

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Un'applicazione della teoria di Morse
alla topologia delle
varietà di Stein

Tesi di Laurea in Topologia

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Luca Migliorini

Presentata da:
Annalisa Grossi

II Sessione
Anno Accademico 2013/2014

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è di trattare alcuni risultati cruciali della Teoria di Morse, un ambito che si può collocare a metà strada tra topologia differenziale e topologia algebrica. La teoria prende il suo nome dal matematico statunitense Marston Morse, che alla sua elaborazione dedicò gran parte della sua carriera. L'idea di base della Teoria di Morse è quella di studiare il comportamento di funzioni C^∞ reali definite su una varietà liscia M per trarre informazioni sulla topologia della varietà stessa. Più nello specifico si vanno a considerare delle funzioni C^∞ , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ che abbiano soltanto punti critici non degeneri, dove un punto della varietà M è *critico* se il differenziale $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$ è la mappa nulla ed è *non degenera* se la matrice Hessiana : $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{ij}$ ha rango massimo.

Se l'intervallo reale $[a, b]$ non contiene punti critici di f allora risulta che gli insiemi di livello $M^a = f^{-1}(-\infty, a]$ e $M^b = f^{-1}(-\infty, b]$ sono diffeomorfi; se invece esiste un unico valore critico non degenera per f che chiamiamo c nell'intervallo $[a, b]$, allora è possibile ottenere M^b "attaccando" ad M^a una cella la cui dimensione è uguale all'indice di tale punto. Poichè tale operazione di attaccamento di una cella ha conseguenze sull'omologia dello spazio topologico M^b , la presenza e la quantità di punti critici aventi un dato indice può essere valutata studiando i gruppi di omologia della varietà M . Possiamo quindi pensare alla Teoria di Morse come ad un potente strumento in grado di fornirci un nuovo modo di studiare la topologia di una varietà dalla sola analisi degli insiemi di livello prima nominati. Il punto di arrivo del lavoro consiste nella trattazione di un risultato non banale sulla topologia delle varietà complesse: il teorema di Lefschetz. Questo fornisce un importante risultato sull'omologia di una particolare categoria di varietà, le varietà di Stein. Il lavoro è suddiviso in tre capitoli: nel primo di questi si danno alcune definizioni caratteristiche della teoria, prima tra le altre quella di punto critico non degenera. In seguito si enunciano e si dimostrano alcuni lemmi fondamentali che descrivono il comportamento di una funzione avente solo punti critici non degeneri (detta in quest'ambito funzione di Morse) in prossimità di uno di

questi. Nella sezione successiva si enuncia e si dimostra un teorema riguardante una speciale classe di diffeomorfismi. Il secondo capitolo racchiude i teoremi cardine della teoria, il Teorema A e il Teorema B, che formalizzano quanto spiegato all'inizio dell'introduzione e consentono di arrivare ad un importante risultato: si mostra che è possibile creare un'equivalenza omotopica tra una varietà differenziabile e un opportuno CW-complesso la cui struttura cellulare è legata solo ai punti critici non degeneri di un'opportuna funzione di Morse e all'indice di questi. Si passa poi, nelle ultime due sezioni del capitolo, ad osservare come si modifica l'omologia di M^a al passaggio di un punto critico non degenero, fornendo alcuni esempi per capire meglio il risultato ottenuto. Infine, nel terzo capitolo, dopo aver introdotto alcune definizioni preliminari, innanzitutto quella di punto focale e di prima e seconda forma fondamentale di una varietà, si arriva alla trattazione del Teorema di Lefschetz. Questo teorema afferma che se una varietà analitica complessa di Stein (ovvero che si immerge bianaliticamente in un sottoinsieme chiuso di \mathbb{C}^n) ha dimensione reale $2k$ allora l'omologia di M a coefficienti in \mathbb{Z} è nulla dall'indice k in poi. Questo significa che la struttura della varietà risulta "più semplice" del previsto, perciò tale asserto contribuisce ad avere informazioni su come una varietà di Stein $M \subseteq \mathbb{C}^n$ possa essere effettivamente strutturata.

Indice

Introduzione	i
1 Punti critici e lemma di Morse	5
1.1 Definizioni preliminari	5
1.2 Un primo risultato: il lemma di Morse	6
1.3 Gruppi di diffeomorfismi a un parametro	10
2 Omotopia in termini di valori critici	13
2.1 Variazione del tipo di omotopia attraverso i punti critici	13
2.2 Attaccamento di celle: varietà come CW complessi	22
2.3 Variazione dei gruppi di omologia attraverso un punto critico	23
2.4 Esempi	26
3 Teorema di Lefschetz	31
3.1 Punto focale di una varietà e risultati preliminari	31
3.2 Varietà di Stein	37
3.3 Un' applicazione della teoria di Morse: il teorema di Lefschetz	37
Bibliografia	41

Elenco delle figure

2.1	<i>Varietà privata di un punto</i>	15
2.2	<i>Toro</i>	16
2.3	<i>Rappresentazione in prossimità del punto critico p</i>	17
2.4	<i>Comportamento indicativo di γ</i>	18
2.5	<i>Rappresentazione di F in prossimità del punto critico</i>	20
2.6	<i>Comportamento della retrazione nei tre casi</i>	20
2.7	<i>Toro con funzione altezza sul piano</i>	26
2.8	<i>Insiemi di livello del toro: figura 1</i>	27
2.9	<i>Insiemi di livello del toro: figura 2</i>	27
2.10	<i>Insiemi di livello del toro: figura 3</i>	27
2.11	<i>Insiemi di livello del toro: figura 4</i>	28
2.12	<i>Varietà con funzione altezza sul piano</i>	29
2.13	<i>Insiemi di livello della varietà: figura 1</i>	29
2.14	<i>Insiemi di livello della varietà: figura 2</i>	29
2.15	<i>Insiemi di livello della varietà: figura 3</i>	30
2.16	<i>Insiemi di livello della varietà: figura 4</i>	30

Capitolo 1

Punti critici e lemma di Morse

Iniziamo a presentare la Teoria di Morse, introducendo le nozioni principali di cui ci serviremo e dimostrando un primo risultato fondamentale che utilizzeremo in seguito: il lemma di Morse. Premettiamo che d'ora in poi avremo a che fare con varietà differenziabili lisce, intendendo con tale aggettivo che le varietà sono di classe C^∞ . Chiameremo nello stesso modo anche funzioni ugualmente regolari definite da tali varietà a valori in esse. Indicheremo con $T_p(M)$ lo spazio tangente ad una varietà liscia M nel punto $p \in M$. Inoltre, se M ed N sono due varietà lisce ed è assegnata una mappa $g : M \rightarrow N$ con $g(p) = q$ indicheremo il differenziale di g , ovvero la mappa lineare indotta tra gli spazi tangenti, con $dg_p : T_p(M) \rightarrow T_q(N)$.

1.1 Definizioni preliminari

Ripensando al caso di funzioni lisce definite da un aperto U di \mathbb{R}^n a valori in \mathbb{R} , generalizziamo la definizione di punto critico per funzioni del tipo $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Definizione 1.1. Sia f una funzione definita su una varietà liscia M a valori reali. Il punto $p \in M$ si dice **punto critico** di f se il differenziale $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$ è la mappa nulla. Questa condizione in altre parole significa che p è punto critico di f se e solo se scelto un sistema di coordinate locali (x_1, x_2, \dots, x_n) in un aperto U contenente p , vale che :

$$\frac{\partial f(p)}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f(p)}{\partial x_n} = 0.$$

Il numero reale $f(p)$ è chiamato **valore critico** di f .

Definizione 1.2. Sia f una funzione definita su una varietà liscia M . Sia $p \in M$ un punto critico di f . L'**hessiano** di f nel punto p è il funzionale bilineare e simmetrico definito in questo modo :

$$Hess f_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Hess f_p(v, w) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p); v = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} /_p; w = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j} /_p$$

Definizione 1.3. Un punto critico p è detto **non degenere** se e solo se la matrice:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{ij}$$

è non degenere.

Definizione 1.4. Sia V uno spazio vettoriale reale (anche di dimensione infinita) e sia $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale bilineare e simmetrico definito su V . L'**indice** di B è definito come la massima dimensione (eventualmente infinita) del sottospazio su cui B è definito negativo.

Definizione 1.5. Sia V uno spazio vettoriale reale (anche di dimensione infinita) e sia $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale bilineare e simmetrico definito su V . La **nullità** è la dimensione del sottospazio costituito da tutti i vettori $v \in V$ tali che $B(v, w) = 0$ per ogni $w \in V$.

Definizione 1.6. Una funzione liscia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definita su una varietà differenziabile liscia M che presenti soltanto punti critici non degeneri viene detta **funzione di Morse**.

Osservazione 1. Grazie alla 1.5 possiamo dire che $p \in M$ è un punto critico non degenere per f se e solo se la nullità di f in p è uguale a 0.

1.2 Un primo risultato: il lemma di Morse

Dimostreremo in questa sezione il lemma di Morse, un risultato importante di cui si farà uso anche nei capitoli seguenti. A livello intuitivo esso afferma che data una funzione f a valori reali definita su una varietà M , esiste un intorno di un punto critico non degenere, nel quale la funzione f può essere espressa tramite un'opportuna forma quadratica dipendente solo dal suo indice. Premettiamo il seguente:

Lemma 1.2.1. *Sia V un intorno convesso di 0 in \mathbb{R}^n e sia $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione liscia con $f(0) = 0$. Vale allora l'espressione:*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

dove le g_i sono funzioni lisce definite su V e tali che $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.

Dimostrazione. Otteniamo subito:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, \dots, tx_n)}{dt} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i dt$$

semplicemente applicando il teorema fondamentale del calcolo insieme all'ipotesi $f(0) = 0$ e derivando usualmente rispetto a t . Possiamo allora prendere come $g_i(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i} dt$ □

Lemma 1.2.2 (Lemma di Morse). *Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Morse, sia $p \in M$ un punto critico non degenero e λ l'indice di f in p . Esiste allora un sistema di coordinate locali (u_1, \dots, u_n) in un intorno U di p con $u_i(p) = 0$ per ogni i e tale che l'uguaglianza:*

$$f(q) = f(p) - (u_1(q))^2 - \dots - (u_\lambda(q))^2 + (u_{\lambda+1}(q))^2 + \dots + (u_n(q))^2 \quad (1.1)$$

valga per tutti i punti $q \in U$.

Dimostrazione. Mostriamo come prima cosa che se esiste un'espressione di f come quella data dalla formula 1.1 allora λ deve necessariamente essere l'indice di f in $p \in M$. Per ogni sistema di coordinate (z_1, \dots, z_n) , se vale la rappresentazione di f analoga a quella del teorema:

$$f(q) = f(p) - (z_1(q))^2 - \dots - (z_\lambda(q))^2 + (z_{\lambda+1}(q))^2 + \dots + (z_n(q))^2$$

si ha immediatamente:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \begin{cases} -2, & \text{se } i = j \leq \lambda \\ 2, & \text{se } i = j > \lambda \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

il che mostra che la matrice H che rappresenta $Hess f_p$ rispetto alla base coordinata $\frac{\partial}{\partial z_1}/p, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}/p$ é :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix}$$

Esiste pertanto un sottospazio di $T_p(M)$ di dimensione λ nel quale $Hessf_p$ è definito negativo, e un sottospazio V di dimensione $n - \lambda$ dove $Hessf_p$ è invece definito positivo. Se esistesse un sottospazio di $T_p(M)$ di dimensione maggiore di λ su cui $Hessf_p$ fosse definito negativo, allora l'intersezione di tale sottospazio con V non sarebbe vuota, il che è impossibile perché in tale intersezione $Hessf_p$ sarebbe contemporaneamente definito positivo e negativo. Pertanto λ è la massima dimensione del sottospazio in cui $Hessf_p$ è definita negativa, ovvero l'indice di f in p .

Mostriamo ora che esiste un sistema di coordinate locali che soddisfa alle richieste della tesi. Possiamo assumere che il punto p sia l'origine di \mathbb{R}^n e che $f(p) = f(0) = 0$. Grazie al lemma 1.2.1 sappiamo che esiste un intorno dell'origine in cui vale:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j g(x_1, \dots, x_n)$$

per (x_1, \dots, x_n) in un intorno di 0. Dal momento che 0 è punto critico allora

$$g_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = 0.$$

Quindi applicando 1.2.1 a g_j abbiamo

$$g_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i h_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

per alcune funzioni lisce h_{ij} . Ne segue che:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n).$$

Possiamo assumere che $h_{ij} = h_{ji}$, dal momento che se scriviamo $\tilde{h}_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$ allora abbiamo $\tilde{h}_{ij} = \tilde{h}_{ji}$ e $f = \sum_{i,j} x_i x_j \tilde{h}_{ij}$. Inoltre la matrice $(\tilde{h}_{ij}(0))$ è uguale a $\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right)$, e quindi è non singolare. Possiamo da subito supporre quindi che $h_{ij} = h_{ji}$. Vogliamo ora trovare una trasformazione delle funzioni coordinate tramite la quale sia possibile ottenere l'espressione cercata per f in un aperto opportunamente piccolo dell'origine. Per farlo, procediamo ricalcando

il ragionamento di diagonalizzazione delle forme quadratiche. Supponiamo per induzione che esistano coordinate (u_1, \dots, u_n) di un aperto $U_1 \ni 0$ dove valga, per opportune matrici simmetriche $(H_{ij}(u_1, \dots, u_n))$,

$$f(q) = \pm(u_1(q))^2 \pm \dots \pm (u_{r-1}(q))^2 + \sum_{i,j \geq r} u_i(q)u_j(q)H_{ij}(u_1, \dots, u_n)(q)$$

per ogni $q \in U_1$, dove le matrici $H_{ij}(u_1, \dots, u_n)$ sono simmetriche. Possiamo assumere che $H_{rr} \neq 0$, operando eventualmente un cambio di coordinate lineare nelle ultime $n - r + 1$ coordinate. Sia ora:

$$g(u_1, \dots, u_n) \stackrel{def}{=} \sqrt{|H_{rr}(u_1, \dots, u_n)|}$$

La funzione g è sicuramente non nulla e liscia in qualche intorno $U_2 \subseteq U_1$ di 0. Introduciamo un nuovo sistema di coordinate locali così definito:

$$\begin{cases} v_i = u_i & i \neq r \\ v_r(u_1, \dots, u_n) = g(u_1, \dots, u_n) \left[u_r + \sum_{i>r} u_i \frac{H_{ir}(u_1, \dots, u_n)}{H_{rr}(u_1, \dots, u_n)} \right] \end{cases}$$

Dal teorema della funzione inversa segue che il sistema di coordinate (v_1, \dots, v_n) potrà essere utilizzato come sistema di coordinate locali in un intorno sufficientemente piccolo di 0 che chiameremo U_3 . Si verifica allora che, per ogni $q \in U_3$, f ha la seguente espressione:

$$f(q) = \sum_{i \leq r} \pm v_i(q)^2 + \sum_{i,j > r} v_i(q)v_j(q)H'_{ij}(v_1, \dots, v_n)(q)$$

il che completa il ragionamento per induzione e dimostra il lemma di Morse. □

Come immediata conseguenza abbiamo il seguente:

Corollario 1.2.3. *Data una funzione liscia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ i suoi punti critici non degeneri sono isolati, cioè sono punti per cui esiste un intorno sufficientemente piccolo da non contenere altri punti critici.*

Dimostrazione. Basta scegliere, per ogni punto critico non degenero, l'intorno in cui vale l'identità enunciata nel lemma 1.2.2. □

1.3 Gruppi di diffeomorfismi a un parametro

Prima di concludere il capitolo parliamo di gruppi ad un parametro di diffeomorfismi, nozione tramite la quale più avanti enunceremo e dimostreremo un teorema cardine della Teoria di Morse.

Definizione 1.7. Un **gruppo ad un parametro di diffeomorfismi** definito su una varietà M è un'applicazione liscia $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ che soddisfa le seguenti proprietà:

1. per ogni $t \in \mathbb{R}$ la mappa $\varphi_t : M \rightarrow M$ definita da $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$ è un diffeomorfismo di M su se stessa;
2. per ogni $t, s \in \mathbb{R}$ si ha $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$. i.e. $\varphi(t+s, q) = \varphi(t, \varphi(s, q))$.

Dato un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi è sempre possibile definire un campo vettoriale X su M nel modo seguente. Per ogni funzione reale liscia f e scelto un punto $q \in M$, si consideri

$$X_q(f) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_h(q)) - f(q)}{h} \quad (1.2)$$

Diciamo che il campo vettoriale definito così genera il gruppo φ . Il teorema seguente ci dà una condizione sufficiente perché un campo vettoriale assegnato generi un unico gruppo ad un parametro di diffeomorfismi.

Teorema 1.3.1. *Sia X un campo vettoriale liscio a supporto compatto definito su una varietà M . Allora X genera un unico gruppo a un parametro di diffeomorfismi su M .*

Dimostrazione. Data una qualunque curva liscia $t \rightarrow c(t) \in M$, definiamo il vettore velocità $\frac{dc}{dt} \in T_{c(t)}M$ come:

$$\frac{dc}{dt}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c(t+h)) - f(c(t))}{h}$$

Sia ora φ_t un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi, generato dal campo vettoriale X . Allora, per ogni punto $q \in M$ fissato, la curva $t \rightarrow \varphi_t(q)$ soddisfa il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_t(q)}{dt} = X_{\varphi_t(q)} \\ \varphi_0(q) = q \end{cases} \quad (1.3)$$

La prima delle due equazioni è vera poiché:

$$\frac{d\varphi_t(q)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_{t+h}(q)) - f(\varphi_t(q))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_h(p)) - f(p)}{h} = X_p(f)$$

dove $p = \varphi_t(q)$. Come sappiamo però, un problema differenziale del tipo 1.3 possiede, localmente, un'unica soluzione che dipende in maniera C^∞ dalle condizioni iniziali. Per ogni punto di M , pertanto, esiste un intorno U del punto stesso ed un numero $\varepsilon > 0$ per i quali il problema differenziale 1.3 ha un'unica soluzione liscia per ogni $q \in U$ e $|t| < \varepsilon$. Grazie alla proprietà di compattezza, inoltre, K può essere ricoperto da un numero finito di tali intorni U . Sia ora ε_0 il più piccolo degli ε corrispondenti a questi intorni e poniamo $\varphi_t(q) = q$ per $q \notin K$. Segue allora subito che questa equazione differenziale ha un'unica soluzione $\varphi_t(q)$ per tutti i $t, |t| < \varepsilon_0$ e per $q \in M$. Tale soluzione è liscia vista come funzione di due variabili ed è inoltre chiaro che $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ ogni volta che $|t|, |s|, |t+s| < \varepsilon_0$. Inoltre ogni φ_t è un diffeomorfismo. Quello che dobbiamo fare per completare la dimostrazione è definire φ_t per tutti i $t, |t| \geq \varepsilon_0$. Ogni $t \in \mathbb{R}$ può essere espresso come un multiplo di $\varepsilon_0/2$ più un resto r , con $|r| < \varepsilon_0/2$. Se dunque $t = k(\varepsilon_0/2) + r$ $k \geq 0$, poniamo:

$$\varphi = \varphi_{\varepsilon_0/2} \circ \varphi_{\varepsilon_0/2} \cdots \circ \varphi_{\varepsilon_0/2} \circ \varphi_r$$

Se invece $k < 0$ si sostituisce nella definizione di φ_t il diffeomorfismo $\varphi_{\varepsilon_0/2}$ con $\varphi_{-\varepsilon_0/2}$ e si itera la trasformazione $-k$ volte. In questo modo φ_t risulta definito per tutti i valori di t . Si mostra facilmente che φ_t è ben definito, di classe C^∞ e soddisfa la condizione $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$. \square

Osservazione 2. L'ipotesi che il campo vettoriale X abbia un supporto compatto è essenziale. Si consideri il caso in cui M è l'intervallo unitario aperto $(0, 1) \subset \mathbb{R}$, e sia X il campo vettoriale standard $\frac{d}{dt}$ su M . Esso non ha supporto compatto e non genera alcun gruppo ad un parametro di diffeomorfismi su M .

Capitolo 2

Omotopia in termini di valori critici

In questo capitolo ci serviremo del lemma di Morse per studiare come varia la topologia di una varietà differenziabile tramite l'analisi dei valori critici di funzioni di Morse.

2.1 Variazione del tipo di omotopia attraverso i punti critici

Prima di enunciare il primo importante teorema del capitolo, diamo due ulteriori definizioni di cui ci serviremo. Muniamo d'ora in poi M di una metrica riemanniana e indichiamo con $\langle v, w \rangle$ il prodotto scalare associato da tale metrica a due vettori tangenti v e w .

Definizione 2.1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ poniamo:

$$M^a \stackrel{def}{=} f^{-1}(-\infty, a] = \{p \in M : f(p) \leq a\}$$

Definizione 2.2. Il **gradiente** di una funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ è un campo vettoriale indicato con $\nabla(f)$ e definito su M dall'identità:

$$\langle X, \nabla(f) \rangle = X(f)$$

per ogni campo vettoriale liscio X definito su M . Scelto un sistema di coordinate locali (u_1, \dots, u_n) , il gradiente di f ha componenti:

$$\nabla(f)_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} \frac{\partial f}{\partial u_j} \quad i = 1, \dots, n$$

dove le g_{ij} sono le funzioni $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$, componenti del tensore metrico

Osservazione 3. Per come è stato definito, il campo vettoriale $\nabla(f)$ si annulla esattamente in corrispondenza dei punti critici di f . Se il campo vettoriale X della definizione 2.2 è il campo vettoriale velocità $\frac{d\alpha}{dt}$ di una curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$, vale l'identità:

$$\left\langle \frac{d\alpha}{dt}, \nabla(f) \right\rangle = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}$$

Teorema 2.1.1 (Teorema A). *Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione liscia, e M una varietà. Supponiamo $a < b$ e che l'insieme $f^{-1}[a, b]$, costituito da tutti i $p \in M$ tali che $a \leq f(p) \leq b$, sia compatto e non contenga nessun punto critico di f . Allora M^a è diffeomorfo a M^b . Inoltre M^a è un retratto per deformazione di M^b , dunque la mappa di inclusione $i : M^a \hookrightarrow M^b$ è un'equivalenza omotopica.*

Dimostrazione. Sia $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione liscia tale che:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\langle \nabla(f)(x), \nabla(f)(x) \rangle} & \text{se } x \in f^{-1}([a, b]) \\ 0 & \text{se } x \in M - K \end{cases}$$

dove K è un compatto che contiene $f^{-1}([a, b])$. Definiamo per un generico $q \in M$ il campo vettoriale:

$$X_q \stackrel{def}{=} g(q)\nabla(f)_q$$

ora X_q è definito nullo fuori dal compatto K quindi per il teorema 1.3.1 abbiamo un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi $\varphi_t : M \rightarrow M$, $t \in \mathbb{R}$. Fissiamo $q \in M$.

Se $\varphi_t(q) \in f^{-1}([a, b])$ allora:

$$\begin{aligned} \frac{df(\varphi_t(q))}{dt} &= \left\langle \frac{d\varphi_t(q)}{dt}, \nabla(f)_{\varphi_t(q)} \right\rangle = \left\langle X_{\varphi_t(q)}, \nabla(f)_{\varphi_t(q)} \right\rangle = \\ &= \left\langle g(\varphi_t(q))\nabla(f)_{\varphi_t(q)}, \nabla(f)_{\varphi_t(q)} \right\rangle = 1 \end{aligned}$$

Se invece $f(\varphi_t(q)) \notin [a, b]$ si ha $\frac{df(\varphi_t(q))}{dt} = 0$ perché X è nullo fuori da K .

La funzione $t \rightarrow f(\varphi_t(q))$ è dunque lineare con derivata 1 quando $f(\varphi_t(q)) \in [a, b]$ ovvero è della forma $f(\varphi_t(q)) = f(q) + t$. Quindi consideriamo un valore $c \in \mathbb{R}$ e $f^{-1}(c) \subseteq M$. I diffeomorfismi φ_t agiscono così trasportando i seguenti insiemi:

$$\varphi_t : f^{-1}(c) \mapsto f^{-1}(c + t)$$

Infatti se $x \in f^{-1}(c)$ allora $f(x) = c$; siccome $f(\varphi_t(x)) = f(x) + t = c + t$ allora ne viene che $\varphi_t(x) \in f^{-1}(c + t)$.

Il flusso φ_t scambia quindi gli insiemi di livello di f . Ciò significa che φ_{b-a} mappa $f^{-1}(a)$ diffeomorficamente in $f^{-1}(b)$. Quindi φ_{b-a} trasporta diffeomorficamente M^a in M^b con le notazioni della definizione 2.1. Inoltre, definendo la famiglia di applicazioni r_t , dove $r_t : M^b \rightarrow M^b$, tramite:

$$r_t(q) = \begin{cases} q & \text{se } f(q) \leq a \\ \varphi_{t(f(q)-a)}(q) & \text{se } a \leq f(q) \leq b \end{cases}$$

si ha che r_0 è l'identità e r_1 è una retrazione da M^b a M^a . Dunque M^a è un retratto per deformazione di M^b . \square

Osservazione 4. La condizione che $f^{-1}([a, b])$ sia un insieme compatto è essenziale. Immaginiamo di considerare una varietà M in cui togliamo un punto $p \in f^{-1}([a, b])$. Ovviamente non è possibile retrarre con continuità M^b su M^a , come si vede in figura 2.1, ed effettivamente il teorema non vale.

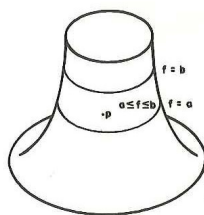


Figura 2.1: Varietà privata di un punto

Definizione 2.3. Sia X spazio topologico e sia e^λ è una λ -cella. Consideriamo $\xi : \partial e^\lambda \rightarrow X$ una applicazione continua. Si definisce $X \cup_\xi e^\lambda$ come il quoziente così ottenuto, $X' = (X \sqcup e^\lambda) / \sim$ dove per ogni $y \in \partial e^\lambda$ si ha che $y \sim \xi(y)$; si dice che X' si ottiene attaccando a X una cella di dimensione λ .

Lemma 2.1.2. [lemma di Whitehead] Siano $\xi : \partial e^\lambda \rightarrow X$ e $\xi' : \partial e^\lambda \rightarrow X$ due mappe omotope definite su ∂e^λ . Allora $X \cup_\xi e^\lambda$ è omotopicamente equivalente a $X \cup_{\xi'} e^\lambda$

Teorema 2.1.3 (Teorema B). Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione liscia, e M una varietà. Sia p un punto critico non degenere di indice λ ; poniamo $f(p) = c$, supponiamo che $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ sia compatto e non contenga altri punti critici

di f oltre a p , per qualche $\varepsilon > 0$. Allora l'insieme $M^{c+\varepsilon}$ ha lo stesso tipo di omotopia di $M^{c-\varepsilon}$ con una λ -cella attaccata.

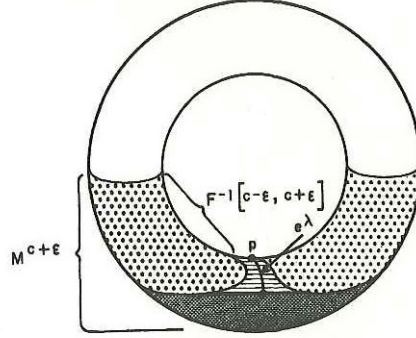


Figura 2.2: Toro

Dimostrazione. Applichiamo il lemma di Morse alla funzione f al punto p trovando un intorno U di p e un sistema di coordinate locali (y_1, \dots, y_n) tali che valga per ogni $q \in U$

$$f(q) = c - (y_1(q))^2 - \dots - (y_\lambda(q))^2 + (y_{\lambda+1}(q))^2 + \dots + (y_n(q))^2 \quad (2.1)$$

e si abbia che p nel nuovo sistema di riferimento (y_1, \dots, y_n) è l'origine ovvero, $y_1(p) = \dots = y_n(p) = 0$. Scegliamo ora $\varepsilon > 0$ tale che:

- $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ sia compatto e non contenga altri punti critici oltre a p .
- considerata l'immersione liscia:

$$(y_1, \dots, y_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

si abbia che l'immagine di U attraverso questa contenga la palla chiusa :

$$\{(y_1, \dots, y_n) : \sum_{i=1}^n y_i^2 \leq 2\varepsilon\}$$

Definiamo ora la λ -cella e^λ come l'insieme di punti in U con

$$(y_1)^2 + \dots + (y_\lambda)^2 \leq \varepsilon ; y_{\lambda+1} = \dots = y_n = 0$$

Graficamente la situazione è la seguente:

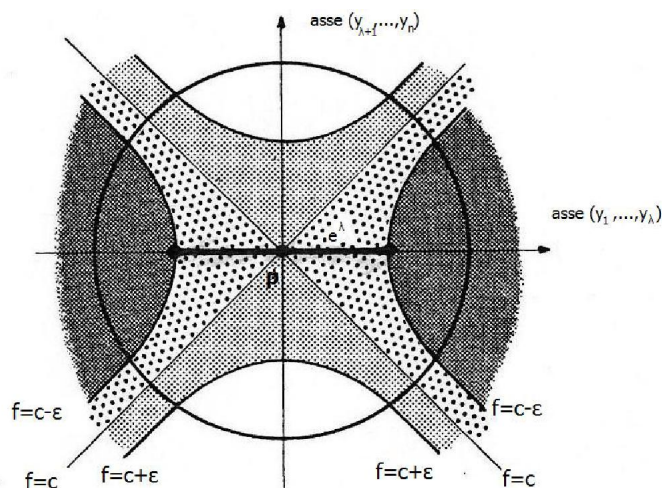


Figura 2.3: *Rappresentazione in prossimità del punto critico p*

Gli assi coordinati rappresentano rispettivamente i piani $y_{\lambda+1} = \dots = y_n = 0$ e $y_1 = \dots = y_\lambda = 0$; la circonferenza rappresenta il bordo della palla di raggio $\sqrt{2\varepsilon}$; le iperboli sono le varietà $f^{-1}(c-\varepsilon)$, $f^{-1}(c+\varepsilon)$. Sostituendo infatti $f = c - \varepsilon$ nella espressione iniziale di f si ottiene:

$$c - \varepsilon = c - (y_1(q))^2 - \dots - (y_\lambda(q))^2 + (y_{\lambda+1}(q))^2 + \dots + (y_n(q))^2$$

e si trova quindi

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{\lambda} y_i^2 - \sum_{i=\lambda+1}^n y_i^2 = X^2 - Y^2$$

dove il vettore $(y_1, \dots, y_n) = (X, Y)$, $X = (y_1, \dots, y_\lambda)$, $Y = (y_{\lambda+1}, \dots, y_n)$

In modo analogo si può procedere imponendo che $f = c + \varepsilon$ e che $f = \varepsilon$ trovando rispettivamente $-X^2 + Y^2 = \varepsilon$ e $X = \pm Y$.

La regione $M^{c-\varepsilon}$ è quella colorata in modo più scuro, la regione $f^{-1}([c - \varepsilon, c])$ è quella puntinata e la regione $f^{-1}([c, c + \varepsilon])$ è quella colorata in modo più chiaro. La linea orizzontale scura passante per p rappresenta la λ -cella e^λ . Dalla figura è chiaro che: $e^\lambda \cap M^{c-\varepsilon} = \partial e^\lambda$, e dunque la λ -cella e^λ è attaccata a $M^{c-\varepsilon}$ come richiesto. Mostriamo ora che $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ è un retratto per deformazione di $M^{c+\varepsilon}$.

Per fare questo consideriamo una funzione liscia $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con le seguenti caratteristiche:

$$\begin{cases} \gamma(0) > \varepsilon \\ \gamma(t) = 0 \text{ se } t \geq 2\varepsilon \\ -1 < \gamma'(t) \leq 0 \text{ per ogni } t \end{cases}$$

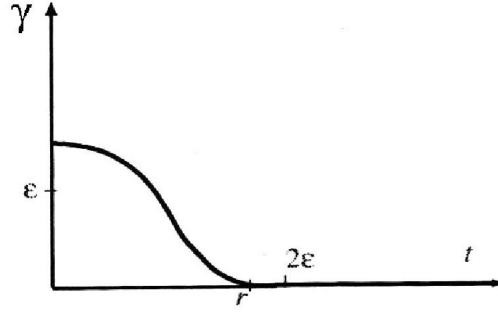


Figura 2.4: *Comportamento indicativo di γ*

L'ultima condizione significa che la funzione è non crescente nell'intervallo $[0, 2\varepsilon]$ e qui non può assumere massimi relativi. Notiamo, inoltre, che in questo intervallo la funzione è sempre non negativa. Per tutti i punti $q \in U$, l'intorno precedentemente trovato, definiamo le funzioni

$$\xi, \eta : U \rightarrow [0, +\infty)$$

così:

$$\xi(q) = (y_1(q))^2 + \cdots + (y_\lambda(q))^2$$

$$\eta(q) = (y_{\lambda+1}(q))^2 + \cdots + (y_n(q))^2$$

Notiamo che, tramite queste posizioni, l'identità 2.1 può essere scritta come:
 $f(q) = c - \xi(q) + \eta(q)$.

Definiamo ora una funzione $F : M \rightarrow \mathbb{R}$, $F \leq f$ nel modo seguente:

$$F(q) = \begin{cases} f(q) & \text{se } q \in M - U \\ c - \xi(q) + \eta(q) - \gamma(\xi(q) + 2\eta(q)) & \text{se } q \in U \end{cases}$$

F è una funzione liscia definita su M che coincide con f fuori da U . Analizziamo ora nel dettaglio la funzione F appena definita:

$$F^{-1}(\infty, c + \varepsilon] = \{q \in M : F(q) \leq c + \varepsilon\}.$$

Sia $q \in M$: se vale che $\xi(q) + 2\eta(q) > 2\varepsilon$ (fuori dall'ellissoide) allora $\gamma(\xi(q) + 2\eta(q)) = 0$ quindi $F = f$, invece $\xi(q) + 2\eta(q) \leq 2\varepsilon$ (dentro all'ellissoide) allora $F(q) = f(q) - \gamma(\xi(q) + 2\eta(q)) \leq f(q) = c - \xi(q) + \eta(q) \leq c + \frac{1}{2}\xi(q) + \eta(q) \leq c + \varepsilon$ (ricordiamo che se $\gamma > 0$ sempre allora $-\gamma < 0$ sempre). Quindi fuori dall'ellissoide $F = f$ quindi $F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon] = f^{-1}(-\infty, c + \varepsilon]$.

Invece dentro all'ellissoide risulta $F(q) \leq c + \varepsilon$ e vale anche che $F(q) \leq f(q) \leq c + \varepsilon$ quindi in generale vale che

$$F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon] = f^{-1}(-\infty, c + \varepsilon] = M^{c+\varepsilon} \quad (2.2)$$

Vediamo ora come sono fatti i punti critici di F . Ricordandoci la condizione su γ' possiamo scrivere:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -1 - \gamma'(\xi + 2\eta) < 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = 1 - 2\gamma'(\xi + 2\eta) \geq 1$$

e banalmente si ha che

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta$$

I due vettori $\partial\xi$, $\partial\eta$ sono nulli solamente in corrispondenza del punto p e da questo segue che l'unico punto critico di F all'interno di U è il punto p stesso. Tale ragionamento può essere ripetuto per tutti i punti critici di f e concludiamo pertanto che F e f hanno gli stessi punti critici. Studiamo ora l'insieme: $F^{-1}[c - \varepsilon; c + \varepsilon]$. Grazie alla 2.2 e alla disuguaglianza sempre vera $F \leq f$, abbiamo che vale:

$$F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \subseteq f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$$

L'insieme $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ è compatto per ipotesi e, poiché $F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ è chiuso, deduciamo che è anche compatto. Inoltre, per quanto detto, non può contenere altri punti critici eccetto, eventualmente, p . Vediamo però che p non appartiene a questo insieme, dal momento che $F(p) = c - \gamma(0) < c - \varepsilon$. Siamo quindi nelle condizioni di poter applicare il teorema 2.1.1 e concludere dunque che $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ è un retratto di deformazione di $M^{c+\varepsilon}$. Possiamo pensare all'insieme $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ come all'unione di $M^{c-\varepsilon}$ e un manico attaccato. Scriviamo d'ora in poi al posto di $F^{-1}(-\infty, c]$ esattamente $M^{c-\varepsilon} \cup H$ dove H è la chiusura di $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon] - M^{c-\varepsilon}$. Osserviamo ora che la cella e^λ consta di tutti i punti q tali che $\xi(q) \leq \varepsilon$, $\eta(q) = 0$ ed è contenuta in H . Questo perché, come abbiamo visto, $\frac{\partial F}{\partial \xi} < 0$ e dunque, per tutti i punti $q \in e^\lambda$, valgono:

$$F(q) \leq F(p) < c - \varepsilon$$

$$f(q) \geq c - \varepsilon.$$

La situazione è illustrata nella figura seguente:

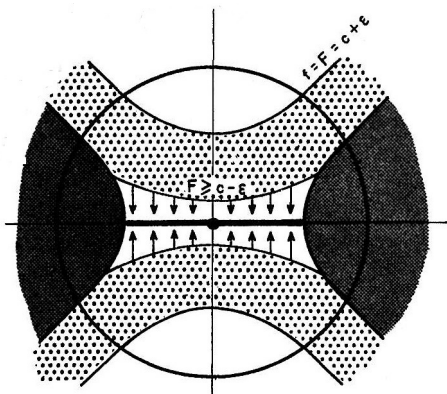


Figura 2.5: *Rappresentazione di F in prossimità del punto critico*

Mostriamo ora che $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ è un retratto per deformazione di $M^{c-\varepsilon} \cup H$. La retrazione che consideriamo $r_t : M^{c-\varepsilon} \cup H \rightarrow M^{c-\varepsilon} \cup H$ è definita come l'identità fuori dall'aperto U , mentre per i punti appartenenti a questo aperto, dobbiamo distinguere alcuni casi.

- Nella regione in cui $\xi \leq \varepsilon$ possiamo dire che r_t corrisponde alla trasformazione:

$$(y_1, \dots, y_n) \rightarrow (y_1, \dots, y_\lambda, ty_{\lambda+1}, \dots, ty_n)$$

r_1 è l'identità, r_0 mappa l'insieme considerato in e^λ .

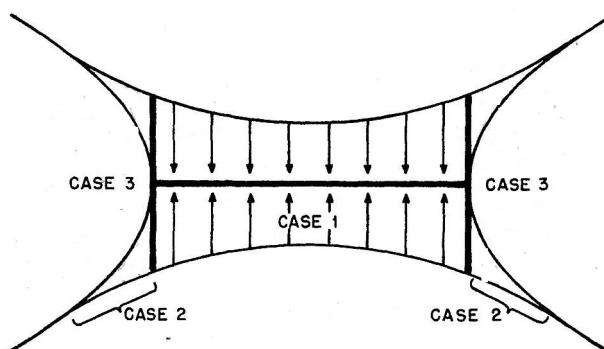


Figura 2.6: *Comportamento della retrazione nei tre casi*

- Siano i punti descritti da $\varepsilon \leq \xi \leq \eta + \varepsilon$. Allora in tal caso r_t corrisponde alla trasformazione:

$$(y_1, \dots, y_n) \rightarrow (y_1, \dots, y_\lambda, s_t y_{\lambda+1}, \dots, s_t y_n)$$

dove il numero $s_t \in [0, 1]$ è definito da

$$s_t = t + (1 - t)((\xi - \varepsilon)/\eta)^{\frac{1}{2}}$$

Allora r_1 è ancora l'identità e r_0 mappa l'intera regione nella ipersuperficie $f^{-1}(c - \varepsilon)$.

- L'ultimo insieme da considerare è quello in cui $\eta + \varepsilon \leq \xi$, ovvero dentro $M^{c-\varepsilon}$. Per questi punti basta definire l'identità per tutti i $t \in [0, 1]$. Notiamo che tale definizione ha anche il vantaggio di essere coerente con quella precedentemente data non appena $\xi = \eta + \varepsilon$.

Quanto detto mostra che $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ è un retratto di deformazione di $F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon]$ e questo completa la dimostrazione del teorema. \square

Osservazione 5. I due teoremi appena visti dicono quindi che, data una funzione di Morse f , se l'insieme $f^{-1}[a, b]$ è compatto, la topologia tra M^a e M^b cambia non appena esistono valori critici nell'intervallo $[a, b]$. La richiesta che il punto critico sia non degenere è essenziale: consideriamo il controesempio in cui M è la retta reale e la funzione in esame è $f(x) = x^3$. Scegliamo un $a < 0$: si ha che 0 è un punto critico degenere; effettivamente la topologia di M^a non cambia quando a passa per 0.

Osservazione 6. Tramite una dimostrazione simile a quella vista è possibile dimostrare il risultato più generale secondo cui se nell'insieme $f^{-1}(c)$ ci sono k punti critici non degeneri p_1, \dots, p_k con indici rispettivamente r_1, \dots, r_k , allora $M^{c+\varepsilon}$ è omotopicamente equivalente a $M^{c-\varepsilon} \cup e^{\lambda_1} \cup \dots \cup e^{\lambda_k}$.

Osservazione 7. E' possibile mostrare, modificando leggermente la dimostrazione del teorema 2.1.3, che anche l'insieme M^c è un retratto di deformazione di $M^{c+\varepsilon}$. L'insieme M^c è infatti un retratto di deformazione di $F^{-1}(-\infty, c]$ il quale è a sua volta un retratto di deformazione di $M^{c+\varepsilon}$. Quanto detto, insieme al teorema 2.1.3 ci permette di concludere che $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ è un retratto di deformazione di M^c .

2.2 Attaccamento di celle: varietà come CW complessi

In questa ultima sezione del capitolo l'obiettivo è quello di dimostrare un risultato importante che asserisce che sotto particolari ipotesi, una varietà differenziabile è omotopicamente equivalente a un opportuno CW-complesso.

Teorema 2.2.1. *Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione liscia definita su una varietà compatta M . Se f non ha punti critici degeneri allora M è omotopicamente equivalente ad un CW-complesso finito dimensionale tale che, per ogni $\lambda = 1, \dots, \dim(M)$, il numero delle λ -celle è uguale al numero dei punti critici di f aventi indice uguale a λ .*

Dimostrazione. Siano $c_1 < c_2 < c_3, \dots$ i valori critici di $f : M \rightarrow \mathbb{R}$; la sequenza $\{c_i\}$ non ha punti di accumulazione dal momento che M^a è compatto. L'insieme M^a è vuoto per $a < c_1$. Procediamo per induzione: supponiamo che per $a \neq c_1, c_2, \dots$ la sottovarietà M^a sia omotopicamente equivalente ad un CW-complesso K tramite la mappa $h' : M^a \rightarrow K$. Sia c il più piccolo dei c_i tale che $c_i > a$. Grazie ai teoremi 2.1.1, 2.1.3 troviamo che, per ε sufficientemente piccolo c' è una equivalenza omotopica $h : M^{c-\varepsilon} \rightarrow M^a$ e $M^{c+\varepsilon}$ è omotopicamente equivalente a $M^{c-\varepsilon} \cup_{\varphi_1} e^{\lambda_1} \cup \dots \cup_{\varphi_{j(c)}} e^{\lambda_{j(c)}}$ per opportune mappe di attaccamento $\varphi_1, \dots, \varphi_{j(c)}$ il cui numero dipende dal numero c . Applichiamo ora il teorema di approssimazione cellulare ad ogni composizione $h' \circ h \circ \varphi$ per $i = 1, \dots, j(c)$. Troviamo allora che ognuna di queste mappe è omotopa a una mappa:

$$\psi_i : \partial e^{\lambda_i} \rightarrow K^{\lambda_i-1}$$

dove K^{λ_i-1} indica il $(\lambda_i - 1)$ -scheletro di K . Usando i lemmi prima dimostrati in particolare il lemma di Whitehead 2.1.2 otteniamo che

$$K \cup_{\psi_1} e^{\lambda_1} \cup \dots \cup_{\psi_{j(c)}} e^{\lambda_{j(c)}} \simeq K \cup_{h' \circ h \circ \varphi_1} \cup \dots \cup_{h' \circ h \circ \varphi_{j(c)}} e^{\lambda_{j(c)}}$$

Per induzione possiamo infine concludere la dimostrazione: ogni $M^{a'}$ e quindi anche M è equivalente ad un opportuno CW-complesso. \square

Osservazione 8. La dimostrazione appena condotta in realtà ci dice anche qualcosa di più, ovvero che ogni sottovarietà M^a è omotopicamente equivalente ad un CW-complesso finito dimensionale con una cella di dimensione λ per ogni punto critico di indice λ di M^a . Questo è vero anche se a è un valore critico.

2.3 Variazione dei gruppi di omologia attraverso un punto critico

Da qui fino alla fine del capitolo si suppone sempre che il punto critico sia non degenere.

In quest'ultimo paragrafo vogliamo analizzare come si modifica l'omologia della varietà liscia M quando attraversiamo un punto critico di una funzione reale su essa definita. Supponiamo per semplicità di notazione che 0 sia valore critico di $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ e che sia $c \in M$ tale che $F(c) = 0$. Allora, sempre adottando le notazioni precedentemente usate, M^ε indica l'insieme $F^{-1}(-\infty, \varepsilon]$. Allora focalizziamo l'attenzione sulla coppia $(M^\varepsilon, M^{-\varepsilon})$ ed effettivamente risulta che $M^{-\varepsilon} \subset M^\varepsilon$. Supponiamo inoltre che ε sia sufficientemente piccolo in modo che in $M^\varepsilon - M^{-\varepsilon}$ non vi siano altri punti critici di F oltre a c .

Osservazione 9. Ricordiamo che se G è un gruppo abeliano libero finitamente generato allora G ammette la seguente rappresentazione:

$$G = \mathbb{Z}^{\oplus r} \oplus \mathbb{Z}_{a_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{a_k}$$

con r, a_1, \dots, a_k naturali opportuni

Il numero r è detto rango del gruppo abeliano G e si indica con $\text{rk}(G)$.

L'intenzione è ora quella di utilizzare il teorema 2.1.3 e la successione esatta di omologia di Mayer-Vietoris per arrivare a mostrare il seguente risultato:

Osservazione 10. Data $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ funzione liscia, se $c \in M$ è punto critico di F di indice λ , allora si possono presentare le due seguenti situazioni relativamente ai ranghi dei gruppi di omologia di M^ε e di $M^{-\varepsilon}$:

$$\bullet \begin{cases} \text{rk}H_\lambda(M^\varepsilon) = \text{rk}H_\lambda(M^{-\varepsilon}) + 1 \\ \text{rk}H_i(M^\varepsilon) = \text{rk}H_i(M^{-\varepsilon}) \quad \forall i \neq \lambda \end{cases}$$

oppure

$$\bullet \begin{cases} \text{rk}H_{\lambda-1}(M^\varepsilon) = \text{rk}H_{\lambda-1}(M^{-\varepsilon}) - 1 \\ H_i(M^\varepsilon) \cong H_i(M^{-\varepsilon}) \quad \forall i \neq \lambda - 1 \end{cases}$$

Suggestivamente si può pensare che l'attraversamento di un punto critico di indice λ o crea una classe di grado λ o ne distrugge una di grado $\lambda - 1$.

Osservazione 11. Sia X spazio topologico. Definendo la caratteristica di Eulero-Poincaré di X come

$$\chi(X) = \sum_i (-1)^i \operatorname{rk} H_i(X)$$

allora, utilizzando le notazioni dell'osservazione precedente, si ha come immediata conseguenza che:

$$\chi(M^\varepsilon) = \chi(M^{-\varepsilon}) + (-1)^\lambda$$

Dimostrazione. osservazione 10 Per quanto detto nel teorema 2.1.3 se c è punto critico di indice λ allora risulta che $M^\varepsilon \simeq M^{-\varepsilon} \cup e^\lambda$ dove e^λ è una λ -cella. In generale abbiamo che $M^{-\varepsilon} \cap e^\lambda = S^{\lambda-1}$. Ricordiamo che una λ -cella è contraibile quindi

$$H_i(e^\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq 0 \\ \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \end{cases}$$

D'altra parte è noto che l'omologia di $S^{\lambda-1}$ è:

$$H_i(S^{\lambda-1}) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq 0, \lambda - 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } i = 0, \lambda - 1 \end{cases}$$

Possiamo allora considerare la successione esatta lunga di omologia di Mayer-Vietoris applicata a $M^\varepsilon, M^{-\varepsilon}, e^\lambda$, focalizzando l'attenzione nella parte che riguarda gli indici di omologia λ e $\lambda - 1$:

$$\begin{aligned} & \dots \xrightarrow{\partial_{\lambda*}} H_\lambda(S^{\lambda-1}) \xrightarrow{i_{\lambda*}} H_\lambda(M^{-\varepsilon}) \xrightarrow{j_{\lambda*}} H_\lambda(M^\varepsilon) \xrightarrow{\partial_{\lambda-1*}} \\ \hookrightarrow & H_{\lambda-1}(S^{\lambda-1}) \xrightarrow{i_{\lambda-1*}} H_{\lambda-1}(M^{-\varepsilon}) \xrightarrow{j_{\lambda-1*}} H_{\lambda-1}(M^\varepsilon) \xrightarrow{\partial_{\lambda-2*}} \\ & \hookrightarrow H_{\lambda-2}(S^{\lambda-1}) \dots \end{aligned}$$

Riscrivendola andando a sostituire i gruppi di omologia noti risulta:

$$\begin{aligned} & \dots \xrightarrow{\partial_{\lambda*}} 0 \xrightarrow{i_{\lambda*}} H_\lambda(M^{-\varepsilon}) \xrightarrow{j_{\lambda*}} H_\lambda(M^\varepsilon) \xrightarrow{\partial_{\lambda-1*}} \\ \hookrightarrow & \mathbb{Z} \xrightarrow{i_{\lambda-1*}} H_{\lambda-1}(M^{-\varepsilon}) \xrightarrow{j_{\lambda-1*}} H_{\lambda-1}(M^\varepsilon) \xrightarrow{\partial_{\lambda-2*}} \\ & \hookrightarrow 0 \dots \end{aligned}$$

Dalla esattezza risulta dunque che $j_{\lambda*}$ è iniettivo e $j_{\lambda-1*}$ è suriettivo, quindi $\operatorname{Im} j_{\lambda*} = H_\lambda(M^{-\varepsilon})$

In generale $i_{\lambda-1*}$, essendo un morfismo di gruppi abeliani, si può comportare nei due seguenti modi:

- Consideriamo, nel caso in cui $i_{\lambda-1*}$ non sia iniettivo, la seguente successione esatta corta:

$$0 \xrightarrow{i_{\lambda*}} H_{\lambda}(M^{-\varepsilon}) \xrightarrow{j_{\lambda*}} H_{\lambda}(M^{\varepsilon}) \rightarrow Ker i_{\lambda-1*} \rightarrow 0$$

Consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} H_{\lambda}(M^{\varepsilon}) & \xrightarrow{\partial_{\lambda-1*}} & Ker i_{\lambda-1*} \\ \pi \downarrow & \nearrow \cong & \\ H_{\lambda}(M^{\varepsilon})/Ker \partial_{\lambda-1*} & & \end{array}$$

Dal Teorema fondamentale di omomorfismo per i gruppi ne viene che

$$H_{\lambda}(M^{\varepsilon})/Ker \partial_{\lambda-1*} \cong Ker i_{\lambda-1*}$$

Dall'esattezza risulta che $Ker \partial_{\lambda-1*} \cong Im j_{\lambda*}$ dunque, grazie all'injectività di $j_{\lambda*}$

$$H_{\lambda}(M^{\varepsilon})/Ker \partial_{\lambda-1*} \cong H_{\lambda}(M^{\varepsilon})/Im j_{\lambda*} \cong H_{\lambda}(M^{\varepsilon})/H_{\lambda}(M^{-\varepsilon})$$

da cui

$$H_{\lambda}(M^{\varepsilon})/H_{\lambda}(M^{-\varepsilon}) \cong Ker i_{\lambda-1*}$$

Ora è chiaro che $Ker i_{\lambda-1*}$ è sottogruppo di \mathbb{Z} quindi, come tale, si può identificare a \mathbb{Z} a meno di isomorfismi. Questo implica che:

$$rk H_{\lambda}(M^{\varepsilon}) = rk H_{\lambda}(M^{-\varepsilon}) + 1.$$

Siccome $i_{\lambda-1*}$ non è iniettivo allora considero la seguente successione esatta corta:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \rightarrow H_{\lambda-1}(M^{-\varepsilon}) \xrightarrow{j_{\lambda*-1}} H_{\lambda-1}(M^{\varepsilon}) \xrightarrow{\partial_{\lambda-2*}} 0$$

Da qui si comprende che si modifica solamente la componente di torsione dei gruppi di omologia di grado diverso da λ , dunque possiamo dire che

$$rk H_i(M^{\varepsilon}) = rk H_i(M^{-\varepsilon}) \quad i \neq \lambda$$

- Il secondo caso possibile è che $i_{\lambda-1*}$ è iniettivo: \mathbb{Z} si immerge in $H_{\lambda-1}(M^{-\varepsilon})$ e $Im i_{\lambda-1*} \cong \mathbb{Z}$. Dall'esattezza $Im i_{\lambda-1*} = Ker j_{\lambda-1*}$. Consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
 H_{\lambda-1}(M^{-\varepsilon}) & \xrightarrow{j_{\lambda-1*}} & H_{\lambda-1}(M^\varepsilon) \\
 \pi \downarrow & \nearrow \cong & \\
 H_{\lambda-1}(M^{-\varepsilon})/Ker j_{\lambda-1*} & &
 \end{array}$$

Dal Teorema donfundamentale di omomorfismo per i gruppi si ha che:

$$H_{\lambda-1}(M^{-\varepsilon})/\mathbb{Z} \cong H_{\lambda-1}(M^\varepsilon).$$

Questo implica che:

$$rk H_{\lambda-1}(M^\varepsilon) = rk H_{\lambda-1}(M^{-\varepsilon}) - 1.$$

Se $i_{\lambda-1*}$ è iniettivo, allora $0 = ker i_{\lambda-1*} = Im \partial_{\lambda-1*}$. Quindi abbiamo:

$$0 \xrightarrow{i_{\lambda*}} H_\lambda(M^{-\varepsilon}) \xrightarrow{j_{\lambda*}} H_\lambda(M^\varepsilon) \xrightarrow{\partial_{\lambda-1*}} 0$$

cioè $j_{\lambda*}$ è un isomorfismo. Quindi $H_\lambda(M^\varepsilon) \cong H_\lambda(M^{-\varepsilon})$. Infine analogamente si mostra che $H_i(M^\varepsilon) \cong H_i(M^{-\varepsilon})$ per ogni $i \neq \lambda - 1$.

□

2.4 Esempi

Possiamo ora osservare quanto detto in questo ultimo teorema in qualche esempio:

Esempio 1

Consideriamo un toro giacente su un piano come indicato in figura. Consideriamo la funzione definita su M a valori reali ,altezza rispetto al piano.

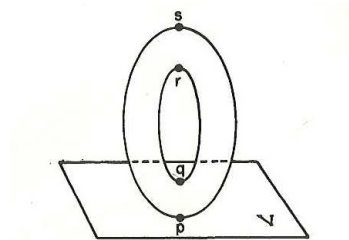


Figura 2.7: Toro con funzione altezza sul piano

Quando la funzione altezza ci permette di attraversare il punto critico p , che ha indice 0 (basta pensare che localmente in p f si può esprimere come



Figura 2.8: *Insiemi di livello del toro: figura 1*

$f(x, y) = x^2 + y^2$), allora per ε sufficientemente piccolo gli insiemi $M^{f(p)-\varepsilon}$ e $M^{f(p)+\varepsilon}$ risultano:

Quindi passiamo da un'omologia tutta nulla per $M^{f(p)-\varepsilon} = \emptyset$ ad una omologia che ha uguale a \mathbb{Z} il gruppo di omologia di grado zero e tutto il resto dell'omologia nullo. Abbiamo effettivamente aggiunto una classe di omologia di grado zero.

Proseguendo al passo successivo si passa attraverso q punto critico di indice 1 (si pensi sempre al fatto che una espressione locale della f può essere $f(x, y) = c + x^2 - y^2$).



Figura 2.9: *Insiemi di livello del toro: figura 2*

Passiamo da un oggetto che ha omologia $H_i(M^{f(q)-\varepsilon}) = 0$ per ogni $i \neq 0$ e $H_0(M^{f(q)-\varepsilon}) = \mathbb{Z}$ ad un oggetto $M^{f(q)+\varepsilon}$ che ha omologia uguale a quella di $M^{f(q)-\varepsilon}$ in ogni grado a parte il primo dove effettivamente abbiamo che $H_1(M^{f(q)+\varepsilon}) = \mathbb{Z}$.

Proseguendo si passa attraverso r punto critico di indice 1 (si pensi sempre al fatto che una espressione locale della f può essere $f(x, y) = c - x^2 + y^2$).

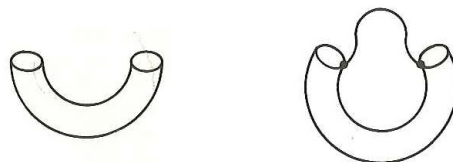


Figura 2.10: *Insiemi di livello del toro: figura 3*

Passiamo da un oggetto che ha omologia $H_i(M^{f(r)-\varepsilon}) = 0$ per ogni $i \neq 0, 1$ e $H_0(M^{f(r)-\varepsilon}) = H_1(M^{f(r)-\varepsilon}) = \mathbb{Z}$ ad un oggetto $M^{f(r)+\varepsilon}$ che ha omologia uguale a quella di $M^{f(r)-\varepsilon}$ in ogni grado a parte il primo dove effettivamente abbiamo che $H_1(M^{f(r)+\varepsilon}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Infine si passa attraverso s punto critico di grado 2 (si pensi sempre al fatto che una espressione locale della f può essere $f(x, y) = c - x^2 - y^2$).

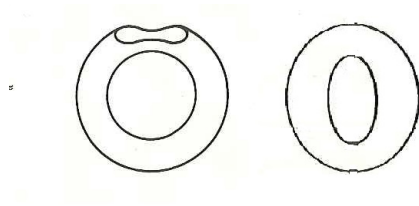


Figura 2.11: *Insiemi di livello del toro: figura 4*

Passiamo da un oggetto che ha omologia $H_i(M^{f(s)-\varepsilon}) = 0$ per ogni $i \neq 0, 1$ e $H_0(M^{f(s)-\varepsilon}) = H_1(M^{f(s)-\varepsilon}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ad un oggetto $M^{f(s)+\varepsilon}$ che ha omologia uguale a quella di $M^{f(s)-\varepsilon}$ in ogni grado a parte il secondo dove effettivamente abbiamo che $H_2(M^{f(s)+\varepsilon}) = \mathbb{Z}$.

Esempio 2

Consideriamo sempre la funzione altezza rispetto a un piano di questa varietà che si presenta così:

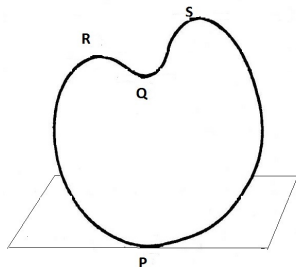


Figura 2.12: *Varietà con funzione altezza sul piano*

Quando la funzione altezza ci permette di attraversare il punto critico p , che ha indice 0 (basta pensare che localmente in p f si può esprimere come $f(x, y) = x^2 + y^2$), allora per ε sufficientemente piccolo gli insiemi $M^{f(p)-\varepsilon}$ e $M^{f(p)+\varepsilon}$ risultano:



Figura 2.13: *Insiemi di livello della varietà: figura 1*

Quindi passiamo da un omologia tutta nulla per $M^{f(p)-\varepsilon} = \emptyset$ ad una omologia che ha uguale a \mathbb{Z} il gruppo di omologia di grado zero e tutto il resto dell'omologia nullo. Abbiamo effettivamente aggiunto una classe di omologia di grado zero.

Proseguendo al passo successivo si passa attraverso q punto critico di indice 1 (si pensi sempre al fatto che una espressione locale della f può essere $f(x, y) = c + x^2 - y^2$).



Figura 2.14: *Insiemi di livello della varietà: figura 2*

Passiamo da un oggetto che ha omologia $H_i(M^{f(q)-\varepsilon}) = 0$ per ogni $i \neq 0$ e $H_0(M^{f(q)-\varepsilon}) = \mathbb{Z}$ ad un oggetto $M^{f(q)+\varepsilon}$ che ha omologia uguale a quel-

la di $M^{f(q)-\varepsilon}$ in ogni grado a parte il primo dove effettivamente abbiamo che $H_1(M^{f(q)+\varepsilon}) = \mathbb{Z}$.

Salendo con la funzione altezza risulta che r è un punto critico di indice 2, sempre facendo riferimento a una espressione locale della f .

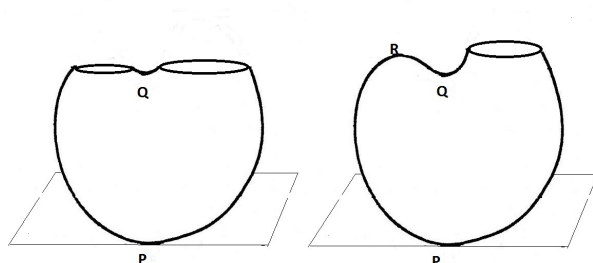


Figura 2.15: *Insiemi di livello della varietà: figura 3*

Effettivamente si passa da un oggetto che ha omologia tutta nulla eccetto che per il grado 0 e 1 dove vale \mathbb{Z} a una omologia che è sempre nulla eccetto che per il grado 0 dove vale \mathbb{Z} . Quindi in questo caso si elide una classe di omologia di grado 1, cioè uno in meno di quello del punto critico.

Infine si passa attraverso s punto critico di indice 2 (si pensi sempre al fatto che una espressione locale della f può essere $f(x, y) = c - x^2 - y^2$).

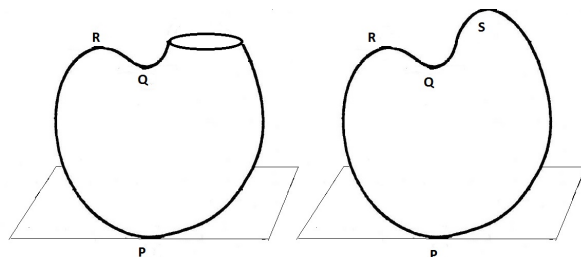


Figura 2.16: *Insiemi di livello della varietà: figura 4*

Si passa da un oggetto che ha omologia tutta nulla tranne che in grado 0 dove vale \mathbb{Z} ad un oggetto che ha omologia tutta nulla tranne che in grado 0 e 2 dove vale \mathbb{Z} .

Capitolo 3

Teorema di Lefschetz

3.1 Punto focale di una varietà e risultati preliminari

Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ una varietà differenziabile di dimensione $k < n$ immersa in modo differenziabile nello spazio euclideo n dimensionale \mathbb{R}^n . Per ogni punto $p \in (\mathbb{R}^n - M)$, definiamo la funzione $L_p : M \rightarrow \mathbb{R}$ come $L_p(q) = \|p - q\|^2$. I punti critici di L_p sono i punti di \mathbb{R}^n dove il gradiente di L_p è nullo, cioè i punti che rendono stabile la funzione distanza ovvero quelli in cui il vettore $p - q$ è ortogonale allo spazio tangente alla varietà M in q . Introduciamo alcune definizioni che ci risulteranno fondamentali in seguito:

Definizione 3.1. Lo **spazio totale del fibrato normale** di M è il sottoinsieme $N \subset M \times \mathbb{R}^n$ così definito:

$$N = \{(q, v) : q \in M; v \perp T_q(M)\}$$

Osservazione 12. Si verifica che N è una varietà differenziabile di dimensione n , immersa in maniera differenziabile in \mathbb{R}^{2n} .

Definizione 3.2. La **mappa di punto finale** è l'applicazione $E : N \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita come segue:

$$E(q, v) = q + v$$

per ogni $q \in M$ e ogni $v \in \mathbb{R}^n$.

Definizione 3.3. Un punto $e \in \mathbb{R}^n$ è detto **punto focale di (M, q) con molteplicità μ** , se e solo se $e = q + v = E(q, v)$ dove $(q, v) \in N$ e la matrice jacobiana

di E valutata in (q, v) ha nullità $\mu > 0$. Il punto e sarà invece chiamato semplicemente **punto focale** di M se e è un punto focale di (M, q) , per qualche $q \in M$.

Di fatto un punto focale di una varietà M altro non è che un punto di \mathbb{R}^n in prossimità del quale le normali si intersecano.

Ora occorre enunciare il seguente teorema, che non dimostreremo. Premettiamo la seguente

Definizione 3.4. Se $f : M \rightarrow N$ è una funzione liscia tra due varietà differenziabili, il punto $p \in M$ si dice **punto critico** di f se il differenziale $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ non ha rango massimo.

Teorema 3.1.1 (Sard). *Data una funzione liscia $f : M \rightarrow N$ definita tra due varietà differenziabili, l'insieme dei valori critici di f ha misura nulla in N .*

Sfruttando questo risultato possiamo subito enunciare e dimostrare il seguente corollario il quale afferma che i punti focali di una varietà M sono un insieme trascurabile:

Corollario 3.1.2. *Per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$, il punto x non è un punto focale di M .*

Dimostrazione. Abbiamo già visto che N è una varietà n -dimensionale; il punto x è punto focale se e solo se x è nell'immagine dell'insieme dei punti critici di $E : N \rightarrow \mathbb{R}^n$. Segue dal teorema 3.1.1 la tesi. \square

Per spiegare meglio cosa intendiamo per punto focale, richiamiamo qui di seguito le definizioni di prima e seconda forma fondamentale di una varietà differenziabile immersa in uno spazio euclideo sfruttando un sistema di coordinate locali che immaginiamo fissato. Sia dunque $U \in M$ un aperto sulla varietà e indichiamo con (u_1, \dots, u_k) un sistema di coordinate locali definito su U e centrato in un punto $p \in M \subset \mathbb{R}^n$. L'immersione della varietà M nello spazio euclideo \mathbb{R}^n fornisce n funzioni lisce: $x_1(u_1, \dots, u_k), \dots, x_n(u_1, \dots, u_k)$. Esse possono essere più brevemente riunite nell'espressione di un'unica funzione vettoriale liscia che scriveremo come:

$$\vec{x} = \vec{x}(u_1, \dots, u_k) = (x_1(u_1, \dots, u_k), \dots, x_n(u_1, \dots, u_k)).$$

Diamo ora la definizione di prima forma fondamentale di una varietà sfruttando quanto detto:

Definizione 3.5. La **prima forma fondamentale di una varietà** M associata ad un sistema di coordinate scelto, è la matrice così definita:

$$(g_{ij}) = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_j} \right)$$

Essa è una matrice simmetrica e definita positiva, costituita da funzioni reali e l'operazione indicata è l'ordinario prodotto scalare.

Osservazione 13. Notiamo che la matrice costituita dagli (g_{ij}) è la matrice della metrica indotta su M da \mathbb{R}^n .

La matrice che invece rappresenta la seconda forma fondamentale è costituita da funzioni vettoriali. Vediamo come arrivare ad una sua possibile definizione. Un qualsiasi vettore della forma $\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u_i \partial u_j}$ ammette la seguente decomposizione:

$$\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u_i \partial u_j} = \vec{t}_{ij} + \vec{l}_{ij}$$

nella quale \vec{t}_{ij} è un vettore tangente alla varietà nel punto considerato, mentre \vec{l}_{ij} è un vettore normale ad essa.

Definizione 3.6. Scelto un sistema di coordinate locali, la **seconda forma fondamentale** della varietà M è la matrice simmetrica (l_{ij}) costituita dalle funzioni a valori vettoriali \vec{l}_{ij} il cui valore in ogni punto è la componente normale di

$$\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u_i \partial u_j}$$

in quel punto. Inoltre dato un vettore v , $\|v\| = 1$, normale a M nel punto q , la matrice di numeri reali:

$$\left(v \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u_i \partial u_j}(q) \right) = (v \cdot \vec{l}_{ij}(q))$$

è chiamata **seconda forma fondamentale di M in q nella direzione di v** .

Definizione 3.7. Si chiamano **curvature principali** $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ di M in q **nella direzione normale** \vec{v} gli autovalori della matrice $(v \cdot \vec{l}_{ij}(q))$. I reciproci $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_k^{-1}$ delle curvature principali sono invece detti **raggi principali di curvatura**. Può accadere che la matrice $(v \cdot \vec{l}_{ij}(q))$ sia singolare. In questo caso una o più curvature principali λ_i saranno nulle e quindi alcuni raggi principali di curvatura non saranno definiti.

Consideriamo adesso la linea normale l costituita da tutti i punti della forma $q + tv$, dove v è un vettore unitario fissato ortogonale a M nel punto q .

Lemma 3.1.3. *I punti focali di (M, q) lungo la linea l sono precisamente i punti $q + (\lambda_i)^{-1}v$ dove $1 \leq i \leq k, \lambda_i \neq 0$ e i λ_i sono quelli relativi alla direzione normale v . Ci sono dunque al massimo k punti focali di (M, q) lungo la linea l , contando ognuno con la propria molteplicità.*

Dimostrazione. Si scelgano $n-k$ campi vettoriali $\vec{w}_1(u_1, \dots, u_k), \dots, \vec{w}_{n-k}(u_1, \dots, u_k)$ in modo tale che i vettori $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-k}$, cioè i valori assunti in ogni punto della varietà siano tali che:

$$\|w_i\| = 1, w_i \perp w_j, w_i \perp T_p(M), \forall i, j$$

Introduciamo un sistema di coordinate locali $(u_1, \dots, u_k, t_1, \dots, t_{n-k})$ sulla varietà $N \subseteq M \times \mathbb{R}^n$ come segue. Le coordinate $(u_1, \dots, u_k, t_1, \dots, t_{n-k})$ corrispondano al punto

$$(\vec{x}(u_1, \dots, u_k), \sum_{\alpha=1}^{n-k} t_\alpha \vec{w}_\alpha(u_1, \dots, u_k)) \in N.$$

Allora la funzione

$$E : N \rightarrow \mathbb{R}^n$$

da origine alla corrispondenza

$$\vec{e} : (u_1, \dots, u_k, t_1, \dots, t_{n-k}) \rightarrow \vec{x}(u_1, \dots, u_k) + \sum t_\alpha \vec{w}_\alpha(u_1, \dots, u_k),$$

con derivate parziali

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{e}}{\partial u_i} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i} + \sum_\alpha t_\alpha \frac{\vec{w}_\alpha}{\partial u_i} \\ \frac{\partial \vec{e}}{\partial t_\beta} = \vec{w}_\beta \end{cases}$$

dove gli indici i e k sono tali che $i = 1, \dots, k$, e $\beta = 1, \dots, n-k$.

Consideriamo ora i prodotti scalari dei vettori considerati con i vettori linearmente indipendenti $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_k}, w_1, \dots, w_{n-k}$. Quello che otteniamo è una matrice $n \times n$, avente per rango quello della jacobiana di E valutata nel punto corrispondente. La matrice ha la seguente forma:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_j} + \sum_\alpha t_\alpha \frac{\vec{w}_\alpha}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_j} \right) & \left(\sum_\alpha t_\alpha \frac{\vec{w}_\alpha}{\partial u_i} \cdot \vec{w}_\beta \right) \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

dove il blocco in basso a sinistra rappresenta la matrice nulla di ordine k e quello in basso a destra la matrice identità di ordine $n-k$. La nullità della

matrice scritta è dunque uguale a quella del suo blocco in alto a sinistra. Usando l'identità:

$$0 = \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\vec{w}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_j} \right) = \frac{\partial \vec{w}_\alpha}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_j} + \vec{w}_\alpha \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u_i \partial u_j}$$

notiamo che il blocco che ci interessa è esattamente la matrice

$$\left(g_{ij} - \sum_{\alpha=1}^{n-k} t_\alpha w_\alpha \cdot \vec{l}_{ij} \right).$$

Possiamo dunque affermare che $q+tv$ è un punto focale di (M, q) con molteplicità μ se la matrice $(g_{ij}(q) - tv \cdot \vec{l}_{ij}(q))$ è singolare con nullità μ . Per ipotesi sappiamo che la matrice $(g_{ij}(q))$ è l'identità e dunque abbiamo che $(g_{ij}(q) - tv \cdot \vec{l}_{ij}(q))$ è singolare se e solo se $1/t$ è un autovalore della matrice $(v \cdot \vec{l}_{ij}(q))$. Inoltre, la molteplicità di μ è uguale alla molteplicità algebrica di $1/t$ come autovalore. \square

Fissiamo ora il punto $p \in \mathbb{R}^n$ e poniamo per comodità $f := L_p : M \rightarrow \mathbb{R}$

Lemma 3.1.4. *Un punto $q \in M$ è un punto critico degenero della funzione $f = L_p$ se e solo se p è un punto focale di (M, q) e la nullità di q come punto critico è uguale alla molteplicità di p come punto focale.*

Dimostrazione. Ricordando la definizione della funzione L_p , possiamo esprimere la funzione f come segue:

$$f(\vec{x}(u_1, \dots, u_k)) = \|\vec{x}(u_1, \dots, u_k) - p\|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} - 2\vec{x} \cdot p + p \cdot p.$$

Abbiamo dunque:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = 2 \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i} \cdot (\vec{x} - p)$$

Pertanto q è un punto critico per f se e solo se $q - p$ è ortogonale ad M in q . Per quanto riguarda le derivate seconde, invece, notiamo che esse sono date da:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} = 2 \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_j} + \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u_i \partial u_j} \cdot (\vec{x} - p) \right) \quad (3.1)$$

Facendo ora la posizione $p = \vec{x} + tv$ la 3.1 valutata nel punto q diventa:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(q) = 2(g_{ij}(q) - tv \cdot \vec{l}_{ij}(q))$$

da cui si ha subito la tesi.

Riunendo ora quanto affermato con il corollario 3.1.2 otteniamo subito il seguente teorema che afferma che la funzione L_p è un esempio di funzione di Morse.

Teorema 3.1.5. *Per quasi ogni $p \in \mathbb{R}^n$, la funzione $L_p : M \rightarrow \mathbb{R}$ non ha punti critici degeneri.*

Corollario 3.1.6. *E' possibile definire su ogni varietà una funzione differenziabile, senza punti critici degeneri, per cui ogni M^a è compatto.*

Dimostrazione. Questo segue dal teorema 3.1.5 e dal fatto che una varietà n dimensionale possa essere immersa in maniera differenziabile in un sottoinsieme chiuso di \mathbb{R}^{2n+1} (teorema di Whitney). \square

Da quanto appena detto possiamo ottenere le seguenti applicazioni:

- Una varietà differenziabile ha lo stesso tipo di omotopia di un CW-complesso. Questo segue dal corollario sopra e dai teoremi 2.2.1.
- Su una varietà compatta M c'è un campo vettoriale X tale che la somma degli indici dei punti critici di X uguaglia la $\chi(M)$, la caratteristica di Eulero di M .

Dimostrazione. Segue direttamente dall'osservazione 10 del paragrafo 2.3. Per ogni funzione differenziabile f su M abbiamo $\chi(M) = \sum (-1)^\lambda C_\lambda$ dove C_λ è il numero di punti critici di indice λ . Ma $(-1)^\lambda$ è l'indice del campo vettoriale ∇f in un punto dove f ha indice λ . Ne segue che la somma degli indici di un qualunque campo vettoriale su M è uguale a $\chi(M)$ perché questa somma è un invariante topologico. \square

Concludiamo infine questa sezione esponendo un risultato importante per la dimostrazione del teorema di Lefschetz che esporremo nel prossimo paragrafo.

Lemma 3.1.7 (Teorema dell'indice di L_p). *L'indice di L_p in un punto critico non degenero $q \in M$ è uguale al numero dei punti focali di (M, q) che giacciono sul segmento che congiunge p a q ; ogni punto focale viene contato con la sua molteplicità.*

Dimostrazione. L'indice della matrice

$$\left(\frac{\partial^2 L_p}{\partial u_i \partial u_j} \right) = 2(g_{ij}(q) - tv \cdot \vec{l}_{ij})$$

è uguale al numero di autovalori negativi. Assumendo come in precedenza si è fatto che (g_{ij}) sia la matrice identità, questo equivale a cercare il numero degli autovalori di $(v \cdot \vec{l}_{ij})$ che sono $\geq 1/t$. Confrontando quanto detto con 3.1.3 si ottiene il risultato. \square

3.2 Varietà di Stein

Definizione 3.8. Una varietà complessa che può essere immersa bianaliticamente in un sottoinsieme chiuso di \mathbb{C}^n è detta **varietà di Stein**.

Nel caso reale, grazie al teorema di Whitney, possiamo affermare che ogni varietà differenziabile può essere immersa in \mathbb{R}^n con n opportuno. Una conseguenza del teorema di Lefschetz trattato più avanti è proprio che le varietà di Stein hanno proprietà topologiche molto particolari, ad esempio non esistono varietà topologiche di Stein di dimensione > 0 compatte.

3.3 Un' applicazione della teoria di Morse: il teorema di Lefschetz

Come applicazioni della teoria di Morse si possono dimostrare alcuni risultati riguardanti la topologia delle varietà algebriche. Un risultato classico è la dimostrazione, che qui riportiamo nella versione proposta da Andreotti e Frankel, del Teorema di Lefschetz.

Teorema 3.3.1. *Una varietà di Stein M di dimensione complessa k , , ha lo stesso tipo di omotopia di un CW-complesso k -dimensionale.*

Corollario 3.3.2. *Nelle ipotesi del teorema 3.3.1*

$$H_i(M, \mathbb{Z}) = 0 \text{ per } i > k$$

Il corollario è conseguenza diretta del teorema 3.3.1 poichè se effettivamente M ha il tipo di omotopia di un CW-complesso k -dimensionale allora i gruppi di omologia di grado maggiore di k sono nulli.

Osservazione 14. Tale risultato si applica in particolare se M è una varietà algebrica affine ed è in questa forma che il teorema è stato provato da Lefschetz nel 1924.

Arriviamo alla dimostrazione:

Questa dimostrazione può essere suddivisa in diversi passi. Prima di tutto consideriamo una forma quadratica in k variabili complesse

$$Q(z_1, \dots, z_k) = \sum b_{hj} z_h z_j$$

Se sostituiamo $z_h = (x_h + iy_h)$ e prendiamo la parte reale di Q otteniamo una forma quadratica reale in $2k$ variabili reali:

$$Q'(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k) = \text{parte reale di } \sum b_{hj}(x_h + iy_h)(x_j + iy_j).$$

Asserzione 1 Se e è un autovalore di Q' con molteplicità μ , allora anche $-e$ è un autovalore con la stessa molteplicità.

Dimostrazione. Consideriamo l'uguaglianza

$$Q(iz_1, \dots, iz_k) = \sum b_{hj} iz_h iz_j = - \sum b_{hj} z_h z_j = -Q(z_1, \dots, z_k)$$

Ora prendiamo la parte reale di entrambi i membri di questa e otteniamo:

$$Q'(y_1, \dots, y_k, -x_1, \dots, -x_k) = -Q'(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k) \quad (3.2)$$

dove la applicazione lineare responsabile del cambiamento di variabili agisce così:

$$(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k) \rightarrow (y_1, \dots, y_k, -x_1, \dots, -x_k)$$

e la matrice associata è la matrice ortogonale :

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

Ora la 3.2 può essere espressa in questo modo

$${}^t J Q' J = -Q'$$

moltiplicando per J a sinistra e ricordando che J è una matrice ortogonale allora risulta che:

$$Q' J = -J Q'$$

Dunque se v è un autovettore di Q' relativo all'autovalore e risulta che

$$Q'v = ev.$$

Quindi

$$Q' Jv = -J Q'v = -J(ev) = -e(Jv)$$

Quindi, effettivamente, se v è un autovettore di Q' relativo all'autovalore e , allora Jv è un autovettore di Q' relativo all'autovalore $-e$. \square

Ora consideriamo una varietà complessa M che è bianaliticamente immersa come sottoinsieme di \mathbb{C}^n . Sia q un punto di M .

Asserzione 2 I punti focali di (M, q) lungo una qualsiasi linea normale l si presentano in coppia dato che sono situati simmetricamente rispetto a q . In altre parole se $q + tv$ è un punto focale allora anche $q - tv$ è un punto focale con la stessa molteplicità.

Dimostrazione. Scegliamo coordinate z_1, \dots, z_k per M in un intorno di q per cui $z_1(q) = \dots = z_k(q) = 0$. La mappa di inclusione $M \rightarrow \mathbb{C}^n$ determina n funzioni analitiche complesse:

$$w_\alpha = w_\alpha(z_1, \dots, z_k), \quad \alpha = 1, \dots, n$$

Sia v un vettore unitario fissato ortogonale a M in q . Consideriamo il prodotto interno Hermitiano

$$\sum w_\alpha \bar{v}_\alpha = \sum w_\alpha(z_1, \dots, z_k) \bar{v}_\alpha$$

di w e v . Questo può essere sviluppato in serie di potenze complessa:

$$\sum w_\alpha(z_1, \dots, z_k) \bar{v}_\alpha = c + Q(z_1, \dots, z_k) + \text{termini di ordine superiore}$$

dove Q denota una funzione quadratica omogenea. (Il termine lineare si annulla dal momento che v è ortogonale a M). Adesso sostituiamo $x_h + iy_h$ con z_h in modo da ottenere un sistema di coordinate reali per M ; e consideriamo il prodotto reale interno:

$$w \cdot v = \text{parte reale} \sum w_\alpha \bar{v}_\alpha.$$

Questa funzione si sviluppa in serie di potenze reale:

$$w \cdot v = c + Q'(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k) + \text{termini di ordine superiore}$$

Chiaramente il termine quadratico determina la seconda forma fondamentale di M in q nella direzione normale v . Dalla prima asserzione sappiamo che gli autovalori di Q' si presentano in coppie costituite dall'autovalore stesso e dal suo opposto. Quindi anche i punti focali di (M, q) lungo la linea che attraversa q e $q + v$ si presentano in coppia simmetrica. Questo prova l'asserzione 2. \square

Siamo ora pronti per provare 3.3.1. Scegliamo un punto $p \in \mathbb{C}^n$ così che la funzione

$$L_p : M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$q \rightarrow \|q - p\|^2$$

non abbia punti critici degeneri. Dal momento che M è un sottoinsieme chiuso di \mathbb{C}^n , è chiaro che ogni insieme del tipo

$$M^a = L_p^{-1}[0, a]$$

è compatto. Ora consideriamo l'indice di L_p in un punto critico q . In accordo con 3.1.7, questo indice è uguale al numero di punti focali di (M, q) che giacciono sul segmento che congiunge p a q . Siccome abbiamo $2k$ autovalori relativi alla matrice Q' che è una forma quadratica reale in $2k$ variabili, allora ci sono al più $2k$ punti focali lungo l'intera linea che congiunge p e q ; e questi sono distribuiti simmetricamente rispetto a q . Quindi al più k di questi giacciono tra p e q . Quindi l'indice di L_p in q è $\leq k$. Facendo intervenire la Teoria di Morse esposta nei primi due capitoli dell'elaborato, possiamo dire che M ha il tipo di omotopia di un CW-complesso di dimensione $\leq k$ e questo prova il teorema.

□

Bibliografia

- [1] Milnor, John. Morse theory, volume 51 of Annals of Mathematics Studies. Princeton, NJ, USA (1963).
- [2] Andreotti, Aldo, and Theodore Frankel. The Lefschetz theorem on hyperplane sections. *Annals of Mathematics* (1959): 713-717.
- [3] Lefschetz, Solomon. *L'analysis situs et la géométrie algébrique*. Paris, 1950.
- [4] Tu, Loring W. *An introduction to manifolds*. Vol. 200. No. 8. New York: Springer, 2008.
- [5] Milnor, John Willard. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton University Press, 1997.