), la cui definizione coinvolge M_{BH} .

¹Lo stesso ragionamento si può fare anche per la costante gravitazionale G .

4.2 Equazioni per il modello di Bondi con electron scattering

Ricaviamo ora le equazioni per il modello Bondi con feedback radiativo in maniera rigorosa partendo dalle due equazioni fondamentali del modello classico, cioè l'equazione di continuità (2.5) e l'equazione del moto (2.8).

L'equazione di continuità rimane formalmente invariata, per cui si avrà come prima:

$$\dot{M}_e = 4\pi r^2 \rho(r) v(r) = \text{const} \quad \forall r. \quad (4.7)$$

L'unica equazione soggetta a delle modifiche è l'equazione del moto, che in questo caso diventa

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{GM_{BH}}{r^2} \left(1 - \frac{L}{L_{Edd}}\right). \quad (4.8)$$

Seguendo gli stessi passaggi del Capitolo 2, ossia integrando l'equazione (4.8) lungo una linea di flusso, rendendo tutte le quantità presenti nell'equazione adimensionali e introducendo il numero di Mach, essa diventa:

$$\tilde{c}^2 \left(\frac{m^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} \right) = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{L}{L_{Edd}} \right) + \frac{1}{\gamma - 1} \quad (4.9)$$

dove anche in questo caso si definisce $x = r/r_B$, con r_B il raggio di Bondi del problema classico.

Pertanto, si ottiene un'equazione formalmente identica alla (2.16) ad eccezione del fattore correttivo $(1 - L/L_{Edd})$, che tiene conto del feedback radiativo, mentre l'aspetto formale dell'equazione di continuità normalizzata rimane inalterato:

$$\lambda = m x^2 \tilde{\rho}^{\frac{\gamma+1}{2}}. \quad (4.10)$$

Combinando le equazioni (4.9) e (4.10), esattamente come nella trattazione del problema classico, si giunge all'espressione

$$\left(\frac{\lambda}{m x^2} \right)^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}} \left[\frac{m^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} \right] = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{L}{L_{Edd}} \right) + \frac{1}{\gamma - 1} \quad (4.11)$$

per cui, definendo $\Lambda = \lambda^{-\frac{2(1-\gamma)}{1+\gamma}}$, si ottiene

$$m^{\frac{2(1-\gamma)}{\gamma+1}} \left(\frac{m^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} \right) = \Lambda x^{\frac{4(\gamma-1)}{\gamma+1}} \left[\frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{x} \left(1 - \frac{L}{L_{Edd}} \right) \right]. \quad (4.12)$$

Anche in questo caso, quindi, il problema di Bondi può essere scritto in forma sintetica $g(m) = \Lambda f(x)$, con la funzione $g(m)$ che rimane la stessa, mentre la $f(x)$ diventa

$$f(x) = x^{\frac{4(\gamma-1)}{(\gamma+1)}} \left[\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{x} \left(1 - \frac{L}{L_{Edd}} \right) \right]. \quad (4.13)$$

Analogamente al problema classico, la nuova funzione $f(x)$ è sempre positiva, continua e divergente asintoticamente sia nel campo vicino ($x \ll 1$) sia nel campo lontano ($x \gg 1$), dunque essa deve ammettere un minimo; nel caso di accrescimento con feedback radiativo x_{min} può essere calcolato analiticamente e risulta essere pari a

$$x_{min} = \frac{5-3\gamma}{4} \left(1 - \frac{L}{L_{Edd}} \right). \quad (4.14)$$

Pertanto si trova che per effetto della pressione di radiazione il minimo della $f(x)$ si sposta a raggi più piccoli. Inoltre, il valore assunto dalla funzione nel minimo diventa più basso man mano che la luminosità prodotta cresce:

$$f(x_{min}) = \frac{1+\gamma}{4(\gamma-1)} \left(\frac{5-3\gamma}{4} \right)^{-\frac{5-3\gamma}{\gamma+1}} \left(1 - \frac{L}{L_{Edd}} \right)^{\frac{4(\gamma-1)}{\gamma+1}}. \quad (4.15)$$

Di conseguenza cambia il valore del parametro critico, definito dall'equazione (2.29), che in presenza di pressione di radiazione diventa

$$\lambda_{cr,e} = \frac{1}{2} \frac{1+\gamma}{2(1-\gamma)} \left(\frac{5-3\gamma}{4} \right)^{-\frac{5-3\gamma}{2(1-\gamma)}} \left(1 - \frac{L}{L_{Edd}} \right)^2. \quad (4.16)$$

Il parametro critico può essere scritto come $\lambda_{cr,0}$ moltiplicato per un fattore correttivo

$$\lambda_{cr,e} = \lambda_{cr,0} \left(1 - \frac{L}{L_{Edd}} \right)^2. \quad (4.17)$$

Quindi nell'accrescimento di Bondi con electron scattering il parametro critico, oltre alla dipendenza da γ , acquista una dipendenza anche dal rapporto L/L_{Edd} . Inoltre, essendo il fattore correttivo $(1 - L/L_{Edd}) < 1$, per ogni valore di $L \neq 0$ sarà sempre $\lambda_{cr,e} < \lambda_{cr,0}$. Pertanto, nel problema dell'accrescimento sferico stazionario con electron scattering il tasso di accrescimento è sempre minore di quello del problema classico.

4.3 Tasso di accrescimento

Procediamo con lo studio di come varia il tasso di accrescimento del problema di Bondi in presenza di electron scattering, che indicheremo con \dot{M}_e , rispetto al tasso di accrescimento stimato secondo la teoria classica. Dal momento che \dot{M}_e viene definito attraverso l'equazione di continuità, che come abbiamo visto rimane formalmente invariata, si ottiene per \dot{M}_e un'espressione analoga alla (2.39):

$$\begin{aligned}\dot{M}_e &= \lambda_{cr,e} \frac{4\pi G^2 M_{BH}^2 \rho_\infty}{c_{s\infty}^3} \\ &= \lambda_{cr,0} \left(1 - \frac{L}{L_{Edd}}\right)^2 \frac{4\pi G^2 M_{BH}^2 \rho_\infty}{c_{s\infty}^3} \\ &= \dot{M}_B \left(1 - \frac{L}{L_{Edd}}\right)^2.\end{aligned}\quad (4.18)$$

Esprimendo L_{Edd} ed L , utilizzando la relazione (4.1), rispettivamente come $L_{Edd} = \varepsilon \dot{M}_{Edd} c^2$ ed $L = \varepsilon \dot{M}_e c^2$, si ottiene

$$\dot{M}_e = \dot{M}_B \left(1 - \frac{\dot{M}_e}{\dot{M}_{Edd}}\right)^2. \quad (4.19)$$

Per semplificare la trattazione dividiamo ambo i membri dell'equazione (4.19) per il tasso di accrescimento corrispondente al limite di Eddington \dot{M}_{Edd} , e definiamo $\dot{m}_e = \dot{M}_e / \dot{M}_{Edd}$, il tasso di accrescimento del problema di Bondi con la pressione di radiazione normalizzato a quello di Eddington, ed $\dot{m}_B = \dot{M}_B / \dot{M}_{Edd}$, il tasso di accrescimento del problema classico, anch'esso normalizzato al tasso di accrescimento di Eddington. Pertanto l'equazione (4.19) diventa un'equazione di secondo grado in \dot{m}_e :

$$\dot{m}_e = (1 - \dot{m}_e)^2 \dot{m}_B \quad (4.20)$$

che può essere risolta algebricamente. L'equazione (4.20) ha due radici reali positive, in quanto il suo determinante è sempre positivo per tutti i valori di \dot{m}_B positivi:

$$\Delta = \left(2 + \frac{1}{\dot{m}_B}\right)^2 - 4 > 0 \quad \forall \dot{m}_B > 0,$$

che possono essere scritte come

$$\dot{m}_{e1} = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{\dot{m}_B} + \sqrt{\frac{4}{\dot{m}_B} + \frac{1}{\dot{m}_B^2}}\right) \quad (4.21)$$

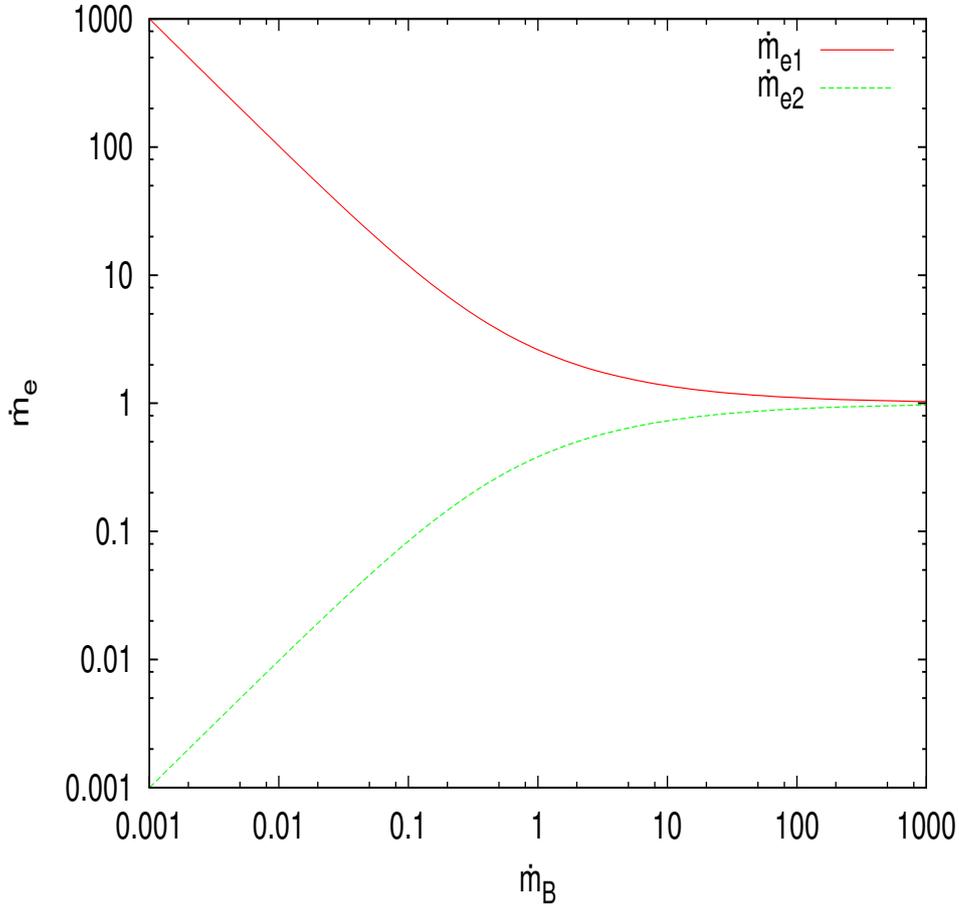


Figura 4.1: Andamento del tasso di accrescimento del problema con electron scattering \dot{m}_e in funzione del tasso di accrescimento classico \dot{m}_B .

ed

$$\dot{m}_{e2} = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{\dot{m}_B} - \sqrt{\frac{4}{\dot{m}_B} + \frac{1}{\dot{m}_B^2}} \right). \quad (4.22)$$

Il significato fisico delle soluzioni si comprende studiandone il comportamento asintotico nei due regimi: $\dot{m}_B \rightarrow 0$ ed $\dot{m}_B \rightarrow \infty$. Per tassi di accrescimento alti, ovvero nel limite $\dot{m}_B \rightarrow \infty$, entrambe le soluzioni tendono ai valori unitari, che significa a sua volta che \dot{M}_e tende al limite di Eddington. Per tassi

di accrescimento bassi ($\dot{m}_B \rightarrow 0$) le due soluzioni hanno invece comportamenti differenti: $\dot{m}_{e2} \rightarrow 0$, mentre $\dot{m}_{e1} \rightarrow \infty$, come si vede in Figura 4.1. Ci si aspetta, però, che per $\dot{m}_B \rightarrow 0$ anche \dot{m}_e debba necessariamente tendere a zero ed, inoltre, che la soluzione si mantenga sempre inferiore all'unità, dal momento che ci interessa soltanto il processo di accrescimento. Pertanto possiamo scartare la \dot{m}_{e1} , poiché essa è inconsistente con il processo di accrescimento. Tale soluzione, rappresentata in Figura 4.1 dalla curva rossa, corrisponde ad una soluzione di vento.

4.4 Bias

Nel precedente paragrafo abbiamo ottenuto l'espressione per il tasso di accrescimento del problema di Bondi con electron scattering in funzione del tasso di accrescimento definito dal modello di Bondi classico. Abbiamo stabilito che, nel caso di accrescimento con la pressione di radiazione, la quantità di materia che cade nell'unità di tempo sul buco nero viene ridotta di un fattore $(1 - \dot{m}_e)^2$ rispetto a quanto descritto dalla trattazione standard. Ora vediamo che cosa comporta tale risultato per il rapporto \dot{M}_f/\dot{M}_e , che esprime il bias dovuto alla stima del tasso di accrescimento con le condizioni al contorno diverse da quelle all'infinito, e senza includere il feedback radiativo. Come nel caso precedente con la galassia (paragrafo 3.4)

$$\dot{M}_f = 4\pi G^2 M_{BH}^2 \lambda_{cr,0} \frac{\rho_f}{c_{sf}^3}, \quad (4.23)$$

mentre il tasso di accrescimento che tiene in conto anche del feedback radiativo può essere scritto, combinando (2.41) e (4.18), come

$$\dot{M}_e = 4\pi G^2 M_{BH}^2 \lambda_{cr,0} (1 - \dot{m}_e)^2 \frac{\rho_\infty}{c_{s\infty}^3} \quad (4.24)$$

Pertanto il rapporto tra queste due quantità sarà dato da

$$\frac{\dot{M}_f}{\dot{M}_e} = \tilde{\rho}^{\frac{5-3\gamma}{2}} \frac{1}{(1 - \dot{m}_e)^2} \quad (4.25)$$

con $0 \leq \dot{m}_e < 1$, come è stato stabilito nel precedente paragrafo. Chiaramente per $\dot{m}_e = 0$ ci ritroviamo nel caso discusso nel Capitolo 2, cioè senza il feedback radiativo. Mentre per $0 < \dot{m}_e < 1$ il bias può essere espresso come prodotto di due funzioni: $\tilde{\rho}(x_f)^{\frac{5-3\gamma}{2}}$, funzione della distanza che si adotta per stimare il tasso di accrescimento, e $1/(1 - \dot{m}_e)^2$, funzione di \dot{m}_e . Siccome quest'ultimo fattore è sempre > 1 , trascurare l'effetto della pressione di radiazione comporterà necessariamente una sovrastima del tasso di

accrescimento, che sarà tanto più grande quanto più \dot{m}_e si avvicina al valore unitario.

Riportiamo i risultati numerici ottenuti per \dot{m}_e differenti in Figura 4.2. Si vede che \dot{M}_f/\dot{M}_e è tanto maggiore quanto più vicino al BH vengono considerati i dati osservativi, e quanto più \dot{m}_e si avvicina al limite di Eddington.

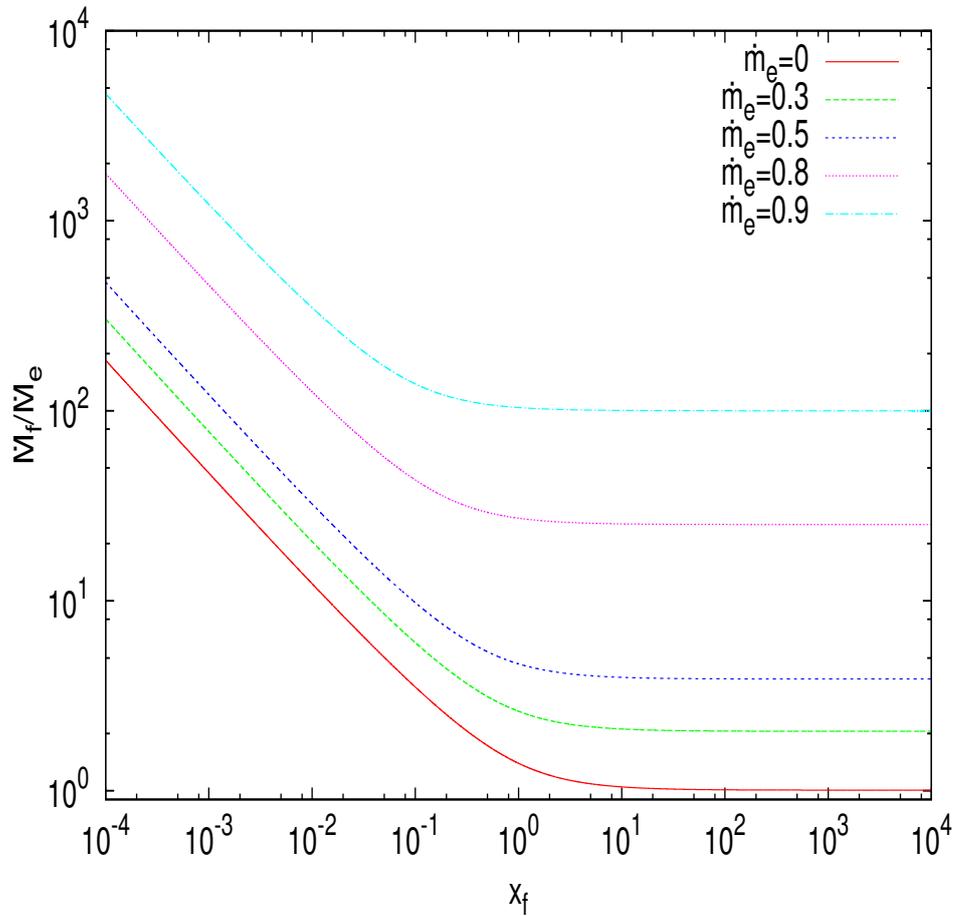


Figura 4.2: Andamento del rapporto \dot{M}_f/\dot{M}_e in funzione della distanza dal buco nero $x_f = r_f/r_B$ al variare di \dot{m}_e .

Capitolo 5

Accrescimento di Bondi con electron scattering in presenza di galassia

Nei capitoli precedenti abbiamo discusso gli effetti della pressione di radiazione e l'effetto che può avere una buca di potenziale esterna nel processo di accrescimento sferico; nel seguito estendiamo la trattazione del problema combinando entrambi gli effetti.

5.1 Luminosità di Eddington in presenza di galassia

Nel Capitolo 4 abbiamo introdotto il concetto di luminosità di Eddington e abbiamo visto che essa può essere determinata, nel caso di una sorgente a simmetria sferica, secondo la definizione (4.5), una volta fissata M_{BH} . Per un modello semplice, che tratta l'accrescimento su un BH isolato, questa grandezza è una costante, e gioca un ruolo discriminante tra la situazione in cui il gas viene spinto verso l'esterno dalla pressione di radiazione ($L > L_{Edd}$) e la situazione in cui il gas accresce sul buco nero centrale ($L < L_{Edd}$). Vediamo ora come varia l'espressione per la luminosità di Eddington nel caso in cui l'accrescimento avviene all'interno di una buca di potenziale prodotta da una galassia.

In caso di una galassia generica la forza totale, di cui risente il gas, sarà data dalla somma di tre termini: un termine dovuto al BH centrale, un termine che descrive la forza gravitazionale esercitata da galassia e un terzo termine che descrive la forza esercitata dalla radiazione sul gas; ossia la forza

totale sarà data da:

$$F_{eff}(r) = -\frac{GM_{BH}}{r^2}\rho(r) - \frac{GM_g(r)}{r^2}\rho(r) + \frac{L\sigma_T}{4\pi cm_p r^2}\rho(r) \quad (5.1)$$

dove $M_g(r)$ è una funzione che descrive la distribuzione di massa della galassia. In questo caso l'espressione per la luminosità di Eddington può essere determinata ponendo uguale a zero la (5.1) e risolvendola per L , per cui ottiene:

$$L_{Edd,g}(r) = \frac{4\pi cm_p GM_{BH}}{\sigma_T} \left(1 + \frac{M_g(r)}{M_{BH}} \right). \quad (5.2)$$

Dunque, la luminosità di Eddington non è più una costante, bensì viene descritta da una funzione che dipende dal modello che si sceglie per la galassia, $M_g(r)$. Tale funzione, essendo positiva e continua, assumerà un massimo e un minimo assoluti; $L_{Edd,g}$ è compreso fra il valore raggiunto al centro L_{Edd} (senza galassia) e il valore raggiunto a distanza infinita dal BH, $(1 + \mathcal{R})L_{Edd}$. Di conseguenza potremo avere tre situazioni differenti:

- per $L > (1 + \mathcal{R})L_{Edd}$ non si ha accrescimento, in quanto nel bilancio delle forze domina il termine della pressione di radiazione, quindi il gas viene spinto fuori dal centro del sistema;
- per $L < L_{Edd}$ domina il termine gravitazionale per cui la materia può accrescere sul BH centrale;
- per $L_{Edd} < L < (1 + \mathcal{R})L_{Edd}$ a distanze differenti dal BH centrale si potranno avere regioni in cui è favorito l'inflow e regioni di outflow; la situazione in questo caso non è più stazionaria, per cui le ipotesi del problema di Bondi non sono soddisfatte.

Assumiamo, come prima, per il profilo di densità della galassia il profilo di Hernquist, per cui la distribuzione di massa può essere scritta come (3.7):

$$M_g(r) = M_g \frac{r^2}{(r + r_g^2)}. \quad (5.3)$$

Utilizzando la notazione adottata nel Capitolo 3, l'equazione (5.2) può essere espressa come

$$L_{Edd,g}(x) = L_{Edd} \left[1 + \frac{\mathcal{R}x^2}{(x + \xi)^2} \right] \quad (5.4)$$

dove sono state utilizzate le definizioni $L_{Edd} = 4\pi cm_p GM_{BH}/\sigma_T$ (4.5), $\mathcal{R} = M_g/M_{BH}$ e $\xi = r_g/r_B$. Si noti che per $\mathcal{R} \rightarrow 0$ $L_{Edd,g} \rightarrow L_{Edd}$, cioè il problema si riduce all'accrescimento di Bondi senza galassia.

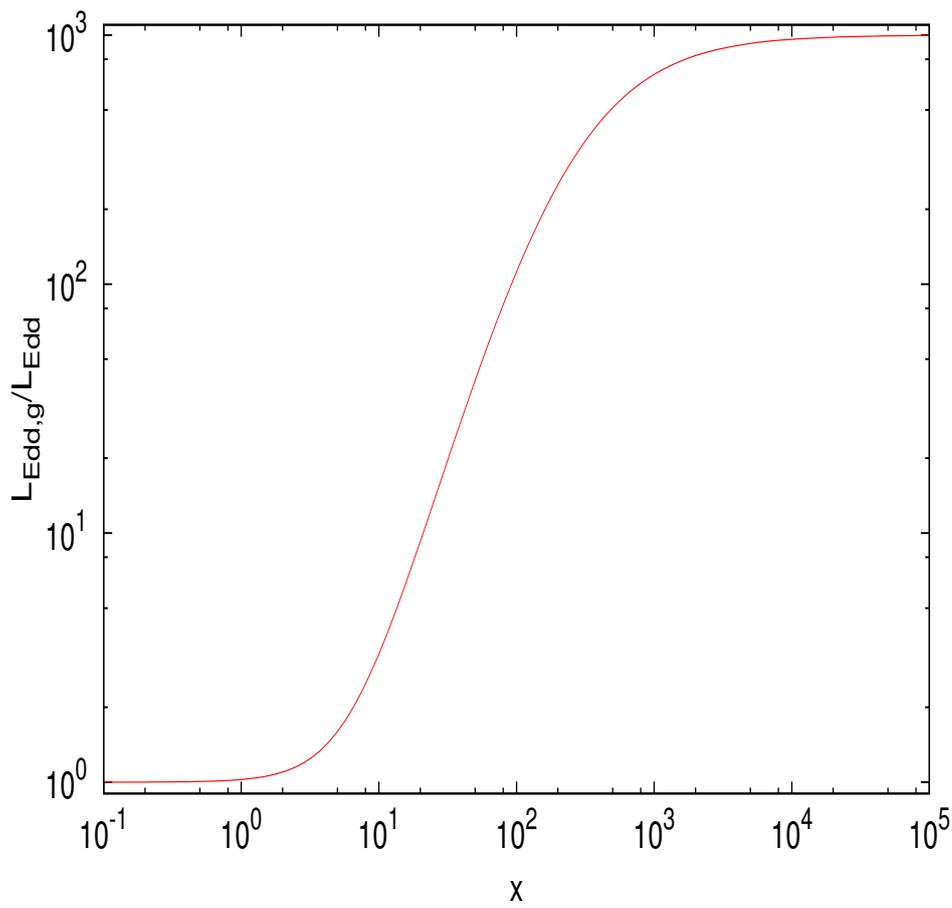


Figura 5.1: Andamento di luminosità di Eddington in presenza della galassia descritta dal modello di Hernquist con $\mathcal{R} = 10^3$ e $\xi = 200$ fissati.

Dal momento che l'accrescimento può avere luogo solo per le luminosità minori del minimo della (5.4), cerchiamo il valore di quest'ultimo. Come si può vedere in Figura 5.1, in presenza di galassia con profilo di densità di Herquist, la funzione $L_{Edd,g}$ assume una forma "a gradino", l'altezza e la posizione del quale dipendono dai parametri \mathcal{R} e ξ descrittivi la galassia. Quanto maggiore è il valore di \mathcal{R} tanto più alto sarà il "gradino", e tanto maggiore è il valore di ξ tanto più lontano dal centro si troverà la sua posizione (e viceversa).

Il minimo della funzione $L_{Edd,g}(x)$ risulta pari al valore della luminosità di Eddington calcolata trascurando il contributo della galassia (4.5), di conseguenza la condizione per l'accrescimento cercata viene determinata dall'espressione

$$L < L_{Edd} = \frac{4\pi GM_{BH}cm_p}{\sigma_T}. \quad (5.5)$$

Pertanto, affinché si verifichi il fenomeno di accrescimento su un BH al centro di una galassia la luminosità prodotta durante il processo non deve superare il limite di Eddington classico. Data la forma dell'espressione (5.2), possiamo dire che tale conclusione è valida per tutti i modelli di galassia con massa finita.

5.2 Equazioni per il modello di Bondi con electron scattering in presenza di galassia

Nel caso di accrescimento di Bondi con electron scattering al centro di una galassia l'aspetto formale delle equazioni diventa il seguente: l'equazione di continuità rimane invariata, quindi come prima avremo

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho(r)v(r) = const \quad \forall r, \quad (5.6)$$

mentre l'equazione del moto per questo problema diventa

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{GM_{BH}}{r^2} \left(1 - \frac{L}{L_{Edd,g}}\right) - \frac{GM_g(r)}{r^2} \quad (5.7)$$

dove per $M_g(r)$ si sceglie il modello di Hernquist (3.7) e al posto di $L_{Edd,g}$ per poter avere l'accrescimento (come visto nel paragrafo precedente) si utilizza L_{Edd} . In notazione adimensionale quest'ultima equazione diventa

$$\left(\frac{\lambda}{mx^2}\right)^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}} \left[\frac{m^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1}\right] = \frac{1}{x} (1 - \dot{m}_t) + \frac{\mathcal{R}}{x + \xi} + \frac{1}{\gamma-1} \quad (5.8)$$

dove abbiamo espresso L attraverso la relazione (4.1) e chiamato \dot{m}_t il tasso di accrescimento del problema di Bondi con electron scattering in presenza di galassia, normalizzato al tasso di accrescimento di Eddington (4.6). Pertanto, definendo ancora una volta $\Lambda = \lambda^{-\frac{2(1-\gamma)}{1+\gamma}}$, si ottiene l'equazione di Bondi adimensionale

$$m^{\frac{2(1-\gamma)}{\gamma+1}} \left(\frac{m^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \right) = \Lambda x^{\frac{4(\gamma-1)}{\gamma+1}} \left[\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{x} (1 - \dot{m}_t) + \frac{\mathcal{R}}{x + \xi} \right] \quad (5.9)$$

Dunque, anche in questo caso è possibile scrivere l'equazione di Bondi in forma adimensionale $g(m) = \Lambda f(x)$, con la funzione $g(m)$ che rimane identica al caso classico, poiché essa esprime le proprietà intrinseche del fluido in accrescimento, mentre la funzione $f(x)$ diventa

$$f(x) = x^{\frac{4(\gamma-1)}{\gamma+1}} \left[\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{x} (1 - \dot{m}_t) + \frac{\mathcal{R}}{x + \xi} \right] \quad (5.10)$$

in cui il secondo termine acquista un fattore correttivo, che tiene conto del feedback radiativo (esattamente come nel Capitolo 4), e compare il termine dovuto al potenziale gravitazionale della galassia (come avviene nel Capitolo 3).

5.3 Soluzione numerica

Come abbiamo visto diverse volte all'interno di questo lavoro di Tesi, risolvere l'equazione di Bondi implica in primo luogo trovare l'autovalore del problema (in questo caso chiamato $\lambda_{cr,t}$), che a sua volta implica la conoscenza del minimo della funzione $f(x)$; nel caso di accrescimento sferico stazionario con pressione di radiazione al centro di una galassia ellittica si tratta, quindi, di trovare la soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^{a-2} (abx + (1 - \dot{m}_t)(a - 1)) + x^a \mathcal{R} \left[\frac{a}{x(x + \xi)} - \frac{1}{(x + \xi)^2} \right] = 0. \quad (5.11)$$

Purtroppo, anche per una galassia semplice come quella di Hernquist, non è possibile determinare un'espressione analitica per il minimo della $f(x)$. Si noti però che per $\mathcal{R} = 0$ si ritorna al caso descritto nel Capitolo 4, quindi $x_{min,t} = x_{min,0}(1 - \dot{m}_t)$; per $\dot{m}_t = 0$ si ritrova il risultato ottenuto nel Capitolo 3 (accrescimento con la galassia e senza electron scattering); mentre quando sia $\mathcal{R} = 0$ che $\dot{m}_t = 0$ si ottiene l'espressione trovata per il problema classico (2.27). Dunque, possiamo procedere con l'analisi del comportamento della $f(x)$ e, di conseguenza, anche del comportamento dell'autovalore del problema di Bondi $\lambda_{cr,t}$ utilizzando l'approccio numerico.

In Figura 5.2 riportiamo l'andamento di x_{min} e di λ_{cr} al variare del parametro \mathcal{R} a ξ , \dot{m}_t e γ fissati per i quattro modelli di Bondi differenti analizzati nella Tesi. Vediamo come sia il contributo della galassia sia l'effetto del feedback radiativo tendono a spostare il minimo della $f(x)$ verso l'origine. Possiamo sottolineare, inoltre, che nell'andamento di $x_{min,t}$ per valori di \mathcal{R} non troppo grandi domina l'effetto di electron scattering, mentre man mano che \mathcal{R} aumenta l'effetto dovuto alla presenza della galassia diventa sempre più importante. Per quanto riguarda l'autovalore λ_{cr} dalla Figura 5.2 si può dedurre che aggiungere alle equazioni la forza esercitata della radiazione tende ad abbassare il valore di λ_{cr} (infatti come visto nel capitolo precedente il tasso di accrescimento in presenza della radiazione si riduce), invece la buca di potenziale della galassia produce l'effetto opposto. Complessivamente si ha che per $\mathcal{R} < 10^2$ domina l'electron scattering, per $10^2 < \mathcal{R} < 10^3$ entrambi i contributi sono importanti, infine per $\mathcal{R} > 10^3$ il contributo della galassia è preponderante.

In Figura 5.3 riportiamo l'andamento di x_{min} e di λ_{cr} al variare del parametro ξ per \mathcal{R} , \dot{m}_t e γ fissi. Come visto nel Capitolo 3, aumentare tale parametro significa aumentare la dimensione della galassia, quindi per M_g fissata la galassia diventa più "diluita", per cui il suo contributo gravitazionale al problema risulta meno rilevante.

Riguardo l'effetto dovuto alla variazione del rate di accrescimento sull'andamento di $x_{min,t}$ e $\lambda_{cr,t}$ il risultato è rappresentato in Figura 5.4. Si può vedere come per i tassi di accrescimento piccoli gli andamenti di $x_{min,t}$ e $\lambda_{cr,t}$ differiscono poco da quelli ottenuti per il problema di Bondi con la galassia, mentre al crescere di \dot{m}_t valori assunti da entrambe le quantità tendono a zero, dal momento che il processo di accrescimento si ferma per i valori di \dot{m}_t prossimi al limite di Eddington.

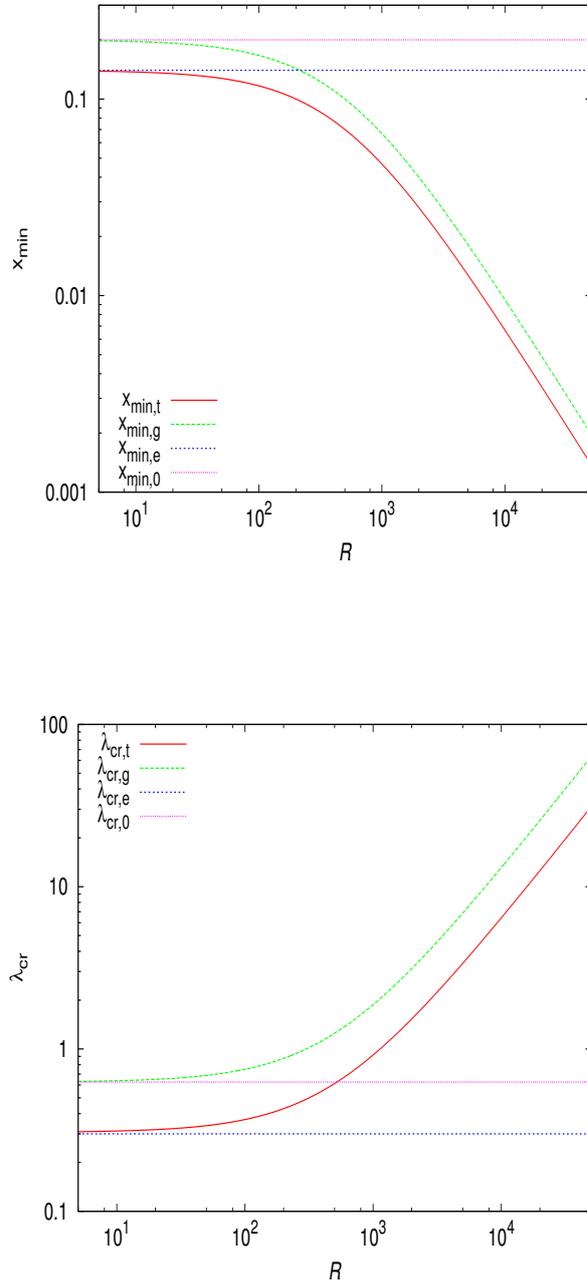


Figura 5.2: Andamenti di x_{min} e λ_{cr} del problema di Bondi classico ($x_{min,0}, \lambda_{cr,0}$), del problema di Bondi con la galassia di Hernquist ($x_{min,g}, \lambda_{cr,g}$), del problema di Bondi con electron scattering ($x_{min,e}, \lambda_{cr,e}$) e del problema che comprende entrambi gli effetti ($x_{min,g}, \lambda_{cr,t}$) al variare del parametro $\mathcal{R} = M_g/M_{BH}$ con $\xi = 200$, $\dot{m}_t = 0.3$ e $\gamma = 1.4$ fissati.

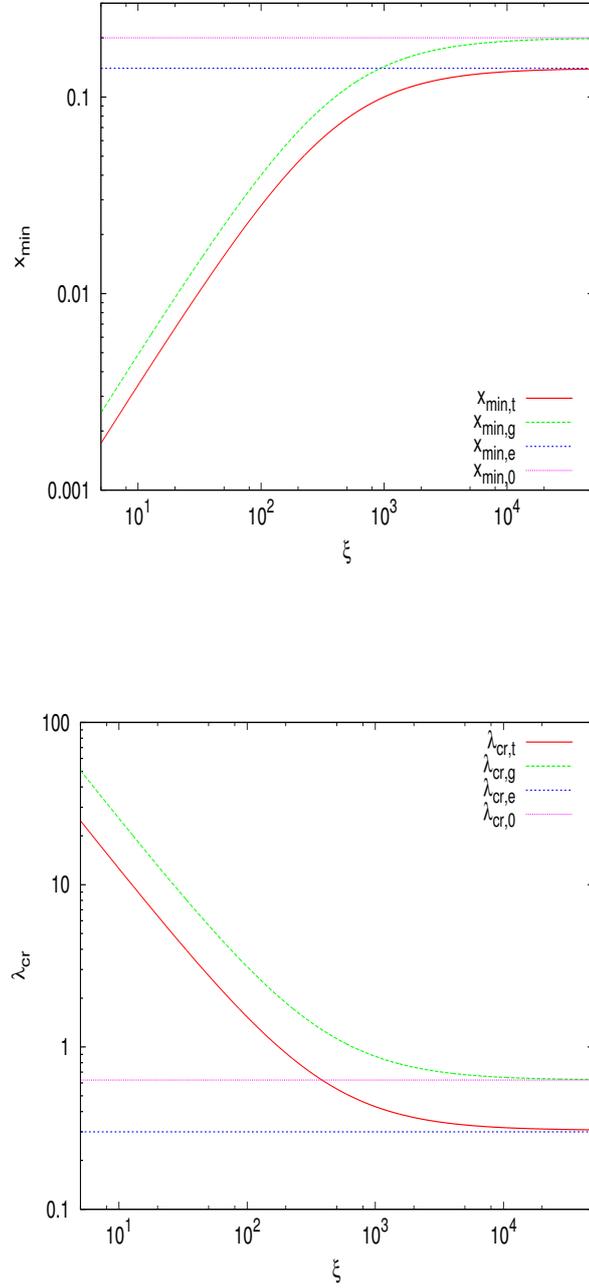


Figura 5.3: Andamenti di x_{min} e λ_{cr} del problema di Bondi classico ($x_{min,0}, \lambda_{cr,0}$), del problema di Bondi con la galassia di Hernquist ($x_{min,g}, \lambda_{cr,g}$), del problema di Bondi con electron scattering ($x_{min,e}, \lambda_{cr,e}$) e del problema che comprende entrambi gli effetti ($x_{min,t}, \lambda_{cr,t}$) al variare del parametro $\xi = r_g/r_B$ con $\mathcal{R} = 10^3$, $\dot{m}_t = 0.3$ e $\gamma = 1.4$ fissati.

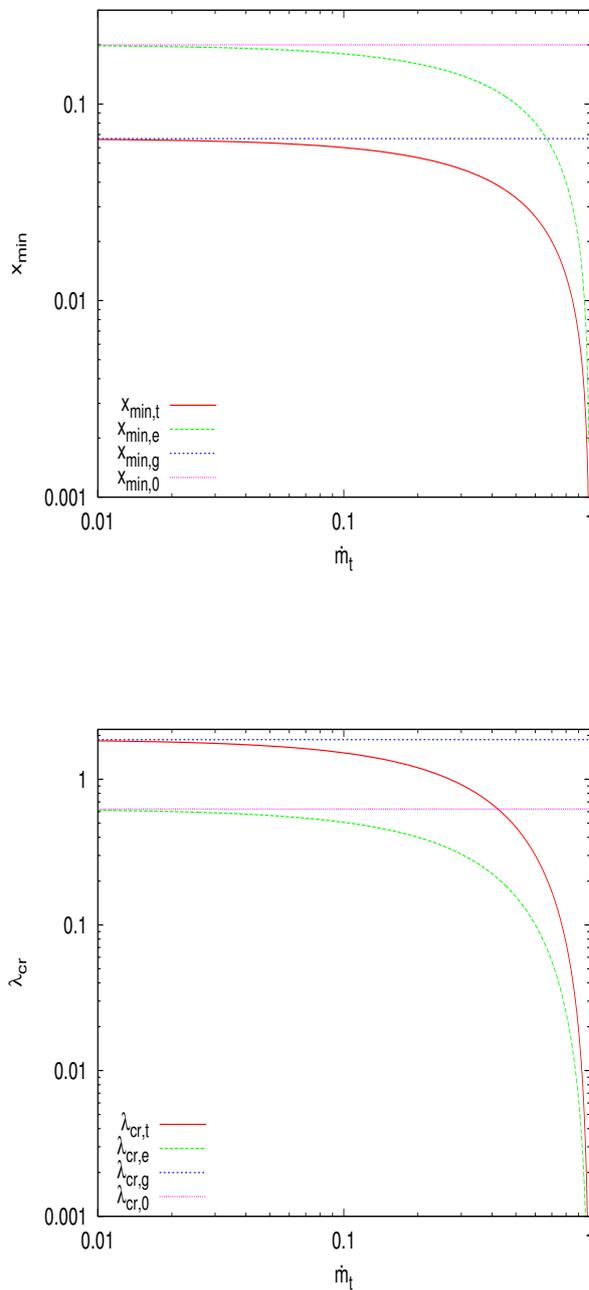


Figura 5.4: Andamenti di x_{min} e λ_{cr} del problema di Bondi classico ($x_{min,0}, \lambda_{cr,0}$), del problema di Bondi con la galassia di Hernquist ($x_{min,g}, \lambda_{cr,g}$), del problema di Bondi con electron scattering ($x_{min,e}, \lambda_{cr,e}$) e del problema che comprende entrambi gli effetti ($x_{min,t}, \lambda_{cr,t}$) al variare del parametro $\dot{m}_t = \dot{M}_t/\dot{M}_{Edd}$ con $\xi = 200$, $\mathcal{R} = 10^3$ e $\gamma = 1.4$ fissati.

5.4 Tasso di accrescimento

In maniera analoga a quanto fatto in precedenza, vogliamo trovare una relazione che confronti il tasso di accrescimento del problema di Bondi con feedback radiativo in presenza di galassia con il tasso di accrescimento del problema classico; cominciamo con elencare alcune definizioni che andremo ad utilizzare.

Nel Capitolo 2 abbiamo definito il tasso di accrescimento del problema di Bondi classico normalizzato al tasso di accrescimento di Eddington ($\dot{M}_{Edd} = L_{Edd}\varepsilon c^2$) come

$$\dot{m}_B \equiv \frac{\dot{M}_B}{\dot{M}_{Edd}} \quad \text{con} \quad \dot{M}_B = \lambda_{cr,0}(\gamma) \frac{4\pi G^2 M_{BH}^2 \rho_\infty}{c_{s\infty}^3} \quad (5.12)$$

dove $\lambda_{cr,0}$ è l'autovalore critico del problema di Bondi definito dalla (2.29). Si noti che in generale \dot{m}_B può assumere tutti i valori nel intervallo $[0, \infty)$, poiché nulla vieta nel caso classico di superare il limite di Eddington. Pertanto \dot{m}_B diventa una grandezza discriminante tra il regime di accrescimento sub-Eddington ($\dot{m}_B < 1$) e il regime super-Eddington ($\dot{m}_B > 1$).

In maniera analoga abbiamo definito anche il tasso di accrescimento del problema di Bondi in presenza di galassia:

$$\dot{m}_g \equiv \frac{\dot{M}_g}{\dot{M}_{Edd}} \quad \text{con} \quad \dot{M}_g = \lambda_{cr,g}(\gamma, \mathcal{R}, \xi) \frac{4\pi G^2 M_{BH}^2 \rho_\infty}{c_{s\infty}^3} \quad (5.13)$$

dove questa volta l'autovalore del problema, $\lambda_{cr,g}(\gamma, \mathcal{R}, \xi)$, non ha un'espressione analitica. Dal confronto tra le definizioni (5.12) e (5.13) si trova la seguente relazione che lega le due grandezze \dot{m}_B ed \dot{m}_g

$$\dot{m}_g = \theta(\gamma, \mathcal{R}, \xi) \dot{m}_B \quad (5.14)$$

dove $\theta(\gamma, \mathcal{R}, \xi) = \frac{\lambda_{cr,g}(\gamma, \mathcal{R}, \xi)}{\lambda_{cr,0}(\gamma)}$, cioè una costante che può essere determinata numericamente una volta fissati i parametri che descrivono la galassia e l'indice politropico γ del gas in accrescimento. Anche \dot{m}_g può assumere tutti i valori nel intervallo $[0, \infty)$, dal momento che nel problema di Bondi con la galassia non esiste alcun tipo di processo che contrasti l'accrescimento.

Inoltre, abbiamo definito anche il tasso di accrescimento del problema di Bondi con l'electron scattering come

$$\dot{m}_e \equiv \frac{\dot{M}_e}{\dot{M}_{Edd}} \quad \text{con} \quad \dot{M}_e = \lambda_{cr,e}(\gamma, \dot{m}_e) \frac{4\pi G^2 M_{BH}^2 \rho_\infty}{c_{s\infty}^3} \quad (5.15)$$

che risulta legato al tasso di accrescimento del problema classico, come visto nel Capitolo 4, attraverso l'equazione:

$$\dot{m}_e = (1 - \dot{m}_e)^2 \dot{m}_B. \quad (5.16)$$

La soluzione di accrescimento in quest'ultimo caso, rappresentata in Figura 4.1 dalla curva verde, può assumere valori nell'intervallo $[0, 1)$, dal momento che il tasso di accrescimento non può essere più grande del limite di Eddington.

Infine, per il problema di accrescimento sferico stazionario con electron scattering e in presenza di galassia, possiamo definire il tasso di accrescimento come

$$\dot{m}_t \equiv \frac{\dot{M}_t}{\dot{M}_{Edd}} \quad \text{con} \quad \dot{M}_t = \lambda_{cr,t}(\gamma, \mathcal{R}, \xi, \dot{m}_t) \frac{4\pi G^2 M_{BH}^2 \rho_\infty}{c_{s\infty}^3} \quad (5.17)$$

che possiamo legare a \dot{m}_B moltiplicando e dividendo \dot{M}_t per $\lambda_{cr,0}$. Così facendo si ottiene

$$\dot{m}_t = \Theta(\gamma, \mathcal{R}, \xi, \dot{m}_t) \dot{m}_B \quad (5.18)$$

dove $\Theta = \frac{\lambda_{cr,t}(\gamma, \mathcal{R}, \xi, \dot{m}_t)}{\lambda_{cr,0}(\gamma)}$ è una funzione complicata, che può essere determinata numericamente (ad esempio utilizzando come metodo risolutivo dell'equazione quello della bisezione). Pertanto, nelle Figure 5.5, 5.6, 5.7 riportiamo l'andamento di \dot{m}_t al variare dei parametri che descrivono il sistema: γ , \mathcal{R} e ξ . Innanzitutto, possiamo notare come per $\mathcal{R} = 0$ si ritorna alla stessa legge trovata per il problema di Bondi con feedback radiativo, espressa dalla (5.16). Inoltre, vediamo che il contributo del potenziale gravitazionale della galassia è influente soprattutto in regime estremamente sub-Eddington ($\dot{m}_B \ll 1$): tale contributo diventa tanto più grande quanto più la galassia è massiccia, a parità di dimensione, oppure quanto più la galassia è piccola a parità di massa.

Si può dimostrare che la funzione Θ può essere fattorizzata nella seguente maniera

$$\Theta(\gamma, \mathcal{R}, \xi, \dot{m}_t) = (1 - \dot{m}_t)^2 \theta'(\gamma, \mathcal{R}, \xi, \dot{m}_t). \quad (5.19)$$

dove per $\dot{m}_t \rightarrow 0$ vale $\theta' \rightarrow \theta$; quindi per piccoli accrescimenti è ragionevole aspettare che Θ sia fattorizzabile in due termini, uno contenente il contributo dovuto soltanto alla radiazione, e un altro dovuto soltanto alla galassia. Dunque, per \dot{m}_t piccoli la relazione (5.18) diventa

$$\dot{m}_t \simeq (1 - \dot{m}_t)^2 \theta(\gamma, \mathcal{R}, \xi) \dot{m}_B. \quad (5.20)$$

Abbiamo verificato, inoltre, che l'espressione (5.20) approssima molto bene i valori che si ottengono risolvendo la (5.18) per assegnati valori di \dot{m}_B , risolvendo le equazioni (5.18) e (5.20) con utilizzo del metodo della bisezione.

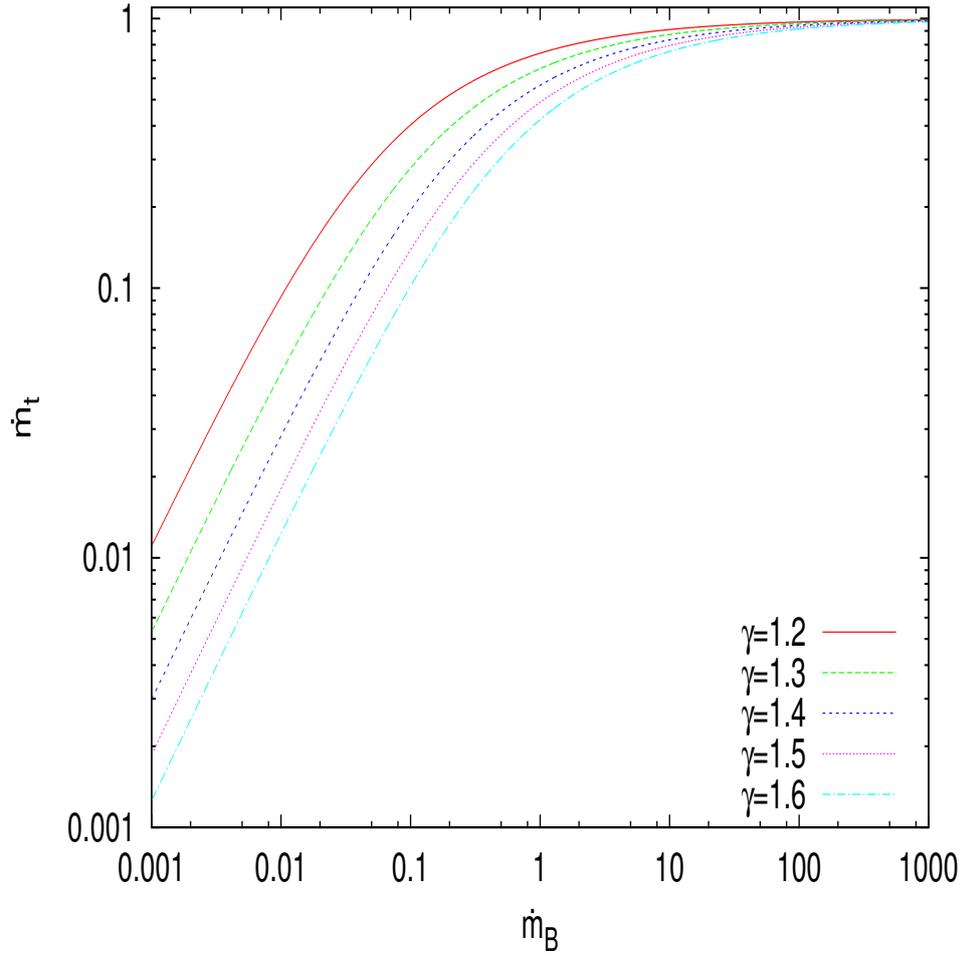


Figura 5.5: Andamento del tasso di accrescimento vero normalizzato al tasso di accrescimento di Eddington $\dot{m}_t = \dot{M}_t/\dot{M}_{Edd}$ in funzione del tasso di accrescimento del problema classico $\dot{m}_B = \dot{M}_B/\dot{M}_{Edd}$ al variare di γ con massa e dimensione della galassia fissati: $\mathcal{R} = 10^3$ e $\xi = 200$.

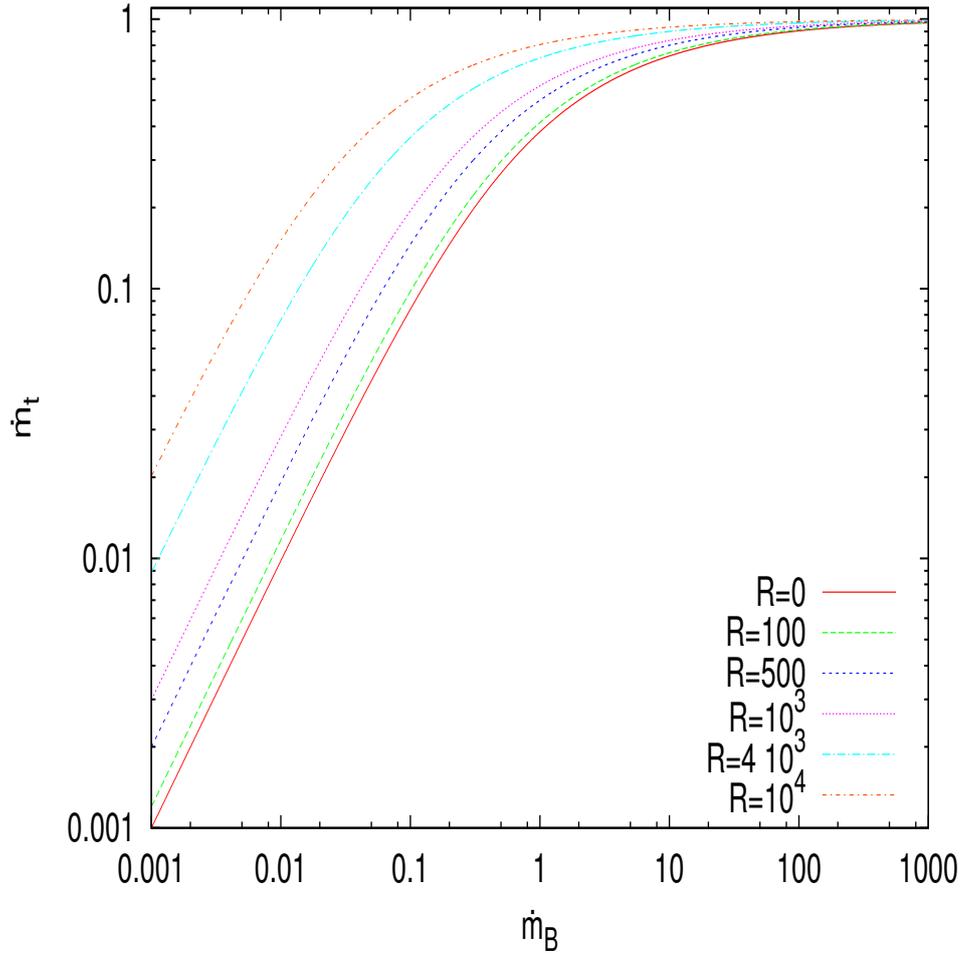


Figura 5.6: Andamento del tasso di accrescimento vero normalizzato al tasso di accrescimento di Eddington $\dot{m}_t = \dot{M}_t / \dot{M}_{Edd}$ in funzione del tasso di accrescimento del problema classico $\dot{m}_B = \dot{M}_B / \dot{M}_{Edd}$ al variare della massa della galassia $\mathcal{R} = M_g / M_{BH}$, con $\gamma = 1.4$ e $\xi = 200$.

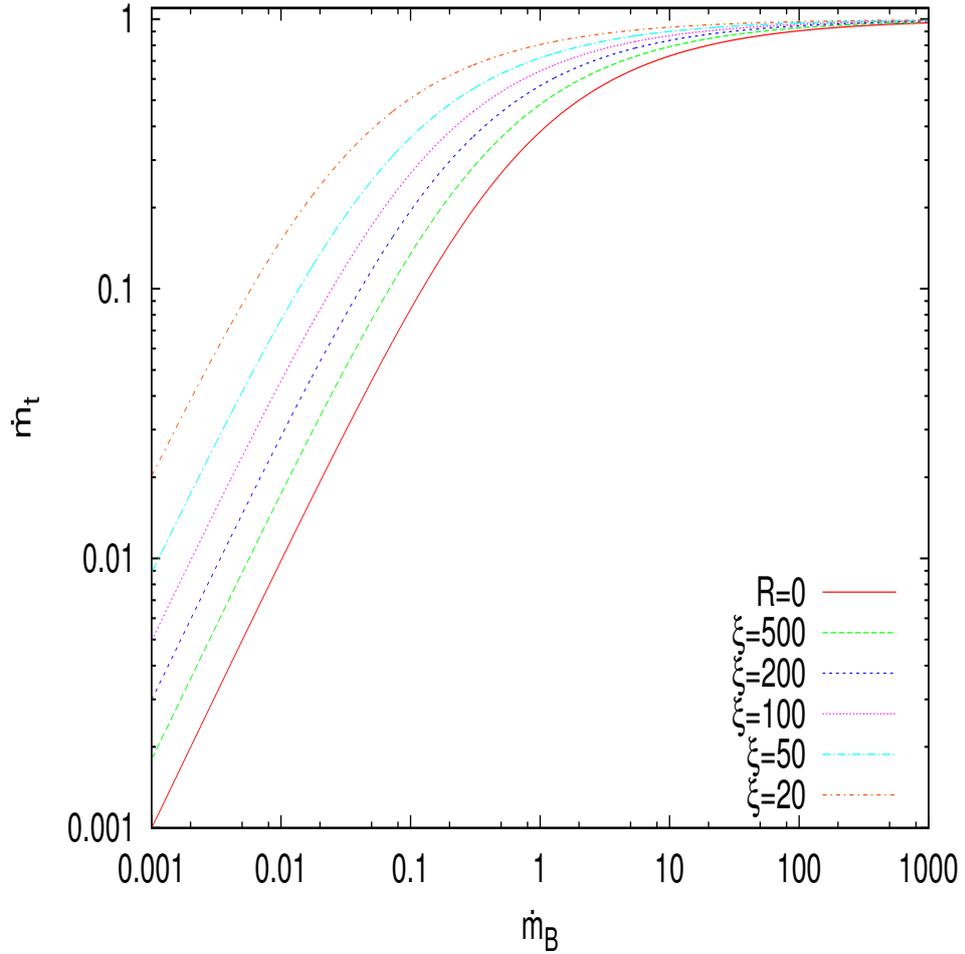


Figura 5.7: Andamento del tasso di accrescimento vero normalizzato al tasso di accrescimento di Eddington $\dot{m}_t = \dot{M}_t/\dot{M}_{Edd}$ in funzione del tasso di accrescimento del problema classico \dot{m}_B al variare della dimensione della galassia $\xi = r_g/r_B$, con $\mathcal{R} = 10^3$ e $\gamma = 1.4$.

Infatti, dal punto di vista analitico è possibile dimostrare la (5.20) rappresenta un'approssimazione all'ordine zero della (5.18); essa risulta una buona approssimazione dalla soluzione vera poiché i termini dell'ordine superiore sono molto piccoli rispetto al termine di ordine zero. Pertanto, possiamo concludere che l'espressione (5.20) può essere utilizzata ai fini pratici, tenendo in conto che essa rappresenta un'approssimazione per un caso specifico, ossia per accrescimento sferico stazionario di un gas otticamente sottile su un SMBH, che si trova al centro di una galassia con profilo di densità descrivibile con modello di Hernquist.

5.5 Bias

Per tutti i modelli di accrescimento trattati all'interno di questo lavoro di Tesi abbiamo esaminato l'andamento del rapporto tra il tasso di accrescimento "di fiducia", \dot{M}_f , ottenuto utilizzando il modello di Bondi standard con le condizioni al contorno diverse dall'infinito, e il tasso di accrescimento vero per il modello considerato, \dot{M}_t . Nel caso del modello di Bondi con electron scattering in presenza di galassia di Hernquist tale rapporto diventa

$$\frac{\dot{M}_f}{\dot{M}_t} = \Theta^{-1} \tilde{\rho}(x_f)^{\frac{5-3\gamma}{2}} \quad (5.21)$$

in cui $\Theta = \frac{\lambda_{cr,t}}{\lambda_{cr,0}}$ è la funzione definita e studiata nel paragrafo precedente.

In Figura 5.8 riportiamo l'andamento descritto dalla (5.21). Vediamo come per tutti i valori $\dot{m}_t \neq 0$ il tasso di accrescimento viene sovrastimato indipendentemente dalla distanza a cui si considerano le condizioni al contorno per il problema. La sovrastima risulta tanto più alta quanto più alto è il tasso di accrescimento \dot{m}_t .

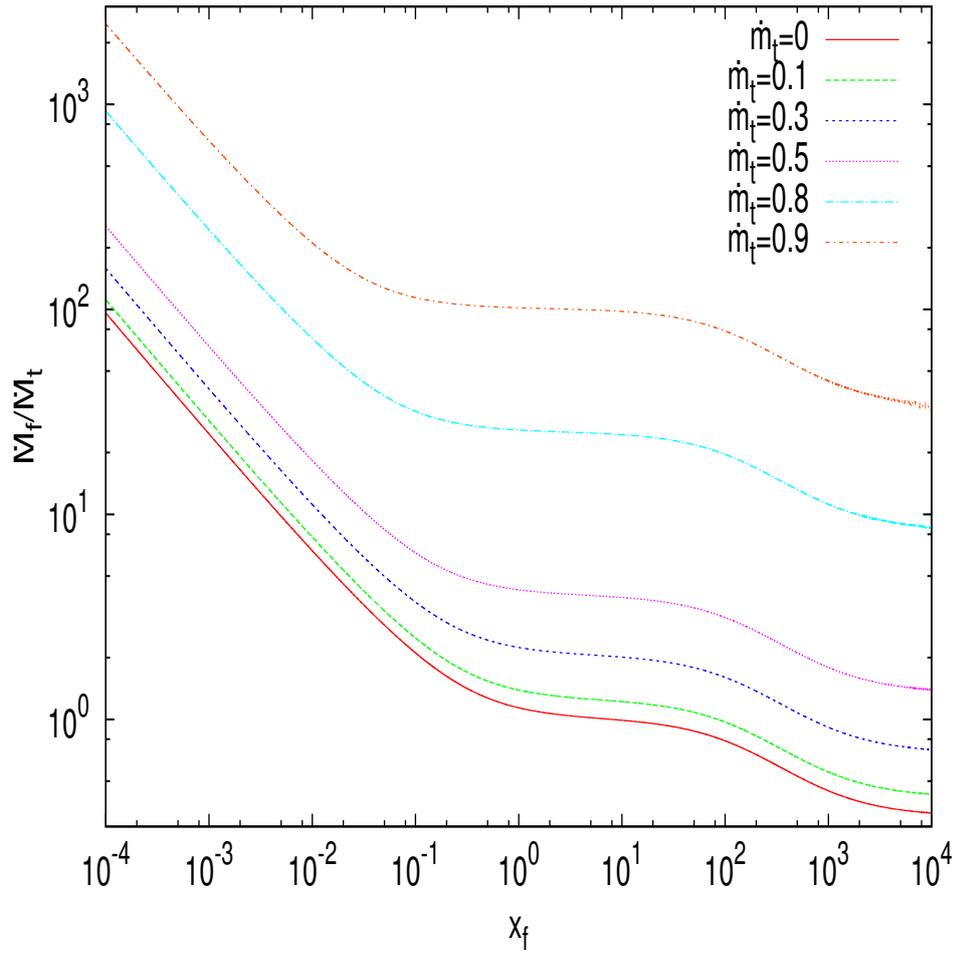


Figura 5.8: Andamento del rapporto \dot{M}_f/\dot{M}_t in funzione della distanza che si usa per stimare il tasso di accrescimento $x_f = r_f/r_B$ per regimi di accrescimento differenti.

Capitolo 6

Discussione e Conclusioni

In questo lavoro di Tesi abbiamo notevolmente esteso il campo di applicazioni della Teoria di Bondi, presentando le soluzioni di quattro problemi di accrescimento sferico stazionario differenti:

- soluzione del problema di Bondi classico;
- soluzione del problema di Bondi con galassia;
- soluzione del problema di Bondi con electron scattering;
- soluzione del problema di Bondi con electron scattering e in presenza di galassia.

Abbiamo mostrato che in tutti quattro i casi il problema può essere scritto in forma

$$g(m) = \Lambda f(x) \tag{6.1}$$

dove $g(m)$ è una funzione che descrive le proprietà intrinseche del gas in accrescimento e, pertanto, rimane la stessa in tutti i casi, mentre $f(x)$ è tipica del problema in quanto dipende dal potenziale gravitazionale del sistema. Come noto, anche nel caso più semplice, del problema di Bondi classico, tale equazione è trascendente e deve essere risolta numericamente. In tutti i casi l'equazione (6.1) ha diverse soluzioni: due per ogni valore di Λ . In generale nei problemi di accrescimento si studiano per semplicità le soluzioni con $\Lambda = \Lambda_{cr}$, ove l'autovalore critico è:

$$\Lambda_{cr} = \frac{g_{min}}{f_{min}}. \tag{6.2}$$

Per ricostruire il procedimento che ha portato alla soluzione trovata da Bondi (1952), e la verifica del funzionamento del codice numerico scritto

per la soluzione dell'equazione (6.1), in primo luogo abbiamo riproposto il problema di accrescimento sferico stazionario su BH isolato immerso in una distribuzione di gas infinita. In questo caso il tasso di accrescimento può essere stimato secondo la relazione:

$$\dot{M}_B = 4\pi G^2 M_{BH}^2 \lambda_{cr,0} \frac{\rho_\infty}{c_{s\infty}^3} \quad (6.3)$$

dove $\lambda_{cr,0}$ è l'autovalore del problema, che in questo caso dipende soltanto dall'indice politropico γ , mentre ρ_∞ e $c_{s\infty}$ rappresentano i valori di densità e velocità del suono del fluido all'infinito¹, ossia ad una distanza a cui il gas non risente più dell'effetto gravitazionale esercitato dal BH centrale. Nella pratica, però, non è possibile avere ρ_∞ e $c_{s\infty}$ nel senso stretto, quindi viene utilizzata l'espressione:

$$\dot{M}_f = 4\pi G^2 M_{BH}^2 \lambda_{cr,0} \frac{\rho_f}{c_{sf}^3} \quad (6.4)$$

dove con ρ_f e c_{sf} ² abbiamo chiamato i valori della densità e della velocità del suono corrispondenti ad una distanza dal buco nero a cui si riferiscono i dati, indicata con r_f . Il fatto che $\rho_\infty \neq \rho_f$ e $c_{s\infty} \neq c_{sf}$ determina un "bias" nella stima del tasso di accrescimento, che può essere valutato studiando come varia il rapporto \dot{M}_f/\dot{M}_B a raggi differenti. Nel caso del problema standard abbiamo trovato che tale rapporto dipende soltanto dall'indice politropico γ , ossia dal tipo di fluido in accrescimento, e risulta tanto più grande (quindi il tasso di accrescimento viene tanto più sovrastimato) quanto più vicino al buco nero vengono considerati ρ_f e c_{sf} . Inoltre, abbiamo visto che a parità di r_f i fluidi con γ più basso sono più freddi (Figura 2.6), di conseguenza il tasso di accrescimento secondo la (6.4) risulta più alto.

Dato che l'obiettivo di questo lavoro era quello di studiare l'accrescimento di Bondi per i buchi neri al centro di galassie, abbiamo rivisitato la trattazione del problema aggiungendo alle equazioni il potenziale gravitazionale prodotto da una galassia che gode di simmetria sferica. A tale scopo abbiamo scelto per semplicità il profilo di Hernquist, il quale fornisce una descrizione abbastanza accurata di un profilo di densità che riproduce distribuzione di luminosità rappresentata dalla legge di de Vaucouleurs (3.5), caratteristica delle galassie ellittiche e sferoidali. Abbiamo visto come il nuovo termine nell'equazione di Bondi (3.10), dovuto al potenziale gravitazionale della galassia, sposta il punto sonico verso l'origine del sistema,

¹Si noti che la temperatura del gas all'infinito può essere utilizzata in maniera equivalente alla velocità del suono dal momento che quest'ultima può essere espressa come

$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{k_B T}{\mu m_p}}$$

²dove con "f" si intende "fiducial"

di conseguenza aumentando il valore del parametro λ_{cr} (che rappresenta il rate di accrescimento adimensionale e può essere determinato dalla (2.19)) rispetto al problema di accrescimento precedente. Pertanto, in presenza del potenziale gravitazionale di una galassia il tasso di accrescimento assume l'espressione

$$\dot{M}_g = 4\pi G^2 M_{BH}^2 \lambda_{cr,g}(\gamma, \mathcal{R}, \xi) \frac{\rho_\infty}{c_{s,\infty}^3}. \quad (6.5)$$

L'unica differenza rispetto al caso classico è dovuta a $\lambda_{cr,g}(\gamma, \mathcal{R}, \xi)$, che diventa una funzione più complicata di $\lambda_{cr,0}$, per cui non è più possibile determinarne un'espressione analitica. Pertanto, in questa Tesi si è calcolato $\lambda_{cr,g}$ numericamente.

Dal confronto tra il rate di accrescimento del problema classico, \dot{M}_B , e il rate di accrescimento del problema con la galassia, \dot{M}_g , si trova che le due grandezze sono legate da una relazione semplice (rappresentata in Figura 6.1 in verde):

$$\dot{m}_g = \theta(\gamma, \mathcal{R}, \xi) \dot{m}_B \quad (6.6)$$

dove \dot{m}_g e \dot{m}_B rappresentano i tassi di accrescimento normalizzati al tasso di accrescimento di Eddington (4.6). Il coefficiente $\theta = \frac{\lambda_{cr,g}}{\lambda_{cr,0}}$ può essere determinato numericamente una volta fissati i parametri \mathcal{R} e ξ , che descrivono la galassia.

Nel Capitolo 4 abbiamo visto che in regime otticamente sottile, quando nell'interazione tra la radiazione e la materia domina il processo di electron scattering, è possibile estendere la trattazione matematica del problema di Bondi in maniera semplice, prendendo in considerazione gli effetti dovuti alla radiazione. Questo è possibile perché in un sistema a simmetria sferica la forza esercitata dalla pressione di radiazione segue l'andamento $1/r^2$, che comporta una riduzione della forza gravitazionale di un fattore $(1 - \dot{M}_e/\dot{M}_{Edd})$ uguale a tutti i raggi. Conseguentemente anche il tasso di accrescimento si riduce e, in caso di accrescimento con electron scattering, diventa:

$$\dot{M}_e = \left(1 - \frac{\dot{M}_e}{\dot{M}_{Edd}}\right)^2 \dot{M}_B. \quad (6.7)$$

Normalizzando quest'ultima al rate di accrescimento di Eddington si ottiene

$$\dot{m}_e = (1 - \dot{m}_e)^2 \dot{m}_B, \quad (6.8)$$

ossia un'equazione di secondo grado che ammette due soluzioni: una di vento e una di accrescimento. Riportiamo soluzione di accrescimento in Figura 6.1 (in blu). Dalla figura si vede come \dot{m}_e non supererà mai il valore unitario. Questo implica che in presenza di radiazione il rate di accrescimento non può

superare il limite di Eddington. Inoltre, essendo il fattore $(1 - \dot{m}_e) < 1$, includendo l'electron scattering nel processo di accrescimento, la quantità di materia che cade sul buco nero nell'unità di tempo diminuisce rispetto al caso classico. Pertanto la sovrastima del tasso di accrescimento, determinata dall'utilizzo del modello di Bondi classico con le condizioni al contorno diversi da quelli all'infinito, cresce all'aumentare di \dot{m}_e .

Infine, abbiamo risolto il problema di Bondi con electron scattering in presenza di galassia. In tal caso il tasso di accrescimento diventa

$$\dot{M}_t = 4\pi G^2 M_{BH}^2 \lambda_{cr,t}(\gamma, \mathcal{R}, \xi, \dot{m}_t) \frac{\rho_\infty}{c_{s,\infty}^3} \quad (6.9)$$

in cui $\lambda_{cr,t}$ non ha un'espressione analitica, anche per un modello di galassia semplice come quello di Hernquist, e, dunque, deve essere determinato numericamente. Inoltre abbiamo mostrato che \dot{M}_t normalizzato al tasso di accrescimento di Eddington può essere espresso come

$$\dot{m}_t = \Theta(\gamma, \mathcal{R}, \xi, \dot{m}_t) \dot{m}_B \quad (6.10)$$

dove Θ è una funzione complicata definita come rapporto tra l'autovalore critico del problema di Bondi con l'electron scattering in presenza di galassia e l'autovalore del problema classico, ossia

$$\Theta(\gamma, \mathcal{R}, \xi, \dot{m}_t) = \frac{\lambda_{cr,t}(\gamma, \mathcal{R}, \xi, \dot{m}_t)}{\lambda_{cr,0}(\gamma)}. \quad (6.11)$$

L'andamento di \dot{m}_t è rappresentato in Figura 6.1 dalla curva rossa; come si vede dalla figura, \dot{m}_t è descritto da una funzione, che rimane compresa tra \dot{m}_e e \dot{m}_g , ossia:

$$\dot{m}_e \leq \dot{m}_t \leq \dot{m}_g \quad \forall \dot{m}_B.$$

In particolare, per tassi di accrescimento molto piccoli, $\dot{m}_t \approx \dot{m}_g$, mentre per tassi di accrescimento prossimi al limite di Eddington $\dot{m}_t \approx \dot{m}_e$. Inoltre, abbiamo visto che la (6.10) può essere approssimata come

$$\dot{m}_t \approx (1 - \dot{m}_t)^2 \theta(\gamma, \mathcal{R}, \xi) \dot{m}_B \quad (6.12)$$

ovvero come sia possibile scindere in due fattori separati l'effetto della galassia e l'effetto della radiazione. Infatti, uno studio numerico ha mostrato un buon accordo tra la (6.10) e la sua approssimazione (6.12). Dal punto di vista analitico, invece, è possibile dimostrare che la (6.12) è vera per $\dot{m}_t \ll 1$, mentre per \dot{m}_t più grandi la fattorizzazione (6.12) rappresenta soltanto un'approssimazione all'ordine zero della (6.10).

Analizziamo ora alcune applicazioni interessanti per i risultati ottenuti in questo lavoro di Tesi.

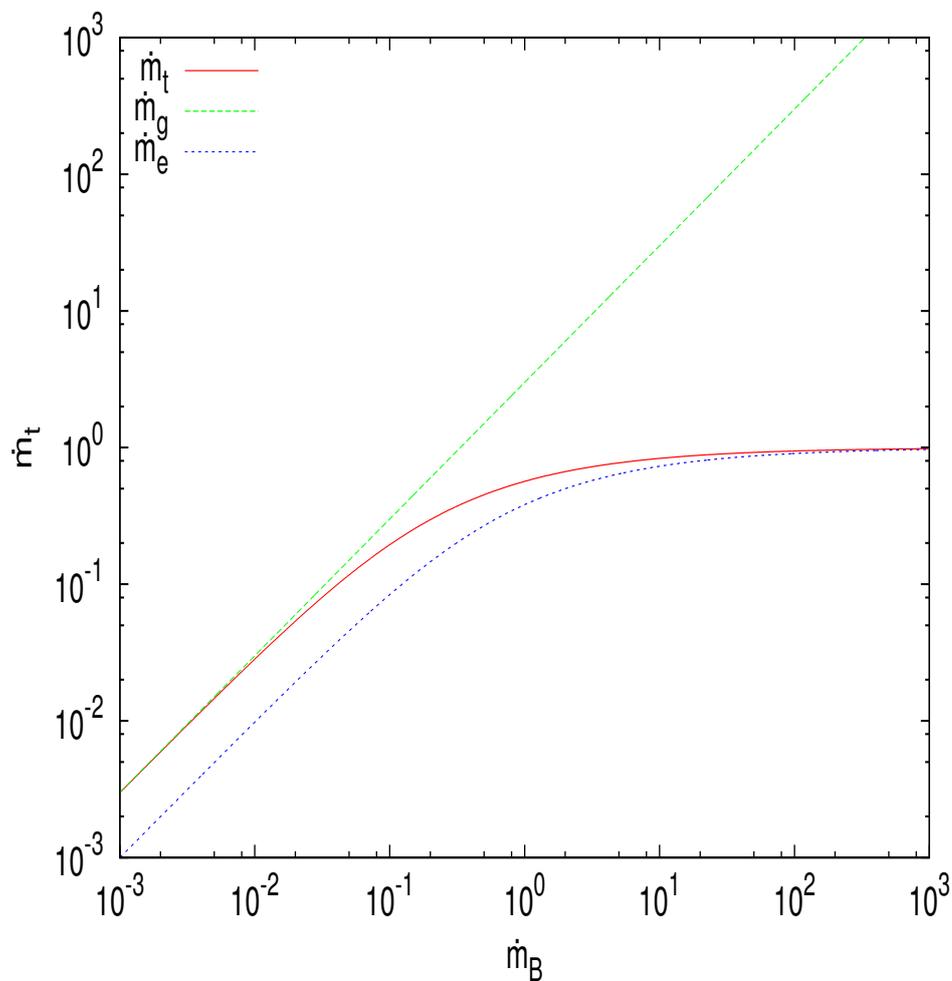


Figura 6.1: Legame tra il tasso di accrescimento del modello di Bondi classico \dot{m}_B e il tasso di accrescimento del modello di Bondi con la galassia di Hernquist \dot{m}_g (curva tratteggiata verde), il tasso di accrescimento del modello di Bondi con electron scattering \dot{m}_e (curva tratteggiata blu) e il tasso di accrescimento calcolato secondo il modello di Bondi con electron scattering e la galassia di Hernquist \dot{m}_t (curva rossa continua) con $\gamma = 1.4$, $\mathcal{R} = 10^3$ e $\xi = 200$.

6.0.1 Il problema della sottoluminosità

Nel capitolo iniziale abbiamo introdotto il cosiddetto problema della sottoluminosità, che nasce dal fatto che alcune galassie dell'universo locale risultano sistematicamente meno luminose rispetto ad una luminosità attesa secondo l'espressione:

$$L = \varepsilon \dot{M} c^2. \quad (6.13)$$

Le cause all'origine di questo problema possono essere molteplici: tasso di accrescimento sovrastimato, efficienza radiativa più bassa del valore $\varepsilon = 0.1$ generalmente assunto nella (6.13), esistenza di cicli di attività, ecc (Pellegrini 2005). All'inizio di questo lavoro di Tesi ci siamo proposti di esplorare un'eventuale soluzione del problema in un errato utilizzo del modello di Bondi classico, e la possibilità di una soluzione nell'utilizzo del modello di Bondi che comprende il feedback radiativo e il potenziale gravitazionale della galassia.

Il problema è stato investigato tramite l'analisi del rapporto tra il tasso di accrescimento stimato, \dot{M}_f , e quello predetto teoricamente dal modello con electron scattering in presenza di galassia, \dot{M}_t :

$$\frac{\dot{M}_f}{\dot{M}_t} = \Theta^{-1} \tilde{\rho}(x_f)^{\frac{5-3\gamma}{2}} \quad (6.14)$$

dove con Θ abbiamo definito la funzione $\Theta(\gamma, \mathcal{R}, \xi, \dot{m}_t) = \frac{\lambda_{cr,t}}{\lambda_{cr,0}}$. Utilizzando l'approssimazione (6.12), quest'ultima equazione può essere scritta come:

$$\frac{\dot{M}_f}{\dot{M}_t} \approx \tilde{\rho}(x_f)^{\frac{5-3\gamma}{2}} (1 - \dot{m}_t)^{-2} \theta^{-1}. \quad (6.15)$$

Pertanto, il "bias", definito dal rapporto (6.14), può essere fattorizzato in contributi dovuti a cause differenti. Innanzitutto, il termine $\tilde{\rho}(x_f)^{\frac{5-3\gamma}{2}}$ deriva dal fatto di considerare le condizioni al contorno del problema ad una distanza diversa dall'infinito, come invece è richiesto dalla teoria di Bondi. Esso comporta una netta sovrastima del tasso di accrescimento se ci si pone a distanze piccole dal buco nero, ossia a distanze minori di r_B . Il fattore $(1 - \dot{m}_t)^{-2}$ appare, invece, nelle equazioni includendo nel modello il feedback radiativo. Il suo effetto consiste nel limitare la quantità di materia che accresce per unità di tempo man mano che \dot{m}_t aumenta, e di bloccare completamente il processo una volta che $\dot{m}_t \approx 1$. Trascurare il feedback radiativo comporta, quindi, una sovrastima del tasso di accrescimento, che per $\dot{m}_t > 0.9$ può superare più di 100 volte quello reale. Infine il fattore dovuto al potenziale gravitazionale della galassia: $\theta(\gamma, \mathcal{R}, \xi)^{-1} \leq 1 \forall \mathcal{R}, \xi$; pertanto, al contrario dei primi due bias (dovuti all'uso di x_f invece di $x = \infty$ e al trascurare

la pressione di radiazione) comporta una riduzione del rapporto \dot{M}_f/\dot{M}_t e, pertanto, una sottostima del tasso di accrescimento vero.

Dunque, la soluzione al problema della sottoluminosità utilizzando per la stima dei tassi di accrescimento un modello che comprende anche gli effetti dovuti alla radiazione e il potenziale gravitazionale della galassia, non si presenta banale, dal momento che nel gioco entrano diversi parametri che agiscono sul tasso di accrescimento in maniera molto differente. Le componenti aggiunte al modello di accrescimento più semplice influiscono il tasso di accrescimento nel modo seguente:

- la posizione (il raggio) a cui sono determinati le condizioni al contorno, che si utilizzano nella stima del rate di accrescimento, gioca un ruolo importante e può determinare una sovrastima del tasso di accrescimento per $< r_B$ (come illustrato in Figura 2.10);
- la scelta del l'indice politropico nell'intervallo tra 1 e 5/3 comporta una variazione significativa del risultato, che può portare ad una sovrastima tanto più grande quanto più γ è prossimo al valore unitario, ovvero quanto più la trasformazione che esegue il gas è simile ad una trasformazione isoterma;
- trascurare la presenza della galassia, indipendentemente dal modello scelto, nel bilancio dell'energia potenziale del sistema conduce ad una sottostima del reale tasso di accrescimento; quindi il problema della sottoluminosità si aggrava;
- aggiungere al problema di accrescimento gli effetti dovuti alla radiazione modifica la soluzione in maniera importante, soprattutto in regime di accrescimento alto, nel senso che non tenerne conto comporta una sovrastima del tasso tanto più grande quanto più il tasso di accrescimento reale è alto.

6.0.2 Evoluzione galassia-SMBH: modelli semi-analitici

Nell'ambito dei modelli semi-analitici o delle simulazione numeriche che studiano l'evoluzione dei buchi neri in un contesto cosmologico, spesso si assume per il tasso di accrescimento il minimo tra il tasso di accrescimento di Bondi, \dot{M}_B , e il tasso corrispondente al limite di Eddington, \dot{M}_{Edd} :

$$\dot{M}_{BH} = \min(\dot{M}_B, \dot{M}_{Edd}) \quad (6.16)$$

dove \dot{M}_B viene determinato utilizzando la (6.3), ossia la teoria di Bondi standard.

Innanzitutto, abbiamo visto che se si vuole includere nel modello di accrescimento il potenziale gravitazionale della galassia, è necessario riesaminare il concetto di luminosità di Eddington, che in tal caso diventa:

$$L_{Edd,g}(r) = \frac{4\pi c m_p G M_{BH}}{\sigma_T} \left(1 + \frac{M_g(r)}{M_{BH}} \right) \quad (6.17)$$

dove $M_g(r)$ è il modello assunto per la galassia. Abbiamo verificato che il termine extra, $M_g(r)/M_{BH}$, non comporta alcuna differenza per la condizione sulla luminosità prodotta nel processo di accrescimento: affinché si verifichi il fenomeno di accrescimento la luminosità prodotta non deve superare il limite classico, ossia L_{Edd} definita secondo la (4.5) nel caso classico.

Dopodiché abbiamo visto che includere nel problema di accrescimento il potenziale gravitazionale di galassia e gli effetti dovuti alla radiazione può determinare una variazione importante del tasso di accrescimento, \dot{M}_t , rispetto a quello della teoria classica, \dot{M}_B . Difatti, includendo la forza dovuta alla pressione di radiazione, si ritrova in maniera auto-consistente il fatto che il tasso di accrescimento non può superare il limite di Eddington. Pertanto, utilizzando l'espressione (6.10), ossia

$$\dot{m}_t = \Theta(\gamma, \mathcal{R}, \xi, \dot{m}_t) \dot{m}_B \quad (6.18)$$

la condizione "ad hoc" sul minimo (6.16) non è più necessaria. Per di più, abbiamo visto che ai fini pratici quest'ultima può essere ben approssimata dalla

$$\dot{m}_t \approx (1 - \dot{m}_t)^2 \theta(\gamma, \mathcal{R}, \xi) \dot{m}_B. \quad (6.19)$$

Riportiamo in Figura 6.2 il rate di accrescimento vero (6.10), calcolato per il modello con $\gamma = 1.4$, $\mathcal{R} = 10^3$ e $\xi = 200$, e l'approssimazione che si adotta nelle simulazioni numeriche (6.16). Dalla figura si può vedere come per $\dot{m}_B < 0.1$ l'equazione (6.16) comporta una sottostima, tanto più grande quanto più la galassia è massiccia (si veda la Figura 5.6), mentre per $0.1 < \dot{m}_B < 10^3$ il tasso di accrescimento viene sovrastimato indipendentemente dai parametri assunti per descrivere la galassia.

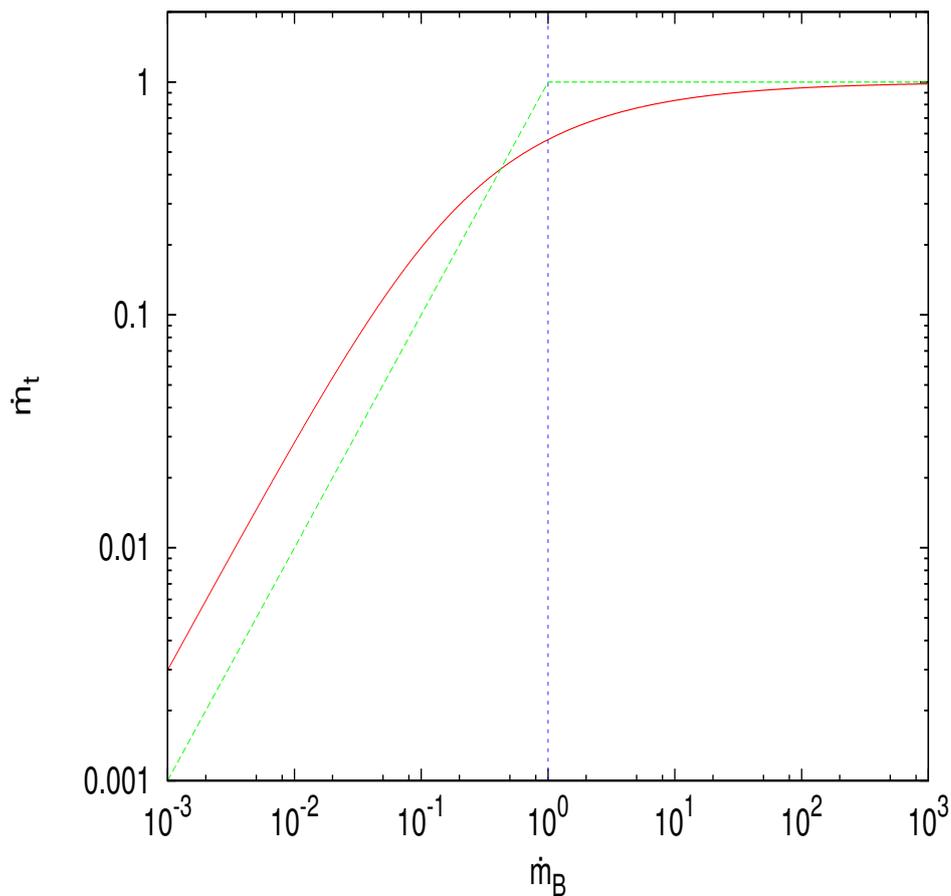


Figura 6.2: Andamento del tasso di accrescimento \dot{m}_t calcolato secondo il modello di Bondi con electron scattering in presenza della galassia normalizzato al tasso di accrescimento di Eddington (linea continua), utilizzando $\gamma = 1.4$, $\mathcal{R} = 10^3$ e $\xi = 200$, e la sua approssimazione per \dot{M}_{BH} , (6.16), utilizzata nelle simulazioni numeriche (linea tratteggiata verde).

6.0.3 Stime di massa del SMBH centrale

Abbiamo accennato nel capitolo introduttivo a come l'emissione X del mezzo interstellare in galassie early-type possa essere utilizzata per la stima di alcune caratteristiche dinamiche. Ad esempio, con utilizzo di profili di densità e temperatura ottenuti dalle osservazioni in banda X, può essere stimata la massa totale di una galassia imponendo la condizione di equilibrio idrostatico

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}. \quad (6.20)$$

In questo paragrafo vogliamo esaminare se quest'ultima equazione può essere utilizzata per la stima della massa dei SMBH al centro delle galassie. È possibile determinare M_{BH} dalla (6.20) assumendo veri i profili di ρ e P , ottenuti risolvendo il problema di Bondi con electron scattering in presenza di galassia di Hernquist, ed inserendo M_{BH} al posto di $M(r)$. Se il gas fosse all'equilibrio idrostatico, la massa del BH ricavata dalla (6.20) sarebbe una costante indipendente dal tempo. Nella soluzione di Bondi, invece, il gas non è all'equilibrio idrostatico, pertanto si può ricavare l'andamento della M_{BH} con il raggio:

$$M_{BH}^{est}(r) = -\frac{r^2}{G\rho} \frac{dP}{dr}. \quad (6.21)$$

Utilizzando il formalismo adimensionale adottato in questo lavoro di Tesi e dividendo ambo i membri dell'equazione (6.21) per M_{BH} , quest'ultima diventa

$$\frac{M_{BH}^{est}(x)}{M_{BH}} = -\frac{x^2}{\gamma} \frac{d\tilde{P}}{dx}. \quad (6.22)$$

Riportiamo il risultato della (6.22) per regimi di accrescimento differenti in Figura 6.3. Il rapporto M_{BH}^{est}/M_{BH} è caratterizzato da una funzione crescente, che raggiunge il valore unitario attorno a 1-10 raggi di Bondi dal centro del sistema. Come si vede, in generale gli aspetti di non idrostaticità tendono a produrre una sottostima di M_{BH} in caso di erronea ipotesi di equilibrio idrostatico, con errori sistematici più grandi per distanze sempre più piccole del BH.

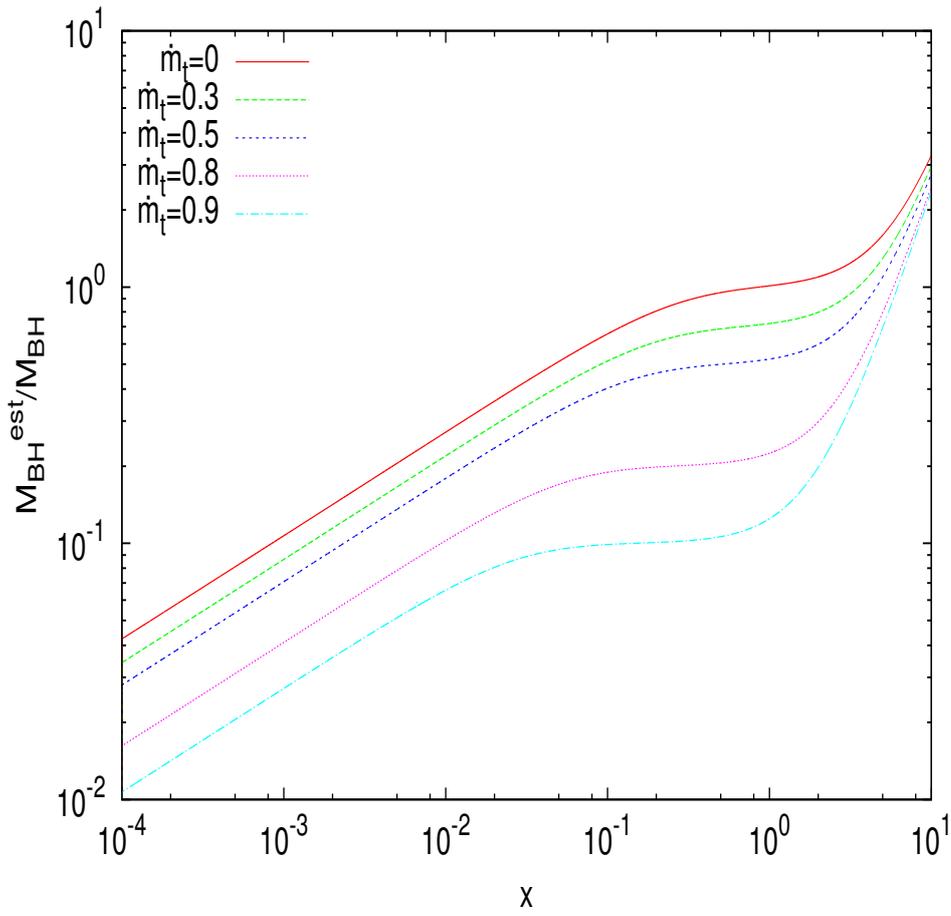


Figura 6.3: Andamento del rapporto M_{BH}^{est}/M_{BH} in funzione della distanza dal buco nero centrale calcolato imponendo l'equilibrio idrostatico.

Appendice A

Trasformazioni politropiche

Nel capitolo 2, al fine di risolvere il problema di accrescimento sferico stazionario, abbiamo assunto che il gas in accrescimento sia un gas perfetto e che esso esegua una trasformazione politropica. Tale assunzione viene utilizzata con una certa frequenza nella trattazione dei problemi astrofisici, sebbene sia molto idealizzata, essa permette di semplificare notevolmente alcuni calcoli e di risolvere il problema. Pertanto, è opportuno esaminare con maggior attenzione alcuni aspetti importanti delle trasformazioni politropiche.

A.1 Brevi richiami di termodinamica

Le equazioni della termodinamica assumono in dinamica dei fluidi una veste leggermente diversa da quella consueta, in primo luogo perché si è soliti riferirsi a quantità estensive specifiche (cioè per unità di massa) e in secondo luogo perché, invece del volume, giocano un ruolo fondamentale il volume specifico v o la densità di massa ρ . Così l'equazione dei gas perfetti diventa

$$p = \rho RT \quad (\text{A.1})$$

mentre il *primo principio* della termodinamica, che esprime la conservazione dell'energia e lega insieme le variabili di stato descrittive un sistema termodinamico, può essere scritto nella forma “energetica”

$$du = Tds - pd \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (\text{A.2})$$

o nella forma “entalpica” equivalente

$$dh = Tds + \frac{1}{\rho} dp \quad (\text{A.3})$$

dove u è l'energia interna specifica, s l'entropia specifica ed $h = u + p/\rho$ l'entalpia specifica del sistema.

Si definisce *calore specifico* c_a (dove a è una grandezza fisica che rimane costante durante la trasformazione) la quantità

$$c_a = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_{a=const} \quad (\text{A.4})$$

Per esempio, a partire dalla (A.2), mantenendo la densità¹ costante, si ottiene il calore specifico a volume costante

$$c_v = \left(\frac{du}{dT} \right)_{\rho=const} \quad (\text{A.5})$$

mentre il calore specifico a pressione costante si ottiene dalla (A.3) mantenendo costante la pressione

$$c_p = \left(\frac{dh}{dT} \right)_{p=const} \quad (\text{A.6})$$

Si noti che entrambe le definizioni, (A.5) e (A.6), consentono di valutare le variazioni dell'energia interna o dell'entalpia del gas ideale per una qualsiasi trasformazione, dato che per un gas ideale sia l'energia interna sia l'entalpia sono funzioni soltanto di temperatura. Si può dimostrare che la differenza tra questi due calori specifici è pari alla costante dei gas R :

$$c_p - c_v = R \quad (\text{A.7})$$

Spesso in termodinamica viene utilizzato il rapporto tra questi due calori specifici, noto come *indice adiabatico*

$$\gamma' = \frac{c_p}{c_v} \quad (\text{A.8})$$

Inoltre, dalle equazioni (A.7) e (A.8) possiamo ricavare due utili relazioni, che utilizzeremo in seguito:

$$c_v = \frac{R}{\gamma' - 1} \quad c_p = \frac{\gamma' R}{\gamma' - 1} \quad (\text{A.9})$$

¹Dal momento che $v = 1/\rho$ parlare di volume specifico o di densità non comporta alcuna differenza concettuale.

A.2 Trasformazioni politropiche

In termodinamica, una trasformazione quasistatica a calore specifico costante, tale cioè che lungo di essa la quantità infinitesima di calore dq , che viene ceduta o assorbita, risulta direttamente proporzionale alla variazione infinitesima di temperatura dT , si chiama *politropica*. Quindi durante tale trasformazione si avrà

$$c = \frac{dq}{dT} = \text{const} \quad (\text{A.10})$$

Pertanto, una trasformazione adiabatica è una politropica che avviene a calore specifico nullo, dato che in questo caso si ha $dq = 0$, mentre un'isoterma è una politropica a calore specifico infinito, poiché per dT che tende a zero dalla (A.10) segue che c tende all'infinito. Inoltre, è chiaro che anche le isobare e le isocore, che avvengono mantenendo rispettivamente la pressione e il volume inalterati, sono politropiche a calori specifici c_p e c_v costanti.

Vogliamo ricavare ora l'espressione che descrive una tale trasformazione. Dal primo principio della termodinamica, scritto in forma (A.2), combinato con la condizione (A.10) segue che per una trasformazione politropica infinitesima si ha

$$(c_v - c)dT - \frac{p}{\rho^2}d\rho = 0 \quad (\text{A.11})$$

Se il gas, che esegue tale trasformazione, è, inoltre, un gas perfetto, allora la sua equazione di stato sarà data dalla (A.1), quindi utilizzando quest'ultima la (A.11) diventa

$$(c_v - c)dT - RT\frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (\text{A.12})$$

Dividendo ambo i membri dell'equazione per T ed esplicitando R , si ottiene

$$(c_v - c)\frac{dT}{T} - (c_p - c_v)\frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (\text{A.13})$$

Tale equazione può essere facilmente integrata, e, una volta definito come *indice politropico*, γ , il rapporto

$$\gamma = \frac{c_p - c}{c_v - c} \quad (\text{A.14})$$

essa fornisce l'espressione per una trasformazione politropica, ossia

$$T\rho^{1-\gamma} = \text{const} \quad (\text{A.15})$$

Inoltre, utilizzando l'equazione dei gas perfetti, essa può essere scritta come

$$p\rho^{-\gamma} = \text{const} \quad (\text{A.16})$$

oppure

$$Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const} \quad (\text{A.17})$$

Si noti che ad ogni γ corrisponde un determinato valore di c caratteristico della trasformazione. Allora, nel caso di un'adiabatica ($c = 0$) l'indice politropico è pari a $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, ovvero pari all'indice adiabatico (A.8), nel caso di un'isobara ($c = c_p$) $\gamma = 0$ e nel caso di un'isocora ($c = c_v$) $\gamma = \infty$.

Ricaviamo ora le espressioni per l'energia interna, l'entalpia e l'entropia inerenti ad una trasformazione politropica. Dal momento che la (A.5) vale per qualsiasi trasformazione possiamo scrivere $du = c_v dT$. Pertanto, integrandola si ottiene la variazione dell'energia interna tra lo stato 1 e 2 in seguito ad una trasformazione politropica

$$\begin{aligned} \Delta u &= c_v(T_2 - T_1) \\ &= c_v T_2 \left[1 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{1-\gamma} \right] \\ &= \frac{1}{\gamma' - 1} RT_2 \left[1 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{1-\gamma} \right] \\ &= \frac{1}{\gamma' - 1} \frac{p_2}{\rho_2} \left[1 - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\gamma-1} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Per ottenere, invece, la variazione dell'entalpia partiamo dalla definizione (A.6), integrando la quale si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta h &= c_p(T_2 - T_1) \\ &= c_p T_2 \left[1 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{1-\gamma} \right] \\ &= \frac{\gamma'}{\gamma' - 1} RT_2 \left[1 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{1-\gamma} \right] \\ &= \frac{\gamma'}{\gamma' - 1} \frac{p_2}{\rho_2} \left[1 - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\gamma-1} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Infine, l'espressione per la variazione dell'entropia di un gas che esegue una trasformazione politropica si ottiene dal primo principio della termodinamica

in forma (A.2)

$$\begin{aligned}
 ds &= \frac{du}{T} + \frac{p}{T\rho^2}d\rho \\
 &= c_v \frac{dT}{T} + R \frac{d\rho}{\rho} \\
 &= c_v(\gamma - 1) \frac{d\rho}{\rho} + R \frac{d\rho}{\rho} \\
 &= c_v(\gamma - \gamma') \frac{d\rho}{\rho}
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

per cui è stata utilizzata l'equazione politropica (A.15) nel passare da dT/T a $d\rho/\rho$. Pertanto, integrando si ottiene

$$\Delta s = c_v(\gamma - \gamma') \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{A.21}$$

A.3 Equazione del moto

Forti di queste conoscenze, possiamo esaminare ora con maggior attenzione l'equazione del moto di un fluido ideale soggetto ad una trasformazione politropica, utilizzata nel Capitolo 2. Dunque, consideriamo l'equazione di Eulero

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi \tag{A.22}$$

Essa può essere riformulata usando la seguente identità vettoriale:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \tag{A.23}$$

Se si definisce $\boldsymbol{\Omega} = (\nabla \times \mathbf{v})$, chiamato *campo di vorticità*, allora la (A.22) diventa

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi \tag{A.24}$$

Se si assume che il fluido sia stazionario, allora il primo termine dell'equazione si annulla. Inoltre, moltiplicando quest'ultima scalarmente per \mathbf{v} , il termine di vorticità svanisce e resta

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \phi + \frac{1}{2} v^2 \right) = 0 \tag{A.25}$$

Quest'ultima equazione dice che per un piccolo spostamento nella direzione della velocità del fluido la grandezza entro parentesi non cambia. Ma per un

flusso stazionario tutti gli spostamenti avvengono lungo le linee di corrente (linee tangenti alla velocità del fluido), perciò l'equazione (A.25) ci dice che per tutti i punti lungo una linea di corrente si può scrivere

$$h + \frac{1}{2}v^2 + \phi = \text{const} \quad \text{lungo ogni linea di corrente} \quad (\text{A.26})$$

dove abbiamo definito $\nabla h = \frac{\nabla p}{\rho}$. Abbiamo ricavato in questo modo il **teorema di Bernoulli**, in cui generalmente la costante a destra dell'uguaglianza viene chiamata la *costante di Bernoulli* e spesso viene indicata con la lettera \mathcal{B} .

Dunque, possiamo concludere che in tutti i casi in cui si vuole studiare il moto di un fluido perfetto in condizioni stazionarie, il teorema di Bernoulli può essere utilizzato al posto dell'equazione del moto. Di conseguenza, per il problema di Bondi possiamo scrivere:

$$\frac{v^2}{2} + \phi + h = \frac{v_\infty^2}{2} + \phi_\infty + h_\infty \quad \text{lungo una linea di corrente} \quad (\text{A.27})$$

ma all'infinito $v = 0$ e $\phi_\infty = 0$, quindi rimane

$$\frac{v^2}{2} + \phi + h = h_\infty \quad (\text{A.28})$$

Dopodiché utilizzando l'equazione politropica è possibile calcolare il termine

$$\begin{aligned} h_\infty - h &= \int_\rho^{\rho_\infty} \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} \\ &= \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \int_\rho^{\rho_\infty} \gamma \frac{\rho^{\gamma-1}}{\rho} d\rho \\ &= \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \frac{\gamma}{\gamma-1} (\rho_\infty^{\gamma-1} - \rho^{\gamma-1}) \\ &= \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{\gamma-1} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Tale risultato, se si pone $\rho_2 = \rho_\infty$ e $\rho_1 = \rho$, ricorda molto l'espressione (A.19); l'unica differenza è dovuta al fattore che moltiplica la parentesi: nella (A.29) si ha l'indice politropico, mentre nella (A.19) si ha l'indice adiabatico γ' . Questo ci mostra che per una trasformazione politropica generica la quantità h , che compare nel teorema di Bernoulli, risulta simile all'entalpia del fluido, ma non coincide esattamente con essa. La perfetta corrispondenza tra le due quantità si ottiene per una trasformazione adiabatica, per cui $\gamma = \gamma'$.

Appendice B

Luminosità di Eddington

Supponiamo di avere una sorgente al centro del sistema, ad esempio un buco nero di massa M_{BH} , caratterizzata da una certa luminosità L con una certa distribuzione in frequenza descritta dalla funzione $f(\nu)$, quindi la luminosità di questo oggetto per unità di frequenza può essere scritta come

$$L(\nu) = L_{tot} f(\nu) \quad (\text{B.1})$$

dove $f(\nu)$ è una funzione di frequenza, che per definizione deve essere tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\nu) d\nu = 1$.

L'energia per unità di superficie, che attraversa nell'unità di tempo un'ipotetica superficie sferica di raggio r concentrica al buco nero, può essere determinata come

$$\dot{E} = \frac{L(\nu)}{4\pi r^2} \quad (\text{B.2})$$

Di conseguenza la quantità di fotoni che attraversa la superficie sferica per unità di tempo e unità di superficie sarà data dal rapporto tra l'energia totale che attraversa la superficie e l'energia di un singolo fotone $E_\gamma = h\nu$, ossia

$$\dot{n}_\gamma = \frac{\dot{E}}{E_\gamma} = \frac{L(\nu)}{4\pi r^2 h\nu} \quad (\text{B.3})$$

Ciascun fotone emesso dall'oggetto centrale, essendo una particella di massa nulla, trasporta un impulso pari a

$$p_\gamma = \frac{h\nu}{c} \quad (\text{B.4})$$

dove h è la costante di Planck e ν è la frequenza del fotone. Pertanto, l'impulso trasportato dal campo di radiazione per unità di tempo, unità di

superficie e unità di frequenza può essere calcolato come l'impulso di un singolo fotone per il numero di fotoni che attraversano la superficie sferica di raggio r nell'unità di tempo, ovvero

$$\dot{p}_\gamma = \dot{n}_\gamma \frac{h\nu}{c} = \frac{L(\nu)}{4\pi r^2 c} \quad (\text{B.5})$$

Supponiamo ora che il BH sia immerso in una distribuzione infinita di idrogeno completamente ionizzato, cioè in un plasma in cui la densità di elettroni per unità di volume n_e è pari a quella dei protoni n_p . La densità di tale distribuzione a distanza r dall'origine del sistema può essere scritta come

$$\rho(r) = n_e(r)m_e + n_p(r)m_p \simeq n_e(r)m_p \quad (\text{B.6})$$

poiché per un plasma di idrogeno puro si ha che $n_e = n_p$ ed $m_e \ll m_p$.

Sotto tale ipotesi l'opacità del gas sarà dovuta essenzialmente agli elettroni, caratterizzati da una sezione d'urto maggiore rispetto a quella dei protoni, dato che la sezione d'urto è inversamente proporzionale al quadrato della massa delle particelle interagenti. Di conseguenza ogni elettrone sarà visto dal campo di radiazione come un disco di superficie pari alla sezione d'urto Thomson

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \simeq 6.65 \times 10^{-25} \text{cm}^2 \quad (\text{B.7})$$

con $e = 4.80 \times 10^{-10}$ e.s.u. e $m_e = 9.11 \times 10^{-28}$ g. Ogni protone, invece, viene visto come un disco di superficie σ_T ridotta di un fattore $\left(\frac{m_p}{m_e}\right)^{-2}$ rispetto a quella di un elettrone, quindi l'interazione tra fotoni e protoni può essere trascurata. Dunque il processo di interazione dominante tra campo di radiazione e materia sarà l'*electron scattering*.

Se si assume che nell'interazione ogni fotone incidente su un elettrone trasferisca totalmente a quest'ultimo il suo impulso (B.4) tramite un urto elastico, l'impulso totale per unità di tempo trasferito dal campo di radiazione al gas circostante si potrà scrivere come

$$\Delta \dot{p}_\nu = \frac{L(\nu)}{4\pi r^2 c} \left[n_e(r)\sigma_T + n_p(r)\sigma_T \left(\frac{m_p}{m_e} \right)^{-2} \right] \quad (\text{B.8})$$

dove il secondo termine può essere trascurato, essendo otto ordini di grandezza più piccolo rispetto al primo; quindi, impulso acquisito dal gas diventa semplicemente

$$\Delta \dot{p}_\nu \simeq \frac{L(\nu)}{4\pi r^2 c} n_e(r)\sigma_T \quad (\text{B.9})$$

Tale quantità rappresenta la forza per unità di volume con cui il gas viene spinto dalla radiazione, ossia F_{rad} . Dall'altro lato sul plasma, in particolare sui protoni essendo quasi 2000 volte più pesanti degli elettroni, agisce anche la forza di gravità pari a

$$F_g = -\frac{GM_{BH}}{r^2}\rho(r) \quad (\text{B.10})$$

Tuttavia gli elettroni e i protoni sono legati da intense forze elettrostatiche, per cui possiamo considerare le due forze di segno opposto, F_{rad} ed F_g , come agenti insieme su queste particelle fortemente legate tra di loro. Pertanto la forza risultante di cui risente il gas sarà data dalla somma delle due:

$$\begin{aligned} F_{eff}(r) &= -\frac{GM_{BH}}{r^2}\rho(r) + \frac{Ln_e\sigma_T}{4\pi cr^2} \\ &= -\frac{GM_{BH}}{r^2}\rho(r) \left(1 - \frac{Ln_e\sigma_T}{4\pi c} \frac{1}{GM_{BH}\rho(r)}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

La luminosità per cui la pressione di radiazione bilancia la forza di gravità si definisce come *luminosità di Eddington*, che si ricava ponendo a zero l'espressione (B.11):

$$L_{Edd} = \frac{4\pi c GM_{BH} m_p}{\sigma_T}. \quad (\text{B.12})$$

Dunque, l'espressione (B.11) diventa

$$F_{eff}(r) = -\frac{GM_{BH}}{r^2}\rho(r) \left(1 - \frac{L}{L_{Edd}}\right). \quad (\text{B.13})$$

Risulta, quindi, che per $L \neq 0$ la forza netta che agisce sul gas è sempre minore della forza di gravità esercitata dal nucleo centrale, e, in particolare, per $L = L_{Edd}$ la forza effettiva diventa pari a zero, ossia in queste condizioni il gas non accresce più. Per $L > L_{Edd}$ la forza esercitata dal campo di radiazione supera quella gravitazionale, perciò il gas viene spinto verso l'esterno del sistema. Pertanto la luminosità di Eddington rappresenta il valore massimo per la luminosità di un oggetto compatibile con l'accrescimento e viene chiamata *limite di Eddington*.

Si noti che sotto le ipotesi da noi assunte, ovvero che il sistema sia a simmetria sferica e che il gas in accrescimento sia completamente ionizzato, ed assumendo inoltre di essere in *regime otticamente sottile* (cioè $L(r) = \text{const} \ \forall r$), il valore di L_{Edd} risulta indipendente dalla distanza. D'altronde se il sistema fosse otticamente spesso la luminosità emessa dal nucleo centrale ad una certa distanza sarebbe completamente assorbita e il gas che si trova a distanze maggiori non sentirebbe più la pressione di radiazione.

Possiamo concludere, quindi, che *il processo di accrescimento sferico stazionario nel limite otticamente sottile non è compatibile con le luminosità maggiori della luminosità di Eddington*. Di conseguenza si ha che la massa accresciuta per unità di tempo non può essere arbitrariamente grande, ma può al massimo raggiungere un valore pari a

$$\dot{M}_{Edd} = \frac{L_{Edd}}{\varepsilon c^2} = \frac{4\pi GM_{BH}m_p}{\varepsilon c\sigma_T} \quad (\text{B.14})$$

Inoltre possiamo dire che il processo di accrescimento su un oggetto luminoso in questo modo diventa *autoregolato*: dal momento che meno materiale cade all'interno del BH, meno radiazione viene prodotta in fase di accrescimento, quindi la forza esercitata dalla radiazione è minore, mentre il tasso di accrescimento aumenta; viceversa, più materiale viene accresciuto, più radiazione viene prodotta, la quale a sua volta esercita una maggiore pressione che spinge il gas verso le zone più esterne, causando una decrescita del tasso di accrescimento.

Appendice C

Soluzione numerica

Nell'ambito di questo lavoro di Tesi abbiamo risolto il problema di Bondi in quattro contesti differenti: innanzitutto è stato rivisto il problema classico (si veda il Capitolo 2), in cui l'accrescimento avviene su un BH isolato immerso in una distribuzione di gas infinita; abbiamo risolto il problema di Bondi in cui l'accrescimento avviene all'interno del potenziale di una galassia (Capitolo 3), dopodiché abbiamo mostrato come varia la soluzione quando si tiene conto anche del feedback radiativo (Capitolo 4) e, infine, abbiamo analizzato una soluzione che tiene conto di entrambi gli effetti (Capitolo 5). In tutti i quattro casi abbiamo visto come il problema può essere scritto in forma adimensionale

$$g(m(x)) = \Lambda f(x) \tag{C.1}$$

dove Λ è un parametro fissato per un dato problema fisico, mentre la funzione $m(x)$ rappresenta la soluzione del problema. Tale equazione è trascendente e, pertanto, deve essere risolta numericamente. A tale scopo è stato scritto un codice numerico utilizzando come linguaggio di programmazione C++ e come metodo risolutivo dell'equazione (C.1) quello della bisezione.

Prima di discutere in dettaglio l'algoritmo utilizzato nella scrittura del codice, vediamo in che cosa consiste la tecnica della bisezione.

C.1 Metodo della bisezione

Il metodo della bisezione è uno dei metodi numerici più semplici per trovare le radici di un'equazione non lineare. Questo metodo ha il notevole vantaggio di essere stabile, e, quindi, di garantire sempre una buona riuscita dell'operazione ogniqualvolta si vogliono trovare gli zeri di una funzione continua. Il metodo poggia sul **teorema di Bolzano**, detto anche teorema degli zeri, secondo il quale se una funzione continua $f(x)$ assume in due punti x_a ed x_b

valori di segno opposto, allora esiste almeno un valore di x compreso fra x_a e x_b in cui la funzione si annulla. Dunque, data una funzione che soddisfi tale teorema, il metodo della bisezione consente di trovarne uno zero.

Un modo semplice per descrivere la logica a cui si attiene questo metodo può essere il seguente:

- si fissa un intervallo di partenza $[x_a, x_b]$, all'interno del quale si vuole trovare la soluzione;
- si verifica che agli estremi di tale intervallo la funzione assuma valori discordi, cioè se sia soddisfatta la condizione:

$$f(x_a) \cdot f(x_b) < 0$$

- si divide l'intervallo $[x_a, x_b]$ a metà mediante il punto $x_{med} = \frac{x_a + x_b}{2}$;
- si calcola il valore di $f(x_{med})$;
- se $f(x_{med}) = 0$ la radice cercata è x_{med} e il procedimento finisce, altrimenti si verifica in quale dei due intervalli (x_a, x_{med}) oppure (x_{med}, x_b) la funzione cambia il segno e si riparte dal primo punto utilizzando questo nuovo intervallo;
- il processo viene ripetuto fino a raggiungere l'accuratezza richiesta;

C.2 Algoritmo di soluzione

Vediamo in dettaglio la logica seguita nella scrittura del codice per la soluzione del problema di Bondi. Innanzitutto l'equazione (C.1) può essere considerata come una funzione:

$$F(m(x)) = g(m(x)) - \Lambda f(x) \quad (\text{C.2})$$

Essa è una funzione continua, essendo definita come differenza di due funzioni continue (si veda il Capitolo 2). Dunque, se esiste un intervallo, all'interno del dominio di questa funzione, che soddisfa l'ipotesi del teorema degli zeri, allora $F(m(x))$ deve ammettere almeno uno zero all'interno di quest'intervallo.

Nel Capitolo 2 abbiamo visto che risolvere completamente il problema dell'accrescimento sferico stazionario significa trovare l'andamento generale della funzione $m(x)$ e non soltanto un valore del numero di Mach, m , ad una certa distanza dal buco nero. Perciò è necessario "discretizzare" la variabile x su una griglia finita di punti e risolvere l'equazione (C.1) per ogni punto della griglia. Nei casi di interesse astrofisico solitamente sono coinvolte

distanze molto grandi, quindi si preferisce utilizzare le griglie logaritmiche, che permettono di avere lo stesso numero di punti all'interno di ogni decade. In questo modo si ottiene maggior risoluzione al centro, là dove nel caso del problema dell'accrescimento la presenza del buco nero è dominante, rispetto alle zone esterne del sistema. Pertanto, una volta fissato il numero di punti in cui si vuole dividere la griglia (che all'interno del codice è stato indicato con n), l'espressione per il punto i -simo della griglia $x(i)$ sarà data da ¹:

$$x(i) = 10^{\log x_a + i\Delta} \quad (C.3)$$

dove

$$\Delta = \frac{\log x_a - \log x_b}{n}.$$

Prima di procedere con la soluzione, fissiamo i parametri del sistema: il parametro γ (indicato `b` nel codice), che caratterizza il tipo di fluido in accrescimento, R ed ξ che esprimono rispettivamente la massa della galassia in unità di M_{BH} e la sua dimensione in unità di raggi di Bondi, ed m , che esprime il tasso di accrescimento del problema normalizzato al tasso di accrescimento di Eddington. Dopodiché si costruisce la funzione $F(m(x))$ secondo l'equazione (C.2). Pertanto all'interno del codice si definiscono le funzioni $g(m)$ ed $f(x)$, secondo le relazioni (2.21) e (5.10):

```
double gdm(double a){
    return pow(a,d)*(0.5*pow(a,2)+(1/(b-1)));
}

double fdxEddGal(double a){
    return pow(a,c)*((1/(b-1))+((1/a)*(1-acc_rate))+
        (R/(a+c*xi)));
}
```

A tal punto è possibile calcolare l'autovalore del problema Λ_{cr} , definito come

$$\Lambda = \frac{g_{min}}{f_{min}}, \quad (C.4)$$

perciò in primo luogo si devono calcolare g_{min} ed f_{min} . Dato che entrambe le funzioni, $f(x)$ e $g(m)$, sono continue e divergenti sia per $x \rightarrow 0$ sia per $x \rightarrow \infty$, anche in questo caso è possibile utilizzare il metodo della bisezione, applicandolo alle derivate di queste funzioni. Poiché quest'ultimo metodo verrà utilizzato diverse volte all'interno del codice, si costruisce una funzione:

```
double rootbis(double func(double a), double x1, double x2,
    double xacc);
```

¹Si può verificare facilmente che per $i = 1$ $x(i) = x_a$ e per $i = n$ $x(i) = x_b$.

che può essere richiamata ogni volta che si vuole applicare il metodo della bisezione all'interno del codice. Quest'ultima richiede una funzione di una sola variabile `double func(double a)`, gli estremi dell'intervallo `double x1` e `double x2` e restituisce una soluzione con la precisione stabilita dall'utente `double xacc`.

Dunque, una volta calcolato il valore di Λ secondo la (C.4), per ogni punto della griglia si calcola il valore assunto dalla $f(x)$, lo si moltiplica per Λ e si applica il metodo della bisezione alla funzione $F(m(x))$. In questa maniera si ottiene una soluzione del problema per un dato valore di x . Ripetendo l'intera procedura per tutti i punti della griglia si ottiene l'andamento della funzione $m(x)$ cercata. Infine, utilizzando la soluzione trovata possono essere facilmente ricavati gli andamenti della densità, della velocità e della temperatura del gas in accrescimento dalle relazioni (2.23), (2.24), (2.25).

In seguito riportiamo uno schema a blocchi con lo scopo di facilitare la comprensione della procedura appena descritta e il codice numerico originale.

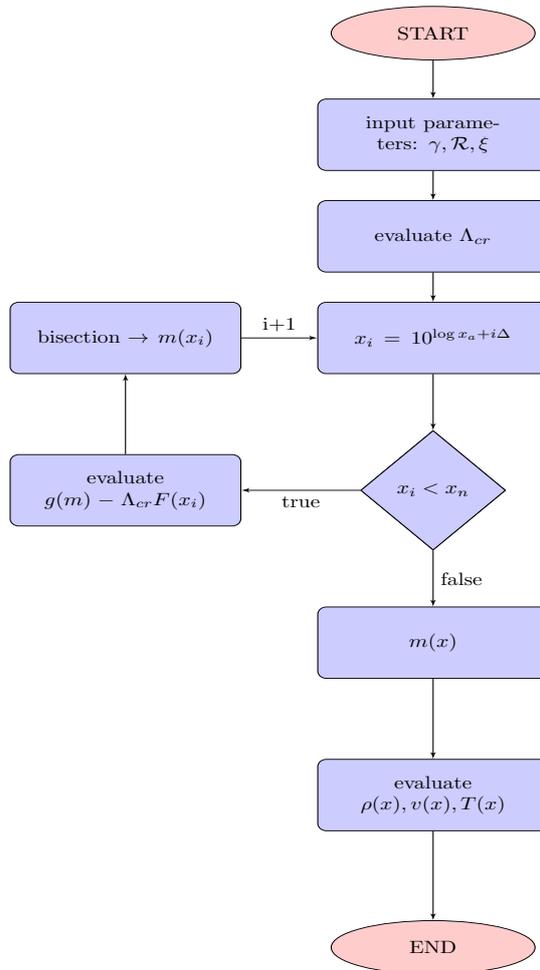


Figura C.1: L'algoritmo che segue il codice numerico scritto per la soluzione del problema di Bondi.

C.3 Codice numerico

```

#include <iostream>
#include <cmath>
#include <fstream>
#include <string>

using namespace std;

int jmax=100;//number of iterations

// set the polytropic index:
double b=1.4;
// set the accuracy:
double err=1e-12;
//set the accretion rate normalized to Eddington rate:
double acc_rate=0.3;
// set the size of the galaxy xi=r_gal/r_b:
double csi=200;
// set the mass of the galaxy R=M_g/M_BH:
double R=1000;
// set the interval for the mach number:
//[1e-12,1] for the subsonic solution
//or [1:1000] for the supersonic solution
double u1=1;
double u2=1000;

double d=(2*(1-b))/(b+1);
double c=(4*(b-1))/(b+1);

double gdm(double a);
double fdx(double a);
double dfdx(double a);
double fdxEddGal(double a);
double dfdxEddGal(double a);
double dgdm(double a);
double rootbis(double func(double),double x1, double x2,
               double xacc);

int main(){
    double z, r, e, xmin, xminEddGal, xa, xb, mmin,
           fmin, fminEddGal, gmin, lambda, Lambda,
           lambdaEddGal, LambdaEddGal, *x=NULL,

```

```
*bias=NULL, *mach=NULL, *density=NULL,
*velocity=NULL, *Temp=NULL, *pressure=NULL,
*M_BH=NULL;
string nomefile;
ofstream outfile;

cout << "Enter x range:" << endl;
cin >> xa >> xb;
int n;
cout << "Enter points number:" << endl;
cin >> n;
cout << "Enter file name:" << endl;
cin >> nomefile;

//Evaluation of x_min, f_min and critical eigenvalue of
the Bondi problem lambda

xmin=rootbis(dfdx, xa, xb, err);
fmin=fdx(xmin);
mmin=rootbis(dgdm, xa, xb, err);
gmin=gdm(mmin);
Lambda=gmin/fmin;
e=-(b+1)/((b-1)*2);
lambda=pow(Lambda,e);

xminEddGal=rootbis(dfdxEddGal, xa, xb, err);
fminEddGal=fdxEddGal(xminEddGal);
LambdaEddGal=gmin/fminEddGal;
lambdaEddGal=pow(LambdaEddGal,e);

x=new double[n];
bias=new double[n];
mach=new double[n];
density=new double[n];
velocity=new double[n];
Temp=new double[n];
pressure=new double[n];
M_BH=new double[n];

//Solution of the Bondi problem using bisection algorithm
double m, mmid, du, rtb, umid, zero;
for (int i=0;i<n;i++){
    //equally spaced grid
```

```

//x[i]=xa+i*xb/n;
//logarithmic grid
z=log10(xa)+i*((log10(xb)-log10(xa))/n);
x[i]=pow(10,z);
m=gdm(u1)-fdxEddGal(x[i])*LambdaEddGal;
mmid=gdm(u2)-fdxEddGal(x[i])*LambdaEddGal;

if(m*mmid>=0){
    cout << "Root must be bracked!"
        << endl;
    return 0;
}
if (m<0){
    du=u2-u1;
    rtb=u1;
}else{
    du=u1-u2;
    rtb=u2;
}
for(int j=0; j<jmax; j++){
    du*=0.5;
    umid=rtb+du;
    mmid=gdm(umid)-fdxEddGal(x[i])
        *LambdaEddGal;
    if (mmid<=0){
        rtb=umid;
        mach[i]=rtb;
    }
    if (fabs(du)<err || umid==0) {
        break;
    }
}
}

//Evaluation of density, velocity, temperature, pressure,
bias for each grid point
for(int i=0;i<n;i++) {
    r=lambdaEddGal/(pow(x[i],2)*mach[i]);
    density[i]=pow(r,(2/(b+1)));
    velocity[i]=mach[i]*pow(density[i],(b-1)/2);
    Temp[i]=pow(density[i],b-1);
    pressure[i]=pow(density[i],b);
    bias[i]=pow(density[i],(5-3*b)/2)*
        (lambda/lambdaEddGal);
}

```

```
    }
//Evaluation of the M_BH(r) function
    for(int i=1;i<n-1;i++){
        M_BH[i]=-(pow(x[i],2)*
        (pressure[i+1]-pressure[i-1]))/
        (b*density[i]*(x[i+1]-x[i-1])));
    }
//Data backup
    outfile.open(nomefile.c_str());
    if (!outfile) {
        cout << "Errore di apertura del file" << endl;
    } else {
        for(int i=0;i<n;i++) {
            outfile<<x[i]<< "        " << mach[i] <<
            "          " << density[i] << "          " <<
            velocity[i] << "          " << Temp[i] <<
            "          " << bias[i] << "        " <<
            pressure[i] << "        " << M_BH[i] <<
            endl;
        }
        outfile.close();
    }

//Memory cleaning
    delete [] x;
    delete [] mach;
    delete [] density;
    delete [] velocity;
    delete [] Temp;
    delete [] bias;
    return 0;
}

// Functions definition g(m) and f(x)
double gdm(double a){
    return pow(a,d)*(0.5*pow(a,2)+(1/(b-1)));
}

double fdx(double a){
    return pow(a,c)*((1/(b-1))+(1/a));
}
```

```

double fdxEddGal(double a){
    return pow(a,c)*((1/(b-1))+((1/a)*(1-acc_rate)))+
        (R/(a+csi));
}

// dg/dm e df/dx
double dfdx(double a){
    double d=(4*(b-1))/(b+1);
    double c=1/(b-1);
    return (c*d*a+(d-1))*pow(a,d-2);
}
double dfdxEddGal(double a){
    double d=(4*(b-1))/(b+1);
    double c=1/(b-1);
    return d*pow(a,d-1)*(c+(1/a)*(1-acc_rate)+
        R/(csi+a))+pow(a,d)*(-((1-acc_rate)/pow(a,2))-
        R/pow(csi+a,2));
}
double dgdM(double a){
    double d=(2*(1-b))/(b+1);
    double c=1/(b-1);
    return ((0.5*(d+2)*pow(a,2))+d*c)*pow(a,d-1);
}

//Bisection function
double rootbis(double func(double),double x1, double x2,
    double xacc) {
    double dx, f, fmid, xmid, rtb, g;
    f=func(x1);
    fmid=func(x2);
    if (f*fmid >= 0){
        cout << "Root must be bracked!" << endl;
        return 0;
    }
    if (f<0){
        dx=x2-x1;
        rtb=x1;
    }else{
        dx=x1-x2;
        rtb=x2;
    }
    for(int j=0; j<jmax; j++){
        dx*=0.5;

```

```
        xmid=rtb+dx;
        fmid=func(xmid);
        if (fmid<=0) rtb=xmid;
        if (fabs(dx)<xacc || fmid==0) return rtb;
    }
    return 0;
}
```


Elenco delle tabelle

1.1	Possibili modelli di accrescimento stazionario per un fluido non viscoso (Frank et al. 2002)	6
2.1	Risultati numerici per x_{min} , f_{min} , g_{min} e λ_{cr} al variare di γ . . .	22
3.1	Valori assunti da $x_{min,g}$ e $\lambda_{cr,g}$ al variare di γ , per fissati $\mathcal{R} = 10^3$ e $\xi = 200$	42
3.2	Valori assunti da $x_{min,g}$ e $\lambda_{cr,g}$ all'aumentare del parametro \mathcal{R} , fissando $\gamma = 1.4$ e $\xi = 200$	43
3.3	Valori assunti da $x_{min,g}$ e $\lambda_{cr,g}$ all'aumentare del parametro ξ fissando $\gamma = 1.4$ ed $\mathcal{R} = 10^3$	43

Elenco delle figure

1.1	Correlazioni trovate per la massa di SMBH: M_{BH} e la luminosità L_{bulge} (a sinistra), M_{BH} e la dispersione di velocità σ_* della componente sferoidale (bulge) della galassia ospite (a destra). I simboli differenti si riferiscono alle tecniche di misura della M_{BH} diverse (Kormendy 2000).	5
1.2	Diagramma di flusso che illustra come alcuni fattori determinano la dinamica di accrescimento: il momento angolare specifico l , l'efficienza di accrescimento \dot{M}/\dot{M}_{Edd} , il campo magnetico e lo spin del BH (Begelman 2014).	8
1.3	Relazione tra $L_{X,nuc}$ e \dot{M}_B , normalizzate ai corrispettivi valori di Eddington, la linea continua rappresenta L_{acc}/L_{Edd} , mentre le linee tratteggiate corrispondono a L_{ADAF}/L_{Edd} per due diversi modelli ADAF (Pellegrini 2005).	11
2.1	Funzioni $g(m)$ e $f(x)$ del problema di Bondi classico al variare dell'indice politropico γ	20
2.2	Soluzioni del problema di Bondi standard per $\gamma = 1.4$ fissato: soluzione transonica di accrescimento (curva rossa), soluzione transonica di vento (curva verde), soluzione di accrescimento subsonica (curva blu), soluzione di vento supersonica (curva magenta).	23
2.3	Soluzione con onda d'urto per $\gamma = 1.4$ (curva rossa) per cui si ha il passaggio dalla soluzione subsonica (curva blu) alla soluzione supersonica (curva verde) con un salto in corrispondenza del $x_{min} = 0.2$	24
2.4	Andamento della densità con $\gamma = 1.4$ fissato (sopra) per cui sono stati utilizzati gli stessi colori e tipi di tratto come in Figura 2.2 nel rappresentare le soluzioni critiche e subcritiche; andamento della densità per la soluzione di accrescimento critica al variare di γ (sotto).	26

2.5	Andamento della velocità del gas con $\gamma = 1.4$ fissato (sopra) per cui sono stati utilizzati gli stessi colori e tipi di tratto come in Figura 2.2 nel rappresentare le soluzioni critiche e subcritiche; andamento della densità per la soluzione di accrescimento critica al variare di γ (sotto).	27
2.6	Andamento della temperatura con $\gamma = 1.4$ fissato (sopra) per cui sono stati utilizzati gli stessi colori e tipi di tratto come in Figura 2.2 nel rappresentare le soluzioni critiche e subcritiche; andamento della densità per la soluzione di accrescimento critica al variare di γ (sotto).	28
2.7	Soluzioni del problema di Bondi standard per $\gamma = 5/3$ fissato: soluzione di accrescimento transonica (curva rossa), soluzione di vento transonica (curva verde), soluzione di accrescimento subsonica (curva blu), soluzione di vento supersonica (curva magenta).	31
2.8	Andamento della densità (sopra) e della velocità del gas (sotto) con $\gamma = 1.4$ fissato, per cui sono stati utilizzati gli stessi colori e tipi di tratto come in Figura 2.7 nel rappresentare gli andamenti corrispondenti alle soluzioni critiche e quelle subcritiche.	32
2.9	Andamento della temperatura con $\gamma = 1.4$ fissato, per cui sono stati utilizzati gli stessi colori e tipi di tratto come in Figura 2.7 nel rappresentare gli andamenti corrispondenti alle soluzioni critiche e quelle subcritiche.	33
2.10	Andamento del rapporto \dot{M}_f/\dot{M}_B in funzione della distanza dal BH $x_f = r_f/r_B$ al variare dell'indice politropico γ	35
3.1	Andamento delle funzioni $f(x)$ e $g(m)$ al variare dell'indice politropico γ nel caso del problema di Bondi con galassia di Hernquist per $\mathcal{R} = 10^3$ e $\xi = 200$ fissati.	40
3.2	Andamento delle funzioni $f(x)$ al variare del parametro $\mathcal{R} = M_g/M_{BH}$ (sopra) e al variare del parametro $\xi = r_g/r_B$ (sotto) con $\gamma = 1.4$ fissato.	44
3.3	Andamento di $x_{min,g}$ in funzione della massa della galassia $\mathcal{R} = M_g/M_{BH}$ (sopra) e in funzione della dimensione della galassia $\xi = r_g/r_B$ (sotto).	45
3.4	Andamento di $\lambda_{cr,g}$ in funzione della massa della galassia $\mathcal{R} = M_g/M_{BH}$ (sopra) e in funzione della dimensione della galassia $\xi = r_g/r_B$ (sotto).	46

3.5	Soluzioni del problema di Bondi con galassia di Hernquist per $\gamma = 1.4$, $\mathcal{R} = 10^3$ e $\xi = 200$ fissati: soluzione di accrescimento (curva rossa), soluzione di vento (curva verde), soluzione accrescimento subsonica (curva blu), soluzione di vento supersonica (curva magenta).	47
3.6	Andamento della funzione $\tilde{\rho}(x) = \rho(x)/\rho_\infty$ per $\gamma = 1.4$, $\mathcal{R} = 10^3$ e $\xi = 200$ fissati, con gli stessi colori e tipi di tratto come nella figura precedente.	48
3.7	Andamento della funzione $\tilde{v}(x) = v(x)/v_\infty$ per $\gamma = 1.4$, $\mathcal{R} = 10^3$ e $\xi = 200$ fissati.	49
3.8	Andamento della funzione $\tilde{T}(x) = T(r)/T_\infty$ per $\gamma = 1.4$, $\mathcal{R} = 10^3$ e $\xi = 200$ fissati.	49
3.9	Andamento del rapporto \dot{M}_f/\dot{M}_g in funzione della distanza dal buco nero $x_f = r_f/r_B$ al variare dell'indice politropico γ per $\mathcal{R} = 10^3$, $\xi = 200$ fissati.	51
3.10	Andamento del rapporto \dot{M}_f/\dot{M}_g in funzione della distanza dal buco nero $x_f = r_f/r_B$ al variare della massa di galassia $\mathcal{R} = M_g/M_{BH}$, per $\gamma = 1.4$ e $\xi = 200$ fissati.	52
3.11	Andamento del rapporto \dot{M}_f/\dot{M}_g in funzione della distanza dal buco nero $x_f = r_f/r_B$ al variare della dimensione di galassia $\xi = r_g/r_B$, per $\gamma = 1.4$ e $\mathcal{R} = 10^3$ fissati.	53
4.1	Andamento del tasso di accrescimento del problema con electron scattering \dot{m}_e in funzione del tasso di accrescimento classico \dot{m}_B	61
4.2	Andamento del rapporto \dot{M}_f/\dot{M}_e in funzione della distanza dal buco nero $x_f = r_f/r_B$ al variare di \dot{m}_e	63
5.1	Andamento di luminosità di Eddington in presenza della galassia descritta dal modello di Hernquist con $\mathcal{R} = 10^3$ e $\xi = 200$ fissati.	67
5.2	Andamenti di x_{min} e λ_{cr} del problema di Bondi classico $(x_{min,0}, \lambda_{cr,0})$, del problema di Bondi con la galassia di Hernquist $(x_{min,g}, \lambda_{cr,g})$, del problema di Bondi con electron scattering $(x_{min,e}, \lambda_{cr,e})$ e del problema che comprende entrambi gli effetti $(x_{min,g}, \lambda_{cr,t})$ al variare del parametro $\mathcal{R} = M_g/M_{BH}$ con $\xi = 200$, $\dot{m}_t = 0.3$ e $\gamma = 1.4$ fissati.	71

- 5.3 Andamenti di x_{min} e λ_{cr} del problema di Bondi classico ($x_{min,0}, \lambda_{cr,0}$), del problema di Bondi con la galassia di Hernquist ($x_{min,g}, \lambda_{cr,g}$), del problema di Bondi con electron scattering ($x_{min,e}, \lambda_{cr,e}$) e del problema che comprende entrambi gli effetti ($x_{min,t}, \lambda_{cr,t}$) al variare del parametro $\xi = r_g/r_B$ con $\mathcal{R} = 10^3$, $\dot{m}_t = 0.3$ e $\gamma = 1.4$ fissati. 72
- 5.4 Andamenti di x_{min} e λ_{cr} del problema di Bondi classico ($x_{min,0}, \lambda_{cr,0}$), del problema di Bondi con la galassia di Hernquist ($x_{min,g}, \lambda_{cr,g}$), del problema di Bondi con electron scattering ($x_{min,e}, \lambda_{cr,e}$) e del problema che comprende entrambi gli effetti ($x_{min,t}, \lambda_{cr,t}$) al variare del parametro $\dot{m}_t = \dot{M}_t/\dot{M}_{Edd}$ con $\xi = 200$, $\mathcal{R} = 10^3$ e $\gamma = 1.4$ fissati. 73
- 5.5 Andamento del tasso di accrescimento vero normalizzato al tasso di accrescimento di Eddington $\dot{m}_t = \dot{M}_t/\dot{M}_{Edd}$ in funzione del tasso di accrescimento del problema classico $\dot{m}_B = \dot{M}_B/\dot{M}_{Edd}$ al variare di γ con massa e dimensione della galassia fissati: $\mathcal{R} = 10^3$ e $\xi = 200$ 76
- 5.6 Andamento del tasso di accrescimento vero normalizzato al tasso di accrescimento di Eddington $\dot{m}_t = \dot{M}_t/\dot{M}_{Edd}$ in funzione del tasso di accrescimento del problema classico $\dot{m}_B = \dot{M}_B/\dot{M}_{Edd}$ al variare della massa della galassia $\mathcal{R} = M_g/M_{BH}$, con $\gamma = 1.4$ e $\xi = 200$ 77
- 5.7 Andamento del tasso di accrescimento vero normalizzato al tasso di accrescimento di Eddington $\dot{m}_t = \dot{M}_t/\dot{M}_{Edd}$ in funzione del tasso di accrescimento del problema classico \dot{m}_B al variare della dimensione della galassia $\xi = r_g/r_B$, con $\mathcal{R} = 10^3$ e $\gamma = 1.4$ 78
- 5.8 Andamento del rapporto \dot{M}_f/\dot{M}_t in funzione della distanza che si usa per stimare il tasso di accrescimento $x_f = r_f/r_B$ per regimi di accrescimento differenti. 80
- 6.1 Legame tra il tasso di accrescimento del modello di Bondi classico \dot{m}_B e il tasso di accrescimento del modello di Bondi con la galassia di Hernquist \dot{m}_g (curva tratteggiata verde), il tasso di accrescimento del modello di Bondi con electron scattering \dot{m}_e (curva tratteggiata blu) e il tasso di accrescimento calcolato secondo il modello di Bondi con electron scattering e la galassia di Hernquist \dot{m}_t (curva rossa continua) con $\gamma = 1.4$, $\mathcal{R} = 10^3$ e $\xi = 200$ 85

-
- 6.2 Andamento del tasso di accrescimento \dot{m}_t calcolato secondo il modello di Bondi con electron scattering in presenza della galassia normalizzato al tasso di accrescimento di Eddington (linea continua), utilizzando $\gamma = 1.4$, $\mathcal{R} = 10^3$ e $\xi = 200$, e la sua approssimazione per \dot{M}_{BH} , (6.16), utilizzata nelle simulazioni numeriche (linea tratteggiata verde). 89
- 6.3 Andamento del rapporto M_{BH}^{est}/M_{BH} in funzione della distanza dal buco nero centrale calcolato imponendo l'equilibrio idrostatico. 91
- C.1 L'algoritmo che segue il codice numerico scritto per la soluzione del problema di Bondi. 107

Bibliografia

- M. C. Begelman. Accreting Black Holes. *ArXiv e-prints*, October 2014.
- R. Bender, D. Burstein, and S. M. Faber. Dynamically hot galaxies. I - Structural properties. *ApJ*, 399:462–477, November 1992.
- J. Binney and S. Tremaine. *Galactic Dynamics (Second Edition)*. Princeton Series in Astrophysics.
- H. Bondi. On spherically symmetrical accretion. *MNRAS*, 112:195, 1952.
- C. R. Canizares, G. Fabbiano, and G. Trinchieri. Properties of the X-ray emitting gas in early-type galaxies. *ApJ*, 312:503–513, January 1987.
- S. Chandrasekhar. *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. The University of Chicago Press.
- L. Ciotti and S. Pellegrini. On the use of X-rays to determine dynamical properties of elliptical galaxies. *MNRAS*, 350:609–614, May 2004.
- N. Coppola. Accrescimento di Bondi con pressione di radiazione. Tesi di Laurea Triennale, Università di Bologna.
- G. de Vaucouleurs. Recherches sur les nébuleuses extragalactiques. *Journal des Observateurs*, 31:113, January 1948.
- T. Di Matteo, J. Colberg, V. Springel, L. Hernquist, and D. Sijacki. Direct Cosmological Simulations of the Growth of Black Holes and Galaxies. *ApJ*, 676:33–53, March 2008.
- G. Fabbiano. X rays from normal galaxies. *ARA&A*, 27:87–138, 1989.
- L. Ferrarese and H. Ford. Supermassive Black Holes in Galactic Nuclei: Past, Present and Future Research. *SSR*, 116, February 2005.

- W. Forman, J. Schwarz, C. Jones, W. Liller, and A. C. Fabian. X-ray observations of galaxies in the Virgo cluster. *ApJ*, 234:L27–L31, November 1979.
- W. Forman, C. Jones, and W. Tucker. Hot coronae around early-type galaxies. *ApJ*, 293:102–119, June 1985.
- J. Frank, A. King, and D. J. Raine. *Accretion Power in Astrophysics: Third Edition*. January 2002.
- J. Fukue. Bondi Accretion onto a Luminous Object. *PASJ*, 53:687–692, August 2001.
- K. Gebhardt, R. Bender, G. Bower, A. Dressler, S. M. Faber, A. V. Filippenko, R. Green, C. Grillmair, L. C. Ho, J. Kormendy, T. R. Lauer, J. Magorrian, J. Pinkney, D. Richstone, and S. Tremaine. A Relationship between Nuclear Black Hole Mass and Galaxy Velocity Dispersion. *ApJ*, 539:L13–L16, August 2000.
- L. Hernquist. An analytical model for spherical galaxies and bulges. *ApJ*, 356:359–364, June 1990.
- L. C. Ho. On the Relationship between Radio Emission and Black Hole Mass in Galactic Nuclei. *ApJ*, 564:120–132, January 2002.
- J. Kormendy. Monsters at the Heart of Galaxy Formation. *ArXiv Astrophysics e-prints*, 2000.
- J. Kormendy and D. Richstone. Inward Bound - The Search For Supermassive Black Holes In Galactic Nuclei. *ARA&A*, 33:581, 1995.
- J. H. Krolik. *Active Galactic Nuclei: From the Central Black Hole to the Galactic Environment*. Princeton Series in Astrophysics.
- M. Loewenstein, R. F. Mushotzky, L. Angelini, K. A. Arnaud, and E. Quataert. Chandra Limits on X-Ray Emission Associated with the Supermassive Black Holes in Three Giant Elliptical Galaxies. *ApJ*, 555:L21–L24, July 2001.
- Y. Lu, R. H. Wechsler, R. S. Somerville, D. Croton, L. Porter, J. Primack, P. S. Behroozi, H. C. Ferguson, D. C. Koo, Y. Guo, M. Safarzadeh, K. Finlator, M. Castellano, C. E. White, V. Sommariva, and C. Moody. Semi-analytic Models for the CANDELS Survey: Comparison of Predictions for Intrinsic Galaxy Properties. *ApJ*, 795:123, November 2014.

- E. Lusso and L. Ciotti. One-zone models for spheroidal galaxies with a central supermassive black-hole. Self-regulated Bondi accretion. *A&A*, 525:A115, January 2011.
- D. Lynden-Bell. Galactic Nuclei as Collapsed Old Quasars. *Nature*, 223: 690–694, August 1969.
- J. Magorrian, S. Tremaine, D. Richstone, R. Bender, G. Bower, A. Dressler, S. M. Faber, K. Gebhardt, R. Green, C. Grillmair, J. Kormendy, and T. Lauer. The Demography of Massive Dark Objects in Galaxy Centers. *AJ*, 115:2285–2305, June 1998.
- G. Pedalletti. Accrescimento di Bondi su buchi neri in galassie. Tesi di Laurea Quadriennale, Università di Bologna.
- S. Pellegrini. Nuclear Accretion in Galaxies of the Local Universe: Clues from Chandra Observations. *ApJ*, 624:155–161, May 2005.
- S. Pellegrini and L. Ciotti. Reconciling optical and X-ray mass estimates: the case of the elliptical galaxy NGC3379. *MNRAS*, 370:1797–1803, August 2006.
- S. Pellegrini, A. Baldi, G. Fabbiano, and D.-W. Kim. An XMM-Newton and Chandra Investigation of the Nuclear Accretion in the Sombrero Galaxy (NGC 4594). *ApJ*, 597:175–185, November 2003.
- E. Quataert. Radiatively Inefficient Accretion Flow Models of Sgr A*. *Astronomische Nachrichten Supplement*, 324:435–443, September 2003.
- M. J. Rees. Black Hole Models for Active Galactic Nuclei. *ARA&A*, 22: 471–506, 1984.
- D. Richstone, E. A. Ajhar, R. Bender, G. Bower, A. Dressler, S. M. Faber, A. V. Filippenko, K. Gebhardt, R. Green, L. C. Ho, J. Kormendy, T. R. Lauer, J. Magorrian, and S. Tremaine. Supermassive black holes and the evolution of galaxies. *Nature*, 395:A14, October 1998.
- E. E. Salpeter. Accretion of Interstellar Matter by Massive Objects. *ApJ*, 140:796–800, August 1964.
- F. H. Shu. *The Physics of Astrophysics*, volume 2 Gas Dynamics. University Science Books.

- V. Springel, T. Di Matteo, and L. Hernquist. Black Holes in Galaxy Mergers: The Formation of Red Elliptical Galaxies. *ApJ*, 620:L79–L82, February 2005.
- R. P. van der Marel. The Black Hole Mass Distribution in Early-Type Galaxies: Cusps in Hubble Space Telescope Photometry Interpreted through Adiabatic Black Hole Growth. *AJ*, 117:744–763, February 1999.
- Y. B. Zel’dovich and I. D. Novikov. The Radiation of Gravity Waves by Bodies Moving in the Field of a Collapsing Star. *Soviet Physics Doklady*, 9:246, October 1964.