

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BOLOGNA

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in INGEGNERIA CIVILE

Tesi di Laurea in CALCOLO AUTOMATICO DI STRUTTURE LS

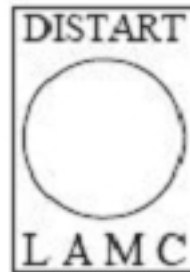
**Una procedura di analisi della
sezione nell'ambito della teoria
generalizzata di trave**

Candidato:
Luca Carnevali

Relatore:
Prof.Ing.Francesco Ubertini

Correlatori:
Dott.Ing.Stefano de Miranda
Dott.Ing.Antonio Ruggerini

Anno Accademico 2008/2009 - Sessione III



Tesi di laurea svolta presso il DISTART - Scienza delle Costruzioni,

Laboratorio di Meccanica Computazionale (LAMC),

ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Ai miei genitori

Indice

Introduzione	xi
1 Elementi formati a freddo	1
1 Tipologie di prodotti Cold Formed	2
2 Cenni storici e normativi	6
3 Tecniche di cold-forming	7
4 Vantaggi e limitazioni	9
5 Effetti della sagomatura a freddo sul materiale di base	12
6 Comportamento strutturale dei profili formati a freddo	14
2 Teorie di trave di ordine superiore	19
1 Teoria di de Saint Venant	21
2 Teoria di Vlasov	25
3 Teorie che estendono la cinematica di Vlasov	28
3.1 Evoluzione storica della teoria di trave generalizzata (GBT)	28
3.2 Caratteristiche principali della GBT	31
3 Formulazione della GBT in notazione matriciale	35
1 Teoria di trave generalizzata	37

1.1	Cinematica	37
1.2	Deformazioni generalizzate	40
1.3	Sforzi e Forze generalizzate	42
1.4	Legame Costitutivo	45
1.5	Equilibrio	47
1.6	L'equazione fondamentale della GBT	48
1.7	Prospetto sintetico delle formulazioni	51
2	Un elemento finito per la teoria di trave generalizzata	52
2.1	Interpolazione degli spostamenti generalizzati	52
2.2	Matrice di rigidezza	55
2.3	Vettore dei carichi applicati	56
4	Cross Section Analysis	61
1	I modi deformativi	64
1.1	La classe dei modi FM_x (modi alla Schardt)	66
1.2	La classe dei modi SM_x (modi alla Capurso)	73
1.3	La classe dei modi FM_f (modi flessionali)	77
2	Proprietà meccaniche e modali	82
2.1	Base spettrale	82
2.2	Significato fisico dei modi FM_x	89
3	Tabella riassuntiva	94
4	Espressione generale di $\varphi_{ki}, f_{ki}, g_{ki}$	95
5	Esempi di applicazione della teoria di trave generalizzata	99
1	Es. 1 - Proprietà della matrice di legame per i modi FM_x . . .	100
2	Es. 2 - Analisi della sezione trasversale di una sezione a C . . .	109
2.1	Interazione tra modi FM_x	112
2.2	Interazione tra modi SM_x	121
2.3	Interazione tra modi FM_f	130

2.4	Interazione tra modi $FM_x - SM_x$	135
2.5	Interazione tra modi $FM_x - FM_f$	138
2.6	Interazione tra modi $SM_x - FM_f$	140
2.7	Analisi dell'interazione tra singoli modi tramite interfaccia grafica	143
2.8	Matrice costitutiva per la sezione a C	159
3	Es. 3 - Risoluzione di una trave appoggiata mediante GBT . .	171
3.1	Caso A: carico verticale in sommità	174
3.2	Caso B: carico orizzontale in sommità	182
3.3	Caso C: carico orizzontale in mezzeria dell'anima . . .	188
Conclusioni		199
Bibliografia		203
Ringraziamenti		205

Introduzione

La diffusione dei prodotti in acciaio laminato a freddo ("cold-formed") per la costruzione di edifici commerciali ed industriali ha avuto negli ultimi decenni un forte impulso dovuto soprattutto alle caratteristiche di economicità, semplicità di fabbricazione e di montaggio.

Le proprietà di leggerezza ed elevato rendimento strutturale di questi sistemi sono raggiunte grazie alla esiguità degli spessori che si possono avere nei profilati. Ulteriori vantaggi sono connessi alla elevata durabilità di questi prodotti, i quali, generalmente formati a partire da lamiere in acciaio zincate elettroliticamente, consentono di ottenere la necessaria protezione contro la corrosione.

Le travi con sezione in parete sottile, quali sono i profili "cold-formed", presentano un comportamento molto complesso e già da lungo tempo è noto come la teoria di de Saint Venant sia limitata nel modellarlo.

Nel 1940 Vlasov [1] pubblicò per la prima volta la teoria delle aree settoriali, arricchì la teoria di de Saint Venant con una funzione di warping proporzionale all'area settoriale. Questa funzione di warping caratterizza la cinematica della trave in torsione quando l'angolo unitario di torsione non è costante.

Nel 1983 Richard Schardt [2] pubblicò una nuova teoria che in letteratura sci-

entifica prese il nome di Generalised Beam Theory (GBT). La GBT aggiunge "modi" al campo di deformazione della trave alla Vlasov, vengono assunte delle distribuzioni di warping più generali e alcuni di questi modi vengono correlati ad una distorsione della sezione nel proprio piano.

La teoria GBT è una vera pietra miliare nel campo delle strutture "thin-walled". La definizione del fenomeno dell'instabilità locale, globale e distortional è, nella letteratura scientifica corrente, profondamente connessa all'analisi della sezione (*Cross-Section Analysis*) della GBT.

Molti autori fino ad oggi hanno sviluppato la GBT aggiungendo anche alcune importanti generalizzazioni alla teoria originale di Schardt, in particolare Camotim e Silvestre [3, 4] unificarono la GBT con la teoria di Capurso [5].

Attualmente la GBT è uno strumento teorico molto efficace nello studio delle strutture "thin-walled" e molti altri approcci alternativi hanno preso spunto dalla sua chiara ed al tempo stesso originale interpretazione della cinematica di sezione.

In questa tesi si propone una procedura di Cross-Section Analysis con lo scopo di implementare un codice agli elementi finiti in ambiente Matlab basato sulla teoria di trave generalizzata.

Si sono eseguite alcune analisi lineari ed i relativi risultati sono stati poi posti a confronto con quelli derivati da un modello FEM tridimensionale.

La tesi si articola in cinque capitoli.

Il *capitolo 1* introduce gli elementi cold-formed. Si descrivono le varie tipologie di prodotti utilizzati nella pratica comune, le tecniche di cold-forming, i vantaggi e le limitazioni, il comportamento dei cold-formed, il fenomeno dell'instabilità.

Nel *capitolo 2* si affronta il problema dello studio dei profilati con sezione in parete sottile. Dalla teoria di de Saint Venant si passa prima a considerare il modello di trave alla Vlasov, illustrando in dettaglio le ipotesi alla base dei modelli, poi si introduce la teoria GBT facendo anche dei brevi cenni storici riguardo lo sviluppo nel tempo di teorie di trave di ordine superiore.

Nel *capitolo 3* è scritta la formulazione in forma matriciale della teoria GBT al primo ordine. Si specializzano ipotesi cinematica, compatibilità, legame costitutivo, equilibrio e sistema fondamentale della teoria di trave generalizzata. Si costruisce poi l'elemento finito lineare basato sul modello di trave appena introdotto.

Il *capitolo 4* contiene la descrizione di una intera procedura di Cross-Section Analysis. Si specificano le classi di modi che vengono considerate e si mostrano nel dettaglio le proprietà delle varie forme modali ottenute, particolare attenzione è posta sulla classe dei modi fondamentali alla Schardt.

Nel *capitolo 5* sono illustrati tre differenti esempi, dei quali, i primi due riguardano l'applicazione della procedura di Cross-Section Analysis per tipologie di sezione specifiche, mentre il terzo riguarda una applicazione del codice agli elementi finiti basati sulla teoria GBT.

Il 1° esempio ha come oggetto lo studio della matrice costitutiva ottenuta nel caso di analisi di sezioni aventi solo tre pareti.

Il 2° esempio mostra i risultati ottenuti da una intera procedura di Cross-Section Analysis su di una particolare sezione. Si riportano le raffigurazioni delle forme modali e le varie componenti di legame facendo una serie di osservazioni sulla loro interazione.

Il 3° esempio mostra il confronto tra risultati ottenuti tramite il codice con

elementi finiti GBT e quelli ottenuti tramite modello 3-D con software commerciale in riferimento ad una travatura con specifico schema statico.

Capitolo **1**

Elementi formati a freddo

In questo capitolo si introducono gli elementi formati a freddo (in letteratura *cold formed*), suddivisi per tipologie e modalità di impiego. Si fanno dei brevi cenni storici riguardo al loro impiego ed alle prescrizioni normative che li riguardano.

Si analizzano poi peculiarità e svantaggi che caratterizzano tali prodotti, puntando l'attenzione soprattutto sul fenomeno dell'instabilità.

1 Tipologie di prodotti Cold Formed

I prodotti cold formed possono essere classificati in tre principali tipologie:

- barre;
- lastre;
- pannelli sandwich.

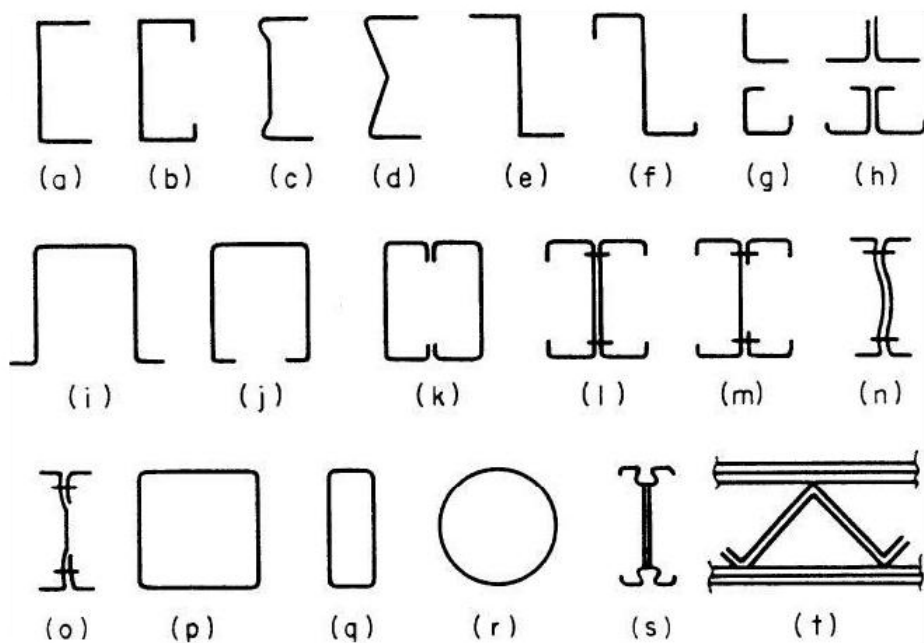


Figura 1.1: *Sezioni tipiche, singole e accoppiate di barre cold-formed*

Le barre in figura 1.1 sono principalmente usate, con la funzione di:

- arcarecci di copertura, -di solito sezioni a C o a Z - nei casi in cui carichi relativamente bassi agiscono su piccole luci;
- travi principali, - di solito sezioni a C accoppiate - ;
- colonne, - sezioni scatolari - ;

- aste di travature reticolari -in particolare per luci non molto elevate, fino a 15 m -.

Il range di spessore di impiego va dai 1 mm agli 8 mm.

Volendo confrontare tali prodotti con elementi classici hot-rolled, giocano a favore dei primi le caratteristiche di:

- costanza dello spessore;
- rapporto peso-spessore;
- varietà di scelta della sezione trasversale.

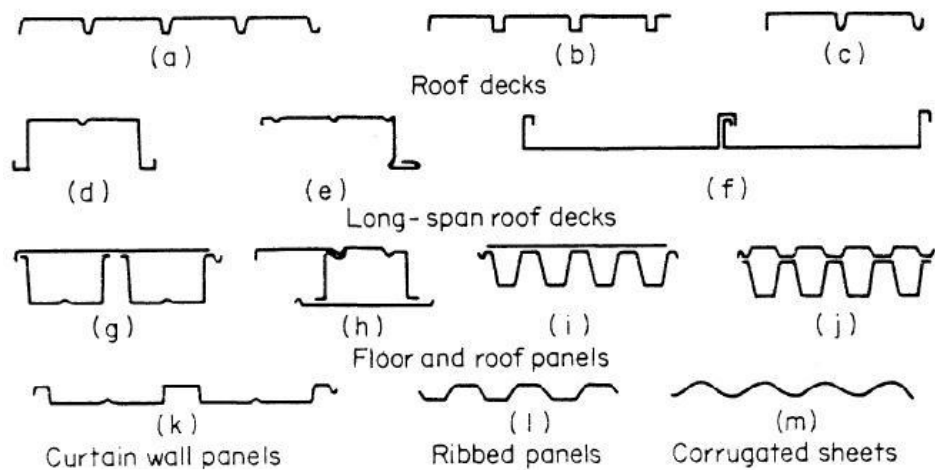


Figura 1.2: *Sezioni tipiche lastre*

Le lastre in figura 1.2 sono invece elementi piani di esiguo spessore che assorbono il carico applicato sotto forma di sollecitazioni membranali. Lo spessore di tali elementi va dai 0.5 mm ai 2 mm.

Generalmente sono usate con funzione di rivestimento e di orizzontamento, nel caso di coperture leggere oppure negli ultimi anni con funzione collaborante, per realizzare solai praticabili - con soletta in calcestruzzo, eventual-

mente armata con una rete -.

Di questi elementi è possibile farne una ulteriore distinzione:

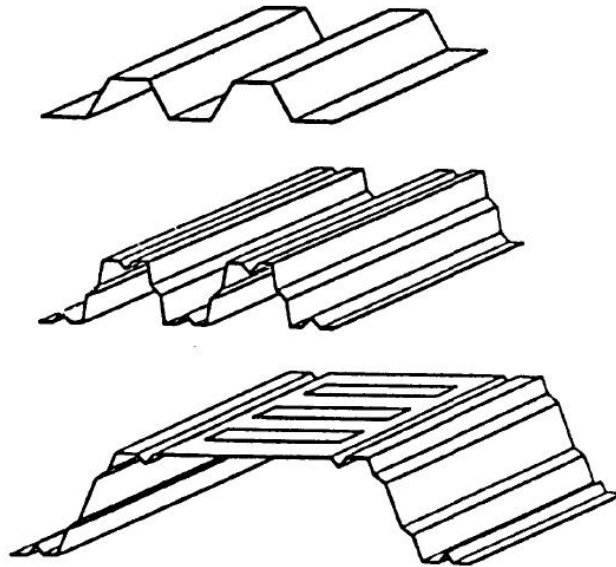


Figura 1.3: *Sezioni caratteristiche delle diverse generazioni di lastre*

- una prima generazione, è rappresentata da pannelli con profilo trapezoidale senza irrigidimenti, che permette di superare luci non superiori ai 3 m;
- una seconda tipologia, conserva la sezione a trapezio, ma dotata di piegature nella direzione longitudinale possiede una più elevata rigidità, che ne consente l'impiego per luci fino ai 6-7 m;
- la terza generazione di prodotto, ha sezione costituita da un unico grande trapezio, risultando molto rigida sia in direzione trasversale che longitudinale, è impiegata per luci libere superiori ai 12 m.

Infine i pannelli sandwich sono invece particolarmente impiegati nella realizzazione di coperture, per la loro capacità di isolamento termico e contemporanea funzione di protezione dagli agenti atmosferici. Questi prodotti

costituiti da uno strato interno di schiuma rigida poliuretanica, su entrambi i lati protetto da fogli di lamiera, (fig. 1.4) sono caratterizzati da una rapida messa in opera, che ottimizza i tempi di costruzione dell'edificio .

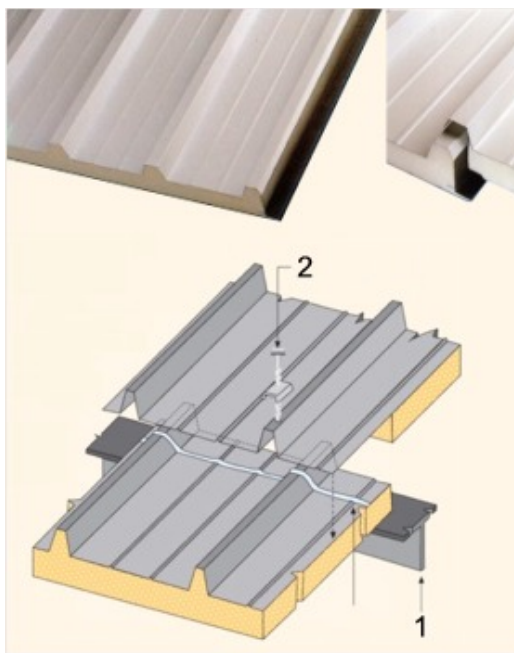


Figura 1.4: Esempio di pannello sandwich

La produzione standardizzata di tali elementi, ha portato nell'ambito delle costruzioni metalliche i seguenti vantaggi:

- migliore estetica;
- velocità nel costruire;
- ridotta manutenzione;
- facilità di ampliamenti;
- riduzione dei costi di esercizio.

2 Cenni storici e normativi

I primi utilizzi degli acciai sagomati a freddo nelle costruzioni risalgono al 1850, negli Stati Uniti e in Gran Bretagna, anche se la loro diffusione rimase molto limitata fino al 1940.

Nel 1939, infatti l'AISI - American Iron Steel Institute - sponsorizzò la ricerca in tale settore presso la Cornell University sotto la direzione di George Winter, il quale portò alla pubblicazione, nel 1946, della prima edizione delle "Specifications for the Design of Cold- Formed Steel Structural Members" e al successivo sviluppo dei sagomati a freddo.

Sul versante europeo, agli inizi degli anni 80, l' European Convention for Constructural Steelwork, pubblicò: "Good practice in steel cladding and roofing", nel quale erano invece contenute le prescrizioni comunitarie per l'impiego di pannelli di copertura e di rivestimento in acciaio.

Da allora, i progressi conoscitivi derivanti dalla esponenziale diffusione delle applicazioni di profili sottili, accompagnata dall'intensa attività della ricerca scientifica, hanno portato e contribuiscono tuttora ad un continuo aggiornamento della normativa del settore. In quest'ottica, si colloca la recente proposta di normativa europea -Eurocodice 3, parte 1.3- che tenta di riunire, sotto un approccio unificato, la vasta problematica dei profili in parete sottile sagomati a freddo. Parallelamente negli USA, l'AISI ha pubblicato un nuovo documento: "Cold-Formed Steel Structures to the AISI Specification" in cui viene descritto lo stato dell'arte e di conoscenza di tali strutture.

Nonostante ciò, tali prescrizioni insieme alla letteratura disponibile sull'argomento, non risultano essere completamente soddisfacenti in termini di dettaglio, di specificazione di casi particolari e di economicità, nei riguardi dei tanti interrogativi che le diverse direzioni di ricerca negli ultimissimi anni hanno aperto.

Di recente pubblicazione, per esempio è infatti il report: "Estimation of re-

straint forces for Z-purlin Roofs under gravity loads”, risultato di ricerca da parte dell’AISI, che, evidenziando disposizioni scorrette e effetti trascurati dalle normative americane, ne suggerisce una sua nuova valutazione.

3 Tecniche di cold-forming

Le diverse sezioni degli elementi cold formed possono essere ottenute sostanzialmente attraverso due diverse filosofie produttive:

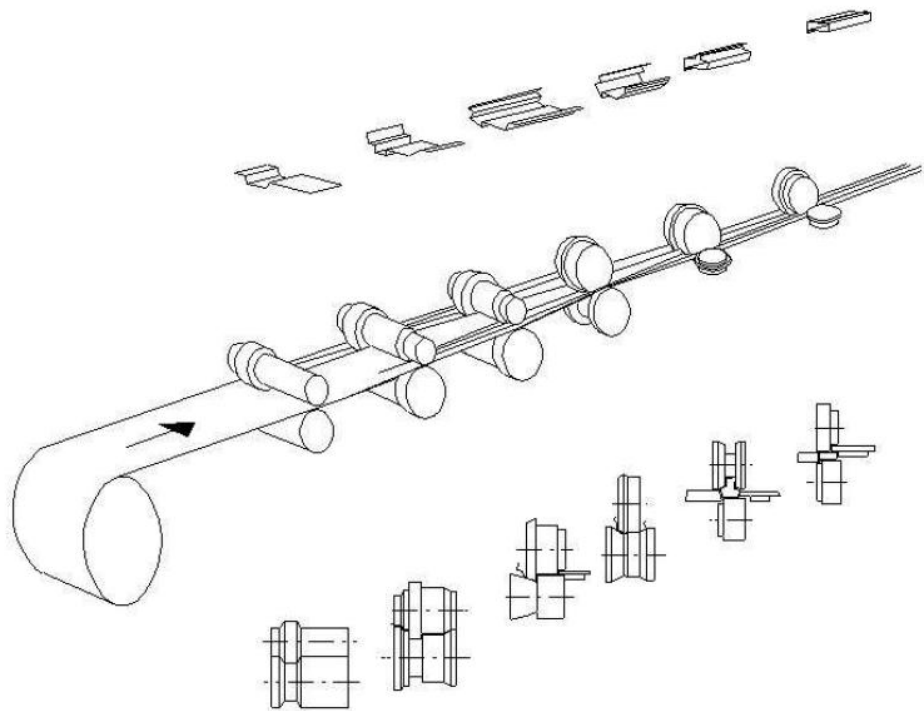


Figura 1.5: *Principio di funzionamento di una macchina cold-rolling*

- una di produzione continua: detta *cold rolling* - rullatura a freddo -, la quale è generalmente usata per la produzione di barre e lastre corrugate. La sezione finale del prodotto è ottenuta attraverso un’operazione di

piegatura continua esercitata da coppie di rulli posti in successione.

Di solito a una delle estremità è posta una macchina tagliatrice che "taglia" l'elemento alla lunghezza richiesta, in modo da non arrestare la produzione. Tale metodologia consente:

- notevole precisione dimensionale;
 - possibilità di sagomare lamiere verniciate o rivestite.
- altre di produzione discontinua: definite *press braking* - pressatura - figura 1.6 - o *folding* - piegatura - figura 1.7 -. Le macchine pressatrici sono composte da una parte mobile e da una fissa sulla quale si possono applicare stampi della forma desiderata.

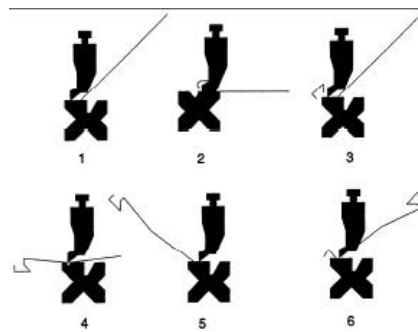


Figura 1.6: *Fasi per press-braking*

Questa tecnica è preferita alla precedente, in quanto più conveniente, nei casi di:

- piccole serie di sezioni con lunghezze inferiori ai 6 m;
- sezioni aventi semplice configurazione.

La scelta della metodologia produttiva, è legata alla convenienza economica, i cui fattori condizionanti per tale settore sono:

- la complessità del profilo;

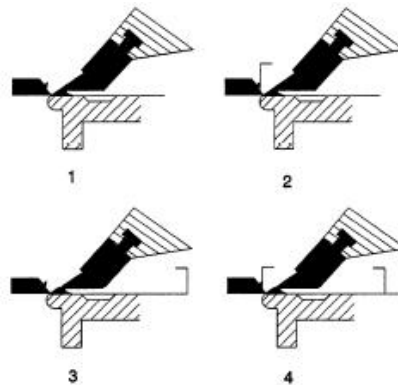


Figura 1.7: *Fasi costruttive per folding*

- la quantità da produrre.

4 Vantaggi e limitazioni

Il crescente utilizzo di prodotti in acciaio formati a freddo, trova le sue ragioni sia nelle caratteristiche peculiari dei sistemi costruttivi adottati, che consentono di raggiungere un elevato rapporto benefici/costi rendendoli molto competitivi rispetto ai sistemi più tradizionali, sia nell'elevata competitività derivante dall'impiego di profili formati a freddo. Questi ultimi, infatti, si caratterizzano per:

- **Leggerezza:** gli elementi formati a freddo riducono sensibilmente il peso totale dell'edificio che può arrivare a pesare anche 10 volte di meno rispetto ad un edificio con un sistema costruttivo tradizionale. La conseguenza più importante in zona sismica è senza dubbio la notevole riduzione delle azioni sismiche agenti sulla struttura. Inoltre, tale peculiarità facilita la movimentazione degli elementi costruttivi in cantiere ed il loro trasporto, contribuendo sensibilmente alla riduzione dei costi di costruzione.

- Rendimento strutturale: i profili a freddo consentono di ottenere, nell'ambito dei materiali utilizzati correntemente nella realizzazione di edifici, uno dei più elevati rapporti resistenza / peso.
- Qualità: la produzione industriale dei profili consente di ottenere una qualità più elevata ed uniforme rispetto agli elementi strutturali tradizionali in legno, muratura e calcestruzzo armato gettato in opera.
- Flessibilità: la formatura a freddo offre un'ampia possibilità di scelta in termini di forma e dimensioni della sezione trasversale che, quando necessario, può essere definita dal progettista sulla base delle esigenze progettuali.
- Costruzione a secco: ad eccezione delle fondazioni, la realizzazione di edifici con strutture basate sull'utilizzo di membrature formate a freddo avviene a secco. Ciò permette di superare le limitazioni associate all'utilizzo di malte e conglomerati gettati in opera - tempi di maturazione dei getti, dipendenza dalle condizioni ambientali - diminuendo i tempi di costruzione.
- Semplificazione nell'installazione degli impianti: i profili formati a freddo possono essere facilmente perforati per facilitare la realizzazione degli impianti che vengono installati all'interno delle intercapedini che si creano tra strutture metalliche e rivestimenti.
- Riciclabilità: le membrature formate a freddo sono facilmente riciclabili. A titolo di esempio, l'acciaio necessario per costruire un'abitazione avente una superficie di circa $200 m^2$, può essere ottenuto partendo dai rottami di circa sei automobili.
- Durabilità: i profili sono generalmente formati a freddo a partire da lamiera in acciaio zincate a caldo consentendo di ottenere la necessaria

protezione contro la corrosione. Ciò, insieme alla stabilità dimensionale di tali elementi ed alla loro resistenza agli attacchi da parte di organismi biologici, quali funghi, insetti e termiti consente un'elevata durabilità. In particolare, quest'ultimo aspetto spiega in parte l'incremento della diffusione di abitazioni aventi ossatura portante in acciaio come valida alternativa alle più tradizionali costruzioni in legno nei paesi come le Hawaii e l'Australia, in cui è maggiormente sentito il problema della protezione contro l'attacco delle termiti.

Ai numerosi vantaggi connessi con l'utilizzo dei sistemi formati a freddo si accompagnano però anche alcune limitazioni:

- la principale è sicuramente l'elevata conducibilità termica dell'acciaio che, nel caso in cui si utilizzino comuni profili formati a freddo, produce un modesto isolamento. Di conseguenza, per contenere le dispersioni termiche è necessario utilizzare materiali termicamente isolanti. Quando però i materiali isolanti vengono opportunamente utilizzati, si può giungere a costruzioni "stratificate" che presentano elevate prestazioni in termini di isolamento termico ed acustico con spessori che possono risultare molto contenuti. A titolo di esempio, una parete perimetrale stratificata può raggiungere un altissimo livello di isolamento termoacustico con uno spessore complessivo di soli 10/15 cm.
- comportamento al fuoco: se per le strutture in acciaio laminato a caldo la temperatura critica varia tra 450° e 700°C (in dipendenza della tipologia strutturale e del livello dei carichi agenti), per i sistemi formati a freddo spesso si adotta una temperatura critica pari a 350°C. Va però evidenziato che nelle costruzioni con laminati a caldo la necessaria resistenza al fuoco viene raggiunta attraverso sistemi di protezione

quali rivestimenti spruzzati, rivestimenti con elementi protettivi prefabbricati o vernici intumescenti, che vengono solitamente posti in opera esclusivamente per assolvere a questa funzione e rappresentano quindi un costo aggiuntivo.

5 Effetti della sagomatura a freddo sulle caratteristiche del materiale di base

I principali effetti derivanti da un processo di sagomatura a freddo sono di seguito descritti.

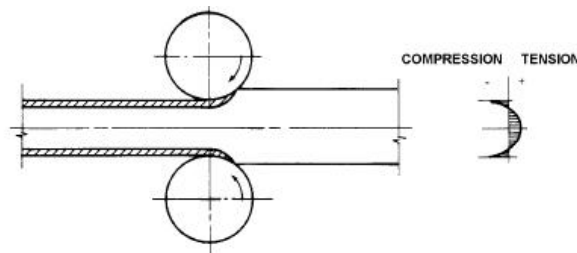


Figura 1.8: *Distribuzione tensioni residue*

- L'effetto definito tensioni residue - in lett. *Residual stresses* - è rappresentato da tensioni residue, che variano lungo lo spessore dell'elemento stesso e permangono dopo il processo di produzione.

La distribuzione di tali tensioni, che risultano essere di compressione in prossimità della superficie e di trazione internamente allo spessore, è tale per cui questa abbia risultante nulla (fig. 1.8). Per questo, in molti casi tale effetto può essere trascurato nello studio del comportamento globale dell'elemento, al contrario invece può essere valutato nell'analisi di fenomeni di instabilità di tipo locale.

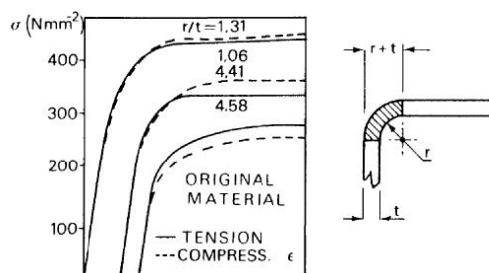


Figura 1.9: *Limite elastico, in funzione di $\frac{r}{t}$*

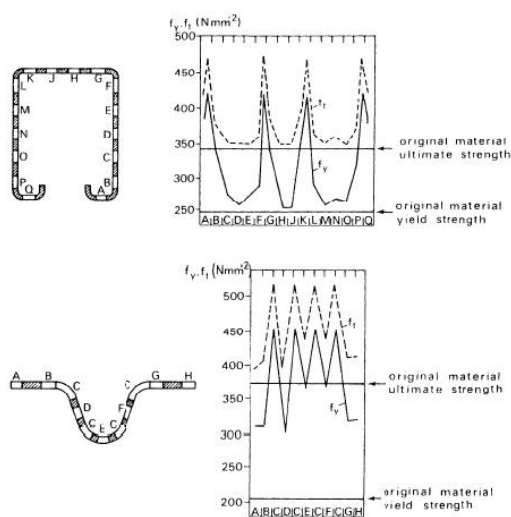


Figura 1.10: *Limite elastico, in funzione di $\frac{r}{t}$*

- Un altro effetto è definito incrudimento - in lett. *Strain-Hardening* - per il quale si verifica un aumento del limite elastico f_y -fino al 50 per cento in più- e in certi casi anche della tensione di rottura f_u (fig. 1.10), il quale risulta essere proporzionale all'entità della piegatura, espressa, come rapporto tra raggio di piega r e lo spessore dell'elemento t . Alcuni risultati sperimentali hanno mostrato, come tale incremento, sia caratterizzato da un' elevata variabilità nel piano della sezione. In particolare si è osservato come la tensione ultima sia caratterizzata

dall'assumere valori di picco in corrispondenza delle pieghe e valori minimi nei punti medi tra due pieghe successive.

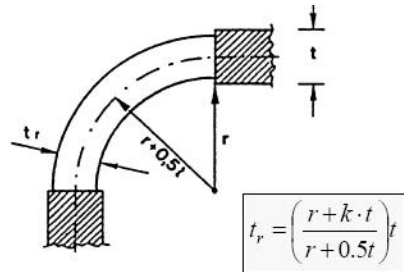


Figura 1.11: *Espressione approssimato per valutare effetto necking, in cui t_r è lo spessore ridotto*

- Un ultimo effetto, rappresentato dalla riduzione dello spessore - in lett. *Necking* - è dovuto al fatto che i ridotti raggi di curvatura, che caratterizzano gli angoli di piega, possono generare una riduzione dello spessore della sezione, in corrispondenza degli angoli stessi, incidendo quindi sulle proprietà della sezione.

Molto spesso tale effetto è molto modesto, rispetto alle altre quantità in gioco, e per questo trascurabile. In ogni caso sono state formulate delle espressioni approssimate che consentono di valutare tale effetto (vedi fig. 1.11).

6 Comportamento strutturale dei profili formati a freddo

Problemi particolarmente rilevanti per le sezioni sottili formate a freddo, sono rappresentati:

- dalla bassa rigidezza torsionale, in funzione del fatto che questa è proporzionale al cubo dello spessore e che in molti casi, peggiori a causa della scelta di sezioni aperte e prive di assi di simmetria;
- dalla ridotta resistenza al rifollamento nei collegamenti bullonati, che portando problemi alla progettazione dei giunti, può risultare condizionante nel dimensionamento delle membrature;
- dalla corrosione, pericolo però facilmente superabile con opportuni trattamenti della superficie - es. zincatura, ecc.-;
- dal fenomeno di instabilità, che risulta essere, senza dubbio, l'aspetto più delicato del problema.

Nello specifico, allo scopo di risultare sintetici e diretti, possiamo classificare il fenomeno instabilità in:

- locale ;
- globale;
- distorsional

Considerando pertanto a titolo di esempio un elemento cold-formed con sezione a C, che si suppone composto da un insieme di lastre piane - in lett. *plate* - mutuamente collegate lungo bordi comuni definiti *fold line* (fig. 1.12), si parlerà di:

- instabilità locale, quando gli elementi *plate* si deformano a flessione senza però che si verifichino deformazioni delle linee (fig. 1.13);
- instabilità globale, nel caso in cui l' elemento si deformi senza che si verifichi deformabilità della sezione trasversale;
in modo particolare si distingue in tale ambito:

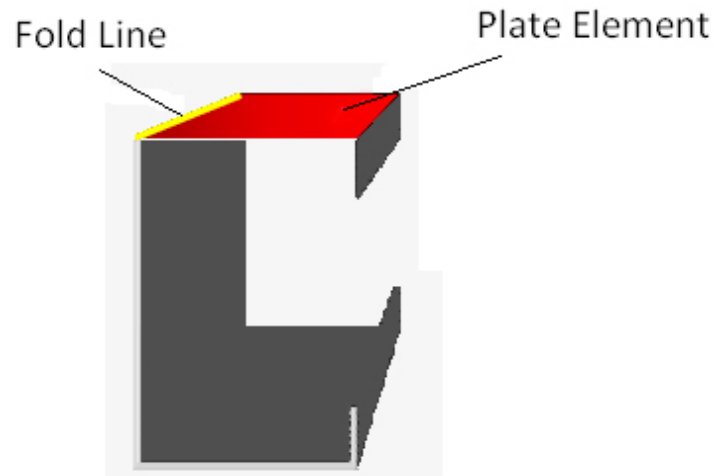
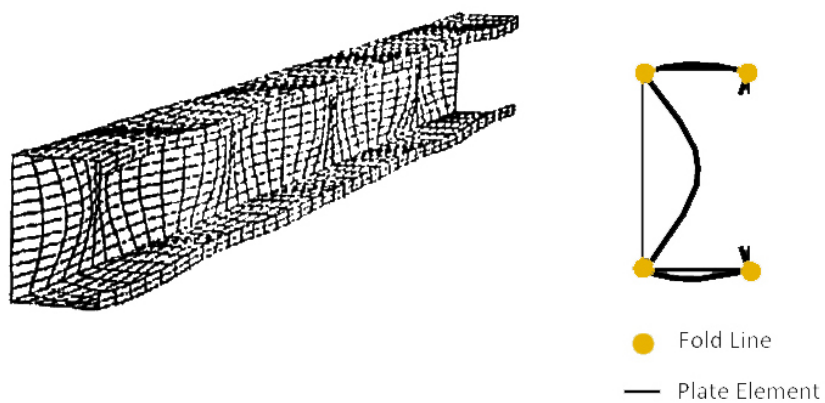
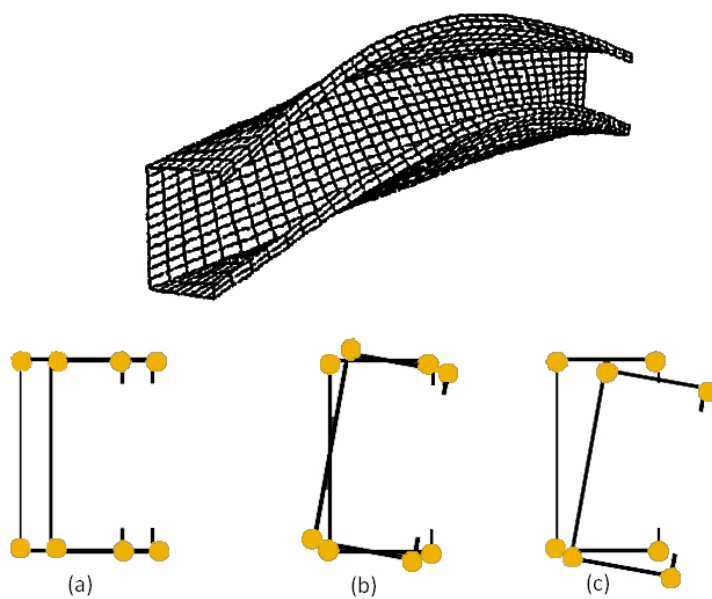


Figura 1.12: *Definizione per profilo a "C" di fold line e plate*

- un modo flessionale, in cui si verifica un traslazione della sezione, per cui l'asse dell'asta sbanda trasversalmente nel piano di minor rigidità flessionale (fig. 1.14.a);
- un modo torsionale, tale per cui si ha pura rotazione della sezione e l'asse dell'elemento si mantiene rettilineo (fig. 1.14.b);
- un modo torso-flessionale, in cui si verifica una roto-traslazione della sezione, cioè l'asta si torce, ma simultaneamente il suo asse sbanda trasversalmente, senza però ulteriori deformazioni per la sezione trasversale (fig. 1.14.c);
- instabilità distorsional, in cui si ha deformazione sia delle line che degli elementi plate (fig. 1.15).

Figura 1.13: *Local Buckling*Figura 1.14: *Global Buckling*

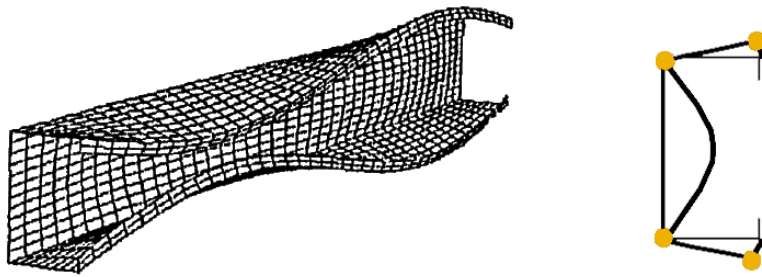


Figura 1.15: *Distorsional Buckling*

Teorie di trave di ordine superiore

La teoria convenzionale di trave alla de Saint Venant è limitata nel modellare il comportamento di travature con sezione in parete sottile. Questo è dovuto al fatto che la teoria dell'equilibrio elastico sul cilindro tridimensionale è basata sull'ipotesi di sezione trasversale "compatta": ovvero la dimensione media della sezione deve essere comparabile con lo spessore delle pareti.

Non essendo accettabile l'ipotesi di sezione compatta per le membrature in parete sottile ("thin walled beams") è sorta la necessità di creare delle nuove teorie, dette di *ordine superiore*, che siano valide anche oltre le ipotesi di de Saint Venant.

La teoria di Vlasov, detta anche teoria delle aree settoriali, è la prima estensione in ordine temporale del modello classico di trave. Essa si basa su di una ipotesi cinematica della sezione più ricca dove si assume una funzione di warping proporzionale all'area settoriale della sezione e variabile lungo la trave secondo un angolo unitario di torsione non costante.

Dopo Vlasov, molti autori hanno continuato a studiare il comportamento delle membrature in parete sottile e sono stati ideati dei nuovi modelli di trave estendendo la cinematica della sezione della teoria delle aree settoriali. Una delle più moderne ed efficaci teorie di ordine superiore è la teoria di

trave generalizzata (*GBT*) introdotta da Richard Schardt. La sua principale caratteristica è quella di considerare una cinematica della sezione trasversale del tutto generale, dove la configurazione deformata della membratura è espressa come combinazione lineare di predeterminati modi deformativi della sezione.

In questo capitolo si riportano quindi le ipotesi alla base del modello classico di de Saint Venant per poi introdurre le teorie di trave di ordine superiore: dalla cinematica della sezione per il modello di Vlasov fino alla moderna teoria generalizzata *GBT*.

1 Teoria di de Saint Venant

La teoria classica di trave alla de Saint Venant (d.S.V.) è basata sull'assunzione che un elemento trave monodimensionale sia costituito da infiniti conci di lunghezza infinitesima adiacenti uno all'altro, i quali possono essere considerati solidi tridimensionali tipo il "cilindro di d.S.V.". Il modello considera l'ipotesi di piccoli spostamenti, perciò è lecito applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.

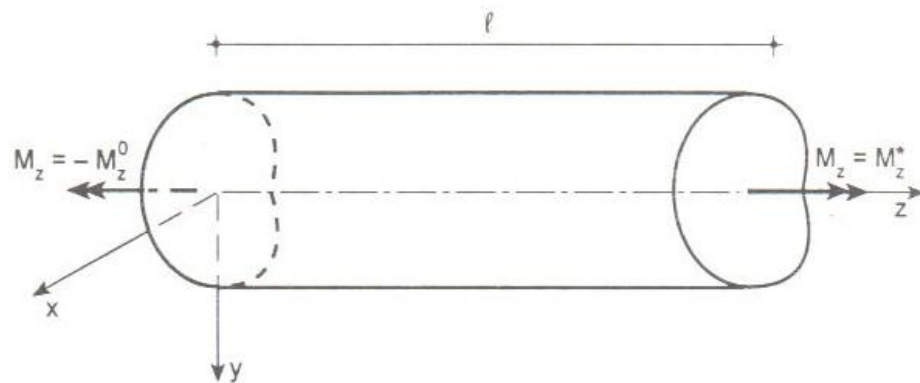


Figura 2.1: *Cilindro di D.S.V. di sezione arbitraria*

Si definisce poi il Postulato di d.S.V., affermando che ad una certa distanza "d" dalle basi caricate del cilindro lo stato tensionale e deformativo dipendono solamente dalla risultante delle forze e dal momento risultante, a prescindere da come sono applicati i carichi esterni.

La forma della sezione del "cilindro" è del tutto arbitraria e perciò il modello può riferirsi correttamente a membrature con qualsiasi sezione trasversale. Questo è vero, a patto che la sezione si mantenga comunque "compatta",

infatti nel caso di sezione "sparsa" decade la validità del postulato di d.S.V.

Il solido tridimensionale, caricato in un certo modo, può essere strutturalmente risolto sotto certe ipotesi fondamentali riguardanti:

- forze applicate: caricamento effettuato solo sulle basi e forze di volume nulle;
- materiale: elastico-lineare, omogeneo ed isotropo;
- geometria: si assume un riferimento x,y nel piano della sezione coincidenti con gli assi principali di inerzia, asse z coincidente con l'asse della trave passante per il baricentro di ogni sezione.

Le ipotesi che si fanno sulla geometria sono quelle che permettono di costruire una 'ipotesi cinematica' della struttura, con essa si assume una soluzione di tentativo che deve essere verificata attraverso le equazioni del problema. Se l'ipotesi cinematica risulta verificata si ha che, secondo il teorema di Kirchhoff, essa è la soluzione esatta del problema.

Il principio di sovrapposizione degli effetti permette poi la scomposizione del problema strutturale in vari casi fondamentali che sono:

- Sforzo Normale;
- Flessione Uniforme;
- Torsione Uniforme;
- Taglio.

Tutti questi casi sono indipendenti e trattabili separatamente sul solido tridimensionale.

Nel contesto di questa tesi ciò che si vuole determinare a riguardo della teoria

classica è l'ipotesi cinematica alla base del modello di d.S.V., in modo da poter determinare la possibile configurazione deformata della sezione trasversale.

L'ipotesi cinematica per tutti i casi fondamentali previsti, a parte la torsione, prevedono la 'conservazione delle sezioni piane'. Questo significa che tutte le sezioni della trave in configurazione deformata non avranno subito delle deformazioni, ma solo moti rigidi di roto-traslazione. L'ipotesi di conservazione delle sezioni piane e indeformate è valida anche per la torsione solo nel caso in cui una trave possieda una sezione con simmetria polare.

Se infatti il cilindro di d.S.V. sollecitato a torsione presenta una sezione arbitraria, il momento M_z agente nella generica sezione di ascissa z produce un ingobbimento della sezione stessa. Di conseguenza, a deformazione avvenuta, le sezioni della trave non si conservano piane ed ortogonali all'asse geometrico del solido.

Ci si aspetta un momento torcente costante in tutte le sezioni e l'ingobbimento della sezione trasversale deve risultare indipendente dall'ascissa z , si deve cioè riprodurre identicamente in tutte le sezioni del cilindro. Lo spostamento lungo z può dunque scriversi:

$$w = \Theta \omega(x, y) \quad (2.1)$$

Si ipotizza quindi a priori che lo spostamento w sia costante lungo z in quanto dipendente dalla funzione di ingobbimento $\omega(x, y)$, variabile solo nel piano della sezione, e dall'angolo unitario di torsione Θ definito in funzione dell'angolo θ in questo modo:

$$\Theta = \frac{\partial \theta}{\partial z} = \text{costante} \quad (2.2)$$

La torsione uniforme alla d.S.V. vede una rotazione delle sezioni che può variare lungo z linearmente, ed è definita a meno di una costante data dai

moti rigidi:

$$\theta = \Theta z + \text{costante} \quad (2.3)$$

Si è quindi visto che la teoria classica di trave alla d.S.V. può prevedere deformazione di sezione solamente fuori dal proprio piano, essa è descritta dalla funzione di ingobbimento ω ed è costante lungo l'asse longitudinale della trave. La sezione è supposta rigida nel proprio piano e può quindi solo subire movimenti roto-traslatori.

Da queste conclusioni si evince quanto la teoria classica di d.S.V. sia limitata e non adatta a descrivere il comportamento di certe membrature come quelle con sezione in parete sottile.

2 Teoria di Vlasov

Come si è detto in precedenza, la teoria di d.S.V. non è uno strumento efficace per descrivere il comportamento di travi "thin-walled", per questo si è cercato fin dagli inizi del '900 di superare la torsione uniforme rimuovendo man mano alcune delle sue ipotesi semplificative. Una teoria più raffinata fu introdotta nel 1940 da Vlasov [1], detta anche comunemente teoria dell'area settoriale o Torsione Non Uniforme.

Alla base della torsione non uniforme vi è l'ipotesi di non deformabilità a taglio della sezione nel suo piano medio ($\gamma_{zs} = 0$). Con questa ipotesi è possibile ricavare la cinematica della sezione secondo Vlasov.

Le espressioni degli angoli α e β , rappresentati in figura 2.2 sono le seguenti:

$$\alpha(s, z) = \frac{Q\bar{Q}'}{Q\bar{D}} = \frac{Q\bar{Q}'}{dz} = \frac{h(s)d\theta(z)}{dz} = h(s)\theta'(z) \quad (2.4)$$

$$\beta(s, z) = \frac{\partial w(s, z)}{\partial s} \quad (2.5)$$

si ricava l'espressione dello scorrimento:

$$\gamma_{zs} = \alpha + \beta = h(s)\theta'(z) + \frac{\partial w(s, z)}{\partial s} = 0 \quad (2.6)$$

Nella torsione non uniforme, rispetto alla teoria classica, vi è la rimozione dell'ipotesi di *warping* w costante lungo la trave. Questo lo si ottiene considerando una funzione di ingobbimento della sezione ω costante lungo l'ascissa z ma, a differenza della teoria classica, un angolo unitario di torsione Θ variabile lungo l'asse della trave con una certa legge in funzione di z .

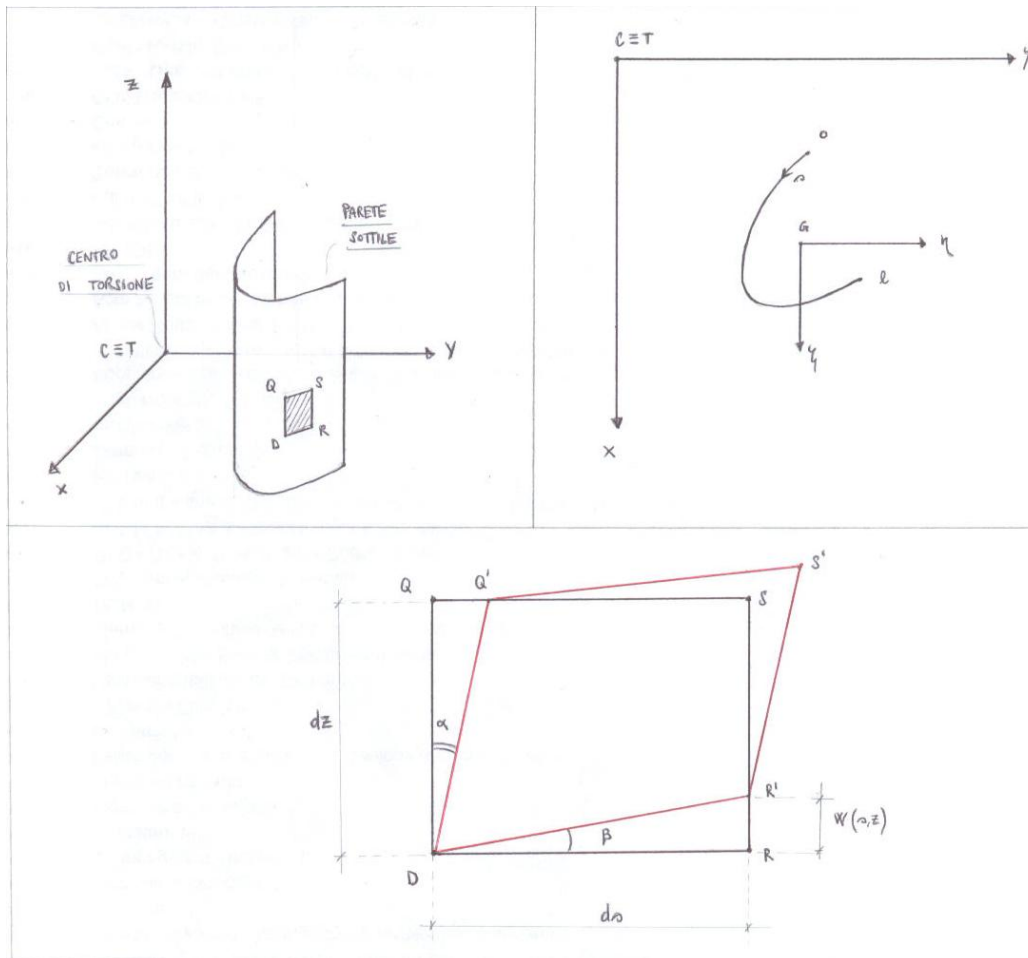


Figura 2.2: Sezione in parete sottile e concio infinitesimo

E' possibile ora ricavare l'ipotesi cinematica per gli spostamenti fuori dal piano della sezione, portando a secondo membro w ed integrando si ottiene:

$$w(s, z) = \Theta(z) \omega(s) \quad (2.7)$$

dove con s indichiamo una ascissa curvilinea nel piano della sezione in parete sottile che percorre la sezione stessa lungo la propria linea media. Si può definire la funzione di ingobbimento in funzione dell'area settoriale Ω_p della sezione:

$$\omega = -2\Omega_p(s) \quad (2.8)$$

Il calcolo dell'area settoriale si esegue considerando l'origine dell'ascissa curvilinea s e il polo p coincidenti con il centro di torsione della sezione.

Per quanto riguarda la deformazione della sezione nel proprio piano si fa l'ipotesi di sezione rigida nel piano $x - y$.

Nella teoria di Vlasov, per l'ipotesi cinematica fatta, si ha che la dilatazione lungo z non è nulla, per questo nascono degli stati tensionali e deformativi che vengono definiti "secondari", essi sono propri della torsione non uniforme. Dal punto di vista dello stato deformativo, allo scorrimento γ dato dalla torsione pura si aggiunge la dilatazione lungo l'asse z :

$$\epsilon_z(s, z) = \frac{\partial w(s, z)}{\partial z} = \omega(s)\theta'_z = \omega(s)\Theta'_z \quad (2.9)$$

La presenza della dilatazione comporta poi l'insorgere di tensioni normali σ_z a loro legate attraverso le proprietà elastiche del materiale. In generale le tensioni normali varieranno con z , per questo l'equilibrio richiede la presenza di tensioni tangenziali che verranno dette anch'esse "secondarie" ed indicate solitamente con $\tau_z^{(2)}$.

In definitiva si ha che la trave alla Vlasov non prevede, al pari della teoria classica, distorsione di sezione nel proprio piano. Ciò che si aggiunge al modello di D.S.V. è un *warping* della sezione che non è più vincolato ad essere costante ad ogni ascissa z , ma può avere un andamento arbitrario lungo l'asse della trave grazie alla torsione non uniforme.

3 Teorie che estendono la cinematica di Vlasov

Si presentano ora i modelli di trave di ordine superiore frutto dell'estensione dell'ipotesi cinematica del modello alla Vlasov.

Tramite una breve descrizione dell'evoluzione storica degli studi sulle travi con sezione in parete sottile avvenuta negli ultimi decenni si vuole introdurre la Generalized Beam Theory (*GBT*), mettendo in evidenza la sua proprietà unificatrice delle teorie convenzionali e di quelle di ordine superiore.

3.1 Evoluzione storica della teoria di trave generalizzata (*GBT*)

Nei paragrafi precedenti si sono riassunti i principi fondamentali delle teorie classiche di d.S.V. e di Vlasov e si è visto che la loro trattazione analitica tiene conto essenzialmente di quattro modi deformativi fondamentali per la sezione trasversale. Questi modi di deformarsi di una trave sono noti a priori ed identificabili nei quattro casi indipendenti di stato tensionale della sezione: ovvero lo Sforzo Normale, i Momenti Flettenti attorno ai due assi principali d'inerzia ed il Momento Torcente attorno all'asse passante per il centro di torsione.

Questi quattro modi si riferiscono, come detto anche precedentemente, sempre ad un moto rigido della sezione in quanto essi non comportano nessuna "distorsione" della sezione trasversale nel suo stesso piano.

I modelli di trave classici si dimostrano quindi carenti nel poter descrivere il comportamento di elementi strutturali come quelli in acciaio cold-formed, il cui uso sta avendo un forte impulso negli ultimi decenni. La ricerca scientifica si è mossa anch'essa in questa direzione e numerosi studiosi oggi si occupano

del problema della modellazione di travi "thin-walled".

Il primo autore che propose una teoria di trave che si possa definire "innovativa" fu Richard Schardt nel 1983, docente dell'Università di Darmstadt (Germania), il quale pubblicò il libro *VTB* ([2] e una nuova versione disponibile [6]) descrivendo una naturale generalizzazione della teoria di Vlasov. La teoria *VTB*, acronimo di *Verallgemeinerte Technische Biegetheorie* e tradotta in inglese per la letteratura scientifica in *Generalized Beam Theory*, non fa altro che aggiungere dei "modi" al campo deformativo della trave di Vlasov prevedendo una cinematica più generale: una distribuzione del warping sulla sezione con una certa legge e un comportamento tipo "lastra" di Kirchhoff delle pareti naturali della sezione.

La GBT originariamente divulgata da Schardt è una pura generalizzazione della teoria di Vlasov in quanto prevede il mantenimento dell'ipotesi di indeformabilità al taglio sulla superficie media della sezione e rimuove invece definitivamente l'ipotesi di sezione rigida nel proprio piano, permettendo così la "section distortion".

Il lavoro di Vlasov sulla teoria delle aree settoriali fu quindi determinante per la costruzione della GBT da parte di Schardt.

Uno degli aspetti più complicati ed interessanti da affrontare nel campo delle strutture "thin-walled" è il fenomeno dell'instabilità, il quale non è ancora adeguatamente approfondito nella letteratura scientifica. La GBT permette una descrizione accurata dell'instabilità *locale*, *globale* o *distorsionale* in quanto c'è una profonda connessione tra questi fenomeni e l'*analisi della sezione*, procedura nella quale si effettua una decomposizione modale della cinematica della sezione prevista inizialmente da Schardt.

Prima di Schardt, un altro studioso si applicò nel campo delle strutture in parete sottile muovendosi in direzione opposta rispetto a quella che poi seguì l'autore tedesco. Nel 1964 Michele Capurso [5] migliorò infatti la teoria di Vlasov rimuovendo l'ipotesi di indeformabilità a taglio sulla superficie media della sezione, e questo comportò la definizione di una serie di funzioni di *warping* con le quali Capurso propose una decomposizione modale della deformazione della sezione, in modo del tutto analogo a quanto fece poi Schardt nella GBT.

Nella sua teoria Capurso non prese però in considerazione la "section-distortion", per questo le sue formulazioni non sono in disaccordo con quelle apportate da Schardt per la GBT. Fu così possibile nei decenni successivi unificare le due teorie e costruire una teoria di trave generalizzata che rimuova tutte le ipotesi semplificative alla base delle teorie precedenti.

Gli autori principali che divulgarono la teoria generalizzata in letteratura, apportando anche importanti estensioni alla GBT originale, furono J.M.Davies [7, 8], allievo di Schardt, P.Leach [9], ed in particolare Dinar Camotim e Nuno Silvestre [3, 4], i quali furono i primi che rimossero le ipotesi di Vlasov unificando quindi le teorie GBT e di Capurso. Essi scrissero inoltre degli articoli sulla procedura di analisi della sezione per sezioni in parete sottile di forma arbitraria (comprese sezioni chiuse e "branched-sections").

La GBT oggi è considerata uno strumento teorico molto efficace nel campo delle 'thin-walled structure' e molti altri approcci alternativi ne hanno ripreso la formulazione. Ciò è dovuto soprattutto alla sua chiara interpretazione della cinematica e alle sue originali formulazioni analitiche che uniscono in una unica forma tutte le teorie convenzionali.

3.2 Caratteristiche principali della GBT

In questo lavoro di tesi viene mostrata la formulazione della GBT nella sua forma più moderna, senza considerare nessuna ipotesi restrittiva posta a priori sul cinematismo della sezione. L'unico vincolo che si pone riguarda il tipo di sezione adottato per l'esecuzione della procedura di analisi della sezione, si considera infatti che la procedura di calcolo implementata possa valere solo per sezioni aperte e non ramificate, le cosiddette sezioni *unbranched*.

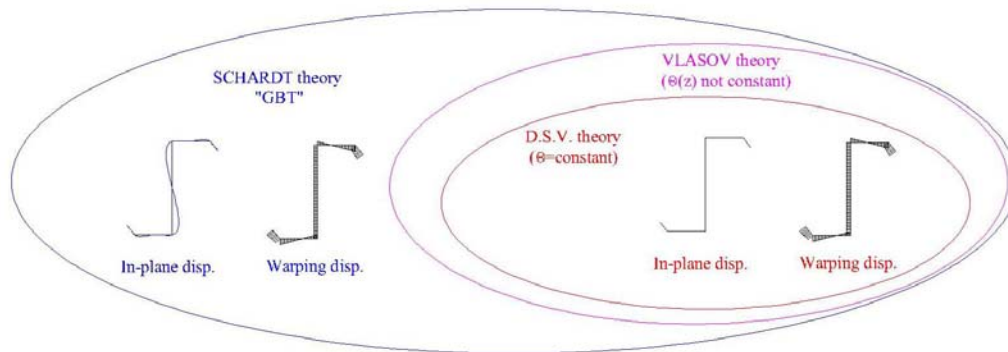
Si riportano nelle figure di tabella 2.1 due classificazioni delle teorie di trave descritte fin qui: la prima classificazione è effettuata in base al campo di applicazione della teoria dipendente dalla tipologia di sezione trasversale scelta, la seconda classificazione è effettuata invece secondo le differenti ipotesi cinematiche che caratterizzano la sezione.

Considerando la prima classificazione raffigurata nella figura in alto di tabella 2.1, si nota come la teoria GBT sia applicabile a tutte le sezioni in parete sottile aperte o chiuse, ma limitatamente alle analisi svolte in questo lavoro di tesi ci si limita a considerare sezioni aperte di tipo *unbranched*. Al contrario, come è ben noto, la teoria classica di d.S.V. si può applicare in maniera indifferente a tutti i tipi di sezione ove questa possa essere considerata di tipo compatto, tale cioè da far valere il postulato di d.S.V. . Per quanto riguarda infine la teoria di Vlasov, le sue ipotesi sono valide solo se si considera una sezione in parete sottile aperta.

Se ci si riferisce alla seconda figura della tabella 2.1 viene visualizzata la possibile configurazione deformata della sezione a seconda della teoria scelta attraverso la visualizzazione delle deformazioni nel piano e fuori dalla sezione.



Relazioni in base al tipo di sezione



Relazioni in base alla section deformation

Tabella 2.1: *Riassunto delle ipotesi alla base delle teorie analizzate*

L'idea che sta alla base della Generalized Beam Theory è quella di creare una nuova notazione sintetica ed elegante che permetta di tenere in conto il comportamento di trave previsto dalle teorie classiche, ed allo stesso tempo di descrivere anche un comportamento della trave di tipo "distorsionale", per cui vi sia una distorsione della sezione nel suo stesso piano.

La notazione della GBT è fondata su di una ipotesi cinematica che prevede una decomposizione modale del campo di deformazione della sezione: si in-

dividano cioè delle *forme modali* definite a priori secondo certi criteri e modulate attraverso delle ampiezze incognite definite *spostamenti generalizzati*.

L'obiettivo della decomposizione è quello di poter descrivere la configurazione deformata di una sezione trasversale come combinazione lineare di forme modali note dove i coefficienti di combinazione sono gli spostamenti generalizzati, le uniche incognite del problema.

L'utilizzo della GBT allo scopo di ottenere sforzi e deformazioni in una struttura sottoposta a certe condizioni di carico e di vincolo richiede l'esecuzione di due differenti procedure:

1. la *Cross-Section Analysis*;
2. la risoluzione della *Fundamental Beam Equation*.

La Cross-Section Analysis è una procedura che consiste nel determinare le "forme modali" per la sezione in esame e le "matrici dei coefficienti" associate ai vari modi individuati. Come si vedrà poi di seguito la ricerca delle forme modali consiste nell'individuazione di una terna di funzioni definite lungo l'ascissa curvilinea s sulla linea media della sezione, mentre le matrici dei coefficienti dipendono dalle proprietà geometriche e meccaniche della sezione.

Il secondo step da eseguire consiste invece nella individuazione delle incognite del problema, ovvero gli spostamenti generalizzati. Per farlo è necessario risolvere l'equazione differenziale che sta alla base della teoria e che verrà introdotta nel prossimo capitolo: la "Fundamental Beam Equation". Vi sono varie strategie di risoluzione del sistema differenziale, quella più diffusa e che si utilizzerà per l'implementazione di un codice di calcolo è il metodo agli

elementi finiti.

Nell'ambito di questa tesi ci si limita ad analizzare solamente la formulazione lineare della teoria GBT e non viene affrontata la teoria del secondo ordine che permetterebbe di svolgere delle analisi di 'buckling' tenendo conto dei "modi distorsivi" della sezione.

Capitolo 3

Formulazione della GBT in notazione matriciale

In questo capitolo si illustra la formulazione in forma matriciale della GBT a partire dall'ipotesi cinematica fondamentale fino alla scrittura dell'equazione fondamentale. Viene poi esposta la formulazione del relativo elemento finito lineare associato alla teoria GBT.

La formulazione GBT che si esporrà non è valida per sezioni trasversali arbitrarie, ma solo per alcuni tipi di sezioni la cui geometria sia possibile descriverla tramite una sola ascissa curvilinea. Le sezioni trasversali che hanno questa caratteristica sono chiamate *unbranched* e sono sezioni "aperte". Queste sezioni in parete sottile hanno la proprietà di possedere una linea media sullo spessore che non presenti punti di biforcazione, esse sono dette anche sezioni "non ramificate". E' possibile perciò definire una ascissa curvilinea s che percorre tutta la sezione lungo la sua linea media, la quale è univocamente determinata attraverso la sola identificazione della sua origine in un nodo naturale della sezione.

Saranno analizzati in questo capitolo a partire dalla cinematica del problema le deformazioni, le forze e gli sforzi generalizzati, la relazione costitutiva e infine l'equilibrio, che scritto in termini di spostamenti generalizzati rappresenta l'*espressione fondamentale* della Generalized Beam Theory.

Individuate le equazioni differenziali che descrivono il problema, si indicano poi le formulazioni da utilizzare per la risoluzione delle equazioni stesse tramite metodo agli elementi finiti: si individuano matrice di rigidezza e vettore dei carichi applicati per un elemento finito tipo trave.

1 Teoria di trave generalizzata

1.1 Cinematica

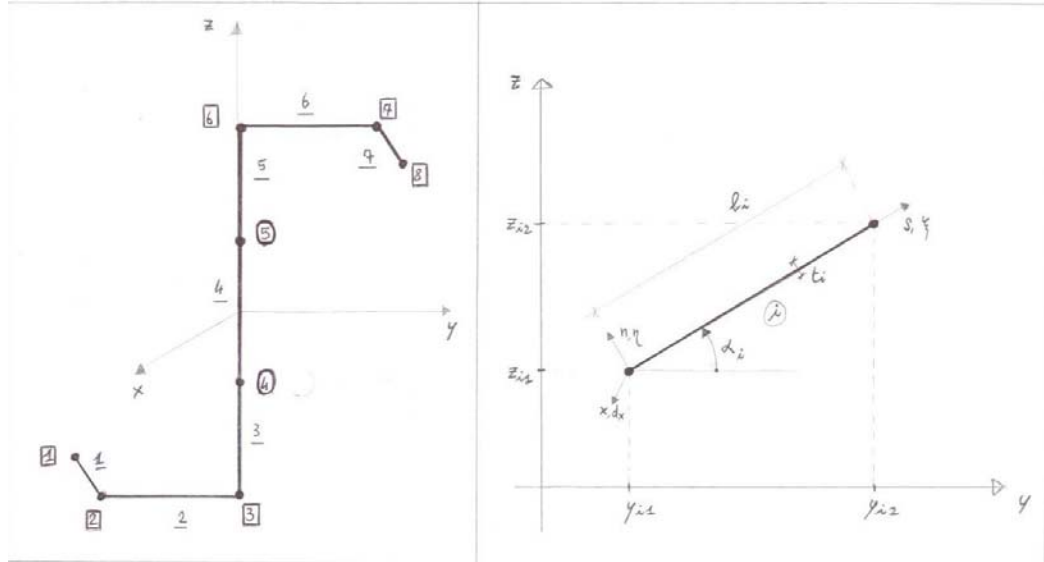


Figura 3.1: Sezione in parete sottile, i -esima parete e il suo riferimento locale (x, s, n)

Nella figura 3.1 vi è rappresentata una sezione di forma arbitraria in parete sottile di tipologia *unbranched*, per la quale è valida la cinematica che si presenta in questo paragrafo. La sezione trasversale appartiene al piano $Y - Z$ del sistema di riferimento globale mentre la trave si sviluppa longitudinalmente lungo l'asse X globale.

La parte sinistra della figura 3.1 mette in evidenza la discretizzazione della sezione, quest'ultima rappresentata dalla sola linea media. Discretizzare la sezione significa individuare **nodi** e **pareti** sulla linea media: i nodi che si possono individuare si distinguono tra **nodi naturali**, che in figura hanno la numerazione contornata da un quadrato, e **nodi intermedi**, con numerazione contornata da un cerchio.

Il numero minimo di nodi che si possono assumere per la discretizzazione di

una sezione è pari a quello dei nodi naturali, ovvero i nodi individuati dagli spigoli e dal punto iniziale e finale della linea media. Si possono poi porre un numero arbitrario di nodi intermedi nei tratti di linea media compresi tra due nodi naturali, questi tratti sono detti pareti naturali della sezione. Il posizionamento di nodi intermedi sulle pareti naturali porta alla suddivisione della parete stessa in pareti intermedie le quali vengono numerate assieme a quelle naturali con una numerazione caratterizzata da un trattino sottostante il numero.

Per ogni parete, naturale o intermedia, si assume un sistema di riferimento locale che viene visualizzato nella parte destra della figura 3.1 per la i -esima parete. Le caratteristiche geometriche di ogni parete sono date dalla loro lunghezza l_i , dal loro spessore costante sulla parete t_i e dalla loro inclinazione rispetto alla direzione dell'asse Y ovvero α_i .

L'ipotesi cinematica fondamentale, in forma non vettoriale, riferita al sistema di riferimento locale (x, s, n) della i -esima parete della sezione è la seguente:

$$d_{x,i}(x, s, n) = \sum_k [\varphi_{ik}(s)V'_k(x)] - n \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3.1)$$

$$\xi_i(x, s, n) = \sum_k [g_{ik}(s)V_k(x)] - n \frac{\partial \eta}{\partial s} \quad (3.2)$$

$$\eta_i(x, s) = \sum_k [f_{ik}(s)V_k(x)] \quad (3.3)$$

Il passaggio al sistema di riferimento globale comporta la rotazione degli assi s ed n locali nel piano della sezione, per cui la cinematica nel sistema (X, Y, Z) è data dalle seguenti espressioni:

$$U_{x,i}(X, Y, Z) = d_{x,i}(x, s, n) \quad (3.4)$$

$$U_{y,i}(X, Y, Z) = \xi_i(x, s, n) \cos \alpha_i + \eta_i(x, s) \sin \alpha_i \quad (3.5)$$

$$U_{z,i}(X, Y, Z) = -\xi_i(x, s, n) \sin \alpha_i + \eta_i(x, s) \cos \alpha_i \quad (3.6)$$

dove si assume l'angolo α_i come in figura 3.1, preso positivo in senso orario. In alternativa alle equazioni 3.1-3.3 si può scrivere l'ipotesi cinematica in forma vettoriale con l'espressione:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{m}_i \mathbf{V} \quad (3.7)$$

dove si definiscono i vettori:

- $\mathbf{V} = [V_1, V_2, \dots, V_k, \dots, V_N]^T$;
- $\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} d_x & \xi & \eta \end{bmatrix}^T$;
- $\mathbf{m}_i = [\mathbf{m}_{i1}, \mathbf{m}_{i2}, \dots, \mathbf{m}_{ik}, \dots, \mathbf{m}_{iN}]$.

$$\mathbf{m}_{ik} = \left[(\varphi_{ik} - n_i f_{ik}) \frac{\partial}{\partial x}, g_{ik} - n_i \dot{f}_{ik}, f_{ik} \right]^T \quad (3.8)$$

Il simbolismo adottato in queste formule e nel seguito del paragrafo prevede le seguenti uguaglianze:

- $\dot{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial s}$;
- $\alpha' = \frac{\partial \alpha}{\partial x}$.

La cinematica della sezione è nota purchè sia nota la terna di funzioni $\varphi_{ik}(s)$, $g_{ik}(s)$ e $f_{ik}(s)$ su tutte le i -esime pareti.

Dalle equazioni 3.1-3.3 si può notare come l'ipotesi cinematica tenga conto di

una decomposizione modale del campo di spostamenti della sezione attraverso un numero N di modi k .

I modi o forme modali sono individuate da una terna di funzioni φ_{ki} , g_{ki} e f_{ki} che viene assunta a priori come possibile deformata della sezione trasversale. Ogni forma fornisce uno specifico contributo al campo di spostamenti che è modulato da una ampiezza incognita V_k , detto spostamento generalizzato per il k -esimo modo. Le componenti di spostamento sono quindi definite dalla cinematica come somma dei contributi dati da ogni singolo modo alla specifica componente di spostamento $d_{x,i}$, ξ_i o η_i .

1.2 Deformazioni generalizzate

Si considerano le seguenti componenti del tensore di deformazione: $\epsilon_{xx,i}$, $\epsilon_{ss,i}$ e $\gamma_{xs,i}$, raccolte nel vettore $\epsilon = [\epsilon_{xx,i} \ \epsilon_{ss,i} \ \gamma_{xs,i}]^T$. Il pedice i indica che le deformazioni sono misurate nel sistema di riferimento locale (x, s, n) della i -esima parete.

$$\epsilon_{xx,i} = \frac{\partial d_{x,i}(x, s, n)}{\partial x} \quad (3.9)$$

$$\epsilon_{ss,i} = \frac{\partial \xi_i(x, s, n)}{\partial s} \quad (3.10)$$

$$\gamma_{xs,i} = \frac{\partial d_{x,i}(x, s, n)}{\partial s} + \frac{\partial \xi_i(x, s, n)}{\partial x} \quad (3.11)$$

Date le equazioni di compatibilità generale 3.9-3.11 si possono ricavare le espressioni delle componenti del tensore di deformazione per la GBT solamente sostituendo le componenti di spostamento definite nell'ipotesi cinematica. Si ottengono così le equazioni in forma estesa 3.12-3.14.

$$\epsilon_{xx,i} = \sum_k \{[\varphi_k(s)V_k''(x)] + [-nf_k(s)V_k''(x)]\} \quad (3.12)$$

$$\epsilon_{ss,i} = \sum_k \{[g_k(s)V_k(x)] + [-n\ddot{f}_k(s)V_k]\} \quad (3.13)$$

$$\gamma_{xs,i} = \sum_k \{[\dot{\varphi}_k(s)V_k'(x) + g_k(s)V_k'(x)] + [-2nf_k(s)V_k']\} \quad (3.14)$$

Queste stesse equazioni possono poi essere scritte in forma matriciale con la espressione 3.15.

$$\epsilon_i = \mathbf{b}_i \mathbf{q} \quad (3.15)$$

dove \mathbf{q} è il vettore delle deformazioni generalizzate ed è composto come indicato di seguito.

$$\mathbf{q} = [V_1, V_1', V_1'', V_2, V_2', V_2'', \dots, V_k, V_k', V_k'', \dots, V_N, V_N', V_N'']^T \quad (3.16)$$

Per la definizione di \mathbf{q} nella 3.16, si può scrivere la seguente espressione:

$$\mathbf{q} = \mathbf{D} \mathbf{V} \quad (3.17)$$

dove \mathbf{D} è l'operatore di trasformazione ed è definito come segue:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \partial & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \partial & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \vdots & \partial & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} & \vdots & \partial \end{bmatrix} \quad \partial = \left[1, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right]^T \quad (3.18)$$

Nella equazione 3.15 viene poi introdotto anche il nuovo operatore \mathbf{b}_i , che è composto da N componenti e definito come segue:

$$\mathbf{b}_i = [\mathbf{b}_{i1}, \mathbf{b}_{i2}, \dots, \mathbf{b}_{ik}, \dots, \mathbf{b}_{iN}] \quad (3.19)$$

Nelle prossime equazioni si definiscono le funzioni α_{ik} , β_{ik} e γ_{ik} , utilizzate per descrivere la cinematica della i -esima parete dovuta al k -esimo modo.

$$\begin{aligned} \alpha_{ik} &= \varphi_{ik} - n_i f_{ik} \\ \beta_{ik} &= \dot{\varphi}_{ik} + g_{ik} - 2n_i \dot{f}_{ik} \\ \gamma_{ik} &= \dot{g}_{ik} - n_i \ddot{f}_{ik} \end{aligned}$$

Queste funzioni sono contenute nelle componenti \mathbf{b}_{ik} che descrivono il campo di deformazione della i -esima parete dovuto al k -esimo modo. Le componenti sono delle matrici $[3 \times 3]$ scritte come segue:

$$\mathbf{b}_{ik} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & \alpha_{ik} \\ \hline \gamma_{ik} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \beta_{ik} & 0 \end{array} \right] \quad (3.20)$$

1.3 Sforzi e Forze generalizzate

Gli sforzi o stress generalizzati possono essere definiti tramite la seguente espressione:

$$\sum_i \int_{s_i} \int_{n_i} \hat{\sigma}_i^T \epsilon_i ds dn = \sigma^T \mathbf{q} \quad (3.21)$$

ne consegue quindi che il vettore degli stress generalizzati σ è dato da:

$$\sigma = \sum_i \sigma_i \quad (3.22)$$

Il vettore degli stress relativo alla i -esima parete σ_i si deduce che sia:

$$\sigma_i = \int_{s_i} \int_n \hat{\sigma}^T \mathbf{b}_i ds_i dn \quad (3.23)$$

Le forze esterne sulla trave sono definite dal vettore delle forze distribuite \mathbf{F}_i con le sue tre componenti:

$$\mathbf{F}_i = \left[\hat{f}_{xi}(s_i), \hat{f}_{si}(s_i), \hat{f}_{ni}(s_i) \right]^T \quad (3.24)$$

dove le componenti sono riferite alle tre direzioni principali del sistema di riferimento locale della parete i -esima. Ora dalla definizione delle forze esterne si vuole arrivare a definire le forze generalizzate, così come per gli stress quindi si applica l'equivalenza energetica tra forze esterne e generalizzate.

$$\sum_i \int_{s_i} \int_{n_i} \mathbf{F}_i^T \mathbf{u}_i ds dn = \mathbf{p}^T \mathbf{V} \quad (3.25)$$

Si sono eguagliati quindi il lavoro dato dalle forze esterne \mathbf{F}_i con quello prodotto dalle forze generalizzate \mathbf{p} .

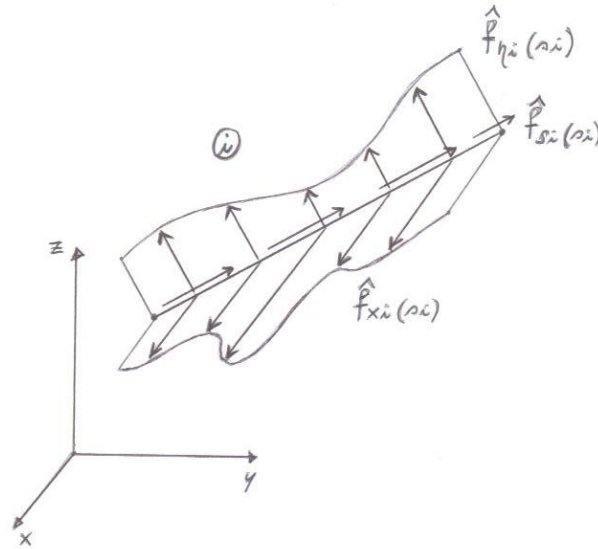


Figura 3.2: Carico distribuito sull' i -esima parete: $\mathbf{F}_i = [\hat{f}_{xi}(s_i), \hat{f}_{si}(s_i), \hat{f}_{ni}(s_i)]^T$

Se si analizzano separatamente i contributi dati dal carico su ogni singola parete si può definire il vettore \mathbf{p}_i in questo modo:

$$\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i \quad (3.26)$$

Con la sostituzione della 3.7 nella espressione 3.25 si ottiene il vettore delle forze generalizzate applicate sull' i -esima parete:

$$\mathbf{p}_i = \int_{s_i} \int_{n_i} \mathbf{F}_i^T \mathbf{m}_i dn_i ds_i \quad (3.27)$$

Le forze generalizzate \mathbf{p}_i possono essere riscritte in forma vettoriale come:

$$\mathbf{p}_i = [p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{ik}, \dots, p_{iN}]^T$$

Si ha che ogni componente p_{ik} del vettore rappresenta la parte di carico esterno agente sull' i -esima parete corrispondente alla k -esima linea elastica generalizzata V_k .

La espressione della generica componente p_{ik} è la seguente:

$$p_{ik} = \int t_i \left[f_{ik} p_{in} + g_{ik} p_{is} + \varphi_{ik} p_{ix} \frac{\partial}{\partial x} \right] ds_i \quad (3.28)$$

dove è stato eseguito l'integrale lungo lo spessore della parete i -esima, ovvero t_i .

1.4 Legame Costitutivo

La relazione costitutiva per ogni modello è caratterizzata dalla matrice di legame \mathbf{C} . Per ricavarla nel caso particolare della formulazione GBT ci si appoggia sempre alla equivalenza energeica tra il lavoro interno compiuto dagli sforzi $\hat{\sigma}$ e quello compiuto dagli sforzi generalizzati σ .

$$\sum_i \int_V \epsilon_i^T \hat{\sigma}_i dV = \sum_i \int_V \epsilon_i^T \hat{\mathbf{C}} \epsilon_i dV = \int_x \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} dx = \int_x \mathbf{q}^T \sigma dx \quad (3.29)$$

La matrice di legame costitutivo \mathbf{C} per la GBT si definisce quindi come:

$$\sigma = \mathbf{C} \mathbf{q} \quad (3.30)$$

Nell'analisi di una sezione in parete sottile si può assumere per le pareti della sezione un comportamento a piastra, tipo piastra di Kirchhoff, oppure un comportamento unidimensionale, tipo trave.

Questa assunzione permette di assumere una forma della matrice di legame costitutivo che è ben nota: in particolare la si può distinguere nei due casi di comportamento ‘a piastra’ (f) ed ‘a trave’ (m).

Si riportano di seguito le due tipologie di matrici di legame assunte:

$$\hat{\mathbf{C}}^{(f)} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\hat{\mathbf{C}}^{(m)} = \begin{bmatrix} E & E\nu & 0 \\ E\nu & E & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Nelle formulazioni seguenti si confonderanno queste due matrici nella sola matrice generale $\hat{\mathbf{C}}$, che verrà poi specificata nel seguito.

Sostituendo ora la 3.15 nella 3.29 si ottiene la seguente espressione:

$$\mathbf{C} = \sum_i \int_{s_i n_i} \mathbf{b}_i^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{b}_i ds_i dn_i \quad (3.33)$$

Si è quindi ora definita la matrice costitutiva per la formulazione GBT. Se si esegue il prodotto matriciale all’interno dell’integrale si ottiene la forma estesa della matrice \mathbf{C} , per farlo è necessario sostituire nella 3.33 l’equazione 3.19.

Viene riportata ora una sotto-matrice della \mathbf{C} relativa all’interazione tra i modi k -esimo e j -esimo.

$$\mathbf{C}_{[3j-2:3j;3k-2:3k]} = \sum_i \int_{s_i, t_i} \begin{bmatrix} \hat{C}_{22} \gamma_{ik} \gamma_{ij} & 0 & \hat{C}_{12} \alpha_{ik} \gamma_{ij} \\ 0 & \hat{C}_{33} \beta_{ik} \beta_{ij} & 0 \\ \hat{C}_{12} \gamma_{ik} \alpha_{ij} & 0 & \hat{C}_{11} \alpha_{ik} \alpha_{ij} \end{bmatrix} ds dt \quad (3.34)$$

1.5 Equilibrio

L'equilibrio per la formulazione GBT lo si ricava a partire dal *Principio dei Lavori Virtuali*: si eguagliano il lavoro virtuale esterno L_{ve} , dato dalle forze generalizzate per i relativi spostamenti generalizzati, ed il lavoro virtuale interno L_{vi} , dato dagli sforzi generalizzati per le relative deformazioni generalizzate.

L'uguaglianza che si ottiene è la seguente:

$$L_{ve} = \int_0^l \mathbf{p}^T \delta \mathbf{V} - \mathbf{p}^T(0) \delta \mathbf{V}(0) + \mathbf{p}^T(l) \delta \mathbf{V}(l) = \int_0^l \sigma^T \delta \mathbf{q} = L_{vi} \quad (3.35)$$

Se si sostituisce l'equazione 3.17 nella espressione del lavoro virtuale interno e si esegue una integrazione per parti si ottiene la seguente uguaglianza:

$$\int_0^l \mathbf{p}^T \delta \mathbf{V} - \mathbf{p}^T(0) \delta \mathbf{V}(0) + \mathbf{p}^T(l) \delta \mathbf{V}(l) = \int_0^l (\mathbf{D}^* \sigma)^T \delta \mathbf{V} + [\sigma^T \delta \mathbf{V}]_0^l$$

dove si è introdotto l'operatore \mathbf{D}^* , che è l'aggiunto formale dell'operatore di trasformazione \mathbf{D} . Data questa espressione si può derivare l'equilibrio in termini di forze generalizzate interne: vi saranno una equazione di campo più due equazioni al contorno nel caso della trave monodimensionale.

Le equazioni di equilibrio in termini di forze interne sono:

$$\mathbf{D}^* \sigma = \mathbf{p} \quad (3.36)$$

$$\sigma(0) = \mathbf{p}(0) \quad [3.36.a]$$

$$\sigma(l) = \mathbf{p}(l) \quad [3.36.b]$$

Si ritrovano infine le seguenti equazioni di equilibrio in termini di spostamenti generalizzati applicando le equazioni 3.30 e 3.17.

$$\mathbf{D}^* \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{V} = \mathbf{p} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{V}(0) = \mathbf{p}(0) \quad [3.37.a]$$

$$\mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{V}(l) = \mathbf{p}(l) \quad [3.37.b]$$

1.6 L'equazione fondamentale della GBT

L'equazione 3.37 è in realtà un sistema lineare di equazioni differenziali del quarto ordine nella variabile \mathbf{V} .

Questo sistema di equazioni, scoperto ed introdotto grazie alle ricerche di Richard Schardt e descritto ampiamente in [6], è conosciuto come la **fundamental equation** o *equazione fondamentale* della GBT, originariamente fu scritto nella seguente forma:

$$\mathbf{A} \mathbf{V}'''' + \mathbf{B} \mathbf{V}'' + \mathbf{G} \mathbf{V} = \mathbf{p} \quad (3.38)$$

In questa espressione i tensori $(A) = \sum \mathbf{A}_i$, $(B) = \sum \mathbf{B}_i$ e $(G) = \sum \mathbf{G}_i$ sono matrici quadrate con dimensione pari al numero dei modi considerati N , esse sono chiamate **matrici dei coefficienti**.

Le componenti delle matrici \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{G} possono essere ottenute dall'equivalenza tra le due espressioni 3.37 ed 3.38. Se inoltre si considerano le equazioni 3.33 e 3.18 si possono ottenere le espressioni delle componenti delle matrici dei coefficienti che vengono riportate di seguito:

$$A_{ikj} = \int \frac{t_i^3}{12} \hat{C}_{11}^{(f)} f_{ik} f_{ij} ds_i + \int t_i \hat{C}_{11}^{(m)} \varphi_{ik} \varphi_{ij} ds_i \quad (3.39)$$

$$B_{ikj} = B_{ikj}^{(2)} + B_{ijk}^{(2)} - B_{ikj}^{(1)} \quad (3.40)$$

$$B_{ikj}^{(1)} = \int t_i \hat{C}_{33}^{(m)} (\dot{\varphi}_{ik} + g_{ik}) (\dot{\varphi}_{ij} + g_{ij}) ds_i + \int \frac{t_i^3}{3} \hat{C}_{33}^{(f)} \dot{f}_{ik} \dot{f}_{ij} ds_i$$

$$B_{ikj}^{(2)} = \int \frac{t_i^3}{12} \hat{C}_{12}^{(f)} [f_{ij} \ddot{f}_{ik}] ds_i + \int t_i \hat{C}_{12}^{(m)} [\varphi_{ij} \dot{g}_{ik}] ds_i$$

$$G_{ikj} = \int \frac{t_i^3}{12} \hat{C}_{22}^{(f)} \ddot{f}_{ik} \ddot{f}_{ij} ds_i + \int t_i \hat{C}_{22}^{(m)} \dot{g}_{ik} \dot{g}_{ij} ds_i \quad (3.41)$$

Le espressioni 3.39-3.41 appena riportate caratterizzano la componente delle matrici dei coefficienti che esprime l'interazione tra il modo k -esimo ed il modo j -esimo solo per quanto riguarda la parete i -esima. La sommatoria di queste componenti sulle diverse pareti fornisce il valore complessivo delle componenti di interazione tra i due modi per ogni matrice, ovvero le $\mathbf{A}_{\mathbf{kj}}$, $\mathbf{B}_{\mathbf{kj}}$ e $\mathbf{G}_{\mathbf{kj}}$.

La matrice di legame costitutivo \mathbf{C} (vedi 3.34) può essere alternativamente espressa in termini di componenti delle matrici \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_i e \mathbf{G}_i : eseguendo infatti l'integrale lungo lo spessore nella espressione 3.34 si ritrova che la matrice costitutiva presenta delle componenti pari a quelle delle matrici dei coefficienti.

Si riscrive ora la 3.34 in termini di componenti delle matrici dei coefficienti:

$$\mathbf{C}_{[3j-2:3j;3k-2:3k]} = \sum_i \begin{bmatrix} G_{ikj} & 0 & B_{ikj}^{(2)} \\ 0 & B_{ikj}^{(1)} & 0 \\ B_{ijk}^{(2)} & 0 & A_{ikj} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Ora solo per esempio si scrive la forma della matrice \mathbf{C} completa considerando soltanto due modi, quelli k -esimo and j -esimo:

$$\mathbf{C} = \sum_i \int_{s_i, t_i} \left[\begin{array}{ccc|ccc} C_{22}\gamma_{ik}\gamma_{ik} & 0 & C_{12}\alpha_{ik}\gamma_{ik} & C_{22}\gamma_{ik}\gamma_{ij} & 0 & C_{12}\alpha_{ik}\gamma_{ij} \\ 0 & C_{33}\beta_{ik}\beta_{ik} & 0 & 0 & C_{33}\beta_{ik}\beta_{ij} & 0 \\ C_{12}\gamma_{ik}\alpha_{ik} & 0 & C_{11}\alpha_{ik}\alpha_{ik} & C_{12}\gamma_{ik}\alpha_{ij} & 0 & C_{11}\alpha_{ik}\alpha_{ij} \\ \hline C_{22}\gamma_{ij}\gamma_{ik} & 0 & C_{12}\alpha_{ij}\gamma_{ik} & C_{22}\gamma_{ij}\gamma_{ij} & 0 & C_{12}\alpha_{ij}\gamma_{ij} \\ 0 & C_{33}\beta_{ij}\beta_{ik} & 0 & 0 & C_{33}\beta_{ij}\beta_{ij} & 0 \\ C_{12}\gamma_{ij}\alpha_{ik} & 0 & C_{11}\alpha_{ij}\alpha_{ik} & C_{12}\gamma_{ij}\alpha_{ij} & 0 & C_{11}\alpha_{ij}\alpha_{ij} \end{array} \right] ds dt \quad (3.43)$$

Considerando poi l'equazione fondamentale 3.37, per l'esempio analizzato di sola presenza dei modi k e j si ha il seguente sistema fondamentale:

$$\begin{cases} A_{kk}V_k'''' + A_{kj}V_j'''' + B_{kk}V_k'' + B_{kj}V_{kj}'' + G_{kk}V_k + G_{kj}V_j = p_k \\ A_{jk}V_k'''' + A_{jj}V_j'''' + B_{jk}V_k'' + B_{jj}V_{kj}'' + G_{jk}V_k + G_{jj}V_j = p_j \end{cases} \quad (3.44)$$

1.7 Prospetto sintetico delle formulazioni

	quantità generalizzate	relazioni sulla i -esima parete	3-d: quantità continue
spostamenti	\mathbf{V} $\mathbf{D} \quad \mathbf{q} = \mathbf{D}\mathbf{V}$	$\mathbf{u}_i = \mathbf{m}_i \mathbf{V}$	\mathbf{u} $\epsilon = \hat{\mathbf{D}}\mathbf{u} \quad \hat{\mathbf{D}}$
deformazioni	\mathbf{q} $\mathbf{C} \quad \epsilon = \mathbf{C}\mathbf{q}$	$\epsilon_i = \mathbf{b}_i \mathbf{q}$	ϵ $\hat{\sigma} = \hat{\mathbf{C}}\epsilon \quad \hat{\mathbf{C}}$
sforzi	σ $\mathbf{D}^* \quad \mathbf{D}^* \sigma = \mathbf{p}$ $\mathbf{D}^* \sigma(0) = \mathbf{p}(0)$ $\mathbf{D}^* \sigma(l) = \mathbf{p}(l)$		$\hat{\sigma}$ $\hat{\mathbf{D}}^* \hat{\sigma} = \mathbf{F}_i \quad \hat{\mathbf{D}}^*$ $\hat{\mathbf{D}}^* \hat{\sigma}(0) = \mathbf{F}_i(0)$ $\hat{\mathbf{D}}^* \hat{\sigma}(l) = \mathbf{F}_i(l)$
forze	$\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i$	$\mathbf{p}_i = \int \int \mathbf{F}_i^T \mathbf{m}_i \, dn_i \, ds_i$	\mathbf{F}_i
equazioni in termini di spostamenti	$\mathbf{D}^* \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{V} = \mathbf{p}$ $\mathbf{D}^* \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{V}(0) = \mathbf{p}(0)$ $\mathbf{D}^* \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{V}(l) = \mathbf{p}(l)$		$\hat{\mathbf{D}}^* \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{u} = \mathbf{F}_i$ $\hat{\mathbf{D}}^* \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{u}(0) = \mathbf{F}_i(0)$ $\hat{\mathbf{D}}^* \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{u}(l) = \mathbf{F}_i(l)$

2 Un elemento finito per la teoria di trave generalizzata

Vengono ora illustrate le formulazioni che fanno capo all'elemento finito lineare basato sulla teoria di trave generalizzata.

Si illustra come l'elemento finito descrive le grandezze incognite all'interno del suo dominio attraverso l'interpolazione dei suoi valori nodali, si calcolano poi matrice di rigidezza e vettore dei carichi applicati sull'elemento basandosi sulle formulazioni della Generalized Beam Theory (GBT).

2.1 Interpolazione degli spostamenti generalizzati

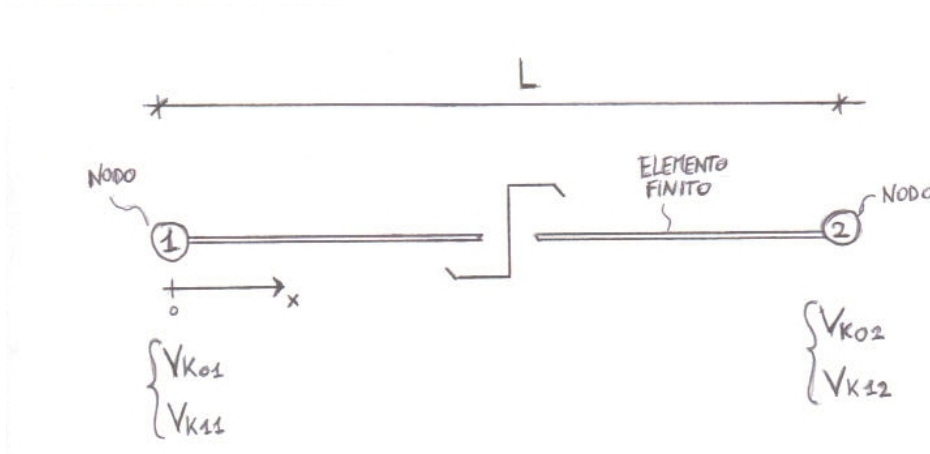


Figura 3.3: *Elemento finito di trave*

Per la creazione di un elemento finito basato sulla teoria di trave generalizzata è necessario individuare i gradi di libertà da fornire all'elemento oggetto di studio. Dato che le uniche incognite del problema sono gli spostamenti generalizzati V e dato che l'elemento finito trave avrà due nodi (uno iniziale ed uno finale) si pongono tanti gradi di libertà quanti sono il numero di linee elastiche generalizzate V_k moltiplicate per due.

Le linee elastiche V_k per ognuno dei due nodi dell'elemento finito rappresentano ciò che si vuole ottenere come risultato di una analisi lineare.

Ottenuti quindi i valori nodali delle incognite del problema è interessante ora calcolarsi una funzione $V_k(x)$ che definisce l'andamento degli spostamenti generalizzati sulla lunghezza dell'elemento finito. Questa funzione definita sull'elemento dovrà interpolare i valori nodali degli spostamenti generalizzati, per cui si scelgono delle *funzioni hermitiane* di interpolazione che per il k -esimo spostamento generalizzato hanno le seguenti formule:

$$H_{k01} = 1 - 3 * (x/L)^2 + 2 * (x/L)^3 \quad (3.45)$$

$$H_{k11} = x * (1 - x/L)^2 \quad (3.46)$$

$$H_{k02} = 3 * (x/L)^2 - 2 * (x/L)^3 \quad (3.47)$$

$$H_{k12} = x * ((x/L)^2 - x/L) \quad (3.48)$$

Ognuna delle quattro funzioni hermitiane riferite alla k -esima linea elastica possiede due pedici numerici: il primo sta a significare l'ordine di derivazione dello spostamento generalizzato a cui è associata, mentre il secondo rappresenta il nodo dell'elemento al quale è riferito lo stesso spostamento generalizzato.

In figura 3.4 si rappresentano le forme delle funzioni hermitiane per un elemento di lunghezza unitaria $L = 1$.

L'interpolazione dei valori nodali degli spostamenti generalizzati viene eseguita tramite la seguente espressione, riportata sia nella forma estesa della

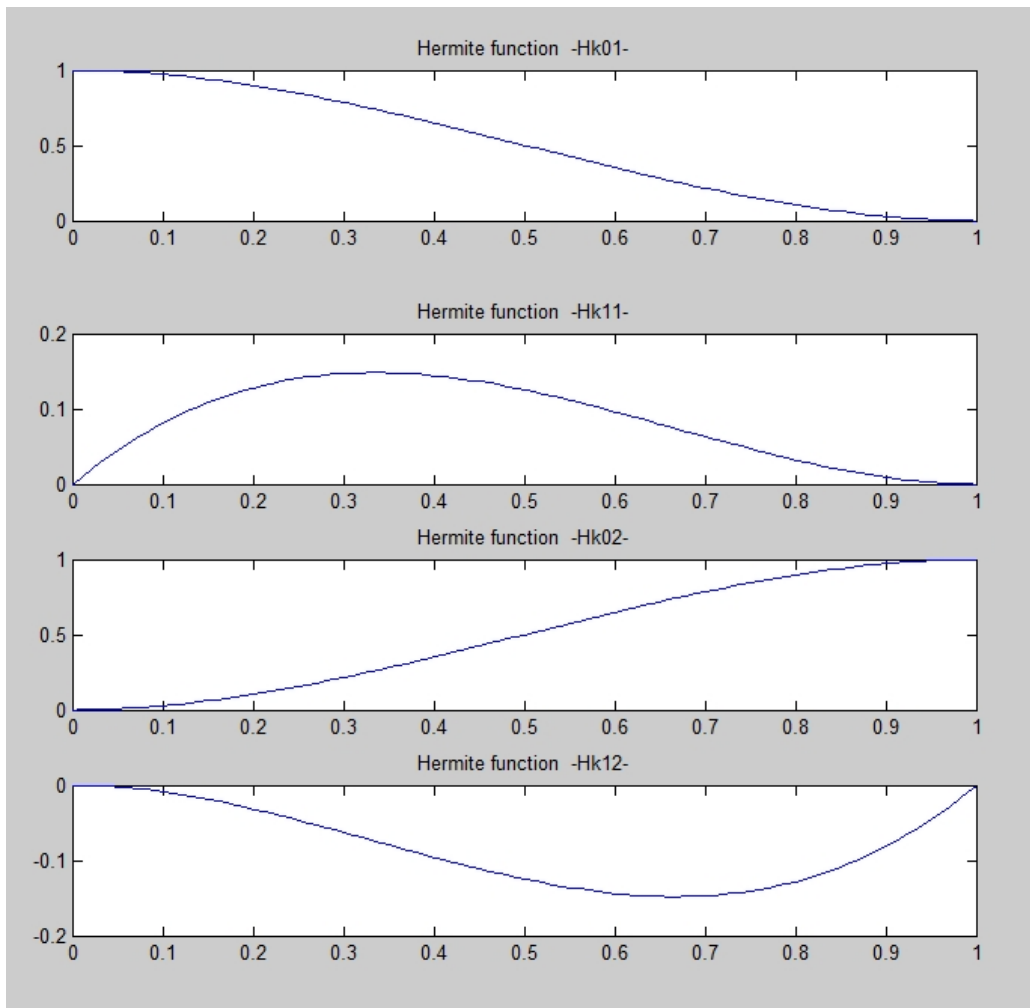


Figura 3.4: Rappresentazione delle funzioni di interpolazione di Hermite per un elemento di lunghezza $L = 1$

eq. 3.49 che matriciale nella eq. 3.51:

$$V_k(x) = H_{k01}V_{k01} + H_{k11}V_{k11} + H_{k02}V_{k02} + H_{k12}V_{k12} = \mathbf{H}_k \mathbf{V}_{kn} \quad (3.49)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & & & & \\ & \mathbf{H}_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \mathbf{H}_{N-1} & \\ & & & & \mathbf{H}_N \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{H} \mathbf{V}_n \quad (3.51)$$

2.2 Matrice di rigidezza

La matrice di rigidezza riferita all'elemento finito si ricava direttamente dalla formulazione debole dell'equilibrio per la teoria GBT, tenendo conto del significato di rigidezza generale per cui vale la relazione fondamentale $K \cdot u = p$.

La matrice di rigidezza dell'elemento è data dalla seguente espressione:

$$\mathbf{K} = \int_0^L (\mathbf{DH})^T \mathbf{CDH} \, dx \quad (3.52)$$

Le componenti della matrice di rigidezza che descrivono l'interazione tra il k -esimo ed il j -esimo modo sono raccolte in una sottomatrice $[4 \times 4]$ simmetrica, esse hanno le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}
K_{[(4k-3):(4k),(4j-3):(4j)],11} &= \frac{1}{35} \frac{13 G_{ikj} L^4 + 42 B_{ikj1} L^2 - 42 B_{ikj2} L^2 - 42 L^2 B_{ijk2} + 420 A_{ikj}}{L^3} \\
K_{[(4k-3):(4k),(4j-3):(4j)],12} &= \frac{1}{210} \frac{11 G_{ikj} L^4 + 21 B_{ikj1} L^2 - 21 L^2 B_{ijk2} - 231 B_{ikj2} L^2 + 1260 A_{ikj}}{L^2} \\
K_{[(4k-3):(4k),(4j-3):(4j)],13} &= \frac{3}{70} \frac{3 G_{ikj} L^4 - 28 B_{ikj1} L^2 + 28 B_{ikj2} L^2 + 28 L^2 B_{ijk2} - 280 A_{ikj}}{L^3} \\
K_{[(4k-3):(4k),(4j-3):(4j)],14} &= -\frac{1}{420} \frac{13 G_{ikj} L^4 - 42 B_{ikj1} L^2 + 42 B_{ikj2} L^2 + 42 L^2 B_{ijk2} - 2520 A_{ikj}}{L^2} \\
K_{[(4k-3):(4k),(4j-3):(4j)],22} &= \frac{1}{105} \frac{G_{ikj} L^4 - 14 L^2 B_{ijk2} + 14 B_{ikj1} L^2 - 14 B_{ikj2} L^2 + 420 A_{ikj}}{L} \\
K_{[(4k-3):(4k),(4j-3):(4j)],23} &= \frac{1}{420} \frac{13 G_{ikj} L^4 - 42 B_{ikj1} L^2 + 42 B_{ikj2} L^2 + 42 L^2 B_{ijk2} - 2520 A_{ikj}}{L^2} \\
K_{[(4k-3):(4k),(4j-3):(4j)],24} &= -\frac{1}{420} \frac{3 G_{ikj} L^4 + 14 B_{ikj1} L^2 - 14 L^2 B_{ijk2} - 14 B_{ikj2} L^2 - 840 A_{ikj}}{L} \\
K_{[(4k-3):(4k),(4j-3):(4j)],33} &= \frac{1}{35} \frac{13 G_{ikj} L^4 + 42 B_{ikj1} L^2 - 42 B_{ikj2} L^2 - 42 L^2 B_{ijk2} + 420 A_{ikj}}{L^3} \\
K_{[(4k-3):(4k),(4j-3):(4j)],34} &= -\frac{1}{210} \frac{11 G_{ikj} L^4 + 21 B_{ikj1} L^2 - 21 L^2 B_{ijk2} - 231 B_{ikj2} L^2 + 1260 A_{ikj}}{L^2} \\
K_{[(4k-3):(4k),(4j-3):(4j)],44} &= \frac{1}{105} \frac{G_{ikj} L^4 - 14 L^2 B_{ijk2} + 14 B_{ikj1} L^2 - 14 B_{ikj2} L^2 + 420 A_{ikj}}{L}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

2.3 Vettore dei carichi applicati

Il vettore \mathbf{P}_D contiene i carichi nodali equivalenti dei relativi carichi distribuiti $p_{ix} p_{is} p_{i,n}$ ed è dato dalla seguente formula:

$$\mathbf{P}_D = \int_0^L \mathbf{H}^T \rho dx \tag{3.54}$$

dove si visualizzano i contributi delle varie pareti i :

$$\mathbf{P}_D = \sum_i \int_0^L \mathbf{H}^T \rho_i dx = \sum_i \mathbf{P}_{D,i} dx \tag{3.55}$$

$$\mathbf{P}_{D,i} = \int_0^L \mathbf{H}^T \rho_i dx = [\mathbf{P}_{D,i1} \mathbf{P}_{D,i2} \dots \mathbf{P}_{D,ik} \dots \mathbf{P}_{D,iN}]^T$$

Il vettore ρ_i , di dimensioni $[3 \times N]$, contiene tutti i carichi agenti sulla parete i -esima i quali lavorano sulle varie funzioni di spostamento $V_k(s)$. Esso è equivalente al vettore \mathbf{p}_i riportato nella formula 3.28.

Eseguendo i calcoli si ottiene il sotto-vettore $\mathbf{P}_{D,ik}$ relativo al k -esimo modo:

$$\mathbf{P}_{D,ik} = \begin{bmatrix} 1/2 g_{ik} p_{is} t_i L + 1/2 f_{ik} p_{in} t_i L - \varphi_{ik} p_{ix} t_i \\ 1/12 (g_{ik} p_{is} t_i + f_{ik} p_{in} t_i) L^2 \\ 1/2 g_{ik} p_{is} t_i L + 1/2 f_{ik} p_{in} t_i L + \varphi_{ik} p_{ix} t_i \\ -1/12 (g_{ik} p_{is} t_i + f_{ik} p_{in} t_i) L^2 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

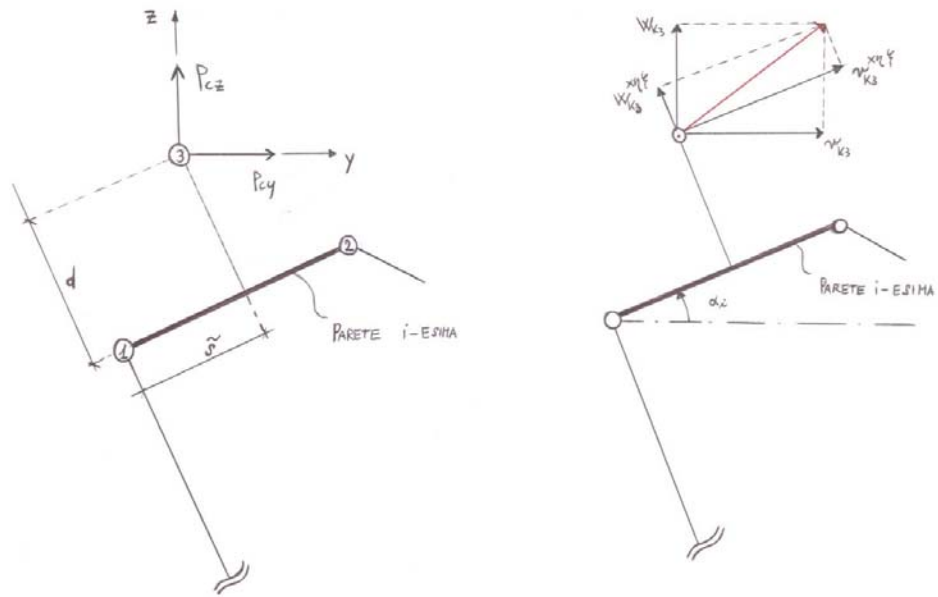


Figura 3.5: Carichi distribuiti p_{icy} e p_{icz}

Ciò che ora si vuole ottenere è il vettore \mathbf{P}_C relativo ai carichi nodali equivalenti dei carichi distribuiti p_{icy} p_{icz} .

I carichi p_{icy} p_{icz} sono applicati nel punto ③, definito dalle distanze d e \tilde{s}

nella parte sinistra della i -esima parete se la si percorre dal nodo ① al nodo ② (vedi fig.3.5).

Gli spostamenti del nodo ③ nel sistema locale della i -esima parete sono:

$$\begin{cases} v_{k3}^{x\eta\xi} &= \tilde{v}_k - \tilde{\theta}_k d \\ w_{k3}^{x\eta\xi} &= \tilde{w}_k \end{cases} \quad (3.57)$$

dove

$$\begin{aligned} \tilde{v}_k &= v_{k,i1}L_1(\tilde{s}) + v_{k,i2}L_2(\tilde{s}) \\ \tilde{w}_k &= w_{k,i1}H_{01}(\tilde{s}) + \theta_{k,i1}H_{11}(\tilde{s}) + w_{k,i2}H_{02}(\tilde{s}) + \theta_{k,i2}H_{12}(\tilde{s}) \\ \tilde{\theta}_k &= \frac{\partial}{\partial s_i} \tilde{w}_k(s_i) \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_k \int \delta V_k \left(p_{icy} \left(v_{3k}^{x\eta\xi} \cos(\alpha_i) - w_{3k}^{x\eta\xi} \sin(\alpha_i) \right) \right) + \\ &\quad + \delta V_k \left(p_{icz} \left(v_{3k}^{x\eta\xi} \sin(\alpha_i) + w_{3k}^{x\eta\xi} \cos(\alpha_i) \right) \right) dx \end{aligned} \quad (3.59)$$

Gli spostamenti $v_{k,3}, w_{k,3}$ del nodo ③ nel sistema xyz possono essere ottenuti da $v_{k3}^{x\eta\xi}, w_{k3}^{x\eta\xi}$ dalla rotazione degli assi [angolo α_i]:

$$\begin{cases} v_{k3} &= v_{k3}^{x\eta\xi} \cos(\alpha_i) - w_{k3}^{x\eta\xi} \sin(\alpha_i) \\ w_{k3} &= v_{k3}^{x\eta\xi} \sin(\alpha_i) + w_{k3}^{x\eta\xi} \cos(\alpha_i) \end{cases} \quad (3.60)$$

Il vettore \mathbf{P}_C diventa di conseguenza:

$$\mathbf{P}_C = [\mathbf{P}_{C1}^T \dots \mathbf{P}_{Ck}^T \dots \mathbf{P}_{CN}^T]^T \text{ being } \mathbf{P}_{C,k} = \begin{bmatrix} 1/2 L (p_{icy} v_{k,3} + p_{icz} w_{k,3}) \\ 1/12 L^2 (p_{icy} v_{k,3} + p_{icz} w_{k,3}) \\ 1/2 L (p_{icy} v_{k,3} + p_{icz} w_{k,3}) \\ -1/12 L^2 (p_{icy} v_{k,3} + p_{icz} w_{k,3}) \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Si è quindi ottenuto il sotto-vettore $\mathbf{P}_{C,k}$ dei carichi nodali equivalenti di dimensioni $[4 \times 1]$ riferito al k -esimo modo.

Capitolo 4

La procedura di Cross Section Analysis

La cross-section analysis è la procedura di calcolo attraverso cui si ricavano una serie di costanti di legame costitutivo che caratterizzano la sezione oggetto di studio, grazie a queste è possibile risolvere un problema strutturale tramite la formulazione GBT.

La determinazione delle costanti di legame è connessa alla descrizione modale che viene fatta sulla cinematica della sezione.

Data l'ipotesi cinematica generale assunta per la GBT, equazioni 3.1-3.3 , la cross-section analysis ha prima di tutto la funzione di definire la cinematica della sezione trasversale attraverso l'individuazione delle terne di funzioni $[\varphi_{ki}, f_{ki}, g_{ki}]$, le quali definiscono le *forme modali* nelle loro tre componenti di spostamento rispetto al sistema locale della parete.

La scelta delle forme modali viene effettuata secondo dei criteri precisi che si basano su delle ipotesi atte a caratterizzare una certa 'classe' di modi.

Si definisce **classe** un insieme di modi (o forme modali) caratterizzati dall'avere una stessa ipotesi cinematica di partenza per la sezione in oggetto.

Operativamente per individuare una classe di modi si devono fare quindi delle assunzioni di base sulla cinematica della sezione, dopo di che si effettua

invece una procedura standard che si distingue per ogni classe modale.

La procedura consente di individuare tutti i modi appartenenti a quella classe e consiste solitamente nell'imporre uno spostamento unitario in un certo numero di nodi naturali o intermedi sulla sezione. Le modalità di applicazione dello spostamento unitario e l'individuazione della configurazione deformata associata alla sezione trasversale dipendono dalla classe che si sta analizzando.

Gli spostamenti unitari saranno comunque applicati su nodi posizionati sulla linea media della sezione, per questo l'intera procedura è eseguita a coordinata locale $n = 0$ ed x arbitraria.

Solitamente si definiscono gli spostamenti $[u(s), v(s), w(s)]$ come terna di componenti di spostamento in funzione della sola ascissa curvilinea s e corrispondente alla terna di spostamenti locali della parete $[d_x(x, s, n), \xi(x, s, n), \eta(x, s)]$.

In definitiva la terna di funzioni $[\varphi_{ki}, f_{ki}, g_{ki}]$ che si vuole individuare è quella rappresentata delle configurazioni deformate ottenute imponendo lo spostamento unitario scelto per quel dato modo, appartenente ad una data classe. Queste deformate sono le *forme modali* che si utilizzeranno nel definire l'ipotesi cinematica fondamentale della GBT.

L'obiettivo primario della cross-section analysis è però quello di ricavare i coefficienti di legame che caratterizzano la sezione e che consentono di risolvere l'equazione fondamentale della GBT (eq. 3.38). Per questo l'operazione più importante dell'intera procedura è quella di ricavare le costanti costitutive, il che si traduce nel calcolo delle componenti delle matrici dei coefficienti **A**, **B** e **G**.

All'interno di questo capitolo si illustra come deve essere eseguita una procedura di *Cross-Section Analysis*, quali sono i passi fondamentali da compiere e quale è il loro significato.

1 I modi deformativi

Viene ora illustrata la procedura di Cross-Section Analysis per i modi deformativi previsti dalla GBT ‘moderna’ descritta da D.Camotim e N.Silvestre [10]. La teoria moderna è una estensione di quella originaria divulgata da Richard Schardt, infatti essa, tramite l’assunzione di un numero maggiore di modi deformativi, permette la creazione di una cinematica della sezione trasversale più ricca.

Si possono definire due distinte famiglie di modi deformativi, chiamate rispettivamente:

- Fundamental modes (FM);
- Shear modes (SM).

Fundamental Modes FM

I *Fundamental Modes* sono quella famiglia di modi che fu originariamente considerata da Schardt quando egli pose le fondamenta per costruire la formulazione della Generalized Beam Theory.

Gli FM sono quindi l’anima della GBT e sono basati sulla ipotesi di Vlasov di trascurare la deformazione a taglio nel piano medio della sezione ($\gamma_{xs} = 0$). Tutti i modi FM prevedono l’assenza di deformazioni a taglio della sezione.

Questi modi possono essere divisi in due *classi* a seconda dello spostamento imposto da cui derivano. Le classi degli FM sono:

- modi FM_x : derivanti da uno spostamento imposto di warping $u = 1$;
- modi FM_f : derivanti da uno spostamento flessionale $w = 1$, ortogonale alla parete.

Shear Modes SM

Gli *Shear Modes* sono i cosiddetti ‘modi a taglio’, essi solo recentemente sono stati incorporati all’interno della GBT in quanto si riteneva che l’influenza della deformazione a taglio, per i casi del primo ordine e di stabilità lineare delle membrature in parete sottile, fosse trascurabile.

I modi SM al contrario di quelli fondamentali violano le assunzioni di Vlasov, perciò la loro determinazione si basa su differenti ipotesi.

Si identifica un solo gruppo di forme modali per i modi ‘a taglio’, esso è detto classe dei modi SM_x .

Questa classe comprende una tipologia di modi caratterizzati da componenti di spostamento nel piano $v(s)$ e $w(s)$ nulle, con solo componente di warping $u(s)$ diversa da zero.

I modi SM_x rispettano le ipotesi della teoria di Capurso [5] ed è interessante vedere come la GBT tenga conto di questa classe in relazione con i modi fondamentali.

Si analizzano ora nel dettaglio le tre tipologie di classi di modi deformativi sopra citate. Nell’ordine si riportano:

- classe FM_x ;
- classe SM_x ;
- classe FM_f .

Viene illustrata, per ogni classe, la procedura operativa di derivazione delle singole forme modali, in più si indicano le specializzazioni che assumono le espressioni delle componenti delle matrici dei coefficienti.

1.1 La classe dei modi FM_x (modi alla Schardt)

1.1.1 Determinazione delle forme modali FM_x

I modi FM_x (detti anche modi "alla Schardt") sono l'essenza della GBT e sono caratterizzati dall'aver tutte le componenti di spostamento $u(s)$, $v(s)$ e $w(s)$ non nulle.

Le forme modali si ottengono dall'imposizione di un warping unitario ($u = 1$) in corrispondenza di ogni nodo naturale tenendo in conto delle relazioni geometriche basate sulle ipotesi di Vlasov [1]: la deformazione a taglio sulla superficie media della sezione è nulla.

In base a quanto detto si ha quindi per ipotesi che:

1. la funzione di warping φ_{ki} sarà lineare a tratti lungo la linea media, con valore unitario sul k -esimo nodo e zero su tutti gli altri nodi naturali;
2. lo scorrimento a taglio nel piano medio dovrà essere nullo: $\gamma_{xs} = 0$.

Per ricavare i modi FM_x si deve quindi seguire la seguente procedura per ogni modo k :

- determinazione della funzione φ_{ki} per ogni parete: si pone $\varphi_{ki}(s_i) = 0$ se il nodo k -esimo non appartiene alla i -esima parete, $\varphi_{ki}(s_i) = s_i/l_i$ se il k -esimo nodo è in ordine il secondo della i -esima parete e infine $\varphi_{ki}(s_i) = 1 - s_i/l_i$ se il k -esimo nodo è il primo della i -esima parete;
- dall'ipotesi di deformazione al taglio nulla tenendo conto dalla equazione 3.14 si ha:

$$\gamma_{xs} = (\dot{\varphi}_{ki} + g_{ki}) V_k' = 0 \rightarrow g_{ki} = -\dot{\varphi}_{ki} \quad (4.1)$$

per cui si ottiene una funzione g_{ki} costante se il k -esimo nodo appartiene alla i -esima parete, altrimenti è nulla.

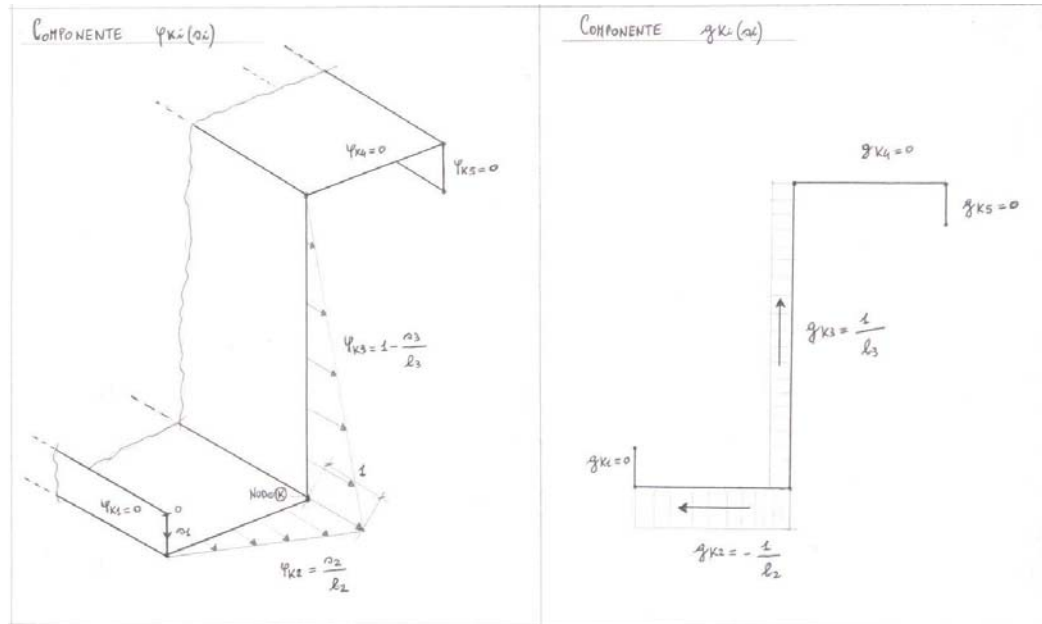


Figura 4.1: Rappresentazione delle funzioni φ_k e g_k sulla sezione per il k -esimo modo

- ricavata la funzione $g_{ki}(s_i)$ per ogni parete, la posizione di tutti i nodi naturali nella configurazione deformata è nota. L'unica componente di spostamento ancora incognita è la funzione $f_{ki}(s_i)$, essa la si ritrova risolvendo il *telaio piano* composto dalle pareti della sezione assumendo come ipotesi l'andamento della funzione g_{ki} sulle pareti come al punto precedente.

In definitiva si avranno quindi tanti modi FM_x quanti sono i nodi naturali della sezione oggetto di studio.

Per ricavare il generico modo k , seguendo la procedura appena descritta, si dovrà quindi costruire l'andamento della funzione $\varphi_k(s)$ e conseguentemente derivare la funzione $g_k(s)$ sulle pareti della sezione.

Dalla definizione del campo di spostamenti nelle componenti φ_k e g_k , che come già detto risulteranno rispettivamente lineare a tratti e costante sulle

pareti della sezione, si derivano gli spostamenti dei nodi naturali e di conseguenza le condizioni al contorno da applicare al telaio piano composto dalla linea media della sezione trasversale.

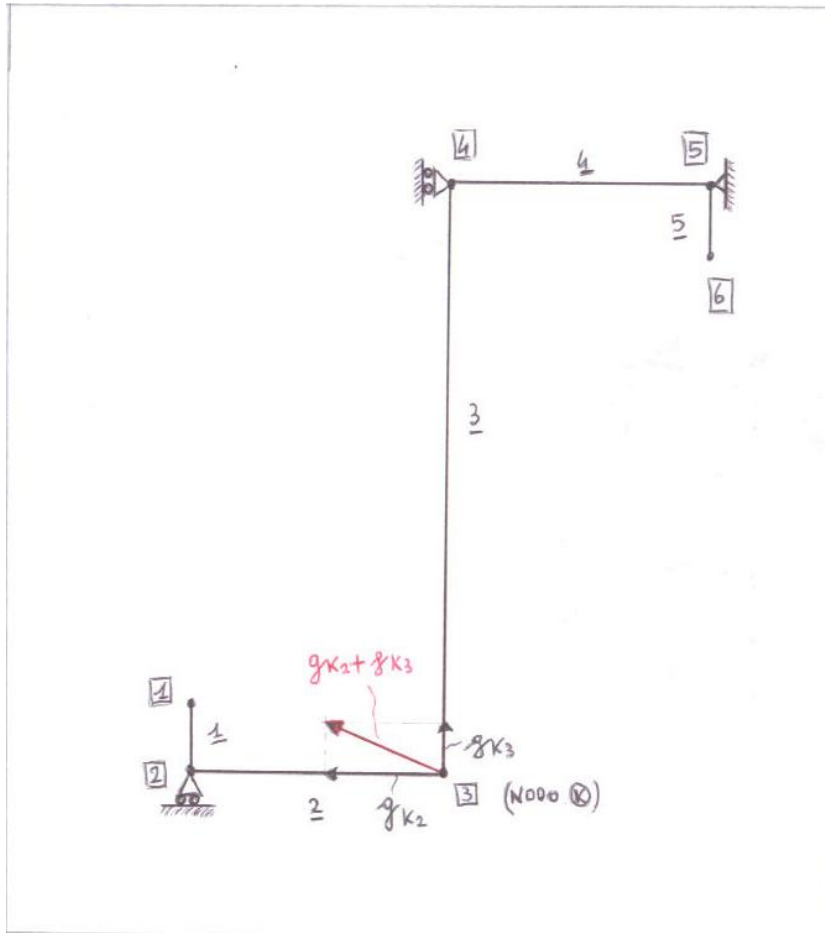


Figura 4.2: Condizioni di vincolo sul telaio costituito dalla linea media della sezione per il k -esimo modo

Il modo k -esimo lo si ritrova risolvendo il telaio piano soggetto agli spostamenti imposti sui nodi naturali e dettati dalla distribuzione della componente g_k sulle pareti. In figura 4.3 vi è rappresentata la deformata del telaio sogget-



Figura 4.3: Forma del modo k -esimo di classe FM_x

to alle condizioni al contorno in figura 4.2: si può notare come la componente di spostamento $f_{ki}(s_i)$ possa avere un andamento al più cubico lungo le pareti della sezione.

Al fine di ritrovare tutte le forme modali relative ai modi FM_x , la procedura di costruzione del modo k -esimo appena illustrata deve essere ripetuta per un numero di volte pari al numero di nodi naturali.

Si puntualizza che, chiaramente, dall'operazione di risoluzione del telaio piano come un sistema di aste non si arriva ad ottenere direttamente l'andamento delle funzioni polinomiali $[\varphi_{ki}(s), f_{ki}(s), g_{ki}(s)]$, ma al contrario si ottengono delle componenti di spostamento *nodali* che sono espresse nel riferimento globale (X, Y, Z) .

Questo significa che la k -esima forma modale trovata risulterà identificata analiticamente da una matrice $\mathbf{D}_{[FM_x]}(k)$ contenente tutte le componenti degli spostamenti nodali globali (tre componenti: U, V, W + una rotazione nel

piano: ϑ_x) riferite ai nodi con cui è stata discretizzata la sezione.

Per ricavare quindi le espressioni delle componenti di spostamento locali $[\varphi_{ki}(s), f_{ki}(s), g_{ki}(s)]$ è necessario compiere due operazioni:

- trasformare le componenti di spostamento globali U, V, W , relative ai nodi iniziale e finale della i -esima parete, in componenti di spostamento locali u, v, w tramite le seguenti espressioni derivate dalle equazioni 3.4-3.6.

$$u_{k,i} = U_{k,i} \quad (4.2)$$

$$v_{k,i} = V_{k,i} \cos \alpha_i - W_{k,i} \sin \alpha_i \quad (4.3)$$

$$w_{k,i} = V_{k,i} \sin \alpha_i + W_{k,i} \cos \alpha_i \quad (4.4)$$

- interpolare poi i valori delle componenti u, v, w nel nodo iniziale e finale della i -esima parete con una funzione che rispetti le ipotesi cinematiche per la classe FM_x , ovvero utilizzando funzioni:

- *hermitiane* sulla parete per ottenere la componente $f_{ki}(s)$;
- *lineari* sulla parete per ottenere la componente $\varphi_{ki}(s)$;
- *costanti* sulla parete per ottenere la componente $g_{ki}(s)$;

Per maggiori dettagli sull'operazione di deduzione delle componenti di spostamento $[\varphi_{ki}(s), f_{ki}(s), g_{ki}(s)]$ tramite funzioni di interpolazione si rimanda al paragrafo 4.

1.1.2 Determinazione delle sotto-matrici dei coefficienti per gli FM_x

La procedura di Cross-Section Analysis si deve poi completare con il calcolo delle matrici dei coefficienti attraverso le equazioni 3.39-3.41. Per la classe dei

modi FM_x , viste le caratteristiche delle forme modali sopra esposte, queste equazioni possono essere semplificate e riscritte come indicato di seguito:

$$A_{ikj} = \int \frac{t_i^3}{12} C_{11}^{(f)} \dot{f}_{ik} \dot{f}_{ij} ds_i + \int t_i C_{11}^{(m)} \varphi_{ik} \varphi_{ij} ds_i \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} B_{ikj} &= B_{ikj}^{(2)} + B_{ijk}^{(2)} - B_{ikj}^{(1)} = \\ &= \int \frac{t_i^3}{12} C_{12}^{(f)} [f_{ij} \ddot{f}_{ik} + f_{ik} \ddot{f}_{ij}] ds_i - \int \frac{t_i^3}{3} C_{33}^{(f)} \dot{f}_{ik} \dot{f}_{ij} ds_i \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$G_{ikj} = \int \frac{t_i^3}{12} C_{22}^{(f)} \ddot{f}_{ik} \ddot{f}_{ij} ds_i \quad (4.7)$$

Le espressioni 4.5-4.7 forniscono le componenti delle matrici dei coefficienti relative alla interazione tra il modo k -esimo e quello j -esimo per la i -esima parete considerata.

Nel caso della classe FM_x , dato n il numero dei nodi naturali della sezione, i modi da considerare saranno anch'essi di numero pari ad n e le sotto-matrici dei coefficienti **A**, **B** e **G** per la classe in esame saranno di dimensione $[n \times n]$.

1.1.3 Tabella riassuntiva per i modi FM_x

Si indichino con NN il numero dei nodi naturali su di una sezione e con IN il numero il numero di nodi intermedi complessivo presenti sulle pareti. Nella seguente tabella vengono riassunte le caratteristiche dei modi appartenenti alla classe FM_x .

FM_x	
Numero di modi	NN
Imposizione dello spostamento unitario	$u_k = 1 \rightarrow \varphi_k = 1$ (NN)
Ipotesi	Vlasov ($\gamma_{xs} = 0$) $g_{ki} = -\dot{\varphi}_{ki} \forall i$
Campo di spostamenti	$\varphi_k(s) \in P_1$ $g_k(s) \in P_0$ $f_k(s) \in P_3$

Tabella 4.1: *Caratteristiche dei modi della classe FM_x*

1.2 La classe dei modi SM_x (modi alla Capurso)

1.2.1 Determinazione delle forme modali SM_x

I modi SM_x sono basati sull'assunzione che la componente di spostamento $v(s)$ sia nulla su tutto il dominio della sezione, comportando così il solo evolvere di warping $u(s)$ e di spostamento trasversale $w(s)$.

In realtà questa classe di modi si ottiene imponendo uno spostamento unitario pari a $u = 1$ su tutti i nodi naturali ed intermedi, tenendo poi in considerazione l'ipotesi di $v(s) = 0$ si può constatare che vi sarà anche assenza di spostamento flessionale $w(s)$, questo perchè l'imposizione di un warping lineare sulla linea media non implica spostamenti nel piano.

La classe SM_x prevede quindi dei modi che presentano le seguenti caratteristiche:

- la componente di warping φ_{ki} è unitaria sul k -esimo nodo considerato e poi nulla su tutti gli altri, la funzione $\varphi_{ki}(s)$ sarà quindi lineare a tratti;
- la sezione nel proprio piano non si deforma mai, si avranno le componenti $g_{ki}(s)$ e $f_{ki}(s)$ sempre nulle su ogni parete.

La procedura per ricavare i modi SM_x non prevede la risoluzione del telaio piano composto dalla linea media della sezione trasversale, questo perchè le ipotesi iniziali che definiscono la classe di modi individuano a priori già tutti gli andamenti delle componenti di spostamento.

L'applicazione dello spostamento unitario $u = 1$ deve essere fatto ogni volta su un nodo naturale o intermedio, il numero di modi totale che si ottiene sarà quindi pari al numero di nodi naturali più quelli intermedi.

Si rappresenta graficamente di seguito una forma modale nelle sue componenti di spostamento dentro e fuori il piano della sezione.

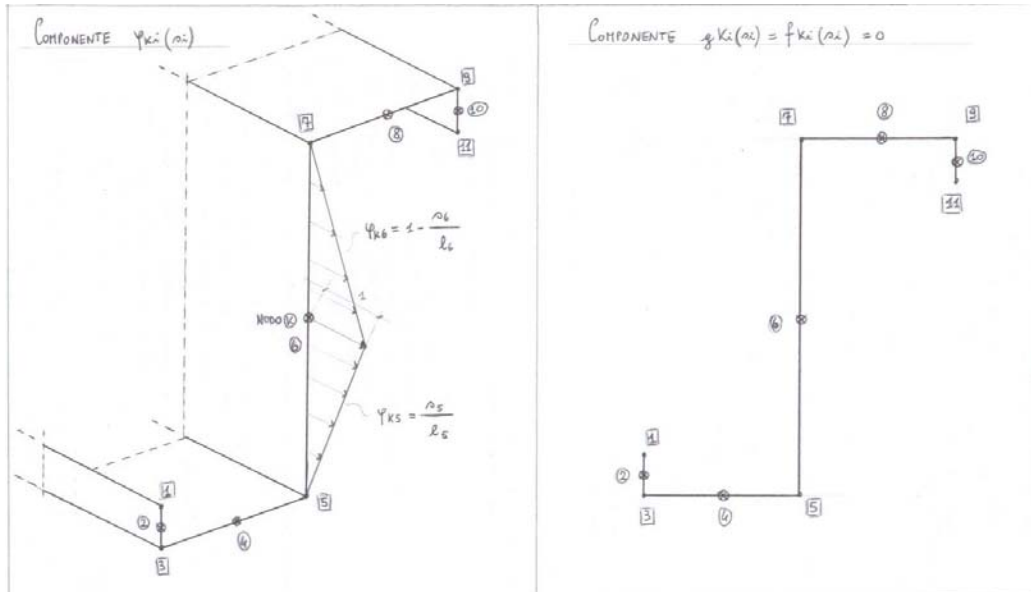


Figura 4.4: Componenti di spostamento fuori dal piano (sx) e nel piano (dx) per il modo k -esimo di classe SM_x

La figura 4.4 mette in evidenza la sola componente di spostamento non nulla prevista per i modi SM_x , essa è definita con andamento lineare a tratti sulle pareti della sezione.

Questa procedura di costruzione del modo k -esimo deve essere ripetuta per ogni modo facente parte della classe SM_x : la k -esima forma modale trovata risulterà identificata analiticamente da una matrice contenente le componenti degli spostamenti nodali (tre componenti più la rotazione nel piano di ogni nodo) riferite ai nodi con cui è stata discretizzata la sezione, ovvero ai nodi naturali più quelli intermedi presenti.

La matrice che contiene gli spostamenti nodali (in riferimento globale X, Y, Z) per il modo k -esimo è chiamata $\mathbf{D}_{[SM_x]}(k)$, si otterranno tante di queste matrici quanto è il numero di modi da individuare.

Le forme modali SM_x vengono dette anche modi "alla Capurso" in quanto

rispettano le ipotesi della teoria omonima per le quali è prevista deformazione a taglio nel piano medio della sezione ma non "section distortion".

1.2.2 Determinazione delle sotto-matrici dei coefficienti per gli SM_x

La procedura di Cross-Section Analysis prevede poi il calcolo delle matrici dei coefficienti attraverso le equazioni 3.39-3.41. Per la classe dei modi SM_x , viste le caratteristiche delle forme modali appena esposte, queste equazioni possono essere semplificate e riscritte come indicato di seguito.

$$A_{ikj} = \int t_i C_{11}^{(m)} \varphi_{ik} \varphi_{ij} ds_i \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} B_{ikj} &= B_{ikj}^{(2)} + B_{ijk}^{(2)} - B_{ikj}^{(1)} = \\ &= - \int t_i C_{33}^{(m)} \dot{\varphi}_{ik} \dot{\varphi}_{ij} ds_i \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$G_{ikj} = 0 \quad (4.10)$$

Le equazioni 4.8-4.10 forniscono le componenti delle matrici dei coefficienti relative alla interazione tra il modo k -esimo e quello j -esimo per la i -esima parete considerata.

Si può notare come le componenti della matrice \mathbf{G} siano per definizione sempre nulle quando si riferiscono ad un modo appartenente alla classe dei modi alla Capurso, infatti le funzioni $g_{ki}(s)$ e $f_{ki}(s)$ sono entrambe nulle. Nel caso della classe SM_x , dato n il numero dei nodi naturali ed m il numero dei nodi intermedi individuati dalla discretizzazione della sezione, i modi da considerare saranno di numero pari ad $n + m$ e le sotto-matrici dei coefficienti \mathbf{A} e \mathbf{B} per la classe in esame saranno di dimensione $[(n + m) \times (n + m)]$ (con $\mathbf{G} = \mathbf{0}$).

1.2.3 Tabella riassuntiva per i modi SM_x

Si indichino con NN il numero dei nodi naturali su di una sezione e con IN il numero il numero di nodi intermedi complessivo presenti sulle pareti. Nella seguente tabella vengono riassunte le caratteristiche dei modi appartenenti alla classe SM_x .

SM_x	
Numero di modi	$NN + IN$
Imposizione dello spostamento unitario	$u_k = 1 \rightarrow \varphi_k = 1$ $(NN + IN)$
Ipotesi	$g_{ki}(s_i) = 0 \forall i$
Campo di spostamenti	$\varphi_k(s) \in P_1$ $g_k(s)$ nulla $f_k(s)$ nulla

Tabella 4.2: *Caratteristiche dei modi della classe SM_x*

1.3 La classe dei modi FM_f (modi flessionali)

1.3.1 Determinazione delle forme modali FM_f

La classe FM_f si discosta alquanto da quello che era la "pura essenza" della GBT di Schardt. Le caratteristiche principali di questi modi sono l'assenza della componente di warping nelle deformate modali e l'associazione di ogni modo FM_f ad una inflessione trasversale delle pareti che compongono la sezione trasversale.

Si considera che l'unica componente di spostamento non nulla delle deformate modali sia la $w(s)$, che nel riferimento locale della parete i -esima per il k -esimo modo è la funzione $f_{ki}(s)$. Di conseguenza si ha che le restanti componenti di spostamento sono nulle quale che sia il valore dell'ascissa curvilinea s , ovvero si ha che $u(s) = v(s) = 0$.

Queste ultime considerazioni, alla luce di quanto detto per i modi FM_x , consentono di affermare che anche per la classe FM_f le ipotesi di Vlasov ($\gamma_{xs} = 0$) sono banalmente soddisfatte.

La procedura per ottenere i modi FM_f è quindi la seguente:

- Si impongono le componenti di spostamento $u(s)$ e $v(s)$ pari a zero su tutto il loro dominio. Le condizioni al contorno su tutta la sezione vengono perciò ad essere $\varphi_{ki} = g_{ki} = 0$.
- Si risolve il telaio piano costituito dalla sezione trasversale imponendo per ogni modo uno spostamento unitario $w = 1$ ogni volta su un diverso *nodo intermedio* presente sulla linea media, mentre su tutti gli altri nodi, naturali ed intermedi, si pone w nullo.

La cross-section analysis per la classe FM_f porta ad individuare tanti modi quanti sono i nodi intermedi sulle pareti della sezione.

Ogni modo k è individuato da una deformata ottenuta risolvendo un telaio

i cui nodi sono tutti bloccati nel piano a parte il k -esimo nodo intermedio, al quale è applicato uno spostamento unitario ortogonale alla parete i -esima:

$$f_{ki} = 1.$$

Nelle figure seguenti vengono riportate condizioni di vincolo del telaio per una sezione arbitraria e la conseguente forma modale.

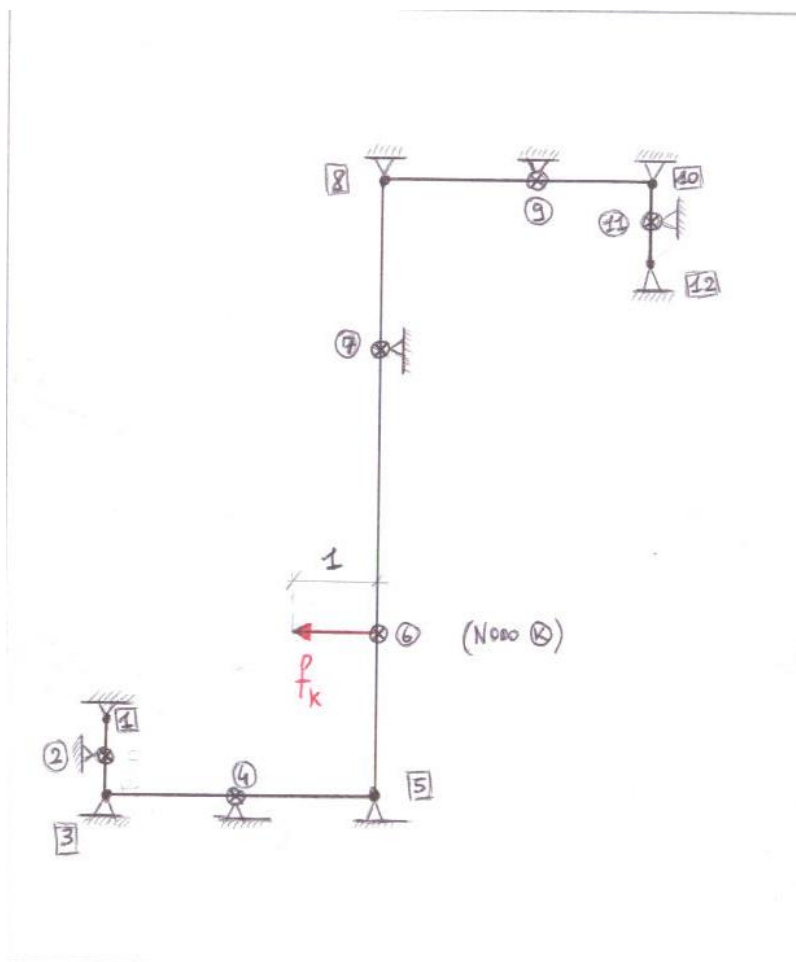


Figura 4.5: Condizioni di vincolo sul telaio costituito dalla linea media della sezione per il k -esimo modo

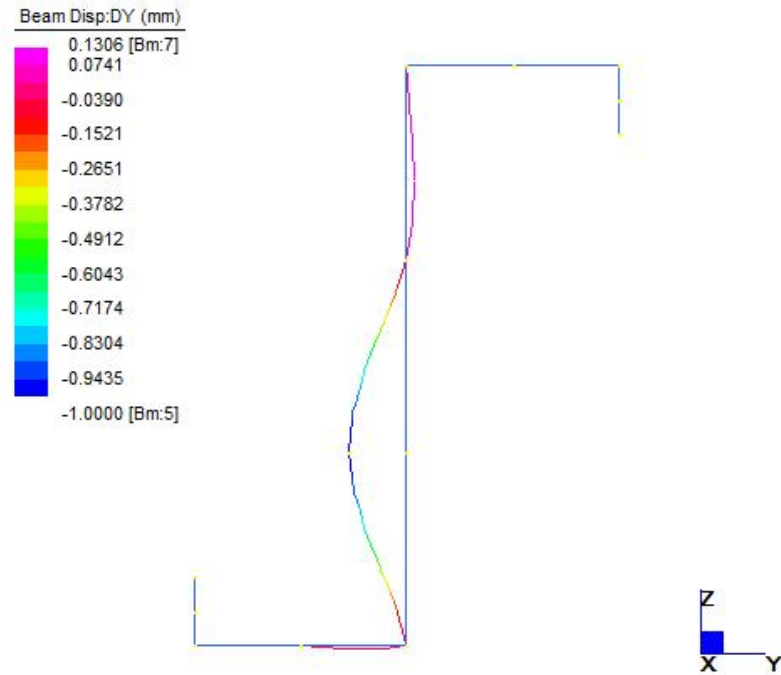


Figura 4.6: Forma del modo k -esimo di classe FM_f

Dalla figura 4.6 è possibile notare come la componente di spostamento incognita $f_{ki}(s_i)$, ricavata mediante la risoluzione del telaio piano, abbia un andamento al più cubico sulle pareti della sezione.

Questa procedura di costruzione del modo k -esimo deve essere ripetuta per ogni modo facente parte della classe FM_f : la k -esima forma modale trovata risulterà identificata analiticamente da una matrice contenente le componenti degli spostamenti nodali (tre componenti più la rotazione nel piano di ogni nodo) riferite ai nodi con cui è stata discretizzata la sezione, ovvero ai nodi naturali più quelli intermedi presenti.

La matrice che contiene gli spostamenti nodali (in riferimento globale X, Y, Z) per il modo k -esimo è chiamata $\mathbf{D}_{[FM_f]}(k)$, si otterranno tante di queste matrici quanto è il numero di modi da individuare.

1.3.2 Determinazione delle sotto-matrici dei coefficienti per gli FM_f

Per la classe dei modi FM_f , viste le caratteristiche delle forme modali sopra esposte, le equazioni 3.39-3.41 possono essere semplificate e riscritte come indicato di seguito.

$$A_{ikj} = \int \frac{t_i^3}{12} C_{11}^{(f)} f_{ik} f_{ij} ds_i \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} B_{ikj} &= B_{ikj}^{(2)} + B_{ijk}^{(2)} - B_{ikj}^{(1)} = \\ &= \int \frac{t_i^3}{12} C_{12}^{(f)} [f_{ij} \ddot{f}_{ik} + f_{ik} \ddot{f}_{ij}] ds_i - \int \frac{t_i^3}{3} C_{33}^{(f)} \dot{f}_{ik} \dot{f}_{ij} ds_i \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$G_{ikj} = \int \frac{t_i^3}{12} C_{22}^{(f)} \ddot{f}_{ik} \ddot{f}_{ij} ds_i \quad (4.13)$$

Le equazioni 4.11-4.13 rappresentano le componenti delle matrici dei coefficienti relative alla interazione tra il modo k -esimo e quello j -esimo per la i -esima parete considerata.

Nel caso della classe FM_f , dato n il numero dei nodi naturali ed m il numero dei nodi intermedi della sezione, i modi da considerare saranno di numero pari ad m e le sotto-matrici dei coefficienti **A**, **B** e **G** per la classe in esame saranno di dimensione $[m \times m]$.

1.3.3 Tabella riassuntiva per i modi FM_f

Si indichino con NN il numero dei nodi naturali su di una sezione e con IN il numero il numero di nodi intermedi complessivo presenti sulle pareti. Nella seguente tabella vengono riassunte le caratteristiche dei modi appartenenti alla classe FM_f .

FM_f	
Numero di modi	IN
Imposizione dello spostamento unitario	$w_k = 1 \rightarrow f_k = 1$ (IN)
Ipotesi	$\varphi_{ki}(s_i) = g_{ki}(s_i) = 0 \forall i$
Campo di spostamenti	$\varphi_k(s)$ nulla $g_k(s)$ nulla $f_k(s) \in P_3$

Tabella 4.3: *Caratteristiche dei modi della classe FM_f*

2 Proprietà meccaniche e modali

Si è visto fino ad ora che attraverso una procedura di *cross-section analysis* è possibile ricavare delle forme modali definendo essenzialmente dei cinematici della sezione, i quali si raggruppano in diverse classi basate su certe ipotesi cinematiche comuni.

La definizione di una deformata modale, operativamente, si traduce nell'individuare i valori delle componenti di spostamento relativi ad ogni nodo naturale ed intermedio della sezione. La forma modale k -esima è quindi descritta da componenti di spostamento nodali che vengono raccolte in forma matriciale all'interno di $\mathbf{D}_{[class]}(k)$.

Lo step successivo consiste invece nel determinare la terna di funzioni $[\varphi_{ki}, f_{ki}, g_{ki}]$, per ogni k -esimo modo ed i -esima parete della sezione, e conseguentemente calcolare le componenti delle matrici dei coefficienti attraverso le espressioni 3.39 - 3.41.

Ricavate le matrici dei coefficienti \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{G} relative all'interazione tra modi di una data classe, si vogliono ora calcolare anche i coefficienti di interazione tra modi appartenenti a due classi differenti. Si analizzano poi le proprietà modali e meccaniche che sono intrinseche nel formalismo della teoria generalizzata GBT mettendo in evidenza il significato 'fisico-meccanico' che è possibile dare ad alcuni modi.

2.1 Base spettrale dello spazio dei modi

Dallo studio delle matrici dei coefficienti relative ad una data classe di modi si può notare che, a parte qualche rara eccezione, le componenti di questi tensori sono solitamente non-nulle.

Questa caratteristica comporta quindi che il sistema di equazioni differenziali che governa il problema, definito attraverso l'equazione fondamentale della GBT (eq. 3.38), sia fortemente accoppiato.

L'accoppiamento delle equazioni differenziali complica alquanto la risoluzione del sistema e limita perciò la sintetica formulazione della Generalized Beam Theory.

Al fine quindi di cogliere tutti i vantaggi dati dalla potenzialità della GBT e di dare luce al significato fisico delle matrici \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{G} , la *base canonica* di coordinate, rispetto alla quale sono riferite le matrici dei coefficienti, deve essere cambiata in modo che le stesse matrici diventino simultaneamente *diagonali*.

Per definire questo cambio di coordinate si devono risolvere dei **problemi generalizzati agli autovalori** che interessano le sotto-matrici dei coefficienti riferite alle singole classi di modi così come calcolate nei paragrafi 1.1.2, 1.2.2, 1.3.2.

I problemi agli autovalori da risolvere saranno uno per ogni classe di modi, quindi ve ne saranno tre differenti in totale (vedi *step n.2* della tabella 4.4). La procedura con la quale si risolvono gli "eigenvalue problem" è detta **diagonalizzazione** dei modi di deformazione della sezione. Eseguita questa procedura si possono poi riscrivere le sotto-matrici dei coefficienti per quella data classe di modi in *forma diagonale*, ovvero con tutte le componenti fuori dalla diagonale principale nulle.

La soluzione dei tre problemi agli autovalori porta alla identificazione di un set di *autovettori* \mathbf{a}_k che rappresentano dei modi deformativi della sezione trasversale "ortogonali" tra di loro.

Gli autovettori \mathbf{a}_k , che possono essere raccolti nelle colonne di una matrice $\mathbf{\Lambda}$,

costituiscono quindi una *base spettrale* dello spazio vettoriale dei modi appartenenti alla classe considerata. Se ora si opera cambiando base allo spazio in cui sono definite le sotto-matrici di classe **A**, **B** e **G**, assumendo quella *spettrale* appena ritrovata, si ottengono le stesse sotto-matrici dei coefficienti relative a quella data classe in forma diagonale, si sono cioè diagonalizzate le matrici dei coefficienti.

L'operazione di cambiamento di base delle sotto-matrici è visualizzato allo *step n.3* della tabella 4.4.

Le sotto-matrici relative all'interazione tra due modi della stessa classe si possono sempre diagonalizzare grazie all'assunzione della base spettrale, mentre le sotto-matrici relative all'interazione tra due modi di classe diversa, ovvero "miste", non possono essere ridotte in forma diagonale.

Come indicato allo *step n.4* della tabella 4.4, il calcolo delle sotto-matrici miste si esegue solo a posteriori, dopo aver risolto i problemi agli autovalori per ogni classe.

Quello che si deve eseguire in questo caso consiste nel calcolo delle matrici dei coefficienti attraverso le formule generali 3.39 - 3.41 dove le funzioni di spostamento locale $[\varphi_{ki}, f_{ki}, g_{ki}]$ non sono quelle ottenute direttamente dalla cross-section analysis, ma sono state riscritte secondo la base spettrale della classe a cui appartiene il modo k -esimo.

Date le basi spettrali, è necessario allora ricavare le matrici degli spostamenti nodali per ogni modo modificati dopo la diagonalizzazione, si devono cioè riscrivere le deformate modali secondo la nuova base dello spazio assunta per definire la deformazione della sezione.

L'operazione da eseguire, dati gli indici di modo ' i ' e ' j ' compresi tra 1 ed il numero dei modi n , appartenenti ad una data classe $[class]$, è la seguente:

$$\mathbf{D}_{[class]}^*(j) = \sum_{i=1}^n \mathbf{D}_{[class]}(i) \cdot \mathbf{\Lambda}(i, j) \quad (4.14)$$

dove:

- la matrice $\mathbf{D}_{[class]}^*(j)$ raccoglie gli spostamenti nodali del modo j -esimo appartenente alla classe $[class]$ dopo la diagonalizzazione;
- la matrice $\mathbf{D}_{[class]}(i)$ raccoglie gli stessi spostamenti nodali della matrice precedente ma riferiti ai modi non diagonalizzati;
- la matrice $\mathbf{\Lambda}$ è la matrice che contiene nelle proprie colonne gli autovettori dello spazio modale per la classe in esame.

Il calcolo delle matrici \mathbf{A}^* , \mathbf{B}^* e \mathbf{G}^* riferite all'interazione tra due modi appartenenti a due classi diverse viene quindi eseguito utilizzando gli spostamenti nodali della matrice \mathbf{D}^* nelle formule generali 3.39-3.41: se ne deduce che le matrici risultanti non presenteranno una forma diagonale.

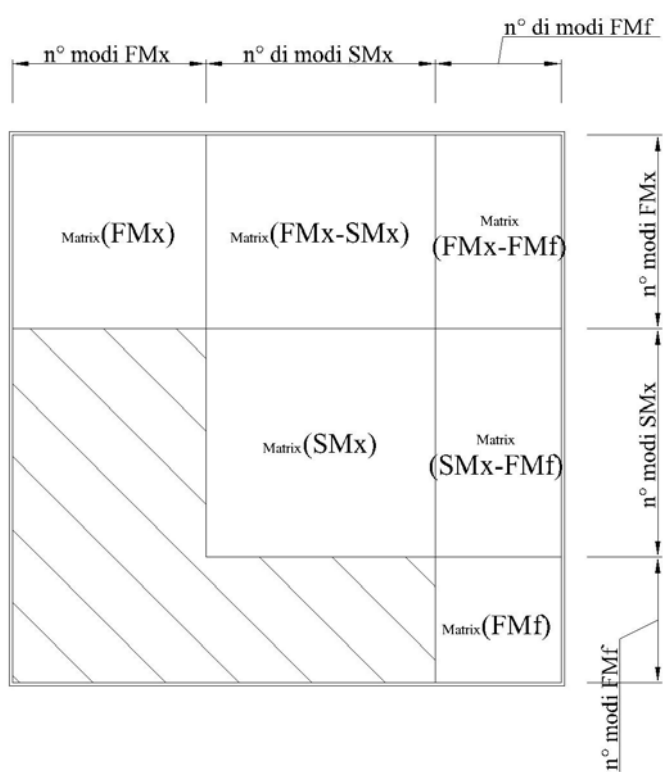
Si ricavano poi le matrici dei coefficienti "complete", esse sono matrici quadrate con numero di righe e colonne pari al numero totale di modi per ogni classe. Queste matrici nascono dall'assemblaggio di tutte le sotto-matrici di interazione \mathbf{A}^* , \mathbf{B}^* e \mathbf{G}^* riferite a modi di due differenti classi e di quelle riferite a modi di una stessa classe.

Scelto un certo ordine per le classi di modi (ad esempio si ordinano prima i modi FM_x , poi gli SM_x e per ultimi gli FM_f) si assemblano quindi le varie sotto-matrici posizionandole in questo modo:

- sulla banda principale della matrice completa si riportano quelle riferite alla specifica classe;

- sulla banda superiore della matrice completa si riportano quelle riferite a modi di due differenti classi (ovvero miste) , in posizione corrispondente alle classi considerate;
- sulla banda inferiore della matrice completa si riportano le stesse sottomatrici miste presenti sulla banda superiore ma trasposte, in modo da rispettare la simmetria della matrice dei coefficienti.

Si ottengono in questo modo le matrici \mathbf{A}^* , \mathbf{B}^* e \mathbf{G}^* complete di tutti i modi assunti nella cross-section analysis dopo la diagonalizzazione (vedi figura 4.7). Le matrici complete \mathbf{A}^* , \mathbf{B}^* e \mathbf{G}^* , per quanto detto precedentemente, non potranno mai avere una forma diagonale.

Figura 4.7: *Assemblaggio delle matrici dei coefficienti complete*

step n.1	<p>Identificazione delle sotto-matrici $\mathbf{A}_{[class]}$, $\mathbf{B}_{[class]}^{(1)}$, $\mathbf{B}_{[class]}^{(2)}$, $\mathbf{B}_{[class]}$ and $\mathbf{G}_{[class]}$ calcolate nella cross-section analysis per ogni classe di modi:</p> <p>”class” = FM_x, oppure SM_x, oppure FM_f</p>
step n.2	<p>Soluzione dei problemi generalizzati agli autovalori (specifici per ogni classe):</p> $FM_x: (\mathbf{G}_{[FM_x]} - \lambda \mathbf{A}_{[FM_x]}) \mathbf{u} = \mathbf{0}$ $SM_x: (\mathbf{B}_{[SM_x]} - \lambda \mathbf{A}_{[SM_x]}) \mathbf{u} = \mathbf{0}$ $FM_f: (\mathbf{G}_{[FM_f]} - \lambda \mathbf{A}_{[FM_f]}) \mathbf{w} = \mathbf{0}$ <p>per ogni classe sono calcolati il vettore degli autovalori $\lambda_{[class]}$ e la matrice degli autovettori $\mathbf{\Lambda}_{[class]}$</p>
step n.3	<p>Calcolo delle matrici $\mathbf{A}_{[class]}$, $\mathbf{B}_{[class]}^{(1)}$, $\mathbf{B}_{[class]}^{(2)}$ e $\mathbf{G}_{[class]}$ nella base spettrale:</p> $\mathbf{A}_{[class]}^* = \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{A}_{[class]} \mathbf{\Lambda}$ $\mathbf{B}_{[class]}^{(1)*} = \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{B}_{[class]}^{(1)} \mathbf{\Lambda}$ $\mathbf{B}_{[class]}^{(2)*} = \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{B}_{[class]}^{(2)} \mathbf{\Lambda}$ $\mathbf{G}_{[class]}^* = \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{G}_{[class]} \mathbf{\Lambda}$
step n.4	<p>Valutazione delle matrici $\mathbf{A}_{[class1-class2]}^*$, $\mathbf{B}_{[class1-class2]}^{(1)*}$, $\mathbf{B}_{[class1-class2]}^{(2)*}$, $\mathbf{B}_{[class]}^* = \mathbf{B}_{[class]}^{(2)*} - \mathbf{B}_{[class]}^{(1)*}$ and $\mathbf{G}_{[class1-class2]}^*$ che tengono conto della interazione tra i modi della classe ”1” ed i modi della classe ”2” nello spazio diagonalizzato.</p>

Tabella 4.4: *Procedura di Diagonalizzazione*

2.2 Significato fisico dei modi FM_x

Come si è detto nella sezione precedente la diagonalizzazione dei modi di deformazione di una sezione trasversale avviene attraverso un problema agli autovalori, definito per ogni classe.

La classe dei modi fondamentali alla Schardt (FM_x) è la classe di modi deformativi per eccellenza, essa è stata l'unica ad essere studiata dallo stesso Richard Schardt ed assume notevole rilevanza rispetto alle altre classi in quanto rappresenta l'originaria essenza unificatrice della GBT.

L'obiettivo di Schardt fu quello di unificare, attraverso l'introduzione dei modi FM_x , le teorie classiche di de Saint Venant e di Vlasov arricchendole di una cinematica più complessa, che potesse sintetizzare in modo chiaro i cinematicismi delle teorie classiche e prevedere in più un meccanismo di *section distortion*.

I modi FM_x infatti furono introdotti e definiti in modo tale che attraverso la diagonalizzazione dei modi stessi, così come prevista dalla cross-section analysis, si possa dare un vero significato fisico-meccanico ad alcune delle "forme modali diagonalizzate".

Dare un significato fisico ai "modi diagonalizzati" si intende associare a questi modi un particolare comportamento della sezione che era previsto e definito già nelle teorie classiche di trave e che, grazie alla formulazione GBT, possono essere trattate unitamente a modi di deformazione di ordine superiore, comprendenti anche la *section distortion*.

A seguito di una particolare normalizzazione degli autovettori della base spettrale (quest'ultima ricavata tramite il problema agli autovalori associato ai modi FM_x) si possono ottenere quindi all'interno del "set" di modi

diagonalizzati i quattro *modi deformativi fondamentali* previsti dalla teoria di d.S.V. .

I primi quattro modi FM_x , ordinati dal punto di vista energetico in base al lavoro di deformazione corrispondente dal più piccolo al più elevato (dati gli *autovalori* associati risultanti ordinati anch'essi in ordine crescente), corrispondono ai casi fondamentali di **sforzo normale**, **momento flettente** attorno all'asse principale di maggior inerzia, **momento flettente** attorno all'asse principale di minor inerzia e **torsione** attorno all'asse longitudinale passate per centro di torsione.

Caratteristica unificatrice della teoria GBT, associata originariamente ai modi FM_x , fu il concetto di *warping functions* alle quali ogni modo k è associato attraverso una distribuzione di deformazioni assiali φ_k con un andamento al più lineare a tratti.

Si avrà quindi che il primo modo di deformazione "diagonalizzato" sarà costituito da una distribuzione uniforme di deformazione assiale sulla sezione trasversale, con la funzione di warping che assumerà un valore unitario $\varphi_k = 1$ in tutti i punti s .

Il modo secondo e terzo, essendo modi a momento flettente, saranno associati ad una funzione di warping e quindi una deformazione lineare attorno ai due assi principali di inerzia. Il quarto modo, essendo associato alla torsione non uniforme, prevede una funzione di warping pari all'andamento dell'area settoriale che riflette la distribuzione della deformazione assiale dovuta al bimomento.

Grazie alla formulazione GBT è poi possibile dimostrare come queste funzioni di warping associate ai primi quattro modi FM_x siano del tutto indipendenti una dall'altra nel caso di analisi al primo ordine, permettendo così lo studio

separato di ogni caso fondamentale (come viene fatto nelle teorie classiche di trave).

Matematicamente questo lo si spiega con la ortogonalità degli autovettori della base spettrale adottata, essi infatti nascono ortogonali dal problema agli autovalori e vi rimangono anche dopo la loro normalizzazione.

$$\int_A \varphi_i \cdot \varphi_k dA = 0 \text{ per } i \neq k \quad (4.15)$$

La formula 4.15 ci dice che la ortogonalità degli autovettori si trasferisce anche alle funzioni di warping φ_k delle deformate modali diagonalizzate. Questo è vero per i modi FM_x in quanto la diagonalizzazione effettuata attraverso la formula 4.14 comporta evidentemente la creazione di una matrice $\mathbf{D}_{[FM_x]}^*(j)$ degli spostamenti nodali le cui componenti di warping corrispondono esattamente ai valori degli autovettori per ogni modo j .

Il significato fisico che si dà quindi ai modi FM_x è quello di contenitore dei casi fondamentali previsti dalla teoria classica di sforzo normale, flessione attorno ai due assi principali e torsione. Nei restanti modi individuati dalla classe stessa, invece, si prendono in considerazione nuovi comportamenti della trave che sono caratterizzati in ogni caso da una *section distortion*.

I modi quindi "distorsivi" presenti nella classe FM_x saranno in numero pari a $NN - 4$, dove NN è il numero totale dei modi della classe pari al quantitativo di nodi naturali presenti sulla sezione trasversale.

Le matrici dei coefficienti dopo la diagonalizzazione $\mathbf{A}_{FM_x}^*$, $\mathbf{B}_{FM_x}^*$ e $\mathbf{G}_{FM_x}^*$, assumeranno di conseguenza un significato fisico, infatti le loro componenti (che costituiscono anche le componenti della matrice costitutiva \mathbf{C} , vedi 3.42) sono le proprietà meccaniche della sezione trasversale e costituiscono per i primi quattro modi rispettivamente: rigidità assiale, rigidità flessionale lungo

gli assi principali e la rigidità o costante di warping (Γ).

Ultima osservazione da farsi è sulla *fundamental beam equation* della GBT, la quale, così come espressa nella equazione 3.38, può essere facilmente vista come una estensione delle equazioni fondamentali dei modi a momento flettente e torcente. Nelle notazioni convenzionali, le equazioni differenziali per il caso di momento flettente attorno ai due assi principali d'inerzia e per il caso di torsione primaria e secondaria sono le seguenti:

- $EI_{yy} \frac{d^4 z}{dx^4} = q_z$
- $EI_{zz} \frac{d^4 y}{dx^4} = q_y$
- $E\Gamma \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - GJ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = m_t$

Si può facilmente notare come queste equazioni siano incluse all'interno della equazione differenziale fondamentale della GBT, ed in particolare, a riguardo dell'ultima equazione per il caso di torsione, è possibile dimostrare come il quarto modo FM_x preveda un cinematismo che deriva puramente dall'associazione di torsione sia primaria (alla D.S.V.) che secondaria (teoria di Vlasov). Per ulteriori dettagli a riguardo vedere l'esempio al paragrafo 1 del capitolo 5.

Si è quindi visto come la diagonalizzazione dei modi di deformazione della sezione porti ad una semplificazione del sistema di equazioni differenziali che reggono il problema della GBT.

Come detto precedentemente essa comporta infatti il disaccoppiamento delle varie equazioni del sistema differenziale. Oltre a questa caratteristica si è anche visto che, dopo il processo di diagonalizzazione, i modi deformativi as-

sumono un particolare significato fisico-meccanico, nello specifico sono stati quindi analizzati i modi della classe FM_x per i quali il significato fisico è familiare e connesso alla conoscenza delle teorie classiche di trave.

Per quel che riguarda invece i modi appartenenti alle classi FM_f ed SM_x la diagonalizzazione porta alla descrizione di forme modali che non sono familiari dal punto di vista teorico in quanto essi saranno in generale dei modi distorsivi.

Una maggiore descrizione delle tecniche usate per ottenere questi risultati ed ulteriori osservazioni a riguardo si possono trovare nelle opere [2],[11].

3 Tabella riassuntiva della procedura di Cross Section Analysis

La seguente tabella 4.5 fornisce una panoramica completa delle ipotesi, dei passi e delle procedure che implicano la performance di una *cross-section analysis*. Per ogni classe, raccolte in quattro colonne, vi sono elencate in riga tutte le caratteristiche generali delle forme modali ed il particolare problema agli autovalori connesso alla classe stessa.

	FM_x	FM_f	SM_x
Numero di modi	NN	IN	$NN + IN$
Imposizione dello spostamento unitario	$\varphi_k = 1$ (NN)	$f_k = 1$ (IN)	$\varphi_k = 1$ $(NN + IN)$
Ipotesi	Vlasov ($\gamma_{xs} = 0$) $g_{ki} = -\dot{\varphi}_{ki} \forall i$	$\varphi_{ki}(s_i) = g_{ki}(s_i) = 0 \forall i$	$g_{ki}(s_i) = 0 \forall i$
Valutazione del campo di spostamenti	$\varphi_k(s) \in P_1$ $g_k(s) \in P_0$ $f_k(s) \in P_3$	$\varphi_k(s)$ nulla $g_k(s)$ nulla $f_k(s) \in P_3$	$\varphi_k(s) \in P_1$ $g_k(s)$ nulla $f_k(s)$ nulla
Problema agli autovalori			
Determinazione dei modi deformativi diagonalizzati	$(\mathbf{G} - \lambda \mathbf{A})\mathbf{u} = \mathbf{0}$	$(\mathbf{G} - \lambda \mathbf{A})\mathbf{w} = \mathbf{0}$	$(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A})\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Tabella 4.5: *Passi e procedure svolte nell'esecuzione della Cross-Section Analysis*

4 Espressione generale delle funzioni φ_{ki} , f_{ki} , g_{ki} per i modi FM ed SM

Si sono precedentemente ricavati i modi per tutte le differenti classi considerate, ora si vuole dare una generalizzazione delle funzioni componenti di spostamento locali $[\varphi_{ki}, f_{ki}, g_{ki}]$ al fine di renderle valide indipendentemente dalla classe di modi considerata.

Data una sezione trasversale in parete sottile, costituita da pareti rettilinee di spessore t_i , si effettua su di essa una certa discretizzazione: le pareti iniziano e finiscono in nodi naturali NN mentre giacciono su di esse alcuni nodi intermedi IN .

Si definiscono un certo numero di "sottopareti" individuate dalla presenza di nodi intermedi IN sulle pareti rettilinee.

Al fine di ottenere la definizione della matrice costitutiva $C_{kj,i}$ attraverso la espressione 3.42, si deve procedere al calcolo delle componenti della matrice dei coefficienti le cui espressioni generali sono date dalle equazioni 3.39-3.41. E' quindi chiaro che, essendo necessario risolvere degli integrali sulle funzioni di spostamento locali $\varphi_k(s)$, $f_k(s)$ e $g_k(s)$, si devono ottenere le espressioni di queste componenti di spostamento al variare della ascissa curvilinea s_i per ogni i -esima parete della sezione trasversale.

La terna di funzioni $\varphi_k(s)$, $f_k(s)$ e $g_k(s)$ è conosciuta sulla sottoparete i -esima purchè si conoscano:

- $u_{k,i1}$ ed $u_{k,i2}$: gli spostamenti in direzione x del nodo 1 e 2 della sottoparete, dovuti al modo di deformarsi k -esimo
- $v_{k,i1}$ e $v_{k,i2}$: gli spostamenti in direzione s del nodo 1 e 2 della sottoparete, dovuti al modo di deformarsi k -esimo

- $w_{k,i1}$ e $w_{k,i2}$: gli spostamenti in direzione n del nodo 1 e 2 della sottoparete, dovuti al modo di deformarsi k -esimo
- $\theta_{k,i1}$ e $\theta_{k,i2}$: le rotazioni intorno all'asse x del nodo 1 e 2 della sottoparete, dovute al modo di deformarsi k -esimo

Dati gli spostamenti nodali si ricava infatti la terna di funzioni incognita attraverso le seguenti funzioni di interpolazione hermitiane (H) e lineari (L):

$$H_{01} = 1 - 3 * (s_i/l_i)^2 + 2 * (s_i/l_i)^3$$

$$H_{11} = s_i * (1 - s_i/l_i)^2$$

$$H_{02} = 3 * (s_i/l_i)^2 - 2 * (s_i/l_i)^3$$

$$H_{12} = s_i * ((s_i/l_i)^2 - s_i/l_i)$$

$$L_2 = s_i/l_i$$

$$L_1 = 1 - s_i/l_i$$

Conoscendo a priori l'andamento delle funzioni di spostamento (definito dalla classe a cui appartiene il k -esimo modo considerato) si specificano di seguito le funzioni f_k , g_k , φ_k , che descrivono il campo di spostamenti dovuti al k -esimo modo, sulla i -esima sottoparete. Si pone:

$$f_{k,i} = H_{01}w_{k,i1} + H_{11}\theta_{k,i1} + H_{02}w_{k,i2} + H_{12}\theta_{k,i2}$$

$$g_{k,i} = L_1v_{k,i1} + L_2v_{k,i2}$$

$$\varphi_{k,i} = L_1u_{k,i1} + L_2u_{k,i2}$$

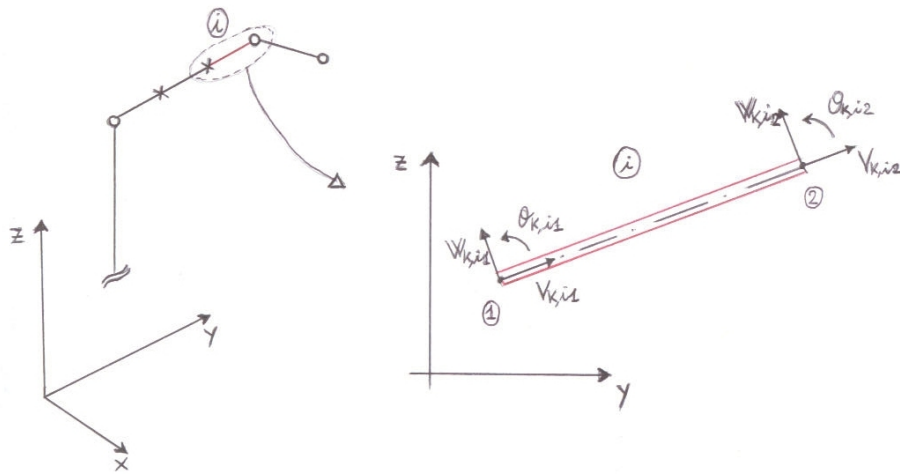


Figura 4.8: Rappresentazione della i -esima parete e degli spostamenti nodali nei suoi punti iniziale e finale dovuti al k -esimo modo.

In maniera analoga si possono definire:

$$f_{j,i} = H_{01}w_{j,i1} + H_{11}\theta_{j,i1} + H_{02} * w_{j,i2} + H_{12}\theta_{j,i2}$$

$$g_{j,i} = L_1v_{j,i1} + L_2v_{j,i2}$$

$$\varphi_{j,i} = L_1u_{j,i1} + L_2u_{j,i2}$$

le quali descrivono il campo di spostamenti sulla i -esima parete dovuto al j -esimo modo.

Esempi di applicazione della teoria di trave generalizzata

Dopo aver descritto dettagliatamente i principi e i metodi operativi propri della Generalized Beam Theory al primo ordine si vogliono ora illustrare, tramite alcuni esempi, delle semplici applicazioni della teoria GBT.

Particolare attenzione sarà rivolta allo svolgimento della procedura di cross-section analysis, per la quale si eseguono due esempi (*esempio 1-2*) con lo scopo di mettere in evidenza le caratteristiche e le proprietà dei modi deformativi delle sezioni trasversali scelte.

Viene poi riportato un altro esempio (*esempio 3*) dove si vedrà l'applicazione della teoria GBT in un codice agli elementi finiti per la risoluzione lineare di una semplice struttura a trave appoggiata su due appoggi torsionali. I risultati di questo modello agli elementi finiti verranno messi a confronto con quelli derivanti da una modellazione tridimensionale più sofisticata, questo col fine di validare le formulazioni teoriche esposte nella tesi riguardo la teoria di trave generalizzata.

1 Esempio 1: Sezioni a tre pareti - Proprietà della matrice di legame per i modi FM_x

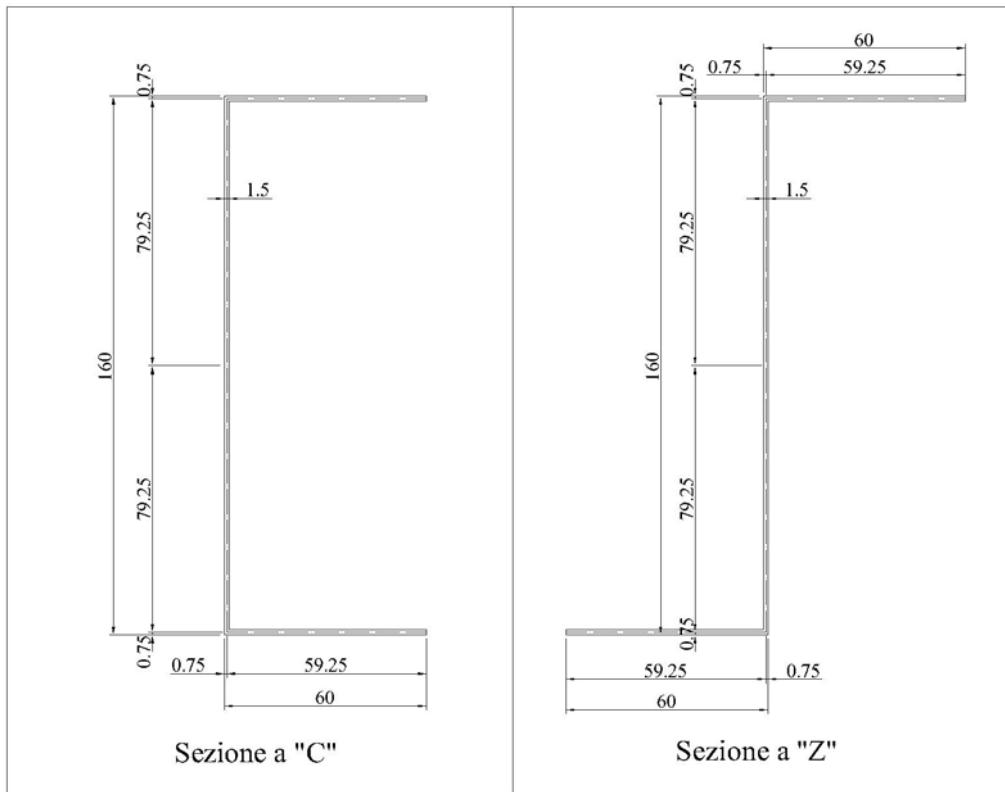


Figura 5.1: Sezioni C e Z utilizzate nell'Esempio N.1

In questo Esempio 1 si considerano due semplici sezioni, rispettivamente a C ed a Z, che possiedono entrambe tre pareti e quattro nodi naturali: due interni, individuati dall'intersezione tra due pareti contigue, e due terminali. Considerando i soli modi alla Schardt (ovvero i modi FM_x) si vuole analizzare la matrice di legame costitutivo \mathbf{C} risultante con la formulazione GBT per le due tipologie di sezione scelta. In particolare si vuole porre attenzione alla forma della matrice di legame dopo la *diagonalizzazione* dei modi fondamentali.

node	y[mm]	z[mm]	y[mm]	z[mm]
	C section		Z section	
1	59.25	-79.25	-59.25	-79.25
2	00.00	-79.25	00.00	-79.25
3	00.00	+79.25	00.00	+79.25
4	59.25	+79.25	59.25	+79.25

Tabella 5.1: Coordinate y e z delle sezioni C e Z nell'esempio 1

Essendo entrambe le sezioni oggetto di studio caratterizzate da soli quattro nodi naturali si avranno conseguentemente solo quattro modi deformativi della sezione. Ciò porta a dire che per queste tipologie di sezione la teoria GBT non prevede alcun *modo distortivo*, ma solamente i modi deformativi studiabili anche per mezzo delle teorie classiche di d.S.V. e Vlasov.

Lo scopo di questo esempio è quello di dimostrare il *significato fisico* dei modi fondamentali alla Schardt, ciò verrà fatto analizzando le componenti della matrice costitutiva \mathbf{C} a seguito della particolare diagonalizzazione che si effettua durante la procedura di cross-section analysis.

Si riportano nella tabella 5.2 i valori delle aree e delle inerzie delle due sezioni, poi, assumendo modulo elastico $E=210000N/mm^2$ e Poisson $\nu = 0.3$, anche i valori di:

- rigidità assiale EA ;
- flessionale lungo i due assi principali di inerzia EJ_u ed EJ_v ;
- rigidità torsionale alla d.S.V. GJ_t e quella alla Vlasov EJ_w .

Il calcolo dei momenti d'inerzia settoriali per le due sezioni non è banale e può essere calcolato attraverso le formule 5.1 e 5.2.

	C section	Z section	unit
A	415.5	415.5	mm^2
J_y	1.4126E+5	1.6141E+6	mm^4
J_z	1.6141E+6	2.0800E+5	mm^4
J_{yz}	0	4.1732E+5	mm^4
J_u	J_z	1.7286E+6	mm^4
J_v	J_y	9.3473E+4	mm^4
J_t	311.62	311.62	mm^4 , Torsion de Saint Venant constant
J_w	6.2872E+8	8.8722E+8	mm^6 , Warping constant
EA	8.7255E+7	8.7255E+07	N
EJ_u	3.38961E+11	3.63006E+11	Nmm^2
EJ_v	2.96646E+10	1.96293E+10	Nmm^2
GJ_t	2.511923E+07	2.51693E+07	Nmm^2
EJ_w	1.3188E+14	1.86316E+14	Nmm^4

Tabella 5.2: *Caratteristiche geometriche e rigidità delle due sezioni*

$$J_{w(Csection)} = \frac{h^2 t_f [(b-e)^3 + e^3]}{6} + \frac{h^3 e^2 t_w}{12} \quad (5.1)$$

$$J_{w(Zsection)} = \frac{h^2 b^3 t_f}{2} \left[\frac{1}{3} + \frac{b^2 - b(2b+h)}{(2b+h)^2} \right] + \frac{h^3 b^4 t_w}{4(2b+h)^2} \quad (5.2)$$

Queste formule sono state ricavate dall'integrazione dell'*area settoriale* $\Omega(s)$ al quadrato sulla sezione in parete sottile, quindi secondo la formula nota:

$$J_w = \int_t \Omega^2(s) t(s) ds_t \quad (5.3)$$

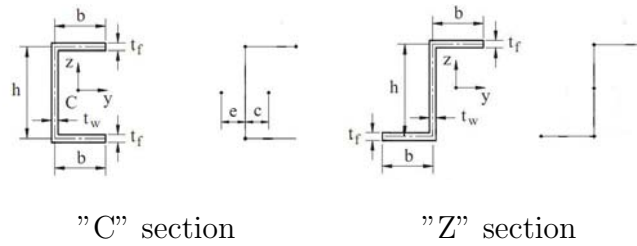


Tabella 5.3: Sezione a C, con centro di torsione eccentrico di e , e Sezione a Z.

Le aree settoriali per le due sezioni in esame hanno la forma indicata in tabella 5.4.

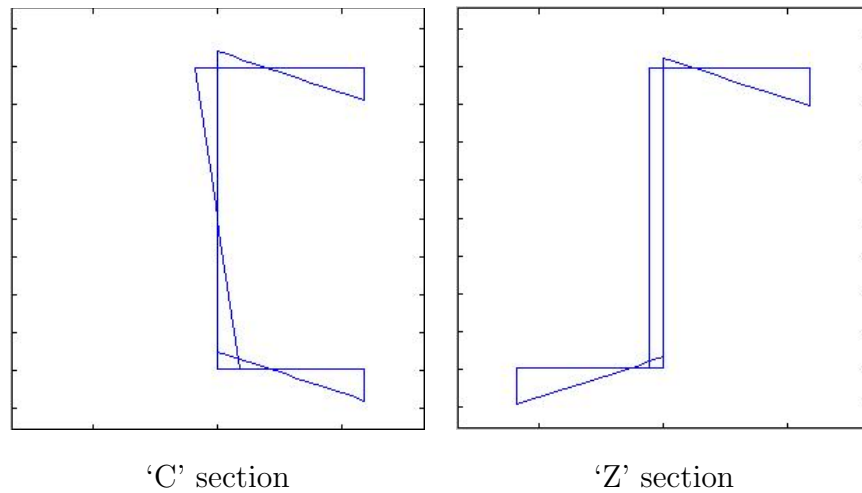


Tabella 5.4: Andamento delle aree settoriali per la sezione a C e Z.

Se ora si effettua la cross-section analysis sulle sezioni oggetto di studio si ricavano le forme modali non diagonalizzate e, successivamente, si possono calcolare le matrici dei coefficienti \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{G} ; esse definiscono l'equazione fondamentale della GBT.

Risolvendo poi il problema agli autovalori associato ai modi FM_x si ottengono degli autovettori 'ortogonali' tra loro, i quali sono una base spettrale

per lo spazio dei modi deformativi: le matrici dei coefficienti riscritte secondo questa base assumono una forma diagonale.

Come si è detto nei capitoli precedenti, se si agisce tarando la base spettrale in un certo modo, in cui ogni autovettore è definito a meno di una costante, si può ritrovare che i primi quattro modi fondamentali corrispondono ai quattro casi fondamentali di *Sforzo Normale*, *Flessione lungo gli assi principali* e *Torsione non uniforme*.

Questa caratteristica dei modi fondamentali è evidente se si confrontano le matrici costitutive 5.5 - 5.6, calcolate secondo l'equazione 3.34 tenendo conto delle componenti di spostamento modificate sulla base spettrale, con le rigidità in tabella 5.2.

$$\mathbf{C}_{\text{Csection}} = \quad (5.4)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.72e+007 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 3.39e+011 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 2.51e+007 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1.32e+014 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{\text{Zsection}} = \quad (5.5)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.73e+007 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 3.63e+011 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 2.52e+007 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1.86e+014 \end{bmatrix}$$

Conoscendo la forma della sotto-matrice di legame indicata nella formula 3.42 (la quale ci dice che le componenti delle matrici dei coefficienti sono anche componenti della \mathbf{C}) e data la *fundamental beam equation* della GBT nella formula 3.38 (dove si vede con quale ordine di derivazione di \mathbf{V} sono moltiplicate le diverse matrici dei coefficienti) è possibile dare una interpretazione fisica alle componenti della matrice costitutiva della GBT.

Le matrici costitutive \mathbf{C} per le due sezioni considerate possiedono delle componenti diverse da zero solamente in corrispondenza delle sotto-matrici $[3 \times 3]$ presenti sulla diagonale principale, questo in quanto le matrici dei coefficienti sono state diagonalizzate.

Poi si nota che all'interno delle sotto-matrici principali le uniche componenti non nulle che si hanno sono quelle corrispondenti alle componenti della matrice \mathbf{A} , questo per tutti e quattro i modi, mentre solo per il quarto modo (torsione) si ha un'altra componente non nulla, che corrisponde però ad una componente di \mathbf{B} .

Si può ora capire, dal confronto con la tabella 5.2, come le componenti significative della matrice costitutiva si scoprono essere uguali alle rigidità dei quattro casi fondamentali di sollecitazione e deformazione.

In particolare si ha che:

- per lo sforzo normale rappresentato dal primo modo: $\mathbf{C}_{3,3} = EA$;
- per la flessione attorno all'asse di maggiore inerzia: $\mathbf{C}_{6,6} = EJ_u$;
- per la flessione flettente attorno all'asse di minore inerzia: $\mathbf{C}_{9,9} = EJ_v$;
- per la torsione primaria attorno all'asse passante per il centro di torsione: $\mathbf{C}_{11,11} = GJ_t$;

- per la torsione secondaria attorno all'asse passante per il centro di torsione: $\mathbf{C}_{12,12} = EJ_w$;

Date queste osservazioni è allora evidente come l'equazione fondamentale della GBT 3.38 sia l'estensione delle quattro seguenti equazioni di equilibrio, relative ai casi fondamentali:

$$EA \frac{d^2 u}{dx_2} = p_u \quad (5.6)$$

$$EI_{yy} \frac{d^4 z}{dx_4} = q_z \quad (5.7)$$

$$EI_{zz} \frac{d^4 y}{dx_4} = q_y \quad (5.8)$$

$$E\Gamma \frac{d^4 \varphi}{dx_4} - GJ \frac{d^2 \varphi}{dx_2} = m_t \quad (5.9)$$

Si è quindi visto che a seguito della normalizzazione degli autovettori della base spettrale, per i primi quattro modi fondamentali FM_x , il legame è solamente costituito dalle varie rigidità presenti sulla diagonale principale della matrice \mathbf{C} .

Si osserva inoltre che è possibile in questo caso dare un significato fisico agli spostamenti generalizzati V_k dei primi quattro modi alla Schardt:

- $V_1' = u$: la derivata prima della prima linea elastica V_1 è pari allo spostamento assiale u , ciò comporta una indeterminazione sul comportamento assiale in quanto u viene definito a meno di una costante dalla GBT;
- $V_2 = z$: la seconda linea elastica V_2 è pari allo spostamento z del centro di torsione in direzione dell'asse Z del riferimento globale della sezione;
- $V_3 = y$: la terza linea elastica V_3 è pari allo spostamento y del centro di torsione in direzione dell'asse Y del riferimento globale della sezione;

- $V_4 = \vartheta$: la quarta linea elastica V_4 è pari alla rotazione rigida ϑ della sezione attorno all'asse longitudinale passante per il centro di torsione.

Queste deduzioni riguardo gli spostamenti generalizzati rimangono valide solo nel caso in cui si considerino i soli modi alla Schardt nella base spettrale dei modi della sezione. Infatti la considerazione di una qualsiasi altra classe crea un accoppiamento tra alcuni modi che non permette più l'interpretazione fisica delle incognite generalizzate V .

2 Esempio 2: Procedura di Cross-Section Analysis di una sezione a C in parete sottile

Si consideri per l'Esempio 2 una sezione in parete sottile con le seguenti caratteristiche meccaniche:

- $E = 2.1e5 N/mm^2$;
- $\nu = 0.3$.

In figura 5.2 si rappresenta la geometria della sezione.

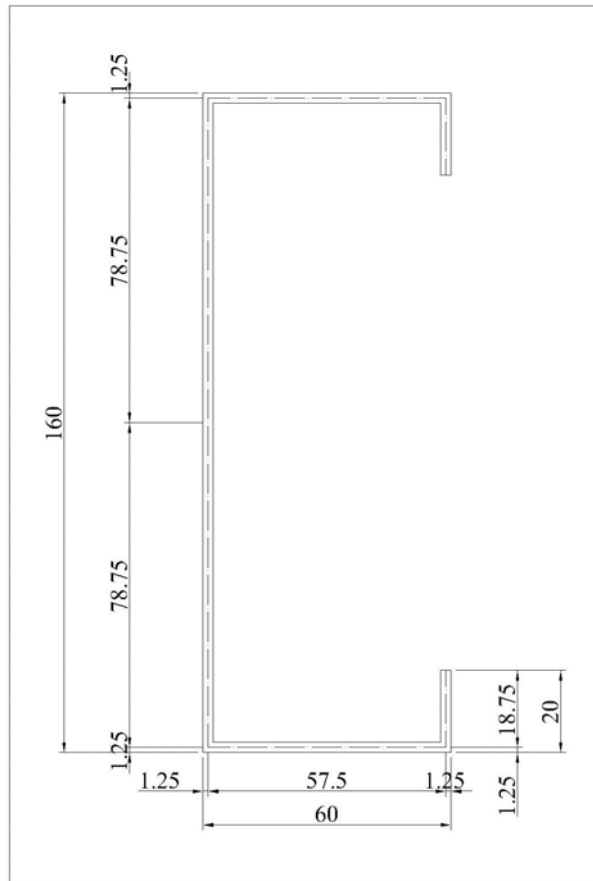


Figura 5.2: Sezione a C tipo 160x60x20x2.5 mm

In questo secondo esempio si vuole mostrare un'intera procedura di cross-section analysis per la sezione in parete sottile descritta in figura 5.2.

Al fine di poter ricavare le varie forme modali della sezione è necessario definire il posizionamento dei nodi naturali ed intermedi. I nodi naturali sono definiti automaticamente dalla geometria della linea media, mentre quelli intermedi possono essere scelti arbitrariamente su ogni parete.

Per questo esempio si è scelto di posizionare due nodi intermedi sulla terza parete naturale della sezione (nodi 4 e 5). Di seguito vi sono indicati la numerazione dei nodi e delle pareti, poi le coordinate di ogni nodo naturale ed intermedio.

node	y[mm]	z[mm]
1	57.5	-60
2	57.5	-78.75
3	0	-78.75
4	0	-26.25
5	0	26.25
6	0	78.75
7	57.5	78.75
8	57.5	60

Tabella 5.5: *Coordinate dei nodi naturali ed intermedi*

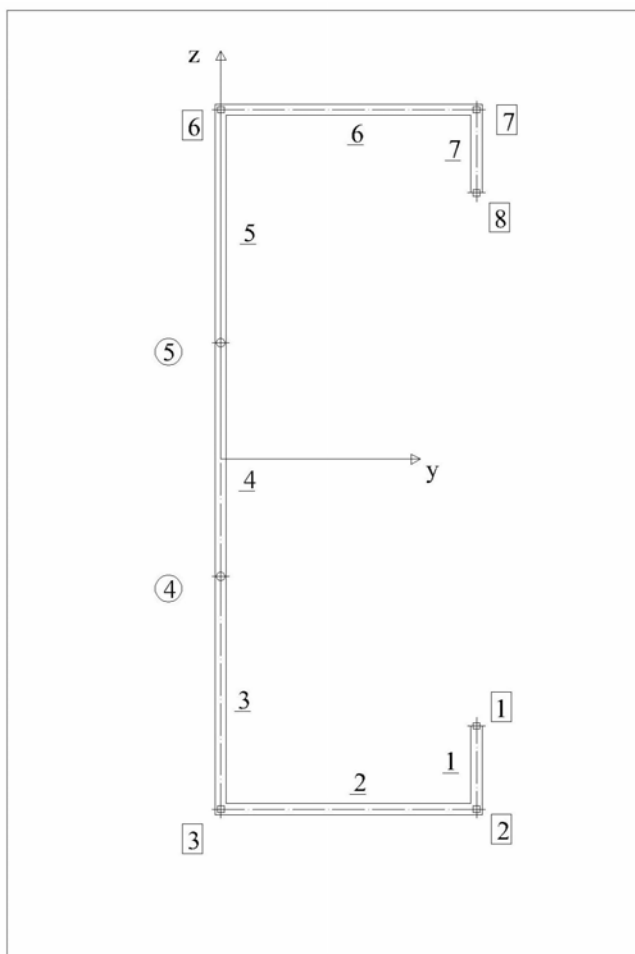


Figura 5.3: Numerazione dei nodi e delle pareti

2.1 Interazione tra modi FM_x

Si analizzano ora i modi FM_x per la sezione a C scelta attraverso la procedura di cross-section analysis descritta nel capitolo precedente.

Avendo già definito la sezione si può subito affermare che vi saranno sei modi fondamentali alla Schardt in quanto sei è il numero di nodi naturali della sezione. Di questi modi solo gli ultimi due prevedono una distorsione di sezione (*section distortion*) nel piano della sezione stessa, ciò è visibile dalle deformate modali solo dopo la diagonalizzazione delle matrici dei coefficienti e la normalizzazione degli autovettori della base spettrale.

Vengono riportate di seguito nelle espressioni 5.10 - 5.13 le matrici dei coefficienti \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{G} ed \mathbf{A}^* , \mathbf{B}^* , \mathbf{G}^* per la sezione a C in esame.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{FM_x} = & \begin{bmatrix} 3.30E+06 & 1.61E+06 & 4.84E+03 & 4.15E+03 & -8.96E+03 & 5.55E+03 \\ 1.61E+06 & 1.34E+07 & 5.02E+06 & -5.86E+03 & 1.44E+04 & -8.96E+03 \\ 4.84E+03 & 5.02E+06 & 3.76E+07 & 1.38E+07 & -5.86E+03 & 4.15E+03 \\ 4.15E+03 & -5.86E+03 & 1.38E+07 & 3.76E+07 & 5.02E+06 & 4.84E+03 \\ -8.96E+03 & 1.44E+04 & -5.86E+03 & 5.02E+06 & 1.34E+07 & 1.61E+06 \\ 5.55E+03 & -8.96E+03 & 4.15E+03 & 4.84E+03 & 1.61E+06 & 3.30E+06 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_{FM_x}^* = & \begin{bmatrix} 1.63E+08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.41E+11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.11E+10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.34E+14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7.40E+06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8.30E+06 \end{bmatrix} \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_{FM_x} = \begin{bmatrix} -3.49E+01 & 3.64E+01 & -5.77E+00 & 4.60E+00 & 1.85E+00 & -2.23E+00 \\ 3.64E+01 & -3.91E+01 & 7.21E+00 & -6.04E+00 & -3.49E-01 & 1.85E+00 \\ -5.77E+00 & 7.21E+00 & -2.83E+00 & 2.83E+00 & -6.04E+00 & 4.60E+00 \\ 4.60E+00 & -6.04E+00 & 2.83E+00 & -2.83E+00 & 7.21E+00 & -5.77E+00 \\ 1.85E+00 & -3.49E-01 & -6.04E+00 & 7.21E+00 & -3.91E+01 & 3.64E+01 \\ -2.23E+00 & 1.85E+00 & 4.60E+00 & -5.77E+00 & 3.64E+01 & -3.49E+01 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{B}_{FM_x}^* = \begin{bmatrix} -1.15E-12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.14E-08 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.99E-07 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.30E+08 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.35E+02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.46E+02 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{FM_x} = \begin{bmatrix} 4.20E-03 & -4.80E-03 & 1.40E-03 & -1.40E-03 & 2.20E-03 & -1.50E-03 \\ -4.80E-03 & 5.70E-03 & -1.70E-03 & 1.70E-03 & -3.00E-03 & 2.20E-03 \\ 1.40E-03 & -1.70E-03 & 6.00E-04 & -6.00E-04 & 1.70E-03 & -1.40E-03 \\ -1.40E-03 & 1.70E-03 & -6.00E-04 & 6.00E-04 & -1.70E-03 & 1.40E-03 \\ 2.20E-03 & -3.00E-03 & 1.70E-03 & -1.70E-03 & 5.70E-03 & -4.80E-03 \\ -1.50E-03 & 2.20E-03 & -1.40E-03 & 1.40E-03 & -4.80E-03 & 4.20E-03 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{FM_x}^* = \begin{bmatrix} -6.94E-18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.05E-14 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.20E-14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.95E-11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9.50E-03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.85E-02 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Le matrici \mathbf{A}^* , \mathbf{B}^* e \mathbf{G}^* rappresentano la forma diagonalizzata delle matrici dei coefficienti riferite alla base spettrale derivata dal problema agli autovalori.

Dato il seguente problema agli autovalori generalizzato per la classe dei modi FM_x :

$$(\mathbf{G}_{FM_x} - \lambda_{FM_x} \mathbf{A}_{FM_x}) \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

si ricavano gli autovalori e gli autovettori della base spettrale. Il vettore λ è il vettore contenente gli autovalori del problema:

$$\lambda_{FM_x} = \begin{bmatrix} -1.33E - 25 & -1.28E - 26 & 7.51E - 26 & 3.19E - 25 & 1.28E - 09 & 3.44E - 09 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Gli autovalori nel vettore λ sono ordinati dal più piccolo al più grande, questo in quanto il problema agli autovalori fornisce automaticamente i modi ordinati secondo l'energia di deformazione corrispondente, dal modo a minore energia a quello a maggiore energia.

La matrice $\mathbf{\Lambda}$ è la matrice che contiene nelle proprie colonne gli autovettori risultanti dal problema agli autovalori, questa matrice costituisce la base spettrale dello spazio delle forme modali FM_x . Gli autovettori sono individuati a meno di una costante, per questo possono essere normalizzati al fine di ottenere, per i primi quattro autovettori, proprio le esatte funzioni di warping date dai quattro modi fondamentali della teoria classica (sforzo normale, momenti flettenti e torcenti).

Si riporta di seguito la matrice degli autovettori dopo la loro normalizzazione:

$$\mathbf{\Lambda}_{FM_x} = \begin{bmatrix} 1.00E+00 & 6.00E+01 & 3.99E+01 & -3.95E+03 & 1.00E+00 & -1.00E+00 \\ 1.00E+00 & 7.87E+01 & 3.99E+01 & -2.36E+03 & -3.39E-01 & 4.17E-01 \\ 1.00E+00 & 7.87E+01 & -1.76E+01 & 2.17E+03 & 3.28E-02 & -1.40E-01 \\ 1.00E+00 & -7.87E+01 & -1.76E+01 & -2.17E+03 & 3.28E-02 & 1.40E-01 \\ 1.00E+00 & -7.87E+01 & 3.99E+01 & 2.36E+03 & -3.39E-01 & -4.17E-01 \\ 1.00E+00 & -6.00E+01 & 3.99E+01 & 3.95E+03 & 1.00E+00 & 1.00E+00 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Si riportano ora le tabelle contenenti i valori delle componenti di spostamento di ogni nodo naturale della sezione per ogni forma modale FM_x considerata. Il sistema di riferimento a cui sono riferiti gli spostamenti è quello globale (X, Y, Z) , vengono infatti riportate le tre componenti di traslazione U_x , U_y ed U_z e la rotazione nel piano della sezione ϑ_x calcolate in ogni nodo naturale. In tabella 5.6 sono riportate le componenti di spostamento riguardanti i modi riferiti ancora alla base canonica dello spazio naturale, in tabella 5.7 invece si riportano le componenti riguardanti le forme modali riferite alla base spettrale. Gli spostamenti in questa seconda tabella si sono ricavati utilizzando la formula 4.14, già descritta nel capitolo precedente per illustrare il calcolo della matrice degli spostamenti \mathbf{D}^* .

modo	nodo	U [mm]	V [mm]	W [mm]	ϑ_x [rad]	
1	1	1.00	0.02008	-0.05333	-1.071e-003	
	2	0.00	0.00000	-0.05333	-1.071e-003	
	3	0.00	0.00000	0.00000	-6.410e-004	
	6	0.00	0.00000	0.00000	1.049e-004	
	7	0.00	0.00000	0.00000	-5.247e-005	
	8	0.00	-0.00098	-0.00000	-5.247e-005	
	2	1	0.00	-0.03791	0.05333	1.094e-003
		2	1.00	-0.01739	0.05333	1.094e-003
3		0.00	-0.01739	0.00000	5.944e-004	
6		0.00	0.00000	0.00000	-1.515e-004	
7		0.00	0.00000	0.00000	7.577e-005	
8		0.00	0.00142	0.00000	7.577e-005	
3		1	0.00	0.02034	0.00000	-1.570e-004
		2	0.00	0.01739	0.00000	-1.570e-004
	3	1.00	0.01739	0.00635	-1.722e-005	
	6	0.00	0.00000	0.00635	-1.722e-005	
	7	0.00	0.00000	0.00000	-1.570e-004	
	8	0.00	-0.00294	-0.00000	-1.570e-004	
	4	1	0.00	-0.00294	-0.00000	1.570e-004
		2	0.00	0.00000	0.00000	1.570e-004
3		0.00	0.00000	-0.00635	1.722e-005	
6		1.00	0.01739	-0.00635	1.722e-005	
7		0.00	0.01739	0.00000	1.570e-004	
8		0.00	0.02034	0.00000	1.570e-004	
5		1	0.00	0.00142	0.00000	-7.577e-005
		2	0.00	0.00000	0.00000	-7.577e-005
	3	0.00	0.00000	0.00000	1.515e-004	
	6	0.00	-0.01739	0.00000	-5.944e-004	
	7	1.00	-0.01739	-0.05333	-1.094e-003	
	8	0.00	-0.03791	-0.05333	-1.094e-003	
	6	1	0.00	-0.00098	-0.00000	5.247e-005
		2	0.00	0.00000	0.00000	5.247e-005
3		0.00	0.00000	0.00000	-1.049e-004	
6		0.00	0.00000	0.00000	6.410e-004	
7		0.00	0.00000	0.05333	1.071e-003	
8		1.00	0.02008	0.05333	1.071e-003	

Tabella 5.6: *Spostamenti dei nodi naturali della sezione a C per ogni modo FM_x , prima della diagonalizzazione.*

modo	nodo	U [mm]	V [mm]	W [mm]	ϑ_x [rad]
1	1	1.00000	-0.00000	0.00000	2.602e-018
	2	1.00000	0.00000	0.00000	1.782e-018
	3	1.00000	0.00000	0.00000	-5.285e-019
	6	1.00000	0.00000	0.00000	-6.505e-019
	7	1.00000	0.00000	0.00000	1.735e-018
	8	1.00000	0.00000	0.00000	1.084e-018
2	1	59.99838	0.00000	0.99997	-2.558e-014
	2	78.74788	0.00000	0.99997	-2.564e-014
	3	78.74788	0.00000	0.99997	-1.239e-014
	6	-78.74788	0.00000	0.99997	-1.225e-014
	7	-78.74788	0.00000	0.99997	-2.598e-014
	8	-59.99838	-0.00000	0.99997	-2.594e-014
3	1	39.86463	-0.99964	0.00000	1.266e-016
	2	39.86463	-0.99964	0.00000	8.717e-017
	3	-17.61461	-0.99964	0.00000	-3.123e-017
	6	-17.61461	-0.99964	0.00000	1.388e-017
	7	39.86463	-0.99964	0.00000	-4.857e-017
	8	39.86463	-0.99964	0.00000	-6.245e-017
4	1	-3951.87187	59.98123	85.02575	9.997e-001
	2	-2357.63897	78.72537	85.02575	9.997e-001
	3	2169.06959	78.72537	27.54374	9.997e-001
	6	-2169.06959	-78.72537	27.54374	9.997e-001
	7	2357.63897	-78.72537	85.02575	9.997e-001
	8	3951.87187	-59.98123	85.02575	9.997e-001
5	1	1.00000	0.03201	-0.07138	-1.363e-003
	2	-0.33847	0.00646	-0.07138	-1.363e-003
	3	0.03283	0.00646	0.00000	-9.985e-004
	6	0.03283	0.00646	0.00000	9.985e-004
	7	-0.33847	0.00646	0.07138	1.363e-003
	8	1.00000	0.03201	0.07138	1.363e-003
6	1	-1.00000	-0.04071	0.07556	1.655e-003
	2	0.41676	-0.00968	0.07556	1.655e-003
	3	-0.14010	-0.00968	-0.00178	7.255e-004
	6	0.14010	0.00968	-0.00178	7.255e-004
	7	-0.41676	0.00968	0.07556	1.655e-003
	8	1.00000	0.04071	0.07556	1.655e-003

Tabella 5.7: *Spostamenti dei nodi naturali della sezione a C per ogni modo FM_x , dopo la diagonalizzazione.*

Calcolati gli spostamenti dei nodi naturali per ogni modo fondamentale FM_x , si possono ora visualizzare le configurazioni deformate della sezione raffigurando gli spostamenti nodali ed interpolandoli secondo l'ordine delle funzioni polinomiali $[\varphi_{ki}, f_{ki}, g_{ki}]$.

Si riportano quindi di seguito le figure delle deformate modali FM_x sia prima della diagonalizzazione delle matrici dei coefficienti (tabella 5.8) che dopo la diagonalizzazione (tabella 5.9).

La raffigurazione dei modi fondamentali riferiti alla base canonica dello spazio naturale, riportate in tabella 5.8, mette in evidenza le deformate della sezione trasversale ottenute attraverso l'imposizione di un warping unitario in corrispondenza di ogni nodo naturale: si può notare come sia rispettata l'ipotesi di indeformabilità a taglio nel piano medio della sezione.

La raffigurazione dei modi riferiti alla base spettrale dello spazio naturale (tabella 5.9) mette visivamente in evidenza invece il significato fisico che si riesce a dare ai modi deformativi FM_x . Come già più volte detto infatti, i primi quattro modi rappresentano i cinematismi di sezione corrispondenti ai casi fondamentali di d.S.V. (sforzo normale, flessione e torsione primaria) e torsione alla Vlasov, mentre i modi superiori al quarto prevedono al contrario una distorsione di sezione nel proprio piano.

Per la sezione a C in oggetto quindi si hanno due modi distorsivi, uno simmetrico e uno anti-simmetrico rispetto all'asse orizzontale di simmetria della sezione, il quale corrisponde all'asse Y globale.

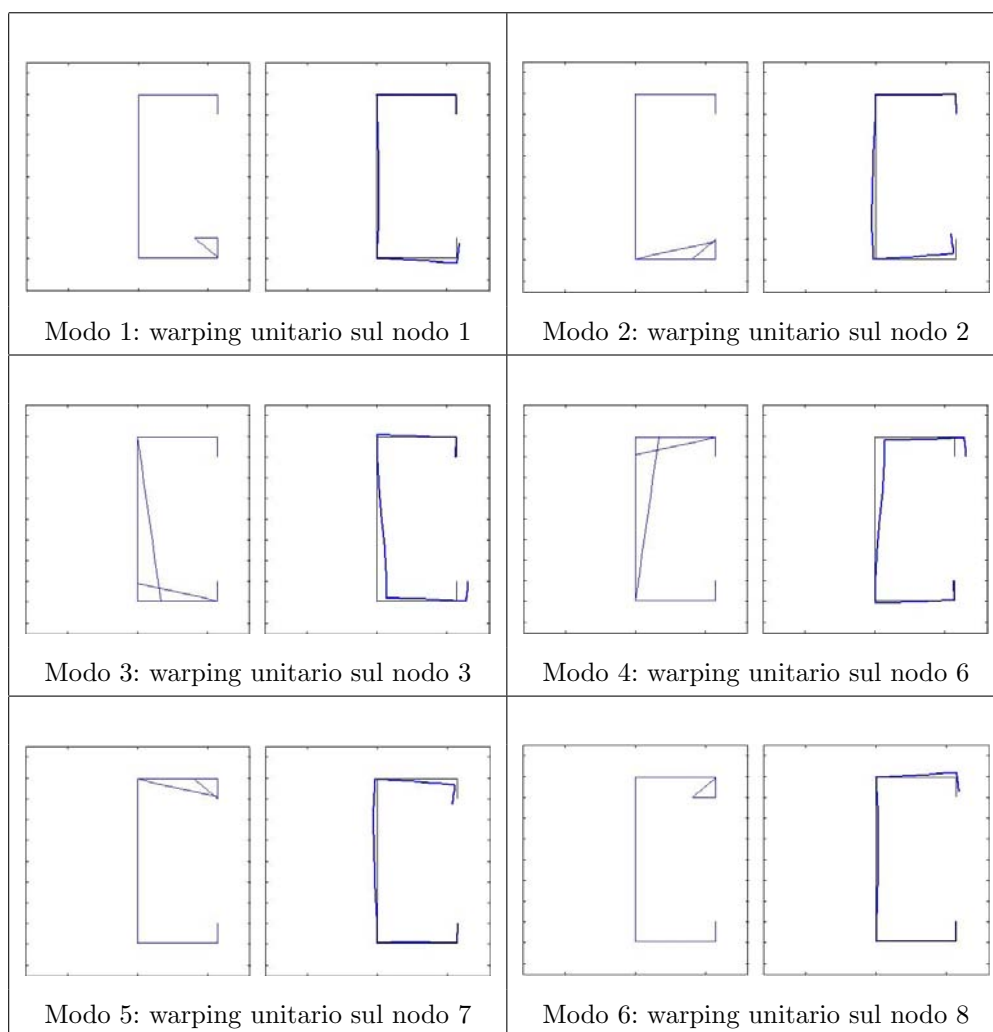


Tabella 5.8: *Modi FM_x per la sezione a C scelta: per ogni modo sono rappresentati nella parte sinistra gli spostamenti in direzione X, mentre nella parte a destra vi sono gli spostamenti nel piano Y – Z della sezione. In questo caso gli spostamenti non son diagonalizzati e fanno riferimento ai valori nodali in tabella 5.6*

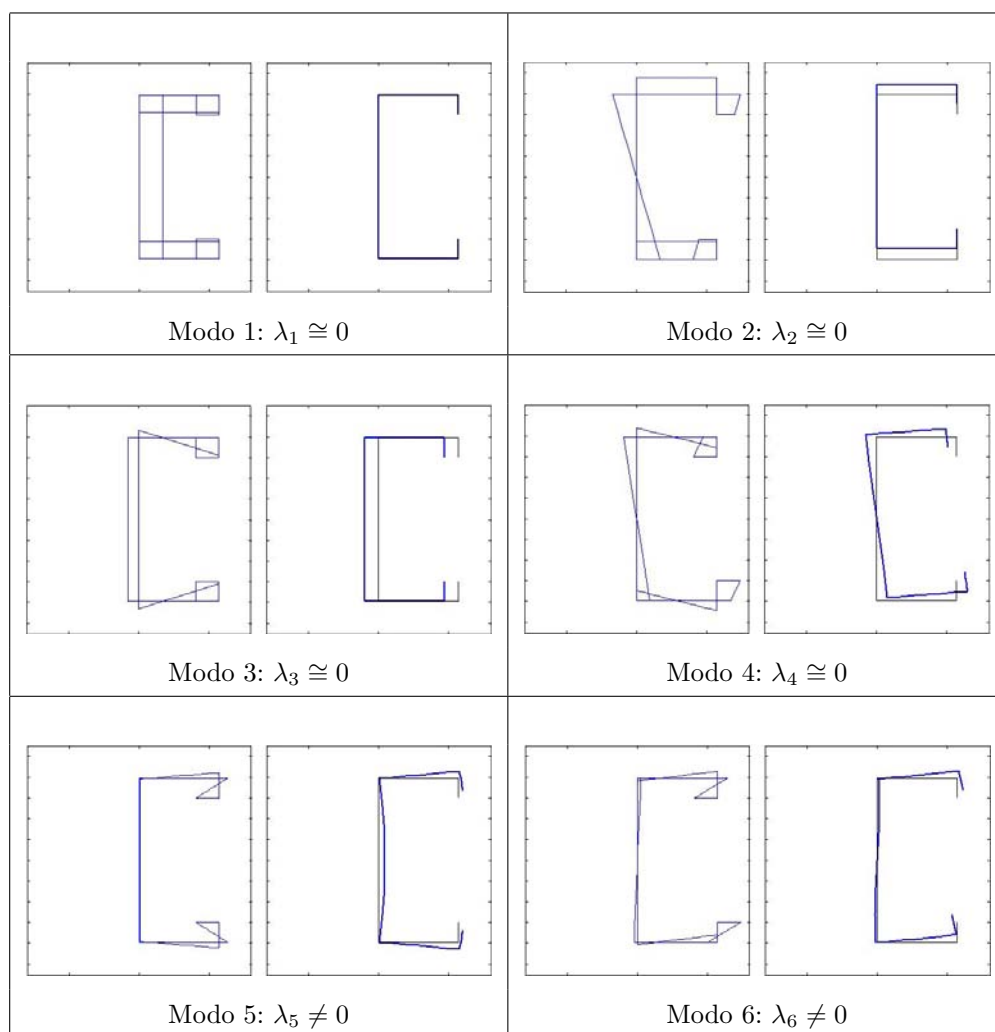


Tabella 5.9: Modi FM_x per la sezione a C scelta: per ogni modo sono rappresentati nella parte sinistra gli spostamenti in direzione x , mentre nella parte a destra vi sono gli spostamenti nel piano $y - z$ della sezione. In questo caso gli spostamenti sono diagonalizzati e fanno riferimento ai valori nodali in tabella 5.7

2.2 Interazione tra modi SM_x

Si analizzano ora i modi SM_x per la sezione a C in oggetto attraverso la procedura di cross-section analysis.

Data la sezione definita in precedenza si può subito affermare che vi saranno otto modi a taglio di tipologia alla Capurso, questo perchè sono presenti sei nodi naturali più due nodi intermedi sulla linea media.

Vengono riportate di seguito le matrici \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{G} e le corrispondenti \mathbf{A}^* , \mathbf{B}^* , \mathbf{G}^* per la sezione a C in esame:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{SM_x} = & \begin{bmatrix} 3,28E+06 & 1,64E+06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,64E+06 & 1,33E+07 & 5,03E+06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5,03E+06 & 1,93E+07 & 4,59E+06 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,59E+06 & 1,84E+07 & 4,59E+06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,59E+06 & 1,84E+07 & 4,59E+06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4,59E+06 & 1,93E+07 & 5,03E+06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5,03E+06 & 1,33E+07 & 1,64E+06 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,64E+06 & 3,28E+06 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_{SM_x}^* = & \begin{bmatrix} 1,63E+08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7,79E+07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6,96E+07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6,42E+07 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4,50E+07 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,33E+07 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7,73E+06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7,78E+06 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{5.15}$$

$$\mathbf{B}_{SM_x} =$$

$$\begin{bmatrix} -1.08E+04 & 1.08E+04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.08E+04 & -1.43E+04 & 3.51E+03 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.51E+03 & -7.36E+03 & 3.85E+03 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.85E+03 & -7.69E+03 & 3.85E+03 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.85E+03 & -7.69E+03 & 3.85E+03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.85E+03 & -7.36E+03 & 3.51E+03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.51E+03 & -1.43E+04 & 1.08E+04 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.08E+04 & -1.08E+04 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{SM_x}^* =$$

$$\begin{bmatrix} 9.09E-13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.14E+03 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.18E+04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.63E+04 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.57E+04 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.41E+04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.41E+04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.46E+04 \end{bmatrix}$$

(5.16)

$$\mathbf{G}_{SM_x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{SM_x}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(5.17)

Le matrici $\mathbf{A}_{SM_x}^*$, $\mathbf{B}_{SM_x}^*$ e $\mathbf{G}_{SM_x}^*$ rappresentano la forma diagonalizzata delle matrici dei coefficienti riferite alla base spettrale derivata dal problema agli autovalori.

Dato il seguente problema agli autovalori generalizzato per la classe dei modi SM_x :

$$(\mathbf{B}_{SM_x} - \lambda_{SM_x} \mathbf{A}_{SM_x}) \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

si ricavano gli autovalori e gli autovettori della base spettrale. Il vettore λ è il vettore contenente gli autovalori del problema:

$$\lambda_{SM_x} = \begin{bmatrix} 4.74E-19 & -4.03E-05 & -2.00E-04 & -4.00E-04 \\ -8.00E-04 & -1.30E-03 & -5.71E-03 & -5.74E-03 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Il vettore λ_{SM_x} appena riportato contiene gli autovalori del problema ordinato in maniera contraria rispetto a quella risultante dal problema agli autovalori. Si sono ordinati quindi i modi SM_x a partire da quello caratterizzato dalla più alta energia di deformazione per arrivare a quello con la più bassa: ciò è stato fatto in quanto è usuale in letteratura scientifica un approccio di questo tipo.

La matrice $\mathbf{\Lambda}_{SM_x}$ è invece la matrice che contiene nelle proprie colonne gli autovettori risultanti dal problema agli autovalori, questa matrice costituisce la base spettrale dello spazio delle forme modali SM_x .

$$\mathbf{\Lambda}_{SM_x} = \begin{bmatrix} 1.00E+00 & 1.00E+00 & 1.00E+00 & -1.00E+00 & 7.85E-01 & -4.72E-01 & -1.00E+00 & -1.00E+00 \\ 1.00E+00 & 9.82E-01 & 9.24E-01 & -8.24E-01 & 5.31E-01 & -2.34E-01 & 3.95E-01 & 3.99E-01 \\ 1.00E+00 & 7.15E-01 & 1.17E-02 & 7.51E-01 & -1.00E+00 & 6.78E-01 & -1.33E-01 & -1.44E-01 \\ 1.00E+00 & 2.62E-01 & -8.62E-01 & 7.31E-01 & 5.22E-01 & -1.00E+00 & 3.15E-02 & 6.45E-02 \\ 1.00E+00 & -2.62E-01 & -8.62E-01 & -7.31E-01 & 5.22E-01 & 1.00E+00 & 3.15E-02 & -6.45E-02 \\ 1.00E+00 & -7.15E-01 & 1.17E-02 & -7.51E-01 & -1.00E+00 & -6.78E-01 & -1.33E-01 & 1.44E-01 \\ 1.00E+00 & -9.82E-01 & 9.24E-01 & 8.24E-01 & 5.31E-01 & 2.34E-01 & 3.95E-01 & -3.99E-01 \\ 1.00E+00 & -1.00E+00 & 1.00E+00 & 1.00E+00 & 7.85E-01 & 4.72E-01 & -1.00E+00 & 1.00E+00 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Si riportano ora le tabelle contenenti i valori delle componenti di spostamento di ogni nodo naturale della sezione per ogni forma modale SM_x considerata. Il sistema di riferimento a cui sono riferiti gli spostamenti è quello globale (X, Y, Z) , vengono infatti riportate le tre componenti di traslazione U , V e W e la rotazione nel piano della sezione ϑ_x calcolate in ogni nodo naturale. In tabella 5.10 sono riportate le componenti di spostamento riguardanti i modi riferiti ancora alla base canonica dello spazio naturale, in tabella 5.11 invece si riportano le componenti riguardanti le forme modali riferite alla base spettrale.

modo	nodo	U [mm]	V [mm]	W [mm]	ϑ_x [rad]
1	1	1.00	0.00000	0.00000	0.00000
	2	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	3	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	6	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	7	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	8	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
2	1	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	2	1.00	0.00000	0.00000	0.00000
	3	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	6	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	7	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	8	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
3	1	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	2	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	3	1.00	0.00000	0.00000	0.00000
	6	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	7	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	8	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
4	1	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	2	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	3	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	6	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	7	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	8	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
5	1	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	2	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	3	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	6	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	7	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	8	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
6	1	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	2	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	3	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	6	1.00	0.00000	0.00000	0.00000
	7	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	8	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
7	1	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	2	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	3	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	6	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	7	1.00	0.00000	0.00000	0.00000
	8	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
8	1	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	2	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	3	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	6	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	7	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	8	1.00	0.00000	0.00000	0.00000

Tabella 5.10: *Spostamenti dei nodi naturali della sezione a C per ogni modo SM_x , prima della diagonalizzazione.*

modo	nodo	U [mm]	V [mm]	W [mm]	ϑ_x [rad]
1	1	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	2	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	7	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	8	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2	1	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	2	0.98167	0.00000	0.00000	0.00000
	3	0.71483	0.00000	0.00000	0.00000
	6	-0.71483	0.00000	0.00000	0.00000
	7	-0.98167	0.00000	0.00000	0.00000
	8	-1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
3	1	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	2	0.92419	0.00000	0.00000	0.00000
	3	0.01169	0.00000	0.00000	0.00000
	6	0.01169	0.00000	0.00000	0.00000
	7	0.92419	0.00000	0.00000	0.00000
	8	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
4	1	-1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	2	-0.82360	0.00000	0.00000	0.00000
	3	0.75105	0.00000	0.00000	0.00000
	6	-0.75105	0.00000	0.00000	0.00000
	7	0.82360	0.00000	0.00000	0.00000
	8	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
5	1	0.78458	0.00000	0.00000	0.00000
	2	0.53118	0.00000	0.00000	0.00000
	3	-1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6	-1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	7	0.53118	0.00000	0.00000	0.00000
	8	0.78458	0.00000	0.00000	0.00000
6	1	-0.47169	0.00000	0.00000	0.00000
	2	-0.23385	0.00000	0.00000	0.00000
	3	0.67799	0.00000	0.00000	0.00000
	6	-0.67799	0.00000	0.00000	0.00000
	7	0.23385	0.00000	0.00000	0.00000
	8	0.47169	0.00000	0.00000	0.00000
7	1	-1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	2	0.39497	0.00000	0.00000	0.00000
	3	-0.13343	0.00000	0.00000	0.00000
	6	-0.13343	0.00000	0.00000	0.00000
	7	0.39497	0.00000	0.00000	0.00000
	8	-1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
8	1	-1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	2	0.39910	0.00000	0.00000	0.00000
	3	-0.14426	0.00000	0.00000	0.00000
	6	0.14426	0.00000	0.00000	0.00000
	7	-0.39910	0.00000	0.00000	0.00000
	8	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Tabella 5.11: *Spostamenti dei nodi naturali della sezione a C per ogni modo SM_x , dopo la diagonalizzazione.*

Avendo calcolato gli spostamenti dei nodi naturali per ogni modo SM_x , si possono ora visualizzare le configurazioni deformate della sezione raffigurando gli spostamenti nodali ed interpolandoli secondo l'ordine delle funzioni polinomiali $[\varphi_{ki}, f_{ki}, g_{ki}]$.

Si riportano quindi di seguito le deformate modali SM_x sia prima della diagonalizzazione delle matrici dei coefficienti (tabella 5.12) che dopo di essa (tabella 5.13).

La raffigurazione dei modi riferiti alla base canonica dello spazio naturale, riportate in tabella 5.12, mette in evidenza le deformate della sezione trasversale: attraverso l'imposizione di un warping unitario in corrispondenza di ogni nodo si ottiene un andamento della stessa componente che è al più lineare a tratti, mentre la sezione nel suo piano rimane indeformata.

La visualizzazione dei modi SM_x riferiti alla base spettrale dello spazio naturale (tabella 5.13) mette in evidenza invece le proprietà di simmetria delle forme modali: degli otto modi ricavati per la sezione in esame la metà possiedono una componente di warping con andamento simmetrico rispetto all'asse Y , mentre l'altra metà antisimmetrico. Dato l'ordine di rappresentazione scelto per i modi, dipendente dell'ordinamento degli autovalori, si hanno conseguentemente in ordine dal primo all'ultimo modo delle forme simmetriche ed antisimmetriche alternate una all'altra.

Infine si può notare che il primo modo a taglio SM_x (Modo 1) è coincidente al primo modo fondamentale FM_x (Modo 1), corrispondente al caso fondamentale di sforzo normale puro: questo consente di trascurare il primo modo SM_x nel momento in cui si costruisce una base spettrale per la cinematica della sezione, operazione fondamentale della cross-section analysis all'interno dell'applicazione della GBT.

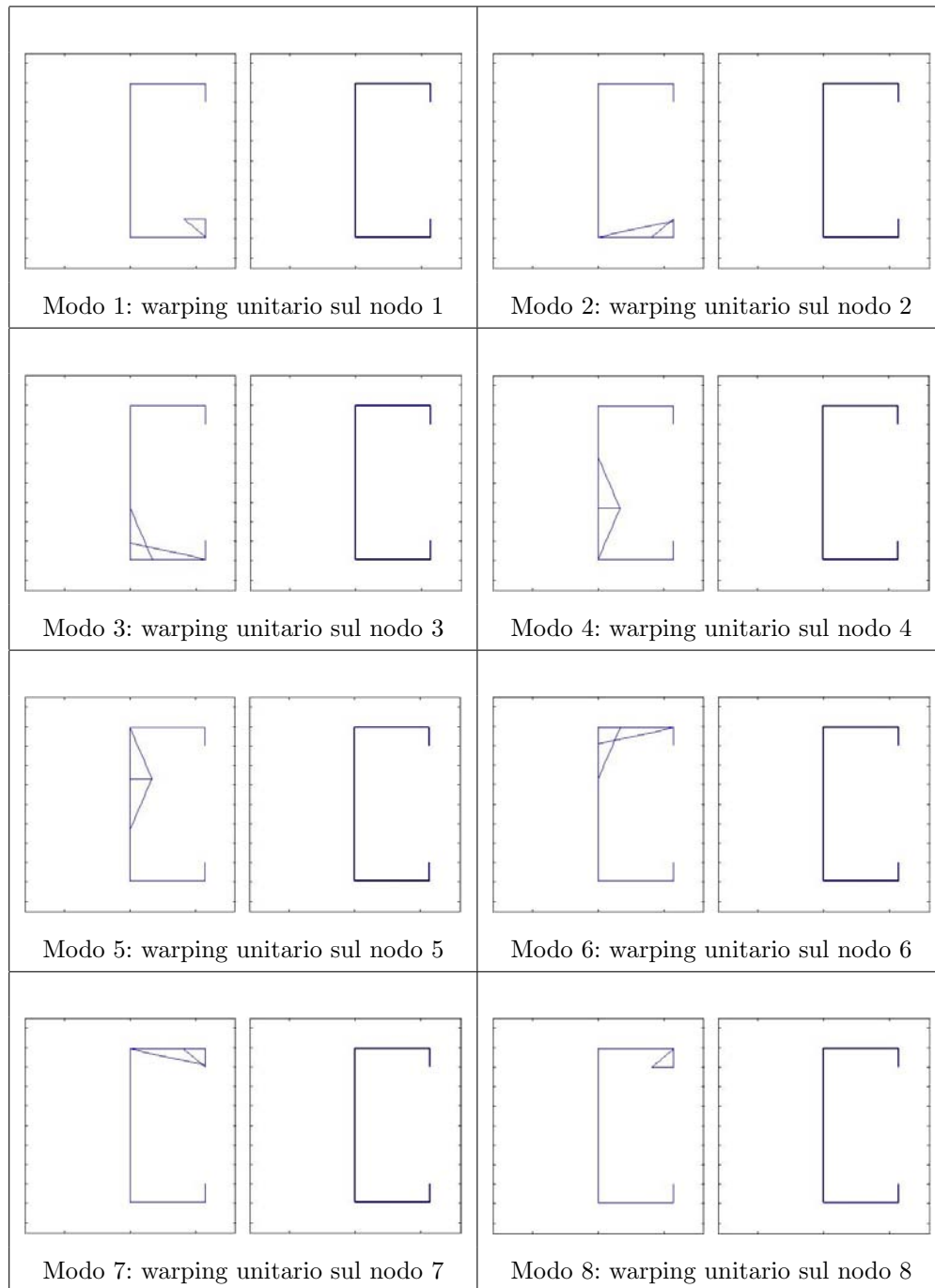


Tabella 5.12: *Modi SM_x per la sezione a C scelta: per ogni modo sono rappresentati nella parte sinistra gli spostamenti in direzione X, mentre nella parte a destra vi sono gli spostamenti nel piano Y – Z della sezione. In questo caso gli spostamenti non son diagonalizzati e fanno riferimento ai valori nodali in tabella 5.10.*

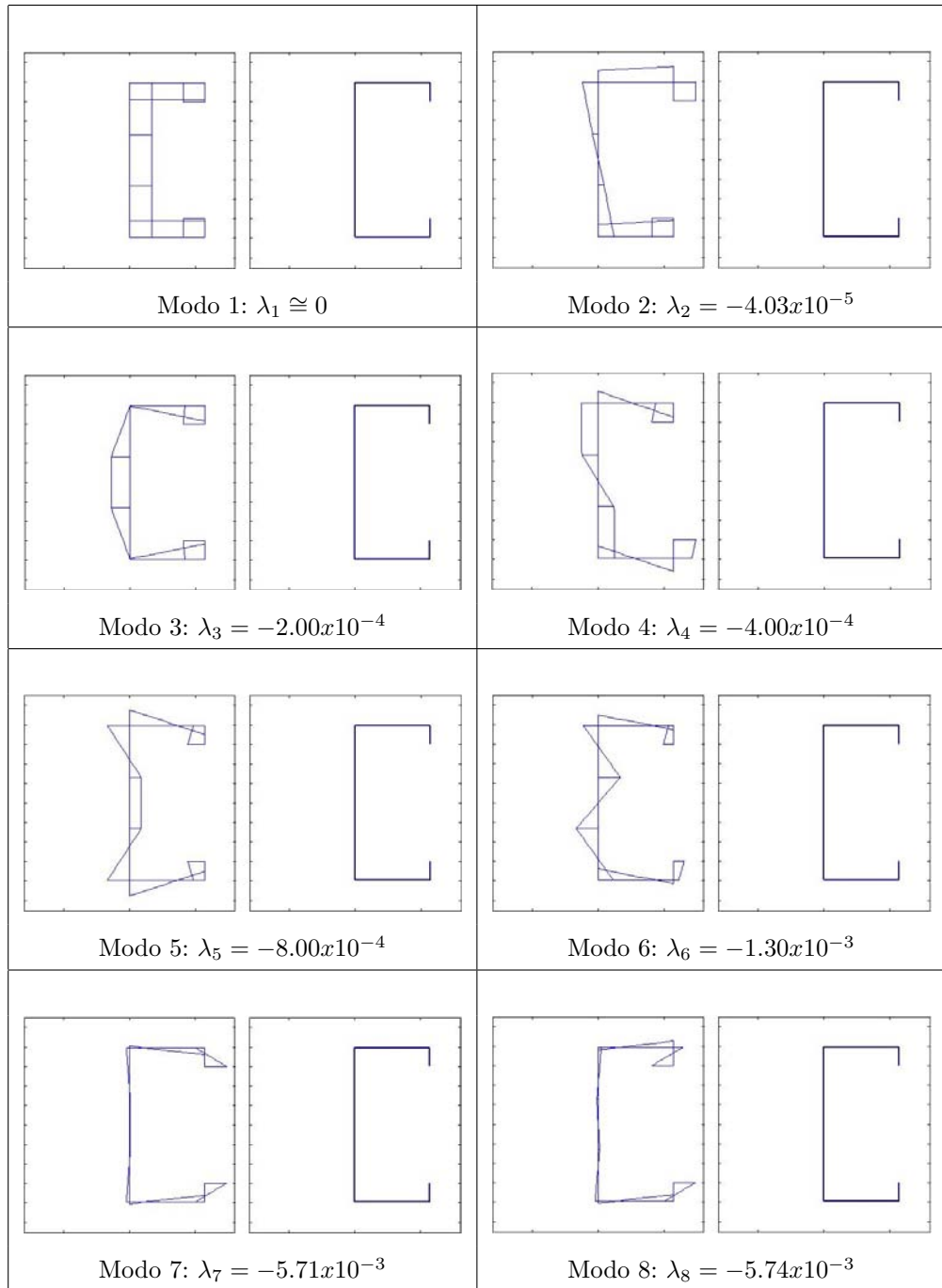


Tabella 5.13: Modi SM_x per la sezione a C scelta: per ogni modo sono rappresentati nella parte sinistra gli spostamenti in direzione X, mentre nella parte a destra vi sono gli spostamenti nel piano Y – Z della sezione. In questo caso gli spostamenti sono diagonalizzati e fanno riferimento ai valori nodali in tabella 5.11.

2.3 Interazione tra modi FM_f

Si analizzano ora i modi FM_f , per la sezione scelta, attraverso la procedura di cross-section analysis descritta precedentemente.

Data la sezione a C in esame e la discretizzazione della stessa si avranno solamente due modi fondamentali FM_f , questo in quanto due è il numero di nodi intermedi individuati sulla linea media della sezione.

Si riportano di seguito le matrici \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{G} ed \mathbf{A}^* , \mathbf{B}^* , \mathbf{G}^* , che saranno delle semplici matrici quadrate $[2 \times 2]$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{FM_f} &= \begin{bmatrix} 1.38E+07 & 1.60E+06 \\ 1.60E+06 & 1.38E+07 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{FM_f}^* &= \begin{bmatrix} 3.08E+07 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 2.44E+07 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{FM_f} &= \begin{bmatrix} -2.83E+04 & 1.47E+04 \\ 1.47E+04 & -2.83E+04 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{FM_f}^* &= \begin{bmatrix} -2.72E+04 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & -8.59E+04 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{FM_f} &= \begin{bmatrix} 2.97E+01 & -2.22E+01 \\ -2.22E+01 & 2.97E+01 \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_{FM_f}^* &= \begin{bmatrix} 1.50E+01 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 1.04E+02 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Le matrici $\mathbf{A}_{FM_f}^*$, $\mathbf{B}_{FM_f}^*$ e $\mathbf{G}_{FM_f}^*$ rappresentano la forma diagonalizzata delle matrici dei coefficienti, esse sono riferite alla base spettrale derivata dal problema agli autovalori.

Dato il seguente problema agli autovalori generalizzato per la classe dei modi FM_f :

$$(\mathbf{G}_{FM_f} - \lambda_{FM_f} \mathbf{A}_{FM_f}) \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

si ricavano gli autovalori e gli autovettori della base spettrale. Il vettore λ è il vettore contenente gli autovalori del problema:

$$\lambda_{FM_f} = \begin{bmatrix} 4.87E - 07 & 4.24E - 06 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

I due autovalori presenti nel vettore λ_{FM_f} sono ordinati dal più piccolo al più grande, questo perchè il problema agli autovalori fornisce automaticamente i modi ordinati secondo l'energia di deformazione corrispondente, dal modo a minore energia a quello a maggiore energia.

La matrice \mathbf{A}_{FM_f} è la matrice che contiene nelle proprie colonne gli autovettori risultanti dal problema agli autovalori, questa matrice costituisce la base spettrale dello spazio delle forme modali FM_f . Si riporta di seguito la matrice degli autovettori:

$$\mathbf{A}_{FM_f} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Si riportano ora le tabelle contenenti i valori delle componenti di spostamento di ogni nodo naturale della sezione per ogni forma modale FM_f considerata. Il sistema di riferimento a cui sono riferiti gli spostamenti è quello globale (X, Y, Z) , vengono infatti riportate le tre componenti di traslazione U, V, W e la rotazione nel piano della sezione ϑ_x calcolate in ogni nodo naturale.

In tabella 5.14 sono riportate le componenti di spostamento riguardanti i modi riferiti alla base canonica dello spazio naturale, in tabella 5.15 invece si riportano le componenti riguardanti le forme modali riferite alla base spettrale dello spazio naturale.

modo	nodo	U [mm]	V [mm]	W [mm]	ϑ_x [rad]
1	1	0.00	0.00000	0.00000	1.175e-003
	2	0.00	0.00000	0.00000	-2.350e-003
	3	0.00	0.00000	0.00000	1.551e-002
	6	0.00	0.00000	0.00000	4.152e-003
	7	0.00	0.00000	0.00000	-6.291e-004
	8	0.00	0.00000	0.00000	3.145e-004
2	1	0.00	0.00000	0.00000	-3.145e-004
	2	0.00	0.00000	0.00000	6.291e-004
	3	0.00	0.00000	0.00000	-4.152e-003
	6	0.00	0.00000	0.00000	-1.551e-002
	7	0.00	0.00000	0.00000	2.350e-003
	8	0.00	0.00000	0.00000	-1.175e-003

Tabella 5.14: *Spostamenti dei nodi naturali della sezione a C per ogni modo FM_f , prima della diagonalizzazione.*

Calcolati gli spostamenti dei nodi naturali per ogni modo fondamentale FM_f , si possono ora visualizzare le configurazioni deformate della sezione per i due modi rappresentando gli spostamenti nodali ed interpolandoli secondo l'ordine delle funzioni polinomiali $[\varphi_{ki}, f_{ki}, g_{ki}]$.

Si riportano quindi di seguito le deformate modali FM_f sia prima della diagonalizzazione delle matrici dei coefficienti (tabella 5.16) che dopo la diagonalizzazione (tabella 5.17).

modo	nodo	U [mm]	V [mm]	W [mm]	ϑ_x [rad]
1	1	0.00000	0.00000	0.00000	-8.604e-004
	2	0.00000	0.00000	0.00000	1.721e-003
	3	0.00000	0.00000	0.00000	-1.136e-002
	6	0.00000	0.00000	0.00000	1.136e-002
	7	0.00000	0.00000	0.00000	-1.721e-003
	8	0.00000	0.00000	0.00000	8.604e-004
2	1	0.00000	0.00000	0.00000	-1.489e-003
	2	0.00000	0.00000	0.00000	2.979e-003
	3	0.00000	0.00000	0.00000	-1.966e-002
	6	0.00000	0.00000	0.00000	-1.966e-002
	7	0.00000	0.00000	0.00000	2.979e-003
	8	0.00000	0.00000	0.00000	-1.489e-003

Tabella 5.15: *Spostamenti dei nodi naturali della sezione a C per ogni modo FM_f , dopo la diagonalizzazione.*

La raffigurazione dei modi fondamentali riferiti alla base canonica dello spazio naturale, riportate in tabella 5.16, mette in evidenza le deformate della sezione trasversale ottenute attraverso l'imposizione di uno spostamento ortogonale alla parete 'w' unitario in corrispondenza di ogni nodo intermedio: si può notare come sia rispettata l'ipotesi di indeformabilità a taglio nel piano medio della sezione.

La visualizzazione dei modi riferiti alla base spettrale dello spazio naturale (tabella 5.17) mette in evidenza invece le proprietà di simmetria delle due forme modali FM_f . Si hanno infatti una prima forma simmetrica e una seconda antisimmetrica, dove si considera l'asse di simmetria coincidente all'asse Y globale.

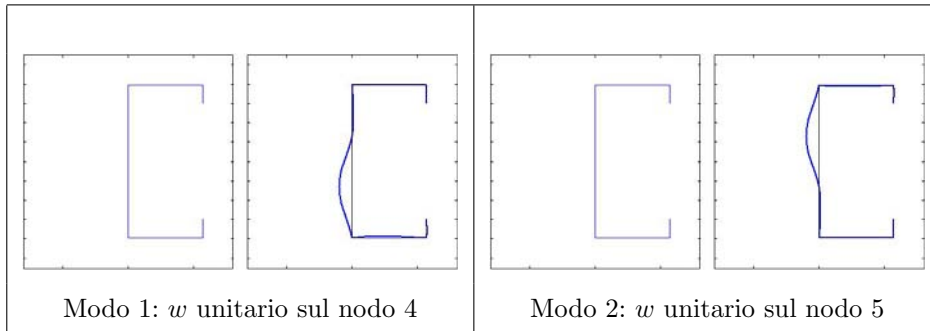


Tabella 5.16: Modi FM_f per la sezione a C scelta: per ogni modo sono rappresentati nella parte sinistra gli spostamenti in direzione X , mentre nella parte a destra vi sono gli spostamenti nel piano $Y - Z$ della sezione. In questo caso gli spostamenti non sono diagonalizzati e fanno riferimento ai valori nodali in tabella 5.14.

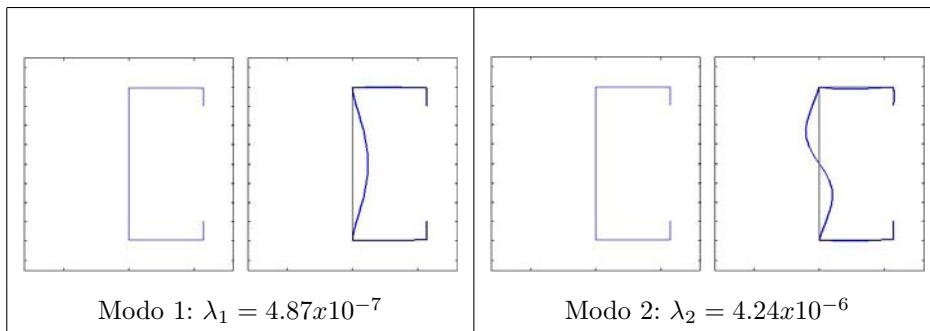


Tabella 5.17: Modi FM_f per la sezione a C scelta: per ogni modo sono rappresentati nella parte sinistra gli spostamenti in direzione x , mentre nella parte a destra vi sono gli spostamenti nel piano $y - z$ della sezione. In questo caso gli spostamenti sono diagonalizzati e fanno riferimento ai valori nodali in tabella 5.15.

2.4 Interazione tra modi $FM_x - SM_x$

Si analizza ora l'interazione tra i modi fondamentali alla Schardt FM_x ed i modi a taglio, detti alla Capurso, SM_x .

L'interazione viene studiata attraverso le sotto-matrici dei coefficienti

$\mathbf{A}_{FM_x-SM_x}$, $\mathbf{B}_{FM_x-SM_x}$, $\mathbf{G}_{FM_x-SM_x}$ e le loro corrispondenti $\mathbf{A}_{FM_x-SM_x}^*$, $\mathbf{B}_{FM_x-SM_x}^*$, $\mathbf{G}_{FM_x-SM_x}^*$, dove quest'ultime sono le matrici calcolate con riferimento alle deformate modali scritte rispetto alla base spettrale.

Le matrici di interazione tra i modi FM_x ed SM_x non saranno quadrate, ma avranno ad esempio dimensioni $[6 \times 8]$ se si assume la corrispondente sotto-matrice posizionata nella banda superiore della matrice completa (con un numero di righe pari al numero di modi alla Schardt e di colonne pari a quello dei modi alla Capurso). Si avranno invece le stesse matrici ma in forma trasposta nel caso in cui si assuma la sotto-matrice di interazione FM_x-SM_x posizionata nella banda inferiore.

Si riportano di seguito le sotto-matrici dei coefficienti che interessano le due classi di modi sopracitate, facendo riferimento alla banda superiore delle matrici dei coefficienti complete.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{FM_x-SM_x} = & \\
 & \left[\begin{array}{cccccccc}
 3.28E+06 & 1.64E+06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1.64E+06 & 1.33E+07 & 5.03E+06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 5.03E+06 & 2.23E+07 & 1.84E+07 & 9.19E+06 & 1.53E+06 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1.53E+06 & 9.19E+06 & 1.84E+07 & 2.23E+07 & 5.03E+06 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.03E+06 & 1.33E+07 & 1.64E+06 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.64E+06 & 3.28E+06
 \end{array} \right] \\
 \mathbf{A}_{FM_x-SM_x}^* = & \tag{5.25} \\
 & \left[\begin{array}{cccccccc}
 1.63E+08 & 0.00E+00 & 0.00E+00 & 0.00E+00 & 0.00E+00 & 0.00E+00 & 0.00E+00 & 0.00E+00 \\
 0.00E+00 & 6.97E+09 & 0.00E+00 & 9.13E+08 & 0.00E+00 & 2.79E+08 & 0.00E+00 & 8.83E+07 \\
 0.00E+00 & 0.00E+00 & 2.16E+09 & 0.00E+00 & 7.81E+08 & 0.00E+00 & 3.74E+07 & 0.00E+00 \\
 0.00E+00 & -2.88E+10 & 0.00E+00 & 1.57E+11 & -1.00E-04 & 3.37E+10 & 1.00E-04 & 5.08E+09 \\
 0.00E+00 & 0.00E+00 & -1.14E+06 & 0.00E+00 & 4.18E+06 & 0.00E+00 & -7.29E+06 & 0.00E+00 \\
 0.00E+00 & -7.22E+05 & 0.00E+00 & -3.21E+06 & 0.00E+00 & 2.42E+06 & 0.00E+00 & 7.83E+06
 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_{FM_x-SM_x} & \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{B}_{FM_x-SM_x}^* & \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}_{FM_x-SM_x} & = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{G}_{FM_x-SM_x}^* & = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Dall'analisi delle matrici dei coefficienti ottenute si nota che solo la matrice dei coefficienti $\mathbf{A}_{FM_x-SM_x}$ possiede delle componenti significative di interazione, mentre le matrici $\mathbf{B}_{FM_x-SM_x}$ e $\mathbf{G}_{FM_x-SM_x}$ si considerano praticamente come delle matrici nulle.

Si può notare come le matrici asteriscate, $\mathbf{A}_{FM_x-SM_x}^*$, $\mathbf{B}_{FM_x-SM_x}^*$, $\mathbf{G}_{FM_x-SM_x}^*$, ottenute attraverso le funzioni di spostamento φ_k , g_k ed f_k modificate dopo la diagonalizzazione delle matrici dei coefficienti, non siano affatto diagonali in quanto non derivanti direttamente da una trasformazione di base dello spazio naturale.

Queste sotto-matrici dei coefficienti asteriscate quindi, al contrario di quanto avviene invece per le matrici corrispondenti a modi facenti parte della stessa classe, non rappresentano la diagonalizzazione delle \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{G} nello spazio naturale ma sono solamente il formalismo matematico con il quale la GBT spiega l'interazione tra modi di differenti classi.

2.5 Interazione tra modi $FM_x - FM_f$

Si analizza l'interazione tra i modi fondamentali alla Schardt FM_x ed i modi fondamentali flessionali FM_f .

L'interazione viene studiata attraverso le sotto-matrici dei coefficienti

$\mathbf{A}_{FM_x-FM_f}$, $\mathbf{B}_{FM_x-FM_f}$, $\mathbf{G}_{FM_x-FM_f}$ e le loro corrispondenti $\mathbf{A}_{FM_x-FM_f}^*$, $\mathbf{B}_{FM_x-FM_f}^*$, $\mathbf{G}_{FM_x-FM_f}^*$.

Se si considera la banda superiore delle matrici dei coefficienti complete si ottengono delle sotto-matrici di dimensione $[6 \times 2]$, ovvero con numero di righe pari al numero di modi FM_x e di colonne pari al numero di modi FM_f . Si riportano di seguito le sotto-matrici dei coefficienti che interessano le due classi di modi sopracitate.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{FM_x-FM_f} &= \begin{bmatrix} -2.79E+05 & -1.49E+05 \\ 4.92E+05 & 2.24E+05 \\ -2.17E+05 & -7.09E+04 \\ -7.09E+04 & -2.17E+05 \\ 2.24E+05 & 4.92E+05 \\ -1.49E+05 & -2.79E+05 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_{FM_x-FM_f}^* &= \begin{bmatrix} 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & -3.75E+06 \\ -3.31E+07 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 8.73E+08 \\ 1.36E+06 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & -5.24E+05 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{FM_x-FM_f} &= \begin{bmatrix} 2.77E+02 & 3.13E+01 \\ -3.24E+02 & 1.58E+00 \\ 6.30E+01 & -4.92E+01 \\ -4.92E+01 & 6.30E+01 \\ 1.58E+00 & -3.24E+02 \\ 3.13E+01 & 2.77E+02 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_{FM_x-FM_f}^* &= \begin{bmatrix} 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 4.08E+03 \\ 1.58E+03 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & -7.74E+04 \\ -8.37E+02 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 7.95E+02 \end{bmatrix} \tag{5.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{FM_x-FM_f} &\cong \begin{bmatrix} 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \end{bmatrix} \\
\mathbf{G}_{FM_x-FM_f}^* &\cong \begin{bmatrix} 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \end{bmatrix} \tag{5.30}
\end{aligned}$$

Dall'analisi delle matrici dei coefficienti ottenute si nota come l'interazione tra le due classi di modi sia descritta dalle componenti delle matrici $\mathbf{A}_{FM_x-FM_f}^*$ e $\mathbf{B}_{FM_x-FM_f}^*$, mentre si considera trascurabile il contributo dato dalla matrice $\mathbf{G}_{FM_x-FM_f}^*$

2.6 Interazione tra modi $SM_x - FM_f$

Si analizza ora l'interazione tra i modi a taglio alla Capurso SM_x ed i modi fondamentali a flessione FM_f .

L'interazione viene studiata attraverso le sotto-matrici dei coefficienti

$\mathbf{A}_{FM_x-FM_f}$, $\mathbf{B}_{FM_x-FM_f}$, $\mathbf{G}_{FM_x-FM_f}$ e le loro corrispondenti $\mathbf{A}_{FM_x-FM_f}^*$, $\mathbf{B}_{FM_x-FM_f}^*$, $\mathbf{G}_{FM_x-FM_f}^*$.

Se si considera la banda superiore delle matrici dei coefficienti complete si ottengono delle sotto-matrici con dimensione $[8 \times 2]$, ovvero con numero di righe pari al numero di modi SM_x e di colonne pari al numero di modi FM_f . Si riportano di seguito le sotto-matrici dei coefficienti che interessano le due classi di modi sopracitate.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{SM_x-FM_f} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_{SM_x-FM_f}^* &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{SM_x-FM_f} &\cong \begin{bmatrix} 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_{SM_x-FM_f}^* &\cong \begin{bmatrix} 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 0.00E+00 & 0.00E+00 \end{bmatrix} \tag{5.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{SM_x-FM_f} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{G}_{SM_x-FM_f}^* &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.33}
\end{aligned}$$

Dall'analisi delle matrici sopra riportate si deduce che non ci sono componenti significative di interazione tra i modi facenti parte della classe SM_x e quelli facenti parte della classe FM_f . Questo è dato dal fatto che tutte le componenti delle tre matrici dei coefficienti $\mathbf{A}_{SM_x-FM_f}$, $\mathbf{B}_{SM_x-FM_f}$, $\mathbf{G}_{SM_x-FM_f}$ si considerano trascurabili.

Si può quindi affermare che l'imposizione di una qualsiasi deformata appartenente alla classe dei modi a taglio alla Capurso, sulla sezione scelta, non può innescare nessun cinematismo tipico dei modi flessionali FM_f .

Ciò è facilmente intuibile anche dal fatto che, per definizione, i modi SM_x non comportano alcuna deformazione nel piano della sezione ma solamente un warping lineare, mentre per quel che riguarda gli FM_f sono previste al contrario deformazioni solamente all'interno del piano della sezione.

2.7 Analisi dell'interazione tra singoli modi deformativi della sezione trasversale tramite interfaccia grafica

Fino a qui si sono esposti in maniera dettagliata i risultati ottenuti dalla procedura di cross-section analysis eseguita per la sezione a C in esame.

Si sono illustrate graficamente, per ogni rispettiva classe, tutte le forme modali che compongono la base sulla quale è stata definita la cinematica della sezione (eq. 3.1-3.3). Poi si sono calcolate le componenti di legame costitutivo per la formulazione GBT e sono state raccolte nelle matrici dei coefficienti **A**, **B** e **G** che, in seguito alla risoluzione di un problema agli autovalori, si sono ridotte a matrici diagonali. Delle corrispondenti matrici dei coefficienti *complete*, cioè comprendenti le interazioni di tutti i modi assunti per le tre classi FM_x , SM_x ed FM_f , si sono illustrati i sotto-blocchi relativi alle tre singole classi di modo ed i sotto-blocchi "misti", relativi a due differenti classi.

Ora si vuole approfondire l'analisi delle componenti delle matrici dei coefficienti relative all'interazione di due modi deformativi della sezione.

L'importanza di queste componenti è dovuta al fatto che esse rappresentano anche le componenti della matrice di legame costitutivo **C** per la formulazione GBT, per cui sono una rappresentazione quantitativa e non solo qualitativa dell'interazione tra due modi deformativi propri della sezione trasversale.

Il valore numerico di un singolo coefficiente o di una singola componente di legame consente di valutare e di dare una interpretazione alle complicate espressioni 3.39-3.41 delle componenti A_{ikj} , B_{ikj} e G_{ikj} .

Al fine quindi di operare uno studio accurato dell'interazione tra modi deformativi attraverso il controllo delle componenti costitutive, si è creato un

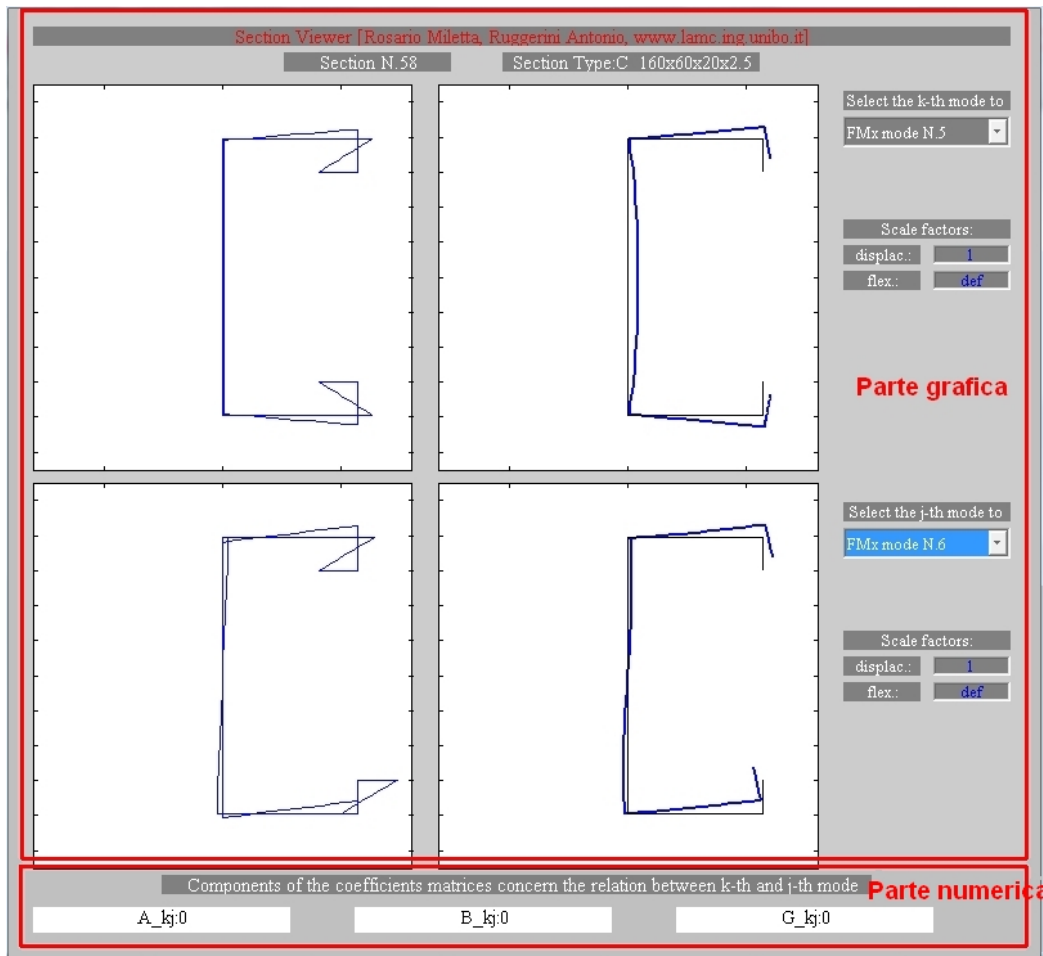


Figura 5.4: Finestra grafica interattiva che consente di valutare l'interazione tra i vari modi deformativi della sezione attraverso le componenti A_{kj} , B_{kj} , G_{kj}

codice in ambiente *Matlab* dotato di interfaccia grafica che permette la visualizzazione simultanea di due diverse forme modali e delle loro relative componenti di interazione.

Si sottointende che le forme modali e le componenti di interazione oggetto di studio siano sempre riferite alla base spettrale dello spazio dei modi.

In figura 5.4 si rappresenta l'interfaccia grafica interattiva che è stata creata. L'interfaccia è suddivisa in due settori principali:

- la *parte grafica*, occupante la maggior parte della finestra, consente

di visualizzare le tre componenti di spostamento relative a due forme modali contemporaneamente;

- la *parte numerica*, posizionata nella parte bassa della finestra, fornisce i valori delle componenti di interazione A_{ikj} , B_{ikj} e G_{ikj} relative alle forme modali k -esima e j -esima scelte nella parte grafica.

Tramite un menù a tendina è possibile scegliere quali due modi deformativi rappresentare nei due grafici, uno raffigurante lo spostamento fuori dal piano (grafico a sinistra) e l'altro lo spostamento nel piano della sezione (grafico a destra). I valori delle componenti di interazione nella parte analitica vengono aggiornate in automatico dal codice appena si seleziona un nuovo modo dai due menù.

Grazie a questo strumento grafico è ora possibile fare alcune osservazioni sulla interazione tra i vari modi deformativi. Dati i valori delle componenti di interazione A_{ikj} , B_{ikj} e G_{ikj} , relative ai modi k -esimo e j -esimo scelti, e date le espressioni 3.39-3.41 dalle quali le stesse componenti derivano, l'obiettivo è quello di fare delle considerazioni riguardo le forme modali ottenute dalla cross-section analysis al fine di interpretarne il significato fisico intrinseco, nei casi in cui sia possibile farlo.

Si analizzano quindi ora alcuni casi notevoli di interazione tra le deformate modali della sezione a C assunta nell'esempio 2.

2.7.1 Interazione tra i modi della classe FM_x

La classe dei modi deformativi alla Schardt ha l'importante proprietà di contenere quei cinematismi che sono propri anche delle teorie classiche di trave,

grazie ad essi si può pensare alla GBT come una estensione delle teorie convenzionali per l'analisi di travi in parete sottile.

E' importante rilevare come dall'analisi delle forme modali correlate ai cinematici noti, ovvero quelli di sforzo normale, flessione e torsione, si possa arrivare alla derivazione delle proprietà geometriche ed inerziali della sezione, proprietà sulle quali le teorie classiche basano la loro formulazione.

Sforzo Normale: Se si analizza la prima deformata modale (**Modo 1**) della classe FM_x si ha che le componenti costitutive relative al modo stesso sono pari a:

- $A_{11} = 162750000 = EA;$
- $B_{11} \cong 0;$
- $G_{11} \cong 0.$

La componente A_{11} è quindi pari alla rigidità assiale EA della sezione, mentre le altre due componenti hanno valori di molti ordini di grandezza inferiori per cui possono essere trascurate.

Prendendo in considerazione l'espressione 3.39 della componente A_{ikj} si nota che l'unico contributo non nullo è fornito dall'integrale sulle funzioni di warping, in quanto per il modo 1 non si hanno deformazioni nel piano della sezione. Si ottiene la seguente uguaglianza:

$$A_{i11} = \int t_i \hat{C}_{11}^{(m)} \varphi_{i1}^2 ds_i = \int t_i E \varphi_{i1}^2 ds_i \quad (5.34)$$

Data la 5.34 si può quindi dedurre come la funzione di warping φ_{i1} , al fine

di rappresentare il cinematismo dello sforzo normale per la sezione, non possa essere altro che pari all'unità su ogni parete i . Questo è vero e lo si può verificare dalla tabella 5.7 in corrispondenza del Modo 1.

Flessione rispetto agli assi principali di inerzia: Se si analizza l'interazione tra le forme modali seconda e terza (**Modo 2** e **Modo 3**) della classe dei modi fondamentali alla Schardt visualizzate in figura 5.5, si hanno per le corrispondenti componenti di legame i seguenti valori:

- $A_{23} = 0$;
- $B_{23} = 0$;
- $G_{23} = 0$.

Le componenti di interazione tra i due modi sono quindi tutte nulle, ma questo è chiaramente dato dal fatto che le forme modali corrispondenti ai due modi fanno parte di una base spettrale dello spazio dei modi FM_x .

Se ora si prova a ragionare a ritroso, dando per note le componenti costitutive e per incognite le due forme modali si devono studiare le espressioni generali 3.39-3.41. Per quanto riguarda le componenti B_{i23} e G_{i23} è banale osservare che siano nulle date le ipotesi di indeformabilità al taglio nel piano medio della sezione ($g_{ki} = -\dot{\varphi}_{ki}$) e data la deformazione della sezione nel suo piano per i due modi in figura 5.5 (dove la f_{ki} è nulla in ogni parete in almeno uno dei due modi).

La componente A_{i23} possiede invece un contributo che a priori non si può considerare nullo, esso è pari a:

$$A_{i23} = \int t_i \hat{C}_{11}^{(m)} \varphi_{i2} \varphi_{i3} ds_i \quad (5.35)$$

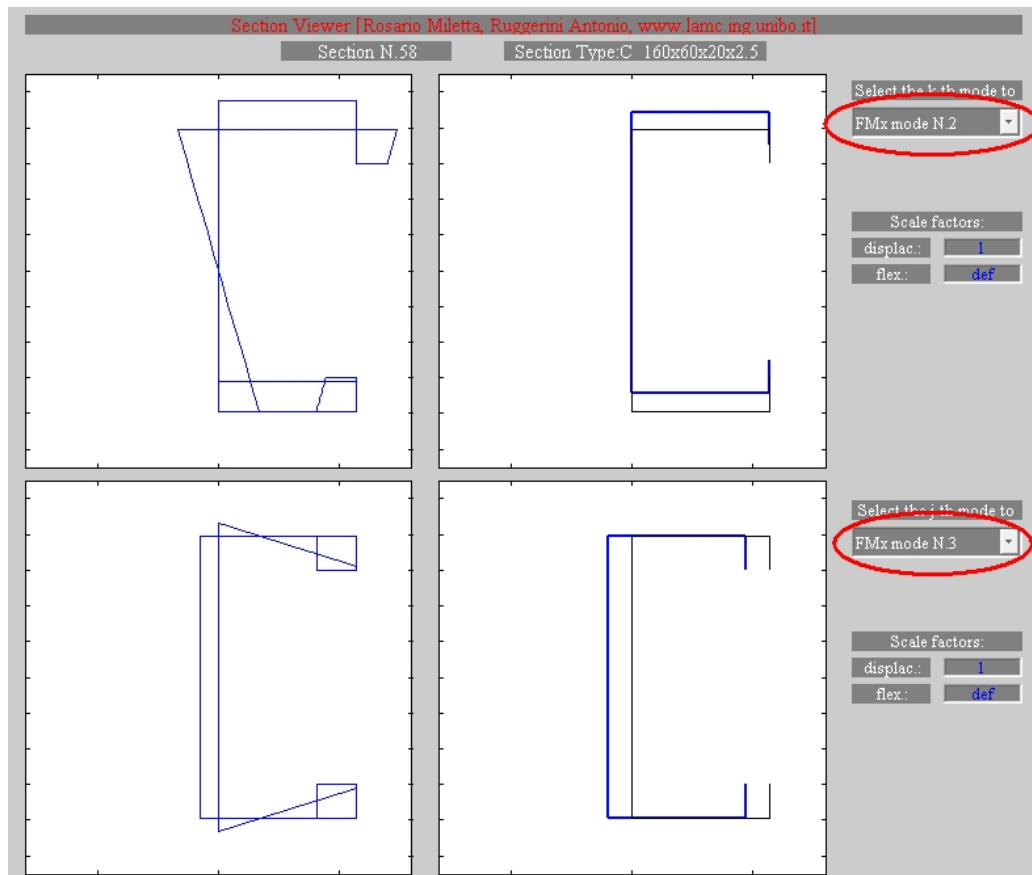


Figura 5.5: Confronto tra le componenti di spostamento dei modi 2 e 3 della classe FM_x

Affinchè la componente A_{i23} sia nulla si deve annullare l'integrale delle funzioni φ_{i2} e φ_{i3} in equazione 5.35. Per cui la condizione sulle funzioni di warping dei due modi deve essere:

$$\int \varphi_{i2} \varphi_{i3} ds_i = 0 \quad (5.36)$$

Osservando le funzioni di warping ottenute in figura 5.5 si nota come, assumendo un sistema di riferimento xyz traslato rispetto a quello globale XYZ e centrato nel baricentro della sezione, esse possano essere espresse come:

$$\varphi_{i2} = z \quad (5.37)$$

$$\varphi_{i3} = y \quad (5.38)$$

per cui l'espressione 5.36 viene ad essere:

$$\int z y ds_i = 0 \quad (5.39)$$

L'integrale nell'equazione 5.39 rappresenta un momento d'inerzia centrifugo per la sezione in esame. Venendo questo eguagliato a zero significa intrinsecamente che il sistema di riferimento adottato possiede degli assi diretti come gli assi principali di inerzia della sezione.

Si è quindi dimostrato come le forme modali Modo 2 e Modo 3 coincidono

con i casi fondamentali di flessione attorno alle due direzioni principali d'inertzia.

Torsione rispetto all'asse passante per il centro di torsione "T": Si analizza ora la quarta deformata modale (**Modo 4**), visualizzando le relative componenti di legame, si possono fare le seguenti deduzioni:

- $A_{44} = 4.33691E + 14 = EJ_w$;
- $B_{44} = -1.30327E + 08 = -GJ_t$;
- $G_{44} \cong 0$.

Per quanto puntualizzato anche nell'esempio 1 (paragrafo 1) si ha che la componente A_{44} è pari alla rigidità torsionale alla Vlasov " EJ_w ", mentre la componente B_{44} è uguale alla rigidità torsionale alla D.S.V., la " GJ_t ". La componente G_{44} risulta invece, da calcolo, di molti ordini di grandezza inferiore rispetto alle altre due, la si considera per questo trascurabile.

Ora, analizzando sempre le espressioni generali 3.39-3.41 si vuole arrivare a verificare queste relazioni e dimostrare quindi che il cinematismo del quarto modo alla Schardt corrisponde al modo deformativo della torsione primaria più quella secondaria.

Si osservi l'espressione 3.41 e la si pensi specializzata per il calcolo della componente G_{44} , dato che essa per ipotesi si considera nulla si ottiene che le componenti di spostamento \ddot{f}_{i4} e \dot{g}_{i4} debbano essere nulle per ogni parete i . Questo può essere verificato dal fatto che in generale per i modi FM_x le componenti g_{ik} sono costanti lungo le pareti, per cui la loro derivata è nulla, in più si deduce che si devono assumere funzioni f_{ik} che siano al più lineari, in quanto deve essere nulla la loro derivata seconda.

Si passa ora a considerare l'espressione 3.41, che per le ipotesi fatte si riduce alla seguente uguaglianza:

$$B_{i44} = \int \frac{t_i^3}{3} \hat{C}_{33}^{(f)} \dot{f}_{i4}^2 ds_i = \int \frac{t_i^3}{3} G \dot{f}_{i4}^2 ds_i \quad (5.40)$$

Dato che il valore di B_{i44} deve essere pari alla rigidità torsionale GJ_t e data l'espressione dell'inerzia torsionale primaria per una sezione in parete sottile:

$$J_t = \int \frac{t_i^3}{3} ds_i$$

si ottiene che la componente di spostamento deve per forza avere derivata in s unitaria:

$$\dot{f}_{i4} = \frac{d f_{i4}}{d s} = 1$$

Questo vuole quindi dire che la componente B_{44} sarà pari alla rigidità torsionale alla d.S.V. solo se la componente di spostamento f_{i4} è lineare e con derivata unitaria su tutte le pareti i .

A seguito di questa osservazione si deduce che la sezione si mantiene rigida nel proprio piano e ruota attorno al centro di torsione di un angolo unitario. Si è così dimostrato come il Modo 4 comprenda il cinematismo tipico della torsione primaria.

Considerando infine l'espressione 3.39 della componente A_{ikj} , si vogliono ricavare le proprietà della componente di spostamento φ_{i4} della quale non si è ancora fatto accenno. L'espressione della componente A_{ikj} si semplifica in questo modo per il Modo 4:

$$A_{i44} = \int t_i \hat{C}_{11}^{(m)} \varphi_{i4}^2 ds_i = \int t_i E \varphi_{i4}^2 ds_i \quad (5.41)$$

Si riporta l'equazione 5.3 per il calcolo del momento d'inerzia settoriale della sezione:

$$J_w = \int_l \Omega^2(s) t(s) ds_l$$

Se si confronta questa equazione con la 5.41, sapendo che $A_{44} = EJ_w$ per ipotesi, si deduce chiaramente che la componente di spostamento φ_4 deve essere uguale all'area settoriale Ω della sezione in esame.

Si può quindi ora affermare che anche il cinematismo della torsione secondaria è compreso all'interno delle componenti di spostamento del Modo 4.

In figura 5.6 si visualizzano le componenti di spostamento del Modo 4. Si noti come la componente di spostamento fuori dal piano della sezione (grafico a sinistra) coincida con l'area settoriale della sezione a 'C', mentre gli spostamenti nel piano (grafico a destra) rappresentino una rotazione rigida della sezione attorno al centro di taglio "T".

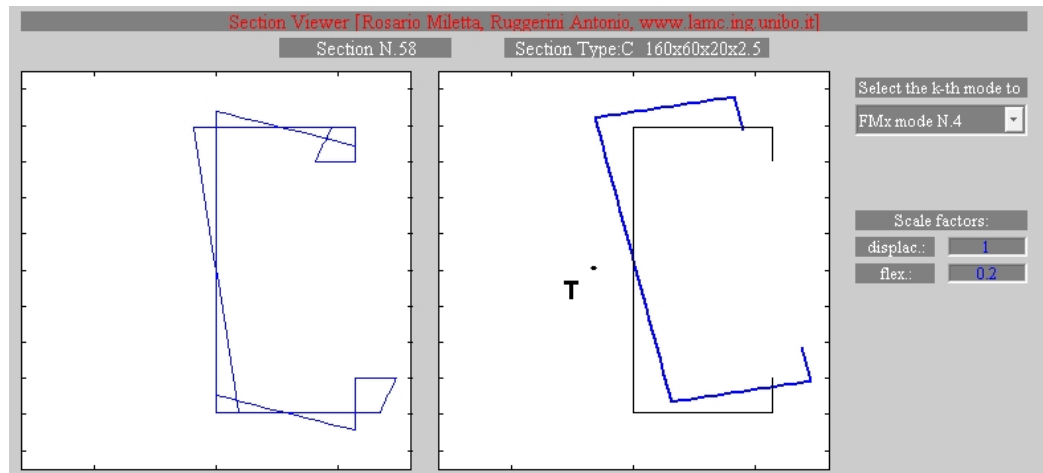


Figura 5.6: Rappresentazione delle componenti di spostamento del Modo 4 classe FM_x

2.7.2 Interazione tra i modi della classe FM_x ed SM_x

Per quel che concerne l'interazione tra forme modali FM_x ed SM_x si mettono ora in evidenza alcune osservazioni riguardo la relazione tra i valori ottenuti delle componenti A_{ikj} , B_{ikj} , G_{ikj} e le deformate modali corrispondenti.

La prima considerazione da farsi riguarda il **Modo 1** della classe SM_x (in posizione -7,7- nella matrice dei coefficienti completa), il quale si scopre essere coincidente con il primo modo della classe FM_x . Questo è evidente dalla figura 5.7, in cui si nota la corrispondenza fra le componenti di spostamento dei due modi e si hanno i seguenti valori delle componenti di interazione:

- $A_{17} = 162750000 = EA$;
- $B_{17} \cong 0$;
- $G_{17} \cong 0$.

Tali componenti sono identiche a quelle relative all'interazione del primo modo FM_x con se stesso, ovvero alle componenti A_{11} , B_{11} , G_{11} . Questo conferma

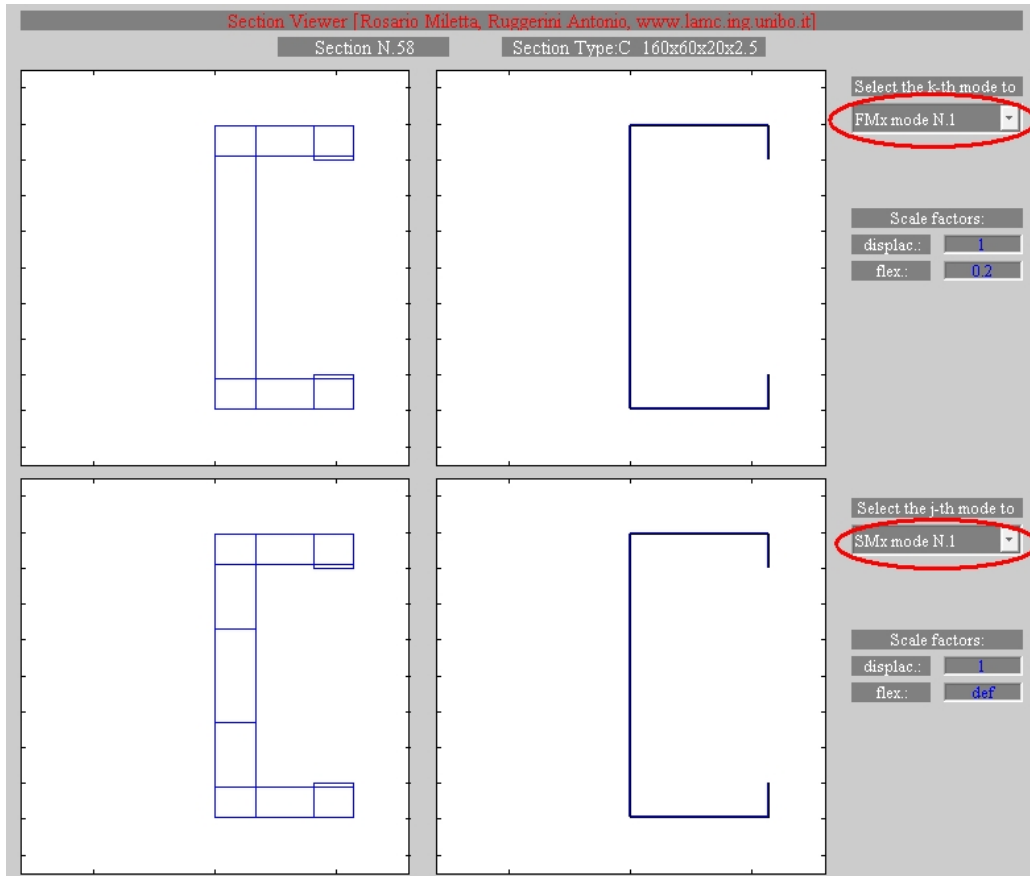


Figura 5.7: Rappresentazione delle forme modali corrispondenti al Modo 1 FM_x ed al Modo 1 SM_x

il fatto che i due modi sono identici.

Per eliminare quindi l'ambiguità presente nella base dello spazio naturale dei modi è opportuno eliminare il primo modo SM_x . Si avranno di conseguenza un numero di modi deformativi "alla Capurso" pari al numero di nodi naturali ed intermedi meno uno.

Altre osservazioni possono essere fatte in generale sulle relazioni tra i modi delle due classi.

In particolare, si nota come le componenti costitutive di interazione tra due

forme modali assumono valore significativo solamente quando i due cinematici interessati presentino le stesse proprietà di simmetria.

Per cui, in generale, scelti due modi deformativi di cui uno fondamentale alla Schardt e uno alla Capurso, si ha che essi sono interagenti soltanto nel caso in cui le corrispondenti forme modali siano entrambe o *simmetriche* o *antisimmetriche* rispetto all'asse di simmetria della sezione.

Questa caratteristica di interazione tra le forme modali, oltre ad essere intuitivamente accettabile, è anche dimostrabile dall'osservazione delle espressioni delle componenti costitutive specializzate per i modi SM_x (vedi eq. 4.8-4.10). Esse forniscono, infatti, i valori delle componenti di legame tramite degli integrali sulla linea media; la parte integranda è costituita dalle componenti di spostamento dei due modi moltiplicate tra loro. Chiaramente se una componente è assunta simmetrica e l'altra antisimmetrica, venendo poi integrate sulla intera sezione, si annullano vicendevolmente.

2.7.3 Interazione tra i modi della classe FM_x ed FM_f

Le correlazioni tra le forme appartenenti alla classe dei modi alla Schardt e quelle dei modi fondamentali flessionali sono sempre analizzabili tramite la valutazione delle componenti di interazione A_{ikj} , B_{ikj} , G_{ikj} .

Dall'osservazione dei valori delle componenti di legame e delle relative forme modali associate (per tutte le possibili coppie di modi) si deduce che l'interazione tra due forme modali appartenenti alle due classi in esame è solamente legata a proprietà di simmetria delle componenti di spostamento.

Quindi due forme modali, di cui una appartenente alla classe FM_x ed una alla FM_f , interagiscono tra loro solamente se entrambe simmetriche o antisimmetriche.

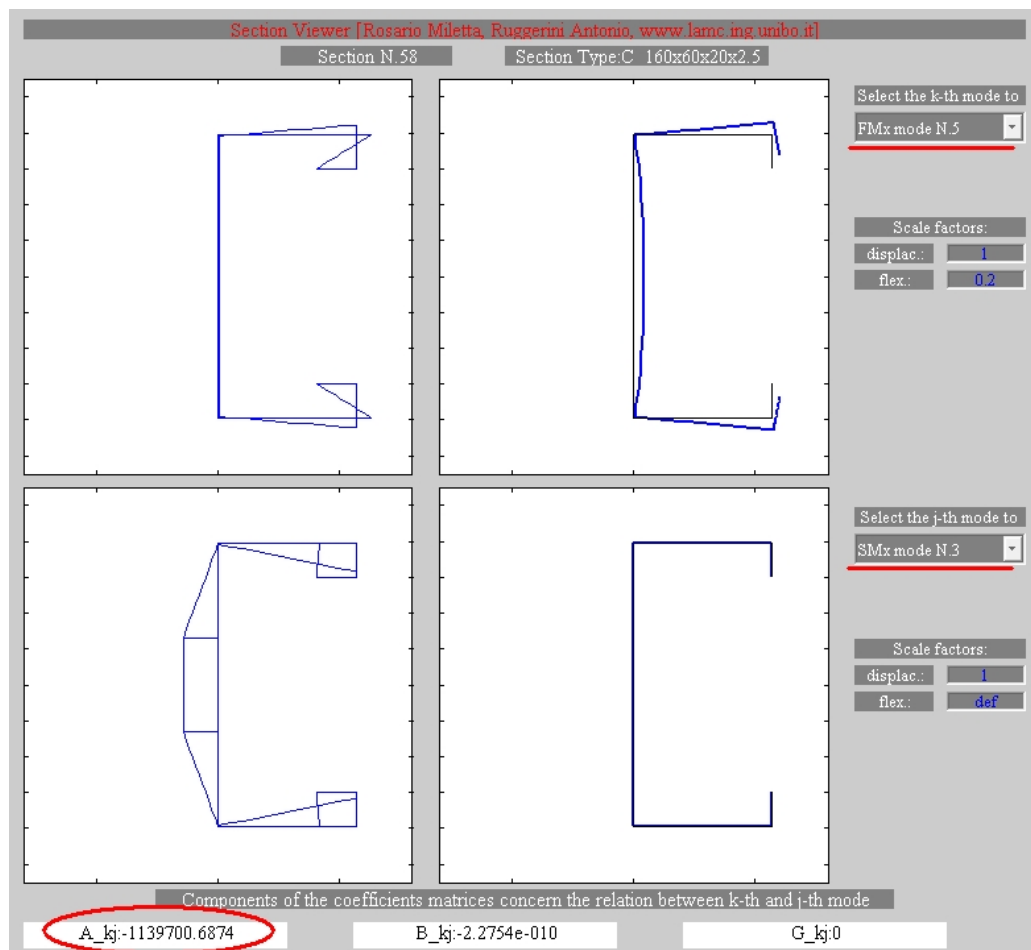


Figura 5.8: Rappresentazione dell'interazione tra il Modo 5 FM_x ed il Modo 3 SM_x : le due forme sono entrambe "simmetriche" e per questo si ha una componente significativa A_{kj} .

2.7.4 Interazione tra i modi della classe SM_x ed FM_f

Per quel che riguarda l'interazione tra le forme della classe dei modi a taglio alla Capurso e quelle dei modi fondamentali flessionali si può notare come essi non siano mai in correlazione tra loro.

Come già riportato infatti al paragrafo 2.6, le forme modali per i modi SM_x sono definite nella sola componente di warping, mentre i modi FM_f presentano solo componenti di spostamento nel piano della sezione.

Le forme modali di queste due classi non possono quindi interagire tra loro.

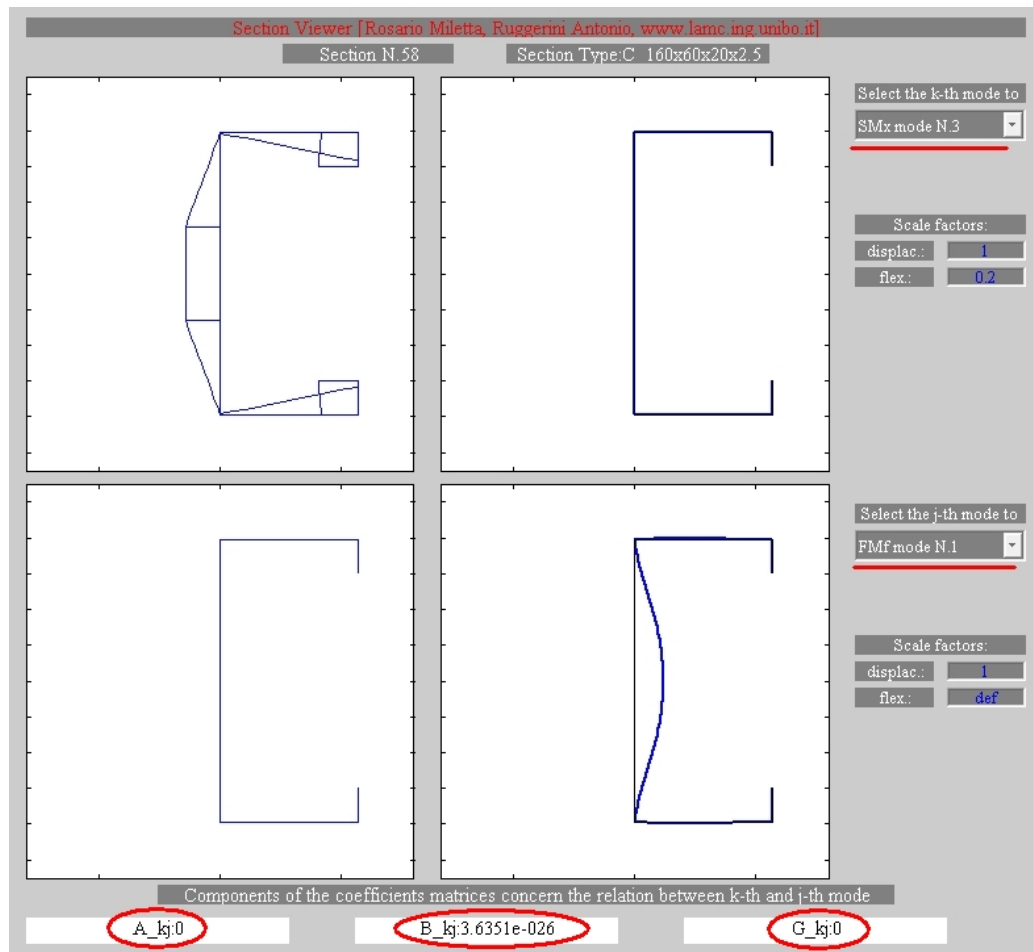


Figura 5.9: Rappresentazione dell'interazione tra il Modo 3 SM_x ed il Modo 1 FM_f : le due forme non interagiscono, le componenti di legame sono tutte nulle.

2.8 Matrice costitutiva per la sezione a C

La matrice di legame costitutivo per la formulazione della Generalized Beam Theory indicata con il simbolo \mathbf{C} si ricava direttamente dalle matrici dei coefficienti complete \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{G} , in accordo con l'espressione 3.42.

La matrice \mathbf{C} è una matrice quadrata di dimensioni pari al numero di modi scelti per caratterizzare la cinematica della sezione moltiplicato per tre: questo deriva dal fatto che la matrice costitutiva elementare $\hat{\mathbf{C}}$ per il solido di tipo trave è una matrice $[3 \times 3]$.

Si vuole ora evidenziare la topologia della matrice costitutiva \mathbf{C} a seconda delle classi di modo che si tengono in considerazione per descrivere la cinematica della sezione trasversale. Queste matrici saranno di tipo "sparso", caratterizzate cioè dall'avere un numero notevole di componenti nulle. Si studierà la topologia delle matrici costitutive scritte sia con componenti delle matrici dei coefficienti diagonalizzate che non diagonalizzate.

2.8.1 Matrice costitutiva per i modi FM_x

Data la sezione a "C" in esame si considerino le matrici dei coefficienti diagonalizzate $\mathbf{A}_{FM_x}^*$, $\mathbf{B}_{FM_x}^*$ e $\mathbf{G}_{FM_x}^*$ per la costruzione della matrice di legame riguardante i soli modi alla Schardt.

La matrice di legame \mathbf{C} in figura 5.10 è stata ottenuta a seguito di un ordinamento del vettore \mathbf{q} dato dalla espressione 3.16. Un'altra rappresentazione della matrice \mathbf{C} può essere ottenuta riordinando nel vettore delle deformazioni generalizzate le derivate rispetto ad x dei parametri V , spostamenti generalizzati. Si pensa di riordinare il vettore \mathbf{q} come segue:

$$\mathbf{q}_{(2)} = [V_1, V_2, \dots, V_N, V'_1, V'_2, \dots, V'_N, V''_1, V''_2, \dots, V''_N]^T \quad (5.42)$$

Si riporta quindi la topologia della matrice costitutiva riordinata secondo il vettore $q_{(2)}$ in figura 5.11.

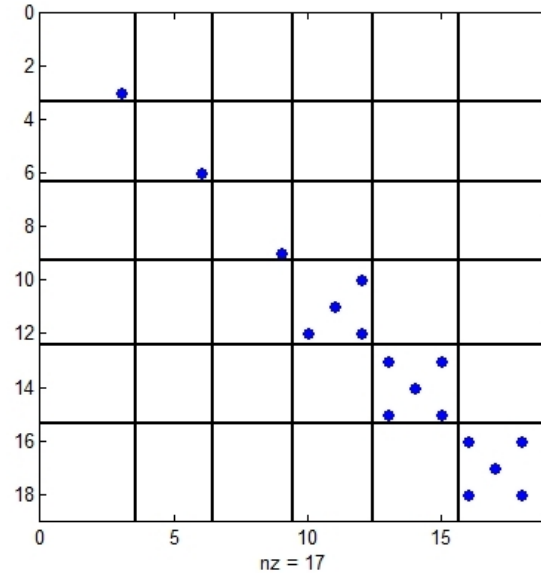


Figura 5.10: *Topologia della matrice \mathbf{C} per i modi FM_x dopo la diagonalizzazione*

I valori che rappresentano un "non-zero value" (nz) nelle figure appena rappresentate corrispondono a numeri superiori ad una certa tolleranza che viene fissata a $1 \cdot 10^{-5}$.

In figura 5.10 con linee spesse sono state rimarcate le sottomatrici $[3 \times 3]$ corrispondenti all'interazione tra ogni modo FM_x : è da notare come la diagonalizzazione abbia reso tutte le sotto-matrici fuori dalla diagonale principale nulle.

In figura 5.11 invece, con linee spesse sono state individuate le righe e le colonne corrispondenti alle posizioni degli spostamenti generalizzati suddivisi a seconda del loro grado di derivazione. Secondo infatti il vettore riordinato $\mathbf{q}_{(2)}$, si raccolgono prima tutte le \mathbf{V} di ordine di derivata nullo, poi primo e poi secondo. Si individuano in questo modo nove sotto-matrici delle quali per l'espressione 3.42 solo cinque non sono nulle e corrispondono esattamente

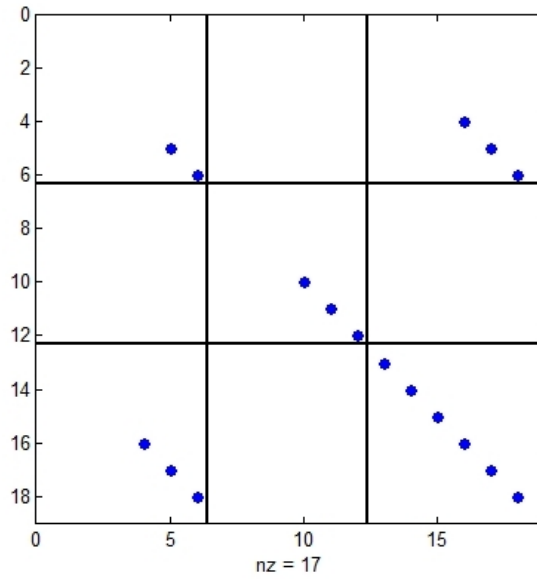


Figura 5.11: *Topologia della matrice \mathbf{C} per i modi FM_x dopo la diagonalizzazione e riordinata secondo il vettore $\mathbf{q}_{(2)}$*

alle matrici \mathbf{A} , \mathbf{G} , $\mathbf{B}^{(1)}$, $\mathbf{B}^{(2)}$ e la sua trasposta.

La matrice costitutiva \mathbf{C} , in generale, deriva dalla definizione di un potenziale energetico elastico-lineare ϕ . Esso è sempre positivo se si hanno deformazioni nel solido tridimensionale in quanto "fisicamente" per deformare un corpo è necessario compiere lavoro.

Da queste considerazioni si deduce che la matrice di legame deve essere sempre definita positiva, il che vuol dire che deve possedere degli autovalori maggiori o uguali a zero.

Vengono ora calcolati gli autovalori della matrice \mathbf{C} e riportati di seguito nel vettore λ .

$$\lambda = \begin{bmatrix} 0.00E + 00 \\ 0.00E + 00 \\ 0.00E + 00 \\ 0.00E + 00 \\ 0.00E + 00 \\ 0.00E + 00 \\ 0.00E + 00 \\ 9.50E - 03 \\ 2.85E - 02 \\ 1.26E + 02 \\ 1.45E + 02 \\ 7.40E + 06 \\ 8.30E + 06 \\ 1.30E + 08 \\ 1.63E + 08 \\ 8.11E + 10 \\ 6.41E + 11 \\ 4.34E + 14 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Si può notare come nel vettore λ gli autovalori siano ordinati in ordine crescente ed in particolare i primi sette siano nulli.

La presenza di autovalori nulli trova giustificazione nel fatto che si debbano conteggiare i modi rigidi cui può essere sottoposto il corpo tridimensionale, per i quali l'energia di deformazione associata è quindi da considerarsi nulla. I moti rigidi possibili per un solido reale sono sei, di cui tre traslazioni e tre rotazioni.

Il settimo modo rigido individuato dall'ulteriore autovalore nullo è invece dovuto all'indeterminazione legata allo sforzo normale e che è insita nella

definizione dell'ipotesi cinematica.

Dalla espressione 3.1 si può infatti notare come lo spostamento d_x in direzione assiale sia definito in funzione della derivata prima dello spostamento generalizzato V_k . Questa caratteristica della cinematica sulla quale è basata la GBT porta quindi ad una indeterminazione aggiuntiva legata allo spostamento assiale.

Si riportano in figura 5.12 e 5.13 le topologie delle matrici costitutive con componenti non diagonalizzate rispettivamente ordinate secondo il vettore \mathbf{q} e $\mathbf{q}(2)$.

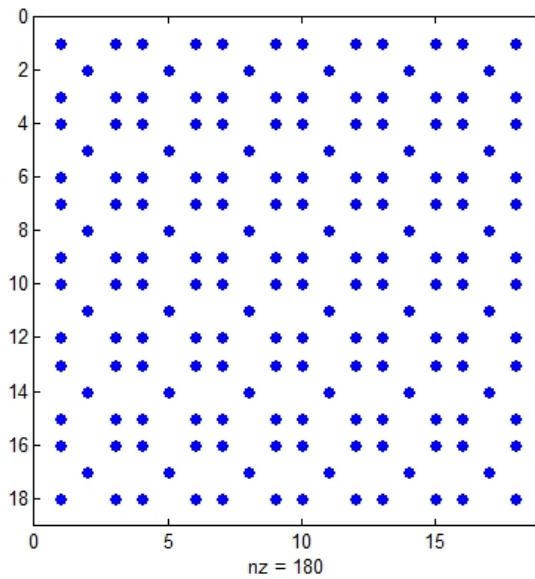


Figura 5.12: *Topologia della matrice C per i modi FM_x prima della diagonalizzazione*

Le matrici costitutive ottenute attraverso componenti non diagonalizzate sono matrici con pochi zeri la cui visualizzazione topologica permette di cogliere la loro struttura. E' da notare come il riordino del vettore delle

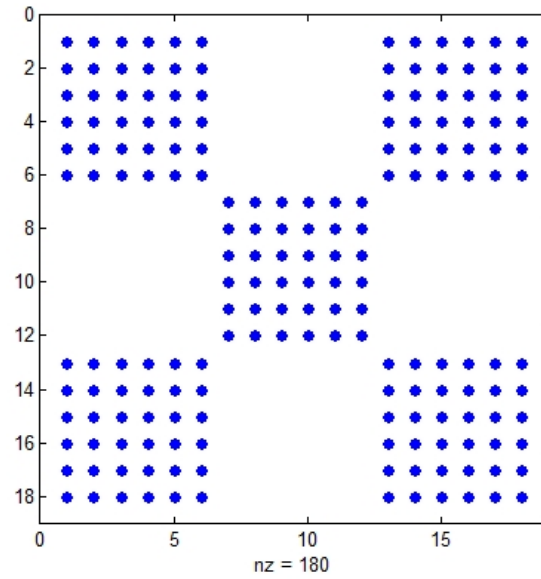


Figura 5.13: Topologia della matrice \mathbf{C} per i modi FM_x prima della diagonalizzazione e riordinata secondo il vettore $\mathbf{q}_{(2)}$

deformazioni generalizzate nel vettore $q_{(2)}$ permetta di conservare la forma visiva originaria della matrice \mathbf{C} nella quale un quadrante viene suddiviso in nove settori riempiti a "scacchiera" dalle componenti delle matrici dei coefficienti.

2.8.2 Matrice costitutiva per i modi FM_x ed SM_x

Le matrici di legame riferite all'assunzione delle classi di modo FM_x ed SM_x hanno delle dimensioni pari al numero di modi totali facenti parte delle due classi moltiplicato per tre, dove tre è la dimensione della sotto-matrice costitutiva per un solo modo.

Le linee più spesse in figura 5.14 suddividono la matrice in quattro quadranti: quello in alto a destra coincidente con la matrice di legame per i soli modi

FM_x , quello in basso a sinistra coincidente con la matrice di legame per i soli modi SM_x e quelli nella banda superiore ed inferiore che contengono componenti di interazione tra i modi appartenenti alle due diverse classi. Si può quindi vedere come appena si tengono in considerazione più classi di modi deformativi le componenti costitutive fuori dalla diagonale principale e fuori dai quadranti principali non si annullano, e così i modi di classi differenti rimangono accoppiati.

Le linee più spesse in figura 5.15 suddividono la matrice costitutiva riordinata nei cinque quadranti in cui si individuano le matrici dei coefficienti secondo la espressione 3.42.

Analoghe osservazioni sono possibili sulle figure 5.16 e 5.17 le quali rappresentano le stesse matrici costitutive per i modi di classe FM_x ed SM_x ma considerando le componenti non diagonalizzate.

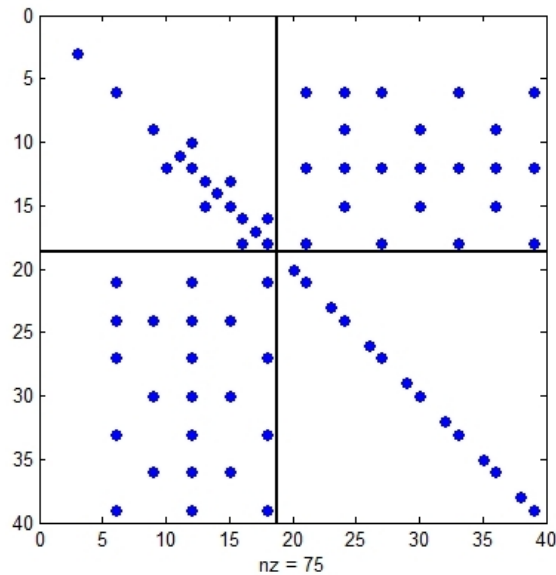


Figura 5.14: *Topologia della matrice \mathbf{C} per i modi FM_x ed SM_x dopo la diagonalizzazione*

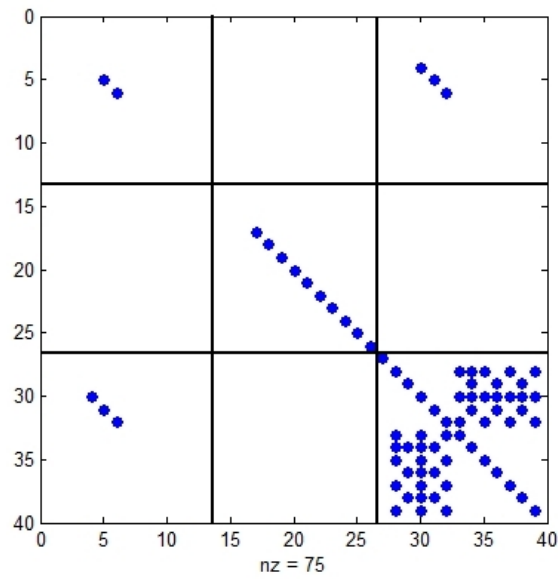


Figura 5.15: Topologia della matrice C per i modi FM_x ed SM_x dopo la diagonalizzazione e riordinata secondo il vettore $\mathbf{q}_{(2)}$

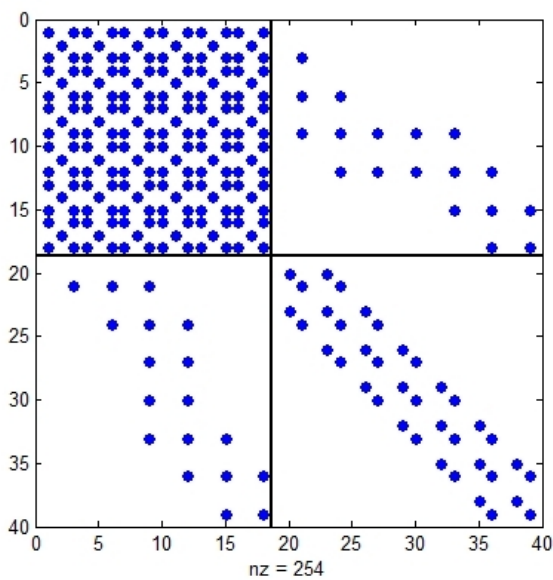


Figura 5.16: Topologia della matrice C per i modi FM_x ed SM_x prima della diagonalizzazione

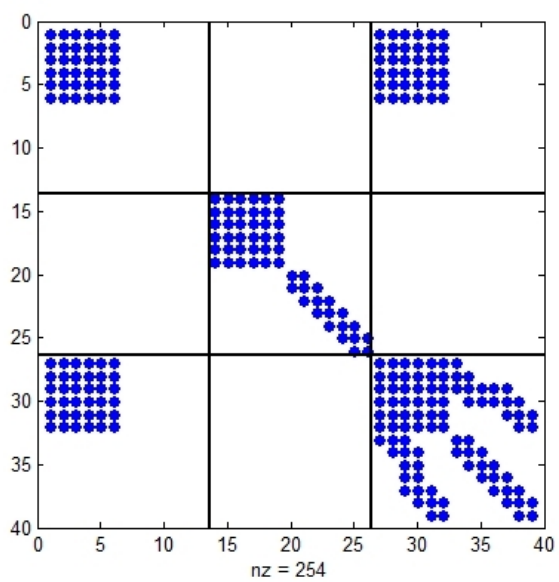


Figura 5.17: Topologia della matrice \mathbf{C} per i modi FM_x ed SM_x prima della diagonalizzazione e riordinata secondo il vettore $\mathbf{q}_{(2)}$

2.8.3 Matrice costitutiva per i modi FM_x , SM_x ed FM_f

Si considerano infine le matrici costitutive relative a tutte le classi di FM_x , SM_x ed FM_f le quali saranno le stesse viste per le sole due classi dei modi alla Schardt ed alla Capurso più sei righe e colonne date dai due modi flessionali aggiuntivi per la sezione a C in esame.

Nelle figure presentate di seguito si raffigurano sempre le topologie delle matrici di legame prima e dopo la diagonalizzazione, ordinate secondo \mathbf{q} e $\mathbf{q}_{(2)}$. In figura 5.18 si nota come il quadrante dei modi FM_f presenti componenti sulla diagonale principale tutte significative, a differenza del quadrante SM_x nel quale solo alcune componenti non sono trascurabili, in più è evidente come modi alla Capurso e flessionali non siano mai in relazione tra loro in quanto i rispettivi quadranti di interazione sono entrambe vuoti.

Per quanto riguarda le altre figure si possono fare analoghe osservazioni sulla struttura delle matrici che a differenza dei casi precedenti sono influenzate dalla presenza di due modi FM_f .

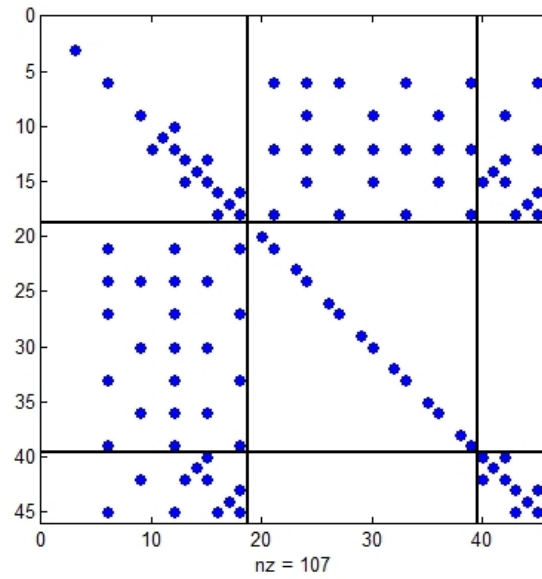


Figura 5.18: *Topologia della matrice C per i modi FM_x , SM_x ed FM_f dopo la diagonalizzazione*

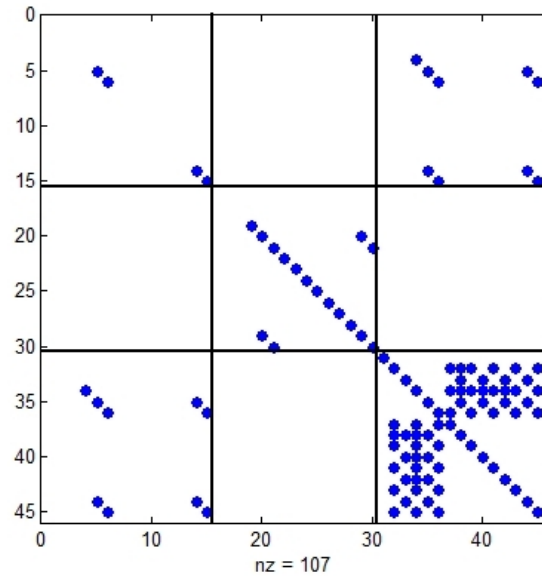


Figura 5.19: *Topologia della matrice C per i modi FM_x , SM_x ed FM_f dopo la diagonalizzazione e riordinata secondo il vettore $\mathbf{q}_{(2)}$*

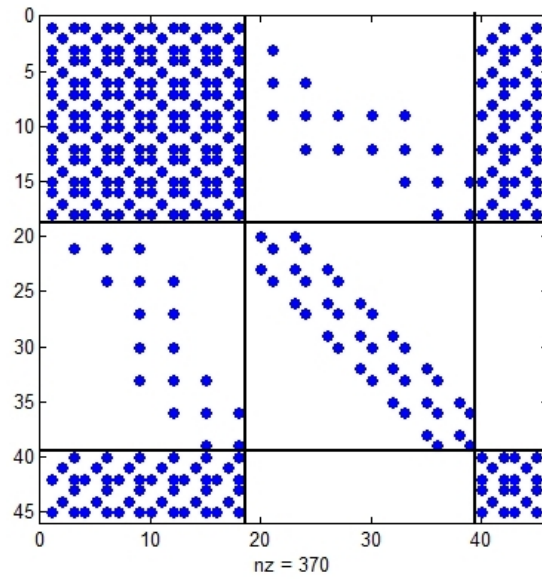


Figura 5.20: *Topologia della matrice \mathbf{C} per i modi FM_x , SM_x ed FM_f prima della diagonalizzazione*

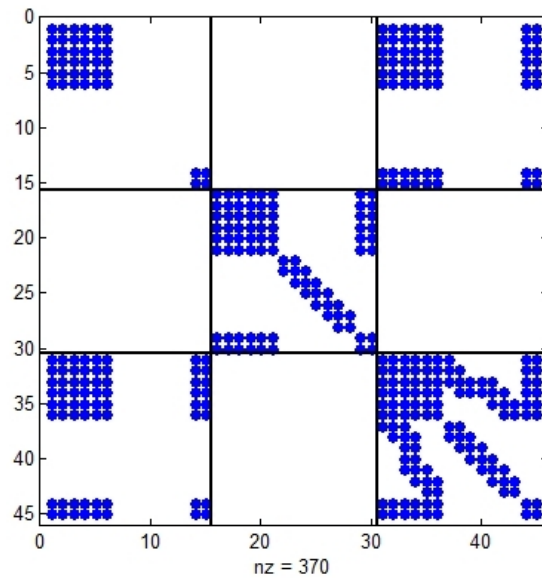


Figura 5.21: *Topologia della matrice \mathbf{C} per i modi FM_x , SM_x ed FM_f prima della diagonalizzazione e riordinata secondo il vettore $\mathbf{q}_{(2)}$*

3 Esempio 3: Risoluzione di una trave appoggiata su due "fork restraints" tramite un codice FEM basato sulla teoria GBT

Nell'Esempio 3 si farà uso di un codice agli elementi finiti basato sulla teoria GBT di Schardt, estesa alle classi di modi a taglio alla Capurso ed ai modi fondamentali flessionali, con lo scopo di eseguire alcune analisi lineari su di uno schema strutturale costituito da una semplice trave appoggiata.

L'obiettivo è quello di verificarne i risultati attraverso il confronto con un modello FEM tridimensionale costruito per mezzo di un software commerciale.

Il codice agli elementi finiti basato sulla teoria GBT che si utilizza, vede implementato l'elemento finito lineare di trave la cui formulazione è stata esposta al paragrafo 2 del capitolo 3.

Questo codice affronta il problema strutturale risolvendo l'equazione fondamentale della GBT, ricavando quindi gli spostamenti generalizzati e le loro derivate prime, poi, applicando l'ipotesi cinematica, si ricavano tutti gli spostamenti nodali sulle varie sezioni di inizio e fine elemento finito.

A monte di tutte queste operazioni deve essere effettuata chiaramente la procedura di cross-section analysis per la sezione data all'elemento finito, i risultati ottenuti dalla procedura di analisi della sezione permettono la risoluzione del problema strutturale tramite la teoria di trave generalizzata.

Per quanto riguarda la costruzione del modello FEM tridimensionale si utilizzerà il software commerciale *Straus 7*. La trave sarà modellata tramite vari elementi *plate* che andranno a costituire la forma della sezione lungo lo sviluppo della trave.

Si assume uno schema strutturale che consiste in una trave con sezione a "C" (tipo 160x60x20x2.5 mm, identica a quella assunta nel paragrafo 2, vedi figure 5.2 e 5.3) di lunghezza pari a 2 metri ed appoggiata agli estremi su due appoggi torsionali, detti anche "fork restraints".

Questi vincoli bloccano la sezione sulla quale sono applicati in modo da impedire la *section distortion* ma non il warping nella direzione longitudinale della trave. In figura 5.22 si visualizza la trave a "C" appoggiata su due ritegni torsionali.

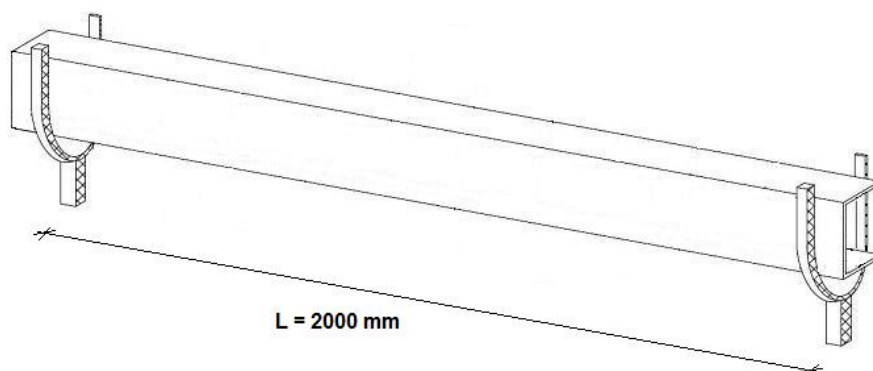


Figura 5.22: Trave a "C" appoggiata su due ritegni torsionali i quali permettono soltanto una deformazione di warping longitudinale

Le due modellazioni che si eseguiranno per questo schema strutturale dovranno prevedere dei sistemi di vincolamento agli estremi della trave che abbiano lo stesso effetto degli appoggi torsionali.

Nel modello di trave GBT si bloccheranno tutti i modi deformativi delle sezioni iniziale e finale della trave, mentre si lasceranno liberi tutti quelli delle sezioni intermedie.

Nel modello tridimensionale è necessario invece bloccare gli spostamenti in

direzione "y" e "z" per ogni nodo appartenente sempre alle sezioni iniziale e finale della trave, in più per evitare moti rigidi è necessario bloccare almeno un nodo della mesh alla traslazione nella direzione dell'asse della trave.

Nell'esempio 3 si analizzano tre casi di carico per la trave in essere:

- caso (A), con carico uniformemente distribuito lungo la trave in direzione "z" e pari a $p_z = 1N/mm$, applicato in corrispondenza del 4° nodo naturale della sezione (pari al nodo nr.6 in figura 5.3);
- caso (B), con carico uniformemente distribuito lungo la trave in direzione "y" e pari a $p_y = 1N/mm$, applicato in corrispondenza del 4° nodo naturale della sezione;
- caso (C), con carico uniformemente distribuito lungo la trave in direzione "y" e pari a $p_y = 1N/mm$, applicato in corrispondenza della mezziera della 3° parete naturale della sezione (parete compresa tra i nodi nr.3 e 6 in figura 5.3).

3.1 Caso A: carico verticale posizionato in sommità della sezione trasversale

In questo primo caso si considera la trave a C caricata uniformemente da un carico verticale dal basso verso l'alto, ovvero un carico applicato nella direzione delle z positive pari ad $1N/mm$.

Si visualizza in figura 5.23 il modello agli elementi finiti tridimensionale relativo allo schema strutturale da risolvere.

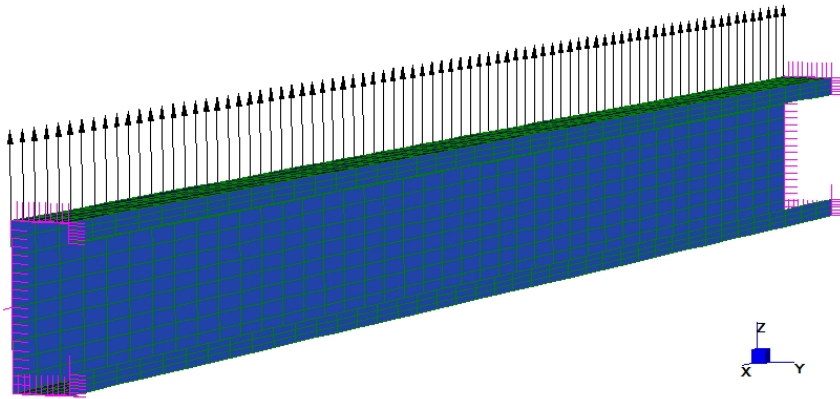


Figura 5.23: *Caso A: schema strutturale della trave su due appoggi torsionali e caricamento con carico $p_z = 1N/mm$.*

Il modello FEM è composto da elementi finiti tipo *plate* ad 8 nodi (chiamati "Quad 8" dal software) caratterizzati dall'averne uno spessore pari a quello della sezione trasversale della trave, ovvero $2.5mm$. Si posizionano una serie di plate per ogni parete naturale della sezione, in modo da creare una serie di elementi che ne costituiscano la forma, poi si ripete questa serie in direzione longitudinale per modellare l'intera trave in lunghezza. La mesh che si assume (fig. 5.23) è molto raffittita: si posizionano sulla sezione della trave 10

plate lungo l'anima della sezione, 5 lungo le flange e 3 sulle nervature, tutti di lunghezza 50 millimetri in modo da avere in lunghezza 40 serie di elementi. La modellazione costruita in questo modo è molto sofisticata in quanto può descrivere il comportamento di ogni parete della sezione come una vera e propria "piastra", è possibile prevedere quindi deformazione a taglio nel piano medio della sezione e distorsione di sezione.

Dato il caricamento previsto per il caso (A), la deformata che si ottiene dall'analisi lineare viene rappresentata in figura 5.24.

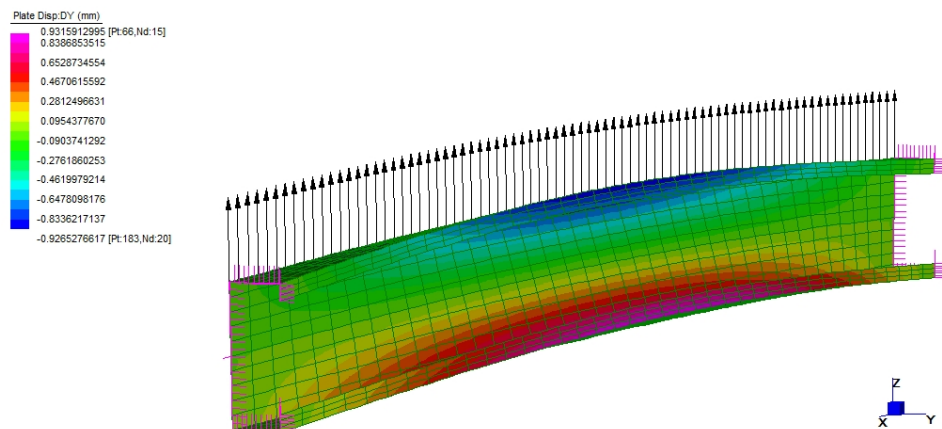


Figura 5.24: Deformata della trave a C per il caso di caricamento (A), sono evidenziati gli spostamenti in direzione Y.

Come si nota dalla figura si ha che la trave si inflette e ruota anche in quanto caricata fuori dal centro di torsione.

Eseguita la modellazione tridimensionale si costruisce poi il modello agli elementi finiti di tipo trave basato sulla teoria GBT con l'ausilio di un codice implementato in ambiente *Matlab* il quale, a seguito di una procedura di

cross-section analysis, risolve il problema strutturale applicando le condizioni di vincolo e di carico.

La modellazione con elementi *beam* è molto semplice e può sembrare "grezza" se la si raffronta con il modello in 3-D, ma d'altro canto l'elemento finito trave è basato su una teoria talmente sofisticata come la GBT che permette di risparmiare in termini di "costo computazionale" dovuto alla modellazione. Il codice lavora con elementi finiti tipo *trave* con formulazione GBT lineare e consente di tarare vari parametri caratteristici degli elementi stessi. E' possibile infatti scegliere come discretizzare la sezione trasversale, ovvero scegliere il numero di nodi intermedi da porre su ogni parete naturale, quali classi di modi deformativi considerare e quanti elementi finiti utilizzare in lunghezza nella modellazione della trave.

I risultati che si ottengono dal codice sono gli spostamenti relativi ai nodi naturali delle sezioni in corrispondenza di ogni nodo di inizio-fine degli elementi finiti che costituiscono la mesh della trave.

Eseguite le analisi lineari con i due modelli sopra descritti si vuole ora operare il confronto dei risultati per verificare se vi è un accordo tra di essi. Lo scopo è naturalmente quello di validare i risultati ottenuti tramite il codice agli elementi finiti a trave GBT attraverso il raffronto con una modellazione sofisticata quale può essere un modello FEM 3-D.

Si analizzano quindi dei grafici di spostamento relativi ai soli nodi naturali della sezione trasversale considerata. In questi grafici sono rappresentate le curve relative ai risultati del codice agli elementi finiti GBT, che si indicherà col nome *GBTfe*, e quelle relative ai risultati del modello tridimensionale che verrà indicato col nome *STRAUS* in legenda.

Gli spostamenti dei nodi naturali che si andranno a graficare sono le due traslazioni lungo le direzioni globali Y e Z più la rotazione attorno all'asse

longitudinale X .

Per ogni analisi eseguita con il codice *GBTfe* deve essere specificato quali classi di modo sono state prese in considerazione e quale è la discretizzazione della sezione adottata.

Confronto sugli spostamenti considerando per GBTfe solo la classe FM_x

Se per il codice GBTfe si considerano solo i modi alla Schardt (FM_x), si ha che la discretizzazione della sezione non è più influente sui risultati in quanto all'aumentare dei nodi intermedi non aumentano i modi con cui si descrive la cinematica della sezione; per definizione infatti i modi FM_x sono sempre pari al numero di nodi naturali.

Nei seguenti grafici degli spostamenti si indicano le curve riguardanti il modello *STRAUS* con una linea tratteggiata mentre con linea continua le curve riferite al modello *GBTfe*. Per ogni nodo naturale, numerati da 1 a 6, le linee riferite ai due modelli hanno una colorazione differente.

Dalla figura 5.25 si nota come vi sia quasi un completo accordo tra i due modelli, questo per ognuna delle tre componenti di spostamento rappresentate. La decomposizione modale della cinematica della sezione nei soli modi alla Schardt è quindi già sufficiente per descrivere in modo esaustivo il comportamento della trave.

Confronto sugli spostamenti considerando per GBTfe la classe FM_x ed SM_x

Aggiungendo alla base dello spazio dei modi deformativi della sezione i modi SM_x si ottiene una cinematica più completa e che dipende stavolta dalla discretizzazione effettuata sulla sezione. Si ha infatti per definizione che i modi a taglio alla Capurso sono tanti quanti i nodi naturali più quelli intermedi, perciò affinando la discretizzazione si ha una cinematica sempre più ricca.

Si assumono due discretizzazioni differenti per il caso di carico (A):

1. nessun nodo intermedio posto sulle pareti della sezione ($IN = 0$);
2. un nodo intermedio posto nella mezzeria di ogni parete ($IN = 5$).

Nelle figure seguenti si rappresentano gli spostamenti per il caricamento del caso (A) nei quali le curve *GBTfe* tengono anche conto dei modi a taglio alla Capurso.

Dall'osservazione dei risultati si evince che il modello GBT, completo anche di forme modali a taglio, descrive sostanzialmente il problema allo stesso modo di come lo faceva il modello con la sola presenza dei modi alla Schardt.

Piccoli cambiamenti si possono intravedere nella componente lungo Z , dove grazie ai modi SM_x si ha la perfetta sovrapposizione tra le curve *STRAUS* e *GBTfe*. Cambiando la discretizzazione sulla sezione, aggiungendo nodi intermedi sulle pareti, non si ha alcun cambiamento dei grafici.

Non viene eseguita neanche una analisi che comprenda anche la classe dei modi FM_f in quanto si pensa, dati buoni risultati ottenuti, che il loro contributo non sia significativo nel descrivere il comportamento dello schema strutturale sotto caricamento di tipo (A).

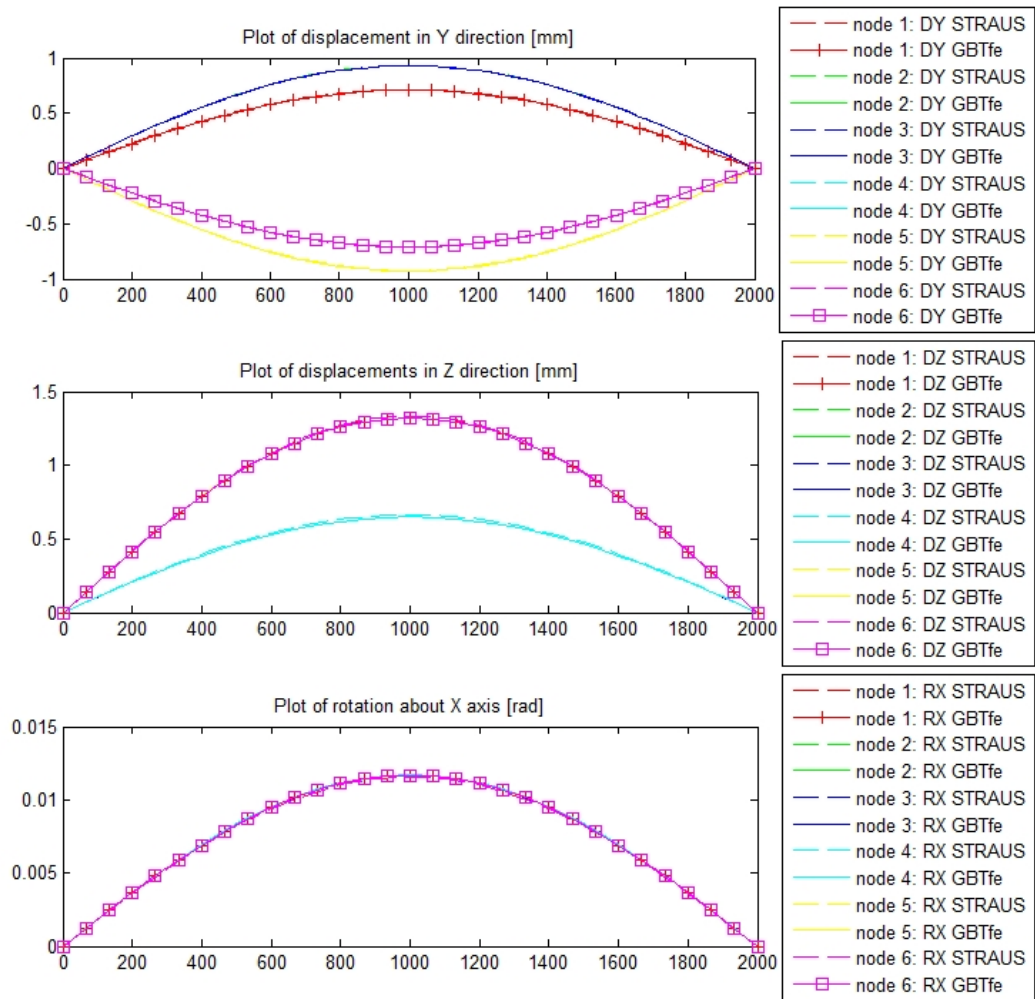


Figura 5.25: Grafici degli spostamenti dei nodi naturali sulla lunghezza della trave per il caso di caricamento (A), si considerano per GBTfe solo modi FM_x .

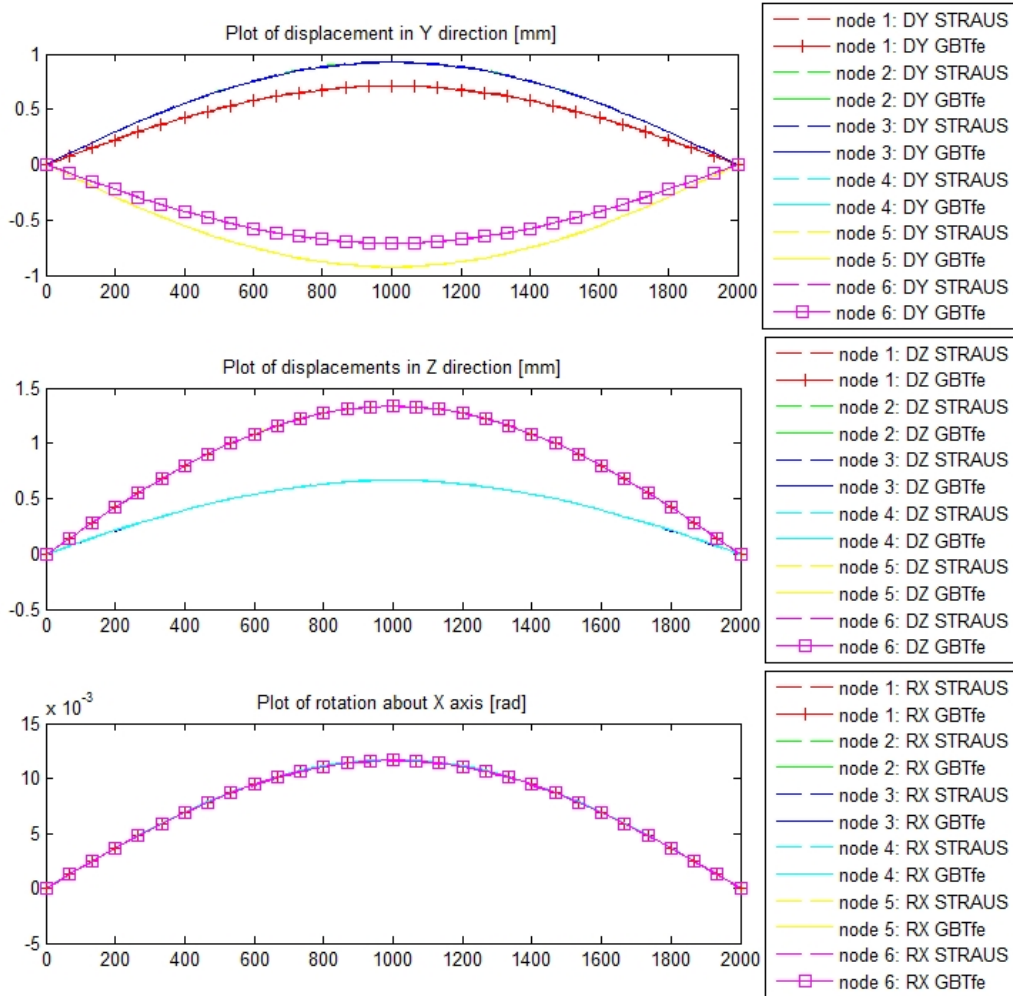


Figura 5.26: Grafici degli spostamenti per il caso di caricamento (A) dove si considerano per il modello GBTfe i modi FM_x ed SM_x secondo la discretizzazione nr.1

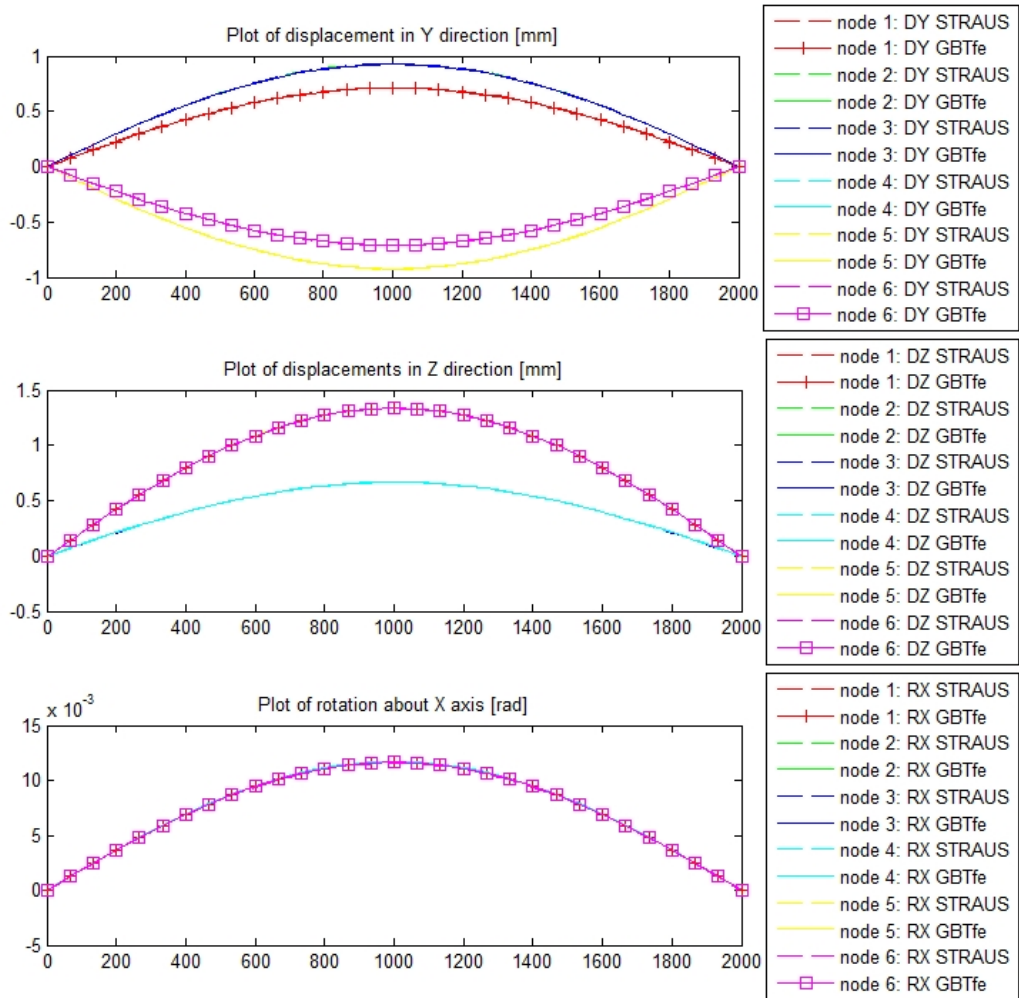


Figura 5.27: Grafici degli spostamenti per il caso di caricamento (A) dove si considerano per il modello GBTfe i modi FM_x ed SM_x secondo la discretizzazione nr.2

3.2 Caso B: carico orizzontale posizionato in sommità della sezione trasversale

Nel caso di caricamento (B) si considera la trave con sezione C caricata uniformemente da un carico orizzontale nella direzione delle y positive pari ad $1N/mm$.

Si visualizza in figura 5.28 il modello agli elementi finiti tridimensionale relativo allo schema strutturale da risolvere.

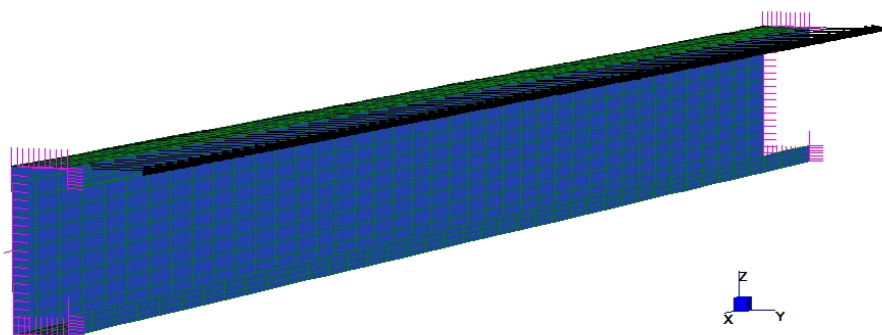


Figura 5.28: *Caso B: schema strutturale della trave su due appoggi torsionali e caricamento con carico $p_y = 1N/mm$.*

Dato il caricamento previsto per il caso (B), la deformata che si ottiene dall'analisi lineare viene rappresentata in figura 5.29.

La rappresentazione della deformata mette in evidenza come la trave sia soggetta ad una prevalente sollecitazione di momento torcente dove le sezioni trasversali subiscono anche una distorsione.

Eseguite le analisi lineari con i due modelli agli elementi finiti considerati si riportano ora i grafici che ne raccolgono i risultati nelle curve *STRAUS* e

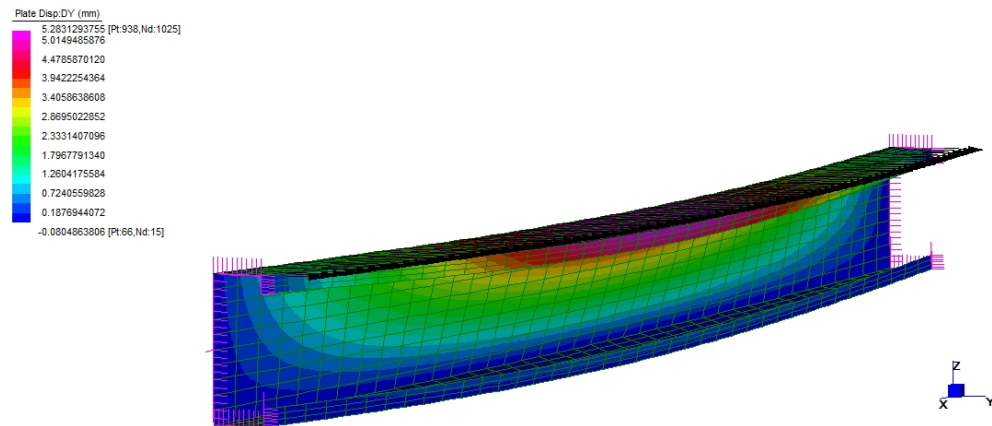


Figura 5.29: *Deformata della trave a C per il caso di caricamento (B), sono evidenziati gli spostamenti in direzione Y.*

GBTfe per ogni nodo naturale della sezione.

Confronto sugli spostamenti considerando per *GBTfe* solo la classe FM_x

Per il codice con elementi GBT si assumono solamente modi fondamentali alla Schardt, i risultati così sono indipendenti dalla discretizzazione della sezione e si graficano in figura 5.30.

Dalla figura 5.30 si può notare come vi sia un quasi completo accordo tra i risultati ottenuti dal codice ad elementi a trave GBT e quelli ottenuti dal codice ad elementi plate. I modi FM_x descrivono quindi già in modo esauriente la cinematica della trave.

Confronto sugli spostamenti considerando per GBTfe la classe FM_x ed SM_x

Si aggiungono ai modi deformativi della sezione i modi SM_x al fine di ottenere una cinematica più completa e che dipenda stavolta dalla discretizzazione effettuata sulla sezione.

Si assumono due discretizzazioni differenti anche per questo caso (B) di carico:

1. nessun nodo intermedio posto sulle pareti della sezione ($IN = 0$);
2. un nodo intermedio posto nella mezzeria di ogni parete ($IN = 5$).

Nelle figure 5.31 e 5.32 si rappresentano gli spostamenti per il caricamento del caso (B) nei quali le curve *GBTfe* tengono anche conto dei modi a taglio alla Capurso.

Dall'osservazione di questi ultimi grafici si capisce come i modi SM_x abbiano molta poca influenza sul comportamento della trave sottoposta al caricamento di tipo (B). Inserendo infatti nel codice i modi a taglio non si notano quasi differenze rispetto ai grafici ottenuti con i soli modi FM_x .

Il comportamento della trave a C è stato quindi possibile descriverlo in modo molto esaustivo riferendosi ad una cinematica della sezione basata sui soli modi alla Schardt, è quindi inutile considerare l'implementazione anche dei modi fondamentali flessionali FM_f .

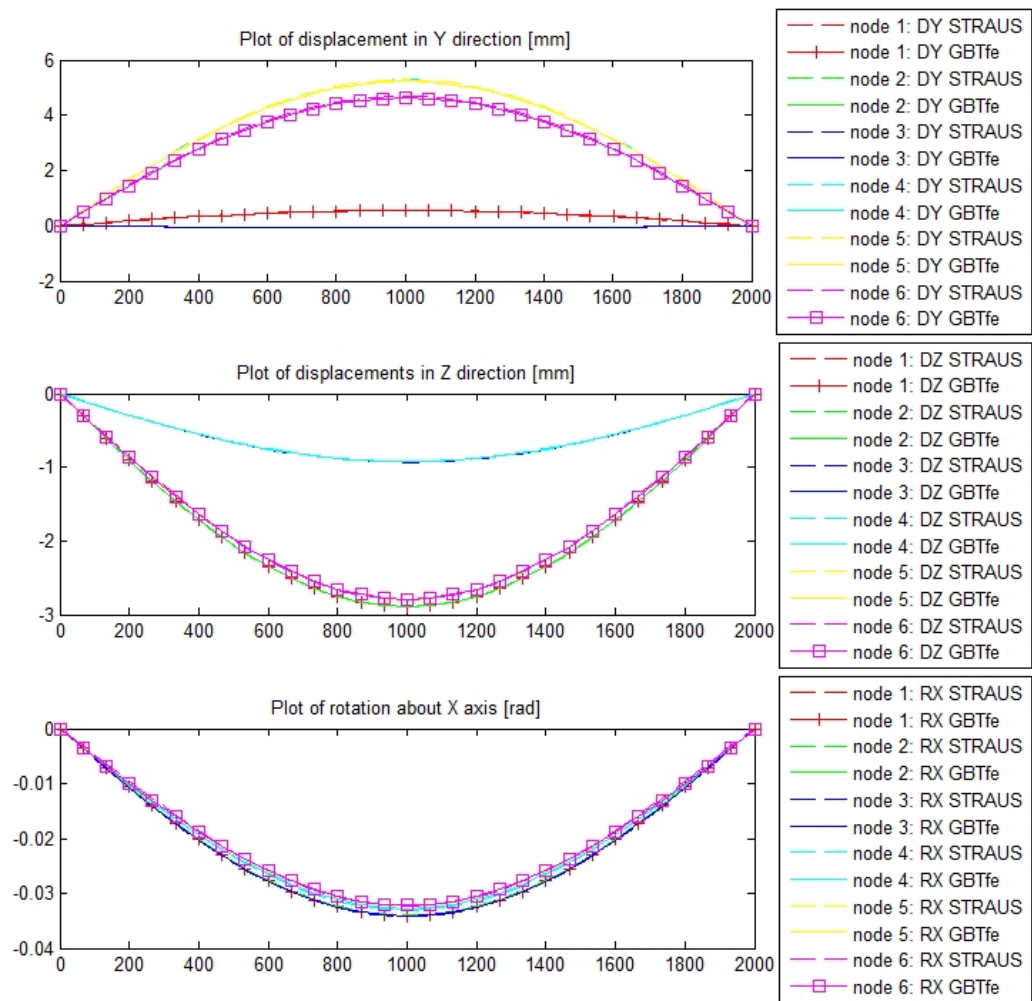


Figura 5.30: Grafici degli spostamenti dei nodi naturali sulla lunghezza della trave per il caso di caricamento (B), si considerano per GBTfe solo modi FM_x .

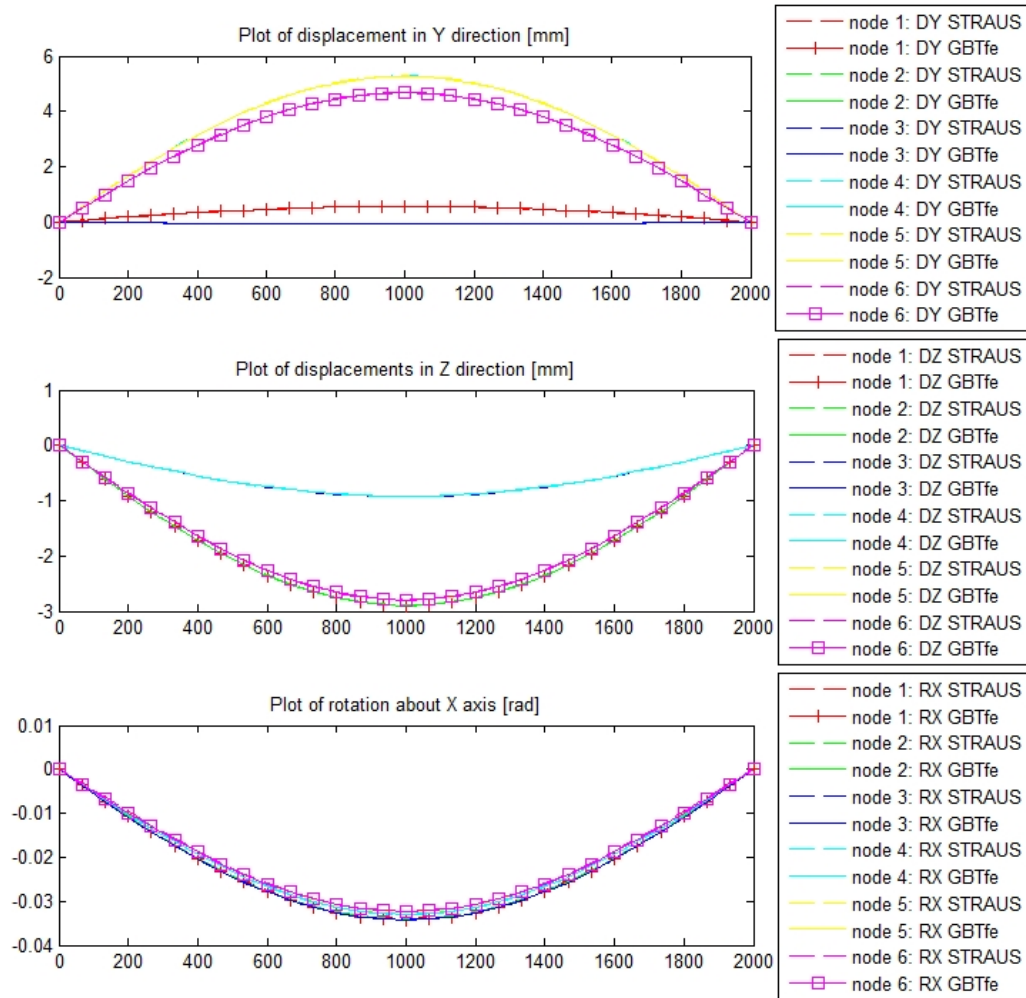


Figura 5.31: Grafici degli spostamenti per il caso di caricamento (B) dove si considerano per il modello GBTfe i modi FM_x ed SM_x secondo la discretizzazione nr.1

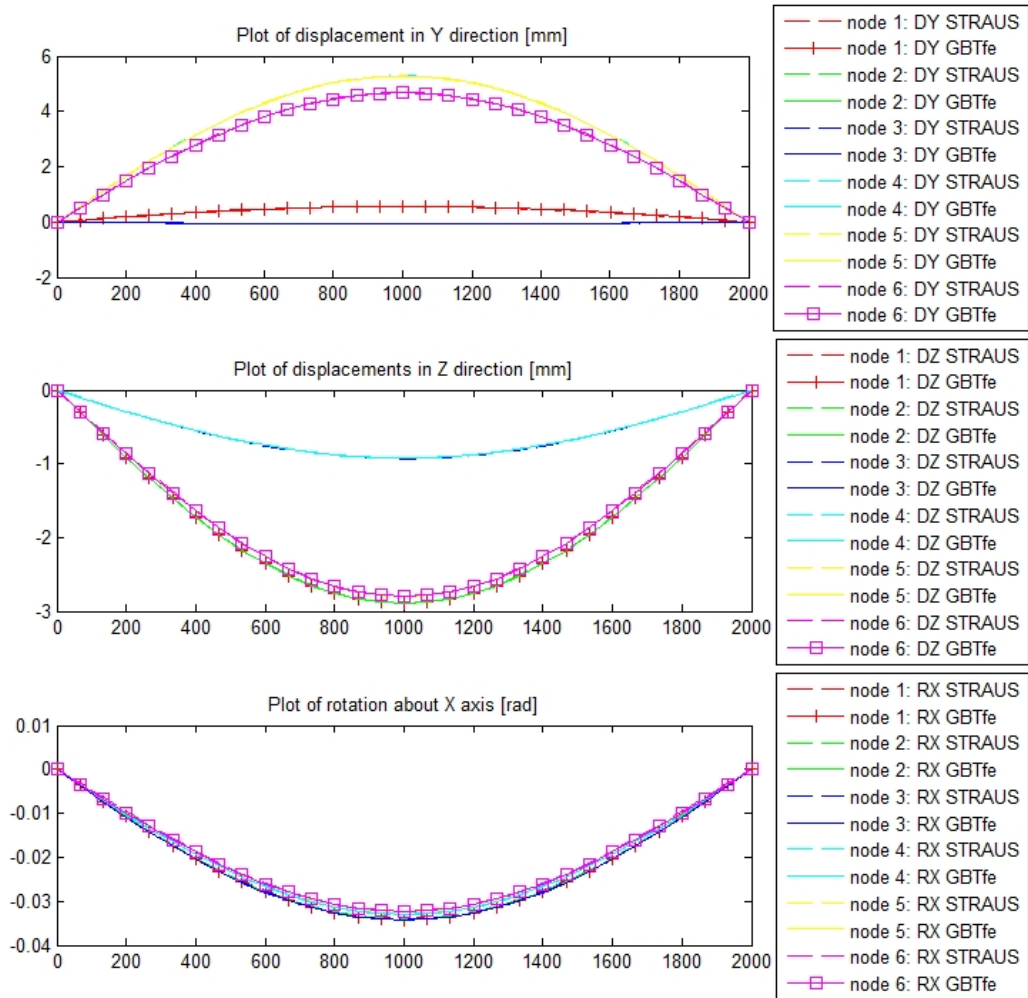


Figura 5.32: Grafici degli spostamenti per il caso di caricamento (B) dove si considerano per il modello GBTfe i modi FM_x ed SM_x secondo la discretizzazione nr.2

3.3 Caso C: carico orizzontale posizionato in mezzeria dell'anima della sezione trasversale

Nel caso di caricamento (C) si considera la trave con sezione C caricata uniformemente da un carico orizzontale nella direzione delle y positive pari ad $1N/mm$.

Si visualizza in figura 5.33 il modello agli elementi finiti tridimensionale relativo allo schema strutturale da risolvere.

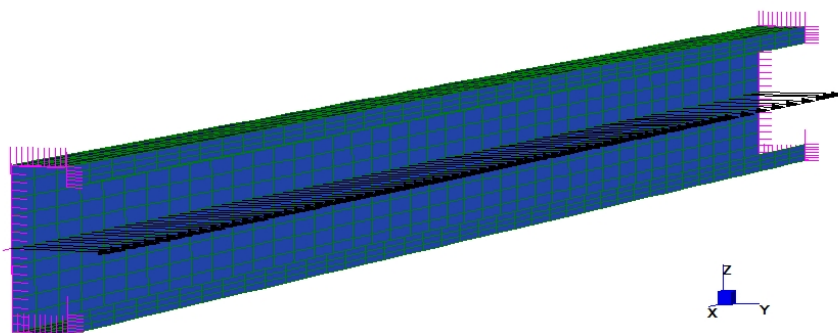


Figura 5.33: *Caso A: schema strutturale della trave su due appoggi torsionali e caricamento con carico $p_z = 1N/mm$.*

Dato il caricamento previsto per il caso (C), la deformata che si ottiene dall'analisi lineare viene rappresentata in figura 5.34.

Osservando la deformata si può notare come il caricamento (C) provochi alle sezioni della trave una forte distorsione. Soprattutto in prossimità della mezzeria della membratura si ha che il carico applicato a metà dell'anima

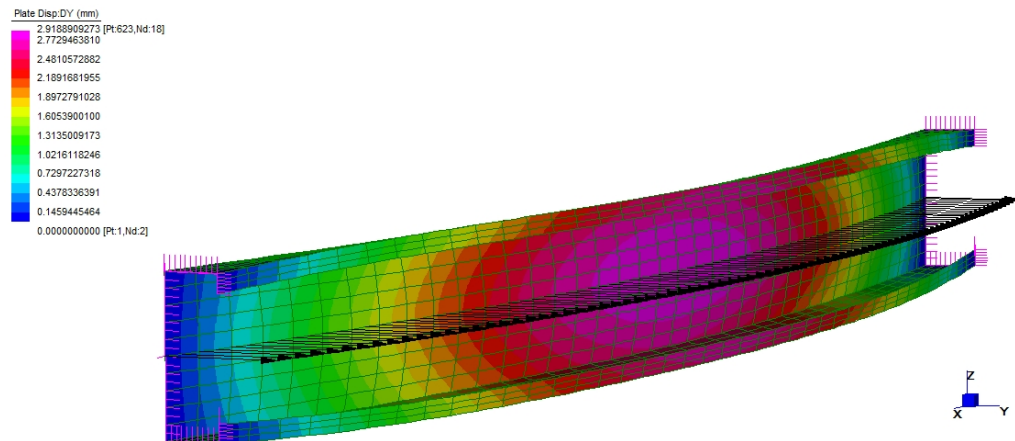


Figura 5.34: *Deformata della trave a C per il caso di caricamento (C), sono evidenziati gli spostamenti in direzione Y.*

tende ad "aprire" la sezione, facendo allontanare tra loro le due flange in modo simmetrico.

E' interessante notare come questa particolare forma distorsiva debba essere descritta secondo varie combinazioni lineari delle forme modali definite per la sezione a C assunta. Ora si vedrà appunto quali forme distorsive contribuiscono maggiormente alla descrizione del comportamento della trave, per questo specifico caso di carico, attraverso la visualizzazione degli spostamenti nodali ottenuti dall'analisi lineare.

Confronto sugli spostamenti considerando per GBTfe solo la classe FM_x

Il primo confronto dei risultati viene sempre fatto con una risoluzione del codice GBTfe che preveda i soli modi alla Schardt, per cui si ottengano valori di spostamento indipendenti dalla discretizzazione della sezione.

In figura 5.35 si visualizzano i grafici relativi al confronto tra le curve *STRAUS*

e $GBTfe$ con solo modi FM_x , si può notare come il comportamento della membratura si descritto anche con molta precisione dagli elementi beam GBT soprattutto in vicinanza della mezzeria della trave.

Le curve degli spostamenti si discostano invece dal modello tridimensionale $STRAUS$ man mano che ci si avvicina agli appoggi torsionali, anche di un 40-45 per cento per quanto riguarda la componente di traslazione Z e di un 55-60 per cento per quanto riguarda la rotazione attorno a X . Questo non si può dire invece per la componente di traslazione Y , nel grafico infatti la curva $GBTfe$ si sovrappone perfettamente a quella ottenuta dal modello tridimensionale.

Confronto sugli spostamenti considerando per GBTfe la classe FM_x ed SM_x

Se si considerano anche i modi SM_x al fine di ottenere una cinematica più completa e che dipenda dalla discretizzazione effettuata sulla sezione, si possono assumere due discretizzazioni differenti, come le seguenti:

1. due nodi intermedi posti sull'anima della sezione, dove è applicato il carico ($IN = 2$);
2. un nodo intermedio posto nella mezzeria di ogni parete ($IN = 5$).

Nelle figure 5.36 e 5.37 si rappresentano gli spostamenti per il caricamento del caso (C) per i quali le curve $GBTfe$ tengono anche conto dei modi a taglio alla Capurso.

Osservando i grafici in queste figure si può notare come l'effetto dei modi a taglio si faccia sentire vicino ai vincoli e soprattutto per i nodi 1, 2 e 5, 6, per i quali si ha un certo avvicinamento delle curve $GBTfe$ a quelle del modello tridimensionale. Questo sta a significare come la deformazione a taglio sulla

superficie media della sezione sia importante in prossimità del vincolo, sia per quanto riguarda gli spostamenti lungo Z che le rotazioni attorno a X . Si può poi notare come nel passaggio da una discretizzazione ad un'altra con più nodi intermedi, dalla discretizzazione 1 alla 2, ci sia ancora un piccolo miglioramento dei risultati.

Confronto sugli spostamenti considerando per GBTfe la classe FM_x , SM_x ed FM_f

Per il caricamento di tipo (C) si prevedono delle analisi mediante modello GBTfe che comprenda anche la classe dei modi FM_f , i modi fondamentali flessionali. Anche in questo caso è necessario assumere una certa discretizzazione della sezione per poter eseguire una analisi della sezione che consenta di risolvere il problema della GBT. Si assumono due differenti discretizzazioni:

1. un nodo intermedio posto nella mezzeria di ogni parete ($IN = 5$);
2. cinque nodi intermedi posti sull'anima della sezione e tre nodi su tutte le altre pareti ($IN = 17$).

Nelle figure 5.38 e 5.39 si rappresentano gli spostamenti per il caricamento del caso (C) per i quali le curve GBTfe tengono conto dei modi FM_x , SM_x ed FM_f .

Dall'osservazione dei grafici contenuti in queste figure si nota come i modi FM_f migliorino i risultati delle curve GBTfe soprattutto per quanto riguarda la componente di rotazione attorno all'asse X per i nodi naturali posizionati ai limiti dell'anima della sezione, ovvero i nodi 3 e 4. L'effetto sulle due componenti di traslazione è invece del tutto trascurabile.

Assumendo una discretizzazione molto "spinta" con un numero di nodi intermedi sulla sezione elevato, come è ad esempio la discretizzazione nr. 2, non si hanno grosse variazioni dei risultati, anche se la tendenza è comunque quella del miglioramento avvicinando le curve al comportamento previsto dal modello FEM sofisticato.

In definitiva si è arrivati ad ottenere un modellazione della trave oggetto di studio che, basandosi su elementi finiti GBT che assumono le classi FM_x , SM_x ed FM_f , prevede in modo soddisfacente il comportamento della membratura soggetta al caricamento di tipo (C).

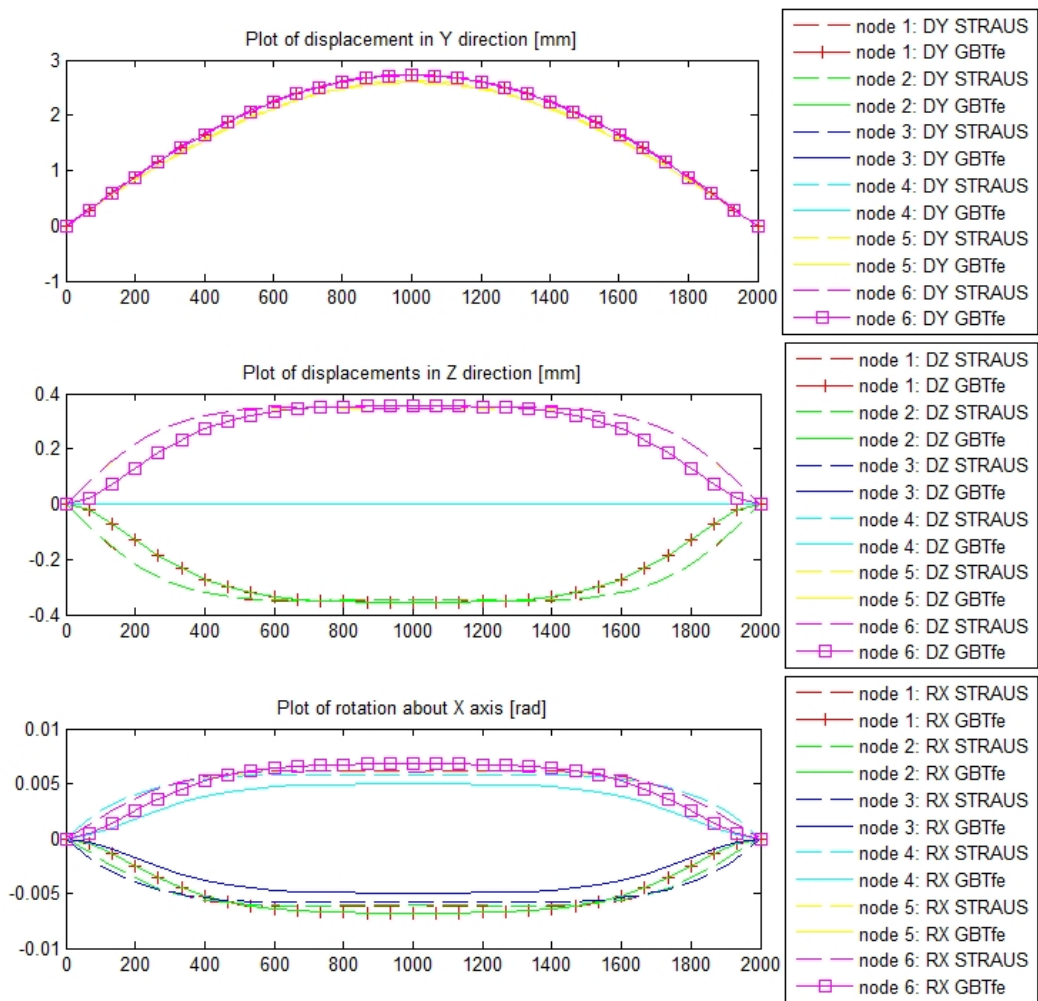


Figura 5.35: Grafici degli spostamenti dei nodi naturali sulla lunghezza della trave per il caso di caricamento (C), si considerano per GBTfe solo modi FM_x .

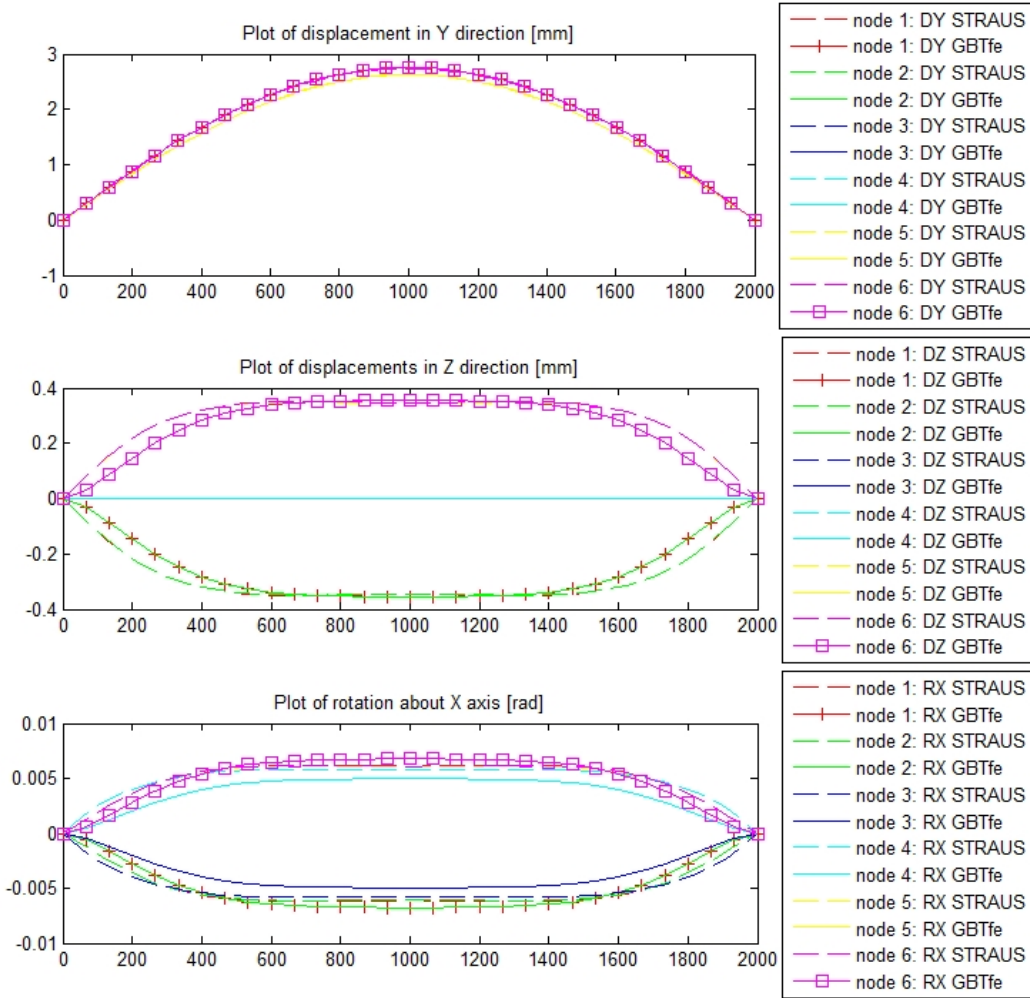


Figura 5.36: Grafici degli spostamenti per il caso di caricamento (C) dove si considerano per il modello GBTfe i modi FM_x ed SM_x secondo la discretizzazione nr.1

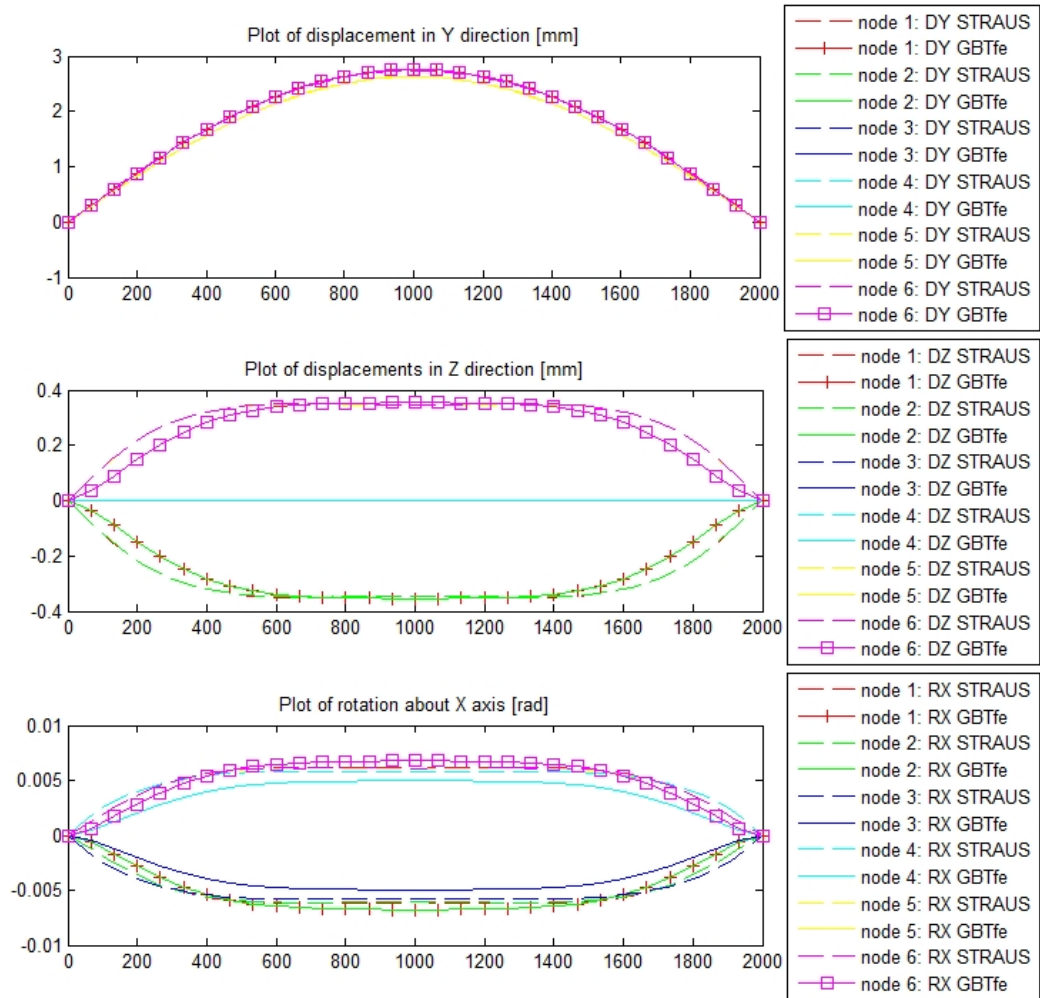


Figura 5.37: Grafici degli spostamenti per il caso di caricamento (C) dove si considerano per il modello GBTfe i modi FM_x ed SM_x secondo la discretizzazione nr.2

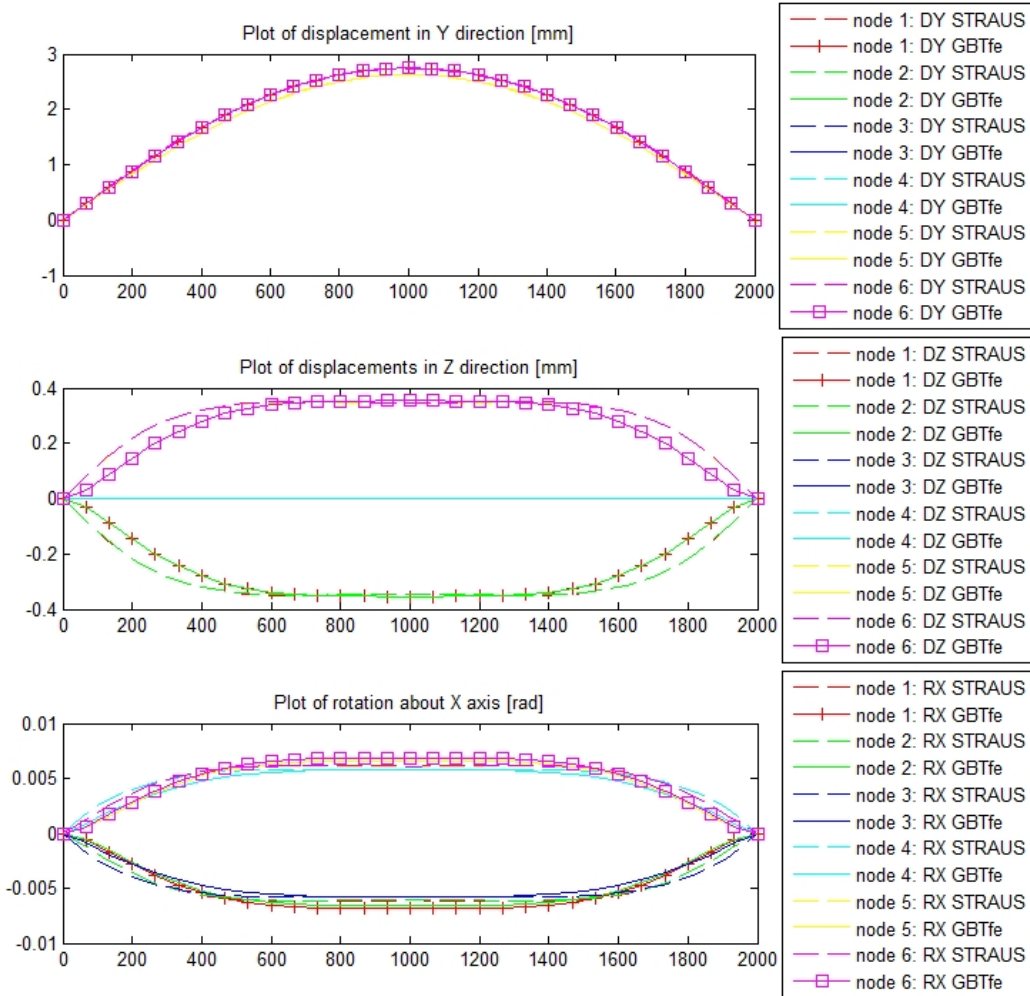


Figura 5.38: Grafici degli spostamenti per il caso di caricamento (C) dove si considerano per il modello GBTfe i modi FM_x , SM_x ed FM_f secondo la discretizzazione nr.1

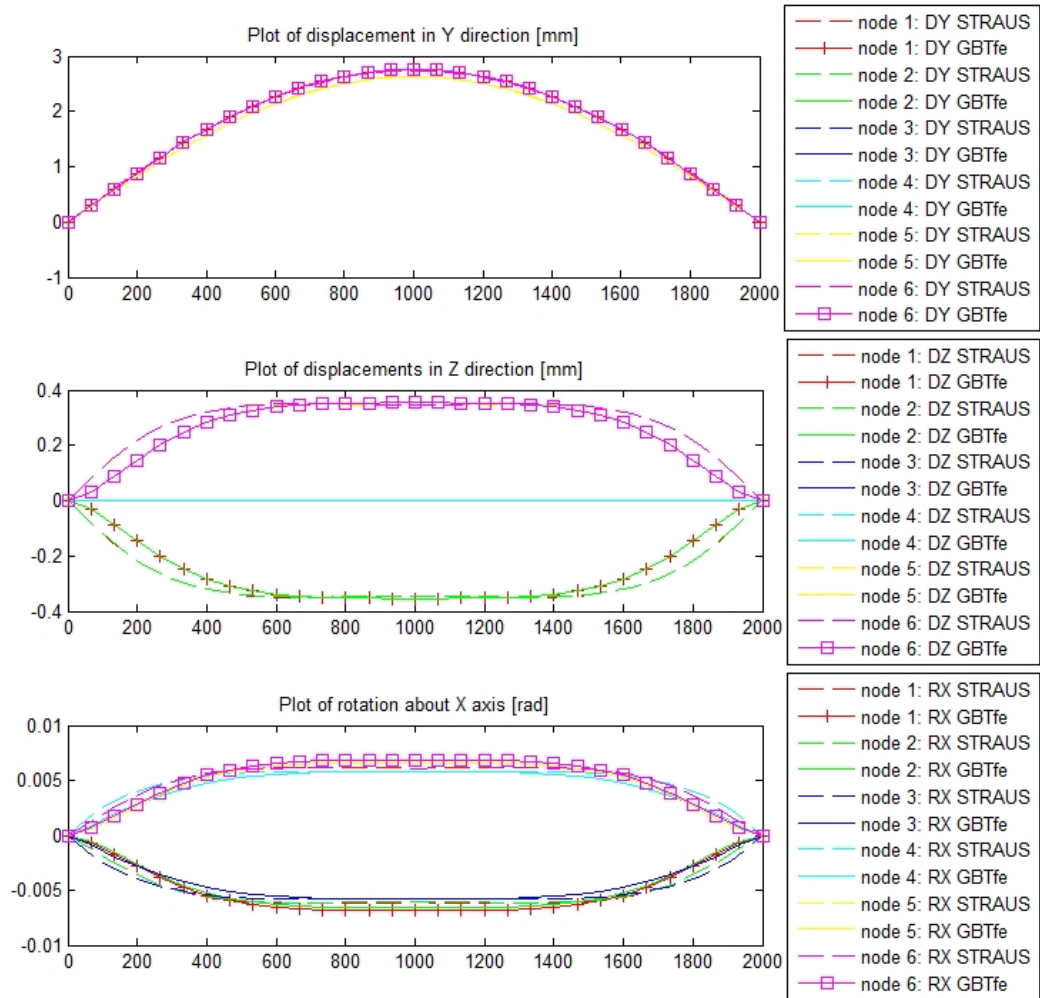


Figura 5.39: Grafici degli spostamenti per il caso di caricamento (C) dove si considerano per il modello GBTfe i modi FM_x , SM_x ed FM_f secondo la discretizzazione nr.2

Conclusioni

In questa tesi è stato affrontato il problema della modellazione di membrane con sezione trasversale in parete sottile. Si sono descritte le principali caratteristiche delle teorie classiche di trave mettendone in evidenza le carenze presenti nelle ipotesi cinematiche assunte per la sezione trasversale.

Si è poi introdotta la teoria di trave generalizzata, in letteratura Generalized Beam Theory (GBT), la quale, tramite un approccio di tipo modale alla cinematica, permette di assumere modi di deformazione per la sezione del tutto generali, senza porre ipotesi a priori sul cinematismo della struttura.

E' stata esposta la formulazione GBT al primo ordine in forma matriciale ed è stato successivamente formulato un elemento finito monodimensionale.

Per poter utilizzare la GBT sono necessarie numerose costanti di legame definite per una sua sezione trasversale: è stata quindi presentata una procedura di analisi della sezione nella quale vengono considerate tre differenti classi di modi deformativi per la sezione trasversale: i cosiddetti modi alla Schardt, i modi a taglio secondo Capurso ed alcuni modi flessionali che simulano l'imbozzamento locale delle pareti.

L'esecuzione dell'analisi della sezione su diversi esempi di sezione trasversale ha messo in luce le proprietà dei modi deformativi fondamentali alla Schardt, i quali, se riferiti alla base spettrale dello spazio naturale, corrispondono ai

quattro moti rigidi della sezione del modello di trave alla d.S.V. più un certo numero di modi distorsivi della sezione. Considerando i soli modi alla Schardt è possibile poi dare anche un significato fisico alle prime quattro linee elastiche generalizzate V , le quali rappresentano infatti spostamenti e rotazione rigida della sezione rispetto al centro di torsione.

E' stata realizzata anche una interfaccia grafica che mostra le componenti di spostamento relative a due forme modali e permette di individuare un eventuale significato fisico per le due forme selezionate attraverso la visualizzazione delle relative componenti costitutive di interazione.

Grazie all'implementazione di un codice FEM in Matlab si è poi effettuata un'applicazione lineare della teoria generalizzata su di una trave appoggiata su due ritegni torsionali e caricata uniformemente. La valutazione dei risultati ottenuti è stata compiuta mediante il confronto con un modello tridimensionale costituito da elementi tipo *plate*.

In alcuni significativi esempi si è visto come la GBT descriva in maniera esaustiva il vero comportamento della trave alla quale sono permessi sia la section distortion sia la deformabilità a taglio nel piano medio della sezione. In molti casi di utilità pratica si nota la poca influenza della deformabilità al taglio e la modesta distorsione di sezione: queste caratteristiche permettono alla GBT di descrivere esattamente il comportamento lineare della trave anche con i soli modi deformativi alla Schardt. In altri casi si ha al contrario una forte distorsione di sezione ed una importante influenza della deformabilità al taglio soprattutto vicino ai vincoli.

Tramite l'aggiunta di ulteriori modi deformativi, è stato tuttavia possibile utilizzare la teoria di trave generalizzata anche in questi contesti in cui altrimenti non sarebbe stata adeguata.

Si può in definitiva affermare che la GBT è uno strumento complesso ma molto efficace per la descrizione del comportamento di membrature "thin-

walled". Essa infatti, grazie alla sua particolare interpretazione della cinematica permette di effettuare analisi lineari molto sofisticate con il semplice utilizzo di un modello di tipo trave, il che comporta non solo un grosso risparmio sia in termini di modellazione sia di costo computazionale, ma anche una notevole leggibilità dei risultati in output.

Bibliografia

- [1] V. Z. Vlasov, Thin walled elastic bars, Gosstroizdat, Moscow, 1940.
- [2] R. P. Schardt, Verallgemeinerte Technische Biegetheorie, Springer, Berlin, 1989.
- [3] P. Dinis, D. Camotim, N. Silvestre, Gbt formulation to analyse the buckling behaviour of thin-walled members with arbitrarily 'branched' open cross-sections, *Thin-Walled Structures* 44 (2006) 20–38.
- [4] R. Goncalves, P. Dinis, D. Camotim, Gbt formulation to analyse the first order and buckling behaviour of thin-walled members with arbitrary cross-sections, *Thin-Walled Structures* 47 (2009) 583–600.
- [5] M. Capurso, Sul calcolo delle travi in parete sottile in presenza di forze e distorsioni, *La ricerca scientifica* 6 (1964) 241–286.
- [6] R. P. Schardt, Verallgemeinerte Technische Biegetheorie, Metrumverlag, Darmstadt, 2007.
- [7] J. Davies, P. Leach, First order generalized beam theory, *J. Construct. Steel Research* 31 (1994) 187–220.

-
- [8] J. Davies, P. Leach, D. Heinz, Second order generalized beam theory, *J. Construct. Steel Research* 31(2-3) (1994) 221–41.
- [9] P. Leach, The calculation of modal cross-section properties for use in the generalized beam theory., *Thin-Walled Structures* 61(1) (2009) 61–79.
- [10] N. Silvestre, D. Camotim, Nonlinear generalized beam theory for cold-formed steel members, *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 3 (2003) 461–490.
- [11] N. Silvestre, D. Camotim, First order generalized beam theory for arbitrary orthotropic materials, *Thin-Walled Structures* 40 (2002) 755–789.

Ringraziamenti

La laurea rappresenta per me il traguardo di un lungo percorso che, solo qualche anno fa, prima di intraprendere gli studi universitari, non mi sarei mai aspettato di riuscire a compiere con tale successo.

In questi cinque anni è stato tanto il lavoro e l'impegno profuso, ma tutti gli sforzi sono stati ricompensati ampiamente dalle soddisfazioni per i risultati raggiunti e sono orgoglioso di tutto quello che ho realizzato fino ad oggi.

In questo momento così importante per la mia vita non posso esimermi dal ringraziare le persone che mi sono vicine e che mi hanno aiutato a crescere in questi ultimi anni.

Voglio ringraziare prima di tutto il mio relatore prof. Ubertini ed i correlatori prof. De Miranda ed Ing. Ruggerini per avermi dato la possibilità di lavorare su di una tematica di ricerca così attuale ed interessante. Un ringraziamento particolare va ad Antonio Ruggerini, la persona che mi ha "guidato" in questi ultimi mesi, che mi ha insegnato un sacco di cose e che mi ha tirato su il morale nei momenti di sconforto. La sua gentilezza e disponibilità mi hanno permesso di lavorare in tranquillità, sapendo che ad ogni difficoltà avrei potuto contare su di lui, lo ringrazio per tutto quello che ha fatto per me.

Poi non posso non ricordare il compagno di "ogni battaglia" Andrea, persona con la quale ho condiviso praticamente ogni momento vissuto in ambito uni-

versitario e soprattutto un amico fidato. Non poteri ripensare a questi ultimi anni senza la sua compagnia, i lunghi viaggi in treno, le estenuanti attese in stazione, le intere giornate a Bologna, le lunghe telefonate prima degli esami, le chiaccerate davanti ad un boccale di birra. Senza di lui questa esperienza non sarebbe stata la stessa.

Ringrazio quindi la mia "tata", che in questi anni ha condiviso insieme a me tutti i successi e le preoccupazioni, mi ha ascoltato, mi ha incoraggiato ed è stata sempre al mio fianco con fiducia e pazienza. Ringraziarla soltanto credo non basti a ripagare tutto quello che mi ha dato e se ho raggiunto questo traguardo è anche merito suo.

Infine rivolgo un pensiero alle persone più importanti della mia vita, mamma papà e Marty, la mia famiglia, unico ed insostituibile punto di riferimento della mia esistenza. Ai miei genitori devo tutto, ma in particolare l'avermi insegnato i veri valori della vita, so che loro farebbero qualsiasi cosa per la mia felicità e la mia speranza è quella di riuscire a ripagare, almeno in parte, tutto il loro amore.