

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Fisica

# **Metodi perturbativi dipendenti dal tempo**

**Relatore:**  
**Chiar.mo Prof.**  
**Fabio Ortolani**

**Presentata da:**  
**Luca Bozzato**

**Sessione II**  
**Anno Accademico 2013/2014**

# Indice

<b>1</b>	<b>Sviluppo temporale</b>	<b>3</b>
1.1	Operatore di evoluzione . . . . .	3
1.2	Rappresentazioni . . . . .	4
1.2.1	Rappresentazione di Schrödinger . . . . .	4
1.2.2	Rappresentazione di Dirac . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Perturbazioni dipendenti dal tempo</b>	<b>8</b>
2.1	La serie di Dyson . . . . .	8
2.2	Perturbazioni dipendenti dal tempo . . . . .	9
2.2.1	Caso discreto . . . . .	9
2.2.2	Perturbazioni sinusoidali . . . . .	12
2.2.3	Caso continuo . . . . .	15
2.2.4	La regola d'oro di Fermi . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Applicazioni</b>	<b>19</b>
3.1	Relazione di indeterminazione per l'energia . . . . .	19
3.2	Regole di selezione in approssimazione di dipolo . . . . .	21
3.3	Decadimento beta . . . . .	25
<b>A</b>	<b>Sistema quantistico in un campo elettromagnetico classico</b>	<b>30</b>
<b>B</b>	<b>Approssimazione di dipolo elettrico</b>	<b>34</b>

# Introduzione

Sono rari i problemi risolubili in maniera esatta in meccanica quantistica. Ciò è legato alle difficoltà matematiche insite nella teoria dei quanti. Inoltre i problemi risolti, pur essendo in alcuni casi delle ottime approssimazioni, sono spesso delle astrazioni delle situazioni reali. Si pensi ad esempio al caso di una particella quantistica di un problema unidimensionale. Questi sistemi sono talmente astratti da violare un principio fondamentale, il principio di indeterminazione. Infatti le componenti dell'impulso e della posizione perpendicolari al moto sono nulle e quindi sono note con certezza ad ogni istante di tempo. Per poter ottenere una descrizione dei modelli che tendono alla realtà è necessario ricorrere alle tecniche di approssimazione.

In questa tesi sono stati considerati i fenomeni che coinvolgono una interazione variabile nel tempo. In particolare nella prima parte è stata sviluppata la teoria delle rappresentazioni della meccanica quantistica necessaria per la definizione della **serie di Dyson**. Questa serie operatoriale dovrebbe convergere (il problema della convergenza non è banale) verso l'operatore di evoluzione temporale, grazie al quale è possibile conoscere come un sistema evolve nel tempo. Quindi riuscire a determinare la serie di Dyson fino ad un certo ordine costituisce una soluzione approssimata del problema in esame.

Supponiamo che sia possibile scomporre l'hamiltoniana di un sistema fisico nella somma di due termini del tipo:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t),$$

dove  $\hat{V}(t)$  è una piccola perturbazione dipendente dal tempo di un problema risolubile esattamente caratterizzato dall'hamiltoniana  $\hat{H}_0$ . In tal caso sono applicabili i metodi della teoria perturbativa dipendente dal tempo. Sono stati considerati due casi limite, ovvero il caso in cui lo spettro dell'hamiltoniana imperturbata sia discreto e non degenerare ed il caso in cui lo spettro sia continuo. La soluzione al primo ordine del caso discreto è stata applicata per poter formulare il **principio di indeterminazione energia-tempo** e per determinare le **regole di selezione** in approssimazione di dipolo elettrico. Il secondo caso è servito per spiegare il **decadimento beta**, rimanendo nel campo della teoria quantistica classica (per una trattazione profonda del problema sarebbe necessaria la teoria dei campi).

# Capitolo 1

## Sviluppo temporale

Il tempo in meccanica quantistica è una quantità con un significato fisico radicalmente diverso da quello classico. Infatti esso non è misurabile, nel senso che non esiste un operatore hermitiano il cui spettro di autovalori sia costituito da variabili temporali. Inoltre cambia anche il concetto stesso di misura. Infatti la misura di una certa quantità fisica altera irrimediabilmente il sistema facendolo collassare in uno degli autoket relativi ad un autovalore di un certo operatore. Se invece il sistema non è sottoposto ad alcuna verifica sperimentale ed è isolato, allora potrà liberamente evolvere nel tempo.

### 1.1 Operatore di evoluzione

Un sistema fisico al tempo  $t_0$  è descritto da un vettore  $|\psi(t_0)\rangle$ . Ad un istante  $t$  successivo a  $t_0$  esso sarà descritto in generale da un nuovo vettore  $|\psi(t)\rangle$ . Assumendo che la linearità degli stati del sistema sia preservata nell'intervallo di tempo  $t - t_0$ , è lecito supporre che il ket  $|\psi(t)\rangle$  sia ottenuto come il risultato dell'azione di un operatore lineare  $\hat{U}(t, t_0)$  sul ket iniziale  $|\psi(t_0)\rangle$ . Quindi possiamo scrivere:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \quad \text{con} \quad \hat{U}(t_0, t_0) = \hat{1}. \quad (1.1)$$

La determinazione di  $\hat{U}(t, t_0)$  è un problema cruciale della meccanica quantistica e spesso per determinarlo bisogna ricorrere a tecniche perturbative.

Sia  $\hat{H}$  sia l'operatore hamiltoniano, con autoket denotati con  $|u_E(t)\rangle$ , che soddisfa la seguente equazione agli autovalori:

$$\hat{H} |u_E(t)\rangle = E |u_E(t)\rangle.$$

Si assuma che il sistema sia conservativo, cioè con hamiltoniana indipendente dal tempo, periodico con energia  $E$  e con frequenza angolare  $\omega$  data dalla legge di Einstein  $E = \hbar\omega$ . Allora gli autoket dovranno soddisfare una relazione con la seguente forma:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega(t-t_0)} |\psi(t_0)\rangle.$$

Sostituendo alla frequenza angolare la formula di Einstein e sfruttando l'equazione agli autovalori per l'operatore hamiltoniano si ottiene :

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i(t-t_0)E}{\hbar}} |\psi(t_0)\rangle = e^{-\frac{i(t-t_0)\hat{H}}{\hbar}} |\psi(t_0)\rangle. \quad (1.2)$$

$\hat{U} = e^{-\frac{i(t-t_0)\hat{H}}{\hbar}}$  rappresenta chiaramente un'operatore unitario.

Differenziando rispetto al tempo l'equazione precedente si ottiene <sup>1</sup>:

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H} \hat{U}(t, t_0).} \quad (1.3)$$

La difficoltà matematica di questo problema è dovuta al fatto che questa equazione differenziale non ha come soluzione una funzione (una volta definite le condizioni al contorno), ma un operatore. Se si assume che la precedente equazione valga anche per sistemi non isolati (tutte le assunzioni sono verificate in ultima analisi tramite gli esperimenti) si è giunti alla definizione quantitativa del problema della ricerca dell'operatore di evoluzione temporale. La soluzione di questo problema è nota per sistemi isolati, come si evince dalla (1.2) in cui :

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i(t-t_0)\hat{H}}{\hbar}},$$

mentre per sistemi non isolati vale la seguente soluzione formale sottoforma di equazione integrale :

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(\tau) \hat{U}(\tau, t_0) d\tau.$$

La particolarità di questo integrale è quella di non essere applicato ad un prodotto di funzioni, ma ad un prodotto di operatori. Quindi non bisogna alterare l'ordine di quest'ultimi, a meno che il loro commutatore non sia nullo.

## 1.2 Rappresentazioni

In meccanica quantistica per rappresentazione si intende un modo di descrivere la realtà fisica. Esistono diverse rappresentazioni, anzi infinite rappresentazioni e per ogni problema fisico si cerca di scegliere quella più conveniente.

### 1.2.1 Rappresentazione di Schrödinger

Per giungere alla rappresentazione di Schrödinger bisogna derivare rispetto al tempo la (1.1) e sfruttare la (1.3) ottenendo l'equazione di Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle.$$

---

<sup>1</sup>Si noti che la (1.2) è valida per un generico ket e quindi possiamo scrivere un'uguaglianza tra operatori.

Questa equazione descrive lo sviluppo temporale di un sistema fisico in un generico stato rappresentato dal ket  $|\psi(t)\rangle$ , quindi è un' equazione del moto.

Una quantità fisica osservabile coinvolge solamente moduli di prodotti scalare di vettori dello spazio di Hilbert. Quindi una trasformazione che preservi i prodotti scalare non produrrà effetti fisici misurabili. In particolare, essendo l'operatore  $\hat{U}^\dagger(t, t_0)$  unitario<sup>2</sup>, esso preserva i prodotti scalare. Quindi applicando  $\hat{U}^\dagger = \hat{U}$  ad un vettore della rappresentazione di Schrödinger, che sarà indicato con  $|\psi_S(t)\rangle$ , non sarà alterata la fisica. Eseguendo questa operazione si ottiene un nuovo vettore :

$$|\psi_I(t)\rangle = \hat{U}^\dagger |\psi_S(t)\rangle .$$

Invece un operatore generico  $\hat{A}(t)$  della rappresentazione di Schrödinger diventa :

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{A}_S(t) \hat{U}(t, t_0). \quad (1.4)$$

Trasformando vettori ed operatori attraverso la trasformazione unitaria ottenuta per mezzo di  $\hat{U}^\dagger$  è stato ottenuta una nuova rappresentazione detta **rappresentazione di Heisenberg**. Come si può notare dall'espressione:

$$|\psi_H\rangle = \hat{U}^\dagger(t, t_0) |\psi_S(t)\rangle = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) |\psi_S(t)\rangle = |\psi_S(t_0)\rangle$$

i ket  $|\psi_H\rangle$  corrispondono a vettori stazionari nella rappresentazione di Schrödinger.

Differenziando rispetto al tempo la (1.4) tenendo presente l'equazione (1.3) e la sua coniugata si ha :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A}_H &= -\hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{A}_S \hat{U} + i\hbar \hat{U}^\dagger \left( \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}_S \right) \hat{U} + \hat{U}^\dagger \hat{A}_S \hat{H} \hat{U} \\ &= \hat{U}^\dagger [\hat{A}_S, \hat{H}] \hat{U} + i\hbar \hat{U}^\dagger \left( \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}_S \right) \hat{U}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Introducendo l'Hamiltoniana della rappresentazione di Heisenberg:

$$\hat{H}_H = \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U}$$

si ha:

$$\hat{U}^\dagger [\hat{A}_S, \hat{H}] \hat{U} = [\hat{A}_H, \hat{H}_H].$$

Infine, essendo

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{A}_H = \hat{U}^\dagger \left( \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}_S \right) \hat{U},$$

---

<sup>2</sup>Un operatore unitario generico  $\hat{U}$  è autoaggiunto, quindi vale la relazione  $\hat{U}^\dagger = \hat{U}$ , quindi se  $\hat{U}$  è unitario allora anche  $\hat{U}^\dagger$  è unitario.

l'equazione (1.5) diviene:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A}_H = [\hat{A}_H, \hat{H}_H] + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}_H$$

Quindi è stata ottenuta l'equazione del moto nella rappresentazione di Heisenberg.

Tra le due rappresentazioni precedenti c'è una grande differenza. Infatti l'equazione di Schrödinger descrive l'evoluzione temporale di un vettore, mentre l'equazione del moto di Heisenberg tratta la dipendenza temporale di un operatore. Però non bisogna dimenticare che le due trattazioni sono equivalenti e la scelta di una o dell'altra dipenderà dal singolo problema fisico.

La rappresentazione di Heisenberg è utile per introdurre delle nuove rappresentazioni attraverso trasformazioni unitarie in maniera del tutto analoga a quanto fatto in precedenza. Inoltre grazie ad essa è possibile derivare una chiara analogia formale tra meccanica quantistica e meccanica classica<sup>3</sup>.

## 1.2.2 Rappresentazione di Dirac

In questo paragrafo verrà introdotta la **rappresentazione di Dirac** è alla base della derivazione della serie di Dyson.

Supponiamo che l'operatore di evoluzione temporale sia fattorizzato nella forma:

$$\hat{U} = \hat{U}^{(0)} \hat{U}',$$

dove  $\hat{U}^{(0)}$  sia legato ad una soluzione approssimata del problema fisico in esame, mentre invece  $\hat{U}'$  corrisponda ad una perturbazione del problema relativo ad  $\hat{U}^{(0)}$ . Considerando la (1.3) e moltiplicandone ambo i membri per  $\hat{U}^{(0)\dagger}$  si ottiene l'equazione differenziale:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}' = \hat{U}^{(0)\dagger} \left( \hat{H} \hat{U}^{(0)} - i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}^{(0)} \right) \hat{U}', \quad \text{con } \hat{U}'(t_0, t_0) = \hat{1}. \quad (1.6)$$

Si noti che se  $\hat{U}'$  è poco variabile nel tempo allora il secondo membro dell'equazione è circa nullo, come deve essere in assenza di una perturbazione esterna. Si tenga inoltre presente che il problema è stato ridotto alla determinazione di  $\hat{U}'$ .

L'operatore hamiltoniano sarà la somma di due termini:

$$\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \hat{H}'$$

Definendo l' **Hamiltoniana di interazione** come:

$$\hat{H}'_I = \hat{U}^{(0)\dagger} \hat{H}' \hat{U}^{(0)}$$

---

<sup>3</sup>Si veda il testo Quantum Mechanics di Albert Messiah (casa editrice Dover) pag.317-320

la (1.6) diventa

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}' = \hat{U}'^{(0)\dagger} \hat{H}' \hat{U}'.$$

La rappresentazione di Dirac si ottiene mediante una trasformazione unitaria eseguita sui ket ed operatori della rappresentazione di Schrödinger. Questa trasformazione avviene attraverso l'operatore  $\hat{U}^{(0)}$ . Utilizzando il suffisso I per i vettori ed operatori trasformati si ottiene:

$$\begin{aligned} |\psi_I(t)\rangle &= \hat{U}^{(0)\dagger} |\psi_S(t)\rangle \\ \hat{A}_I &= \hat{U}^{(0)\dagger} \hat{A}_S \hat{U}^{(0)}. \end{aligned}$$

l'equazione del moto nella rappresentazione di Dirac è quindi:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = \hat{H}'_I |\psi_I(t)\rangle.$$

# Capitolo 2

## Perturbazioni dipendenti dal tempo

### 2.1 La serie di Dyson

In fisica, ed in particolare in meccanica quantistica, esistono diverse tecniche di approssimazione, ma solo alcune possono essere trattate in maniera sistematica. Nel seguito verrà esposta la teoria perturbativa per problemi dipendenti esplicitamente dal tempo.

Il moto dei sistemi quantistici è espresso matematicamente attraverso l'operatore  $\hat{U}(t, t_0)$ . Supponiamo che l'hamiltoniana del sistema sia del tipo:

$$\hat{H}(t) = \hat{H}^{(0)}(t) + \hat{V}(t), \quad (2.1)$$

dove  $\hat{H}^{(0)}(t)$ <sup>1</sup> sia l'hamiltoniana di un problema la cui soluzione sia nota esattamente. Anche per  $\hat{H}^{(0)}$  vale una equazione analoga alla (1.2), ovvero:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}^{(0)}(t, t_0) = \hat{H}^{(0)} \hat{U}^{(0)}(t, t_0).$$

Per poter determinare  $\hat{U}$  è sufficiente formare il seguente operatore:

$$\hat{U}_I = \hat{U}^{(0)}(t, t_0) \hat{U}(t, t_0). \quad (2.2)$$

$\hat{U}_I$  rappresenta l'operatore di evoluzione temporale nella rappresentazione di Dirac. Anche per  $\hat{U}_I$  vale una equazione analoga alla (1.2), la cui soluzione è formale è:

$$\hat{U}_I(t, t_0) = \hat{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{V}_I(\tau) \hat{U}_I(\tau, t_0) d\tau. \quad (2.3)$$

All'interno dell'integrale della precedente equazione è presente l'operatore di evoluzione  $\hat{U}_I(\tau, t_0)$  ed anch'esso ammette una soluzione identica alla (2.2). Esprimendo in formule quest'ultima

---

<sup>1</sup>Si noti la generalità dell'hamiltoniana del sistema in cui anche il termine imperturbato dipende esplicitamente dal tempo. Nel seguito questa generalità sarà rimossa assumendo il termine imperturbato indipendente dal tempo.

affermazione si ottiene:

$$\begin{aligned}\hat{U}_I(t, t_0) &= \hat{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{V}_I(\tau) \left( \hat{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{\tau} \hat{V}_I \hat{U}_I(\tau', t_0) d\tau' \right) d\tau = \\ &\hat{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{V}_I(\tau) d\tau + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\tau' \hat{V}_I(\tau) \hat{V}_I(\tau') \hat{U}_I(\tau', t_0).\end{aligned}$$

Iterando si ottiene:

$$\hat{U}_I(t, t_0) = \hat{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}_I^{(n)}(t, t_0),$$

dove

$$U_I^{(n)} = \frac{1}{(i\hbar)^n} \int_{t > \tau_n > \tau_{n-1} > \dots > \tau_1 > t_0} d\tau_n \dots d\tau_1 \hat{V}_I(\tau_n) \dots \hat{V}_I(\tau_1).$$

Partendo dallo sviluppo di  $\hat{U}_I$  si giunge sfruttando la (2.2) allo sviluppo in serie per  $\hat{U}^{(n)}$ :

$$\hat{U}^{(n)} = \frac{1}{(i\hbar)^n} \int_{t > \tau_n > \tau_{n-1} > \dots > \tau_1 > t_0} d\tau_n \dots d\tau_1 \hat{U}^{(0)}(t, \tau_n) \hat{V}_I(\tau_n) \dots \hat{U}^{(0)}(\tau_1, t_0) \hat{V}_I(\tau_1).$$

Tramite questa serie si può ottenere l'approssimazione voluta in cui all'ordine zero si ha semplicemente  $\hat{U}^{(0)}$  e all'ordine ennesimo si ottiene una somma di operatori fino ad arrivare ad  $\hat{U}^{(n)}$ .

## 2.2 Perturbazioni dipendenti dal tempo

In questo paragrafo sarà sviluppata la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo per due casi particolari di spettro dell'hamiltoniana, ovvero il caso totalmente discreto e non degenero ed il caso continuo.

### 2.2.1 Caso discreto

Si supponga di avere un sistema fisico caratterizzato da un'hamiltoniana  $\hat{H}^{(0)}$  che non dipende esplicitamente dal tempo. Gli autoket ed autovalori di questa hamiltoniana sono denotati rispettivamente come  $|\phi_n\rangle$  ed  $E_n$ . L'equazione agli autovalori risulta essere:

$$\hat{H}^{(0)} |\phi_n\rangle = E_n |\phi_n\rangle.$$

A questo sistema viene applicata una perturbazione esterna al tempo  $t = 0$  e l'hamiltoniana diventa:

$$\hat{H}(t) = \hat{H}^{(0)} + \hat{V}(t), \quad \text{con} \quad \hat{V}(t) = \lambda \hat{W}(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Per  $t < 0$  il sistema si trova nell'autoket  $|\phi_i\rangle$ , essendo nullo il termine perturbativo. In generale gli autoket per  $t > 0$  potrebbero non appartenere più all'hamiltoniana imperturbata.

Lo scopo della presente sezione è quello di calcolare la probabilità che il sistema si porti in uno stato descritto dal vettore  $|\phi_f\rangle$ , autoket dell'hamiltoniana imperturbata. Quindi è necessario calcolare la probabilità di transizione tra lo stato iniziale e quello finale.

Lo sviluppo temporale del sistema perturbato è regolato dalla equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = [\hat{H}^{(0)} + \lambda \hat{W}(t)] |\psi(t)\rangle, \quad \text{con} \quad |\psi(t=0)\rangle = |\phi_i\rangle. \quad (2.4)$$

La probabilità di transizione da uno stato generico  $|\psi(t)\rangle$  allo stato finale  $|\phi_f\rangle$  è il numero:

$$P_{i \rightarrow f}(t) = |\langle \phi_f | \psi(t) \rangle|^2.$$

Volendo sviluppare il ket  $|\psi(t)\rangle$  nella base di autoket dell'hamiltoniana imperturbata è necessario introdurre una relazione di completezza del tipo  $\sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| = \hat{1}$  si giunge a:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n | \psi(t) \rangle.$$

Successivamente denotando con  $c_n(t)$  i prodotti scalari  $\langle \phi_n | \psi(t) \rangle$  si ottiene lo sviluppo:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\phi_n\rangle, \quad \text{con} \quad c_n(t) = \langle \phi_n | \psi(t) \rangle.$$

Denotiamo con  $\hat{W}_{nk}(t)$  gli elementi di matrice dell'operatore  $\hat{W}(t)$ :

$$\hat{W}_{nk}(t) = \langle \phi_n | \hat{W}(t) | \phi_k \rangle.$$

Inserendo queste ultime espressioni nella (2.4), utilizzando la relazione agli autovalori per l'hamiltoniana imperturbata e proiettando ambo i membri su una base di autobra  $\langle \phi_n |$  si ottiene:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \langle \phi_n | \psi(t) \rangle &= \langle \phi_n | \hat{H}^{(0)} | \psi(t) \rangle + \lambda \langle \phi_n | \hat{W} | \psi(t) \rangle \\ i\hbar \frac{d}{dt} \sum_k c_k(t) \langle \phi_n | \phi_k \rangle &= \sum_k c_k(t) \langle \phi_n | \hat{H}^{(0)} | \phi_k \rangle + \lambda \sum_k c_k(t) \langle \phi_n | \hat{W} | \phi_k \rangle \\ i\hbar \frac{d}{dt} c_n(t) &= E_n c_n(t) + \lambda \sum_k \hat{W}_{nk}(t) c_k(t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Se non ci fosse il termine perturbativo  $\lambda \hat{W}$  la soluzione del problema sarebbe molto semplice, ovvero:

$$c_n(t) = b_n e^{-iE_n t/\hbar},$$

dove  $b_n$  è una costante non dipendente dal tempo. Supponendo che la perturbazione rimanga piccola rispetto ad  $\hat{H}^{(0)}$ , ovvero che  $\lambda \ll 1$ , ci si aspetta che la soluzione  $b_n$  sia una funzione che vari poco nel tempo. Quindi se alla soluzione imperturbata si introduce una dipendenza temporale nei coefficienti  $b_n$  si può eseguire un cambiamento di funzione del tipo:

$$c_n(t) = b_n(t)e^{-iE_n t/\hbar}$$

e sostituendo quest'ultima espressione nella (2.5) si ottiene:

$$i\hbar e^{-iE_n t/\hbar} \frac{d}{dt} b_n(t) + E_n b_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} = E_n b_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} + \lambda \sum_k \hat{W}_{nk}(t) b_k(t) e^{-iE_k t/\hbar}.$$

Moltiplicando ambo i membri di quest'ultima uguaglianza per  $e^{+iE_n t/\hbar}$  ed introducendo la frequenza angolare di Bohr  $\omega_{nk} = \frac{E_n - E_k}{\hbar}$  si ha:

$$i\hbar \frac{d}{dt} b_n(t) = \lambda \sum_k e^{i\omega_{nk} t} \hat{W}_{nk}(t) b_k(t). \quad (2.6)$$

Si è ottenuto un sistema di equazioni differenziali accoppiate <sup>2</sup>. Per risolvere tale insieme di equazioni si ricorre a metodi perturbativi, ovvero, nell'ipotesi che l'influenza sul sistema del termine perturbativo  $\lambda \hat{W}$  sia piccolo rispetto a quella di  $\hat{H}_0$ , si sviluppa la funzione  $b_n(t)$  in serie di potenze:

$$b_n(t) = b_n^{(0)}(t) + \lambda b_n^{(1)}(t) + \lambda^2 b_n^{(2)}(t) + \dots$$

e sostituendo nella (2.1) si ottiene un sistema di equazioni in cui per  $r = 0$  si ha:

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt} b_n^{(0)}(t) = 0}, \quad (2.7)$$

mentre <sup>3</sup> per i successivi termini devono valere le seguenti espressioni:

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt} b_n^{(r)}(t) = \sum_k e^{i\omega_{nk} t} \hat{W}_{nk} b_k^{(r-1)}(t)}.$$

Per  $t < 0$  il sistema è nello stato  $|\phi_i\rangle$  e solamente il coefficiente  $b_i$  è diverso da zero. Al tempo  $t = 0$  inizia ad agire la perturbazione. Sfruttando la continuità della soluzione è lecito imporre nell'istante iniziale ( $t = 0$ ):

$$b_n(t = 0) = \delta_{ni},$$

<sup>2</sup>L'accoppiamento è dovuto alla presenza della sommatoria in cui compaiono **tutti** i coefficienti  $b_k(t)$ .

<sup>3</sup>per  $r = 0$  si devono annullare tutti i termini proporzionali a  $\lambda$  e quindi il secondo membro dell'equazione (2.6) è identicamente nullo.

infatti  $b_n(0)$  non dipende dal tempo, essendo relativo alla soluzione imperturbata. Quindi  $b_n(0)$  rappresenta una condizione iniziale del problema differenziale. Allora:

$$b_n^{(r)} = 0 \quad \text{per } r \geq 1.$$

Da ciò deriva che al primo ordine perturbativo ( $r=1$ ) si abbia:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} b_n^{(1)}(t) &= \sum_k e^{i\omega_{nk}t} \hat{W}_{nk}(t) \delta_{ki} \\ &= e^{i\omega_{ni}t} \hat{W}_{ni}(t). \end{aligned}$$

Integrando si ottiene la formula:

$$b_n^{(1)} = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t e^{i\omega_{ni}t'} \hat{W}_{ni}(t') dt'$$

I coefficienti  $b_f(t)$  e  $c_f(t)$  hanno lo stesso modulo e quindi la probabilità di transizione risulta essere:

$$P_{i \rightarrow f} = |b_f(t)|^2,$$

dove:

$$b_f(t) = b_f^{(0)}(t) + \lambda b_f^{(1)}(t) + \lambda^2 b_f^{(2)}(t) + \dots$$

Quindi si ottiene la probabilità al primo ordine perturbativo:

$$P_{i \rightarrow f} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t e^{i\omega_{fi}t'} \hat{W}_{fi}(t') dt' \right|^2$$

### 2.2.2 Perturbazioni sinusoidali

Una perturbazione periodica (molto importante per le applicazioni) è caratterizzata da una hamiltoniana con la seguente forma:

$$\begin{aligned} \hat{W}(t) &= \hat{W} \cos \omega t \\ \hat{W}(t) &= \hat{W} \sin \omega t \end{aligned}$$

dove  $\hat{W}$  è un operatore hermitiano indipendente dal tempo ed  $\omega$  rappresenta una frequenza angolare costante. Per poter calcolare la probabilità di transizione da uno stato iniziale ad uno

stato finale è necessario calcolare gli elementi di matrice  $\hat{W}_{fi}(t)$  che risultano essere nel caso di una perturbazione proporzionale alla funzione seno:

$$\begin{aligned}\hat{W}_{fi}(t) &= \hat{W}_{fi} \sin \omega t \\ &= \frac{\hat{W}_{fi}}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})\end{aligned}$$

ed il coefficiente  $b_n^{(1)}(t)$  relativo al primo ordine di approssimazione risulta essere:

$$\begin{aligned}b_n^{(1)}(t) &= -\frac{\hat{W}_{ni}}{(2\hbar)} \int_0^t e^{i(\omega_{ni}+\omega)t'} - e^{i(\omega_{ni}-\omega)t'} dt' \\ &= \frac{\hat{W}_{ni}}{(2i\hbar)} \left[ \frac{1 - e^{i(\omega_{ni}+\omega)t}}{\omega_{ni} + \omega} - \frac{1 - e^{i(\omega_{ni}-\omega)t}}{\omega_{ni} - \omega} \right]\end{aligned}$$

La probabilità di transizione è di conseguenza :

$$\begin{aligned}P_{i \rightarrow f}(t; \omega) &= \lambda^2 |b_f^{(1)}(t)|^2 \\ &= \frac{|\hat{W}_{fi}|^2}{4\hbar^2} \left| \frac{1 - e^{i(\omega_{fi}+\omega)t}}{\omega_{fi} + \omega} - \frac{1 - e^{i(\omega_{fi}-\omega)t}}{\omega_{fi} - \omega} \right|^2,\end{aligned}\tag{2.8}$$

dove si è indicato con  $\omega_{fi}$  la frequenza angolare di Bohr  $\omega_{fi} = \frac{E_f - E_i}{\hbar}$  che coinvolge lo stato finale  $|\phi_f\rangle$  e quello iniziale  $|\phi_i\rangle$  dell'hamiltoniana imperturbata. Nella seconda uguaglianza della precedente equazione la costante  $\lambda$  è stata inglobata nel potenziale perturbativo totale.

Un calcolo analogo eseguito per la perturbazione  $\hat{W}(t) = \hat{W} \cos \omega t$  fornisce il risultato:

$$P_{i \rightarrow f}(t; \omega) = \frac{|\hat{W}_{fi}|^2}{4\hbar^2} \left| \frac{1 - e^{i(\omega_{fi}+\omega)t}}{\omega_{fi} + \omega} + \frac{1 - e^{i(\omega_{fi}-\omega)t}}{\omega_{fi} - \omega} \right|^2.$$

Ponendosi nel caso della perturbazione cosinusoidale si può ottenere il caso in cui la perturbazione esterna sia costante, ovvero ponendo  $\omega = 0$  (nel caso del seno si avrebbe l'annullamento della perturbazione):

$$\begin{aligned}P_{i \rightarrow f}(t) &= \frac{|\hat{W}_{fi}|^2}{\hbar^2 \omega_{fi}^2} |1 - e^{i\omega_{fi}t}|^2 \\ &= \frac{|\hat{W}_{fi}|^2}{\hbar^2} F(t, \omega_{fi})\end{aligned}\tag{2.9}$$

dove si è indicato:

$$F(t, \omega_{fi}) = \left[ \frac{\sin(\omega_{fi}t/2)}{\omega_{fi}/2} \right]^2.$$

Più delicato è invece il caso in cui il termine perturbativo non sia costante. In tal caso emerge il fenomeno della **risonanza** della perturbazione. Fissato un istante di tempo  $t$  la probabilità di transizione  $P_{i \rightarrow f}(t; \omega)$  dipende esclusivamente dalla frequenza angolare  $\omega$ . Il massimo di questa funzione, come si può notare dalla (2.8), si ha per:

$$\omega \simeq \omega_{fi},$$

oppure per:

$$\omega \simeq -\omega_{fi}.$$

Assumiamo  $\omega \geq 0$ , allora la condizione di risonanza si manifesta per  $\omega_{fi} > 0$  o per  $\omega_{fi} < 0$ . Nel primo caso il sistema passa da un livello di energia minore<sup>4</sup> (descritto dal ket  $|\phi_i\rangle$ ) ad uno di energia maggiore (descritto da  $|\phi_f\rangle$ ) assorbendo un quanto di energia  $\hbar\omega$ , viceversa invece nel secondo caso in cui viene invece emesso un quanto energetico dovuto alla transizione da un livello ad energia maggiore ad uno ad energia minore.

Si noti come nel caso in cui  $\omega \neq 0$  la probabilità dipenda da due termini:

$$\begin{aligned} A_+ &= \frac{1 - e^{i(\omega_{fi} + \omega)t}}{\omega_{fi} + \omega} \\ &= -ie^{i(\omega_{fi} + \omega)t/2} \frac{\sin[(\omega_{fi} + \omega)t/2]}{(\omega_{fi} + \omega)t/2}, \end{aligned}$$

ed:

$$\begin{aligned} A_- &= \frac{1 - e^{i(\omega_{fi} - \omega)t}}{\omega_{fi} - \omega} \\ &= -ie^{i(\omega_{fi} - \omega)t/2} \frac{\sin[(\omega_{fi} - \omega)t/2]}{(\omega_{fi} - \omega)t/2}. \end{aligned}$$

Si può vedere che, assunta la positività di  $\omega_{fi}$ , il denominatore di  $A_-$  va a zero per  $\omega = \omega_{fi}$ , mentre il denominatore di  $A_+$  si annulla se  $\omega = -\omega_{fi}$ . Quindi per valori della frequenza angolare della perturbazione vicini a quelli sopra menzionati si avrà il fenomeno della risonanza. I termini  $A_-$  ed  $A_+$  sono chiamati rispettivamente termine di risonanza e di anti-risonanza.

Consideriamo il caso in cui:

$$|\omega - \omega_{fi}| \ll |\omega_{fi}|,$$

---

<sup>4</sup>Si ricordi ancora una volta la formula di Bohr  $\omega_{fi} = \frac{E_f - E_i}{\hbar}$ .

allora possiamo trascurare il termine anti-risonante  $A_+$  e considerando la (2.8) si può eliminare il secondo termine presente nel modulo quadro (considerando che il modulo di un esponenziale vale 1) ottenendo:

$$P_{i \rightarrow f}(t; \omega) = \frac{|\hat{W}_{fi}|^2}{4\hbar^2} F(t, \omega - \omega_{fi}), \quad (2.10)$$

dove

$$F(t; \omega - \omega_{fi}) = \left[ \frac{\sin [(\omega_{fi} - \omega)t/2]}{(\omega_{fi} - \omega)/2} \right]^2.$$

### 2.2.3 Caso continuo

Si parla di spettro continuo nel caso in cui gli stati finali siano etichettati da un indice continuo. In tal caso  $|\langle \phi_f | \psi(t) \rangle|$  non indica più la probabilità che il sistema sia rappresentato nello stato finale dal ket  $|\phi_f\rangle$ , ma invece rappresenta la densità di probabilità che il sistema occupi un certo range di stati una volta che ha interagito con un potenziale esterno.

#### Esempio:

Supponiamo che una particella di massa  $m$  sia soggetta a scattering da parte di un potenziale del tipo  $W(\mathbf{r})$ . Gli stati  $|\psi(t)\rangle$  possono essere espansi attraverso vettori della quantità di moto  $|\mathbf{p}\rangle$  legati all'energia della particella libera (dopo l'interazione con il potenziale esterno) tramite la relazione:

$$E_f = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$$

Lo strumento di misura che rivelerà il passaggio della particella con un certo impulso finale  $\mathbf{p}_f$  non è ideale, quindi ci sarà un certo margine di errore rappresentato da un angolo solido  $\delta\Omega_f$  nello spazio degli impulsi attorno a  $\mathbf{p}_f$ . Di conseguenza ci sarà anche un margine di errore  $\delta E_f$  nella energia finale rilevata. Si noti come nel presente esempio la continuità degli stati sia racchiusa nell'infinità dei valori possibili della funzione impulso. Se il dominio dei possibili valori di impulso relativi all'incertezza sperimentale è  $D_f$  la probabilità che l'impulso finale assuma uno di questi valori è data dal seguente integrale:

$$\delta P(\mathbf{p}_f, t) = \int_{\mathbf{p}_f \in D_f} d^3p |\langle \mathbf{p} | \psi(t) \rangle|^2. \quad (2.11)$$

Se si vuole esprimere il risultato in termini di impulso ed energia è necessario cambiare variabili. In tal caso l'elemento di volume  $d^3p$  diviene:

$$d^3p = p^2 dp d\Omega. \quad (2.12)$$

Introducendo la funzione **densità degli stati finali**  $\rho(E)$  che in questo caso risulta essere:

$$\rho(E) = p^2 \frac{dp}{dE} = p^2 \frac{m}{p} = m\sqrt{2mE},$$

l'elemento di volume (2.12) diviene:

$$d^3p = \rho(E)dEd\Omega,$$

mentre l'integrale (2.11) diventa:

$$\delta P(\mathbf{p}_f, t) = \int_{\Omega \in \delta\Omega_f, E \in \delta E_f} \rho(E)dEd\Omega |\langle \mathbf{p} | \psi(t) \rangle|^2.$$

### Caso generale:

Assumendo lo spettro continuo la condizione di normalizzazione è la seguente:

$$\langle \alpha | \alpha' \rangle = \delta(\alpha - \alpha').$$

La probabilità che il risultato di un esperimento assuma un valore nello spazio degli indici  $\alpha$  centrato attorno ad  $\alpha_f$  è dato dall'integrale:

$$\delta P(\alpha_f, t) = \int_{\alpha \in D_f} d\alpha |\langle \alpha | \psi(t) \rangle|^2.$$

Volendo esprimere il risultato, come nell'esempio precedente, in funzione dell'energia  $E$  del sistema è necessario introdurre una seconda etichetta  $\beta$  per gli stati finali nel caso che quest'ultimi non siano indicizzabili gli stati finali con la sola variabile energia. L'elemento di volume  $d\alpha$  può essere quindi espresso come:

$$d\alpha = \rho(\beta, E)d\beta dE.$$

L'integrale (2.11) diviene quindi:

$$\delta P(\alpha_f, t) = \int_{\beta \in \delta\beta_f, E \in \delta E_f} d\beta dE \rho(\beta, E) |\langle \beta, E | \psi(t) \rangle|^2.$$

### 2.2.4 La regola d'oro di Fermi

Nella presente derivazione della **regola d'oro di Fermi**, per semplicità di calcolo, si assume che il potenziale a cui è soggetto il sistema sia costante (caso  $\omega = 0$  della perturbazione  $\hat{W}(t) = \hat{W} \cos(\omega t)$ ). Quindi in tal caso è possibile utilizzare la stessa argomentazione esposta nel paragrafo riguardante le perturbazioni sinusoidali, escludendo la dipendenza temporale,

per ricavare la funzione distribuzione di probabilità  $|\langle \beta, E | \psi(t) \rangle|^2$ . In particolare utilizzando la formula (2.8) si giunge al risultato:

$$|\langle \beta, E | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{\hbar^2} |\langle \beta, E | \hat{W} | \phi_i \rangle|^2 F\left(t, \frac{E - E_i}{\hbar}\right).$$

La funzione speciale  $F(t, \frac{E - E_i}{\hbar})$  è molto piccata attorno al valore nullo di  $E - E_i$  e quindi la possiamo considerare come una buona approssimazione di una delta di Dirac. Nello specifico:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} F\left(t, \frac{E - E_i}{\hbar}\right) &= \pi t \delta\left(\frac{E - E_i}{2\hbar}\right) \\ &= 2\pi \hbar t \delta(E - E_i). \end{aligned}$$

Sostituendo questa relazione nell'integrale (2.9) e supponendo che  $\rho(\beta, E) |\langle \beta, E | \psi(t) \rangle|^2$  vari poco al variare dell'energia si ha che l'integrazione nella variabile energia è immediata. Se inoltre si ipotizza che la regione di integrazione  $\delta\beta_f$  sia trascurabile si arriva alla seguente conclusione:

- Quando l'energia  $E_i$  appartiene al dominio  $\delta E_f$  si ha che:

$$\delta P(\phi_i, \alpha_f, t) = \delta\beta_f \frac{2\pi}{\hbar} t \left| \langle \beta_f, E_f = E_i | \hat{W} | \phi_i \rangle \right|^2 \rho(\beta_f, E_f = E_i). \quad (2.13)$$

- Quando l'energia  $E_i$  non appartiene a questo dominio si ha che:

$$\delta P(\phi_i, \alpha_f, t) = 0.$$

Si noti come la probabilità (2.13) cresca linearmente nel tempo. Quindi si definisce la probabilità di transizione per unità di tempo come:

$$\delta \Upsilon(\phi_i, \alpha_f) = \frac{d}{dt} \delta P(\phi_i, \alpha_f, t).$$

Infine si definisce la densità di probabilità per unità di tempo ed unità di intervallo della variabile  $\beta_f$  come:

$$v = \frac{\delta \Upsilon(\phi_i, \alpha_f)}{\delta \beta_f}$$

Questa equazione in forma esplicita risulta essere:

$$\boxed{\delta \Upsilon(\phi_i, \alpha_f) = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle \beta_f, E_f = E_i | \hat{W} | \phi_i \rangle \right|^2 \rho(\beta_f, E_f = E_i).}$$

Questo risultato rappresenta la **Regola d'oro di Fermi**<sup>5</sup>. Questa formula può essere estesa anche alle perturbazioni sinusoidali, in tal caso si ottiene:

$$\delta W(\phi_i, \alpha_f) = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle \beta_f, E_f = E_i + \hbar\omega | \hat{W} | \phi_i \rangle \right|^2 \rho(\beta_f, E_f = E_i + \hbar\omega).$$

---

<sup>5</sup>Questa espressione viene detta d'oro dai fisici poichè può essere ricavata matematicamente in maniera relativamente semplice.

# Capitolo 3

## Applicazioni

In questo capitolo saranno considerate tre importantissime applicazioni della teoria perturbativa sia nel caso discreto che nel caso continuo.

### 3.1 Relazione di indetrmiazione per l'energia

Si consideri un sistema quantistico soggetto ad una perturbazione sinusoidale dipendente dal tempo del tipo:

$$\begin{aligned}\hat{W}(t) &= \hat{W} \cos \omega t \\ \hat{W}(t) &= \hat{W} \sin \omega t.\end{aligned}$$

Come è stato già mostrato in precedenza<sup>1</sup> la probabilità di transizione al primo ordine è data da:

$$P_{i \rightarrow f}(t; \omega) = \frac{|\hat{W}_{fi}|^2}{4\hbar^2} F(t, \omega - \omega_{fi}),$$

dove si è indicato con  $F(t, \omega - \omega_{fi})$  la funzione:

$$F(t, \omega - \omega_{fi}) = \left[ \frac{\sin [(\omega_{fi} - \omega)t/2]}{(\omega_{fi} - \omega)/2} \right]^2.$$

Definendo l'ampiezza di risonanza  $\Delta\omega$  come la distanza tra i primi due zeri di  $P_{i \rightarrow f}(t; \omega)$  attorno a  $\omega = \omega_{fi}$  (si veda la figura 3.1), si può notare come la probabilità abbia i suoi valori massimi in questo intervallo.  $\Delta\omega$  risulta allora essere:

$$\Delta\omega = \frac{4\pi}{t}.$$

---

<sup>1</sup>In particolare si ricordi la condizione  $|\omega - \omega_{fi}| \ll \omega_{fi}$  che ha portato all'eliminazione del termine antirisonante  $A_+$ .

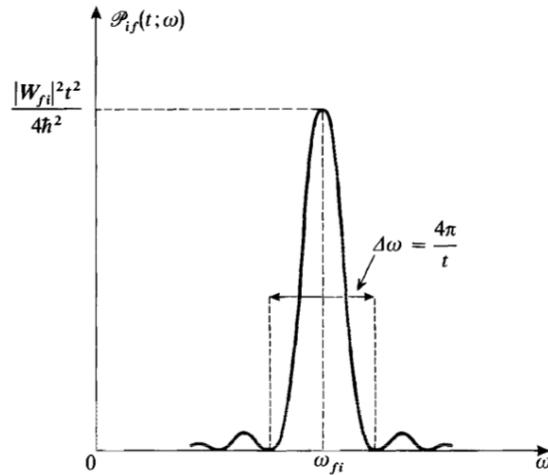


Figura 3.1: Grafico della probabilità di transizione fissato un istante di tempo  $t$ .

Supponiamo di voler misurare la differenza di energia tra uno stato finale ed iniziale dopo l'applicazione della perturbazione sinusoidale con frequenza angolare  $\omega$ , cioè  $E_f - E_i = \hbar\omega_{fi}$ . Se la perturbazione è applicata per un tempo  $t$  l'incertezza sui valori  $E_f - E_i$  dovrà allora essere dell'ordine di:

$$\Delta E = \hbar\Delta\omega \simeq \frac{\hbar}{t}.$$

Questa relazione è nota come **relazione di indeterminazione energia-tempo**.

In figura 3.1 è evidenziato il massimo della probabilità che corrisponde al valore:

$$\frac{|W_{fi}|^2 t^2}{4\hbar^2}.$$

Si nota immediatamente che questo valore diverge nel limite  $t \rightarrow \infty$ , che è assurdo poichè una probabilità non può mai essere maggiore di 1. Questo inconveniente non si manifesta, quindi la teoria al primo ordine di approssimazione risulta essere corretta, se vale la condizione sui tempi:

$$t \ll \frac{\hbar}{|W_{fi}|}.$$

## 3.2 Regole di selezione in approssimazione di dipolo

Lo scopo di questa sezione è quello di calcolare gli elementi di matrice non nulli tra uno stato iniziale  $|\phi_i\rangle$  ed uno stato finale  $|\phi_f\rangle$  con energie rispettivamente  $E_i$  ed  $E_f$ , cioè i numeri  $\langle\phi_f|\hat{W}_{DE}(t)|\phi_i\rangle$  nel caso di un'hamiltoniana del campo elettromagnetico in approssimazione di dipolo. Questo calcolo nel caso di un elettrone atomico porta alle **regole di selezione**.

Il sistema in esame è composto da un nucleo assunto immobile ed un elettrone che orbita a distanza  $r$  attorno a questo nucleo. Assumiamo il gauge di radiazione ed una soluzione di onda piana per il potenziale vettore (si veda appendice A):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = A_0 \mathbf{e}_z e^{i(ky - \omega t)} + c.c.$$

Quindi<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= i\omega A_0 \mathbf{e}_z e^{i(ky - \omega t)} + c.c. \\ \mathbf{B} &= ik A_0 \mathbf{e}_x e^{i(ky - \omega t)} + c.c. \end{aligned}$$

Dalla precedente equazione risulta chiaro che il campo elettrico è nella direzione dell'asse  $z$  (polarizzazione lineare) ed il vettore d'onda  $\mathbf{k}$  lungo l'asse  $y$ , perpendicolare al piano in cui giacciono  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ .

Scegliendo l'origine dei tempi in modo tale che  $A_0$  sia immaginario, poniamo:

$$\begin{aligned} i\omega A_0 &= \frac{E}{2} \\ ik A_0 &= \frac{B}{2}. \end{aligned}$$

Tra le costanti precedentemente introdotte esiste il legame:

$$\frac{E}{B} = \frac{\omega}{k} = c.$$

Quindi si ha che il termine lineare dell'hamiltoniana classica di una carica in un campo elettromagnetico diventa:

$$W_{DE}(t) = -\frac{q}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} = -\frac{q}{m} p_z [A_0 e^{iky} e^{-i\omega t} + c.c.] \quad (3.1)$$

In seguito utilizzando l'approssimazione di dipolo ed approssimando ad 1 l'esponenziale  $e^{iky}$  si giunge a:

$$W_{DE}(t) = \frac{qE}{m\omega} p_z \sin(\omega t).$$

---

<sup>2</sup>c.c. indica il complesso coniugato della quantità a sinistra del segno.

L'operatore hamiltoniano imperturbato ha la forma:

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}}),$$

quindi volendo esprimere gli elementi di matrice in funzione dell'operatore  $\hat{z}$ , con  $\hat{z}$  che rappresenta l'operatore relativo alla componente lungo l'asse z del vettore posizione, calcoliamo il commutatore:

$$[\hat{z}, \hat{H}_0] = i\hbar \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial p_z} = i\hbar \frac{p_z}{m}$$

Quindi:

$$\langle \phi_f | [\hat{z}, \hat{H}_0] | \phi_i \rangle = \langle \phi_f | \hat{z} \hat{H}_0 - \hat{H}_0 \hat{z} | \phi_i \rangle = -(E_f - E_i) \langle \phi_f | \hat{z} | \phi_i \rangle.$$

Utilizzando la frequenza di Bohr  $\omega_{fi} = \frac{E_f - E_i}{\hbar}$ , si giunge al risultato:

$$\langle \phi_f | \hat{W}_{DE} | \phi_i \rangle = iEq \frac{\omega_{fi}}{\omega} \sin(\omega t) \langle \phi_f | \hat{z} | \phi_i \rangle.$$

Supponiamo che gli stati iniziali e finali siano descritti da funzioni d'onda soluzioni del problema di Schrödinger in campo centrale come nel caso dell'atomo di idrogeno o di un atomo idrogenoide:

$$\begin{aligned} \phi_{n_i, l_i, m_i} &= R_{n_i, l_i}(r) Y_{l_i}^{m_i}(\phi, \vartheta) \\ \phi_{n_f, l_f, m_f} &= R_{n_f, l_f}(r) Y_{l_f}^{m_f}(\phi, \vartheta). \end{aligned}$$

L'operatore moltiplicativo  $\hat{z}$  comporta una moltiplicazione per la coordinata z e quest'ultima si esprime in coordinate polari:

$$z = r \cos(\vartheta),$$

ed esprimendo il coseno in termini delle armoniche sferiche:

$$r \cos(\vartheta) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_1^0(\vartheta).$$

Gli elementi di matrice che vogliamo calcolare saranno proporzionali all'integrale:

$$\int d\Omega Y_{l_f}^{m_f*}(\vartheta, \phi) Y_1^0(\vartheta) Y_{l_i}^{m_i}(\vartheta, \phi).$$

La formula generale delle armoniche sferiche espressa in funzione delle funzioni associate di Legendre  $P_l^m(\cos(\vartheta))$  è:

$$Y_l^m(\vartheta, \phi) = C_{m,l} P_l^m(\cos(\vartheta)) e^{im\phi},$$

dove  $C_{m,l}$  è una costante di normalizzazione che dipende dai numeri quantici  $m,l$ . Quindi se nel precedente integrale sostituiamo questa espressione al posto del termine  $Y_1^0(\vartheta)$  e consideriamo la sola dipendenza angolare nella variabile  $\phi$  otteniamo:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m_f+m-m_i)\phi} d\phi = 2\pi\delta_{m+m_f,m_i}$$

Quindi dal momento che nel nostro caso (polarizzazione lungo l'asse  $z$ )  $m = 0$ , si ricava che per avere un valore non nullo dell' integrale deve essere soddisfatta la condizione:

$$m_f = m_i.$$

Utilizziamo questo risultato e consideriamo la parte angolare nella variabile  $\vartheta$ :

$$\int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta) P_{l_f}^{m_i^*}(\cos(\vartheta)) P_1^0(\cos(\vartheta)) P_{l_i}^{m_i}(\cos(\vartheta)).$$

Il valore della funzione di Legendre  $P_1^0(\cos(\vartheta))$  è:

$$P_1^0(\cos(\vartheta)) = \cos(\vartheta).$$

Con un cambiamento di variabile del tipo:

$$\cos(\vartheta) = x,$$

l'integrale precedente diventa:

$$\int_{-1}^1 dx x P_{l_f}^{m_i^*}(x) P_{l_i}^{m_i}(x).$$

Per le funzioni di Legendre vale la seguente formula:

$$\cos(\vartheta) P_l^m(x) = \frac{1}{2l+1} [(l-|m|+1)P_{l+1}^m(x) - (l+|m|)P_{l-1}^m(x)].$$

Grazie ad essa possiamo scomporre il precedente integrale nella somma di due integrali e sfruttare la condizione di ortogonalità:

$$\int_{-1}^1 dx P_{l'}^{m'}(x) P_l^m(x) = C_{l',l}^{m',m} \delta_{l'}^{m'} \delta_l^m,$$

per giungere alla conclusione che gli elementi di matrice dell'operatore  $\hat{z}$  sono non nulli se vale anche la condizione:

$$l_f = l_i \pm 1.$$

In generale le due condizioni sui numeri quantici  $l$  ed  $m$  dipendono dal tipo di polarizzazione del campo elettrico. Infatti la scelta della polarizzazione lungo l'asse  $z$  è stata vantaggiosa poiché è stato possibile esprimere l'operatore moltiplicativo  $\hat{z}$  in termini della armonica  $Y_1^0$ . Quando si sceglie una diversa polarizzazione questo non è più possibile ed è necessario esprimere gli elementi di matrice di interazione in termini delle coordinate polari:

$$x_3 = \cos(\vartheta) = \text{costr}Y_1^0(\vartheta, \psi)$$

$$x_+ = x + iy = r \sin(\vartheta)e^{i\phi} = \text{costr}Y_1^1(\vartheta, \phi)$$

$$x_- = x - iy = r \sin(\vartheta)e^{-i\phi} = \text{costr}Y_1^{-1}$$

Comunque un ragionamento matematicamente analogo a quello appena esposto conduce alle seguenti **regole di selezione**:

$\Delta l = l_f - l_i = \pm 1$ $\Delta m = m_f - m_i = 0, \pm 1$
--

### 3.3 Decadimento beta

A livello atomico è possibile, grazie all'interazione debole, che un neutrone (spin  $\frac{1}{2}$ ) decada in un protone (spin  $\frac{1}{2}$ ) emettendo un elettrone (spin  $\frac{1}{2}$ ). A questo processo è attribuito il nome di decadimento  $\beta_-$ . Quest'ultimo però non esaurisce la casistica dei possibili meccanismi legati al decadimento beta, infatti sono possibili anche il decadimento  $\beta_+$ , ovvero l'emissione da parte del nucleo di un positrone, e la cattura di un elettrone da parte del nucleo atomico. In questi processi non è alterato il numero atomico  $A = Z + N$ , dove  $N$  rappresenta il numero di neutroni nel nucleo, mentre  $Z$  rappresenta il numero di protoni. Per mantenere una interpretazione fisica coerente con le simmetrie fondamentali della natura deve essere coinvolta un'altra particella: il neutrino. L'ipotesi dell'esistenza di questa particella è stata avanzata da Pauli nel 1931 per spiegare il fatto che lo spettro di energia degli elettroni emessi fosse continuo, a differenza di quanto ci si aspetta in un decadimento che coinvolga due corpi. Inoltre un ipotetico processo sprovvisto del neutrino avrebbe violato un'altra simmetria fondamentale: la conservazione del momento di spin totale del sistema. Quindi affinché il processo sia possibile l'antineutrino del decadimento  $\beta_-$  deve avere spin  $s = \frac{1}{2}$ .

Nel 1934 Fermi sviluppò la teoria della radiazione beta e in questo paragrafo si terrà conto esclusivamente della radiazione  $\beta^-$ , ma i concetti sviluppati si applicano anche alla radiazione  $\beta_+$  e alla cattura elettronica. Una grandezza fisica rilevante nei processi di decadimento è il Q-valore che corrisponde all'energia emessa o assorbita dalla reazione. Considerando un processo in cui due particelle a e b decadono in altre due c e d il Q-valore può essere calcolato tramite il bilancio energetico:

$$\begin{aligned} m_a c^2 + T_a + m_b c^2 + T_b &= m_c c^2 + T_c + m_d c^2 + T_d \\ (m_a + m_b - m_c - m_d) c^2 &= T_c + T_d - T_a - T_d, \quad \text{T=energia cinetica, m=massa,} \end{aligned}$$

quindi definiamo Q-valore la grandezza:

$$Q = -(T_{iniziale} - T_{finale}) = (m_{iniziale} - m_{finale}) c^2.$$

Il Q-valore varia al variare del processo  $\beta$  in esame e per i nostri scopi calcoleremo solo quello relativo alla radiazione  $\beta_-$ . Quest'ultima è caratterizzata dalla reazione:



il Q-valore è dato da:

$$\begin{aligned} Q &= [m_N({}^A_Z X) - m_N({}^A_{Z+1} X') - m_{e^-}] c^2 \\ &= \{ [m({}^A X) - Z m_{e^-}] - [m({}^A X') - (Z+1) m_{e^-}] - m_{e^-} \} c^2 + \left\{ \sum_{i=1}^Z B_i - \sum_{i=1}^{Z+1} B_i \right\}, \end{aligned}$$

dove è stato indicato con  $m_N$  la massa nucleare,  $m$  è la massa atomica e  $Q_i$  l'energia di legame dell'elettrone. Quest'ultima è stata trascurata nell'ultima uguaglianza della precedente

espressione, mentre tra la prima e la seconda uguaglianza è stata espressa la massa atomica in funzione della massa nucleare e della massa elettronica  $m_{e^-}$ .

Il processo del decadimento  $\beta$  non può essere descritto in dettaglio dalla teoria quantistica classica, ma grazie all'intuizione di Enrico Fermi è stato possibile costruire una descrizione con la quale fare delle previsioni quantitative, senza dover sconfinare nella teoria quantistica dei campi. In particolare l'informazione celata del problema riguarda gli elementi di matrice da considerare per poter calcolare impostare un problema perturbativo al primo ordine. Gli elementi di matrice:

$$W_{fi} = \int \psi_f^* \hat{V} \psi_i dV$$

sono stati intuiti da Fermi con una forma del tipo:

$$W_{fi} = g \int [\psi_n^* \psi_{e^-}^* \psi_{\nu_e}^*] \hat{O}_x \psi_i dV,$$

dove tra parentesi quadre è espresso il prodotto delle funzioni d'onda delle particelle finali (il pedice n si riferisce al nucleo atomico dopo il decadimento), g è la costante d'accoppiamento che descrive la forza dell'interazione e  $\hat{O}_x$  è l'operatore che descrive il processo di decadimento, la cui forma (nel senso di che tipo di operatore si tratti, ovvero scalare vettoriale ecc..) è stata indovinata dal fisico italiano tenendo conto della relatività ristretta. Se si assume che l'antineutrino e l'elettrone siano particelle libere dopo l'interazione l'equazione precedente diviene:

$$W_{fi} = g \int \psi_n^* \frac{e^{i\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{V}} \frac{e^{i\mathbf{k}_\nu \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{V}} \hat{O}_x \psi_i dV,$$

dove V è il volume utilizzato per la normalizzazione. Inoltre se si assume  $kr \ll 1$  si può semplificare ulteriormente la precedente formula in (si tiene solo il primo termine dello sviluppo in serie di potenze dell'esponenziale):

$$W_{fi} = \frac{g}{V} \int \psi_n^* \hat{O}_x \psi_i dV.$$

Per applicare la Regola d'oro di Fermi è necessario calcolare la funzione densità degli stati. Si denoti con  $\mathbf{p}_{e^-}$  e con  $\mathbf{p}_\nu$  rispettivamente l'impulso dell'elettrone e del neutrino. La meccanica statistica permette di calcolare il numero di stati dell'elettrone in un piccolo volume di energia:

$$dn = \frac{d^3 \mathbf{p}_{e^-} d^3 \mathbf{r}}{(2\pi\hbar)^3},$$

ed una analoga espressione vale per il numero di stati finali del neutrino. Il numero totale di stati del sistema formato da neutrone e neutrino è dato dal prodotto:

$$dn = \frac{d^3 \mathbf{p}_{e^-} d^3 \mathbf{r}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_\nu d^3 \mathbf{r}}{(2\pi\hbar)^3}$$

L'energia  $E$  di una particella relativistica è data dalla formula:

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2,$$

Trascurando la massa del neutrino si ottiene per questa particella la seguente espressione:

$$E_\nu = p_\nu c = T_\nu,$$

ove  $T_\nu$  è l'energia cinetica del neutrino. L'equazione che esprime l'energia relativistica può essere manipolata nel caso dell'elettrone introducendo l'energia cinetica:

$$T_{e^-} = \sqrt{m_{e^-}^2 c^4 + p_{e^-}^2 c^2} - m_{e^-} c^2$$

Quindi si può scrivere:

$$E_{e^-} = T_{e^-} + m_{e^-} c^2.$$

L'energia liberata dal processo in esame si manifesta sottoforma di energia cinetica del neutrino e dell'elettrone (trascuriamo il rinculo del nucleo):

$$Q = T_{e^-} + T_\nu,$$

esprimendo questa relazione in termini dell'energia cinetica de neutrino si ha:

$$T_\nu = Q - T_{e^-}.$$

L'elettrone è considerato una particella libera in un volume  $V$  ed il suo numero di stati è esprimibile come:

$$dn_{e^-} = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} p_{e^-}^2 dp_{e^-}.$$

Lo stesso ragionamento applicato al neutrino fornisce la seguente equazione:

$$dn_\nu = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} p_\nu^2 dp_\nu,$$

Calcoliamo ora il tasso di decadimento infinitesimo utilizzando la regola aurea di Fermi:

$$d\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} g^2 |M_{fi}|^2 (4\pi) \frac{p_{e^-}^2 dp_{e^-} p_\nu^2 dp_\nu}{\hbar^6} \frac{dE_f}{dE_f},$$

dove si è indicato con  $M_{fi}$  l'elemento di matrice nucleare:

$$M_{fi} = \int \psi_f^* \hat{O}_x \psi_i.$$

Essendo l'energia finale  $E_f$  pari a  $E_{e^-} + E_\nu = E_{e^-} + p_\nu c$ , allora  $\frac{dp_\nu}{dE_f} = \frac{1}{c}$ , fissato  $E_{e^-}$ . Includiamo in C tutti gli elementi che non contengono esplicitamente gli impulsi delle particelle considerate:

$$C = \frac{1}{\hbar^6} \frac{2\pi}{\hbar} g^2 |M_{fi}|^2 (4\pi),$$

questa quantità non è una costante in quanto in generale  $M_{fi}$  dipende dall'impulso dell'elettrone emesso. Utilizzando la regola di Fermi calcolata in precedenza possiamo calcolare il numero di elettroni emessi con impulso compreso tra  $p_{e^-}$  e  $p_{e^-} + dp_{e^-}$ :

$$N(p_{e^-}) dp_{e^-} = C p_{e^-}^2 dp_{e^-}.$$

Quindi se indichiamo il Q-valore della reazione con Q, ignorando il rinculo del nucleo si ha:

$$p_\nu = \frac{Q - T_{e^-}}{c} = \frac{Q - \sqrt{p_{e^-}^2 c^2 + m_{e^-} c^4} + m_{e^-} c^2}{c}.$$

Quindi lo spettro di emissione degli elettroni sarà caratterizzato da:

$$N(p_{e^-}) = \frac{C}{c^2} p_{e^-}^2 (Q - T_{e^-})^2 \quad (3.2)$$

$$= \frac{C}{c^2} p_{e^-}^2 \left[ Q - \sqrt{p_{e^-}^2 c^2 + m_{e^-} c^4} + m_{e^-} c^2 \right]^2. \quad (3.3)$$

In generale quest'ultima espressione dovrà essere cambiata con un'altra che tenga conto anche dell'influenza coulombiana che il nucleo esercita sugli elettroni emessi. Questo effetto è racchiuso nella funzione di Fermi  $F(Z', T_{e^-})$ , dove  $Z'$  è il numero atomico del nucleo figlio. Inoltre bisogna considerare il fatto che gli elementi  $M_{fi}$  influenzano lo spettro. Infatti ci sono casi, detti casi proibiti, in cui questi elementi si annullano.

In definitiva tenendo conto della funzione di Fermi  $F(Z', T_{e^-})$  e riscrivendo la (3.2) si ottiene la relazione lineare:

$$(Q - T_{e^-}) \propto \sqrt{\frac{N(p_{e^-})}{p_{e^-}^2 F(Z', T_{e^-})}}$$

Graficando questa relazione lineare si ottiene quello che è chiamato **grafico di Curie** utilizzato ad esempio per fittare i valori massimi di energia cinetica degli elettroni emessi. La verifica sperimentale di questa relazione lineare mostra la correttezza effettiva della teoria di Fermi.

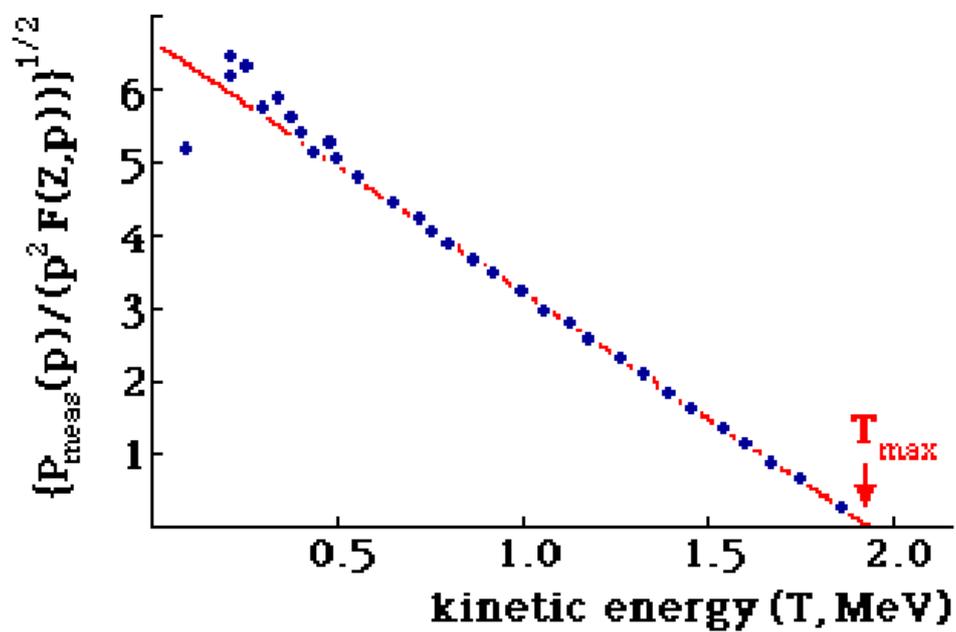


Figura 3.2: Esempio di grafico di Kurie. La deviazione dei punti sperimentali dalla retta in caso di energie cinetiche basse è dovuta allo scattering degli elettroni poco energetici con la sorgente radioattiva. Questo grafico può essere utilizzato per calcolare l'energia massima dell'elettrone emesso tramite regressione lineare.

## Appendice A

# Sistema quantistico in un campo elettromagnetico classico

Per poter analizzare il campo elettromagnetico utilizzando la teoria classica, quindi senza dover ricorrere alla quantizzazione dei campi, si assume che il numero di fotoni incidenti sul sistema in esame possa essere considerato come una variabile continua e non discreta.

La descrizione del campo elettromagnetico è caratterizzata da un campo elettrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  e da un campo magnetico  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Queste due entità fisiche sono localmente descritte dalle note leggi di Maxwell:

$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}$	(legge di Gauss)
$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$	(assenza di monopoli magnetici)
$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$	(legge di Faraday)
$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$	(legge di Ampere),

dove  $\rho(\mathbf{r}, t)$  indica la densità di carica e  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  rappresenta la densità di corrente. La costante  $\epsilon_0$  è la costante dielettrica del vuoto. Nelle precedenti equazioni è stato preferito mettere in evidenza la velocità della luce anziché la permeabilità magnetica del vuoto  $\mu_0$ . La relazione tra le costanti sopracitate è racchiusa nella espressione  $\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = c^2$ . Si noti come la legge di Faraday e la legge che nega l'esistenza di monopoli magnetici siano indipendenti dalle sorgenti di carica elettrica, infatti queste equazioni sono di natura puramente geometrica, cioè descrivono lo sviluppo dei gradi di libertà del campo elettrico e di quello magnetico. La densità di corrente e la densità di carica sono legate dall'importante equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$$

Essa esprime la conservazione della carica elettrica.

Il campo elettrico e quello magnetico possono essere ottenuti attraverso un potenziale scalare  $U(\mathbf{r}, t)$  ed un potenziale vettore  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ . Quindi il campo magnetico è dato da:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.1})$$

Utilizzando la legge di Faraday e assumendo che il potenziale vettore sia una funzione abbastanza regolare si ottiene:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)] \\ &= -\nabla \times \left[ \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \\ \implies \nabla \times \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Essendo il rotore di un gradiente identicamente nullo è lecito scrivere:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\nabla U(\mathbf{r}, t).$$

Da quest'ultima equazione si ottiene l'espressione per il campo elettrico:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \nabla U(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.2})$$

Le uguaglianze (A.1) ed (A.2) sostituite nella prima ed ultima equazione di Maxwell forniscono la seguente coppia di equazioni:

$$\begin{cases} \nabla^2 U(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)] - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \\ \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) - \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \end{cases}$$

Si nota immediatamente che questo sistema equazioni differenziali è piuttosto complicata. Fortunatamente è possibile semplificare questo sistema sfruttando il fatto che le equazioni (A.1) ed (A.2) sono invarianti per le seguenti **trasformazioni di gauge**:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla F(\mathbf{r}, t) \\ \tilde{U}(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{cases}$$

## Hamiltoniana del sistema:

L'hamiltoniana di un sistema ad  $n$  gradi di libertà è una funzione del tipo:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i p_i - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t), \quad (\text{A.3})$$

dove:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad (\text{A.5})$$

Quindi per arrivare al calcolo dell'hamiltoniana è necessario studiarne la lagrangiana e le equazioni (A.4) ed (A.5) dette **equazioni di Hamilton**. Le equazioni del moto :

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

possono essere ottenute partendo dalle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0.$$

La lagrangiana del sistema è:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - qU(\mathbf{r}) + q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

Grazie a quest'ultima è possibile calcolare tutto ciò che serve:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= m\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{A}, \\ \dot{\mathbf{r}} &= \frac{1}{m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}). \end{aligned}$$

Sostituendo quanto appena trovato nell'espressione della hamiltoniana si ottiene:

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 + qU(\mathbf{r})$$

### Gauge di radiazione:

Tra i vari gauge possibili uno di grande importanza è sicuramente il **gauge di radiazione**. Quest'ultimo risulta essere un caso particolare di due importanti gauge, ovvero il **gauge di Lorentz** in cui si impone la condizione:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

ed il **gauge di Coulomb** in cui si impone la condizione:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Il gauge di radiazione è lecito in assenza di carica elettrica, ovvero  $\rho = 0$ . Lo si può ottenere imponendo le condizioni:

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= 0 \\ U &= 0.\end{aligned}}$$

La particolarità di questo gauge è che le equazioni per il campo elettrico ed il campo magnetico dipendono esclusivamente dal potenziale vettore, avendo posto uguale a zero il potenziale scalare. Quindi si ottiene:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}.\end{aligned}}$$

Grazie a questo gauge sia il campo elettrico che quello magnetico e persino il potenziale vettore soddisfano le seguenti equazioni delle onde (da qui il nome gauge di radiazione):

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} &= 0 \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E} &= 0 \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}}$$

Inoltre si ottengono le seguenti equazioni semplificate di Maxwell:

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t},\end{aligned}}$$

## Appendice B

### Approssimazione di dipolo elettrico

L'hamiltoniana di un elettrone con carica elementare  $q = -e$  immerso in un campo elettromagnetico è data dall'equazione:

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 - eU(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}).$$

Eseguendo una trasformazione unitaria  $\psi(\mathbf{r}, t) = e^{i\frac{e}{\hbar}\chi(\mathbf{r}, t)}\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)$  che, come è già stato osservato nel Capitolo 1, non altera la fisica del sistema calcoliamo la hamiltoniana per la nuova funzione d'onda  $\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} &= e^{i\frac{e}{\hbar}\chi(\mathbf{r}, t)}i\hbar\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t} - e\frac{\partial\chi}{\partial t}e^{i\frac{e}{\hbar}\chi(\mathbf{r}, t)}\tilde{\psi} \\ (\mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}))\psi &= e^{i\frac{e}{\hbar}\chi(\mathbf{r}, t)}(-i\hbar\nabla + (\mathbf{A} + \nabla\chi)) \\ &= e^{i\frac{e}{\hbar}\chi(\mathbf{r}, t)}(-i\hbar\hat{\mathbf{p}} + (\mathbf{A} + \nabla\chi)). \end{aligned}$$

Si è ottenuta un'equazione di Schrödinger per la nuova funzione d'onda:

$$i\hbar\frac{\partial|\tilde{\psi}\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\tilde{\psi}\rangle,$$

dove si è indicato:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + e\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}))^2 - e\tilde{U}(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}),$$

dove:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} + \nabla\chi \\ \tilde{U} &= U - \frac{\partial\chi}{\partial t}. \end{aligned}$$

Quindi la trasformazione di gauge equivale ad una trasformazione unitaria. Imponendo il gauge di radiazione presentato nel precedente paragrafo abbiamo una semplificazione nell'hamiltoniana:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + V(\mathbf{r})$$

Inoltre si consideri un solo modo di radiazione:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t} + c.c.,$$

dove c.c. esprime il complesso coniugato del primo addendo. Sotto alcune ragionevoli ipotesi fisiche, ovvero considerando una lunghezza d'onda della radiazione elettromagnetica piccola (tra i 400 nm ed i 700 nm) rispetto alla distanza dell'elettrone riferito nucleo (circa 1 Å), si può approssimare:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \simeq 1$$

ottenendo:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 e^{i\omega t} + c.c. = \mathbf{A}(t),$$

quindi è stata eliminata la dipendenza spaziale del potenziale vettore. Dopo una scelta di gauge:

$$\chi(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(t)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \nabla\chi &= -\mathbf{A} \\ \frac{\partial\chi}{\partial t} &= -\mathbf{r} \cdot \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t). \end{aligned}$$

Infine si giunge alla importantissima hamiltoniana:

$$\boxed{\tilde{H} = \frac{\tilde{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) + e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t) = H_0 - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(t),}$$

dove  $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$  è il momento di dipolo elettrico dell'elettrone nell'atomo, cioè un vettore che è diretto nella direzione del nucleo positivo ed in sostanza quantifica la separazione tra le cariche elettriche positive e negative.

# Conclusioni

Alcuni degli argomenti esposti in questa tesi non trovano compimento nella teoria quantistica classica, ma necessitano della teoria quantistica dei campi. La serie di Dyson ad esempio è utilizzata nell'QED, ovvero l'elettrodinamica quantistica, dove è quantizzato anche il campo elettromagnetico. In particolare lo sviluppo di Dyson è utilizzato nella teoria dello scattering ed ogni termine della serie corrisponde ad un diagramma di Feynman.

Lo stesso vale anche per il decadimento beta che fu inquadrato teoricamente da Enrico Fermi all'interno della meccanica quantistica classica. In realtà questo processo è dovuto all'interazione debole e quindi è del tutto generale, non limitato ad un singolo processo osservato. Perciò anche in questo caso è necessaria una teoria più raffinata che raggiunge il suo apice (per ora) nel Modello Standard.

# Bibliografia

- [1] Albert Messiah *Quantum Mechanics*, Dover, 2014
- [2] Fabio Ortolani *Appunti di teoria quantistica della materia*, 11 ottobre 2012
- [3] Walter A. Harrison *Applied quantum mechanics*, World Scientific, 2000
- [4] Cohen-Tannoudji Claude, Diu Bernard, Frank Laloe *Quantum Mechanics volume 2*, Wiley-VCH, 1991
- [5] Kenneth S. Krane *Introductory to nuclear physics*, John Wiley & Sons, Oregon State University, 1988
- [6] Francesco Ravanini *Istituzioni di fisica teorica*, 12 dicembre 2013