

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

Criterio energetico per determinare l'orientazione di una faglia trasforme

Relatore:
Prof. Maurizio Bonafede

Presentata da:
Matteo Scarponi

Correlatore:
Prof.ssa Maria Elina Be-
lardinelli

Sessione II
Anno Accademico 2013/2014

Sommario

In questa tesi si affronta la problematica di determinare l'orientazione della superficie di faglia che sarà interessata da scorrimento relativo, assegnato un certo sforzo tettonico $\Delta\sigma$ in base ad un criterio di massima energia rilasciata. Dapprima, introdotte le nozioni di base della meccanica dei continui, si studia il criterio di fagliazione dato dalla teoria di Anderson. In seguito, una volta acquisito questo primo risultato, si applica la teoria delle dislocazioni elastiche, per studiare dal punto di vista energetico la stessa faglia, situata in un semispazio elastico.

Assumendo che la faglia massimizzante l'energia rilasciata in seguito alla frattura del mezzo continuo, assegnati i dati del problema, sia quella che più probabilmente sarà soggetta ad attivazione e scorrimento, si confronta quanto ottenuto con i risultati della teoria della fagliazione di Anderson.

Entrambi gli approcci presentano conclusioni simili, gli angoli di orientamento infatti sono compresi tra $\frac{1}{2}\text{atan}\frac{1}{f}$ e $\frac{\pi}{4}$ con l'orientazione che tende a $\frac{\pi}{4}$, diminuendo l'influenza dell'attrito o viceversa aumentando lo sforzo applicato sulla superficie di faglia. Tuttavia i due approcci presentano significative differenze quando l'energia rilasciata è molto maggiore di zero.

Indice

1	Introduzione	3
2	Meccanica dei continui e campo di sforzi nella terra	5
2.1	Nozioni di meccanica dei continui	5
2.2	Campo di sforzi nella Terra	6
2.2.1	Superficie libera	8
2.2.2	Configurazione di pressione litostatica	9
2.2.3	Pressione media e sforzi deviatorici	9
2.2.4	Rotazione di un tensore	10
2.3	Teoria della fagliazione di Anderson	11
2.3.1	Legge di Amonton	11
2.3.2	Faglia dip-slip con attrito	12
2.3.3	Faglie trasformi in presenza di attrito	14
3	Teoria delle dislocazioni	17
3.1	Dislocazioni elastiche	17
3.2	Dislocazioni elastiche piane	20
3.2.1	Dislocazioni elementari a vite	22
3.2.2	Dislocazioni rettilinee chiuse e distribuzioni di dislocazioni	24
3.2.3	Rilascio di energia dovuto dalla dislocazione	26
3.2.4	Metodo delle immagini	28
3.3	Studio della dislocazione a vite dal punto di vista energetico e confronto con il criterio di Anderson	30
3.3.1	Calcolo delle configurazioni di sforzo	31
3.3.2	Calcolo dell'energia e ricerca del massimo	36
4	Conclusione	42

Capitolo 1

Introduzione

Ogni giorno in tutto il globo terrestre circa cinquanta terremoti possono essere avvertiti localmente e lungo una scala temporale di qualche giorno si verificano terremoti in grado di provocare danni visibili alle strutture.

Le onde sismiche, che si propagano all'interno della Terra fino ad arrivare anche in superficie, trasportano in forma cinetica parte dell'energia liberata durante il processo sismico in corrispondenza della sorgente. L'energia rimanente viene dissipata in calore attraverso il lavoro speso contro le forze d'attrito ed in parte convertita in energia di deformazione del mezzo.

In questo lavoro l'attenzione viene focalizzata sulla sorgente dell'evento sismico e si tenta di individuare la configurazione che possa dare luogo al fenomeno sismico in base a considerazioni fisiche.

La porzione di Terra che entra in gioco in questo fenomeno, qualche decina di chilometri all'interno della litosfera crostale, può essere approssimata su brevi scale di tempo come un continuo elastico. Questa valida approssimazione permette di applicare i principali risultati della meccanica dei continui e della teoria dell'elasticità al problema geofisico preso in considerazione.

In particolare la prima parte del capitolo 2 sarà deputata a raccogliere le nozioni di base della meccanica dei continui che consentono di descrivere, attraverso il formalismo tensoriale, le deformazioni e le tensioni che si presentano all'interno di un continuo. A seguire, è presentata la teoria della fagliazione di Anderson, che permette di individuare, data una frattura ed una superficie di faglia, quale sia la configurazione di sforzo che possa dare luogo ad uno scorrimento lungo la superficie di faglia, in presenza d'attrito. In particolare tale configurazione è quella che, assegnati i parametri del problema, richiede lo 'sforzo' minimo necessario per innescare lo scorrimento lungo la superficie di faglia.

Una volta analizzata la teoria della fagliazione di Anderson ed i suoi principali risultati, sarà introdotta la teoria dell'elasticità e delle dislocazioni elastiche

nel capitolo 3.

In particolare, il fine ultimo di questa tesi, è di confrontare i risultati ottenuti dalla teoria di Anderson con quelli ottenuti studiando una particolare dislocazione elastica, rappresentativa di una frattura avvenuta all'interno di un mezzo continuo in presenza d'attrito.

Come già noto dalla teoria, i movimenti relativi lungo la superficie di faglia, che interessano la fase successiva alla creazione della frattura, causano dissipazione di energia sotto forma di lavoro svolto contro le forze d'attrito.

Assumendo che la faglia massimizzi l'energia rilasciata, sia anche quella soggetta a scorrimento, si confronteranno i risultati, ottenuti attraverso la teoria di Anderson ed attraverso considerazioni energetiche rispettivamente, per analizzare i punti in accordo e disaccordo fra i due approcci.

Capitolo 2

Meccanica dei continui e campo di sforzi nella terra

2.1 Nozioni di meccanica dei continui

La meccanica dei continui è uno strumento fondamentale nello studio dei problemi geofisici.

Vediamo qui di seguito alcune quantità fondamentali per la modellizzazione dei mezzi continui elastici, in prima approssimazione anche omogenei ed isotropi, che sono interessati da faglie tettoniche descritte tramite dislocazioni elastiche.

In generale, possiamo descrivere le proprietà di un mezzo continuo attraverso grandezze tensoriali, che utilizzeremo per descrivere le deformazioni e gli sforzi (forze per unità di superficie), che interessano tali mezzi.

Detto \vec{x} il vettore posizione che indica i punti costituenti il mezzo continuo deformabile ed $\vec{u}(\vec{x}, t)$ il campo di spostamento, che indica lo spostamento subito del punto di coordinate iniziali \vec{x} nell'intervallo temporale $[0, t]$, andiamo a definire il tensore infinitesimo di deformazione.

Consideriamo due punti $P(x_1, x_2, x_3)$ e $Q(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$, distanti inizialmente ds_0 e ds dopo la deformazione, vale:

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\epsilon_{ij} dx_i dx_j \quad (2.1.1)$$

Lavoreremo sempre nell'approssimazione di deformazioni infinitesime all'interno di mezzi isotropi ed omogenei; assunto questo, il tensore infinitesimo di deformazione diventa:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.1.2)$$

All'interno di un mezzo continuo, oltre alle deformazioni che interessano il corpo, è opportuno definire un tensore che descriva le forze per unità di superficie che agiscono all'interno del mezzo.

Tale tensore è detto tensore di sforzo ed è indicato con τ_{ij} .

Dato un sistema di riferimento (x_1, x_2, x_3) , le componenti di τ_{ij} rappresentano rispettivamente la componente j -esima della trazione $\vec{T}(\vec{n})$ agente sul piano coordinato, la cui normale \vec{n} è diretta in verso positivo lungo l'asse coordinato i -esimo.

Un'altra formula notevole che va menzionata è la formula di Cauchy, la quale ci permette di esprimere la trazione $\vec{T}(\vec{n})$ agente su una generica superficie dS , orientata con normale \vec{n} , in un dato sistema di riferimento:

$$T_i(\vec{n}) = n_k \tau_{ki}. \quad (2.1.3)$$

Definite ora queste quantità, possiamo scrivere l'equazione del moto che utilizzeremo nei paragrafi successivi.

Occorre dunque esplicitare l'espressione classica $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$:

$$\frac{d}{dt} \int_{B(t)} \rho \vec{v} dV = \int_{B(t)} \vec{f} dV + \oint_{\partial B(t)} \vec{T}(\vec{r}; \vec{n}) dS \quad (2.1.4)$$

ove gli integrali sono estesi a tutto il volume del corpo $B(t)$ o ad una sua porzione arbitraria ed alla relativa superficie $\partial B(t)$.

\vec{f} è la densità di forze per unità di volume agenti sul corpo mentre la trazione $\vec{T}(\vec{r}; \vec{n})$ rappresenta, come indicato sopra, la densità di forze per unità di superficie agenti sul corpo.

Attraverso il teorema di Gauss e la formula di Cauchy possiamo scrivere la 2.1.4 come un unico integrale posto uguale a 0, trovando un'espressione dell'equazione del moto valida localmente, per ogni singolo punto del nostro mezzo:

$$\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{dv_i}{dt} \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.1.5)$$

Nel seguito saremo interessati alle equazioni che descrivono le condizioni di equilibrio statico del nostro mezzo, per cui le 2.1.5 diventano:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0. \quad (2.1.6)$$

2.2 Campo di sforzi nella Terra

La trazione descritta da τ_{ij} è quella esercitata dalle particelle poste sulla faccia positiva della superficie a quelle poste sulla faccia negativa della superficie

(la definizione della normale orientata alla superficie permette di distinguere la faccia positiva dalla faccia negativa).

Dalla definizione di τ_{ij} , segue immediatamente che le componenti diagonali del tensore τ_{11}, τ_{22} e τ_{33} rappresentano gli *sforzi normali* che agiscono normalmente sui piani coordinati definiti rispettivamente da $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$.

In assenza di momenti angolari dovuti alla magnetizzazione della materia τ_{ij} risulta simmetrico e può essere diagonalizzato.

Relazione agli autovalori:

$$\tau_{ij}n_j = \sigma n_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2.1)$$

Denotati $n^{(i)}$ ed $\sigma^{(i)}$ gli autovettori ed i rispettivi autovalori, vediamo che, diagonalizzando il tensore di sforzo, il sistema di riferimento costruito utilizzando come base gli autovettori normalizzati, permette di individuare tre direzioni dello spazio in cui vi sono solo sforzi normali ed il tensore di sforzo è ridotto in forma diagonale.

Tali direzioni sono dette *assi principali di sforzo* ed i rispettivi piani normali sono detti *piani principali*. Su tali piani sono presenti solo sforzi normali mentre sono tutti nulli gli sforzi di taglio (le componenti non diagonali del tensore di sforzo sono tutte nulle in questo sistema di riferimento).

Ordinando quindi gli autovettori in ordine crescente possiamo individuare $n^{(1)}$ *asse di massima compressione*, $n^{(2)}$ come l'*asse intermedio* ed $n^{(3)}$ come l'*asse di massima tensione*.

Gli *assi principali di sforzo* coincidono con gli *assi principali di deformazione* e ciò si può vedere utilizzando la relazione costitutiva di un mezzo elastico, isotropo e omogeneo:

$$\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (2.2.2)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.2.3)$$

La figura 2.1 mostra gli assi principali ed i rispettivi piani, per un certo volume di mezzo continuo.

Nel sistema di riferimento degli assi principali gli sforzi di taglio sono tutti nulli. I piani che presentano gli sforzi di taglio massimi sono inclinati di 45 gradi rispetto ai piani principali e possiamo ricavare la seguente espressione dello sforzo di taglio massimo:

$$S_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) \quad (2.2.4)$$

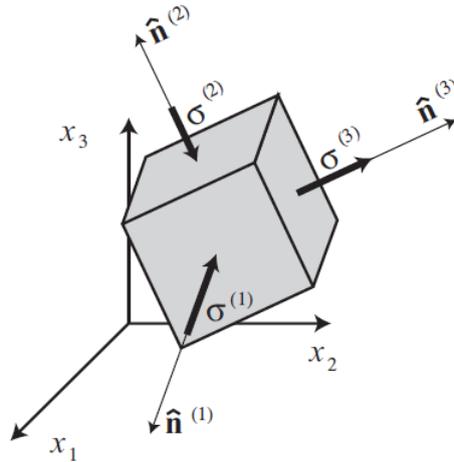


Figura 2.1: Assi e piani principali, i vettori $\vec{n}^{(i)}$ individuano le 3 direzioni lungo le quali gli sforzi sono solo normali

2.2.1 Superficie libera

Vediamo ora il concetto di superficie *libera*, cioè libera da sforzi. La superficie terrestre è solitamente considerata una superficie *libera*.

Definito l'asse z come la verticale diretta verso il basso, risultano nulli tutti gli sforzi $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zz} = 0$ sulla superficie $z=0$.

Definiamo σ_z lo sforzo principale verticale e σ_x e σ_y siano gli sforzi principali orizzontali.

La terza componente dell'equazione di equilibrio richiede:

$$\rho g + \frac{\partial \tau_{j3}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.2.5)$$

Supponendo che l'asse principale verticale sia tale anche in profondità ($\tau_{13} = \tau_{23} = 0$) risulta:

$$\rho g + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad \implies \quad \sigma_z = - \int_0^z \rho g dz \quad (2.2.6)$$

Come si può notare, $\sigma_z = 0$ in $z = 0$ soddisfa alla condizione di superficie libera.

Per gli sforzi principali orizzontali risulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 & \implies \sigma_x = h_1(y, z) \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 & \implies \sigma_y = h_1(x, z) \end{aligned}$$

Tali approssimazioni sono valide solo in prossimità della superficie e non è detto, in generale, che un asse principale sia verticale anche in profondità rispetto alla superficie.

2.2.2 Configurazione di pressione litostatica

La configurazione *litostatica* è configurazione di sforzo nella quale si assume che ad una certa profondità z al di sotto della superficie terrestre, gli sforzi principali siano del tipo: $\sigma^{(1)} = \sigma^{(2)} = \sigma^{(3)} = -p_{lit}$. Di conseguenza, $\tau_{ij} = -p_{lit}\delta_{ij}$ diagonale.

L'equazione di equilibrio risulta:

$$\rho g \delta_{i3} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} = 0.$$

Risulta dunque:

$$\frac{\partial p_{lit}}{\partial x} = \frac{\partial p_{lit}}{\partial y} = 0 \quad e \quad \frac{\partial p_{lit}}{\partial z} = \rho g$$

da cui:

$$p_{lit}(z) = \int_0^z \rho g dz.$$

Come si nota, p_{lit} dipende unicamente da z e prende il nome di *pressione litostatica*, che si suppone descriva in prima approssimazione lo stato di sforzo della Terra a grande profondità.

Plausibile perchè cresce linearmente con la profondità e, crescendo la temperatura proporzionalmente con la profondità, i meccanismi di deformazione anelastica rilasciano le componenti di taglio dello sforzo.

2.2.3 Pressione media e sforzi deviatorici

In generale risulta molto utile scomporre un generico campo di sforzo τ_{ij} in *pressione media* $p_m = -\frac{1}{3}\tau_{kk}$ ed una componenete *deviatorica* $\tau'_{ij} = \tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij} = \tau_{ij} + p_m\delta_{ij}$:

$$\tau_{ij} = -p_m\delta_{ij} + \tau'_{ij}.$$

Gli assi principali del tensore di sforzo deviatorico τ'_{ij} coincidono con gli assi principali del tensore di sforzo τ_{ij} mentre gli autovalori differiscono a meno di una costante:

$$\sigma'^{(i)} = \sigma^{(i)} + p_m$$

Per costruzione, il tensore deviatorico ha traccia nulla, dunque deve valere:

$$\begin{aligned} \sigma'^{(1)} + \sigma'^{(2)} + \sigma'^{(3)} &= 0 \\ \sigma'^{(1)} \leq 0 \quad \sigma'^{(3)} &\geq 0. \end{aligned}$$

Un mezzo continuo elastico subisce una deformazione descritta da ϵ_{ij} in funzione dello sforzo τ_{ij} applicato, in accordo con la relazione costitutiva elastica che descrive il mezzo.

Tuttavia in presenza di sforzi molto elevati, le relazioni costitutive elastiche, che prevedono deformazioni crescenti in corrispondenza di sforzi crescenti, cessano di valere ed il materiale si frattura.

Descriveremo nei paragrafi successivi le caratteristiche delle fratture che possono interessare un mezzo continuo.

2.2.4 Rotazione di un tensore

Torniamo a considerare il tensore di sforzo nel sistema di riferimento degli assi principali. Come abbiamo già visto, nel sistema di riferimento dove la base è costituita dagli autovettori normalizzati del tensore di sforzo, quest'ultimo assume la forma diagonale con gli autovalori (cioè gli sforzi normali nelle tre direzioni coordinate) sulla diagonale.

Risulta particolarmente utile saper effettuare rotazioni del sistema di riferimento intorno ad uno degli assi coordinati e vedere come cambiano le componenti del tensore nel nuovo riferimento, effettuando una rotazione di un angolo θ .

Consideriamo il tensore di sforzo nel sistema degli assi principali:

$$\tau_{ij} = \begin{vmatrix} \tau_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{vmatrix}$$

Supponiamo di effettuare una rotazione intorno all'asse z, che rimane fisso.

La rotazione nel piano xy può essere descritta da una matrice di rotazione 2x2 del tipo:

$$C_{ij} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix}$$

Essendo τ_{ij} un tensore di rango 2, esso può essere ruotato applicando due volte la matrice di rotazione C_{ij} nel seguente modo:

$$\tau'_{ij} = C_{ki} C_{lj} \tau_{kl} = C_{ik}^T \tau_{kl} C_{lj} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tau_{xx} & 0 \\ 0 & \tau_{yy} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix}$$

Svolgendo i prodotti otteniamo:

$$\tau'_{ij} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\tau_{xx} + \tau_{yy}}{2} + \frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{2} \cos(2\theta) & -\frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{2} \sin(2\theta) \\ -\frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{2} \sin(2\theta) & \frac{\tau_{xx} + \tau_{yy}}{2} - \frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{2} \cos(2\theta) \end{array} \right\|$$

2.3 Teoria della fagliazione di Anderson

Una delle applicazioni più importanti della teoria dell'elasticità in geofisica è data dalla teoria della fagliazione di Anderson, proposta nel 1905.

La teoria mostra che, diversamente da quanto ci si potrebbe aspettare, in presenza di attrito, il piano piano di faglia su cui è localizzata la frattura non coincide con il piano inclinato di 45 gradi rispetto ai piani principali, sul quale agisce il massimo sforzo di taglio.

In generale, supponendo che in un mezzo prefratturato siano disponibili tutte le faglie possibili a diversi angoli δ , è possibile, utilizzando i risultati della teoria, individuare la faglia che più probabilmente sarà soggetta a scorrimento lungo la superficie di frattura.

Vediamo ora la teoria e come sia possibile arrivare a questa previsione, che confronteremo nel capitolo 3 con i risultati ottenuti studiando l'energia rilasciata dallo scorrimento relativo lungo la superficie di faglia.

2.3.1 Legge di Amonton

La legge di Amonton è una semplice legge che descrive il fenomeno dell'attrito, e la si può utilizzare per capire come questo influisca nello scorrimento relativo lungo un piano di faglia, originato in seguito ad una frattura.

Denotiamo con f_s ed f_d rispettivamente il coefficiente di attrito statico ed il coefficiente di attrito dinamico.

Denotiamo con $p_n = -\sigma_n$ la pressione normale alla superficie di faglia e con τ_{max} lo sforzo di taglio massimo che possa essere applicato prima di innescare lo scorrimento della faglia. Allora, vale la relazione

$$|\tau_{max}| = -f_s \sigma_n = f_s p_n \quad (2.3.1)$$

Si noti che se lo sforzo alla superficie è compressivo, la pressione p_n è positiva. Durante lo scorrimento relativo lungo il piano di frattura si ha invece:

$$|\tau| = f_d p_n \quad (2.3.2)$$

Come si vede in laboratorio, questa legge fornisce una buona approssimazione per diversi tipi di rocce se per f_s si impiega il massimo valore del rapporto $\frac{\tau}{p_n}$ calcolato in vari episodi di scorrimento, prima che subentri un regime di

scorrimento stazionario.

Ad esempio, $f_s = 0.85$ è un tipico valore per il coefficiente d'attrito statico per rocce cristalline asciutte, mentre in presenza di fluidi f_s può essere molto più basso. Vediamo ora alcune tipologie di faglia che possiamo descrivere applicando la legge di Amontou.

2.3.2 Faglia dip-slip con attrito

Consideriamo una faglia con angolo di immersione δ . Supponiamo che nella litosfera sia presente un regime di sforzo litostatico, sovrapposto ad uno sforzo incrementale $\Delta\sigma_{ij}$ di origine tettonica, il quale presenti $\Delta\sigma_z = 0$ per la condizione di superficie libera.

Tale sforzo tettonico sia inoltre descritto da una configurazione di deformazione piana, che prevede $\Delta\epsilon_x = 0$.

Sostituendo nella relazione costitutiva otteniamo:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \implies 0 = \frac{1 + \nu}{E}\Delta\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}(\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{yy})$$

Da cui:

$$\Delta\sigma_{xx} = \nu\Delta\sigma_{yy}$$

Dunque, la configurazione di sforzo che andiamo a considerare è la seguente:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= -\rho g z \\ \sigma_x &= -\rho g z + \nu\Delta\sigma \\ \sigma_y &= -\rho g z + \Delta\sigma\end{aligned}$$

Si noti che in base al segno di $\Delta\sigma$ si avranno faglie normali oppure inverse. Appliciamo ora la legge di Amontou per trovare la condizione limite di scorrimento lungo il piano di faglia. Per fare questo dobbiamo calcolare la trazione di taglio sul piano di faglia τ_{max} e la normale al piano di faglia σ_n . Come mostrato in figura, effettuiamo una rotazione del sistema di riferimento di un angolo δ positivo intorno all'asse x. In questo modo, l'asse y' viene disposto sul piano di faglia, mentre l'asse z' risulta essere perpendicolare alla superficie di faglia.

Risulta ora molto semplice identificare $\sigma_n = \tau_{z'z'}$ e $\tau = \tau_{z'y'}$, come mostrato in figura 2.2.

Recuperiamo ora le formule utilizzate per la rotazione di un tensore e le utilizziamo per esplicitare $\tau_{i'j'}$.

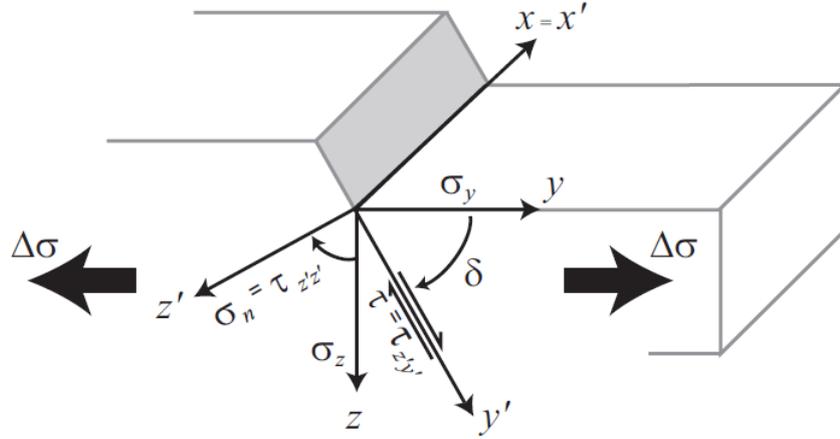


Figura 2.2: Identificazione dello sforzo di taglio e dello sforzo normale per una faglia dip-slip con attrito.

Risulta:

$$\sigma = \tau_{z'z'} = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} - \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \cos(2\delta) \quad (2.3.3)$$

$$\tau = \tau_{z'y'} = -\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \sin(2\delta) \quad (2.3.4)$$

Sostituendo σ_y e σ_z otteniamo:

$$\sigma_n = -\rho g z + \frac{\Delta\sigma}{2}(1 - \cos(2\delta))\tau = -\frac{\Delta\sigma}{2} \sin(2\delta) \quad (2.3.5)$$

Possiamo assumere che σ_n sia sempre negativo poichè alle tipiche profondità crostali $\rho g z$ è sicuramente maggiore di $\Delta\sigma$; si ha anche $\sin(2\delta) > 0$ poichè $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$.

All'atto dello scorrimento deve essere quindi soddisfatta la condizione data dalla legge di Amonton:

$$|\tau| = -f_s \sigma_n$$

cioè

$$\frac{1}{2}|\Delta\sigma| \sin(2\delta) = f_s \left[\rho g z - \frac{1}{2} \Delta\sigma (1 - \cos(2\delta)) \right]$$

$$\pm \frac{1}{2} \Delta\sigma \sin(2\delta) = f_s \left[\rho g z - \frac{1}{2} \Delta\sigma (1 - \cos(2\delta)) \right]$$

dove il \pm inserito nell'ultima equazione tiene conto del segno di $\Delta\sigma$.
Possiamo ora ricavare $\Delta\sigma$ dall'equazione precedente:

$$\Delta\sigma = \frac{2f_s\rho gz}{\pm \text{sen}(2\delta) + f_s(1 - \text{cos}(2\delta))} \quad (2.3.6)$$

L'espressione 2.3.6 rappresenta lo sforzo tettonico incrementale necessario allo scorrimento della faglia inclinata con un certo angolo δ , in presenza di attrito rappresentato dal coefficiente f_s .

Supponiamo ora che siano pre-esistenti faglie in tutti i possibili angoli δ , caratterizzate dalla stessa soglia di rottura.

Supponendo di far aumentare $\Delta\sigma$ a partire da 0, possiamo cercare l'angolo δ che minimizza lo sforzo $\Delta\sigma$ necessario per lo scorrimento quindi, di fatto, cercare la faglia che presenta la maggior probabilità di attivarsi rispetto alle altre.

Imponiamo:

$$\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\delta} = 0 \implies \tan(2\delta) = \mp \frac{1}{f_s} \quad (2.3.7)$$

Essendo $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ e $0 < 2\delta < \pi$, risulta:

$$\delta = \frac{1}{2}(\pi - \arctan(\frac{1}{f_s})) \quad (2.3.8)$$

$$\delta = \frac{1}{2}\arctan(\frac{1}{f_s})$$

Come si può notare, δ tende a 45 gradi (angolo che individua il piano con il massimo sforzo di taglio) solo quando f_s tende a 0. In presenza di attrito quindi, secondo la teoria della fagliazione di Anderson, la faglia che si attiva presenta $\delta \neq 45$.

La figura 2.3 mostra l'andamento di δ e $\Delta\sigma$ come indicato dalla teoria di Anderson.

2.3.3 Faglie trasformati in presenza di attrito

Vediamo ora l'applicazione della teoria di Anderson alla configurazione, che studieremo in seguito anche dal punto di vista energetico: la faglia trasforme. Data la configurazione di sforzo:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -\rho gz; \\ \sigma_x &= -\rho gz + \Delta\sigma_x; \\ \sigma_y &= -\rho gz - \Delta\sigma_y; \\ \Delta\sigma_x &> 0 \quad e \quad \Delta\sigma_y > 0 \end{aligned}$$

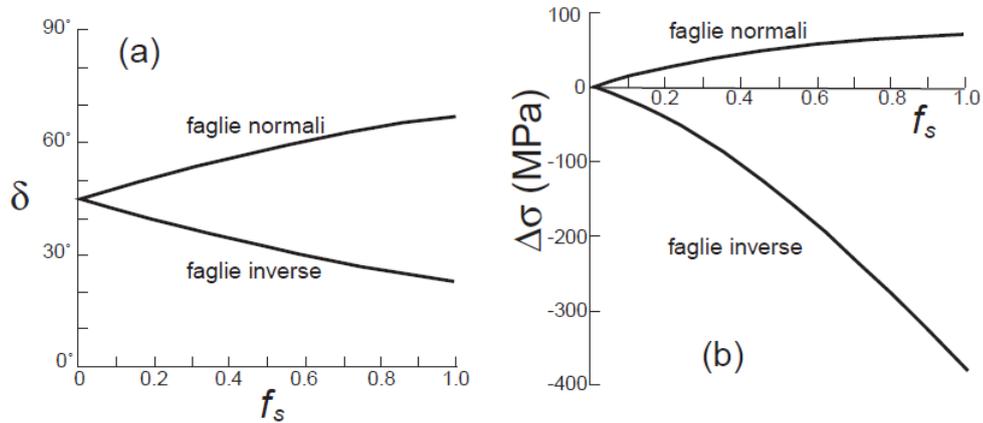


Figura 2.3: Angolo di inclinazione δ (a) e sforzo $\Delta\sigma$ (b).

Come sappiamo i due piani con sforzo di taglio massimo sono orientati di 45 gradi rispetto ai piani principali.

Consideriamo dunque un piano di faglia verticale inclinato di θ rispetto all'asse x, dove θ varia fra 0 e π , come mostrato in figura 2.4.

Applicando una rotazione di un angolo θ al tensore di sforzo nel riferimento degli assi principali, troviamo la configurazione di sforzo in un sistema di riferimento generico, ruotato di θ rispetto al precedente.

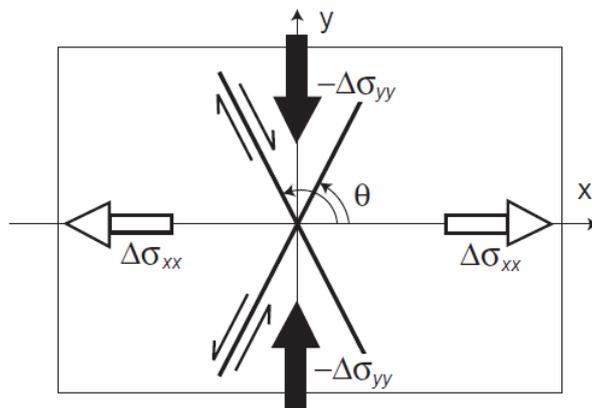


Figura 2.4: Faglia trasforme ed assi principali

Come sopra, siamo interessati alla normale e allo sforzo di taglio:

$$\tau = \tau_{y'x'} = -\frac{1}{2}(\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y)\text{sen}(2\theta)$$

$$\sigma_n = \tau_{y'y'} = -\rho gz + \frac{1}{2}(\Delta\sigma_x - \Delta\sigma_y) - \frac{1}{2}(\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y)\text{cos}(2\theta)$$

$\tau_{x'y'}$ è negativo se θ è nel primo quadrante, positivo se θ è nel secondo (il segno dello sforzo di taglio distingue le faglie destre dalle faglie sinistre). Tenendo lo sforzo normale negativo $\sigma_n < 0$, andiamo ad imporre la condizione limite per lo scorrimento secondo la teoria di Anderson:

$$|\tau| = -f_s\sigma_n$$

diventa:

$$\frac{1}{2}(\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y)|\text{sen}(2\theta)| = f_s[\rho gz - \frac{1}{2}(\Delta\sigma_x - \Delta\sigma_y) + \frac{1}{2}(\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y)\text{cos}(2\theta)]$$

dove abbiamo $|\text{sen}(2\theta)| = \pm\text{sen}(2\theta)$ con il + se θ sta in $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e con il - se θ sta in $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

Possiamo ricavare dunque lo sforzo deviatorico massimo dalla precedente condizione ed ottenere:

$$\frac{1}{2}(\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y) = \frac{f_s[\rho gz - \frac{1}{2}(\Delta\sigma_x - \Delta\sigma_y)]}{\pm\text{sen}(2\theta) - f_s\text{cos}(2\theta)}. \quad (2.3.9)$$

In analogia con quanto fatto nella sottosezione precedente, supponiamo che siano presenti faglie ad ogni possibile valore di θ e, incrementando il valore dello sforzo di taglio τ a partire da 0, cerchiamo il θ che soddisfa la condizione di scorrimento minimizzando lo sforzo massimo.

Derivando la 2.3.9 rispetto a θ otteniamo:

$$\pm \text{cos}(2\theta) + f_s\text{sen}(2\theta) = 0, \quad \rightarrow \tan(2\theta) = \mp \frac{1}{f_s} \quad (2.3.10)$$

Dove il segno superiore fa riferimento a θ nel primo quadrante, mentre il secondo fa riferimento a θ nel secondo quadrante.

Capitolo 3

Teoria delle dislocazioni

Quello che faremo in questo capitolo sarà introdurre la teoria delle dislocazioni elastiche, per poi applicarla ad una dislocazione particolare per studiarne il rilascio di energia.

Supponendo che la faglia interessata dal maggior rilascio di energia sia anche quella più passibile di attivazione, confronteremo il risultato ottenuto dalla massimizzazione dell'energia rilasciata in seguito allo scorrimento con quanto ottenuto dalla teoria della fagliazione di Anderson.

3.1 Dislocazioni elastiche

Le deformazioni elastiche in un materiale possono essere prodotte non soltanto dall'azione di forze esterne, ma anche generate da difetti della struttura interna. Tali sono le *dislocazioni*, che influenzano le proprietà elastiche dei materiali. Attraverso la teoria dell'elasticità trattiamo gli aspetti macroscopici delle dislocazioni, applicandone i risultati a problemi della geofisica.

Consideriamo una superficie Σ limitata da una curva D , che chiamiamo *linea di dislocazione*.

L'orientazione della superficie Σ è definita dalla normale alla superficie \vec{n} il cui verso è scelto in maniera arbitraria mentre l'orientazione della curva D è definita dal vettore tangente alla curva $\vec{\tau}$, scelto secondo la convenzione antioraria (una volta definito il vettore normale alla superficie \vec{n}).

La faccia positiva di Σ , che indichiamo con Σ^+ , sia soggetta ad uno spostamento costante $\Delta\vec{u} = \vec{b}$ rispetto alla faccia negativa Σ^- della superficie dislocativa.

La relazione che *definisce* una dislocazione con vettore di Burgers \vec{b} è la

seguinte:

$$\oint_L du_i = -b_i \quad (3.1.1)$$

dove L è la curva chiusa attraversata dalla *linea di dislocazione* D , mostrata in figura 3.1.

Il segno a secondo membro è motivato dal fatto che \vec{b} è definito come

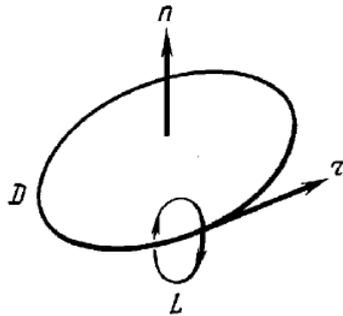


Figura 3.1: Linea di dislocazione D e curva chiusa L (Immagine presa dal volume Fisica Teorica 7: Teoria dell'elasticità Landau Lifshitz)

la differenza fra lo spostamento sulla faccia positiva Σ^+ della superficie di dislocazione e quello sulla faccia negativa Σ^- e che la curva L vada dalla faccia positiva a quella negativa girando attorno alla linea di dislocazione.

Ciò che risulta importante notare nei problemi di dislocazione è quanto segue: il campo di spostamento \vec{u} non è continuo in tutto lo spazio ma la superficie di dislocazione Σ e la linea di dislocazione D sono domini singolari per \vec{u} e le sue derivate. La discontinuità che il campo di spostamento subisce nel passaggio da Σ^- a Σ^+ è rappresentata dal vettore di Burgers \vec{b} .

La figura 3.2 mostra un esempio di dislocazione dove sono riportate tutte le grandezze citate nella descrizione.

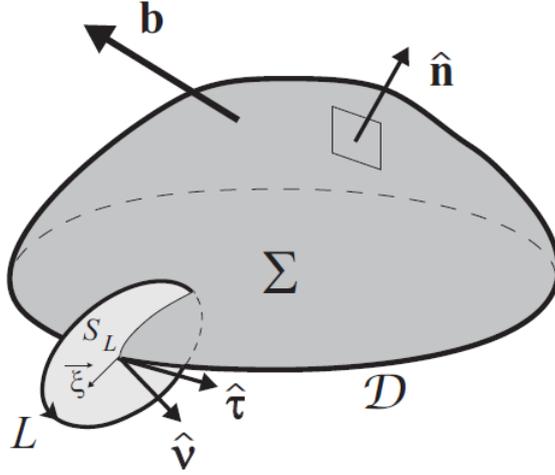


Figura 3.2: Esempio di dislocazione

Ciò detto possiamo ricavare l'equazione caratteristica di una dislocazione, che utilizzeremo per trovare la soluzione di alcuni problemi dislocativi. In particolare la 3.1.1 può essere riscritta come:

$$\oint_L du_i = \oint_L \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k = \oint_L w_{ki} dx_k. \quad (3.1.2)$$

Applicando il teorema di Stokes per ciascuna componente i -esima trasformiamo l'integrale di linea in un integrale di superficie

$$\oint_L w_{ki} dx_k = \int_{S_L} e_{lmk} \frac{\partial}{\partial x_m} w_{ki} \nu_l dS \quad (3.1.3)$$

dove S_L è una superficie arbitraria con normale unitaria $\vec{\nu}$ e contorno L .

La 3.1.1 può essere riscritta in modo che essa valga per una qualsiasi curva L (anche esterna a D) attraverso la delta di Dirac nel seguente modo:

$$b_i = \int_{S_L} b_i \delta(\vec{\xi}) \tau_l \nu_l dS \quad (3.1.4)$$

dove $\vec{\xi}$ individua un punto di S_L a partire dalla linea di dislocazione D ; in questo modo l'integrale 3.1.4 è non nullo solo se L racchiude D .

Il prodotto $\nu_l \tau_l dS$ rappresenta l'elemento di superficie normale a D . La 3.1.1 può essere riscritta attraverso la 3.1.3 e la 3.1.4 come un unico integrale sulla superficie arbitraria S_L e la condizione di annullamento diventa:

$$e_{lmk} \frac{\partial}{\partial x_m} w_{ki} + b_i \tau_l \delta(\vec{\xi}) \quad (3.1.5)$$

Contraendo la 3.1.5 con e_{nil} e applicando l'identità $e - \delta$ si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial x_n} w_{kk} - \frac{\partial}{\partial x_i} w_{ni} + e_{nil} b_i \tau_l \delta(\vec{\xi}) = 0^1 \quad (3.1.6)$$

Dall'equazione dell'elastostatica per mezzi omogenei isotropi, in assenza di forza di volume, che si scrive

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_n} w_{kk} + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} w_{kn} + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} w_{nk} = 0 \quad (3.1.7)$$

isoliamo il termine $\frac{\partial w_{nk}}{\partial x_k}$ e lo sostituiamo nella 3.1.6 ottenendo:

$$\frac{\partial}{\partial x_n} w_{kk} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_n} w_{kk} + \frac{\partial}{\partial x_k} w_{kn} = -e_{nil} b_i \tau_l \delta(\vec{\xi}).$$

Riscrivendo w_{ki} tramite la definizione otteniamo finalmente l'equazione caratteristica della dislocazione, che in formalismo tensoriale risulta essere:

$$\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} = -e_{nil} b_i \tau_l \delta(\vec{\xi}). \quad (3.1.8)$$

Utilizzando il modulo di Poisson ν , la 3.1.8 nel formalismo vettoriale diventa:

$$\frac{1}{1 - 2\nu} = \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla^2 \vec{u} = \vec{\tau} \times \vec{b} \delta(\vec{\xi}) \quad (3.1.9)$$

Ora siamo in grado di utilizzare l'equazione di dislocazione 3.1.9 per descrivere dislocazioni in casi particolari, che saranno affrontati nei prossimi paragrafi.

3.2 Dislocazioni elastiche piane

Lo studio delle dislocazioni in condizioni di deformazione piana (o antipiana) risulta essere particolarmente semplice ma è molto importante ai fini della comprensione fisica dei fenomeni di frattura.

In particolare, un esempio di dislocazione con deformazione piana può essere descritto dalle condizioni seguenti:

$$u_x = u_x(x, y), u_y = u_y(x, y), u_z = 0;$$

¹Nota bene: è necessario stare attenti nei punti singolari $\vec{\xi} = 0$. Infatti in tal caso non è possibile scambiare gli ordini di derivazione nei primi due termini dell'equazione.

mentre una dislocazione con deformazione antipiana può essere descritta da:

$$u_z = u_z(x, y), u_x = u_y = 0.$$

In entrambi i casi, per invarianza traslazionale si assume che la linea di dislocazione sia disposta parallelamente all'asse z . Consideriamo dunque la dislocazione piana mostrata in figura 3.3:

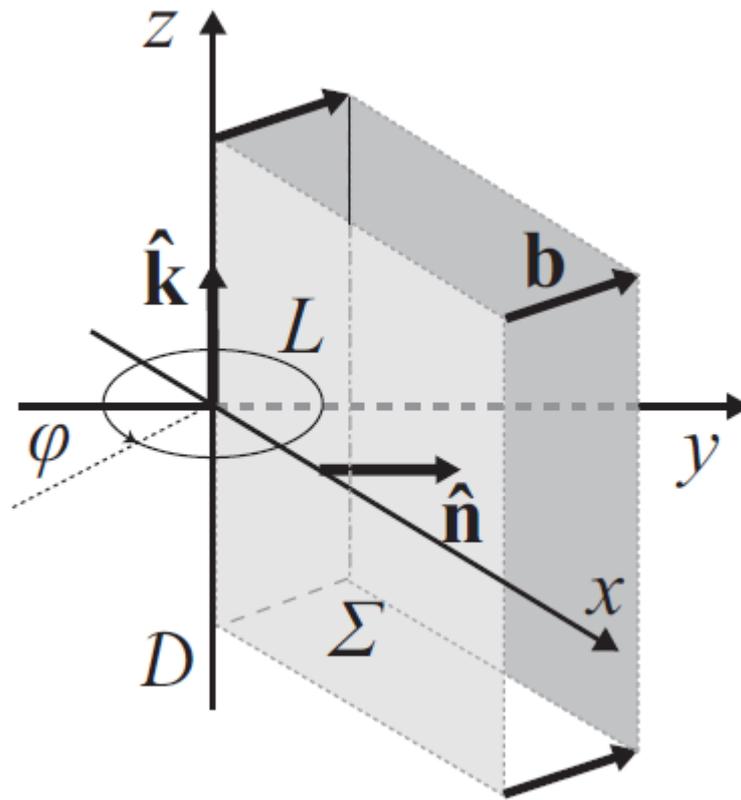


Figura 3.3: Dislocazione elastica piana elementare

La dislocazione è definita dalla superficie $\Sigma = [(x, y, z); x > 0, y = 0, -\infty < z < +\infty]$, delimitata dalla linea di dislocazione $D = [(x, y, z); x = y = 0]$ passante per l'origine del sistema di riferimento e coincidente con l'asse z di tale sistema.

L'orientazione della superficie Σ è definita dalla normale $\vec{n} = \vec{j}_y$, mentre l'orientazione della linea di dislocazione D è definita dal vettore \vec{k} . Tale linea

di dislocazione si chiude all'infinito intorno al perimetro della superficie di dislocazione Σ .

Come già discusso, il vettore di Burgers $\vec{b} = \Delta\vec{u}$ rappresenta lo spostamento della faccia positiva di Σ rispetto alla faccia negativa, nonchè la discontinuità del campo di spostamento \vec{u} .

Sempre in riferimento alla 3.3, la condizione di dislocazione risulta $\oint_L du_i = -b_i$, mentre l'equazione caratteristica della dislocazione diventa:

$$\frac{1}{1-2\nu} = \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla^2 \vec{u} = \vec{\tau} \times \vec{b} \delta(\vec{r}) \quad (3.2.1)$$

$$\vec{r} = (x, y) \quad \delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)$$

Possiamo ora maneggiare l'equazione 3.2.1 per descrivere vari tipi di dislocazioni, in base alla direzione del vettore di Burgers.

Ci concentriamo, in particolare, sulle *dislocazioni a vite* che presentano un vettore di Burgers diretto lungo l'asse z .

3.2.1 Dislocazioni elementari a vite

Consideriamo la superficie di dislocazione Σ nel semipiano $y=0$ con $x > 0$ mostrata in figura 3.4, orientata secondo la normale $\vec{n} = \vec{j}$, con linea di dislocazione disposta lungo l'asse z .

Il vettore di Burgers $\vec{b} = b\vec{k}$ sia diretto lungo l'asse z . Il secondo membro della 3.1.9 è nullo. Essendo la soluzione indipendente da z e supponendo $u_x = u_y = 0$, $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ e la 3.1.9 diventa: $\nabla^2 u_z = 0$, accompagnata dalla 3.1.1.

La soluzione è data da:

$$u_z(x, y) = -\frac{b}{2\pi}\Phi, \quad \Phi = \Im [\ln(x + iy)]$$

Per simmetria sommiamo $\frac{b}{2}$ al campo di spostamento; in questo modo, u_z vale $+\frac{b}{2}$ in $x > 0$ e $y = 0^+$ mentre vale $-\frac{b}{2}$ in $x > 0$ e $y = 0^-$.

Senza alterare i campi di deformazione e sforzo, questo equivale a scegliere la determinazione di Φ che va da $-\pi$ in $y = 0^+, x > 0$ a $+\pi$ in $y = 0^-, x > 0$.

Dunque il campo di spostamento può essere scritto nel modo seguente:

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{b}{2\pi} \text{Atan}\left(\frac{x}{y}\right), \\ \text{Atan}\left(\frac{x}{y}\right) &= -\Phi = +\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{x}{y} \quad \text{se } y > 0 \\ \text{Atan}\left(\frac{x}{y}\right) &= -\Phi = -\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{x}{y} \quad \text{se } y < 0 \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

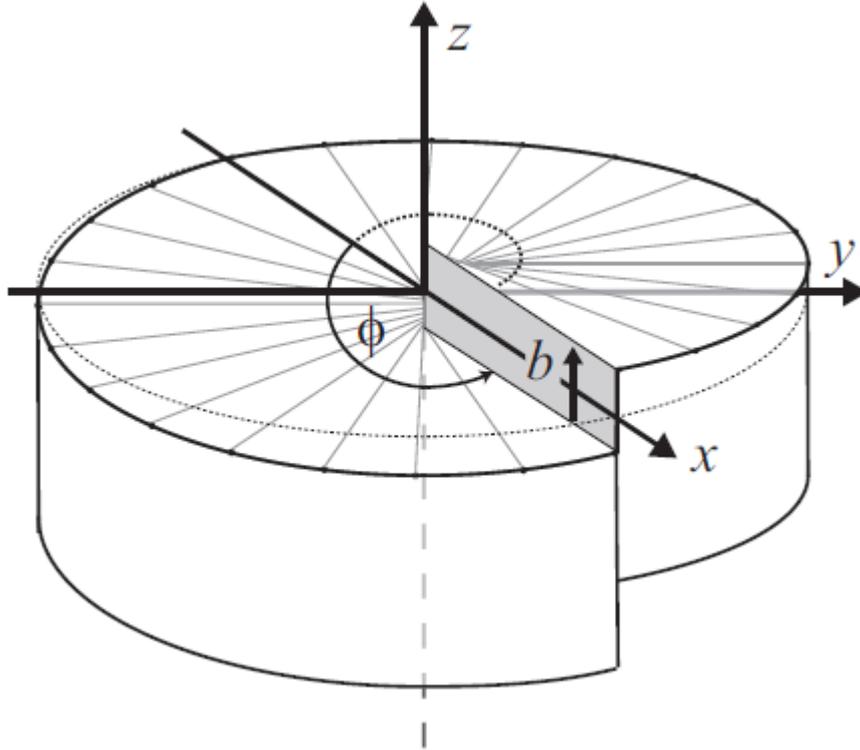


Figura 3.4: Dislocazione elementare a vite

In questo modo, si può vedere che il campo di spostamento presenta una discontinuità pari a b fra $y = 0^-$ e $y = 0^+$ per $x > 0$ ma è continuo e derivabile altrove.

Direttamente dalla 3.2.3 possiamo calcolare il tensore di infinitesimo di deformazione ed il tensore di sforzo utilizzando le definizioni. Le uniche componenti non nulle risultano:

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{b}{4\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = 2\mu\epsilon_{xz} \quad (3.2.3)$$

$$\epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial y} = -\frac{b}{4\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = 2\mu\epsilon_{yz}$$

3.2.2 Dislocazioni rettilinee chiuse e distribuzioni di dislocazioni

La precedente soluzione presenta una discontinuità nel semipiano $y = 0$, $0 < x < +\infty$ e descrive una cosiddetta *dislocazione elementare*, con una sola linea di dislocazione che si chiude all'infinito intorno al perimetro della superficie di dislocazione Σ .

Si dicono *chiuse* le dislocazioni che si aprono lungo una certa linea di dislocazione e si chiudono su un'altra linea di dislocazione: ad esempio possiamo considerare una dislocazione che si apre lungo la linea di dislocazione $x = x_1$, $y = 0$ e si chiude lungo la linea di dislocazione $x = x_2$, $y = 0$.

Una soluzione che descriva una dislocazione di questo tipo può essere facilmente ottenuta per sovrapposizione, sommando la soluzione di una dislocazione elementare con vettore di Burgers \vec{b} e linea di dislocazione $x = x_1$, $y = 0$ con l'analoga soluzione con vettore di Burgers $-\vec{b}$ e linea di dislocazione $x = x_2$, $y = 0$.

In questo modo il campo di spostamento è discontinuo solo sulla superficie descritta da $x_1 < x < x_2$, $y = 0$.

Nota la soluzione per una dislocazione elementare a vite nel piano xz , soluzione per una generica dislocazione a vite chiusa diventa:

$$u_z = \frac{b}{2\pi} \left[\arctan \frac{x - x_1}{y} - \arctan \frac{x - x_2}{y} \right] \quad (3.2.4)$$

dove i termini in $\frac{\pi}{2}$ delle funzioni $\text{Atan}\left(\frac{x}{y}\right)$ si sono semplificati.

Analogamente, le componenti dei tensori di deformazione e sforzo per una dislocazione chiusa a vite si ottengono sovrapponendo i risultati ottenuti per la dislocazione a vite elementare:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xz} &= \frac{b}{4\pi} \left[\frac{y}{(x - x_1)^2 + y^2} - \frac{y}{(x - x_2)^2 + y^2} \right]; & \tau_{xz} &= 2\mu\epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} &= -\frac{b}{4\pi} \left[\frac{x - x_1}{(x - x_1)^2 + y^2} - \frac{x - x_2}{(x - x_2)^2 + y^2} \right]; & \tau_{yz} &= 2\mu\epsilon_{yz} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Generalizziamo ulteriormente quanto abbiamo appena visto: la discontinuità del campo di spostamento \vec{u} sulla superficie di dislocazione chiusa definita da $a < x < b$, $y = 0$, non è necessariamente costante. Supponiamo che tale discontinuità sia descritta da una funzione variabile $\Delta u(x)$ e consideriamo al momento solo dislocazioni a vite.

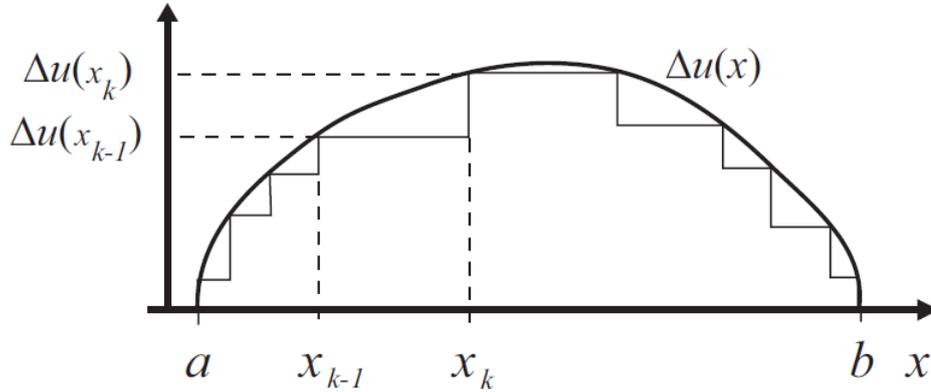


Figura 3.5: Distribuzione di dislocazioni rettilinea

Δu può essere approssimata, come mostrato in figura 3.5, attraverso una funzione costante a tratti nei sottointervalli ottenuti dalla scomposizione finita dell'intervallo $a < x < b$ che delimita la superficie di dislocazione: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

Possiamo allora trovare lo spostamento risultante dalla sovrapposizione di una serie di dislocazioni definite dalla funzione $\Delta u(x)$, u_z risulta quindi essere:

$$u_z \simeq \frac{1}{2\pi} \Delta u(x_0) \arctan\left(\frac{x - x_0}{y}\right) + [\Delta u(x_1) - \Delta u(x_0)] \arctan\left(\frac{x - x_1}{y}\right) + \dots \quad (3.2.6)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} [\Delta u(x_n) - \Delta u(x_{n-1})] \arctan\left(\frac{x - x_n}{y}\right)$$

Se $\Delta u(x_0) = 0$, supponendo di avere scomposizioni sempre più fini la 3.2.6 diventa

$$u_z(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b D(x') \arctan\left(\frac{x - x'}{y}\right) dx', \quad D(x') = \frac{\partial \Delta u(x')}{\partial x'}. \quad (3.2.7)$$

Il termine $D(x')$ introdotto nella 3.2.7 è la **densità di dislocazioni**.

Analogamente, si possono ottenere per sovrapposizione le espressioni degli sforzi prodotti da una dislocazione a vite data una certa distribuzione di

dislocazioni:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \frac{\mu}{2\pi} \int_a^b D(x') \frac{y}{(x-x')^2 + y^2} dx' \\ \tau_{yz} &= -\frac{\mu}{2\pi} \int_a^b D(x') \frac{x-x'}{(x-x')^2 + y^2} dx'\end{aligned}\tag{3.2.8}$$

Le espressioni 3.2.8 possono essere utilizzate per calcolare lo sforzo rilasciato da distribuzione di dislocazioni rettilinee assegnata $D(x)$.

In generale l'espressione da tenere presente per calcolare lo sforzo generato da una sorgente dislocativa, posta in uno spazio elastico illimitato, omogeneo ed isotropo, è la seguente:

$$\tau_{ij}(x, y) = \int_a^b D(x') \tau_{ij}^{el}(x-x', y) dx' \tag{3.2.9}$$

dove τ_{ij}^{el} denota lo sforzo generato da una dislocazione elementare a vite, con vettore di Burgers unitario.

Data una distribuzione di dislocazioni a vite nel piano xz e lo sforzo elementare τ_{ij}^{el} , facendo il limite per $y \rightarrow 0$ della 3.2.9 si può calcolare la trazione di taglio sulla superficie di dislocazione:

$$\tau_{yz}(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \left[-\frac{\mu}{2\pi} \int_a^b D(x') \frac{x-x'}{(x-x')^2 + y^2} \right]. \tag{3.2.10}$$

3.2.3 Rilascio di energia dovuto dalla dislocazione

Un altro concetto molto importante da affrontare nello studio di un fenomeno dislocativo è il rilascio di energia dovuto alla dislocazione stessa.

Un processo dislocativo porta il corpo in questione da una configurazione iniziale, caratterizzata da sforzo e deformazione iniziali τ_{ij}^0 e ϵ_{ij}^0 , ad una configurazione finale caratterizzata da $\tau_{ij}^1 = \tau_{ij}^0 + \tau_{ij}^c$ e $\epsilon_{ij}^1 = \epsilon_{ij}^0 + \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i^c}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^c}{\partial x_i})$ (la notazione c indica i contributi dovuti al crack dislocativo).

Sia V il volume del corpo ed S la superficie esterna del corpo come mostrato in figura 3.6. Supponiamo dunque che tale corpo sia soggetto ad una dislocazione caratterizzata da una superficie dislocativa Σ .

Affinchè il processo avvenga in maniera spontanea senza la necessità di un intervento esterno, è necessario che l'energia E^1 dello stato finale sia inferiore all'energia della configurazione iniziale E^0 .

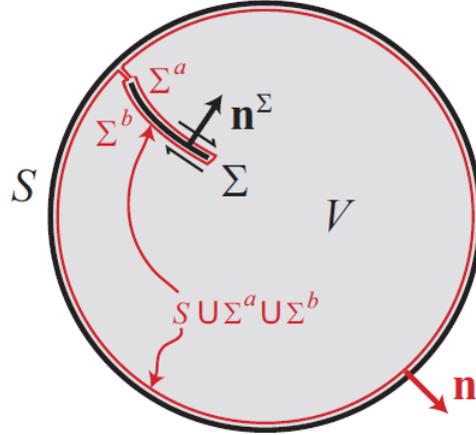


Figura 3.6: Corpo continuo con superficie libera e superficie di dislocazione interna

La differenza di energia $E^0 - E^1$ rappresenta l'energia rilasciata che diventa energia cinetica (spesa nella propagazione delle onde elastiche nel mezzo) e lavoro compiuto contro l'attrito e dissipato sotto forma di calore.

L'attrito è responsabile di uno sforzo residuo τ^1 nella condizione statica finale.

Le densità di energia per unità di volume sono le seguenti:

$$\mathcal{E}^0 = \frac{1}{2} \tau_{ij}^0 \epsilon_{ij}^0 \quad (3.2.11)$$

$$\mathcal{E}^1 = \frac{1}{2} \tau_{ij}^1 \epsilon_{ij}^1 = \frac{1}{2} (\tau_{ij}^0 + \tau_{ij}^c) (\epsilon_{ij}^0 + u_{i,j}^c)$$

dove $u_{i,j}^c = \frac{\partial u_i^c}{\partial x_j}$. Sviluppando la 3.2.11 otteniamo

$$\mathcal{E}^1 = \mathcal{E}^0 + \frac{1}{2} \tau_{ij}^c u_{i,j}^c + \frac{1}{2} \tau_{ij}^c \epsilon_{ij}^0 = \mathcal{E}^0 + \frac{1}{2} \tau_{ij}^1 u_{i,j}^c + \frac{1}{2} \tau_{ij}^0 u_{i,j}^c. \quad (3.2.12)$$

Possiamo dunque calcolare:

$$\Delta E = \int_V (\mathcal{E}^0 - \mathcal{E}^1) dV = -\frac{1}{2} \int_V (\tau_{ij}^0 + \tau_{ij}^1) u_{i,j}^c dV \quad (3.2.13)$$

Fissando una condizione statica iniziale ed una condizione statica finale, che soddisfazione alle equazioni di equilibrio 2.1.6 in assenza di forze di volume $\tau_{ij,j}^0 = 0$ e $\tau_{ij,j}^1 = 0$, possiamo riscrivere il

$$\Delta E = -\frac{1}{2} \int_V [(\tau_{ij}^0 + \tau_{ij}^1) u_i]_{,j} dV$$

che, applicando il teorema di Gauss al volume V delimitato dalla frontiera $\partial V = S \cup \Sigma^a \cup \Sigma^b$, diventa

$$\Delta E = -\frac{1}{2} \int_S (\tau_{ij}^0 + \tau_{ij}^1) u_i n_j dS - \frac{1}{2} \int_{\Sigma^a} (\tau_{ij}^0 + \tau_{ij}^1) u_i^a n_j^a dS - \frac{1}{2} \int_{\Sigma^b} (\tau_{ij}^0 + \tau_{ij}^1) u_i^b n_j^b dS.$$

L'integrale su S è nullo perchè, considerando la Terra, S è una superficie libera dove $\tau_{ij} n_j = 0$. Inoltre possiamo notare che i vettori normali uscenti da ∂V , n_j^a su Σ^a e n_j^b su Σ^b , puntano all'interno della regione dislocata. Quindi, possiamo definire per Σ , data la normale n^Σ orientata in uno dei due modi possibili, una faccia positiva Σ^a ed una faccia negativa Σ^b .

A questo punto la 3.2.14 diventa

$$\Delta E = +\frac{1}{2} \int_{\Sigma^+} (\tau_{ij}^0 + \tau_{ij}^1) u_i^+ n_j^\Sigma d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Sigma^-} (\tau_{ij}^0 + \tau_{ij}^1) u_i^- n_j^\Sigma d\Sigma$$

e quindi

$$\Delta E = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\tau_{ij}^0 + \tau_{ij}^1) \Delta u_i n_j^\Sigma d\Sigma \quad (3.2.14)$$

dove $\Delta u_i = u_i^+ - u_i^-$ è lo spostamento della faccia Σ^+ rispetto alla faccia Σ^- . Si può notare che la 3.2.14 è indipendente dalla scelta di n_i^Σ ; se avessimo scelto $n_i^\Sigma = n_i^a = -n_i^b$ sarebbe stato $\Sigma^+ = \Sigma^b$ e $\Sigma^- = \Sigma^a$ e dunque $u_i^b = u_i^+$ e $u_i^a = u_i^-$. Così facendo, cambiano di segno sia n_i^Σ che Δu_i e la 3.2.14 non cambia.

3.2.4 Metodo delle immagini

Le considerazioni nel paragrafo 3.2.1 valgono qualora si stia trattando una sorgente dislocativa posta in uno spazio elastico isotropo, omogeneo ed **illimitato**.

Vediamo ora il *metodo delle immagini*, che consente di descrivere facilmente lo stato di sforzo generato da una sorgente dislocativa, posta in un semispazio isotropo e omogeneo; cioè posta in prossimità di una superficie libera, sulla quale le componenti dello sforzo sono tutte nulle.

Facciamo ora riferimento alla figura 3.7.

Consideriamo per il momento la soluzione per una sorgente dislocativa S posta in uno spazio elastico illimitato e sia tale sorgente localizzata in $z > 0$. In generale questa soluzione avrà sforzi non nulli applicati sul piano $z = 0$. Definiamo con \vec{u} il campo di spostamento prodotto dalla sorgente S e definiamo con \vec{u}' il campo di spostamento prodotto da una *sorgente immagine*

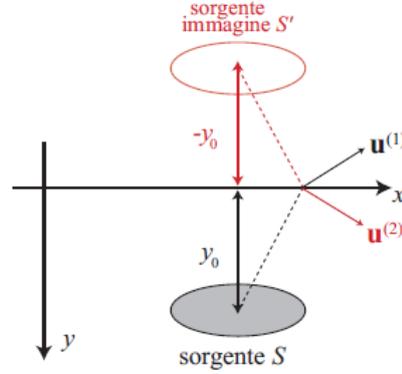


Figura 3.7: Metodo delle immagini per studiare la configurazione di sforzo generata da una dislocazione all'interno di un semispazio elastico.

S' , posta specularmente ad S rispetto al piano $z = 0$.

Per simmetria, il campo di spostamento risultante $\vec{U} = \vec{u} + \vec{u}'$, generato dalla sovrapposizione delle singole soluzioni \vec{u} e \vec{u}' , avrà componente U_z dispari in z e componenti U_x, U_y pari in z .

Usando le relazioni costitutive per un mezzo elastico isotropo, otteniamo le seguenti simmetrie per gli sforzi complessivi $\Sigma_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma'_{ij}$ calcolati in $z = 0$:

$$\begin{aligned} \Sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu)U_{z,z} + \lambda(U_{x,x} + U_{y,y}) && \text{funzione pari di } z \\ \Sigma_{xz} &= \mu(U_{x,z} + U_{z,x}) && \text{funzione dispari di } z \\ \Sigma_{yz} &= \mu(U_{y,z} + U_{z,y}) && \text{funzione dispari di } z \end{aligned}$$

Se gli sforzi sono funzioni continue di z , nell'intorno di $z = 0$, allora si dovrà avere $\Sigma_{xz} = \Sigma_{yz} = 0$ in $z = 0$, mentre Σ_{zz} ha valore doppio rispetto a quello previsto dalla singola sorgente S . Attraverso la tecnica delle immagini possiamo quindi ottenere una soluzione in cui due delle tre condizioni che definiscono la superficie libera sono soddisfatte.

Nel caso in cui la soluzione singola stessa data dalla sorgente S preveda $\sigma_{zz} = 0$ in $z = 0$, la tecnica delle immagini da sola permette di ottenere la soluzione per la sorgente dislocativa posta nel semispazio, in prossimità della superficie libera.

Vediamo ora come applicare questa tecnica ad una dislocazione a vite posta in un semispazio.

Consideriamo quindi una dislocazione a vite con vettore di Burgers diretto lungo l'asse y $\vec{b} = \Delta u \vec{j}$ e superficie di dislocazione $S=(x = 0, a < z < b)$.

Il campo di spostamento e gli sforzi generati da questa dislocazione in uno spazio elastico isotropo illimitato sono i seguenti:

$$\begin{aligned} u_y(x, z) &= \frac{\Delta u}{2\pi} \left(\arctan \frac{z-a}{x} - \arctan \frac{z-b}{x} \right) \\ \sigma_{xy}(x, z) &= -\frac{\mu \Delta u}{2\pi} \left[\frac{z-a}{(z-a)^2 + x^2} - \frac{z-b}{(z-b)^2 + x^2} \right] \\ \sigma_{yz}(x, z) &= \frac{\mu \Delta u}{2\pi} \left[\frac{x}{(z-a)^2 + x^2} - \frac{x}{(z-b)^2 + x^2} \right] \end{aligned}$$

Introduciamo ora la sorgente immagine S' , costituita da un vettore di Burgers identico al precedente ma con superficie di dislocazione $S' = x = 0, -b < z < -a$, che produce campo di spostamenti e campo di sforzo analoghi ai precedenti, previa sostituzione di $-b$ con a e $-a$ con b .

Lo sforzo complessivo Σ_{yz} , che è l'unica componente applicata alla superficie $z = 0$, vale quindi:

$$\Sigma_{yz}(x, z) = \frac{\mu \Delta u}{2\pi} \left(\frac{x}{(z-a)^2 + x^2} - \frac{x}{(z-b)^2 + x^2} + \frac{x}{(z+b)^2 + x^2} - \frac{x}{(z+a)^2 + x^2} \right)$$

che, come prevesto, risulta essere nullo in $z = 0$.

L'altra componenete non nulla dello sforzo è $\Sigma_{xy}(x, y)$, che non risulta annullarsi sulla superficie libera e risulta essere doppia rispetto al valore dovuto solo alla superficie S (questo è perfettamente accettabile dato che Σ_{xy} non è applicato sulla superficie $z=0$).

3.3 Studio della dislocazione a vite dal punto di vista energetico e confronto con il criterio di Anderson

Applichiamo dunque la teoria delle dislocazioni allo studio di una faglia trasformata, ove identifichiamo la frattura sulla superficie di faglia con la dislocazione associata.

Consideriamo dunque una dislocazione a vite chiusa collocata in un semispazio elastico, con superficie libera in $z = 0$ e distribuzione di dislocazioni assegnata $D(z)$.

Supponiamo che tale dislocazione si apra, ad un certo istante, all'interno del semispazio elastico continuo, a causa di un campo di sforzi incrementale deviatorico e studiamo il rilascio di energia dovuto allo scorrimento relativo lungo la superficie di frattura, in presenza di attrito.

La superficie di dislocazione è definita da $S=[x = 0, a < z < b, -\frac{L}{2} < y < +\frac{L}{2}]$, come mostrato in figura 3.8.

La distribuzione di dislocazioni presa in considerazione è la seguente:

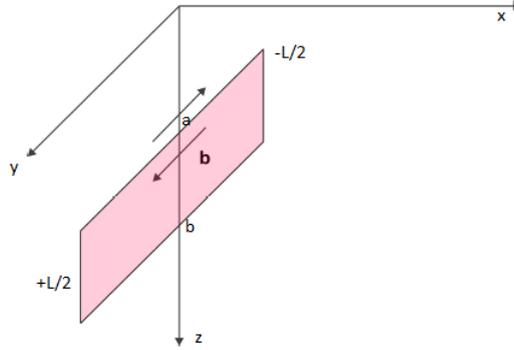


Figura 3.8: Superficie di faglia

$$D(x) = [\delta(z - a) - \delta(z - b)] \quad (3.3.1)$$

dove la $\delta(x)$ è la delta di Dirac.

In questo modo la dislocazione a vite si apre sulla linea di dislocazione D_1 definita da $(z = a, x = 0)$ e si chiude sulla linea di dislocazione D_2 definita da $(z = b, x = 0)$.

Ricordiamo che la configurazione di sforzo di una dislocazione a vite elementare in questo sistema di riferimento può essere ottenuta operando la trasformazione $z \rightarrow y, y \rightarrow x, x \rightarrow z$ nelle 3.2.3.

Essendo $x = 0$, l'unica componente del tensore di deformazione e del tensore di sforzo non nulla da considerare è la seguente:

$$\epsilon_{xy}^{el} = \epsilon_{yx}^{el} = -\frac{\Delta u}{4\pi} \frac{z - z'}{(z - z')^2 + x^2} \quad \rightarrow \quad \tau_{xy}^{el} = \tau_{yx}^{el} = 2\mu\epsilon_{xy}^{el} \quad (3.3.2)$$

Quello che vogliamo fare è calcolare l'energia rilasciata durante lo scorrimento relativo lungo la superficie di faglia, in presenza d'attrito.

3.3.1 Calcolo delle configurazioni di sforzo

Procediamo ora al calcolo dello sforzo rilasciato da questa dislocazione.

Calcoliamo per prima cosa lo sforzo rilasciato dalla dislocazione in uno spazio

elastico isotropo ed illimitato, per poi passare alla stessa configurazione con il semispazio che si apre in $z = 0$.

Applichiamo quindi la 3.2.9 per l'unica componente non nulla dello sforzo che vogliamo studiare:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \int_a^b D(z') \tau_{xy}^{el} dz' = -\frac{\mu\Delta u}{2\pi} \int_a^b [\delta(z' - a) - \delta(z' - b)] \frac{z - z'}{(z - z')^2 + x^2} dz' = \\ &= -\frac{\mu\Delta u}{4\pi} \left[\frac{z - a}{(z - a)^2 + x^2} - \frac{(z - b)}{(z - b)^2 + x^2} \right]\end{aligned}\quad (3.3.3)$$

Dunque la 3.3.3 ci da lo sforzo rilasciato dalla dislocazione a vite chiusa sopra descritta.

In particolare, noi siamo interessati a tale sforzo calcolato sul piano di dislocazione definito da $x = 0$. Imponendo tale condizione nella 3.3.3 bisogna notare che lo sforzo $\tau_{xy}(z, x = 0)$ diventa singolare sulle linee di dislocazione:

$$\tau_{xy}(z, x = 0) = -\frac{\mu\Delta u}{4\pi} \left[\frac{1}{z - a} - \frac{1}{z - b} \right] \quad (3.3.4)$$

Applichiamo ora il metodo delle immagini per calcolare lo sforzo rilasciato da questa dislocazione in corrispondenza di una superficie libera localizzata nel piano $z = 0$.

La soluzione sar  trovata per sovrapposizione dello sforzo $\tau_{xy}(z, x = 0)$ con lo sforzo prodotto dalla sorgente immagine S' speculare alla sorgente reale S, scambiando -a con b e -b con a:

$$\Sigma_{xy}(z, x = 0) = -\frac{\mu\Delta u}{4\pi} \left[\frac{1}{z - a} - \frac{1}{z - b} + \frac{1}{z + b} - \frac{1}{z + a} \right] \quad (3.3.5)$$

Ora che la 3.3.5 ci da, in condizione di superficie libera in $z = 0$, lo sforzo generato sul piano yz in funzione delle coordinate y e z, calcoliamo lo sforzo $\Sigma_{xy}(z, x = 0)$ nel punto intermedio della superficie di faglia individuato da $z_m = (x = 0, y, \frac{b+a}{2})$, che teniamo come valore rappresentativo dello sforzo sulla superficie di faglia.

Otteniamo dunque:

$$\begin{aligned}\Sigma_{xy}\left(\frac{b+a}{2}, x = 0\right) &= -\frac{\mu\Delta u}{4\pi} \left[\frac{1}{\frac{b+a}{2} - a} - \frac{1}{\frac{b+a}{2} - b} + \frac{1}{\frac{b+a}{2} + b} - \frac{1}{\frac{b+a}{2} + a} \right] = \\ &= -\frac{\mu\Delta u}{2\pi} \left[\frac{2}{b-a} + \frac{1}{a+3b} - \frac{1}{3a+b} \right] = -\frac{c\mu\Delta u}{2\pi} = \tau^d\end{aligned}\quad (3.3.6)$$

con $c = [\frac{2}{b-a} + \frac{1}{a+3b} - \frac{1}{3a+b}]$.

Ora siamo in grado di calcolare la discontinuità del campo di spostamento in funzione dello sforzo rilasciato *stress drop* $\Delta\tau$:

$$\Delta\tau = \tau^0 - \tau^1 = -\tau^d. \quad (3.3.7)$$

Risulta

$$\Delta u = \frac{2\pi\Delta\tau}{c\mu}. \quad (3.3.8)$$

Ora sono noti tutti gli elementi e le grandezze che definiscono la dislocazione a vite che si vuole studiare; in particolare Δu può essere calcolato tramite la 3.3.8 per un assegnato sforzo rilasciato $\Delta\tau$.

Introduciamo ora nella descrizione della nostra faglia un generico **campo incrementale di sforzi** di origine tettonica $\Delta\sigma_{ij}$.

Sia $\Delta\sigma_{ij}$ un campo di sforzo deviatorico cosicché $\Delta\sigma_{kk} = 0$ ed in particolare sia $\Delta\sigma_{zz} = 0$, in modo tale che rimanga soddisfatta la condizione di superficie libera in $z = 0$.

Dalla sovrapposizione della configurazione di sforzo litostatico e del campo incrementale di sforzo tettonico, si ha che la configurazione di sforzo risultante, nel sistema degli assi principali, risulta essere:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\rho g z + \Delta\sigma \\ \sigma_y &= -\rho g z - \Delta\sigma \\ \sigma_z &= -\rho g z \end{aligned}$$

Senza ledere la generalità del problema possiamo restringerci al caso $\Delta\sigma > 0$; in questo modo l'asse principale x risulta essere di carattere distensivo, mentre l'asse principale y risulta essere di carattere compressivo.

Essendo il mezzo isotropo e omogeneo, possiamo correttamente assumere che l'asse principale verticale coincida con l'asse z del sistema di riferimento considerato, lungo il quale è diretta l'accelerazione di gravità.

Gli assi individuati da x e y, entrambi ortogonali a z, risulteranno invece inclinati di un generico angolo θ rispetto alla normale alla superficie di faglia e alla tangente alla superficie di faglia rispettivamente, nel piano ortogonale all'asse verticale z.

Tale configurazione è mostrata in figura 3.9.

Ai fini dei calcoli successivi è necessario calcolare la componente del campo di sforzo normale alla superficie di faglia σ_n e la componente tangente alla superficie di faglia τ .

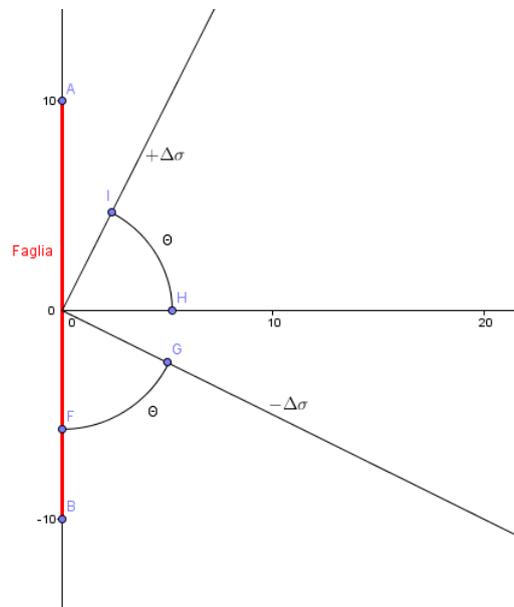


Figura 3.9: Configurazione di sforzo vista dall'alto, con l'asse z entrante

Per fare questo applichiamo una rotazione in senso orario di un angolo θ positivo intorno all'asse z , che rimane fissato: $z' = z$.

La rotazione è opportunamente descritta da una matrice 2×2 e, applicando quanto visto nella sezione 2.2.4, si ottengono le componenti del campo di sforzo esplicitate nel nuovo sistema di riferimento (x', y', z') :

$$\Delta\sigma_{i'j'} = \begin{vmatrix} -\rho gz + \Delta\sigma \cos(2\theta) & -\Delta\sigma \sin(2\theta) \\ -\Delta\sigma \sin(2\theta) & -\rho gz - \Delta\sigma \cos(2\theta) \end{vmatrix}$$

Analizziamo la presente configurazione restringendoci all'intervallo $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Gli estremi dell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ non costituiscono oggetto di studio per i seguenti motivi:

- Per $\theta = 0$ si ha l'asse principale x coincidente con la normale alla superficie in configurazione distensiva: $\sigma_n = \sigma_{x'x'} = -\rho gz + \Delta\sigma$. Lo sforzo di taglio τ sulla superficie è nullo e quindi non vi è nè scorrimento ($\Delta u = 0$ per la 3.3.8) nè rilascio di energia per la 3.2.14
- Per $\theta = \frac{\pi}{2}$ si ha l'asse principale x coincidente con la normale alla superficie in configurazione compressiva: $\sigma_n = \sigma_{x'x'} = -\rho gz - \Delta\sigma$. Lo sforzo di taglio τ sulla superficie è nullo e quindi non vi è nè scorrimento nè rilascio di energia.

Non sarà trattato il caso relativo a $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ in quanto è equivalente a cambiare $+\Delta\sigma$ in $-\Delta\sigma$, cioè a cambiare semplicemente il segno davanti alle due componenti diagonali di $\Delta\sigma_{ij}$ nel riferimento degli assi principali.

Possiamo dunque identificare la normale e lo sforzo di taglio iniziali:

$$\sigma_n = \sigma_{x'x'} = -\rho gz + \Delta\sigma \cos(2\theta) \quad (3.3.9)$$

$$\tau = \sigma_{xy} = -\Delta\sigma \sin(2\theta) \quad (3.3.10)$$

Una ulteriore condizione da imporre è che lo sforzo normale alla superficie risulti sempre compressivo, altrimenti la dislocazione si aprirebbe in maniera tensile creando un vuoto e non ci sarebbe alcun attrito.

Le condizioni da tener presenti nel calcolo dell'energia rilasciata sono dunque le seguenti:

- $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ che esaurisce le possibili configurazioni di cui ci possiamo interessare nell'analisi di questo problema;
- $-\rho gz + \Delta\sigma \cos(2\theta) < 0 \rightarrow \cos(2\theta) < \frac{\rho gz}{\Delta\sigma}$ che garantisce che lo sforzo normale alla superficie di faglia sia sempre negativo, in modo che sia speso lavoro contro l'attrito durante lo scorrimento;

Illustriamo infine la configurazione di sforzo finale statica che consideriamo, in corrispondenza della quale lo scorrimento lungo la superficie di faglia è nullo a causa dell'attrito. Si tenga anche presente che lo sforzo normale alla superficie non viene alterato dal processo dislocativo ($\tau_{x'x'}^c$ e $\tau_{y'y'}^c$ come visto nel paragrafo 3.2.1):

$$\tau_{i'j'}^1 = \tau_{i'j'}^0 + \tau_{i'j'}^c = \left\| \begin{array}{cc} -\rho gz + \Delta\sigma \cos(2\theta) & -f_d(-\rho gz + \Delta\sigma \cos(2\theta)) \\ -f_d(-\rho gz + \Delta\sigma \cos(2\theta)) & -\rho gz - \Delta\sigma \cos(2\theta) \end{array} \right\|$$

I due sforzi di taglio, iniziale e finale rispettivamente, che consideriamo sono i seguenti:

$$\tau^0 = \Delta\sigma_{x'y'} = -\Delta\sigma \text{sen}(2\theta) \quad (3.3.11)$$

$$\tau^1 = \tau_{x'y'}^1 = f_d(\rho g z + \Delta\sigma \text{cos}(2\theta)) \quad (3.3.12)$$

3.3.2 Calcolo dell'energia e ricerca del massimo

Note le configurazioni di sforzo iniziali e finali e la dipendenza della discontinuità del campo di spostamento dallo stress drop $\Delta\tau$, possiamo calcolare il rilascio di energia dovuto allo scorrimento lungo la superficie di faglia, in seguito alla dislocazione.

Sarà nostro interesse trovare in quali condizioni questa energia è massima. Applichiamo dunque la 3.2.14 con Δu dato dalla 3.3.8.

L'energia rilasciata

$$\Delta E = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\tau_{ij}^0 + \tau_{ij}^1) \Delta u_i n_j^{\Sigma} d\Sigma$$

diventa:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\tau_{yx}^0 + \tau_{yx}^1) \Delta u_y d\Sigma = \int_{\Sigma} (\tau^0 + \tau^1) \frac{\pi(\tau^0 - \tau^1)}{\mu c} d\Sigma = \\ &= \frac{\pi}{\mu c} \int_{\Sigma} (\tau^{0^2} - \tau^{1^2}) d\Sigma = \frac{\pi}{\mu c} \int_{\Sigma} (\Delta\sigma \text{sen}(2\theta))^2 - f_d^2(\rho g z - \Delta\sigma \text{cos}(2\theta))^2 d\Sigma. \end{aligned}$$

Prima di proseguire con i calcoli commentiamo quanto abbiamo ottenuto fino ad ora. L'energia rilasciata durante la dislocazione deve essere sempre positiva o al limite nulla, nel caso in cui non vi sia spostamento relativo lungo la superficie di faglia. Condizione sullo sforzo deviatorico iniziale $\Delta\sigma$ affinché il ΔE sia maggiore o uguale a 0 è $\Delta\sigma \geq \frac{f_d \rho g z}{\text{sen}(2\theta) + f_d \text{cos}(2\theta)}$, che è proprio la condizione limite di Anderson.

Osserviamo inoltre l'integrando: questo risulta essere negativo in 0 e $\frac{\pi}{2}$, cosa che non è accettabile per un processo spontaneo.

Dunque cercheremo di capire quale sia la configurazione che massimizza tale rilascio di energia al variare di θ .

Inoltre, se provassimo a porre uguale a 0 l'integrando, ponendo di conseguenza a zero l'energia ΔE spesa durante lo scorrimento, otterremmo la condizione di scorrimento data dalla teoria di Anderson.

Infatti, $\Delta E = 0$ implica assenza di scorrimento, così come la condizione di

Anderson descrive la condizione limite immediatamente precedente allo scorrimento relativo lungo la superficie di faglia.

Proseguendo con i calcoli, arriviamo all'espressione esplicita dell'energia rilasciata:

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \frac{L\pi}{\mu c} \int_a^b dz [\Delta\sigma^2 \text{sen}^2(2\theta) - f_d^2(\rho g z)^2 - f_d^2(\Delta\sigma^2 \text{cos}^2(2\theta)) + 2f_d^2 \Delta\sigma \text{cos}(2\theta) \rho g z] = \\
&= \frac{L\pi}{\mu c} [\Delta\sigma^2 \text{sen}^2(2\theta) z - f_d^2(\rho g)^2 \frac{z^3}{3} - f_d^2 z \Delta\sigma^2 \text{cos}^2(2\theta) + z^2 \rho f_d^2 \Delta\sigma \text{cos}(2\theta)]_a^b = \\
&= \frac{L\pi}{\mu c} [\Delta\sigma^2 \text{sen}^2(2\theta)(b-a) - (f_d \rho g)^2 \frac{b^3 - a^3}{3} - f_d^2(b-a) \Delta\sigma^2 \text{cos}^2(2\theta) + \\
&\quad (b^2 - a^2) \rho g f_d^2 \Delta\sigma \text{cos}(2\theta)].
\end{aligned}$$

Ora cerchiamo l'angolo θ che massimizza il rilascio di energia. Imponiamo dunque:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta E}{d\theta} = 0 &= \frac{L\pi}{2\mu c} [4\Delta\sigma^2 \text{sen}(2\theta) \text{cos}(2\theta)(b-a) + 4f_d^2(b-a) \Delta\sigma^2 \text{cos}(2\theta) \text{sen}(2\theta) \\
&\quad - 2(b^2 - a^2) \rho g f_d^2 \Delta\sigma \text{sen}(2\theta)] = 0
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

Dalla precedente condizione 3.3.13 otteniamo:

$$\text{cos}(2\theta) = \frac{(b+a)\rho g}{2\Delta\sigma} \frac{f_d^2}{1+f_d^2} \tag{3.3.14}$$

Tale espressione rappresenta la configurazione di massimo rilascio di energia durante il movimento di faglia.

Per prima cosa notiamo che questa espressione è compatibile con il vincolo $\text{cos}(2\theta) < \frac{\rho g z}{\Delta\sigma}$, che mantiene la compressione alla superficie; infatti lo stesso rapporto tra i due sforzi (per $z = \frac{b+a}{2}$) moltiplica una quantità che sarà sempre minore di 1.

Supponendo che la faglia massimizzante questa quantità sia quella più probabilmente interessata allo scorrimento, proviamo ad osservare l'andamento grafico dell'energia in funzione di θ e del coefficiente di attrito dinamico f_d , fissando alcuni parametri chiave del problema.

Torniamo alla valutazione dell'energia rilasciata ΔE e discutiamone l'andamento in funzione dei parametri fondamentali del problema.

I casi fisici di interesse sono quelli in cui $\Delta E > 0$ e, affinché questo sia possibile, valutiamo l'energia rilasciata in corrispondenza di uno sforzo tettonico $\Delta\sigma$, che sia paragonabile allo sforzo litostatico $\rho g z$.

Utilizziamo come valore di riferimento per lo sforzo litostatico $\rho g \frac{b+a}{2}$.

Introduciamo il parametro A adimensionale, rappresentativo dell'intensità dello sforzo $\Delta\sigma$ applicato, così definito:

$$A = \frac{\Delta\sigma}{\rho g \frac{b+a}{2}}. \quad (3.3.15)$$

In analogia con quanto accade nella realtà, manteniamo l'ordine di grandezza di A unitario ed osserviamo l'andamento dell'energia in figura 3.10

Il coefficiente di attrito f_d è fissato ad un valore rappresentativo di rocce

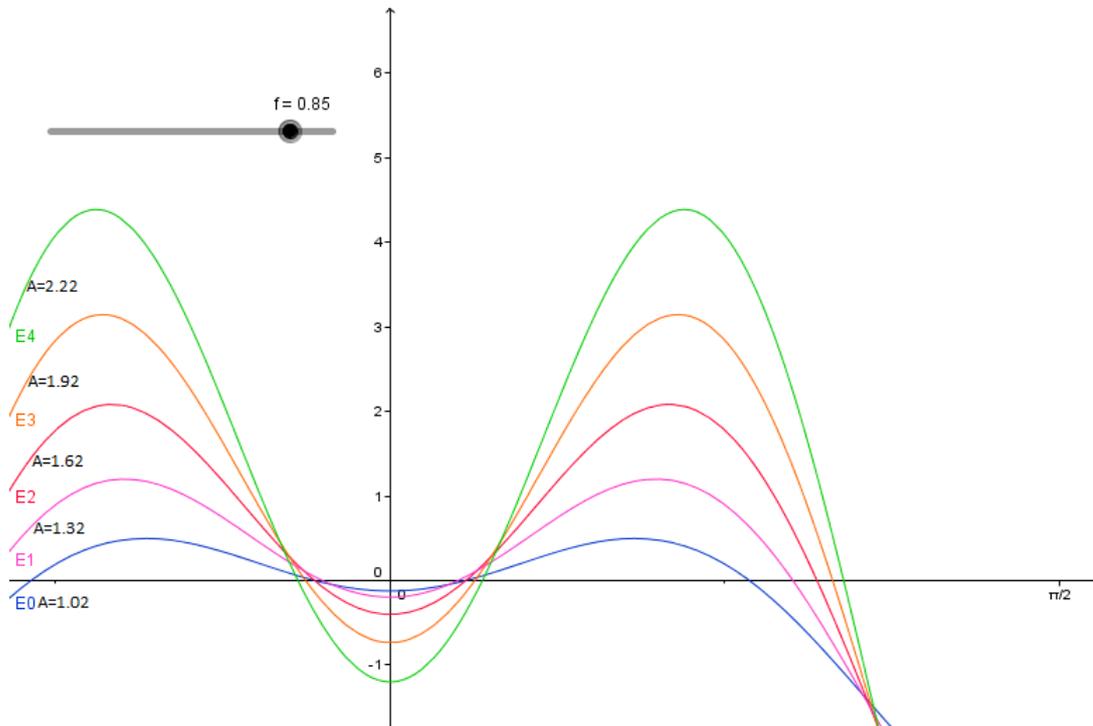


Figura 3.10: Energia in funzione dell'angolo θ , facendo variare A come parametro intorno ad 1.

asciutte 0.85, mentre il parametro A viene fatto variare da circa 1 a 2, a partire da 1.02 come mostrato in figura 3.10. Si può notare che al crescere dello sforzo applicato, il massimo dell'energia aumenta e si sposta verso il valore limite $\frac{\pi}{4}$, che otteniamo solo in assenza di attrito o con uno sforzo $\Delta\sigma$ idealmente infinito.

Come anticipato, in corrispondenza di $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, l'energia rilasciata risulta sempre negativa. In corrispondenza di questi due punti infatti, non si ha sforzo di taglio e non si verifica scorrimento lungo la superficie di faglia. Nella figura 3.11 mettiamo invece in evidenza l'andamento dei massimi di energia in corrispondenza di ciascuno degli sforzi applicati, al variare di A. Come si può notare, all'aumentare del parametro di sforzo A, l'angolo in

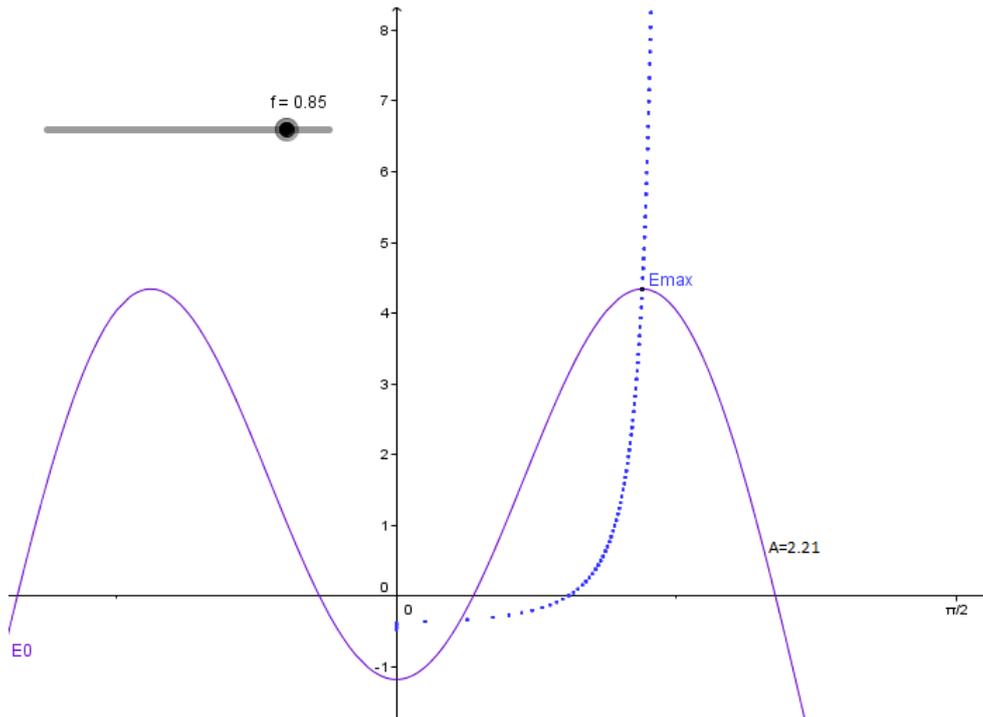


Figura 3.11: Andamento dei massimi dell'energia in funzione dell'angolo θ e del parametro di sforzo A.

corrispondenza del quale si ha il massimo dell'energia si sposta verso $\frac{\pi}{4}$ ed il massimo stesso dell'energia aumenta.

Notiamo anche che per A minore del valore di soglia $A^*=0.73$, l'energia rilasciata è sempre negativa e non si verifica alcuno scorrimento, indipendentemente dall'angolo di inclinazione θ . Infine, nella figura 3.12 vediamo l'andamento dell'energia rilasciata in funzione dell'attrito.

In analogia con quanto si vede nella figura 3.10, vediamo che il massimo dell'energia si sposta verso $\frac{\pi}{4}$ ed aumenta man mano che il coefficiente di attrito diminuisce.

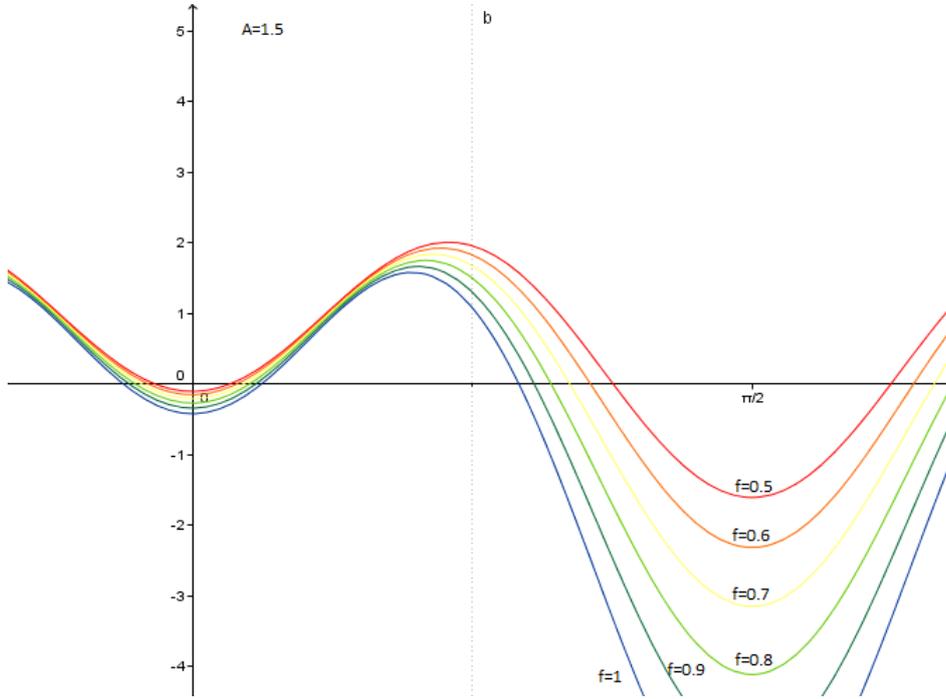


Figura 3.12: Energia rilasciata in funzione dell'attrito.

Proviamo a studiare la stessa faglia applicando il criterio di Anderson. Identificati lo sforzo normale e lo sforzo di taglio

$$\sigma_n = -\rho g z + \Delta\sigma \cos(2\theta) \quad (3.3.16)$$

$$\tau = -\Delta\sigma \sin(2\theta) \quad (3.3.17)$$

Utilizziamo quindi la legge di Amonton per trovare la condizione limite di scorrimento sulla superficie della faglia:

$$|-\Delta\sigma \sin(2\theta)| = f_s(\rho g z - \Delta\sigma \cos(2\theta))$$

da cui otteniamo:

$$\Delta\sigma = \frac{f_s \rho g z}{f_s \cos(2\theta) \pm \sin(2\theta)} \quad (3.3.18)$$

Supponendo di avere lo sforzo iniziale $\Delta\sigma$ nullo e di incrementarlo con continuità poco alla volta, cerchiamo l'angolo tale cui il minimo sforzo possibile $\Delta\sigma$ è sufficiente ad innescare lo scorrimento sulla superficie di faglia; dunque:

$$\frac{d\Delta\sigma}{d\theta} = 0 \quad \rightarrow \quad \tan(2\theta) = \pm \frac{1}{f_s}$$

Restringendoci, come sopra, al caso $\Delta\sigma > 0$ e $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ otteniamo:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = +\frac{1}{f_s} \quad (3.3.19)$$

In figura 3.13 possiamo vedere l'andamento dell'angolo di inclinazione che minimizza lo sforzo rilasciato per lo scorrimento. In questo caso si può no-

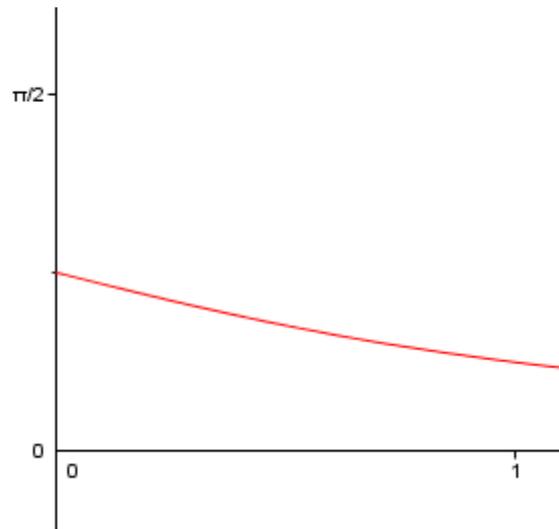


Figura 3.13: θ in funzione del coefficiente d'attrito f_s

tare che l'angolo che soddisfa alla condizione di minimizzazione dello sforzo necessario per innescare lo scorrimento dipende solo dal coefficiente di attrito e si sposta verso $\frac{\pi}{4}$ man mano che l'azione dell'attrito perde di significatività. Quando l'attrito è assente, quindi quando $f_s = 0$, la teoria di Anderson ci dice che la faglia interessata al movimento è quella individuata dal piano sul quale è massimo lo sforzo di taglio.

Capitolo 4

Conclusione

I risultati ottenuti applicando il criterio di massimizzazione dell'energia rilasciata presentano conclusioni per certi versi simili a quelle ottenute applicando il criterio di attivazione dato dalla teoria della fagliazione di Anderson, mentre presentano significative differenze per altri.

Osserviamo infatti quanto accade per valori positivi crescenti di energia rilasciata:

ΔE piccolo implica che l'integrando dell'espressione 3.2.14 sia piccolo, essendo quest'ultimo dato da una differenza di quadrati (due quantità sempre positive). Si può notare facilmente che facendo tendere l'energia rilasciata a zero, dalla stessa espressione 3.2.14 otteniamo il criterio di fagliazione di Anderson mostrato nella 3.3.18:

$$\Delta\sigma = \frac{f_s \rho g z}{f_s \cos(2\theta) \pm \sin(2\theta)}.$$

In questo caso, da entrambi i criteri emerge il medesimo angolo di inclinazione, che tende a $\frac{\pi}{4}$ nel limite in cui il coefficiente d'attrito f_s o f_d nel caso dinamico va a zero.

D'altra parte però, il criterio di fagliazione di Anderson si concentra solo sulla condizione limite che sia in grado di innescare lo scorrimento, mentre il criterio di massimizzazione di energia ci fornisce informazioni diverse ed addizionali quando le energie in gioco sono diverse da zero.

In particolare, possiamo osservare che in presenza di sforzi troppo piccoli per $f_d = 0.85$ non si verifica mai scorrimento, indipendentemente dall'angolo di inclinazione.

Invece, al crescere dell'intensità degli sforzi deviatorici (rappresentata dal parametro A che abbiamo introdotto), si può notare come l'angolo di inclinazione che massimizza l'energia rilasciata si sposti in maniera significativa verso $\frac{\pi}{4}$, pur mantenendo il coefficiente di attrito ad un valore di riferimento

costante.

Come vediamo in figura 3.11 i massimi dell'energia, per θ ed f_d fissati, descrivono una curva che si avvicina asintoticamente a $\frac{\pi}{4}$.

Bibliografia

- [1] Bonafede M., Appunti dal corso di Fisica del Sistema Terra, Meccanica dei continui ,14 maggio 2013
- [2] Bonafede M., Appunti dal corso di Fondamenti di Geofisica, 13 Dicembre 2012
- [3] Landau L. D., Lifshitz E. M., Theory of Elasticity, Pergamon Press, 1970

Ringraziamenti

Desidero ringraziare in primo luogo il professor Maurizio Bonafede per il supporto e la disponibilità che mi sono stati dati durante lo svolgimento di questo lavoro di tesi.

Un grazie speciale va ai miei genitori e a tutta la mia famiglia, senza i quali non avrei mai potuto raggiungere questo traguardo.

Ringrazio i miei coinquilini e soprattutto amici Lore, Bè, Fra, Polly e Laura, che hanno reso questa esperienza unica, irripetibile e indimenticabile.

Un ringraziamento di cuore va a Rocco, Mari, Marta, Bazzo, Ste, Nico e Debora per aver riso, scherzato ed accompagnatomi da sempre fino ad oggi.

Un grazie di cuore a tutti gli amici che in questi tre anni sono stati con me all'università e fuori dall'università: Canta, Manta, Riccardo, Mauri, Iaco, Ele, Baglio, Lollo, Onofrio, Fino, Ila, Michi, Leo, Andre, Lollo ancora, Dani, Carlo, il French, Michele e tutti gli altri ragazzi di fisica, i migliori che abbia mai incontrato.

Un grazie di cuore va a tutti gli amici Dani, Filo, Fortu, Rocco, Nico, Giorgi, Graffio, Fra, Corre, Mile e tutti gli altri che ci sono sempre, grandi, grossi ed inimitabili.

Un grazie a tutti coloro che in questi anni mi hanno aiutato e sono stati con me, gli amici del Selfiesterio e tutti gli altri.