

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA di SCIENZE

Corso di Laurea Triennale in Matematica

**ALGEBRA ESTERNA
E
GRASSMANNIANE**

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:
Chiar.mo Prof.
MONICA IDÁ

Presentata da:
QUERCIOLI NICOLA

Sessione II
Anno Accademico 2013-2014

*Questa è la DEDICA:
ognuno può scrivere quello che vuole,
anche nulla ...*

Indice

Introduzione	1
1 K -Algebre	5
2 Algebra Esterna di un K -spazio vettoriale	9
3 Grassmanniane	19

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è esporre la costruzione ed alcune proprietà principali dell'algebra esterna di un K -spazio vettoriale e, in seguito, introdurre le Grassmanniane come importante applicazione geometrica del concetto di algebra esterna.

Il concetto di algebra esterna è stato introdotto per la prima volta da H. G. Grassmann nel 1844. Consideriamo il seguente problema riguardante gli spazi vettoriali di dimensione finita: dato un K -spazio vettoriale V di dimensione finita, si vuole allargare tale spazio ad un'algebra A generata da V stesso e che abbia come proprietà che $v^2 = 0 \quad \forall v \in V$; inoltre non vogliamo imporre ulteriori condizioni che non siano conseguenza della proprietà precedentemente espressa. Tra le conseguenze più importanti che derivano da tale costruzione vi sono la derivazione in modo trasparente delle più importanti proprietà dei determinanti (verrà, infatti, esposta la dimostrazione della proprietà moltiplicativa dei determinanti) e molti concetti utili in geometria, tra cui la definizione delle Grassmanniane.

Le Grassmanniane sono oggetti di fondamentale interesse nello studio della geometria algebrica, sia come concetto matematico, sia come strumento di base per la costruzione e lo studio di altre varietà algebriche; verrà qua trattata brevemente l'immersione di una Grassmanniana in uno spazio proiettivo, chiamata immersione di Plücker.

Ora vediamo capitolo per capitolo, in breve, gli argomenti trattati. Nel primo capitolo vengono esposte le necessarie conoscenze preliminari sulle algebre associative: la prima parte è dedicata alla definizione di algebra asso-

ciativa e di concetti collegati (ideale, sottoalgebra, omomorfismi di algebre, nucleo di un omomorfismo di algebre, algebra quoziente); la seconda è dedicata ad esempi di algebre come l'algebra delle matrici quadrate di ordine n su un campo K , l'algebra dei polinomi a coefficienti in un campo K e l'algebra $K[G]$, dove G è un gruppo finito, che ha come base su un campo K gli elementi di G .

Nella prima parte del secondo capitolo viene costruita l'algebra esterna di uno spazio vettoriale V finitamente generato, arrivando a darne una decomposizione diretta in sottospazi; nella seconda parte invece è enunciata la proprietà universale dell'algebra esterna e alcune conseguenze dirette come la proprietà moltiplicativa dei determinanti.

Nel terzo e ultimo capitolo vengono definite la Grassmanniana $G(k, n)$ di un K -spazio vettoriale e l'immersione di Plücker; per chiudere il capitolo dimostreremo che la Grassmanniana $G(2, 4)$ è contenuta nell'iperquadrica di equazione $x_0x_5 - x_1x_4 + x_2x_3 = 0$.

Capitolo 1

K-Algebra

Nel seguito con anello intenderemo anello unitario. Se $(A, +, \cdot)$ è un anello con (A, \cdot) monoide commutativo allora diremo che A è un anello commutativo.

Definizione 1.1. Sia A un anello, il centro di A è il sottoanello

$$Z(A) := \{x \in A, xy = yx \forall y \in A\}$$

Definizione 1.2. Un'algebra associativa su un campo K è un anello $(A, +, \cdot, 0, 1)$ che sia anche uno spazio vettoriale su K tale che i gruppi additivi coincidano e che valga per $\forall a \in K$ e $\forall x, y \in A$:

$$a(xy) = (ax)y = x(ay) \tag{1.1}$$

Notazione: per semplicità chiameremo solamente algebra un'algebra associativa.

Nel seguito, A e B denotano due K -algebra.

Definizione 1.3. Un sottoinsieme \mathcal{G} di A è un insieme di generatori della K -algebra A se ogni elemento a di A si può scrivere come combinazione K -lineare di un numero finito di prodotti finiti di elementi di \mathcal{G} e di 1.

Definizione 1.4. Un sottoinsieme B di A è una sottoalgebra se è un sotto-spazio vettoriale dello spazio vettoriale A e un sottoanello dell'anello A . Si può verificare che l'intersezione di due sottoalgebra è una sottoalgebra.

Ricordiamo brevemente le nozioni di ideale destro, sinistro e bilatero.

Definizione 1.5. Sia C un anello con le operazioni di $+$ e di \cdot . Un sottoinsieme I di C è un ideale destro (rispettivamente sinistro) se:

- $(I, +)$ è un sottogruppo di $(C, +)$;
- per ogni $i \in I$ ed ogni $c \in C$, $i \cdot c$ (rispettivamente $c \cdot i$) è un elemento di I .

Diremo che un ideale è bilatero se è sia un ideale destro che sinistro.

D'ora in poi, quando scriveremo ideale, sarà sottinteso che si sta parlando di un ideale bilatero.

Definizione 1.6. Un sottoinsieme I è un ideale della K -algebra A se I è un ideale dell'anello A e un sottospazio di A come spazio vettoriale.

Definizione 1.7. Una mappa da una K -algebra A in una K -algebra B è un omomorfismo di K -algebre se è sia un omomorfismo di anelli che una mappa lineare. Definiamo come di solito monomorfismi, epimorfismi, endomorfismi e automorfismi.

Definizione 1.8. Sia I un ideale della K -algebra A . Otteniamo quindi l'anello quoziente A/I e lo spazio vettoriale A/I che, insieme, costituiscono una K -algebra che chiamiamo algebra quoziente di A rispetto all'ideale I .

Osservazione 1. Se I è un ideale di A , abbiamo l'epimorfismo canonico $v : a \mapsto a + I$ di A in A/I .

Si può anche vedere che se S è un insieme di generatori di A e α e β sono omomorfismi di algebre da A in B tale che $\alpha(s) = \beta(s)$ per ogni $s \in S$, allora $\alpha = \beta$.

Definizione 1.9. Se η è un omomorfismo di K -algebre da A a B , allora $\ker \eta = \eta^{-1}(\{0\})$ è un ideale della K -algebra A ed è chiamato kernel di η .

Osservazione 2. Se I è un ideale contenuto in $\ker \eta$, abbiamo l'omomorfismo indotto $\bar{\eta}$ da A/I a B tale che $\bar{\eta}(a + I) = \eta(a)$. Inoltre si può vedere che $\eta = \bar{\eta}v$ dove v è l'omomorfismo canonico da A in A/I .

Osservazione 3. Sia K un campo ed $A \neq 0$ una K -algebra.

Si vede che l'applicazione $\phi : K \longrightarrow A, a \mapsto a1_A$ è un omomorfismo iniettivo e $Im\phi \subseteq Z(A)$.

Infatti si ha, $\forall a \in K, \forall x \in A$:

$$ax = a(1_A)x,$$

$$(a1_A)x = a(1_Ax) = a(x1_A) = x(a1_A).$$

Quindi il campo $K \cong Im\phi$ è un sottoanello del centro di A e il prodotto per scalari ax coincide col prodotto interno $(a1_A)x$.

Viceversa, sia A un anello e sia K un sottoanello del centro di A che sia un campo, allora A è una K -algebra con il prodotto per scalari $ax, a \in K, x \in A$ definito come il prodotto interno ax ; la proprietà 1.1 è immediata. Ciò ci fa capire che un'algebra sopra K è sostanzialmente una coppia che consiste di un anello e un sottocampo del centro dell'anello.

Potremmo non riuscire a trovare un tale sottocampo: ad esempio \mathbb{Z}_6 non può essere un'algebra su nessun campo. \mathbb{Z}_6 non contiene, infatti, sottocampi: se esistesse $K \subset \mathbb{Z}_6$ sottocampo, allora $1 \in K \Rightarrow K = \mathbb{Z}_6$, ma \mathbb{Z}_6 non è un campo.

Diamo nel seguito esempi di K -algebre così costruite.

Esempio 1.1. Prendiamo E campo e F suo sottocampo. Consideriamo, quindi, E come spazio vettoriale su F in cui il prodotto interno $au, a \in F, u \in E$ è il prodotto per scalari. Il legame fra le strutture di spazio vettoriale e anello di E può essere individuato nel fatto che il gruppo additivo è lo stesso per entrambe e che $a(uv) = (au)v = u(av)$ con $a \in F, u, v \in E$ (verificabile utilizzando le proprietà commutativa e associativa del campo E).

Quindi E è una F -algebra.

Esempio 1.2. Prendiamo ora l'anello dei polinomi $K[x]$ a coefficienti in un campo K . Similarmente all'esempio precedente, oltre alla struttura di anello abbiamo quella di spazio vettoriale sopra il campo K dove il prodotto per scalare è definito come segue:

$$\forall a \in K, \forall f(x) = \sum b_i x^i \in K[x], af(x) = \sum ab_i x^i$$

. Ancora, la struttura additiva è la stessa per le due strutture e rimane verificata la condizione $a(f(x)g(x)) = (af(x))g(x) = f(x)(ag(x))$ con $a \in K, f(x), g(x) \in K[x]$.

Quindi $K[x]$ è una K -algebra.

Esempio 1.3. Consideriamo l'anello $M_n(K)$ delle matrici $n \times n$ a coefficienti nel campo K . Il prodotto per scalari può essere definito così: se $M = (m_{i,j})$ è una matrice $n \times n$, allora $aM = (am_{i,j})$. Ora, sfruttando il fatto che aI_n appartiene al centro dell'anello e la proprietà associativa dell'anello, si può vedere che $a(MN) = aI_n(MN) = ((aI_n)M)N = (aM)N$ e $a(MN) = aI_n(MN) = M(aI_n)N = M(aN)$.

Quindi le matrici $M_n(K)$ formano una K -algebra.

Esempio 1.4. Siano $G = \{s_1 = 1, \dots, s_n\}$ un gruppo finito e K un campo, possiamo definire lo spazio vettoriale $K[G]$ su K con base G ; gli elementi di tale spazio saranno della forma $\sum_{i=1}^n a_i s_i, a_i \in K$ dove $\sum_{i=1}^n a_i s_i = 0$ se e solo se $a_i = 0$ per ogni i . La somma e la moltiplicazione per un elemento di K sono definite naturalmente; ora definiamo un prodotto in $K[G]$ tramite

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i s_i\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j s_j\right) = \sum_{i,j} a_i b_j (s_i s_j)$$

dove $s_i s_j$ è il prodotto interno degli elementi s_i, s_j nel gruppo G . L'elemento neutro moltiplicativo è $1 = s_1$. Usando l'associatività in G è facilmente dimostrabile l'associatività in $K[G]$, la distributiva in K dà la distributiva in $K[G]$ e anche la condizione (1.1) si verifica facilmente.

Quindi $K[G]$ è una K -algebra.

Capitolo 2

Algebra Esterna di un K -spazio vettoriale

Costruzione dell'algebra esterna

Dato V spazio vettoriale su K di dimensione finita, vogliamo estendere tale spazio ad un'algebra A generata da V che abbia la seguente proprietà: $v^2 = 0 \quad \forall v \in V$. Per mantenere la generalità maggiore possibile, inoltre, faremo in modo di non imporre ulteriori condizioni eccettuate, ovviamente, le conseguenze di quelle imposte.

Ora, supponiamo di avere un'algebra così fatta. Il fatto che V generi A equivale a dire che ogni elemento di A è una combinazione K -lineare di 1 e dei monomi $v_1 v_2 \cdots v_k, k \geq 1, v_i \in V$. Ora sia (u_1, u_2, \dots, u_n) una base di V su K , allora ogni vettore $v \in V$ è una combinazione lineare nelle u_i ; quindi ogni monomio del tipo $v_1 v_2 \cdots v_k$ è una combinazione lineare di monomi nelle u_i : A è anche generato da u_1, \dots, u_n .

Consideriamo l'insieme dei monomi $u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_r}$ negli elementi della base (u_1, u_2, \dots, u_n) . Chiameremo un monomio di questo insieme standard se $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ e proveremo che ogni elemento di A è una combinazione lineare di 1 e di monomi standard nelle u_i ; basta provarlo per i monomi sulle u_i . Anzi, proveremo un risultato più forte, cioè che un qualunque monomio nelle u_i che contiene più di una volta un particolare u_i è 0 e, se $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$,

allora:

$$u_{i_{\sigma(1)}} u_{i_{\sigma(2)}} \cdots u_{i_{\sigma(r)}} = (\text{sign} \sigma) u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_r} \quad (2.1)$$

dove $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(r) \end{pmatrix}$ è una permutazione su $\{1, \dots, r\}$ e $\text{sign} \sigma$ il segno di tal permutazione.

Notiamo che una prima conseguenza della proprietà $v^2 = 0$, $\forall v \in V$ è che:

$$0 = (u + v)^2 - u^2 - v^2 = uv + vu \quad (2.2)$$

Quindi abbiamo che

$$uv = -vu, \quad \forall u, v \in V;$$

in particolare abbiamo che:

$$u_i^2 = 0, \quad u_i u_j = -u_j u_i, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (2.3)$$

E' chiaro dalla seconda di queste relazioni che possiamo scambiare u_i consecutivi in un monomio cambiando segno al monomio stesso. Una successione di tali scambi può essere usata per portare un qualsiasi u_i che appare nel monomio accanto a un qualsiasi altro: da ciò viene che un qualsiasi monomio in cui ricorra un certo u_i più di una volta sarà uguale a 0.

Consideriamo ora $u_{i_{\sigma(1)}} u_{i_{\sigma(2)}} \cdots u_{i_{\sigma(r)}}$ dove $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(r) \end{pmatrix}$ è una permutazione di $\{1, 2, \dots, r\}$. Se, ad esempio, abbiamo che $i_{\sigma(j)} > i_{\sigma(j+1)}$ abbiamo che $u_{i_{\sigma(1)}} u_{i_{\sigma(2)}} \cdots u_{i_{\sigma(r)}} = -u_{i_{\sigma(1)}} u_{i_{\sigma(2)}} \cdots u_{i_{\sigma(j-1)}} u_{i_{\sigma(j+1)}} u_{i_{\sigma(j)}} \cdots u_{i_{\sigma(r)}}$ e la nuova permutazione di $\{1, 2, \dots, r\}$ differisce da σ di una trasposizione. Tramite un numero finito di scambi fatti come in precedenza si può passare da $u_{i_{\sigma(1)}} u_{i_{\sigma(2)}} \cdots u_{i_{\sigma(r)}}$ a $\pm u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_r}$. Il numero di questi scambi è il numero di trasposizioni di una fattorizzazione di σ come prodotto di trasposizioni. Da qui, quindi, desumiamo la (2.1).

Ogni elemento di A è, dunque, combinazione lineare degli elementi

$$1, \quad u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_r} \quad \text{con} \quad i_1 < i_2 < \dots < i_r.$$

Il numero di tali elementi non supera quello dei sottoinsiemi $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ dell'insieme $\underline{n} = \{1, 2, \dots, n\}$ incluso l'insieme vuoto: A è di dimensione finita e $\dim A \leq |\mathcal{P}(\underline{n})| = 2^n$. Per ogni sottoinsieme non vuoto $S \subseteq \underline{n}$, possiamo scrivere $S = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$, supponendo $i_1 < i_2 < \dots < i_r$; poniamo:

$$u_S := u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_r}$$

$$u_\emptyset := 1$$

Siano $s, t \in N$, definiamo:

$$\epsilon_{s,t} = \begin{cases} 1 & \text{se } s < t \\ 0 & \text{se } s = t \\ -1 & \text{se } s > t \end{cases}$$

e se $S, T \in \mathcal{P}(\underline{n})$

$$\epsilon_{S,T} = \begin{cases} \prod_{s \in S, t \in T} \epsilon_{s,t} & \text{se } S \neq \emptyset, T \neq \emptyset \\ 1 & \text{se } S = \emptyset \vee T = \emptyset \end{cases}$$

E' chiaro dalla definizione che se $T_1 \neq \emptyset, T_2 \neq \emptyset$ e $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, allora $\epsilon_{S, T_1 \cup T_2} = \epsilon_{S, T_1} \epsilon_{S, T_2}$ e $\epsilon_{T_1 \cup T_2, S} = \epsilon_{T_1, S} \epsilon_{T_2, S}$. Da ciò si vede facilmente che :

$$u_S u_T = \epsilon_{S,T} u_{S \cup T}. \quad (2.4)$$

Dopo tale analisi possiamo iniziare a costruire ciò che chiameremo algebra esterna $\Lambda(V)$ dello spazio vettoriale V . Consideriamo l'insieme dei sottoinsiemi $\mathcal{P}(\underline{n})$ di $\underline{n} = \{1, 2, \dots, n\}$ e sia $\Lambda(V)$ lo spazio vettoriale di dimensione 2^n con $\mathcal{P}(\underline{n})$ come base. Gli elementi di $\Lambda(V)$ possono essere scritti come $\sum_{S \in \mathcal{P}(\underline{n})} a_S S$, $a_S \in K$ e identifichiamo $S \in \mathcal{P}(\underline{n})$ con $1S \in \Lambda(V)$.

Ora definiamo un prodotto:

$$ST = \epsilon_{S,T} (S \cup T) \quad (2.5)$$

che apparterrà a $\Lambda(V)$ ed ora estendiamo per bilinearità su tutto $\Lambda(V)$:

$$\left(\sum a_S S\right)\left(\sum b_T T\right) = \sum \epsilon_{S,T} a_S b_T (S \cup T) \quad (2.6)$$

Vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma per costruzione. Infine abbiamo che per $a \in K, a(XY) = (aX)Y = X(aY)$, se $X = \sum a_S S, Y = \sum b_T T$. Sappiamo inoltre che $\epsilon_{\emptyset, S} = 1 = \epsilon_{S, \emptyset}$, dalla (2.5) abbiamo che $S\emptyset = S = \emptyset S$ e dalla (2.6) che \emptyset è elemento neutro per la moltiplicazione in $\Lambda(V)$. Da ora in poi scriveremo 1 al posto di \emptyset . Vogliamo verificare che presi $R, S, T \in \mathcal{P}(\underline{n})$, allora $(RS)T = R(ST)$. La proprietà è banalmente verificata se uno tra R, S, T è uguale al vuoto, quindi ora assumiamo che siano diversi dal vuoto. Nel caso che almeno due di essi non siano disgiunti avremo che $(RS)T = 0 = R(ST)$. Nel caso siano a 2 a 2 disgiunti:

$$(RS)T = \epsilon_{R,S}(R \cup S)T = \epsilon_{R,S}\epsilon_{R \cup S, T}(R \cup S \cup T) = \epsilon_{R,S}\epsilon_{R,T}\epsilon_{S,T}(R \cup S \cup T)$$

$$R(ST) = \epsilon_{S,T}R(S \cup T) = \epsilon_{S,T}\epsilon_{R \cup S, T}(R \cup S \cup T) = \epsilon_{S,T}\epsilon_{R,S}\epsilon_{R,T}(R \cup S \cup T).$$

Ciò implica la proprietà associativa in $\Lambda(V)$; abbiamo così dimostrato che $\Lambda(V)$ è un'algebra. Ora identifichiamo gli u_i elementi della base di V con i sottoinsiemi $\{i\}$; ciò immerge V in $\Lambda(V)$ come il sottoinsieme degli elementi della forma $\sum a_i u_i$. Inoltre, la (2.5) ci dà che $u_i^2 = 0, u_i u_j = -u_j u_i$ e se $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ allora $u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_r} = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$. Se $v = \sum a_i u_i$ allora $v^2 = \sum a_i^2 u_i^2 + \sum_{i < j} a_i a_j (u_i u_j + u_j u_i) = 0$. Così abbiamo visto che V è un sottospazio di $\Lambda(V)$, che genera $\Lambda(V)$ come algebra e che $v^2 = 0$ per ogni $v \in V$. La dimensione di $\Lambda(V)$ coincide con quella di $\mathcal{P}(\underline{n})$ dal fatto che 1 e $u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_r} = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ costituiscono una base per $\Lambda(V)$.

Chiameremo $\Lambda(V)$ l'algebra esterna del K -spazio vettoriale V .

Notazione: d'ora in poi indicheremo il prodotto interno ab con $a, b \in \Lambda(V)$

con $a \wedge b$.

Prima di procedere c'è un altro fatto importante da notare.

Ora abbiamo una decomposizione diretta di $\bigwedge(V)$ in sottospazi:

$$\bigwedge(V) = \bigwedge^0(V) \oplus \bigwedge^1(V) \oplus \bigwedge^2(V) \oplus \bigwedge^3(V) \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n(V)$$

dove $\bigwedge^0(V) = K$, $\bigwedge^1(V) = V$ e $\bigwedge^r(V)$ è lo spazio generato da tutti i prodotti di $v_1, v_2, \dots, v_r, v_i \in V$. Presa una base (u_1, u_2, \dots, u_n) , $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_r$ è combinazione lineare di monomi $u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \cdots \wedge u_{i_r}$ che saranno nulli oppure \pm un monomio standard. Quindi se $r > 0$ $\bigwedge^r(V)$ è lo spazio generato dai monomi standard di grado r . Poichè i monomi standard insieme a 1 formano una base, si ha la decomposizione di $\bigwedge(V)$ in somma diretta come sopra. Subito ne viene che $\dim \bigwedge^r(V) = \binom{n}{r}$ poichè questo è il numero di monomi standard di grado r ; in particolare $\dim \bigwedge^n(V) = 1$ e $u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_n$ è una base per questo spazio.

La costruzione appena esibita, in realtà, ha un'importanza secondaria rispetto alla proprietà universale seguente.

Teorema 2.1. *Sia L una mappa lineare da un K -spazio vettoriale V ad una K -algebra A tale che $(Lv)^2 = 0$ per ogni $v \in V$; allora L può essere estesa in uno e un sol modo a un omomorfismo di algebre $\eta(L)$ dall'algebra esterna $\bigwedge(V)$ ad A .*

Dimostrazione. Sia V K -spazio vettoriale di dimensione n e sia (u_1, u_2, \dots, u_n) una sua base; poniamo $\bar{v} = Lv$, quindi abbiamo che $\bar{v}^2 = 0$ allora, ragionando come in precedenza, si vede che

$$\bar{u}\bar{v} = -\bar{v}\bar{u} \quad \forall u, v \in V.$$

Posto $\bar{u}_S = \bar{u}_{i_1} \bar{u}_{i_2} \cdots \bar{u}_{i_r}$, con $S = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}, i_1 < i_2 < \cdots < i_r$, allora, sempre ragionando come nella costruzione di $\text{bigwedge}(V)$, si ha:

$$\bar{u}_S \bar{u}_T = \epsilon_{S,T} \bar{u}_{S \cup T}$$

con $\epsilon_{S,T}$ definito come in precedenza e $S, T \in \mathcal{P}(\underline{n})$.

Sia ora $\eta(L)$ una mappa lineare da $\bigwedge(V)$ ad A la cui azione sulla base $\mathcal{B} = \{u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \cdots \wedge u_{i_r}, 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\} \cup \{1\}$ è data da $\eta(L)1 = 1$, $\eta(L)(u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \cdots \wedge u_{i_r}) = \bar{u}_{i_1} \bar{u}_{i_2} \cdots \bar{u}_{i_r}$, ed estendiamo per linearità. Dunque $\eta(L)u_i = \bar{u}_i = Lu_i$ così $\eta(L)v = Lv \quad \forall v \in V$: $\eta(L)$ è un'estensione di L . Ora dimostriamo che è un omomorfismo di algebre. Prendiamo $u_S = u_{s_1} \wedge \cdots \wedge u_{s_n}$ con $s_1 < \cdots < s_n$ e $u_T = u_{t_1} \wedge \cdots \wedge u_{t_m}$ con $t_1 < \cdots < t_m$, e $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, e $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$. Ora,

$$\eta(L)(u_S \wedge u_T) = \eta(L)(\epsilon_{S,T} u_{S \cup T}) = \epsilon_S \bar{u}_{S \cup T}.$$

Inoltre

$$\eta(L)(u_S)\eta(L)(u_T) = \bar{u}_S \bar{u}_T = \epsilon_{S,T} \bar{u}_{S \cup T}$$

quindi

$$\eta(L)(u_S \wedge u_T) = \eta(L)(u_S)\eta(L)(u_T).$$

Ciò implica che se $X = \sum \alpha_S u_S$ e $Y = \sum \beta_T u_T$ allora abbiamo che

$$\eta(L)(X \wedge Y) = (\eta(L)(X))(\eta(L)(Y));$$

così rimane dimostrato che $\eta(L)$ è un omomorfismo di algebre.

L'unicità è chiara. □

Corollario 2.2. *Sia U sottospazio di V , allora la sottoalgebra di $\bigwedge(V)$ generata da U è isomorfa a $\bigwedge(U)$*

Dimostrazione. Sia (u_1, u_2, \dots, u_n) una base per V , allora, come abbiamo visto, ogni elemento di $\bigwedge(V)$ è una combinazione lineare di 1 e dei monomi standard $u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \cdots \wedge u_{i_r}, i_1 < \cdots < i_r$. Dato che $\dim \bigwedge(V) = 2^n$, come abbiamo già detto questi 2^n elementi sono linearmente indipendenti.

Ora, se U è un sottospazio di V , possiamo scegliere una base (u_1, u_2, \dots, u_m) di U e completarla ad una base (u_1, u_2, \dots, u_n) di V . Ciò mostra che i monomi standard nelle u_1, u_2, \dots, u_m e 1 sono linearmente indipendenti. Dal fatto che questi elementi sono contenuti nella sottoalgebra B di $\bigwedge(V)$ generata da U , abbiamo che $\dim B \geq 2^m$. D'altra parte sappiamo che in $\bigwedge(V) \quad u^2 = 0$

$\forall u \in U$, quindi per il teorema (2.1) la mappa lineare $i : U \hookrightarrow \bigwedge(V)$, $u \mapsto u$ può essere estesa in modo unico ad un omomorfismo di algebre

$$\eta(i) : \bigwedge(U) \longrightarrow \bigwedge(V);$$

quindi se $u \in U \subseteq \bigwedge(U)$, $\eta(i)(u) = u \in U \subseteq \bigwedge(V)$. L'immagine di tale omomorfismo è una sottoalgebra di $\bigwedge(V)$ contenente U , quindi è B . Si ha che $\dim \bigwedge(U) = 2^m$ e $\dim B \geq 2^m$ quindi $\dim B = 2^m$; ciò implica che il nostro omomorfismo è un isomorfismo tra $\bigwedge(U)$ e $Im \eta(i) = B$. \square

Osservazione 4. Sia (u_1, u_2, \dots, u_n) una base di V e sia L un endomorfismo lineare di V , consideriamo

$$\tilde{L} : V \longrightarrow \bigwedge(V), v \mapsto L(v);$$

\tilde{L} è una mappa lineare da V alla K -algebra $\bigwedge(V)$, tale che $(\tilde{L}(v))^2 = \tilde{L}(v) \wedge \tilde{L}(v) = 0 \quad \forall v \in V$. Allora per il teorema 2.1 \tilde{L} può essere estesa in un sol modo a un omomorfismo di $\bigwedge(V)$, che denoteremo d'ora in poi con $\eta(L)$ anzichè $\eta(\tilde{L})$; $\eta(L)$ agisce così sulla base dei monomi standard:

$$\eta(L)(u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots \wedge u_{i_r}) = L(u_{i_1}) \wedge L(u_{i_2}) \wedge \dots \wedge L(u_{i_r}).$$

Corollario 2.3. *Se L è un endomorfismo lineare di V e $\eta(L)$ è l'endomorfismo di $\bigwedge(V)$ definito da L , si ha:*

$$\eta(id) = id, \eta(L_1 L_2) = \eta(L_1) \eta(L_2)$$

ed $\eta(L)$ è un automorfismo se e solo se L è biettiva.

Dimostrazione. Dato che l'identità su $\bigwedge(V)$ è anche identità su V è chiaro che $\eta(id) = id$.

Poichè sia $\eta(L_1)\eta(L_1)$ che $\eta(L_1 L_2)$ sono endomorfismi di $\bigwedge(V)$ con la stessa restrizione $L_1 L_2$ su V , abbiamo che $\eta(L_1 L_2) = \eta(L_1)\eta(L_2)$.

Se L è biettiva abbiamo anche la sua inversa L^{-1} che sarà anch'essa un endomorfismo di V . Dunque,

$$LL^{-1} = id = L^{-1}L \Rightarrow \eta(L^{-1})\eta(L) = id = \eta(L)\eta(L^{-1}).$$

Quindi $\eta(L)$ è automorfismo. \square

Ora, sia L un endomorfismo lineare di V e sia $\eta(L)$ l'estensione di L ad un endomorfismo di $\bigwedge(V)$.

Sia $\mathcal{E} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ una base di V , allora è chiaro dalla definizione di $\bigwedge^r(V)$ e da quanto detto nell'osservazione 4 che:

$$\eta(L) \bigwedge^r(V) \subseteq \bigwedge^r(V)$$

In particolare abbiamo che $\eta(L) \bigwedge^n(V) \subseteq \bigwedge^n(V)$ e $\bigwedge^n(V) = \langle u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n \rangle$, quindi esiste $\Delta \in K$ tale che $\eta(L)(u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n) = \Delta u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n$.

Supponiamo

$$Lu_j = \sum l_{j,i} u_i, \quad 1 \leq j \leq n,$$

dunque $M = (l_{i,j})$ è la matrice di L relativa alla base (u_1, u_2, \dots, u_n) , che scriviamo $M = M_{\mathcal{E}}(L)$. Allora

$$\begin{aligned} \Delta u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n &= \eta(L)(u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n) \\ &= L(u_1) \wedge L(u_2) \wedge \dots \wedge L(u_n) \\ &= \left(\sum l_{j_1,i} u_{j_1} \right) \wedge \left(\sum l_{j_2,i} u_{j_2} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum l_{j_n,i} u_{j_n} \right) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_n} l_{j_1,1} l_{j_2,2} \dots l_{j_n,n} u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge \dots \wedge u_{j_n} = \\ &= \sum \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} l_{j_1,1} l_{j_2,2} \dots l_{j_n,n} u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n \\ &= (\det(M)) u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo provato che $L(u_1) \wedge L(u_2) \wedge \dots \wedge L(u_n) = \eta(L)(u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n) = \det(M_{\mathcal{E}}(L)) u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n$. Se L_1 ed L_2 sono due endomorfismi lineari di V e M_1 e M_2 sono rispettivamente le matrici associate alla base (u_1, u_2, \dots, u_n) , allora la matrice associata a $L_1 L_2$ relativa a tale base è $M_1 M_2$.

Quindi abbiamo che

$$\eta(L_1 L_2)(u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n) = \det(M_1 M_2) u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n.$$

D'altra parte $\eta(L_1L_2)(u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_n) = \eta(L_1)\eta(L_2)(u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_n) = \eta(L_1)\det(M_2)(u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_n) = \det(M_1)\det(M_2)u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_n$.

Ciò prova la proprietà moltiplicativa dei determinanti delle matrici di $M_n(K)$:

$$\det(M_1M_2) = \det(M_1)\det(M_2)$$

Concludiamo il capitolo con una proposizione che ci sarà utile nel capitolo 3.

Osservazione 5. Sia V un K -spazio n -dimensionale e sia $\mathcal{E} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ una sua base. Siano v_1, v_2, \dots, v_n vettori di V . Consideriamo l'endomorfismo L di V tale che $L(u_i) = v_i, i = 1, 2, \dots, n$. Allora $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n = \eta(L)(u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_n) = \det(M_{\mathcal{E}}(L))u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_n$ dove $M_{\mathcal{E}}(L)$ è la matrice che ha sulla colonna j -esima le componenti del vettore v_j rispetto a \mathcal{E} ; il suo determinante è denotato nel seguito con $\det_{\mathcal{E}}(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Quindi si ha:

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n = \det_{\mathcal{E}}(v_1, v_2, \dots, v_n)u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_n$$

Proposizione 2.4. *Sia V un K -spazio vettoriale di dimensione finita n , sia $\mathcal{E} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ una sua base e siano $v_1, v_2, \dots, v_p \in V$.*

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (a) $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_p \neq 0$
- (b) v_1, v_2, \dots, v_p sono linearmente indipendenti
- (c) se $p = n$ le due affermazioni precedenti sono equivalenti a:

$$\det_{\mathcal{E}}(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$$

Dimostrazione.

- (a) \Rightarrow (b)

Sia $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_pv_p = 0$ con gli $a_i \in K$ e sia , per esempio, $a_1 \neq 0$, allora

$$v_1 = -a_1^{-1}a_2v_2 - \dots - a_1^{-1}a_pv_p$$

da cui

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p = (-a_1^{-1}a_2v_2 - \dots - a_1^{-1}a_pv_p) \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p = 0$$

poichè dopo aver applicato la distributiva abbiamo almeno una ripetizione di un v_i quindi si annulla tutto il prodotto.

$(b) \Rightarrow (a)$

Completiamo v_1, v_2, \dots, v_p ad una base $(v_1, v_2, \dots, v_p, \dots, v_n)$ di V ;

$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p$ è elemento di una base di $\bigwedge(V)$ e dunque è $\neq 0$.

Se $p = n$, l'equivalenza di (a) e (c) segue dall'osservazione 5. □

Capitolo 3

Grassmanniane

Definizione 3.1. Consideriamo il K -spazio vettoriale n -dimensionale K^n ; sia k un intero, $1 \leq k \leq n$; definiamo Grassmanniana $G(k, n)$ l'insieme di tutti i sottospazi k -dimensionali di K^n . Se V è un K -spazio vettoriale di dimensione n e non vogliamo scegliere una base per V , scriviamo $G(k, V)$. Possiamo immediatamente osservare che un sottospazio k -dimensionale di uno spazio vettoriale K^n è anche un $(k - 1)$ -sottospazio proiettivo del corrispondente spazio proiettivo $\mathbb{P}^{n-1}(K)$, cosicchè possiamo pensare $G(k, n)$ come l'insieme dei $(k - 1)$ -sottospazi di $\mathbb{P}^{n-1}(K)$; quando pensiamo alle Grassmanniane in tale maniera, scriveremo $\mathbb{G}(k - 1, n - 1)$ oppure $\mathbb{G}(k - 1, \mathbb{P}(V))$.

Teorema 3.1. *Sia $W \subseteq V$ un sottospazio k -dimensionale e sia $\mathcal{W} = (w_1, w_2, \dots, w_k)$ una base di W , allora abbiamo una mappa di insiemi ben definita:*

$$\psi : G(k, V) \longrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^k(V)), \quad \psi(W) = [w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_k]$$

Questa inclusione è chiamata immersione di Plücker.

Scelta una base $\mathcal{E} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ in V e fissato un ordine sui monomi standard $u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots \wedge u_{i_k}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, si ha una base di $\bigwedge^k(V)$ e le corrispondenti coordinate omogenee su $\mathbb{P}(\bigwedge^k(V))$; queste sono chiamate coordinate di Plücker.

Dimostrazione. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio k -dimensionale e sia $\mathcal{W} = (w_1, w_2, \dots, w_k)$ una base di W , possiamo associare a W il vettore

$$\lambda = w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_k \in \bigwedge^k(V);$$

λ è determinato da W a meno di moltiplicazione per scalari: se scegliamo una base differente (t_1, t_2, \dots, t_k) , l'osservazione 5 e la proposizione 2.4 ci dicono che $t_1 \wedge t_2 \wedge \dots \wedge t_k = \det_W(t_1, t_2, \dots, t_k) w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_k$, quindi il corrispondente vettore $\lambda' = t_1 \wedge t_2 \wedge \dots \wedge t_k$ verrebbe semplicemente moltiplicato per il determinante della matrice di cambio di base.

Quindi il punto $[w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_k]$ di $\mathbb{P}(\bigwedge^k(V))$ non dipende dalla scelta della base di W e ψ è ben definita. Ora dimostriamo l'iniettività.

Per assurdo supponiamo che ψ non sia iniettiva. Siano S, T due sottospazi k -dimensionali e siano rispettivamente $\mathcal{S} = (s_1, s_2, \dots, s_k)$, $\mathcal{T} = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ due loro basi. Supponiamo che $\psi(S) = \psi(T)$ con

$$\psi(S) = [s_1 \wedge s_2 \wedge \dots \wedge s_k], \quad \psi(T) = [t_1 \wedge t_2 \wedge \dots \wedge t_k].$$

$s_1 \wedge s_2 \wedge \dots \wedge s_k$ e $t_1 \wedge t_2 \wedge \dots \wedge t_k$ sono quindi proporzionali:

$$s_1 \wedge s_2 \wedge \dots \wedge s_k = \rho t_1 \wedge t_2 \wedge \dots \wedge t_k$$

Ora prendiamo $t_i \in \mathcal{T}$

$$w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_k \wedge t_i = \rho t_1 \wedge t_2 \wedge \dots \wedge t_k \wedge t_i = 0$$

quindi $w_1, w_2, \dots, w_k, t_i$ sono linearmente dipendenti per la 2.4 e si può scrivere:

$$t_i = \sum \alpha_j w_j, \quad \alpha_j \in K, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$$

dunque $T \subseteq S$.

Invertendo di ruoli di s_1, s_2, \dots, s_k e di t_1, t_2, \dots, t_k , avremo che $S \subseteq T$, quindi $T = S$; ψ è quindi iniettiva. \square

Lemma 3.2. *Prendiamo V \mathbb{C} -spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Sia W un sottospazio 2-dimensionale, sia (w_1, w_2) una*

sua base, $w_1 = \sum \alpha_i e_i$ e $w_2 = \sum \beta_j e_j$ e sia M_W la matrice

$$M_W = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}.$$

Le coordinate di Plücker, rispetto alla base formata dai vettori $e_i \wedge e_j$, sono i minori principali della matrice M_W .

Dimostrazione. Consideriamo \mathbb{C}^4 con la base $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Sia ora $\bigwedge^2(\mathbb{C}^4)$ con la base $\mathcal{F} = (e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4)$ associata ad \mathcal{E} ; avremo quindi $\mathbb{P}(\bigwedge^2(\mathbb{C}^4))$ con l'associato riferimento proiettivo $\mathcal{F}_{\mathbb{P}} = \{\mu \mathcal{F}, \mu \in \mathbb{C}^*\}$ Sia ora $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ con $w_1 = \sum \alpha_i e_i$ e $w_2 = \sum \beta_j e_j$. Per l'immersione di Plücker

$$\psi : G(2, 4) \longrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^2(\mathbb{C}^4))$$

si ha:

$$\begin{aligned} \psi(W) &= [w_1 \wedge w_2] = [\sum \alpha_i e_i \wedge \sum \beta_j e_j] = [(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4) \wedge \\ &(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4)] = [\alpha_1 \beta_2 e_1 \wedge e_2 + \alpha_1 \beta_3 e_1 \wedge e_3 + \alpha_1 \beta_4 e_1 \wedge e_4 + \alpha_2 \beta_1 e_2 \wedge \\ &e_1 + \alpha_2 \beta_3 e_2 \wedge e_3 + \alpha_2 \beta_4 e_2 \wedge e_4 + \alpha_3 \beta_1 e_3 \wedge e_1 + \alpha_3 \beta_2 e_3 \wedge e_2 + \alpha_3 \beta_4 e_3 \wedge e_4 + \alpha_4 \beta_1 e_4 \wedge e_1 + \\ &\alpha_4 \beta_2 e_4 \wedge e_2 + \alpha_4 \beta_3 e_4 \wedge e_3] = [(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) e_1 \wedge e_2 + (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1) e_1 \wedge e_3 + (\alpha_1 \beta_4 - \\ &\alpha_4 \beta_1) e_1 \wedge e_4 + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) e_2 \wedge e_3 + (\alpha_2 \beta_4 - \alpha_4 \beta_2) e_2 \wedge e_4 + (\alpha_3 \beta_4 - \alpha_4 \beta_3) e_3 \wedge e_4]. \end{aligned}$$

Nelle coordinate di Plücker rispetto al riferimento proiettivo $\mathcal{F}_{\mathbb{P}}$ abbiamo che $\psi(W) = [v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5] = [\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1, \alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1, \alpha_1 \beta_4 - \alpha_4 \beta_1, \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2, \alpha_2 \beta_4 - \alpha_4 \beta_2, \alpha_3 \beta_4 - \alpha_4 \beta_3]$. Scriviamo ora la matrice di rappresentazione di W

$$M_W = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}.$$

I v_i sono esattamente i minori principali della matrice M_W , quindi rimane dimostrato l'asserto. \square

Esempio 3.1. Dimostriamo che l'immagine della Grassmanniana delle rette di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, cioè vettorialmente la $G(2, \mathbb{C}^4)$, tramite l'immersione di Plücker ψ in $\mathbb{P}(\wedge^2(\mathbb{C}^4))(\cong \mathbb{P}^5(\mathbb{C}))$ è contenuta nell'iperquadrica \mathcal{C} di equazione

$$x_0x_5 - x_1x_4 + x_2x_3 = 0.$$

Prendiamo \mathbb{C}^4 con la sua base canonica e prendiamo $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ con $w_1 = \sum \alpha_i e_i$ e $w_2 = \sum \beta_j e_j$ con $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$ e e_i, e_j vettori della base canonica. Ora, sfruttando il lemma precedente, scriviamo la rappresentazione matriciale di W

$$M_W = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}$$

dunque le coordinate di Plücker saranno $\psi(W) = [w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5] = [\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1, \alpha_1\beta_4 - \alpha_4\beta_1, \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2, \alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3]$.

Verifichiamo direttamente che $\psi(W)$ appartiene a \mathcal{C} , provando che:

$$w_0w_5 - w_1w_4 + w_2w_3 = 0$$

$$\begin{aligned} & (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3) - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)(\alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2) + (\alpha_1\beta_4 - \alpha_4\beta_1)(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) \\ &= \alpha_1\beta_2\alpha_3\beta_4 - \alpha_1\beta_2\beta_3\alpha_4 - \beta_1\alpha_2\alpha_3\beta_4 + \beta_1\alpha_2\beta_3\alpha_4 - \alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4 + \alpha_1\beta_2\beta_3\alpha_4 + \\ & \beta_1\alpha_2\alpha_3\beta_4 - \beta_1\beta_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4 - \alpha_1\beta_2\alpha_3\beta_4 - \beta_1\alpha_2\beta_3\alpha_4 + \beta_1\beta_2\alpha_3\alpha_4 = 0 \end{aligned}$$

Siccome ogni $\psi(W)$ con $W \in G(2, \mathbb{C}^4)$ appartiene a \mathcal{C} , allora

$$\psi(G(2, \mathbb{C}^4)) \subseteq \mathcal{C}.$$

Bibliografia

- [1] Jacobson - Basic Algebra I - W. H. Freeman and Company - 1910
- [2] Harris - Algebraic Geometry, A First Course - Springer-Verlag - 1992
- [3] Sernesi - Geometria 1 - Bollati Boringhieri - 1989
- [4] Idá - Note di Algebra Superiore - 2008/2009