

ALMA MATER STUDIORUM  
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA  
- Sede di Forlì -

*CORSO DI LAUREA*  
IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE  
CLASSE LM-20

TESI DI LAUREA IN  
CONTROLLO AUTOMATICO DEL VOLO

STUDIO ED IMPLEMENTAZIONE DI ALGORITMI  
PER LA NAVIGAZIONE INERZIALE DI VELIVOLI  
AUTONOMI AD ALA ROTANTE

CANDIDATO

Daniele Grifi

RELATORE

Prof. Paolo Castaldi

CO-RELATORE

Prof. Roberto Naldi

ANNO ACCADEMICO 2013 – 2014  
Sessione II

<b>Elenco delle Figure</b>	<b>v</b>
<b>Ringraziamenti</b>	<b>vii</b>
<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Architettura di un sistema GNC</b>	<b>3</b>
1.1 Introduzione . . . . .	3
1.2 Sistema di guida . . . . .	3
1.3 Sistema di Navigazione . . . . .	4
1.4 Sistema di controllo . . . . .	4
1.4.1 Supervisore di basso livello . . . . .	6
1.4.2 Legge di controllo . . . . .	6
1.4.3 Allocazione del controllo . . . . .	6
1.4.4 ESC . . . . .	6
<b>2 Terne di riferimento e trasformazioni</b>	<b>9</b>
2.1 Introduzione . . . . .	9
2.2 Terna ECI . . . . .	10
2.3 Terna ECEF . . . . .	10
2.4 Terna geografica . . . . .	11
2.5 Terna locale geodetica . . . . .	12
2.6 Terna assi corpo . . . . .	13
<b>3 Sensori per la stima di assetto e posizione</b>	<b>15</b>
3.1 Giroscopi . . . . .	15
3.1.1 Descrizione . . . . .	15

3.1.2	Tipologie . . . . .	15
3.2	Accelerometri . . . . .	19
3.2.1	Descrizione . . . . .	19
3.2.2	Tipologie . . . . .	19
3.2.3	Modello di Errore . . . . .	21
3.3	Magnetometri . . . . .	22
3.3.1	Descrizione . . . . .	22
3.3.2	Magnetometri ad induzione . . . . .	22
3.3.3	Magnetometri AMR . . . . .	24
3.4	GPS - Navigazione Satellitare . . . . .	26
3.4.1	Descrizione . . . . .	26
3.4.2	Funzionamento . . . . .	26
3.4.3	Effetti Atmosferici sui segnali satellitari . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Attitude Heading Reference System - AHRS</b>	<b>31</b>
4.1	Introduzione . . . . .	31
4.2	Fase di inizializzazione . . . . .	32
4.3	Input-Output Flag . . . . .	33
<b>5</b>	<b>AHRS basato su Extended Kalman Filter</b>	<b>35</b>
5.1	Introduzione . . . . .	35
5.2	Equazioni di meccanizzazione . . . . .	36
5.3	Modello dell'errore . . . . .	36
5.3.1	Modello dell'errore di misura . . . . .	37
5.3.2	Dinamica dell'errore d'assetto . . . . .	38
5.4	Modello dell'errore nello spazio degli stati . . . . .	39
5.5	Correzione dell'assetto basata su Extended Kalman Filter . . . . .	40
5.6	Risultati di simulazione e conclusioni . . . . .	41
<b>6</b>	<b>AHRS costruito sul gruppo SO(3)</b>	<b>43</b>
6.1	Introduzione . . . . .	43
6.2	Filtri complementari su SO(3) . . . . .	44
6.3	Filtro diretto . . . . .	44
6.4	Filtro passivo . . . . .	45
6.5	Filtro esplicito . . . . .	47
6.6	Modello per l'implementazione . . . . .	49
<b>7</b>	<b>INS/GPS basato Extended Kalman Filter</b>	<b>51</b>
7.1	Introduzione . . . . .	51
7.2	Equazioni della cinematica per INS . . . . .	53
7.2.1	Terna Inerziale ECI . . . . .	54
7.2.2	Terna ECEF . . . . .	54

7.2.3	Terna Tangente . . . . .	55
7.2.4	Terna Geografica . . . . .	55
7.3	Equazioni di Meccanizzazione INS . . . . .	57
7.4	Equazioni dinamiche dell'errore di stato per INS . . . . .	59
7.4.1	Linearizzazione dell'errore di posizione . . . . .	59
7.4.2	Linearizzazione dell'errore di velocità . . . . .	60
7.4.3	Linearizzazione dell'errore d'assetto . . . . .	61
7.5	Equazioni dello stato aumentato . . . . .	63
7.6	Misure di correzione ed analisi di osservabilità . . . . .	65
7.6.1	Sistema stazionario, Bias noti . . . . .	65
7.6.2	Sistema stazionario, Bias incogniti . . . . .	67
<b>8</b>	<b>Filtro complementare sul gruppo SE(3)</b>	<b>69</b>
8.1	Introduzione . . . . .	69
8.2	Teoria di background sul gruppo SE(3) . . . . .	70
8.3	Sistema di misura . . . . .	72
8.4	Filtro complementare su SE(3) . . . . .	72
8.5	Termine di accoppiamento . . . . .	74
8.6	Integrazione discreta su SE(3) . . . . .	77
8.6.1	Mappa esponenziale su SE(3) . . . . .	77
<b>9</b>	<b>Stima di posizione e velocità - uso del GPS con predittore</b>	<b>79</b>
9.1	Introduzione . . . . .	79
9.2	Modello continuo con assetto reale . . . . .	80
9.2.1	Analisi di osservabilità . . . . .	80
9.3	Modello continuo con assetto stimato . . . . .	84
9.4	Uso del Predittore di posizione GPS . . . . .	86
9.5	Stima sull'asse z - ausilio del barometro . . . . .	89
9.6	Filtro complementare per la stima della posizione verticale . . . . .	92
<b>10</b>	<b>Prototipazione software e prove sperimentali</b>	<b>93</b>
10.1	Architettura pixhawk . . . . .	93
10.2	Prototipazione software . . . . .	97
10.3	Prove e risultati della stima di assetto . . . . .	99
10.4	Prove e risultati della stima di posizione e velocità . . . . .	102
	<b>Conclusioni</b>	<b>111</b>
	<b>Appendice</b>	<b>113</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>123</b>



---

## Elenco delle figure

---

1.1	Architettura del sistema di navigazione . . . . .	5
1.2	Architettura di un sistema GNC . . . . .	7
2.1	Terna ECEF ed ECI . . . . .	10
2.2	Terna geografica . . . . .	11
2.3	Terna locale . . . . .	12
2.4	Rotazione da terna ECEF a terna locale geodetica . . . . .	13
2.5	Terna assi corpo . . . . .	13
3.1	Giroscopio meccanico . . . . .	17
3.2	Giroscopi MEMS . . . . .	18
3.3	Accelerometro a pendolo . . . . .	20
3.4	Magnetometro ad induzione di tipo Fluxgate . . . . .	23
3.5	AMR con Barber's pole . . . . .	24
3.6	AMR in ponte di Withstone . . . . .	25
3.7	Curva caratteristica di un sensore AMR . . . . .	25
3.8	Triangolazione GPS . . . . .	26
3.9	Operazione di matching . . . . .	27
3.10	Soluzione 2D linearizzata di navigazione . . . . .	28
5.1	Diagramma a blocchi per ARHS basato su EKF . . . . .	35
6.1	Diagramma a blocchi del filtro diretto su SO(3) . . . . .	45
6.2	Diagramma a blocchi del filtro passivo semplificato . . . . .	46
6.3	Vettori usati nella stima dell'assetto con AHRS SO3 . . . . .	48
8.1	Errore di stima della posizione senza il termine di accoppiamento . . . . .	75

## ELENCO DELLE FIGURE

---

8.2	Errore di stima della posizione con il termine di accoppiamento	76
9.1	Bias accelerometri stimato con assetto reale e le altre misure prive di rumore . . . . .	81
9.2	Bias accelerometri stimato con assetto reale e rumore sugli ac- celerometri . . . . .	82
9.3	Bias accelerometri stimato con assetto reale e rumore sulle altre misure . . . . .	83
9.4	Utilizzando l'assetto stimato i bias degli acc. non sono più osservabili . . . . .	85
9.5	Particolare del segnale reale, predetto, GPS e stima finale . . . .	87
9.6	Segnale di posizione predetto vs. segnale GPS . . . . .	88
9.7	Misura di posizione verticale del barometro . . . . .	90
9.8	Misura di posizione GPS . . . . .	91
10.1	Scheda Pixhawk . . . . .	93
10.2	IRIS della 3D Robotics <sup>©</sup> . . . . .	94
10.3	Standard Simulink per la conversione . . . . .	98
10.4	Test angolo di rollio $\phi$ . . . . .	99
10.5	Test angolo di pitch $\theta$ . . . . .	100
10.6	Test angolo di imbardata $\psi$ . . . . .	101
10.7	Stima posizione x locale . . . . .	102
10.8	Stima posizione y locale . . . . .	103
10.9	Stima posizione z locale . . . . .	104
10.10	Posizione z locale stimata . . . . .	105
10.11	Velocità nord stimata . . . . .	106
10.12	Velocità est stimata . . . . .	107
10.13	Velocità down stimata . . . . .	108
10.14	Particolare Velocità down stimata . . . . .	109

---

## Ringraziamenti

---

Desidero innanzitutto ringraziare il Professore Paolo Castaldi, relatore di questa tesi, che mi ha fatto appassionare ai controlli automatici del volo nel loro complesso ed ha permesso lo svolgimento di questa splendida attività di tesi sperimentale con la sua grande disponibilità nei miei confronti.

Un ulteriore ringraziamento va al Professore Roberto Naldi, co-relatore di questa tesi, che mi ha aiutato sempre, con grande disponibilità, durante tutta l'esperienza di tirocinio e tesi insieme a tutti i membri del CASY di Bologna, in particolare l'Ing. Michele Furci, l'Ing. Dario Mengoli ed il Dott. Marco Melega.

Un sentito ringraziamento ai miei genitori, che, con il loro incrollabile sostegno morale ed economico, mi hanno permesso di raggiungere questo traguardo.

Ringrazio inoltre i miei amici Emanuele, Marco, Matteo e Stefania e gli amici di avventura di Forlì Alberto e Alessandro per i momenti brutti passati al freddo e al gelo.

Ringrazio infine Chiara per essermi stata sempre vicina e per sopportarmi tutti i giorni.

Daniele





---

## Introduzione

---

I sistemi di Navigazione Inerziale, denominati INS, e quelli di Navigazione Inerziale Assistita, ovvero che sfruttano anche sensori di tipo non inerziale come ad esempio il GPS, denominati in questo caso INS/GPS, hanno visto un forte incremento del loro utilizzo soprattutto negli ultimi anni. Ciò è dovuto principalmente al notevole sviluppo tecnologico dei sensori, delle accresciute potenzialità di calcolo, della riduzione dei costi della strumentazione e delle evoluzioni nelle metodologie di trattamento integrato dei dati. Infatti se da un lato si ha il vantaggio di avere sensori MEMS miniaturizzati ed a basso costo, dall'altro lato si ha lo svantaggio di una misura molto rumorosa ed affetta da bias degli stessi. Si sono quindi sviluppati, nel corso degli anni, diversi algoritmi per l'integrazione dei dati inerziali con quelli di sensori di aiuto, come il GPS, il barometro, il sonar e sensori di tipo ottico. Il sistema di navigazione inerziale è un sistema autonomo che, note le condizioni iniziali, riesce a tenere aggiornate le informazioni di posizione, velocità ed assetto. Se da una parte un sistema di questo tipo presenta un output rate molto elevato, d'altra parte presenta un'accuratezza di breve periodo a causa dell'integrazione temporale del rumore e dei bias dei sensori. Al contrario i sensori di aiuto, quali GPS, barometro, sonar e sistemi ottici, hanno un'accuratezza di lungo termine, ma un output rate molto più basso. Combinando quindi le informazioni ad alta frequenza dell'INS, ovvero della IMU, con le informazioni a più bassa frequenza dei sensori di aiuto, si ottiene una soluzione che presenta una stabilità ed accuratezza di più lungo periodo rispetto un sistema INS isolato ed una più alta integrità, disponibilità e continuità, ad esempio, di un ricevitore GPS isolato. I *filtri complementari* sfruttano proprio queste diverse proprietà dei segnali in ingresso. Con questo lavoro di tesi mi sono inserito nel contesto del progetto SHERPA (Smart collaboration between Humans and ground-aerial Robots

for improving rescuing activities in Alpine environments), un progetto europeo coordinato dall'Università di Bologna che prevede di mettere a punto una piattaforma robotica in grado di aiutare i soccorritori in attività in ambienti ostili, come quelli dove operano abitualmente il soccorso alpino, le guardie forestali, la protezione civile. In particolare è prevista la possibilità di lanciare i droni direttamente da un elicottero di supporto, per cui potrebbe essere necessario effettuare l'avvio del sistema in volo. Ciò comporta che il sistema di navigazione dovrà essere in grado di convergere allo stato reale del sistema partendo da un grande errore iniziale, dal momento che la fase di inizializzazione funziona bene solo in condizioni di velivolo fermo. Si sono quindi ricercati, in special modo, schemi che garantissero la convergenza globale, come quelli descritti in [3] e [4]. Gli algoritmi implementati in questo lavoro di tesi sono alla base della navigazione inerziale, assistita da GPS ed Optical Flow, della prima piattaforma aerea sviluppata per il progetto SHERPA, soprannominata *DreamDroneOne*, che include una grande varietà di hardware appositamente studiati per il progetto, come il Laser Scanner, la Camera termica, ecc. Nel capitolo 1 si dà quindi una panoramica dell'architettura del sistema di Guida, Navigazione e Controllo (GNC) in cui mi sono inserito. Nel capitolo 2 si danno alcuni cenni sulle diverse terne di riferimento e trasformazioni come descritto in [1], nel capitolo 3 si descrivono i diversi sensori utilizzati per la navigazione, descritti in dettaglio in [2] e [11], nel capitolo 4 si introducono gli AHRS (Attitude Heading Reference System), per la determinazione del solo assetto sfruttando la IMU ed i magnetometri, nel capitolo 5 si analizza l'AHRS basato su Extended Kalman Filter tratto da [1], nel capitolo 6 si analizza un algoritmo non lineare per la stima dell'assetto molto recente tratto da [3], nel capitolo 7 si analizza il sistema INS/GPS basato su EKF, nel capitolo 8 si presenta un filtro complementare molto recente per la stima di posizione ed assetto tratto da [5], nel capitolo 9 si presenta un filtro complementare per la stima di posizione e velocità, si analizza inoltre l'uso di un predittore GPS. Infine nel capitolo 10 viene presentata la piattaforma hardware utilizzata per l'implementazione e la validazione, si descrive il processo di prototipazione software nelle sue fasi e si mostrano i risultati sperimentali.

---

## Architettura di un sistema GNC

---

### 1.1 Introduzione

Un sistema GNC è l'insieme di diversi blocchi funzionali che interagiscono l'uno con l'altro per riuscire a controllare una data macchina. Con il termine *controllare* ci si riferisce alla capacità di poter porre la macchina in una posizione assegnata, di riuscire ad imporre delle date traiettorie, di riuscire ad assegnare un dato assetto. Il sistema, molto complesso, può essere pensato come l'interazione di tre livelli funzionali:

- Sistema di guida - *Guidance*
- Sistema di navigazione - *Navigation*
- Sistema di controllo - *Control*

### 1.2 Sistema di guida

Il sistema di guida, classificato come alto livello, è il cervello del sistema GNC, è responsabile della generazione di traiettorie e di tutte le decisioni che vengono prese. Determina la traiettoria da seguire per raggiungere un dato target, genera quindi dei requisiti di posizione, velocità ed assetto - indicati nel complesso come *stato del sistema* - che devono essere soddisfatti per riuscire a seguire la traiettoria calcolata. Si occupa inoltre di generare una nuova traiettoria nel caso un ostacolo sia identificato da qualche sensore.

## 1.3 Sistema di Navigazione

Il sistema di navigazione si occupa di determinare, nella maniera più semplice ed accurata possibile, lo stato del sistema, ovvero la sua posizione rispetto una data terna di riferimento, la sua velocità ed il suo assetto. Questa necessità nasce dal fatto che nella realtà non esistono dei sensori la cui uscita rappresenti direttamente queste informazioni. Si fa quindi uso dei dati che provengono da diversi sensori per calcolare le informazioni desiderate, nella pratica si sfruttano giroscopi, accelerometri e magnetometri per ottenere una stima molto accurata dell'assetto, mentre si sfruttano ancora le informazioni degli accelerometri combinate con quelle del GPS per ottenere una stima di posizione e velocità. Il sistema di navigazione si costituisce quindi di sensori e di uno o più filtri di stima. Il compito degli algoritmi di stima è quello di eliminare il rumore di misura ad alta frequenza oltre che ottenere una stima a più larga banda andando a fondere le informazioni dei diversi sensori.

## 1.4 Sistema di controllo

Il sistema di controllo, spesso denominato anche *autopilota*, ha il compito di eseguire gli ordini dati dal sistema di guida, che, come supervisore di alto livello, gestisce tutte le decisioni. In pratica si occupa di stabilizzare la macchina e far sì che questa segua le traiettorie definite dal sistema di guida, rispettando quindi i requisiti di posizione, velocità ed accelerazione. Il sistema di controllo può essere pensato come costituito da tre sottosistemi:

- Supervisore di basso livello
- Legge di controllo
- Allocazione del controllo
- ESC

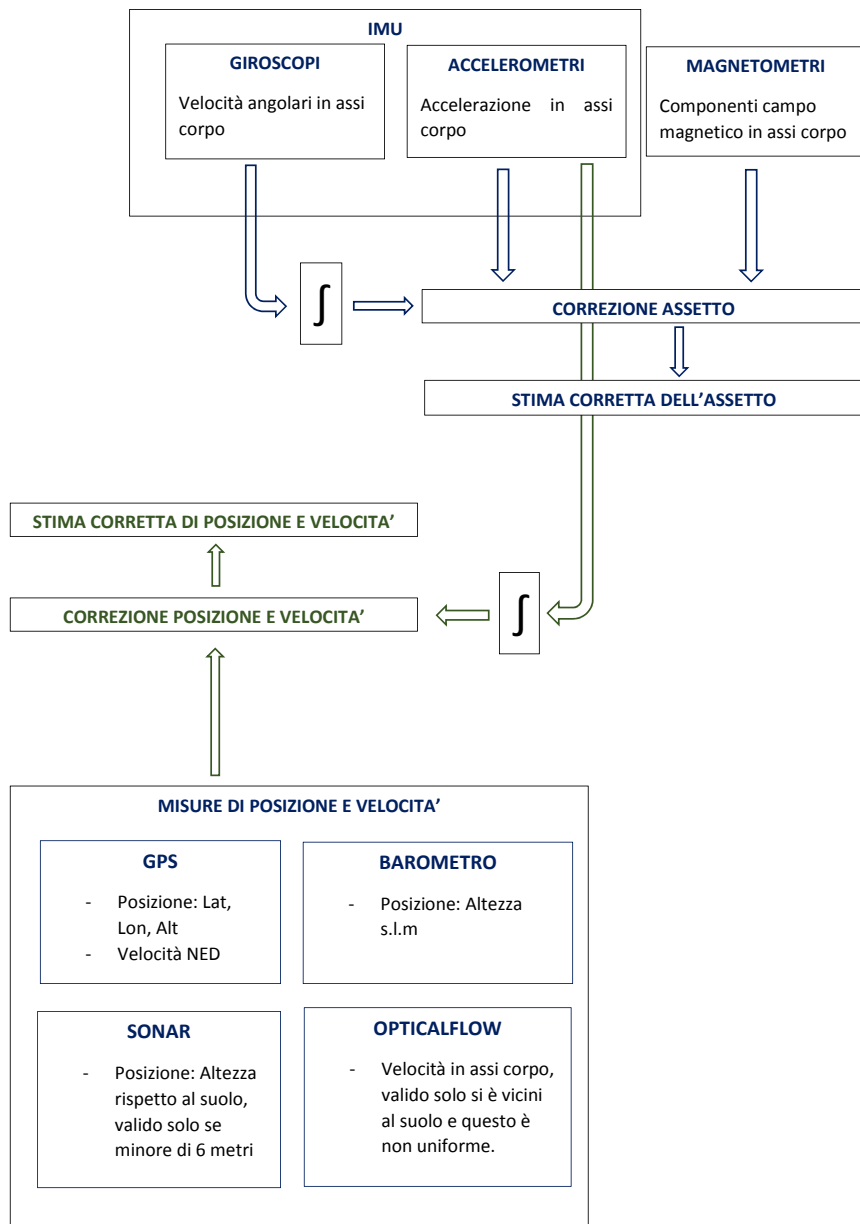


Figura 1.1: Architettura del sistema di navigazione

### 1.4.1 Supervisore di basso livello

Il supervisore di basso livello si occupa di gestire i diversi sensori e le diverse applicazioni a bordo, gestisce lo switch tra le diverse modalità di volo, prende decisioni riguardo i sensori da utilizzare nel sistema di navigazione ed individua, attraverso opportuni algoritmi di *sensor fault detection and identification*, i guasti dei sensori ed adotta degli schemi per compensare il dato mancante.

### 1.4.2 Legge di controllo

La legge di controllo si occupa di calcolare forza e momento risultante che devono essere applicati al corpo per far sì che il target venga raggiunto. Questa può essere un semplice controllo PID (Proporzionale-Integrale-Derivativo) per sistemi lineari, un controllo adattativo o più in generale un controllo non lineare più sofisticato che garantisce la stabilità globale. Va detto che in genere viene sfruttata l'informazione di posizione per la parte proporzionale, che permette di far fronte agli errori di offset, mentre si fa uso dell'informazione di velocità per la parte derivativa, che permette di compensare con azione predittiva gli spostamenti. Lo stesso vale ovviamente anche per la parte di assetto, dove vengono usate le informazioni di assetto, in termini di quaternione, e di velocità angolare sui tre assi.

### 1.4.3 Allocazione del controllo

La parte di allocazione del controllo si occupa di calcolare l'azione, in termini di spinta e momento, di ciascun attuatore a disposizione in modo da generare la forza ed il momento complessivi richiesti dalla legge di controllo. Nel caso di multicotteri l'allocazione del controllo calcola la velocità di rotazione di ciascuna elica, essendo questa legata alla spinta ed al momento esplicito secondo leggi di natura aerodinamica. Infine se il controllo è di tipo *fault tolerant*, l'attuazione viene riallocata in caso di guasto o perdita di uno o più attuatori.

### 1.4.4 ESC

Gli ESC sono i regolatori che ad oggi si usano per controllare i motori brushless. Il sottosistema riceve l'informazione relativa alla velocità di rotazione delle eliche richiesta e genera il segnale PWM per alimentare i motori, con un loop di retroazione per il controllo di velocità.

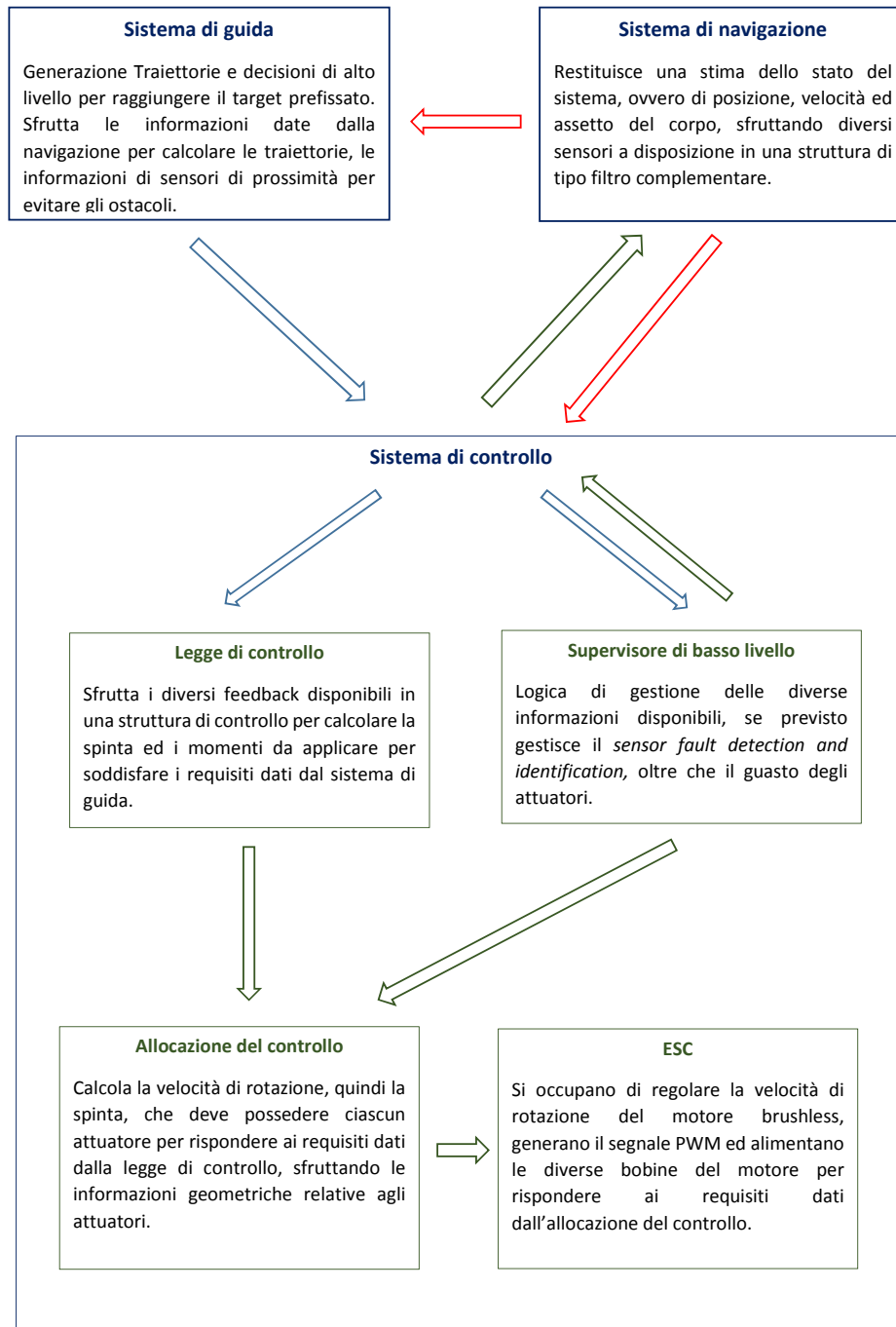


Figura 1.2: Architettura di un sistema GNC





---

### Terne di riferimento e trasformazioni

---

#### 2.1 Introduzione

Esistono diverse terne di riferimento che possono essere utilizzare per la navigazione terrestre, alcune delle quali risultano essere più pratiche in certe situazioni di altre. In molte applicazioni alcune misure sono riferite ad una terna inerziale, altre ad una terna locale, altre ancora ad una terna corpo, di conseguenza risulta necessario definire delle trasformazioni tra terne di riferimento per poter utilizzare, ad esempio in un filtro di stima, le diverse misure. Va ricordato che il ricevitore GPS restituisce la posizione nella terna geografia, ovvero espressa in latitudine, longitudine ed altezza s.l.m. e la velocità nella terna NED. Per i fini della stima di posizione di un multirotores si è interessati a riferirsi ad una terna locale fissa dal momento che il raggio d'azione di queste macchine è dell'ordine di pochi chilometri. È importante di conseguenza avere una buona conoscenza delle diverse terne di riferimento e delle matrici di trasformazione che permettono di ruotare un dato segnale da un sistema ad un altro.

## 2.2 Terna ECI

Una terna inerziale è una terna dove valgono le leggi del moto di Newton, di conseguenza deve essere per forza una terna non accelerata, ma si può muovere di moto rettilineo uniforme. L'origine del sistema di coordinate può essere arbitrario e gli assi coordinati possono puntare in qualsiasi tre direzioni ortogonali tra loro. Tutti i sensori inerziali danno una misura rispetto ad una terna inerziale, ovviamente lungo l'asse sensibile dello strumento.

Si definisce terna ECI (Earth-Centered-Inertial) quella terna inerziale la cui origine coincide con quella della terra ad un dato istante di tempo iniziale, ed allo stesso istante l'asse inerziale  $z$  punta lungo l'asse di spin terrestre e l'asse inerziale  $x$  lungo la linea dell'equinozio d'inverno. L'asse  $y$  è definito per completare la terna destrorsa. Gli assi definiscono un sistema di coordinate ortogonali.

## 2.3 Terna ECEF

Questo sistema di riferimento ha la sua origine nel centro della terra, gli assi ruotano rispetto alla terna ECI con la pulsazione  $\omega_{ie} = 7.2921 \times 10^{-5} \frac{rad}{sec}$ . Rispetto alla terna ECI, la velocità angolare delle terna ECEF risulta essere  $\bar{\omega}_{ie} = [0, 0, 1]^T \omega_{ie}$ . A causa della sua velocità di rotazione, la terna ECEF *non* è una terna inerziale, anche se spesso e volentieri, per molte applicazioni tipiche dell'ingegneria, viene considerata tale.

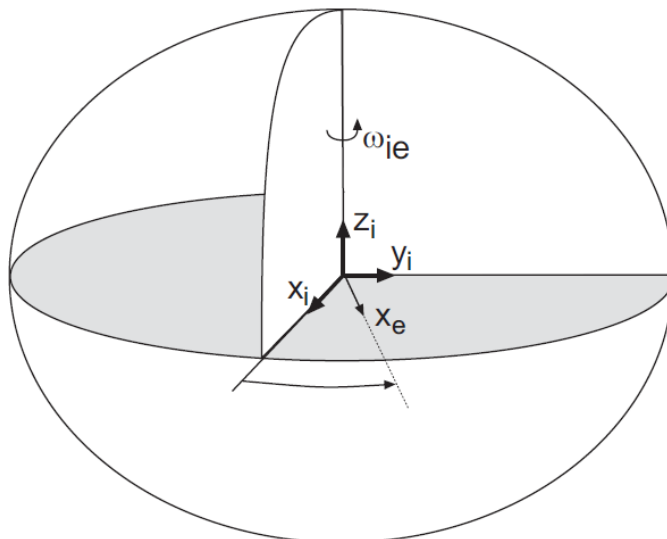


Figura 2.1: Terna ECEF ed ECI

## 2.4 Terna geografica

La terna geografica è definita localmente, rispetto al geoide terrestre. L'origine della terna geografica si muove con il sistema ed è definita come la proiezione dell'origine della terna piattaforma sull'ellissoide di riferimento, come mostrato in Fig. L'asse z geografico punta verso l'interno dell'ellissoide lungo la sua normale. L'asse x punta verso il nord terrestre (diverso dal nord magnetico). L'asse y punta verso est per completare la terna ortogonale destrorsa. Dal momento che l'origine della terna geografica si muove con il veicolo, i suoi assi ruotano mentre il veicolo si muove verso nord o est, di conseguenza non può essere considerata una terna inerziale. La sua origine è definita da latitudine e longitudine.

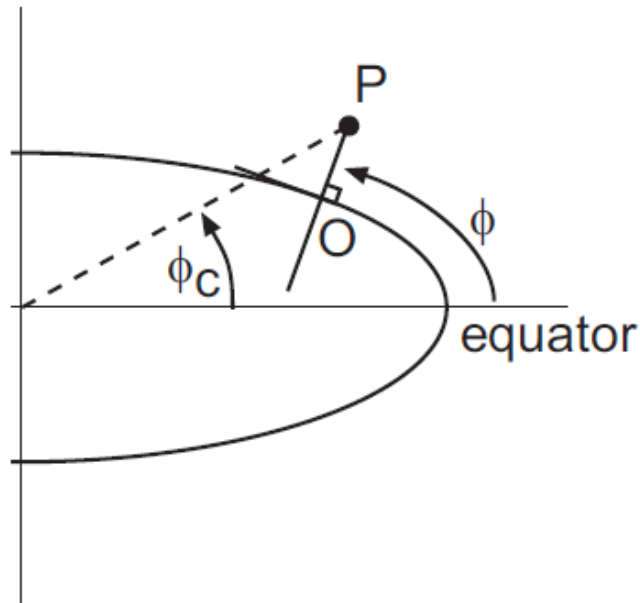


Figura 2.2: Terna geografica

La trasformazione da coordinate geodetiche  $[\phi, \lambda, h]$  a coordinate rettangolari della terna ECEF  $[x, y, z]^e$  è data da

$$x = (R_N + h)\cos(\phi)\cos(\lambda) \quad (2.1)$$

$$y = (R_N + h)\cos(\phi)\sin(\lambda) \quad (2.2)$$

$$z = [R_N(1 - e^2) + h]\sin(\phi) \quad (2.3)$$

dove  $R_N$  è il raggio normale terrestre,  $e$  è l'eccentricità dell'ellissoide terrestre,  $\phi$  è la latitudine geodetica,  $\lambda$  longitudine geodetica ed  $h$  l'altezza s.l.m.

## 2.5 Terna locale geodetica

La terna locale geodetica è il sistema di riferimento ortogonale Nord-Est-Down che viene utilizzato tutti i giorni nella vita. È determinato posizionando un piano tangente all'ellissoide geodetico di riferimento in un punto di interesse. Questo punto è l'origine della terna, l'asse x punta verso il nord terrestre, l'asse z verso l'interno, lungo la normale all'ellissoide geodetico, e l'asse y completa la terna destrorsa puntando verso est. La terna locale è spesso utilizzata per la navigazione locale.

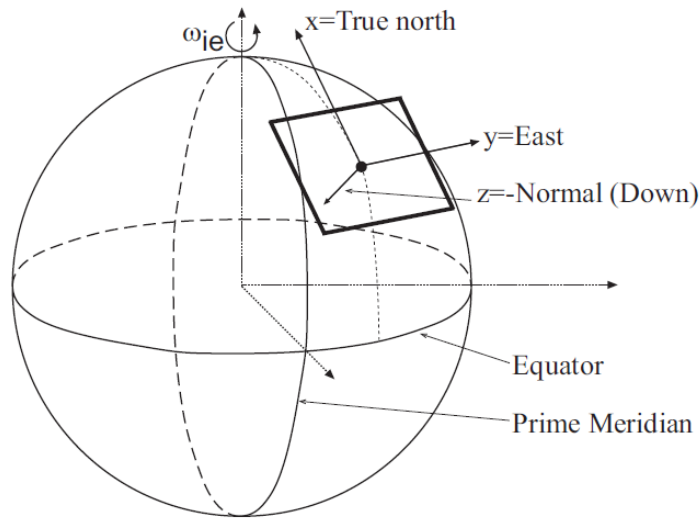


Figura 2.3: Terna locale

La trasformazione di coordinate da terna ECEF a terna locale geodetica è data da

$$\mathbf{R}_e^t = \begin{bmatrix} -\sin(\phi_0)\cos(\lambda_0) & -\sin(\phi_0)\sin(\lambda_0) & \cos(\phi_0) \\ -\sin(\lambda_0) & \cos(\lambda_0) & 0 \\ -\cos(\phi_0)\cos(\lambda_0) & -\cos(\phi_0)\sin(\lambda_0) & -\sin(\phi_0) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

dove  $\phi_0$ ,  $\lambda_0$  identificano le coordinate geodetiche dell'origine della terna locale.

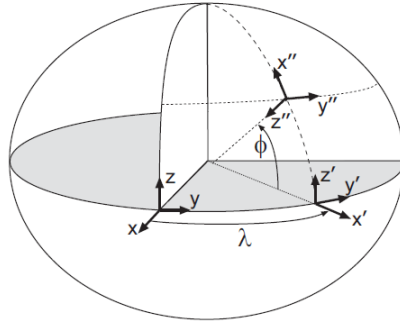


Figura 2.4: Rotazione da terna ECEF a terna locale geodetica

## 2.6 Terna assi corpo

Nelle applicazioni di navigazione, l'obiettivo è quello di determinare la posizione e la velocità basandosi sulle misure di diversi sensori solidali al veicolo. La terna assi corpo è solidale al veicolo di interesse, in genere centrato nel suo centro di massa. Considerando l'origine posizionata nel centro di gravità del corpo semplifica la derivazione delle equazioni della cinematica ed in genere è conveniente per la progettazione dei sistemi di controllo. L'asse corpo  $u$  punta nella direzione dell'asse di simmetria longitudinale del velivolo, l'asse corpo  $w$  punta verso il basso e l'asse corpo  $v$  completa la terna ortogonale destrorsa. Come indicato in Fig., la velocità angolare della terna corpo relativa allo spazio inerziale, rispetto agli assi corpo è denotata da  $\omega_{ib}^b = [p, q, r]^T$ , dove  $p$  è la velocità angolare intorno l'asse corpo  $u$  (velocità di rollio),  $q$  è la velocità angolare intorno l'asse corpo  $v$  (velocità di beccheggio) ed  $r$  è la velocità angolare intorno l'asse corpo  $w$  (velocità di imbardata). Ogni velocità angolare viene considerata positiva in senso anti-orario. La terna assi corpo *non* è una terna inerziale.

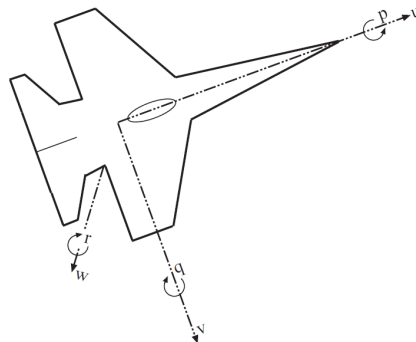


Figura 2.5: Terna assi corpo



## 3.1 Giroscopi

### 3.1.1 Descrizione

Lo scopo dei giroscopi in un sistema di navigazione inerziale è di stabilizzare spazialmente gli accelerometri. Nelle piattaforme cardaniche, i giroscopi misurano la rotazione della piattaforma, che è angolarmente isolata dal moto del veicolo. I giroscopi sono usati per determinare piccole rotazioni della piattaforma rispetto agli assi di navigazione. Un servo-loop riporta l'errore a zero. In un sistema di tipo *strapdown*, i giroscopi sono solidali al veicolo e seguono il suo moto angolare.

### 3.1.2 Tipologie

Esistono diversi tipi di giroscopi, che si differenziano in termini di accuratezza, stabilità e costo:

- Giroscopi meccanici
- Giroscopi ottici
- Giroscopi MEMS



## Giroscopi meccanici

I giroscopi meccanici furono i primi ad essere inventati, formando le basi per la navigazione inerziale. Un tipo di giroscopio meccanico è quella a ruota spinnante. Il principio di funzionamento è basato sul fatto che in assenza di coppie applicate, una massa che ruota velocemente tende a mantenere il suo orientamento nello spazio inerziale. Se viene applicato un momento costante alla massa, questa precessa a velocità costante. Se un corpo rigido di momento angolare  $\mathbf{H}$  ( $\mathbf{H} = \mathbf{I} \omega_s$ , dove  $\mathbf{I}$  è il momento d'inerzia della massa rispetto l'asse di rotazione ed  $\omega_s$  la velocità di spin) è sottoposto ad una coppia  $\mathbf{T}$ , il corpo precessa a velocità  $\omega$ :

$$\begin{aligned} T_x &= A(\dot{\omega}_x + \ddot{\theta}_x) + H(\omega_y + \dot{\theta}_y) + (C - A)\omega_y\omega_z \\ T_y &= A(\dot{\omega}_y + \ddot{\theta}_y) - H(\omega_x + \dot{\theta}_x) - (C - A)\omega_x\omega_z \end{aligned}$$

dove

- $T_i$  sono le componenti del momento applicato
- $A$  è il momento di inerzia trasverso del rotore
- $C$  è il momento polare di inerzia del rotore
- $H$  è il momento angolare del rotore
- $\omega_i$  sono le velocità angolari del case rispetto lo spazio inerziale
- $\theta_i$  sono gli angoli rilevati dai pickoff

Se il momento angolare è sufficientemente elevato le equazioni possono essere approssimate, trascurando il termine di anisoinerzia (C-A), in:

$$\begin{aligned} T_x &= H\omega_y \\ T_y &= -H\omega_x \end{aligned}$$

I pickoff misurano lo spostamento angolare, la loro uscita guida un servo-loop che controllo il momento in modo da riportare il rotore nella sua posizione di origine. Le relazioni giroscopiche legano la coppia applicata, misurata dalla corrente che circola nelle bobine del torquer, alla velocità angolare.

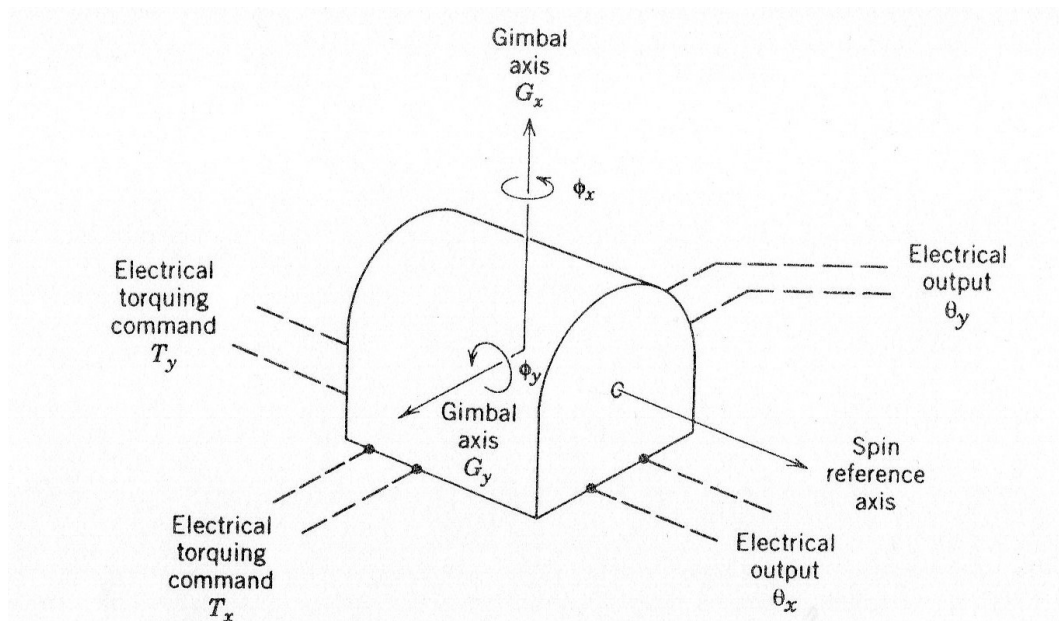


Figura 3.1: Giroscopio meccanico

### Giroscopi ottici

Successivamente all'invenzione dei giroscopi meccanici furono quelli ottici, che trovarono applicazione in larga scala nei sistemi di navigazione aerea negli anni '90. Questi giroscopi offrono un range dinamico molto elevato, linearità, larghezza di banda ed una elevata affidabilità. Risolti i problemi iniziali che presentava il Ring Laser Gyro (RLG), questa tipologia di giroscopi ha superato quella dei giroscopi meccanici come sensori di rotazione nei sistemi di navigazione per aerei commerciali e militari. In seguito altri tipi di giroscopi ottici furono inventati, dai laser multioscillatori e quelli a fibra ottica. Tutti i giroscopi ottici sfruttano l'effetto Sagnac, un fenomeno relativistico per cui si ha che un'onda elettromagnetica, come la luce, che viaggia in un percorso chiuso che sta ruotando rispetto lo spazio inerziale, presenta una lunghezza ottica maggiore vista da un raggio co-rotante rispetto un raggio contro rotante. Costruendo il sistema come un risonatore, come nei primi RLG, o come un interferometro, è possibile misurare la velocità angolare di rotazione del corpo.

### Giroscopi MEMS

Le nuove applicazioni low-cost che domandano sensori sia per la misurazione di accelerazione che di movimento angolare hanno permesso ed incentivato lo sviluppo di sensori *micro-machined electromechanical system* (MEMS). Questo tipo di sensori ha visto il suo grande sviluppo negli ultimi trent'anni. Questi

dispositivi sorpassano molte delle caratteristiche che hanno impedito l'uso di sistemi inerziali in molte applicazioni dove il costo, le dimensioni e l'assorbimento elettrico erano parametri governanti. Le tecniche di matching nell'uso del silicio, sviluppate dalle industrie del settore, furono adattate per realizzare parti meccaniche piccolissime utilizzando silicio o quarzo. Ovviamente la riduzione delle dimensioni ha portato a sensori che presentano dei bias e rumori di misura maggiori rispetto agli altri tipi di giroscopi ed accelerometri esistenti. Molto importante fu quindi lo sviluppo di tecniche che riuscissero a compensare per gli errori sistematici del sensore in tempo reale.

I giroscopi MEMS non sono dispositivi in rotazione e sfruttano l'effetto dell'accelerazione di Coriolis su masse di prova messe in vibrazione per misurare rotazioni angolari. Il tutto si riduce a misurare le forze che agiscono su di una massa che è messa in vibrazione lineare in un sistema di riferimento che ruota intorno un'asse perpendicolare all'asse del moto lineare. Furono ideate diverse configurazioni del dispositivo:

- semplici oscillatori
- oscillatori bilanciati
- risonatori

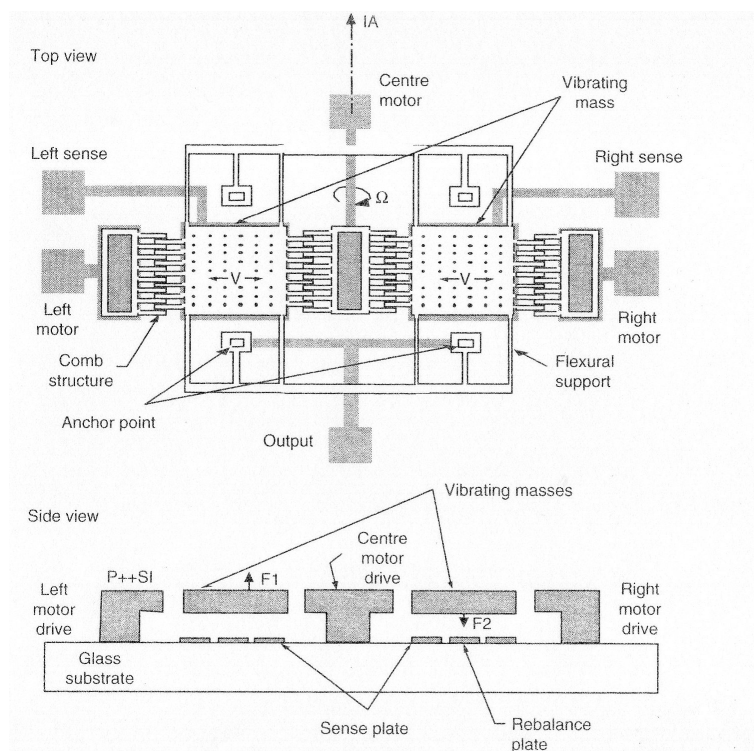


Figura 3.2: Giroscopi MEMS

## 3.2 Accelerometri

### 3.2.1 Descrizione

Un accelerometro è un dispositivo che misura la forza necessaria per accelerare una massa di prova; così viene misurata l'accelerazione del veicolo contenente l'accelerometro. Il dispositivo fornisce un output elettrico proporzionale, o comunque funzione, della componente, lungo il suo asse sensibile, di accelerazione inerziale meno l'accelerazione di gravità. Se lo strumento è montato su di un veicolo la cui accelerazione è  $a$  e se il veicolo viaggia in un campo gravitazionale Newtoniano  $G$ , allora la forza che agisce sulla massa di prova  $m_p$  è

$$\begin{aligned} F &= m_p a = F_R + m_p G + F_D \\ \frac{F_R}{m_p} &= a - G - \frac{F_D}{m_p} = f \quad (\text{output dell'accelerometro}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

dove  $F_R$  è la forza esercitata sulla massa di prova dalla molla di ritorno, ed  $F_D$  è la forza di disturbo indesiderata causata da attriti, isteresi, smorzamenti meccanici. Quindi, se il dispositivo è progettato con forze di disturbo trascurabili, l'uscita dell'accelerometro è una misura di  $(a-G)$  lungo l'asse sensibile dello strumento. Dal momento che gli accelerometri sono usati per calcolare l'accelerazione del veicolo, il loro output dovrà essere corretto per compensare la gravità  $G$ .

Se l'accelerometro è a riposo su di un tavolo si ha che  $a = 0$  (trascurando la rotazione della terra), di conseguenza il dispositivo misurerà  $-G$ . Se l'accelerometro è lasciato cadere nel vuoto, si ha che  $a = G$ , di conseguenza l'output del dispositivo sarà zero. Se si considera la rotazione della Terra si ha che a riposo alla posizione  $\mathbf{R}$ , un accelerometro è sottoposto all'accelerazione centripeta  $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})$  nello spazio inerziale a causa della velocità di rotazione terrestre  $\boldsymbol{\Omega}$ . L'accelerometro misura quindi  $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) - \mathbf{G} = -\mathbf{g}$ , che è l'ordinaria definizione di gravità.

### 3.2.2 Tipologie

Diversi tipi di accelerometri vengono usati per la navigazione inerziale:

- Pendolo, supportato da una piccola lamina metallica, elettricamente mantenuto nella posizione di riposo, mostrato in Fig. (3.3)
- Fasci vibranti, la frequenza di vibrazione è una misura della forza tensile, quindi dell'accelerazione

## Pendolo

In un accelerometro del primo tipo, l'elemento sensibile consiste di un pendolo con una bobina capace di generare una coppia ed un pickoff supportato da una molla torsionale. Il pickoff misura lo spostamento del pendolo dalla posizione di riposo, la bobina genera una forza capace di riportare il pendolo nella sua posizione di nullo, la corrente che scorre nella bobina è una misura di questa forza, quindi dell'accelerazione. Sia  $f = a - G$ , la coppia da applicare al pendolo è data da

$$T = T_R - k\theta + mbf_1 - mbf_2\theta = I(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) \quad (3.2)$$

dove:

- $T_R$  è la coppia residua dovuta ad attriti nei supporti
- $\theta$  è l'angolo di pickoff, in radianti
- $k$  è la rigidezza, meccanica ed elettrica, della lamina
- $mb$  è la pendolosità, kg-metro
- $I$  è il momento di inerzia del pendolo rispetto l'asse di rotazione
- $\ddot{\phi}$  è l'accelerazione angolare del case intorno l'asse di rotazione
- $f_1, f_2$  sono le due componenti dell'accelerazione lineare del case rispetto lo spazio inerziale,  $f_1$  è lungo l'asse sensibile dello strumento

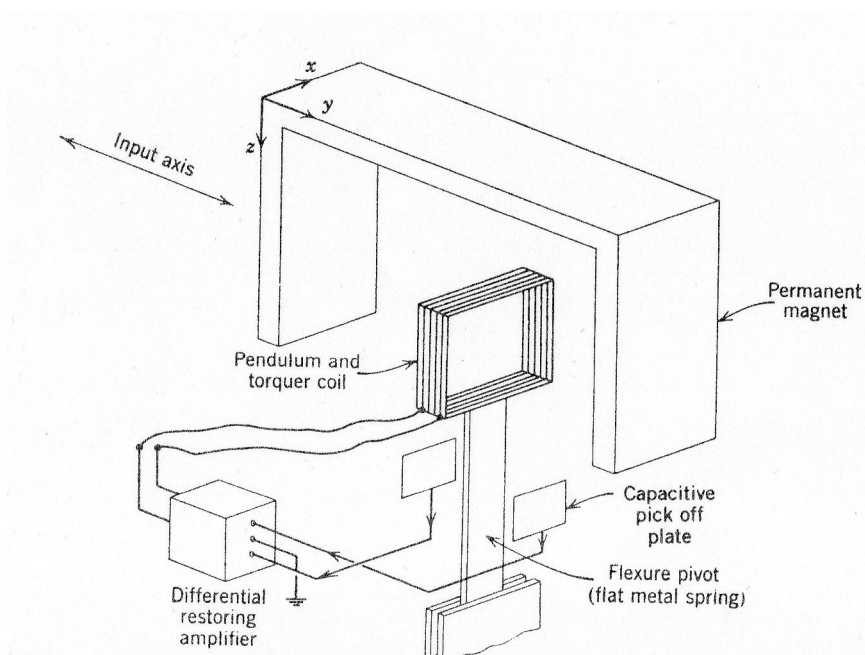


Figura 3.3: Accelerometro a pendolo

Se la rigidezza  $k$  è molto elevata,  $\theta$  è piccolo, e lo strumento misura solo  $f_1$ , indipendentemente dalla presenza dell'accelerazione trasversale  $f_2$ . La

sensibilità ad  $f_2$  è chiamato *cross-coupling* ed è molto serio in ambienti con presenza di vibrazioni quando  $\theta$  ed  $f_2$  oscillano in fase e si rettificano. Questa rettificazione è spesso denominata errore di vibropendolo. Il termine  $T_R/k$  è l'offset angolare dovuto alla presenza di coppie indesiderate sul pendolo, questo causa un bias dell'accelerometro. Dal momento che non sono smorzati, questi esibiscono un'elevata frequenza di risonanza meccanica. Gli accelerometri non smorzati offrono la più grande larghezza di banda, molto importante nei sistemi strapdown, ma devono sempre essere montati su di un blocco smorzante che sopprime le altissime frequenze, evitando quindi la risonanza e di conseguenza danni meccanici.

Nel lavoro di tesi è stata utilizzata la IMU MEMS MPU-6000 della InvSens, con 3D accelerometri e giroscopi regolabili in full range scale attraverso dei file di registro.

### Fasci vibranti

In accelerometri del secondo tipo una massa di prova esercita una tensione  $T$  su uno o più fasci vibranti in genere realizzati in metallo o quarzo. La frequenza di oscillazione di ogni fascio è proporzionale alla radice quadrata della tensione  $T$ , che varia con l'accelerazione. Usando due fasci in configurazione push-pull, sotto la stessa tensione iniziale  $T_0$ , attraverso la misura della differenza di frequenza si può ricavare l'accelerazione:

$$\begin{aligned}\nu_1 &= k_1 \sqrt{T_0 + mga} \\ \nu_2 &= k_2 \sqrt{T_0 - mga} \\ \Rightarrow \nu_1 - \nu_2 &= k_1 \sqrt{T_0} \left[ \frac{mga}{T_0} + \frac{1}{8} \left( \frac{mga}{T_0} \right)^3 + \dots \right]\end{aligned}\quad (3.3)$$

Se la tensione iniziale  $T_0$  è molto grande rispetto al massimo valore dell'accelerazione  $mga$ , si ha che la differenza frequenziale è proporzionale all'accelerazione.

### 3.2.3 Modello di Errore

Un tipico modello di errore per un accelerometro esprime l'uscita stazionaria dello strumento  $u$  come

$$u = D + H + k_0 + k_1 f_1 + k_2 f_1^2 + k_{12} f_2 + k_{13} f_3 + k_{\theta} \theta f_2 + k_{41} T + \dots \quad (3.4)$$

dove

$f_1$	è la componente di $\mathbf{a} - \mathbf{G}$ lungo l'asse sensibile
$f_2, f_3$	sono componenti trasversali di $\mathbf{a} - \mathbf{G}$
T	è la differenza tra la temperatura attuale e quella di calibrazione
D	è il valore minimo di accelerazione rilevabile dallo strumento
H	è l'isteresi termica
$k_0$	è il bias dell'accelerometro, in genere diverso ad ogni accensione del dispositivo
$k_1$	è un fattore di scala lineare
$k_2$	è un coefficiente di calibrazione non lineare
$k_{12}, k_{13}$	sono coefficienti di sensibilità alle accelerazioni trasversali
$k_\theta$	è il coefficiente di vibropendolo
$\theta$	è l'angolo di deflessione del pendolo
$k_{41}$	è il coefficiente lineare di temperatura, per piccole variazioni di temperatura

## 3.3 Magnetometri

### 3.3.1 Descrizione

I magnetometri sono dei dispositivi in grado di misurare un campo magnetico. Esistono diversi tipi di magnetometri basati su diversi principi di funzionamento, in particolare si parlerà di:

- Magnetometri ad induzione
- Magnetometri AMR

### 3.3.2 Magnetometri ad induzione

Questo tipo di dispositivo sfrutta l'induzione magnetica, che lega la forza elettromotrice  $V$  indotta in un conduttore che si concatena con un campo magnetico non stazionario, secondo la nota legge di Faraday

$$V = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (3.5)$$

dove  $\Phi_B$  è il flusso del campo magnetico ed  $\mathbf{E}$  è il campo vettoriale elettrico. Ovviamente per poter sfruttare il fenomeno fisico con un campo magnetico costante nel tempo, o lentamente variabile come quello terrestre, si devono sfruttare delle architetture particolari, per cui ne esistono due tipologie:

- Bobina di ricerca
- Fluxgate

## Bobina di ricerca

I magnetometri a bobina di ricerca consistono in un solenoide avvolto intorno ad un nucleo ferromagnetico. Definito il flusso di campo magnetico

$$\Phi_B = \mu N A B_{\parallel}$$

dove  $\mu$  è la permeabilità magnetica del nucleo,  $N$  sono il numero di spire,  $A$  l'area della sezione trasversale del nucleo,  $B_{\parallel}$  la componente del campo magnetico parallela all'asse del nucleo ferromagnetico. Dall'eqn. (??) si ha che

$$V = -\mu N A \frac{dB_{\parallel}}{dt} \quad (3.6)$$

Se per esempio la bobina è mantenuta in rotazione con pulsazione costante  $\omega$  intorno una direzione fissa, si ha che se immersa in un campo magnetico costante di intensità  $B_0$ , la tensione indotta è sinusoidale e vale

$$V = -\mu N A B_0 \cos(\omega t) \quad (3.7)$$

Questo tipo di dispositivi è spesso usato in satelliti LEO stabilizzati a spin, anche se l'output non è di facile interpretazione dal momento che è legato alla velocità di rotazione e non direttamente all'assetto del corpo.

## Fluxgate

Per by-passare gli svantaggi dati dai magnetometri a bobina di ricerca un'implementazione alternativa è quella nota come Fluxgate. Il cuore di questi magnetometri è composto da due nuclei ferromagnetici, con due bobine avvolte. La bobina primaria è avvolta in modo da avere sui due nuclei ferromagnetici la stessa induzione magnetica ma con segno opposto.

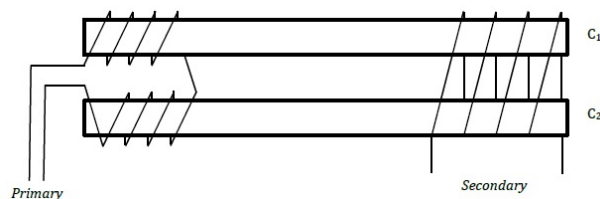


Figura 3.4: Magnetometro ad induzione di tipo Fluxgate

La seconda bobina avvolge entrambi i nuclei così da avere una tensione indotta solo in caso un flusso di campo magnetico netto. In assenza di un campo magnetico esterno, sebbene la bobina primaria venga alimentata con una tensione tempo variante, come un'onda triangolare, la seconda bobina non vede



nessuna tensione indotta. Nel caso sia presente un campo magnetico esterno, questo si va a sommare vettorialmente con i campi prodotti dalla bobina prima, sommandosi quindi in un nucleo e sottraendosi nell'altro. Di conseguenza si avrà un flusso netto di campo magnetico sulla bobina secondaria, quindi una tensione indotta pari a:

$$V = -\frac{d(\Phi_{B1} + \Phi_{B2})}{dt} \quad (3.8)$$

### 3.3.3 Magnetometri AMR

Un AMR - Anisotropic MagnetoResistive - è realizzato depositando uno strato molto sottile di Permalloy, una lega di nickel ed acciaio che può essere facilmente magnetizzata e smagnetizzata. Quando viene applicato un campo magnetico, i domini magnetici ruotano leggermente e questo causa una variazione della resistenza elettrica di circa il 2-3%. L'origine fisica dell'effetto magnetoresistivo nei metalli di transizione risulta dalla dipendenza della direzione di magnetizzazione degli elettroni che scatterano. Nei metalli di transizione, i trasportatori di corrente elettrica predominanti sono gli elettroni 4s dal momento che hanno una maggiore mobilità rispetto agli elettroni 3d. Lo scattering degli elettroni dalla banda *s* alla *d* risulta essere più elevato quando gli elettroni viaggiano parallelamente alla magnetizzazione. Per rendere il fenomeno non trascurabile anche in presenza di campi molto deboli vengono inseriti dei *Barber's pole*, come mostrato in Fig. 3.5.

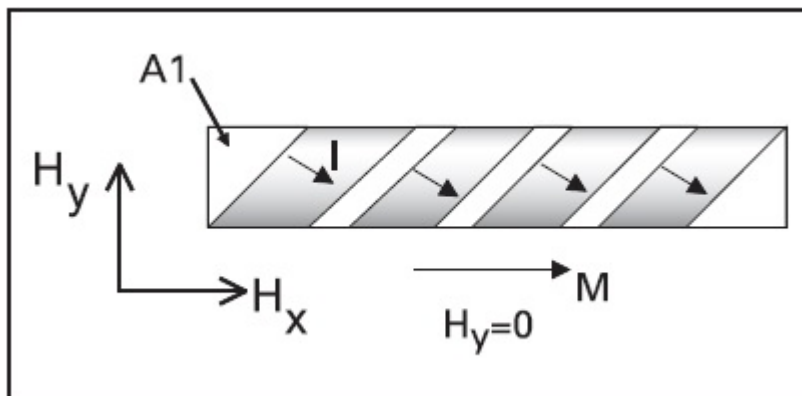


Figura 3.5: AMR con Barber's pole

Queste stripe di alluminio, collocate a  $|45^\circ|$  rispetto la direzione della corrente e del campo ausiliario  $H_x$ , avendo una resistività cinque volte più bassa del Permalloy, cambia localmente la direzione della corrente. In genere viene usata una configurazione a ponte di Withstone per compensare eventuali

dipendenze dalla temperatura, come mostrato nella Fig. 3.6. Nella configurazione in cui due barber's pole sono a  $-45^\circ$  e le altre due a  $+45^\circ$  si ha che, nel caso vi sia solo il campo ausiliario  $H_x$ , il ponte rimane bilanciato, mentre se è presente anche una componente  $H_y$  da misurare, il campo effettivo sarà su due barber's pole più allineato con la corrente (angolo  $< 45^\circ$ ), mentre sulle altre due sarà meno allineato con la corrente (angolo  $> 45^\circ$ ), di conseguenza il ponte sarà sbilanciato. In Fig. 3.7 osserviamo la curva caratteristica di un resistore AMR in ponte di Withstone. Il campo ausiliario  $H_x$  è necessario per stabilizzare il dispositivo, oltre che per regolarne la scala e la sensibilità.

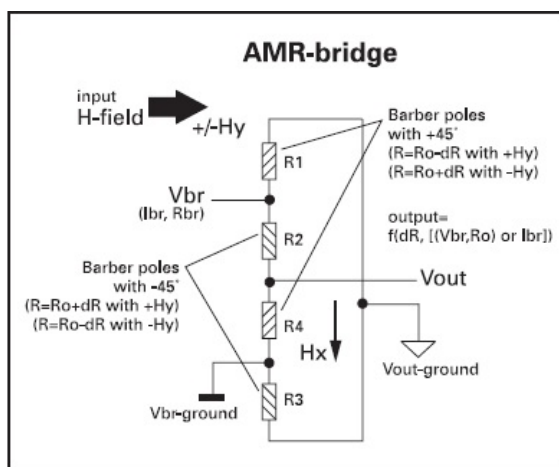


Figura 3.6: AMR in ponte di Withstone

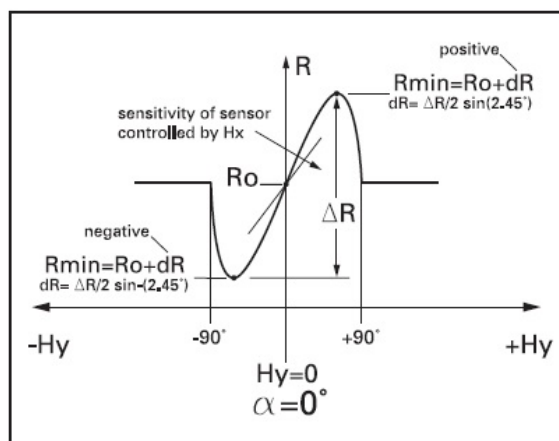


Figura 3.7: Curva caratteristica di un sensore AMR

Nel lavoro di tesi sono stati utilizzati i magnetometri HMC5883L, che sfruttano gli AMR.

## 3.4 GPS - Navigazione Satellitare

### 3.4.1 Descrizione

Il sistema di navigazione satellitare permette una navigazione globale sulla Terra. Sfruttando principalmente due costellazioni di satelliti, la prima chiamata NAVSTAR Global Position System (GPS) del dipartimento della difesa americano, la seconda chiamata Global Orbiting Navigation Satellite System (GLONASS) della Federazione Russa, definite nell'insieme Global Navigation Satellite System (GNSS), un dispositivo ricevente sulla Terra riesce a determinare la sua posizione e velocità nello spazio sfruttando le informazioni di distanza - in seguito *range* - e di variazione della distanza - in seguito *range rate* - da ciascun satellite. Infatti avendo a disposizione queste informazioni da più satelliti e risolvendo ai minimi quadrati o in algoritmi ricorsivi come i filtri di Kalman, si può determinare la propria posizione, note le posizioni dei satelliti nello spazio, come mostrato in Fig. 3.8.

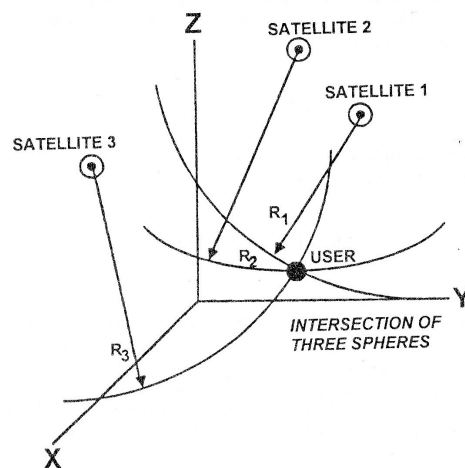


Figura 3.8: Triangolazione GPS

### 3.4.2 Funzionamento

#### Struttura del segnale GPS

Il segnale GPS è composto da due portanti L1 ed L2, con frequenze rispettivamente di 1575.42 MHz e 1227.6 MHz, entrambe multiple della frequenza fondamentale di 10.23 MHz. Il segnale L1 consiste di due portanti: una porta un codice pseudorandom preciso (P), mentre l'altra porta un codice di coarse/acquisition (C/A). Il segnale L2 consiste solo del codice P. Entrambi i codici sono modulati in un messaggio dati a 50 bps. I codici PNR sono modulati sulla

portante secondo la tecnica di *binary phase shift keying* (BPSK), che varia la fase della portante di  $180^\circ$  ogni volta in presenza di ogni 0 ed 1 del codice PNR. Il messaggio GPS fornisce all'utente le informazioni necessarie per navigare, come l'errore di tempo nell'orologio a bordo del satellite, la posizione del satellite ed altre informazioni necessarie.

### Misura di pseudorange

La misura di pseudorange è lo spostamento di tempo necessario per allineare una replica del codice generato nel ricevitore con quello ricevuto dal satellite, moltiplicato quindi per la velocità della luce. Idealmente questo shift rappresenta la differenza tra il tempo di ricezione del segnale (misurato nel riferimento temporale del ricevitore) e quello di emissione (misurato nel riferimento temporale del satellite). Poiché i due riferimenti di tempo sono differenti, si introduce un errore sistematico nelle misure dei ritardi di tempo, per tale motivo la misura sarà riferita come pseudorange.

Il ricevitore effettua una operazione di matching tra il segnale GPS ricevuto e quello generato dal suo software. Nel momento in cui il valore di autocorrelazione è massimo i due segnali sono sovrapposti ed il satellite è agganciato.

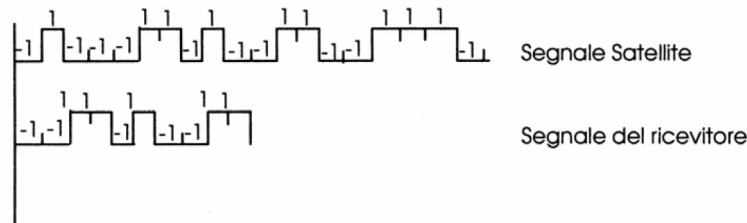


Figura 3.9: Operazione di matching

### Determinazione della posizione

La misura di pseudorange può essere quindi modellata come

$$PR_i = R_i + c\Delta t_{si} - c\Delta t_u + \epsilon_{PR_i} \quad (3.9)$$

dove  $PR_i$  è la misura di pseudorange dal satellite  $i$ ,  $R_i$  è la distanza geometrica al satellite,  $\Delta t_{si}$  è l'errore dell'orologio a bordo del satellite  $i$ ,  $\Delta t_u$  è l'errore dell'orologio del ricevitore,  $c$  è la velocità della luce ed  $\epsilon_{PR_i}$  è la somma dei diversi errori di misura che possono essere corretti e non. Questo termine contiene i ritardi dovuti all'atmosfera, la correzione per la rotazione della Terra, rumori dovuti ai percorsi multipli ed al ricevitore.

Definito il range  $R_i$  come

$$R_i = \sqrt{(X_{si} - X_u)^2 + (Y_{si} - Y_u)^2 + (Z_{si} - Z_u)^2} \quad (3.10)$$

si può scrivere che

$$\delta R_i = R_{im} - R_i \quad (3.11)$$

$$= \frac{\delta R_i}{\delta X_u} (X_u - \hat{X}_u) + \frac{\delta R_i}{\delta Y_u} (Y_u - \hat{Y}_u) + \frac{\delta R_i}{\delta Z_u} (Z_u - \hat{Z}_u) \quad (3.12)$$

$$= \frac{X_{si} - \hat{X}_u}{\hat{R}_i} \delta X_u + \frac{Y_{si} - \hat{Y}_u}{\hat{R}_i} \delta Y_u + \frac{Z_{si} - \hat{Z}_u}{\hat{R}_i} \delta Z_u \quad (3.13)$$

Risolvendo almeno tre equazioni per il residuo del range si può correggere la propria posizione. In Fig. 3.10 è mostrato nel caso 2D la misura del residuo di pseudorange.

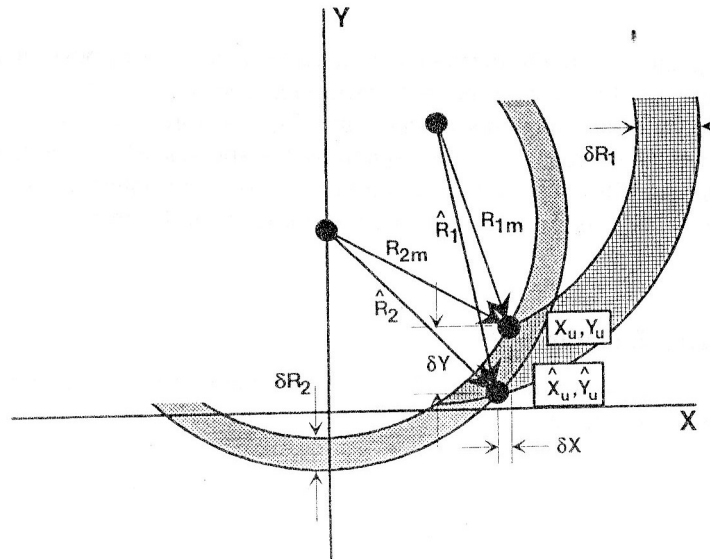


Figura 3.10: Soluzione 2D linearizzata di navigazione

Le misure di velocità vengono calcolate sfruttando l'effetto Doppler per cui si arriva ad una accuratezza di circa 0.1 m/s. Il ricevitore GPS utilizzato nel lavoro di tesi è l'uBlox LEA 6, con una frequenza di aggiornamento di 5 Hz.

### 3.4.3 Effetti Atmosferici sui segnali satellitari

Il segnale che arriva al ricevitore gps come già detto risulta essere corrotto dall'attraversamento dell'atmosfera, in particolare della ionosfera e della troposfera.

#### Rifrazione Ionosferica

Nella ionosfera il segnale interagisce con gli elettroni e gli ioni liberi. La velocità di propagazione di un'onda radio in un certo punto della ionosfera dipende dalla densità di elettroni. La velocità della portante aumenta in presenza di elettroni. Il risultato è che una determinata fase della portante arriva al ricevitore prima che se viaggiasse nel vuoto, questo fenomeno è detto anticipo di fase. L'aumento della velocità di fase è legato all'indice di rifrazione  $n$  definito come

$$\nu_\phi = \frac{c}{n} \quad (3.14)$$

L'indice di rifrazione è dato da

$$n = \sqrt{1 - (f_c/f)^2} \quad (3.15)$$

dove la frequenza critica  $f_c$ , o frequenza del plasma, sotto la quale avviene la riflessione completa, è data in Herz da

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{N_e e^2}{m \epsilon_0}} \simeq 9 \sqrt{N_e} \quad (3.16)$$

dove  $N_e$  è la densità di elettroni per metro cubo,  $e$  è la carica dell'elettrone,  $m$  la massa dell'elettrone,  $\epsilon_0$  la permittività del vuoto ed  $f$  la frequenza del segnale portante. Si nota come l'indice di rifrazione sia più vicino ad uno quanto più è alta la frequenza della portante. Dal momento che il segnale trasportato è una sovrapposizione di portante e modulante, anche quest'ultima risentirà dell'aumento di velocità di fase. In particolare si ha un ritardo nella modulante, noto come ritardo del gruppo, della stessa entità opposto in segno, dell'aumento di fase.

Se si sviluppa in serie l'eqn. (3.15) si ha che

$$n \simeq 1 - \frac{f_c^2}{2f^2} + \frac{f_c^4}{4f^4} \simeq 1 - \frac{40.5N_e}{f^2} + \frac{1640.25N_e^2}{f^4} \quad (3.17)$$

Si nota come avendo a disposizione due frequenze si possa compensare l'effetto indesiderato dovuto alla ionosfera. Il segnale L2 mandato a terra dal satellite GPS è indirizzato esclusivamente a persone autorizzate.

Un altro effetto indesiderato dovuto alla ionosfera sono gli effetti di scintillazione, per cui il segnale può sparire per un breve periodo, diminuendo la capacità di tracking del ricevitore. Questi fenomeni sono non trascurabili nella zona equatoriale e quella polare.

### Rifrazione troposferica

La rifrazione della troposfera  $N$  non è una funzione della frequenza portante. Ad una data quota è determinata da

$$N = 10^6(n - 1) = \frac{77.6}{T} \left( P + \frac{4810e}{T} \right) \quad (3.18)$$

dove  $P$  è la pressione totale in millibar,  $T$  è la temperatura assoluta in K ed  $e$  è la pressione parziale del vapore d'acqua in millibar. Una sua definizione è data da

$$e = 6.1 \frac{RH}{100} 10^{7.4475T_C/(234.7+T_C)} \quad (3.19)$$

dove  $RH$  è l'umidità relativa in % e  $T_C$  la temperatura in ° C. La propagazione viene alterata nella troposfera principalmente per due motivi:

- Il percorso non è più lineare. Questo fenomeno può essere trascurato tranne che per piccoli angoli di elevazione
- La velocità dell'onda è minore che nel vuoto, per cui si ha un percorso apparente più lungo. Integrando per la distanza utente-satellite  $R$ , si ha che

$$\Delta L = \int_0^R (n - 1) ds \quad (3.20)$$

Sfruttando un modello esponenziale per l'atmosfera e tenendo conto che  $n$  è funzione dell'angolo di elevazione, si ha

$$\Delta L = \frac{n_0 - 1}{b \sin \phi_0} e^{-b h_0} \quad (3.21)$$

Tenendo conto di una giornata tipica definita dai modelli standard si ha che  $n_0$  è 1.00032 e  $b$  è  $0.000145 \text{ m}^{-1}$ .

---

### Attitude Heading Reference System - AHRS

---

#### 4.1 Introduzione

L'Attitude Heading Reference System è un sistema capace di mantenere una stima accurata dell'assetto mentre un corpo si muove. A differenza degli algoritmi INS - Inertial Navigation System - descritti in seguito, dove sono disponibili anche le informazioni di velocità, in uno stimatore dell'assetto le uniche misure considerate disponibili sono quelle derivanti dalla IMU ( Inertial Measurement Unit ), ovvero misure di velocità angolare date dai giroscopi e misure di forza specifica date dagli accelerometri, e la misura del campo magnetico terrestre dato dai magnetometri. Una struttura degli algoritmi di stima molto ricercata ai fini del controllo del volo è quella del *filtro complementare* in quanto permette di ottenere la stima di una certa grandezza a frequenze più elevate rispetto quella a cui sono disponibili tali informazioni direttamente dai sensori. Nella stima dell'assetto si utilizzano quindi le informazioni ad alta frequenza dei giroscopi, disponibili a circa 200 Hz, per avere una stima non corretta dell'assetto, mentre si utilizzano le informazioni a più bassa frequenza derivanti dagli accelerometri, disponibili a circa 25 Hz, per correggere la stima corrotta dai bias sui giroscopi.



## 4.2 Fase di inizializzazione

Si deve fornire all'algorithmo di stima un valore iniziale dello stato del sistema, che successivamente verrà corretto. Questo valore iniziale deve essere il più vicino possibile a quello reale per due motivi: evitare la divergenza di metodi di stima locali, quali quelli basati su EKF, diminuire il tempo di convergenza di tutti gli algoritmi di stima, compresi quelli globali. Per fare ciò è stato implementato il metodo deterministico noto come *TRIAD ottimizzato*. Definito un certo intervallo di tempo iniziale  $(t_1, t_2)$  in cui si suppone che il corpo abbia accelerazione e velocità angolare nulla, si vanno a campionare e mediare, attraverso un filtro passa-basso, i dati provenienti da accelerometri, magnetometri e giroscopi per ottenere una stima rispettivamente di  $\bar{g}_b$ ,  $\bar{m}_b$  e  $\bar{x}_g$ . Il metodo cerca di determinare la matrice dei coseni direttori tra terna NED ed assi corpo noti due vettori non paralleli in entrambi i sistemi di riferimento. Nel nostro caso i due vettori sono il vettore accelerazione di gravità  $\mathbf{g}$  ed il vettore campo magnetico terrestre  $\mathbf{m}_e$ . Definendo quindi tre vettori ortogonali tra loro come  $\mathbf{r} = \mathbf{g}/\|\mathbf{g}\|$ ,  $\mathbf{t} = \mathbf{g} \times \mathbf{m}_e/\|\mathbf{g} \times \mathbf{m}_e\|$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{t} \times \mathbf{r}$  è possibile scrivere

$$\underbrace{[\mathbf{r}_b, \mathbf{t}_b, \mathbf{u}_b]}_{A_b} = \mathbf{R}_n^b \underbrace{[\mathbf{r}_n, \mathbf{t}_n, \mathbf{u}_n]}_{A_n} \Rightarrow \mathbf{R}_n^b = \mathbf{A}_b(\mathbf{A}_n)^{-1} = \mathbf{A}_b(\mathbf{A}_n)^\top \quad (4.1)$$

avendo costruito le matrici  $A_b$  ed  $A_n$  in modo che siano ortonormali. Fin qui si è descritto il TRIAD classico, dove delle quattro informazioni scalari derivanti dalle due misure vettoriali, solo tre ne vengono utilizzate, trascurando nell'esempio sopra una componente del vettore  $\mathbf{m}_e$  campo magnetico nel momento in cui si va a normalizzare  $\mathbf{t}$ . È possibile utilizzare tutte le informazioni a disposizione, facendo pesare ovviamente in modo maggiore quelle più accurate, definendo due matrici

$$A(I) = \left[ \mathbf{r} = \frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|}, \mathbf{t} = \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{m}_e}{\|\mathbf{g} \times \mathbf{m}_e\|}, \mathbf{u} = \mathbf{t} \times \mathbf{r} \right] \quad (4.2)$$

$$A(II) = \left[ \mathbf{r} = \frac{\mathbf{m}_e}{\|\mathbf{m}_e\|}, \mathbf{t} = \frac{\mathbf{m}_e \times \mathbf{g}}{\|\mathbf{m}_e \times \mathbf{g}\|}, \mathbf{u} = \mathbf{t} \times \mathbf{r} \right] \quad (4.3)$$

da cui ricavare due stime della matrice dei coseni direttori tramite la (4.1), quindi definire  $R_n^b$  come

$$\mathbf{R}_n^b = \frac{\sigma_2 \mathbf{R}_n^b(I) + \sigma_1 \mathbf{R}_n^b(II)}{\sigma_1 + \sigma_2} \quad (4.4)$$

dove si sono indicate con  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  le tracce delle matrici di covarianza dell'accelerometro e del magnetometro rispettivamente. Nota la  $R_n^b(t_2)$ , si può ricavare il quaternione iniziale  $\mathbf{q}_0$ . Come valori iniziali di velocità e posizione vengono considerati quelli derivanti dal GPS non avendo a disposizione altri riferimenti.

## 4.3 Input-Output Flag

Nella realtà può succedere, per diverse cause, che i sensori diano in uscita dei valori completamente sbagliati. È opportuno quindi inserire nell'algoritmo una sezione che controlli le uscite dei sensori e, nel caso di dato palesemente errato, vada a scartare l'informazione e tratti in qualche modo il missing data. Si deve quindi definire un criterio per eseguire questa prima selezione delle informazioni, nonché un modo per compensare l'assenza di informazioni in un certo istante. In maniera molto semplice sono stati definiti dei valori limite con cui confrontare la norma del vettore accelerazione, la norma del vettore campo magnetico e le componenti di velocità angolare date dai giroscopi. Questi valori limite sono determinati secondo l'esperienza del progettista che deve conoscere bene il sistema di cui si vuole stimare l'assetto, per esempio si è fissato a 3g il limite di verifica per gli accelerometri perché è molto improbabile che un quadricottero venga sottoposto a valori di accelerazione maggiori, per i giroscopi si è scelto come valore limite di verifica il limite di misura dello stesso dato dal datasheet. A questo punto, se il dato in ingresso viene ritenuto errato dal sistema, si va a scartare lo stesso, impedendo così al filtro di propagare o correggere l'assetto con informazioni sbagliate. Nel caso in cui siano i giroscopi a dare in uscita informazioni sbagliate si è scelto di mantenere l'ultima velocità angolare buona, mentre nel caso in cui siano accelerometri o magnetometri ad avere dei problemi si è scelto di non effettuare la fase di correzione dell'assetto. Ovviamente questo sistema di operare costituisce l'essenziale e non di certo può sostituire un algoritmo di tipo fault-tolerant. Infine si è inserita una sezione che controllasse le uscite del filtro, in particolare la stima della velocità angolare e del bias dei giroscopi. Anche qui si sono definiti dei valori limite con cui confrontarsi, e se, nel caso di malfunzionamento del filtro, si avesse in uscita una stima palesemente errata, dei flag cambiano il loro stato per segnalare ad un sistema a più alto livello il malfunzionamento.



---

## AHRS basato su Extended Kalman Filter

---

### 5.1 Introduzione

Il cuore dell'algoritmo è proprio il modo in cui si va a correggere l'assetto stimato a priori. L'Extended Kalman Filter viene usato da molti anni in questo tipo di applicazioni, per cui lo si può trovare in letteratura, come in [1]. La struttura di tipo filtro complementare presenta dei vantaggi rispetto un semplice filtro di stima; il principale è la non necessità di essere tunato (vale solo in teoria, in pratica un pò di tuning sarà sempre necessario). Tra i principali difetti di un filtro di stima basato sull'EKF vi sono la **non globale convergenza**, infatti il filtro lavora su di un modello linearizzato dell'errore, per cui il suo funzionamento è garantito finché l'errore di stima rimane piccolo, e la sua complessità da un punto di vista computazionale. Vengono di seguito descritti diversi blocchi concettuali che costituiscono il filtro. Si è infine testato l'algoritmo in simulazione.

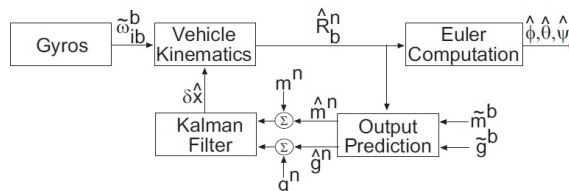


Figura 5.1: Diagramma a blocchi per AHRS basato su EKF

## 5.2 Equazioni di meccanizzazione

Nella fase di meccanizzazione si propaga in avanti lo stato del sistema, in particolare per l'assetto la velocità angolare viene integrata, partendo dall'assetto iniziale calcolato nella fase di inizializzazione, per dare una nuova stima a priori. Nella rappresentazione d'assetto con la matrice dei coseni direttori si ha

$$\dot{\mathbf{R}}_b^n = \mathbf{R}_b^n [\omega_{nb}^b]_{\times} \quad (5.1)$$

mentre nella rappresentazione dell'assetto tramite quaternioni si ha

$$\dot{\mathbf{q}} = 0.5 * \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \omega_w & -\omega_v & \omega_u \\ -\omega_w & 0 & \omega_u & \omega_v \\ \omega_v & -\omega_u & 0 & \omega_w \\ -\omega_u & -\omega_v & -\omega_w & 0 \end{bmatrix}}_{\Omega} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

dove  $\omega_{nb}^b$  rappresenta la velocità angolare stimata rispetto alla terna di navigazione espressa in assi corpo.

## 5.3 Modello dell'errore

Il vettore errore di stato è definito come segue

$$\delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \rho \\ \delta \mathbf{x}_g \\ \delta \mathbf{x}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\epsilon_N, \epsilon_E, \epsilon_D]^T \\ \mathbf{x}_g - \hat{\mathbf{x}}_g \\ \mathbf{x}_a - \hat{\mathbf{x}}_a \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

La trasformazione dalla terna attuale a quella di navigazione stimata può essere effettuata tramite la moltiplicazione con una matrice di rotazione contenente i piccoli angoli dati da  $\rho$ , in particolare definita

$$\mathbf{P} = [\rho]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon_D & \epsilon_E \\ \epsilon_D & 0 & -\epsilon_N \\ -\epsilon_E & \epsilon_N & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

si ha che

$$\hat{\mathbf{R}}_b^n = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{R}_b^n \quad (5.5)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_n^b = \mathbf{R}_n^b(\mathbf{I} + \mathbf{P}) \quad (5.6)$$

$$\mathbf{R}_n^b = \hat{\mathbf{R}}_n^b(\mathbf{I} - \mathbf{P}) \quad (5.7)$$

$$\mathbf{R}_b^n = (\mathbf{I} + \mathbf{P})\hat{\mathbf{R}}_b^n \quad (5.8)$$

### 5.3.1 Modello dell'errore di misura

Sia per i magnetometri che per gli accelerometri viene ottenuta una misura in assi corpo di un vettore noto nella terna di navigazione. Analizziamo l'errore tra la quantità misurata e la quantità teorica. Sia  $\mathbf{r}$  un vettore, ed assuma il valore  $\mathbf{y} = \mathbf{r}^n$  nella terna di navigazione. Una misura della stessa quantità in assi corpo è modellata come

$$\tilde{\mathbf{y}}^b = \mathbf{r}^b + \mathbf{x}_y + \nu_y \quad (5.9)$$

dove  $\mathbf{x}_y$  rappresenta errori del sensore che vengono calibrati, mentre  $\nu_y$  rappresenta errori del sensore che vengono modellati come rumore bianco. Il valore stimato della misura nella terna di navigazione è dato da

$$\hat{\mathbf{y}}^n = \hat{\mathbf{R}}_b^n (\tilde{\mathbf{y}}^b - \hat{\mathbf{x}}_y) \quad (5.10)$$

dove  $\hat{\mathbf{x}}_y$  è una stima di  $\mathbf{x}_y$  se disponibile. Il modello di errore per  $\mathbf{y}^n$  è dato da

$$\delta \mathbf{y}^n = \mathbf{y}^n - \hat{\mathbf{y}}^n \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{y}^n - (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{R}_b^n (\mathbf{r}^b + \mathbf{x}_y + \nu_y - \hat{\mathbf{x}}_y) \\ &= \mathbf{P} \mathbf{r}^n - \mathbf{R}_b^n (\delta \mathbf{x}_y + \nu_y) + \mathbf{P} \mathbf{R}_b^n (\delta \mathbf{x}_y + \nu_y) \\ &= -[\mathbf{r}^n]_{\times} - \mathbf{R}_b^n (\delta \mathbf{x}_y + \nu_y) \end{aligned} \quad (5.12)$$

quindi si avrà, per gli accelerometri

$$\delta \mathbf{g}^n = \mathbf{g}^n - \hat{\mathbf{R}}_b^n \hat{\mathbf{g}}^b \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{g}^n - (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{R}_b^n (\hat{\mathbf{x}}_a - \mathbf{y}_a) \\ &= -[\mathbf{g}^n]_{\times} \rho + \mathbf{R}_b^n (\delta \mathbf{x}_a + \nu_a) \\ &= \mathbf{H}_a \delta \mathbf{x} + \mathbf{R}_b^n \nu_a \end{aligned} \quad (5.14)$$

con

$$\mathbf{H}_a = [ [-\mathbf{g}^n]_{\times} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{R}_b^n ] \quad (5.15)$$

mentre per i magnetometri

$$\delta \mathbf{m}^n = \mathbf{m}^n - \hat{\mathbf{R}}_b^n \mathbf{y}_m \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} &= -[\mathbf{m}^n]_{\times} \rho - \mathbf{R}_b^n \nu_m \\ &= \mathbf{H}_m \delta \mathbf{x} - \mathbf{R}_b^n \nu_m \end{aligned} \quad (5.17)$$

con

$$\mathbf{H}_m = [ [-\mathbf{m}^n]_{\times} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} ] \quad (5.18)$$

Si ricorda che  $\mathbf{H}_a$  ed  $\mathbf{H}_m$  sono le due matrici di osservazione del sistema.

### 5.3.2 Dinamica dell'errore d'assetto

È necessario determinare quale sia il modello matematico che descrive la dinamica dell'errore di assetto  $\rho$ . Uguagliando la derivata dell'eqn (5.8) al membro di destra dell'eqn. (5.1) si ottiene

$$\dot{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{R}}_b^n + (\mathbf{I} + \mathbf{P})\dot{\hat{\mathbf{R}}}_b^n = (\mathbf{I} + \mathbf{P})\hat{\mathbf{R}}_b^n(\Omega_{ib}^b - \Omega_{in}^b) \quad (5.19)$$

dove  $\hat{\Omega}_{ib}^b = [\hat{\omega}_{ib}^b]_{\times}$ , con  $\hat{\omega}_{ib}^b = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{x}}_g$ , mentre  $\hat{\omega}_{in}^n$  deve essere calcolata sfruttando i dati di navigazione. Per i nostri scopi viene trascurata dal momento che si hanno velocità di avanzamento del multirottore al massimo di 2 m/s, di conseguenza avremmo  $\omega_{in}^n \sim 10^{-7}$  m/s. Sfruttando il fatto che

$$\begin{aligned} \delta\Omega_{ib}^b &= \Omega_{ib}^b - \hat{\Omega}_{ib}^b \\ \delta\Omega_{in}^b &= \Omega_{in}^b - \hat{\Omega}_{in}^b \end{aligned}$$

l'eqn. (5.19) si semplifica in

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{R}}_b^n + (\mathbf{I} + \mathbf{P})\dot{\hat{\mathbf{R}}}_b^n &= (\mathbf{I} + \mathbf{P})\hat{\mathbf{R}}_b^n(\hat{\Omega}_{ib}^b - \hat{\Omega}_{in}^b + \delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_{in}^b) \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{P})\dot{\hat{\mathbf{R}}}_b^n + (\mathbf{I} + \mathbf{P})\hat{\mathbf{R}}_b^n(\delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_{in}^b) \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{P}} &= \hat{\mathbf{R}}_b^n(\delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_{in}^b)\hat{\mathbf{R}}_n^b \end{aligned} \quad (5.20)$$

avendo trascurato il termine di secondo ordine  $\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_b^n(\delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_{in}^b)\hat{\mathbf{R}}_n^b$ . È in questo momento che il modello dell'errore viene linearizzato al primo ordine, di conseguenza il filtro presenterà un buon comportamento fin tanto che l'errore di stima rimane piccolo. In forma vettoriale l'eqn. (5.20) risulta essere

$$\dot{\rho} = \hat{\mathbf{R}}_b^n(\delta\omega_{ib}^b - \delta\omega_{in}^b) \quad (5.21)$$

dove  $\delta\omega_{ib}^b = \omega_{ib}^b - \hat{\omega}_{ib}^b$  è l'errore commesso nella stima della velocità angolare. Nel caso di un AHRS, dove come già detto non sono disponibili le informazioni di velocità e posizione, poniamo  $\hat{\omega}_{in}^n = 0$ , di conseguenza l'eqn. (5.21) si semplifica in

$$\dot{\rho} = \hat{\mathbf{R}}_b^n(\delta\omega_{ib}^b - \omega_{in}^b) \sim \hat{\mathbf{R}}_b^n\delta\omega_{ib}^b \quad (5.22)$$

per i nostri scopi. Ricordando che  $\delta\omega_{ib}^b = \omega_{ib}^b - \hat{\omega}_{ib}^b$  e che il modello per matematico adottato per la velocità angolare stimata è dato da  $\hat{\omega}_{ib}^b = \omega_{ib}^b + \delta\mathbf{x}_g + \nu_g$  si ha che

$$\delta\omega_{ib}^b = -\delta\mathbf{x}_g - \nu_g \quad (5.23)$$

con

$$\delta\dot{\mathbf{x}}_g = \mathbf{F}_g\delta\mathbf{x}_g + \omega_g \quad (5.24)$$

di conseguenza l'eqn. (5.22) risulta essere

$$\dot{\rho} = -\hat{\mathbf{R}}_b^n\delta\mathbf{x}_g - \hat{\mathbf{R}}_b^n\nu_g - \hat{\mathbf{R}}_b^n\omega_{in}^n \quad (5.25)$$

## 5.4 Modello dell'errore nello spazio degli stati

Ricapitolando, il modello dell'errore di stato descritto dall'eqn. (5.24) e dalla (5.25) si può scrivere in forma matriciale come

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\hat{R}_b^n & 0 \\ 0 & F_g & 0 \\ 0 & 0 & F_a \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \delta\mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\hat{R}_b^n & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \begin{bmatrix} \omega_g \\ \nu_g \\ \omega_a \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Dalle eqn. (5.14) e (5.17) si ha il modello dell'errore di misura, che risulta

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta\mathbf{g}^n \\ \delta\mathbf{m}^n \end{bmatrix}}_{\delta\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} [-\mathbf{g}^n \times] & \mathbf{0} & \mathbf{R}_b^n \\ [-\mathbf{m}^n \times] & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \delta\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_b^n & 0 \\ 0 & -\mathbf{R}_b^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_a \\ \nu_m \end{bmatrix} \quad (5.27)$$



## 5.5 Correzione dell'assetto basata su Extended Kalman Filter

Dato il modello descritto dalle eqn. (5.26) e (5.27) si utilizza un Extended Kalman Filter per determinare una stima corretta dell'errore di stato  $\delta \mathbf{x}$ , in particolare le equazioni che descrivono il filtro di Kalman sono

$$\hat{\mathbf{x}}_0^- = E \langle \mathbf{x}_0 \rangle \quad (5.28)$$

$$\mathbf{P}_0^- = var(\mathbf{x}_0^-) \quad (5.29)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^\top (\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^\top)^{-1} \quad (5.30)$$

$$\delta \hat{\mathbf{x}}_k^+ = \delta \hat{\mathbf{x}}_k^+ \mathbf{K}_k (\delta \mathbf{y}) \quad (5.31)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_k^- \quad (5.32)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \phi_k \hat{\mathbf{x}}_k^+ \quad (5.33)$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \phi_k \mathbf{P}_k^+ \phi_k^\top + \mathbf{Q} \mathbf{d}_k \quad (5.34)$$

dove, definito il tempo di campionamento  $\mathbf{T}$ , si ha

$$\phi_k = e^{\mathbf{F}T} \quad (5.35)$$

$$\sim \mathbf{I} + \mathbf{F}T$$

$$\mathbf{Q} \mathbf{d}_k \sim \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^\top T \quad (5.36)$$

Si possono sfruttare delle soluzioni analitiche per evitare approssimazioni al primo ordine della  $\phi_k$  e  $\mathbf{Q} \mathbf{d}_k$ . Definiamo la matrice quadrata  $2n \times 2n$

$$\Xi = \begin{bmatrix} -\mathbf{F} & \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^\top \\ 0 & \mathbf{F}^\top \end{bmatrix} T \quad (5.37)$$

Si dimostra che vale la seguente uguaglianza

$$\Upsilon = e^\Xi = \begin{bmatrix} -\mathbf{D} & \phi^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{d} \\ 0 & \phi^\top \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

di conseguenza si ha che

$$\phi = \Upsilon[(n+1) : 2n, (n+1) : 2n]^\top \quad (5.39)$$

$$\mathbf{Q} \mathbf{d} = \phi \Upsilon[(1 : n), (n+1) : 2n] \quad (5.40)$$

A questo punto si corregge l'assetto ed il valore stimato dei bias tramite le equazioni

$$(\hat{\mathbf{R}}(t_k))^+ = (\hat{\mathbf{R}}(t_k))^- (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{P}}) \text{ con } \hat{\mathbf{P}} = [\hat{\rho}^+(t_k) \times] \quad (5.41)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_a(t_k)^+ = \hat{\mathbf{x}}_a(t_k)^- + \delta \hat{\mathbf{x}}_a(t_k)^+ \quad (5.42)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_g(t_k)^+ = \hat{\mathbf{x}}_g(t_k)^- + \delta \hat{\mathbf{x}}_g(t_k)^+ \quad (5.43)$$

## 5.6 Risultati di simulazione e conclusioni

Infine è stato realizzato uno script MatLab che va a calcolare le variabili statistiche, come varianza e valor medio dell'errore di stima dell'assetto, dell'errore di stima della velocità angolare e della stima del bias dei giroscopi. Se ne riportano i risultati

Errore medio nella stima dell assetto [deg]:

phi	theta	psi
-0.073	0.059	-0.176

Errore medio nella stima delle velocità angolari [deg/s]:

p	q	r
-0.314	-0.008	-0.189

Bias giroscopi stimato [deg/s], valori veri [ 11.46 0 0]:

11.268	0.010	0.002
--------	-------	-------

Covarianza del bias giroscopi stimato:

2.252e-005	4.202e-006	2.525e-005
------------	------------	------------

Covarianza dell errore di stima assetto

phi	theta	psi
5.881e-005	5.137e-005	9.393e-002

Covarianza errore di stima Pk

Assetto	Bias gyro
4.743e-005	8.862e-005
2.430e-005	8.177e-005
6.615e-005	1.003e-004

Si nota come la covarianza dell'errore di stima dell'assetto e del bias dei giroscopi ottenuta dalla simulazione sia in linea con i risultati teorici contenuti nella matrice di covarianza dell'errore di stima del filtro di Kalman Pk.



## 6.1 Introduzione

Lo sviluppo di un filtro di stima costruito direttamente sul gruppo speciale ortogonale  $SO(3)$ , ovvero lo spazio delle matrici di rotazione, vuole essere un'alternativa valida al filtro di Kalman, specialmente nella stima dell'assetto di piccoli UAV che utilizzano sensori inerziali di tipo low-cost, caratterizzati da alti livelli di rumore e bias additivi tempo varianti. Nel tempo gli autori hanno sviluppato diverse versioni di questo filtro complementare, denominate *direct complementary filter*, *passive complementary filter*, *explicit complementary filter*, dal più datato al più recente rispettivamente. L'ultima versione, molto recente, usa direttamente le misure dei sensori per avere una stima corretta dell'assetto, senza dover passare per una stima a priori, prevede il disaccoppiamento delle dinamiche di pitch e roll da quella di yaw ed inoltre implementa uno schema anti wind-up per evitare la divergenza della stima del bias sui giroscopi. I principali vantaggi rispetto un sistema basato sull'EKF è di certo la **convergenza globale**, data dalla **non linearità del filtro**, e la sua semplicità computazionale, che lo rende implementabile nei microcontrolli, i quali dispongono di una ridotta quantità di memoria SRAM.

## 6.2 Filtri complementari su $SO(3)$

Consideriamo in un primo momento il caso ideale per cui assumiamo note la matrice d'assetto  $\mathbf{R}(t)$  e le velocità angolari del sistema  $\boldsymbol{\Omega}(t)$ . Lo scopo della stima dell'assetto è quello di fornire la dinamica di  $\hat{\mathbf{R}}(t) \in SO(3)$  in modo che la matrice errore di rotazione  $\tilde{\mathbf{R}}(t) \rightarrow \mathbf{I}_3$ . La cinematica del sistema vero è data da

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}_\times = (\mathbf{R}\boldsymbol{\Omega})_\times \mathbf{R} \quad (6.1)$$

dove  $\boldsymbol{\Omega} \in \{B\}$ , ovvero la velocità angolare è espressa in assi corpo. Le equazioni dell'osservatore in questione sono poste direttamente come cinematica del sistema per l'assetto stimato. La cinematica dell'osservatore include un termine di predizione basato sulle misure angolari  $\boldsymbol{\Omega}$  ed un termine di innovazione o correzione  $\boldsymbol{\omega}$  derivato dall'errore di assetto. La forma generale dell'osservatore proposto è

$$\dot{\hat{\mathbf{R}}} = (\mathbf{R}\boldsymbol{\Omega} + K_P \hat{\mathbf{R}}\boldsymbol{\omega})_\times \hat{\mathbf{R}} \quad \hat{\mathbf{R}}(0) = \hat{\mathbf{R}}_0 \quad (6.2)$$

Si dovranno definire delle forme semplici del termine di correzione che fanno convergere il filtro di stima al valore vero. Notiamo come questo sia un filtro complementare non lineare costruito sul gruppo  $SO(3)$ , notiamo inoltre che per l'implementazione è necessario avere a disposizione l'assetto vero. Dal momento che ciò non è possibile, di seguito verranno illustrate tre formulazioni diverse che sfruttano l'assetto stimato.

## 6.3 Filtro diretto

L'assetto costruito geometricamente da accelerometri e magnetometri in modo deterministico  $\mathbf{R}_y$  è usato per mappare la velocità angolare dalla terna assi corpo alla terna di navigazione, si ha quindi

$$\dot{\mathbf{R}} = (\mathbf{R}_y \boldsymbol{\Omega}_y + K_P \hat{\mathbf{R}}\boldsymbol{\omega})_\times \hat{\mathbf{R}} \quad (6.3)$$

In Fig. 6.1 viene presentato il diagramma a blocchi del filtro diretto. Va detto che una tale formulazione non introduce altri loop di feedback nel filtro, ma permette al rumore ad alta frequenza presente in  $\mathbf{R}_y$  di entrare nel filtro.

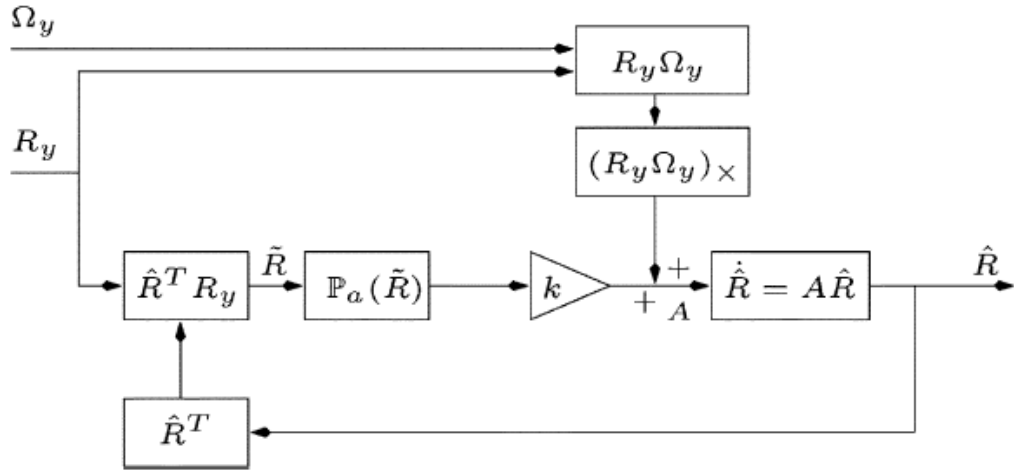


Figura 6.1: Diagramma a blocchi del filtro diretto su  $SO(3)$

## 6.4 Filtro passivo

In questa formulazione l'assetto stimato  $\hat{\mathbf{R}}$  viene usato nel termine predittivo di velocità

$$\dot{\mathbf{R}} = (\hat{\mathbf{R}}\boldsymbol{\Omega}_y + K_P\hat{\mathbf{R}}\boldsymbol{\omega})_{\times}\hat{\mathbf{R}} \quad (6.4)$$

Con questa formulazione viene evitato che il rumore presente nella misura di assetto corrompa la stima finale. D'altra parte questo introduce un loop secondario di feedback, di conseguenza la stabilità deve essere dimostrata. Si nota come questa formulazione, definito  $\boldsymbol{\omega} = \mathbb{P}_a(\tilde{\mathbf{R}})$ , con  $\tilde{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}^T\mathbf{R}$  possa essere riscritta come

$$\dot{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\Omega}_{\times} + K_P\mathbb{P}_a(\tilde{\mathbf{R}})) \quad (6.5)$$

come mostrato in Fig. 6.2.

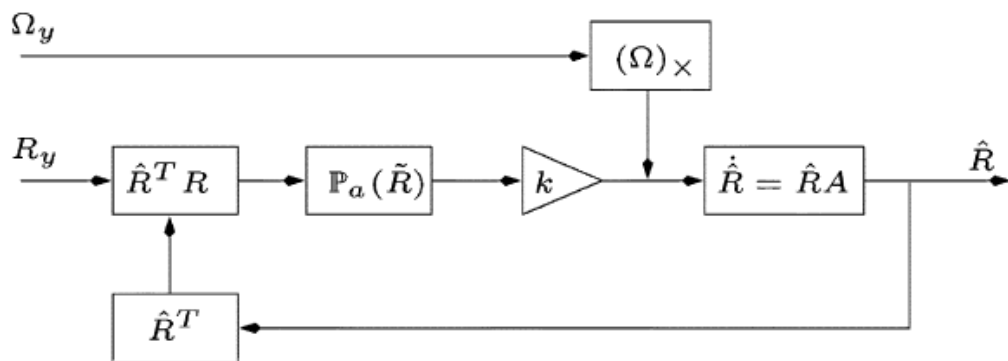


Figura 6.2: Diagramma a blocchi del filtro passivo semplificato

Si cerca ora una formulazione che possa essere implementata in forma di quaternioni e che eviti di passare per il calcolo geometrico deterministico dell'assetto.

## 6.5 Filtro esplicito

Si riformula il filtro complementare passivo in termini dell'errore di misura. Consideriamo misure multiple  $v_i \in \mathbb{R}^3$  associate a diverse direzioni inerziali non allineate di misura  $v_{0i}$ . Sia  $\hat{v}_i$  la migliore stima di  $v_i$

$$\hat{v}_i = \hat{\mathbf{R}}^\top v_{0i} \quad (6.6)$$

Consideriamo il filtro passivo dato dall'eqn. (6.5) nel caso di giroscopi affetti da bias, il filtro si modifica come segue

$$\dot{\hat{\mathbf{R}}} = \hat{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\Omega}^y - \hat{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\omega})_\times \quad (6.7)$$

Definiamo il termine di correzione  $\boldsymbol{\omega}$  ed il valore della stima del bias sui giroscopi come segue

$$\boldsymbol{\omega} = -K_P \left( \sum_{i=1}^n k_i v_i \times \hat{v}_i \right), \quad K_P > 0 \quad (6.8)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{b}}} = -\frac{K_I}{K_P} \boldsymbol{\omega}, \quad K_I > 0 \quad (6.9)$$

Specializzando il filtro nel caso di misure di accelerometri e magnetometri, le equazioni del filtro esplicito risultano essere

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{R}}} &= \hat{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\Omega}_y - \hat{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\sigma}_R)_\times, & \mathbf{R}(0) \in SO(3) \\ \dot{\hat{\mathbf{b}}} &= -k_b \hat{\mathbf{b}} + k_b \text{sat}_\Delta(\hat{\mathbf{b}}) + \boldsymbol{\sigma}_b, & |\hat{\mathbf{b}}(0)| < \Delta \\ \boldsymbol{\sigma}_R &:= k_1 \mathbf{u}_B \times \hat{\mathbf{u}}_B + k_2 \hat{\mathbf{u}}_B \hat{\mathbf{u}}_B^\top (\mathbf{v}_B \times \hat{\mathbf{v}}_B) \\ \boldsymbol{\sigma}_b &:= -k_3 \mathbf{u}_B \times \hat{\mathbf{u}}_B - k_4 \mathbf{v}_B \times \hat{\mathbf{v}}_B \end{cases} \quad (6.10)$$

con  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_b$  e  $\Delta$  numeri positivi,  $\mathbf{R}$  matrice dei coseni direttori,  $\boldsymbol{\Omega}_y$  velocità angolari date dai giroscopi,  $\mathbf{b}$  è il vettore dei bias sui giroscopi, ed infine  $\mathbf{u}_B$  e  $\mathbf{v}_B$  così definiti:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_B &:= -\frac{\mathbf{a}_B}{g}, & \mathbf{v}_B &:= \frac{\pi_{u_B} \mathbf{m}_B}{|\pi_{u_I} \mathbf{m}_I|} \\ \mathbf{u}_I &:= \mathbf{e}_3, & \mathbf{v}_I &:= \frac{\pi_{u_I} \mathbf{m}_I}{|\pi_{u_I} \mathbf{m}_I|} \\ \hat{\mathbf{u}}_B &= \hat{\mathbf{R}}^\top \mathbf{u}_I, & \mathbf{v}_B &= \hat{\mathbf{R}}^\top \mathbf{v}_I \end{cases} \quad (6.11)$$

dove si denota con  $\pi_{\mathbf{x}} := |\mathbf{x}|^2 \mathbf{I}_3 - \mathbf{x}\mathbf{x}^\top$  la proiezione ortogonale su di un piano ortogonale al vettore  $\mathbf{x}$ . Si riportano in figura i vettori in gioco.

Osservazioni sul funzionamento del filtro:

- Si osserva come l'assetto viene corretto andando ad aumentare o diminuire artificialmente la velocità angolare del sistema, infatti  $\boldsymbol{\sigma}_R$  è positivo se la stima è rimasta indietro rispetto alla realtà, mentre è negativo se si sta stimando un valore maggiore di quello reale.



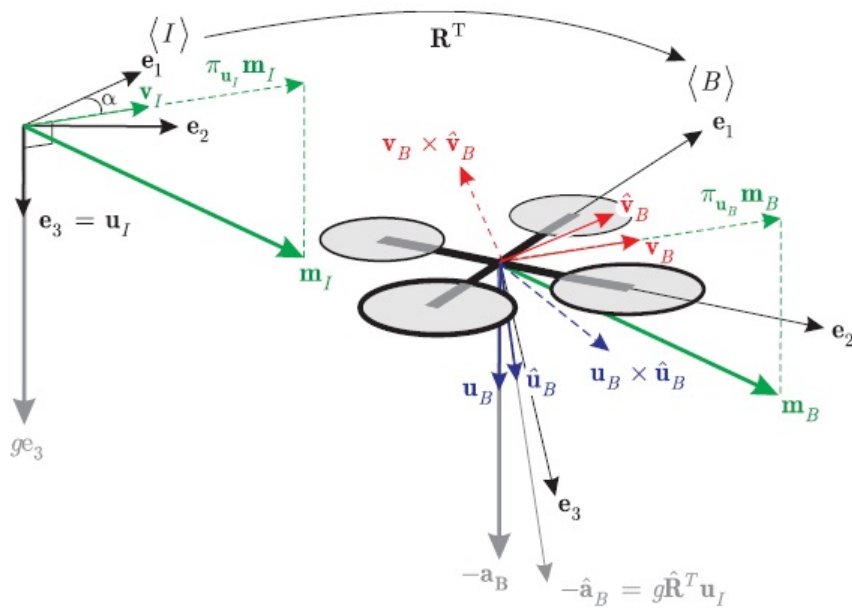


Figura 6.3: Vettori usati nella stima dell'assetto con AHRS SO3

- Funziona al contrario la stima di  $\mathbf{b}$ , infatti  $\sigma_b$  è negativo se si sta stimando un valore dell'assetto in difetto rispetto la realtà; così facendo il bias stimato diminuisce, andando quindi a far aumentare la velocità angolare effettiva nella prima equazione.
- Gli accelerometri misurano una forza specifica  $\mathbf{a}_B \in R^3$  espressa in assi corpo, ovvero  $\mathbf{a}_B = \mathbf{R}^T(\ddot{\mathbf{x}} - g\mathbf{e}_3)$ , dove  $\ddot{\mathbf{x}}$  è l'accelerazione del corpo espressa in assi inerziali. È noto che per un veicolo aereo controllato solamente da thruster, la misura della direzione del vettore gravità terrestre non può essere ottenuta direttamente dalle misure degli accelerometri. In pratica i sistemi robotici aerei sono sottoposti a forze secondarie di resistenza aerodinamica che inseriscono informazioni a bassa frequenza relative alla direzione della gravità nelle misure date dagli accelerometri. Per cui il modello  $\mathbf{a}_B \approx -g\mathbf{R}^T \mathbf{e}_3$  è valido in molte applicazioni pratiche.
- La funzione  $sat_\Delta(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \min(1, \Delta/|\mathbf{x}|)$  rappresenta l'azione anti-windup per garantire la non divergenza della stima del bias dei giroscopi. Il valore di  $\Delta$  rappresenta il limite che può raggiungere il valore del bias, il guadagno kb effettua la desaturazione, quindi più grande sarà tale valore, più sarà veloce l'azione.

## 6.6 Modello per l'implementazione

Da un punto di vista computazionale non è conveniente propagare l'assetto rappresentato in forma di CDM, bensì è preferibile fare ricorso alla rappresentazione con i quaternioni. In questo modo è possibile propagare l'assetto ad un costo computazionale minore, rispettivamente si hanno 16 operazioni per i quaternioni e 27 per la CDM. Rappresentando l'assetto con i quaternioni le equazioni del filtro si modificano in

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{q}}} &= \frac{1}{2}\mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\Omega}})\hat{\mathbf{q}}, & \mathbf{q}(0) \in \mathcal{Q} \\ \dot{\hat{\mathbf{b}}} &= -k_b\hat{\mathbf{b}} + k_b sat_{\Delta}(\hat{\mathbf{b}}) + \sigma_{\mathbf{b}}, & |\hat{\mathbf{b}}(0)| < \Delta \\ \hat{\boldsymbol{\Omega}} &:= \boldsymbol{\Omega}_y - \hat{\mathbf{b}} + \sigma_{\mathbf{R}}, & \mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\Omega}}) = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{\top} \\ \hat{\boldsymbol{\Omega}} & -\hat{\boldsymbol{\Omega}}_x \end{bmatrix} \end{cases} \quad (6.12)$$

Dovendo implementare l'algoritmo, si va a trasformare il modello da continuo a discreto. Assumiamo che il passo di integrazione  $T$  si sufficientemente piccolo così che si possono considerare costanti  $\hat{\boldsymbol{\Omega}}(t)$  e  $\sigma_b$  nell'intervallo  $S_k = [kT, (k+1)T]$ , per cui definiamo  $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_k$  e  $\sigma_{b,k}$  i valori delle variabili nell'intervallo  $S_k$ . Si può a questo punto integrare in maniera esatta la prima equazione di (6.12), ottenendo

$$\hat{\mathbf{q}}_{k+1} = \exp\left(\frac{T}{2}\mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\Omega}}_k)\right) \hat{\mathbf{q}}_k$$

Espandendo in serie di Taylor l'esponenziale di matrice, ricordando che  $\mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\Omega}})^2 = -|\hat{\boldsymbol{\Omega}}|^2\mathbf{I}_4$ , si ottiene

$$\exp\left(\frac{T}{2}\mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\Omega}}_k)\right) = \cos\left(\frac{T|\hat{\boldsymbol{\Omega}}_k|}{2}\right)\mathbf{I}_4 + \frac{T}{2}\text{sinc}\left(\frac{T|\hat{\boldsymbol{\Omega}}_k|}{2}\right)\mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\Omega}})_k \quad \text{con } \text{sinc}(s) := \sin(s)/s$$

per cui il modello discreto del filtro di stima è

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_{k+1} &= \left[ \cos\left(\frac{T|\hat{\boldsymbol{\Omega}}_k|}{2}\right)\mathbf{I}_4 + \frac{T}{2}\text{sinc}\left(\frac{T|\hat{\boldsymbol{\Omega}}_k|}{2}\right)\mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\Omega}})_k \right] \hat{\mathbf{q}}_k \\ \hat{\mathbf{b}}_{k+1} &= T(-k_b\hat{\mathbf{b}} + k_b sat_{\Delta}(\hat{\mathbf{b}}) + \sigma_{\mathbf{b}}) + \hat{\mathbf{b}}_k \end{cases} \quad (6.13)$$



---

## INS/GPS basato Extended Kalman Filter

---

### 7.1 Introduzione

Un sistema INS - Inertial Navigation System - permette la navigazione, sfruttando sensori di tipo inerziale quali giroscopi ed accelerometri, determinando assetto, velocità e posizione di un corpo. Il problema più grande a cui si deve far fronte con sistemi di questo tipo è il drift temporale, ovvero la divergenza della stima effettuata. Nella fase di meccanizzazione del problema infatti le diverse grandezze vengono integrate secondo le equazioni della cinematica, di conseguenza vengono integrati anche gli errori costanti - di seguito bias - presenti sui sensori inerziali, che quindi portano a divergere la stima effettuata.

Il modo comune per risolvere questo problema è quello di correggere la stima con delle misure ausiliarie, dando vita così ad un filtro complementare. Scopo di un filtro di questo tipo è quello di utilizzare sensori con caratteristiche complementari da un punto di vista frequenziale, come appunto giroscopi/accelerometri e GPS, in modo da avere una stima a frequenza elevata in uscita senza il problema del drift temporale.

In letteratura vengono presentati due approcci al problema, il *direct filter*, dove l'intero stato del sistema viene direttamente stimato dall'algoritmo, e l'*indirect filter*, dove un modello linearizzato dell'errore viene utilizzato. Questa seconda configurazione riduce significativamente la frequenza necessaria del feedback, dal momento che l'errore presenta una dinamica piuttosto lenta, al contrario la prima configurazione richiede un feedback ad alta frequenza per seguire la dinamica di tutto lo stato. Si capisce come, in sistemi reali

con ridotta capacità computazionale, sia preferibile il filtro indiretto, a scapito dell'accuratezza dello stesso.

I due principali modi di fondere le informazioni dell'INS con il segnale GPS sono noti in letteratura come *loosely coupled* e *tightly coupled*. Nel primo caso sono le informazioni di velocità e posizione, rese disponibili dal GPS, ad essere utilizzate per correggere la stima, mentre nel secondo è l'informazione di pseudo - range ad essere retroazionata. L'integrazione nella configurazione *tightly coupled* non è una nuova innovazione in se stessa, ma ha trovato impiego raramente e recentemente nella comunità dei sistemi autonomi. Il vantaggio di questo schema è quello di poter aggiornare il filtro anche con meno di quattro osservabili GPS, mentre nella configurazione *loosely coupled* ciò non è possibile, infatti si necessitano di almeno quattro satelliti GPS per determinare la posizione e velocità di un corpo.

## 7.2 Equazioni della cinematica per INS

Sia  $\mathbf{p}$  il vettore dall'origine della terna inerziale I al punto  $\mathbf{P}$ . Sia la terna A un altro sistema di riferimento arbitrario. La velocità angolare relativa della terna A rispetto I è  $\omega_{ia}^a$ , mentre con la notazione  $\Omega_{ia}^a = [\omega_{ia}^a \times]$  si identifica la matrice antisimmetrica costruita con la velocità angolare, tale che  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = [\mathbf{u} \times] \mathbf{v}$ . Si ha che

$$\ddot{\mathbf{p}}^i = \mathbf{R}_a^i \left[ 2\Omega_{ia}^a \mathbf{v}^a + \Omega_{ia}^a \Omega_{ia}^a \mathbf{r}^a + \dot{\Omega}_{ia}^a \mathbf{r}^a + \frac{d^2 \mathbf{r}^a}{dt^2} \right] \quad (7.1)$$

Ricordando che  $\ddot{\mathbf{p}}^i = \mathbf{f}^i + \mathbf{G}^i$ , dove  $\mathbf{f}^i$  rappresenta la forza specifica, mentre  $\mathbf{G}^i$  rappresenta la costante di gravità, che nel caso della terra è pari a 9.81 m/s<sup>2</sup> s.l.m. si può scrivere

$$\frac{d^2 \mathbf{r}^a}{dt^2} = \mathbf{f}^a + \mathbf{G}^a - 2\Omega_{ia}^a \mathbf{v}^a - (\Omega_{ia}^a \Omega_{ia}^a + \dot{\Omega}_{ia}^a) \mathbf{r}^a \quad (7.2)$$

$$= \mathbf{R}_b^a \mathbf{f}^b + \mathbf{G}^a - 2\Omega_{ia}^a \mathbf{v}^a - (\Omega_{ia}^a \Omega_{ia}^a + \dot{\Omega}_{ia}^a) \mathbf{r}^a \quad (7.3)$$

In uno *mechanized INS* gli accelerometri e giroscopi sono solidali ad una piattaforma progettata per mantenere il suo allineamento con la terna A mentre il veicolo si muove. Assumendo che inizialmente la piattaforma sia allineata con la terna A, l'idea quella di applicare un momento alla piattaforma in modo da avere a zero l'uscita dei giroscopi. Questo approccio richiede che i bias dei giroscopi siano accuratamente calibrati. In questa configurazione gli accelerometri misurano la forza specifica nella terna A, di conseguenza date le condizioni iniziali sulla posizione e velocità, l'eqn. (7.2) può essere integrata per avere le rispettive quantità ad ogni istante temporale.

In uno *strapdown INS* gli accelerometri e i giroscopi sono montati su di una piattaforma solidale con il corpo. In questo approccio i giroscopi misurano la velocità angolare del corpo mentre questo si muove, per cui diventa importante il fattore di scala di questi. Gli accelerometri misurano la forza specifica nella terna solidale al corpo - di seguito terna assi corpo - per cui date le condizioni iniziali su posizione e velocità, l'eqn. (7.3) può essere integrata per avere le rispettive quantità ad ogni istante temporale. La matrice d'assetto viene calcolata integrando l'uscita dei giroscopi

$$\dot{\mathbf{R}}_b^a = \mathbf{R}_b^a \Omega_{ab}^b \quad (7.4)$$

Va ricordato che da un punto di vista numerico è preferibile propagare l'assetto rappresentato con i quaternioni. Si considererà in seguito sempre uno strapdown INS.

### 7.2.1 Terna Inerziale ECI

Se la terna A è scelta per essere la terna inerziale ECI - **E**arth **C**entered **I**ntertial - l'eqn. (7.2) si riduce a

$$\frac{d^2\mathbf{r}^a}{dt^2} = \mathbf{f}^i + \mathbf{G}^i \quad (7.5)$$

Di conseguenza date le condizioni iniziali sulla posizione e velocità si può integrare l'eqn. (7.5), tenendo conto che per un sistema di tipo strapdown si ha a disposizione la forza specifica in assi corpo, si dovrà tenere aggiornarlo l'assetto del corpo, quindi si integra

$$\frac{d^2\mathbf{r}^a}{dt^2} = \mathbf{R}_b^i \mathbf{f}^b + \mathbf{G}^i \quad (7.6)$$

Scegliendo la matrice dei coseni direttori come rappresentazione dell'assetto si ha

$$\dot{\mathbf{r}}^i = \mathbf{v}^i \quad (7.7)$$

$$\dot{\mathbf{v}}^i = \mathbf{R}_b^i \mathbf{f}^b + \mathbf{G}^i \quad (7.8)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_b^i = \mathbf{R}_b^i \Omega_{ib}^b \quad (7.9)$$

Gli input sono  $\mathbf{f}^b$  e  $\omega_{ib}^b$ .

### 7.2.2 Terna ECEF

Sia A scelta per rappresentare il sistema di riferimento ECEF - **E**arth **C**entered **E**arth **F**ixed - l'eqn. (7.3) si riduce a

$$\frac{d^2\mathbf{r}^a}{dt^2} = \mathbf{R}_b^e \mathbf{f}^b + \mathbf{G}^e - 2\Omega_{ie}^e \mathbf{v}^e - \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e \mathbf{r}^e \quad (7.10)$$

dove si è considerata circa zero la derivata della velocità di rotazione terrestre per gli scopi di navigazione. Scegliendo la matrice dei coseni direttori come rappresentazione d'assetto si ha

$$\dot{\mathbf{r}}^e = \mathbf{v}^e \quad (7.11)$$

$$\dot{\mathbf{v}}^e = \mathbf{R}_b^e \mathbf{f}^b + \mathbf{g}^e - 2\Omega_{ie}^e \mathbf{v}^e \quad (7.12)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_b^e = \mathbf{R}_b^e (\Omega_{ib}^b - \Omega_{ie}^b) \quad (7.13)$$

dove  $\omega_{ie}^b = \mathbf{R}_e^b \omega_{ie}^e$  ed il vettore gravità locale è  $\mathbf{g}_e = \mathbf{G}^e - \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e \mathbf{r}^e$ . Ancora gli input sono  $\mathbf{f}^b$  e  $\omega_{ib}^b$ . Il vettore  $\mathbf{v}^e$  è il vettore velocità relativa con la terra espresso in terna ECEF. Questo vettore può essere espresso in diversi sistemi di riferimento, in particolare per la terna tangente e quella geografica si ha

$$\mathbf{v}_e^t = \mathbf{R}_e^t \mathbf{v}^e \quad (7.14)$$

$$\mathbf{v}_e^n = \mathbf{R}_e^n \mathbf{v}^e \quad (7.15)$$

### 7.2.3 Terna Tangente

La terna tangente ha la sua origine in una posizione fissata sulla terra. La posizione espressa in questa terna è l'integrale della velocità relativa alla terra espressa in questa terna

$$\dot{\mathbf{p}}^t = \mathbf{v}_e^t \quad (7.16)$$

La derivata di  $\mathbf{v}_e^t$  è calcolata secondo la legge di Coriolis

$$\dot{\mathbf{v}}_e^t = \mathbf{R}_e^t (\Omega_{ie}^e \mathbf{v}^e + \dot{\mathbf{v}}^e) \quad (7.17)$$

Usando l'eqn. (7.12) per eliminare  $\dot{\mathbf{v}}^e$  nell'eqn. (7.17), usando il fatto che  $\omega_{te} = 0$  si ottiene

$$\dot{\mathbf{v}}_e^t = \mathbf{R}_b^t \mathbf{f}^b + \mathbf{g}^t - 2\Omega_{ie}^t \mathbf{v}^t \quad (7.18)$$

Scegliendo la matrice dei coseni direttori come rappresentazione d'assetto si ha

$$\dot{\mathbf{r}}^t = \mathbf{v}_e^t \quad (7.19)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_e^t = \mathbf{R}_b^t \mathbf{f}^b + \mathbf{g}^t - 2\Omega_{ie}^t \mathbf{v}^t \quad (7.20)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_b^t = \mathbf{R}_b^t (\Omega_{ib}^b - \Omega_{ie}^b) \quad (7.21)$$

### 7.2.4 Terna Geografica

La posizione del corpo rispetto la terra è descritta dalla latitudine  $\phi$  e dalla longitudine  $\lambda$  dell'origine della terna geografica e l'altezza  $h$  del corpo rispetto all'ellissoide terrestre. Si ha

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_n}{R_M+h} \\ \frac{v_e}{\cos(\phi)(R_N+h)} \\ -v_d \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

dove  $\mathbf{v}_e^n = [v_n, v_e, v_d]^T$ . La derivata di  $\mathbf{v}_e^n$  è calcolata secondo la legge di Coriolis

$$\dot{\mathbf{v}}_e^n = \mathbf{R}_e^n (\Omega_{ie}^e \mathbf{v}^e + \dot{\mathbf{v}}^e) \quad (7.23)$$

Usando l'eqn. (7.12) per eliminare  $\dot{\mathbf{v}}^e$  nell'eqn. (7.23) si ottiene

$$\dot{\mathbf{v}}_e^n = \mathbf{R}_b^n \mathbf{f}^b + \mathbf{g}^n - (\Omega_{en}^n + 2\Omega_{ie}^n) \mathbf{v}^n \quad (7.24)$$

dove si ha

$$\omega_{en}^n = \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \cos(\phi) \\ -\dot{\phi} \\ -\dot{\lambda} \sin(\phi) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} \omega_{ie} \cos(\phi) \\ 0 \\ -\omega_{ie} \sin(\phi) \end{bmatrix}$$



La derivata della matrice dei coseni direttori è data da

$$\dot{\mathbf{R}}_b^n = \mathbf{R}_b^n (\Omega_{ib}^b - \Omega_{in}^b) \quad (7.25)$$

dove  $\Omega_{in}^b = [\omega_{in}^b \times]$ ,  $\omega_{in}^b = \mathbf{R}_b^n \omega_{in}^n$  e

$$\omega_{in}^n = \begin{bmatrix} (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \cos(\phi) \\ -\dot{\phi} \\ -(\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \sin(\phi) \end{bmatrix}$$

### 7.3 Equazioni di Meccanizzazione INS

In questa sezione si descrivono le equazioni di meccanizzazione per la terna geografica. Si assume peraltro che le misure di accelerometri e giroscopi siano modellate come

$$\tilde{\mathbf{f}}^b = \mathbf{f}^b + \Delta\mathbf{f}^b \quad (7.26)$$

$$\tilde{\omega}_{ib}^b = \omega_{ib}^b + \Delta\omega_{ib}^b \quad (7.27)$$

dove  $\Delta\mathbf{f}^b$  e  $\Delta\omega_{ib}^b$  rappresentano gli errori relativi alle misure di forza specifica e velocità angolare rispetto un sistema inerziale. Date le misure  $\tilde{\mathbf{f}}^b$  e  $\tilde{\omega}_{ib}^b$  ed una stima degli errori  $\Delta\hat{\mathbf{f}}^b$  e  $\Delta\hat{\omega}_{ib}^b$ , la forza specifica e la velocità angolare da usare nelle equazioni di navigazione sono

$$\hat{\mathbf{f}}^b = \tilde{\mathbf{f}}^b - \Delta\hat{\mathbf{f}}^b \quad (7.28)$$

$$\hat{\omega}_{ib}^b = \tilde{\omega}_{ib}^b - \Delta\hat{\omega}_{ib}^b \quad (7.29)$$

La posizione geodetica dell'origine della terna inerziale e l'atezza del corpo rispetto l'ellissoide terrestre, rappresentati in  $\mathbf{p}$ , sono così calcolati

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\phi}} \\ \dot{\hat{\lambda}} \\ \dot{\hat{h}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_M + \hat{h}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos(\hat{\phi})(R_N + \hat{h})} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_n \\ \hat{v}_e \\ \hat{v}_d \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

e la velocità rispetto la terra nella terna geografica così calcolata

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{v}}_n \\ \dot{\hat{v}}_e \\ \dot{\hat{v}}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_n \\ \hat{f}_e \\ \hat{f}_d \end{bmatrix} + \mathbf{g}^n - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_d & \omega_e \\ \omega_d & 0 & -\omega_n \\ -\omega_e & \omega_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_n \\ \hat{v}_e \\ \hat{v}_d \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

dove

$$\begin{bmatrix} \omega_n \\ \omega_e \\ \omega_d \end{bmatrix} = (\omega_{en}^n + 2\omega_{ie}^n) = \begin{bmatrix} (\dot{\hat{\lambda}} + 2\omega_{ie})\cos(\hat{\phi}) \\ -\dot{\hat{\phi}} \\ -(\dot{\hat{\lambda}} + 2\omega_{ie})\sin(\hat{\phi}) \end{bmatrix} \quad (7.32)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_n \\ \hat{f}_e \\ \hat{f}_d \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{f}}^n = \hat{\mathbf{R}}_b^n \hat{\mathbf{f}}^b \quad (7.33)$$

ed  $\hat{\mathbf{f}}^b$  definito nell'eqn.(7.28). La matrice dei coseni direttori è calcolata integrando

$$\hat{\mathbf{R}}_b^n = \hat{\mathbf{R}}_b^n (\hat{\Omega}_{ib}^b - \hat{\Omega}_{in}^b) \quad (7.34)$$

dove  $\hat{\omega}_{ib}^b$  è definito dell'eqn. (7.29),  $\hat{\omega}_{in}^b = \hat{\mathbf{R}}_b^n \hat{\omega}_{in}^n$  e

$$\hat{\omega}_{in}^n = \begin{bmatrix} (\dot{\hat{\lambda}} + \omega_{ie}) \cos(\hat{\phi}) \\ -\dot{\hat{\phi}} \\ -(\dot{\hat{\lambda}} + \omega_{ie}) \sin(\hat{\phi}) \end{bmatrix}$$

## 7.4 Equazioni dinamiche dell'errore di stato per INS

Errori di navigazione nascono a causa di errori sulle condizioni iniziali e l'accumulazione degli errori sui sensori attraverso il processo di integrazione. Il modello dinamico dell'errore avrà la forma

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{p}} \\ \delta \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\boldsymbol{\rho}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{pp} & \mathbf{F}_{pv} & \mathbf{F}_{p\rho} \\ \mathbf{F}_{vp} & \mathbf{F}_{vv} & \mathbf{F}_{v\rho} \\ \mathbf{F}_{\rho p} & \mathbf{F}_{\rho v} & \mathbf{F}_{\rho\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p} \\ \delta \mathbf{v} \\ \delta \boldsymbol{\rho} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}_b^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{R}_b^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{f}^b \\ \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \end{bmatrix} \quad (7.35)$$

Il vettore errore è definito come  $\delta \mathbf{x} = [\delta \mathbf{p}, \delta \mathbf{v}, \delta \boldsymbol{\rho}]^T$  dove

$$\delta \mathbf{p} = [\delta \phi, \delta \lambda, \delta h]^T \quad (7.36)$$

$$\delta \mathbf{v} = [\delta v_n, \delta v_e, \delta v_d]^T \quad (7.37)$$

$$\boldsymbol{\rho} = [\epsilon_N, \epsilon_E, \epsilon_D]^T \quad (7.38)$$

Le componenti di errore sono definite come il valore vero meno quello calcolato, quindi si ha

$$\delta \mathbf{p} = \mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}} \quad (7.39)$$

$$\delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_e^n - \hat{\mathbf{v}}_e^n \quad (7.40)$$

$$\delta \mathbf{f}^b = \Delta \mathbf{f}^b - \Delta \hat{\mathbf{f}}^b \quad (7.41)$$

$$\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \Delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \Delta \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \quad (7.42)$$

Va fatto notare che mentre nella sezione 5.3.2 il termine  $\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b$  assume il significato di  $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b$ , in questo capitolo vi si indica invece  $\Delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \Delta \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b$ , che hanno lo stesso valore ma di segno opposto.

### 7.4.1 Linearizzazione dell'errore di posizione

Le equazioni della dinamica di posizione e di posizione stimata sono descritte nell'eqn. (7.22) e (7.30). Queste equazioni possono essere quindi scritte come

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}_p(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \quad (7.43)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}} = \mathbf{f}_p(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{v}}) \quad (7.44)$$

Se si espande in serie di Taylor l'eqn. (7.43) e la si linearizza intorno la soluzione dell'eqn. (7.44) si ottiene

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}_p(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{v}}) + \mathbf{F}_{pp} \delta \mathbf{p} + \mathbf{F}_{pv} \delta \mathbf{v} + \mathbf{F}_{p\rho} \delta \boldsymbol{\rho} \quad (7.45)$$

$$\Rightarrow \delta \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}_{pp} \delta \mathbf{p} + \mathbf{F}_{pv} \delta \mathbf{v} + \mathbf{F}_{p\rho} \delta \boldsymbol{\rho} \quad (7.46)$$

dove

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{pp} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-\hat{v}_n}{(R_M + \hat{h})^2} \\ \frac{\hat{v}_e \sin(\hat{\phi})}{((R_N + \hat{h}) \cos(\hat{\phi}))^2} & 0 & \frac{-\hat{v}_e \sin(\hat{\phi})}{((R_N + \hat{h})^2 \cos(\hat{\phi}))} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{F}_{pv} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(R_M + \hat{h})} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{((R_N + \hat{h}) \cos(\phi))} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{F}_{pv} &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Nel lavoro di tesi questi algoritmi sono stati implementati per degli UAV ad ala rotante, in particolare dei quadrirotori, per cui, tenendo conto delle basse velocità che riescono a raggiungere queste macchine, si è ritenuto valido trascurare il termine  $\mathbf{F}_{pp}$ .

## 7.4.2 Linearizzazione dell'errore di velocità

Dall'eqn. (7.31) si ha che l'equazione di meccanizzazione per il vettore velocità relativo alla Terra nella terna geografica è data da

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}_e^n = \hat{\mathbf{f}}^n + \hat{\mathbf{g}}^n - (\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{en}^n + 2\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^n)\hat{\mathbf{v}}^n \quad (7.47)$$

L'equazione può essere rimanipolata per ottenere l'equazione della dinamica dell'errore di velocità:

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}_e^n = \hat{\mathbf{R}}_b^n(\tilde{\mathbf{f}}^b - \Delta\hat{\mathbf{f}}^b) + \hat{\mathbf{g}}^n - (\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{en}^n + 2\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^n)\hat{\mathbf{v}}^n \quad (7.48)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}_e^n = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{R}_b^n \mathbf{f}^b + \hat{\mathbf{R}}_b^n(\Delta\mathbf{f}^b - \Delta\hat{\mathbf{f}}^b) + \hat{\mathbf{g}}^n - (\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{en}^n + 2\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^n)\hat{\mathbf{v}}^n \quad (7.49)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}_e^n = \mathbf{f}^n - \mathbf{P}\mathbf{f}^n + \hat{\mathbf{R}}_b^n \delta\mathbf{f}^b + \hat{\mathbf{g}}^n - \delta\hat{\mathbf{g}}^n - (\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{en}^n + 2\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^n)\hat{\mathbf{v}}^n \quad (7.50)$$

valida al primo ordine. Sottraendo l'eqn. (7.50) dalla (7.24) si ottiene l'equazione linearizzata dell'errore di velocità

$$\delta\dot{\mathbf{v}} + (\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{en}^n + 2\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^n)\delta\mathbf{v} + (\delta\boldsymbol{\Omega}_{en}^n + 2\delta\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n)\hat{\mathbf{v}}^n = \mathbf{P}\mathbf{f}^n - \hat{\mathbf{R}}_b^n \delta\mathbf{f}^b + \delta\hat{\mathbf{g}}^n \quad (7.51)$$

che può essere riscritta, dopo aver sviluppato il termine  $(\delta\boldsymbol{\Omega}_{en}^n + 2\delta\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n)$  come

$$\delta\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{vp}\delta\mathbf{p} + \mathbf{F}_{vv}\delta\mathbf{v} + \mathbf{F}_{vp}\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}_b^n \delta\mathbf{f}^b \quad (7.52)$$

dove

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{vp} &= \begin{bmatrix} -2\Omega_N v_e - \frac{\rho_N v_e}{\cos^2(\phi)} & 0 & \rho_E k_D - \rho_N \rho_D \\ 2(\Omega_N v_n + \Omega_D v_d) + \frac{\rho_N v_n}{\cos(\phi)^2} & 0 & -\rho_E \rho_D - k_D \rho_N \\ -2\hat{v}_e \Omega_D & 0 & \rho_N^2 + \rho_E^2 - 2\frac{g}{R_e} \end{bmatrix} \\
\mathbf{F}_{vv} &= \begin{bmatrix} k_D & 2\omega_D & -\rho_E \\ -(\omega_D + \Omega_D) & (k_D - \rho_E \tan(\phi)) & \omega_N + \Omega_N \\ 2\rho_E & -2\omega_N & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{F}_{v\rho} &= \begin{bmatrix} 0 & f_D & -f_E \\ -f_D & 0 & f_N \\ f_E & -f_N & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
\Omega_N &= \omega_{ie} \cos(\phi) \\
\Omega_D &= -\omega_{ie} \sin(\phi) \\
\rho_N &= \frac{v_e}{R_e} \\
\rho_E &= \frac{-v_n}{R_e} \\
\rho_D &= \frac{-v_e \tan(\phi)}{R_e} \\
\omega_N &= \Omega_N + \rho_N \\
\omega_E &= \rho_E \\
\omega_D &= \Omega_D + \rho_D \\
k_D &= \frac{v_d}{R_e}
\end{aligned}$$

Nel lavoro di tesi questi algoritmi sono stati implementati per degli UAV ad ala rotante, in particolare dei quadricotteri, per cui, tenendo conto delle basse velocità che riescono a raggiungere queste macchine, si è ritenuto valido trascurare i termini  $\mathbf{F}_{vp}$  ed  $\mathbf{F}_{vv}$ .

### 7.4.3 Linearizzazione dell'errore d'assetto

La dinamica dell'errore di assetto è

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\mathbf{R}}_b^n (-\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^b) \quad (7.53)$$

descritta dall'eqn. (5.21) nella sezione 5.3.2, avendo considerato che  $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b = -\Delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \Delta\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b$ . Si vuole ora specificare questa relazione per l'errore di stato  $\delta\mathbf{x}$  e per l'errore di misura dei giroscopi  $\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ . Si vuole ottenere un'espressione di  $\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^b$ . La velocità di rotazione della terna geografica rispetto un sistema inerziale rappresentata in assi corpo è data da

$$\boldsymbol{\omega}_{in}^b = \mathbf{R}_n^b \boldsymbol{\omega}_{in}^n \quad (7.54)$$

Si può quindi scrivere che

$$\underbrace{\hat{\omega}_{in}^b + \delta\omega_{in}^b}_{\omega_{in}^b} = \underbrace{\hat{\mathbf{R}}_n^b(\mathbf{I} - \mathbf{P})}_{\mathbf{R}_n^b} \underbrace{(\hat{\omega}_{in}^n + \delta\omega_{in}^n)}_{\omega_{in}^n} \quad (7.55)$$

$$\delta\omega_{in}^b = \hat{\mathbf{R}}_n^b(\delta\omega_{in}^n - \mathbf{P}\hat{\omega}_{in}^n) \quad (7.56)$$

Sostituendo l'eqn. (7.56) nella (7.53) si ottiene

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} + \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^n \boldsymbol{\rho} = \hat{\mathbf{R}}_b^n \delta\omega_{ib}^b - \delta\omega_{in}^n \quad (7.57)$$

Espandendo in serie di Taylor  $\omega_{in}^n$  e ricordando che  $\delta\omega_{in}^n = \omega_{in}^n - \hat{\omega}_{in}^n$  si ha

$$\delta\omega_{in}^n = \left[ \frac{\partial \hat{\omega}_{in}^n}{\partial \hat{\mathbf{p}}}, \frac{\partial \hat{\omega}_{in}^n}{\partial \hat{\mathbf{v}}} \right] \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p} \\ \delta \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (7.58)$$

Per cui sostituendo nell'eqn. (7.53) si ha

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{F}_{\rho p} \delta \mathbf{p} + \mathbf{F}_{\rho v} \delta \mathbf{v} + \mathbf{F}_{\rho \rho} \boldsymbol{\rho} + \hat{\mathbf{R}}_b^n \delta\omega_{ib}^b \quad (7.59)$$

dove

$$\mathbf{F}_{\rho p} = \begin{bmatrix} \omega_{ie} \sin(\hat{\phi}) & 0 & \frac{\hat{v}_e}{(R_N + \hat{h})^2} \\ 0 & 0 & \frac{-\hat{v}_n}{(R_M + \hat{h})^2} \\ \omega_{ie} \cos(\hat{\phi}) + \frac{\hat{v}_e}{(R_N + \hat{h}) \cos(\hat{\phi})^2} & 0 & \frac{-\hat{v}_e \tan(\hat{\phi})}{(R_N + \hat{h})^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{\rho v} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{R_N + \hat{h}} & 0 \\ \frac{1}{R_M + \hat{h}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tan(\hat{\phi})}{R_N + \hat{h}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{\rho \rho} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_D & -\omega_E \\ -\omega_D & 0 & \omega_N \\ \omega_E & -\omega_N & 0 \end{bmatrix}$$

con  $\omega_{in}^n = [\omega_N, \omega_E, \omega_D]$ . Nel lavoro di tesi questi algoritmi sono stati implementati per degli UAV ad ala rotante, in particolare dei quadricotteri, per cui, tenendo conto delle basse velocità che riescono a raggiungere queste macchine e tralasciando gli effetti dovuti alla rotazione terrestre, si è ritenuto valido trascurare tutti e tre i termini  $\mathbf{F}_{\rho p}$ ,  $\mathbf{F}_{\rho v}$  e  $\mathbf{F}_{\rho \rho}$ .

## 7.5 Equazioni dello stato aumentato

Si analizzano ora i termini  $\Delta \mathbf{f}^b$  e  $\Delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b$  introdotti nelle eqn. (7.26) e (7.27). Per definizione, come già è stato chiarito sopra, si ha che

$$\delta \mathbf{f}^b = \Delta \mathbf{f}^b - \Delta \hat{\mathbf{f}}^b \quad (7.60)$$

$$\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \Delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \Delta \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \quad (7.61)$$

Considerando un modello lineare per la parte non calibrata dell'errore dei sensori, si ha

$$\Delta \mathbf{f}^b = \mathbf{F}_{va} \mathbf{x}_a + \boldsymbol{\nu}_a \quad (7.62)$$

$$\Delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \mathbf{F}_{\rho g} \mathbf{x}_g + \boldsymbol{\nu}_g \quad (7.63)$$

dove  $\mathbf{F}_{va}$  e  $\mathbf{F}_{\rho g}$  vengono scelte in modo da considerare le componenti di errore che si vogliono stimare. Le più comuni in genere sono il bias degli accelerometri e dei giroscopi, ma si possono introdurre nel modello anche i fattori di scala, la non ortogonalità degli assi e la non-linearità di accelerometri e giroscopi.

Quando si verifica che un errore non calibrato ha effetti non trascurabili nella determinazione dei parametri utili alla navigazione, e se questo parametro errore può essere stimato dai sensori che si hanno a bordo (proprietà di osservabilità), è possibile aumentare il vettore errore di stato in modo da correggere per le incertezze del sensore.

Dato il modello di errore descritto dall'eqn. (7.62) e (7.63) si ha che

$$\delta \mathbf{f}^b = \mathbf{F}_{va} \delta \mathbf{x}_a + \boldsymbol{\nu}_a \quad (7.64)$$

$$\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \mathbf{F}_{\rho g} \delta \mathbf{x}_g + \boldsymbol{\nu}_g \quad (7.65)$$

I modelli delle derivate di  $\delta \mathbf{x}_a$  e  $\delta \mathbf{x}_g$  sono

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_a = \mathbf{F}_{aa} \delta \mathbf{x}_a + \boldsymbol{\omega}_a \quad (7.66)$$

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_g = \mathbf{F}_{gg} \delta \mathbf{x}_g + \boldsymbol{\omega}_g \quad (7.67)$$

dove le densità spettrali  $\boldsymbol{\omega}_a$  e  $\boldsymbol{\omega}_g$  sono in genere definite nel datasheet del sensore, mentre le matrici  $\mathbf{F}_{aa}$  e  $\mathbf{F}_{gg}$  sono scelte in modo che  $\hat{\mathbf{x}}_a$  e  $\hat{\mathbf{x}}_g$  siano delle costanti random.



Il modello aumentato dell'errore di stato risulta essere quindi

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{p}} \\ \delta \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\boldsymbol{\rho}} \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_a \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_g \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{pp} & \mathbf{F}_{pv} & \mathbf{F}_{p\rho} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{vp} & \mathbf{F}_{vv} & \mathbf{F}_{v\rho} & -\mathbf{R}_b^n \mathbf{F}_{va} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{\rho p} & \mathbf{F}_{\rho v} & \mathbf{F}_{\rho\rho} & \mathbf{0} & -\mathbf{R}_b^n \mathbf{F}_{\rho g} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{aa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p} \\ \delta \mathbf{v} \\ \delta \boldsymbol{\rho} \\ \delta \mathbf{x}_a \\ \delta \mathbf{x}_g \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}_b^n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{R}_b^n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_a \\ \boldsymbol{\nu}_g \\ \boldsymbol{\omega}_a \\ \boldsymbol{\omega}_g \end{bmatrix} \quad (7.68)
 \end{aligned}$$

## 7.6 Misure di correzione ed analisi di osservabilità

### 7.6.1 Sistema stazionario, Bias noti

Consideriamo in un primo momento il modello dinamico dell'errore di stato non aumentato con il modello dei bias in quanto questi vengono ritenuti noti. Possiamo scrivere quindi che

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{p}} \\ \delta \dot{\mathbf{v}} \\ \delta \dot{\rho} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{pp} & \mathbf{F}_{pv} & \mathbf{F}_{p\rho} \\ \mathbf{F}_{vp} & \mathbf{F}_{vv} & \mathbf{F}_{v\rho} \\ \mathbf{F}_{\rho p} & \mathbf{F}_{\rho v} & \mathbf{F}_{\rho\rho} \end{bmatrix}}_F \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p} \\ \delta \mathbf{v} \\ \delta \rho \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}_b^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_b^n \end{bmatrix}}_G \begin{bmatrix} \nu_a \\ \nu_g \end{bmatrix} \quad (7.69)$$

Se prendiamo in riferimento per le uscite misurate del sistema la posizione e velocità si può scrivere

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p} \\ \delta \mathbf{v} \\ \delta \rho \end{bmatrix} \quad (7.70)$$

Costruiamo quindi la matrice di osservabilità del sistema

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{HF} \\ \mathbf{HF}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{HF}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (7.71)$$

dove  $n$  indica il numero di stati del sistema, nel nostro caso nove. È noto che per avere un sistema completamente osservabile deve essere  $\text{rango}(\mathbf{O}) = n$ , ovvero la matrice di osservabilità deve avere rango massimo. Nel caso si considerano la (7.69) e la (7.75) si ottiene che il rango di  $\mathbf{O}$  è pari a 8, di conseguenza esiste il sottospazio di non osservabilità che ha dimensione uno. Il sottospazio di non osservabilità altro non è che lo spazio null (kernel) associato alla matrice  $\mathbf{O}$ , pertanto è possibile trovare una base. In Matlab<sup>©</sup> ciò può essere effettuato mediante il comando *null*, che restituisce una base ortonormale di questo sottospazio. Da questa analisi è emerso la terza componente dell'errore di assetto, ovvero l'errore sull'angolo di yaw, non può essere osservata dalle sole misure di posizione e velocità. Questo risultato non ha carattere generale, ma vale con le ipotesi semplificative adottate, che mettono a zero molti termini che difatto per i nostri scopi sono trascurabili. Un modo per far fronte alla

non osservabilità dello yaw è quello di considerare l'output dei magnetometri. Possiamo quindi riscrivere le equazioni per le uscite misurate, ottenendo

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}} \\ \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{m}^n - \hat{\mathbf{m}}^n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -[\mathbf{m}^n]_{\times} \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p} \\ \delta \mathbf{v} \\ \delta \rho \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(O) = 9 \quad (7.72)$$

Ricostruendo la matrice di osservabilità  $O$  si osserva come questa abbia rango massimo, di conseguenza il sistema è completamente osservabile.

## 7.6.2 Sistema stazionario, Bias incogniti

Nel caso i bias della IMU siano incogniti occorre adottare un modello aumentato per la stima degli stessi. Facendo riferimento a

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{p}} \\ \delta \dot{\mathbf{v}} \\ \delta \dot{\rho} \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_a \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_g \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{pp} & \mathbf{F}_{pv} & \mathbf{F}_{p\rho} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{vp} & \mathbf{F}_{vv} & \mathbf{F}_{v\rho} & -\mathbf{R}_b^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{\rho p} & \mathbf{F}_{\rho v} & \mathbf{F}_{\rho\rho} & \mathbf{0} & -\mathbf{R}_b^n \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{aa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{gg} \end{bmatrix}}_F \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p} \\ \delta \mathbf{v} \\ \delta \rho \\ \delta \mathbf{x}_a \\ \delta \mathbf{x}_g \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}_b^n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_b^n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_G \begin{bmatrix} \nu_a \\ \nu_g \\ \omega_a \\ \omega_g \end{bmatrix} \quad (7.73)$$

Se consideriamo ancora una volta la sola posizione e velocità come uscite misurate, ovvero

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p} \\ \delta \mathbf{v} \\ \delta \rho \\ \delta \mathbf{x}_a \\ \delta \mathbf{x}_g \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(O) = 11 \quad (7.74)$$

si ottiene che il rango della matrice di osservabilità è pari a undici, per cui si ha un sottospazio di non osservabilità di dimensione quattro. Va notato che la matrice F dipende dalla matrice d'assetto, si è notato che a diversi valori di questo non varia la dimensione dello spazio osservabile, ma soltanto i vettori che costituiscono una sua base. Supponendo il corpo sia livellato ed orientato con il suo asse x verso nord, una base del sottospazio non osservabile è data da

$\mathbf{z} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9.8100 & 0 \\ 0 & 9.8100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc}
0 & 1.0000 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1.0000 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1.0000
\end{array}$$

Come si osserva gli stati non osservabili sono l'errore sullo yaw, quindi l'errore sulla terza componente del bias dei giroscopi, e delle combinazioni lineari di angoli, bias accelerometri e bias giroscopi. Ciò sta a significare che non si può osservare lo stato se i valori, ad esempio, dell'errore sul primo angolo, della seconda componente del bias degli accelerometri e la prima dei giroscopi sono in quelle proporzioni.

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -[\mathbf{m}^n]_{\times} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p} \\ \delta \mathbf{v} \\ \delta \rho \\ \delta \mathbf{x}_a \\ \delta \mathbf{x}_g \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(O) = 14 \quad (7.75)$$

Ripetendo l'analisi si ottiene che il rango della matrice di osservabilità del sistema è pari a quattordici, per cui la dimensione del sottospazio non osservabile è pari a uno. Dall'analisi del sottospazio di non osservabilità si evince che una combinazione lineare di diverse variabile risulta non osservabile, quindi di fatto il sistema è osservabile ai fini pratici. Può venir pensato di includere anche le uscite degli accelerometri nelle uscite misurate, come avviene in un normale AHRS basato su Extended Kalman Filter. Ciò che risulta da un'analisi di osservabilità come quelle già proposte è che non vi è nessuna informazione che si va ad aggiungere, quindi il sottospazio non osservabile rimane di dimensione uno. Va precisato a questo punto che l'analisi fin'ora svolta è per un sistema stazionario, ovvero con un determinato assetto. Dal momento che le matrici del sistema dipendono dall'assetto, se si considera il caso in cui la matrice dei coseni direttori è libera di cambiare, si ottengono delle performance migliori del filtro. In particolare si osserva in simulazione che nel caso si includano anche gli output degli accelerometri nelle uscite misurate, ed il sistema è messo in rotazione, tutti gli stati sono osservabili. Infatti se il sistema rimane fermo non si riescono a determinare i bias degli accelerometri, mentre questi vengono catturati dal filtro in circa dieci secondi nel momento in cui il corpo è in rotazione. Si osserva però uno svantaggio nell'adoperare gli output degli accelerometri come uscite misurate, in quanto il bias di questi viene così stimato sfruttando informazioni riguardo l'assetto del corpo, di conseguenza una qualsiasi accelerazione lineare del sistema viene vista come bias.

---

### Filtro complementare sul gruppo $SE(3)$

---

#### 8.1 Introduzione

Un problema fondamentale in controllo automatico del volo di veicoli senza pilota è la stima accurata di posizione ed orientazione, denominate nell'insieme posa, del corpo. Gli algoritmi ad oggi esistenti spesso sono stati sviuppati per lavorare con misure proveniente da sensori di un certo livello, adoperati ad esempio in applicazioni militari o civili ad alto costo. In confronto le IMU e gli altri sensori commerciali di tipo low-cost presentano alti livelli di rumore non-Gaussiano per esempio negli accelerometri e giroscopi, che spesso portano ad instabilizzare gli algoritmi classici basati sul filtro di Kalman e sulla sua versione Extended. Verrà presentata un pò di teoria sulle operazioni di base sul gruppo  $SE(3)$  e si descriveranno le equazioni del filtro. Va ricordato che tale algoritmo di stima è stato da poco concepito e presentato dagli autori negli articoli scientifici, per cui possiamo considerarlo una versione di prova di quello che dovrà essere un filtro completo. Infatti al momento vengono fatte delle ipotesi semplificative, ad esempio vengono trascurati i bias sui diversi sensori e si considerano solo rumori bianchi. Gli stessi autori si sono riservato la stima dei bias per un futuro lavoro.

## 8.2 Teoria di background sul gruppo SE(3)

Si riprendono velocemente le equazioni della cinematica riferite ad una terna tangente

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \quad (8.1)$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\Omega_{\times} \quad (8.2)$$

Indicheremo in lettere minuscole le quantità espresse nella terna tangente, in lettere maiuscole le quantità espresse nella terna solidale al corpo, per cui avremo

$$\mathbf{P} = -\mathbf{R}^{\top} \mathbf{p} \quad (8.3)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}^{\top} \mathbf{v} \quad (8.4)$$

$$\omega_{\times} = (\mathbf{R}^{\top} \Omega)_{\times} \quad (8.5)$$

per cui l'eqn. (8.1) diventa

$$\dot{\mathbf{P}} = \Omega_{\times} \mathbf{P} - \mathbf{V} \quad (8.6)$$

La posa della terna solidale al corpo,  $(\mathbf{R}, \mathbf{p})$ , comprende sia la posizione che l'assetto della terna relativi ad una terna inerziale. La posa può essere interpretata come un elemento del gruppo speciale euclideo SE(3). Un elemento di SE(3) è rappresentato da una matrice

$$T = \begin{pmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad (8.7)$$

L'elemento inverso associato a T è

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} R^{\top} & -R^{\top} p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{\top} & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

La cinematica di  $T \in \text{SE}(3)$  in forma matriciale è data da

$$\dot{T} = T \mathbf{A} \quad (8.9)$$

dove  $\mathbf{A}$  denota la velocità della terna assi corpo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Omega_{\times} & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{se}(3) \quad (8.10)$$

Si pensi ad  $\mathbf{A}$  come un elemento dell'algebra di Lie di SE(3), dove  $\mathfrak{se}(3)$  è identificato con il sottoinsieme delle matrici 4x4 con l'angolo superiore sinistro un blocco anti-simmetrico 3x3 e sotto una riga di zero. La corrispondenza della

velocità - lineare ed angolare- del corpo con un elemento  $\mathbf{A} \in \mathfrak{se}(3)$  è indicata nel seguente modo

$$\mathbf{A} = (\Omega, V)^\wedge \quad (8.11)$$

Da notare come l'operatore associa un elemento di  $\mathfrak{se}(3)$  con una particolare terna di riferimento. Infatti  $\Omega$  e  $V$  sono riferite alla terna assi corpo. Definiamo l'operatore per cambiare terna di riferimento  $Ad_T : \mathfrak{se}(3) \rightarrow \mathfrak{se}(3)$  come

$$Ad_T \mathbf{A} := T \mathbf{A} T^{-1} \quad (8.12)$$

L'operatore cambia sistema di riferimento associato ad un elemento dell'algebra di Lie, così si ha che

$$Ad_T(\Omega, V)^\wedge = (\omega, v)^\wedge \quad (8.13)$$

Definiamo inoltre il prodotto interno e la norma associata sull'insieme delle matrici appartenenti a  $\mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &:= \frac{1}{2} tr(A^\top B) \\ \langle A, A \rangle &:= \frac{1}{2} tr(A^\top A) = \|A\|_F^2 \end{aligned} \quad (8.14)$$

Siano infine  $\mathbb{P}_a$  e  $\mathbb{P}_s$  gli operatori di decomposizione della matrice  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  nella sua parte anti-simmetrica e simmetrica, date da

$$\mathbb{P}_a(M) = \frac{1}{2}(M - M^\top) \quad \mathbb{P}_s(M) = \frac{1}{2}(M + M^\top)$$



### 8.3 Sistema di misura

L'insieme dei sensori considerati consiste di una IMU e un sensore di posizione e velocità, che gli autori prendono come una camera montata a bordo del corpo. Per i nostri scopi è stato considerato un ricevitore GPS. La IMU restituisce le misure di velocità angolare della terna assi corpo. Si assume un semplice modello dei sensori che non include bias e fattori di calibrazione, che in realtà sono sempre presenti in sensori low-costo commerciali. Il modello usato risulta pertanto

$$\begin{aligned}\Omega_y &= \Omega + n_\Omega \\ V_y &= V + n_V \\ R_y &= R_{nR}^\top R \\ P_y &= P + n_p\end{aligned}$$

dove si è indicato con  $n$  un rumore gaussiano centrato. Le misure di assetto e posizione necessitano del tempo per essere elaborate, pertanto sono disponibili a bassa frequenza. I dati della IMU al contrario sono disponibili a più alta frequenza, mentre una stima ad alta frequenza della velocità lineare è necessaria per assicurare le buone proprietà del risultato. L'uso del GPS per la velocità lineare risulta essere pertanto un ostacolo al buon funzionamento del filtro.

### 8.4 Filtro complementare su SE(3)

Le coordinate T della terna assi corpo B rispetto una terna inerziale A possono essere interpretate come una trasformazione di coordinate

$$T : \{B\} \rightarrow \{A\}$$

Allo stesso modo definiamo  $\hat{T} : \{E\} \rightarrow \{A\}$  e la sua inversa  $\hat{T}^{-1} : \{A\} \rightarrow \{E\}$ . Si può così costruire una trasformazione di coordinate errore come

$$\bar{T} = T^{-1}T : \{E\} \rightarrow \{B\}$$

Nell'assetto e nella posizione uno ha

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} \bar{R} & \bar{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{R} = R^\top \hat{R} \quad \bar{p} = R^\top (\hat{p} - p)$$

Se  $\bar{T} \rightarrow I$ , ovvero la matrice identità, allora  $\hat{T} \rightarrow T$ . Dal momento che  $\bar{T}$  può essere visto come le coordinate di E espresse nella terna B, si ha che  $\bar{T}$  è assegnato alla terna di riferimento B, ovvero la terna in movimento e non una terna

inerziale, per cui la geometria non lineare del gruppo di Lie  $SE(3)$  introduce una complessità non presente nei classici filtri lineari. Ciò causa indesiderati accoppiamenti delle dinamiche del sistema nei termini di errore. In particolare, quando il sistema ruota c'è una corrispondente variazione dell'errore di traslazione, dovuto al cambiamento di sistema di riferimento e non ad un errore di traslazione. La soluzione trovata dagli autori è stata pertanto di riferire  $\bar{T}$  ad un sistema inerziale. Definiamo pertanto l'operatore per cambiare sistema di riferimento associato al gruppo di Lie  $SE(3)$

$$\mathcal{I}_T : SE(3) \rightarrow SE(3) \quad \mathcal{I}_T(Q) := TQT^{-1} \quad T \in SE(3)$$

Pertanto se  $\bar{T}$  è associato con la terna B, e  $T \in SE(3)$  rappresenta le coordinate di B rispetto la terna inerziale A, allora  $\mathcal{I}_T(\bar{T})$  è associato alla terna inerziale A. Sia

$$\tilde{T} := \mathcal{I}_T(\bar{T}) = \hat{T}T^{-1} \quad (8.15)$$

l'errore  $\tilde{T}$  nella terna di riferimento inerziale. In coordinate si ha che

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} \tilde{R} & \tilde{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{R} = \hat{R}R^\top \quad \tilde{p} = \hat{p} - \tilde{R}p \quad \tilde{P} = R(\hat{P} - P)$$

Lo scopo del filtro è di far tendere  $\tilde{T} \rightarrow I$ . Consideriamo la funzione di costo

$$\mathcal{L}(\tilde{T}) := \frac{1}{2} \|I - \tilde{T}\|_F^2 \quad (8.16)$$

La cinematica di  $\tilde{T}$  è data da

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{T}} &= \tilde{T} Ad_T(\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A}) \\ &= \tilde{T} \tilde{\mathbf{A}} \end{aligned} \quad (8.17)$$

dove  $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{\Omega}, V)^\wedge \in \mathfrak{se}(3)$  e

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_\times &= Ad_R(\hat{\Omega} - \Omega)_\times \\ \tilde{V} &= R(\hat{V} - V) + \tilde{\Omega}_\times p \end{aligned}$$

Consideriamo ora il sistema di misura descritto sopra, consideriamo  $\tilde{T}$  descritto nell'eqn. (8.15),  $\hat{\Omega}$  e  $\hat{V}$  dati da

$$\hat{\Omega}_\times = \Omega_{y\times} - K_R Ad_{R^\top} \mathbb{P}_a(\tilde{R}_y) \quad (8.18)$$

$$\hat{V} = V_y - (\hat{\Omega} - \Omega_{y\times}) \hat{P} + K_P(\hat{P} - P_y) \quad (8.19)$$

dove  $(R_y, P_y, \Omega_y, V_y)$  sono misure senza rumore del sistema in assi corpo, con  $\tilde{R}_y = \hat{R}R_y^\top$ . Allora per ogni condizione iniziale per cui  $tr(\tilde{R}(0)) \neq -1$  si ha che  $\|I - \tilde{T}\|_F^2$  converge esponenzialmente a zero. per cui  $\hat{R} \rightarrow R$  e  $\hat{p} \rightarrow p$ .

*Dimostrazione:* Data la dinamica di  $\tilde{T}$  dall'eqn. (8.17) e considerata la seguente funzione di Lyapunov

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\|I - \tilde{T}\|_F^2 \\ &= \text{tr}(I - \tilde{R}) + \frac{1}{2}\|\tilde{p}\|_2^2 \\ &= \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_P\end{aligned}\tag{8.20}$$

dove  $\mathcal{L}_R = \text{tr}(I - \tilde{R})$  e  $\mathcal{L}_P = \frac{1}{2}\|\tilde{p}\|_2^2 = \frac{1}{2}\|\tilde{P}\|_2^2$ . Consideriamo la derivata di  $\mathcal{L}_R$ , sostituiamo  $\hat{\Omega}$  dall'eqn. (8.18) e ponendo  $R_y = R$  e  $\Omega_y = \Omega$  si ha  $\dot{\mathcal{L}}_R = -K_R\|\mathbb{P}_a(\tilde{R})\|_F^2$ , per cui  $\mathcal{L}_R$  decresce in modo esponenziale a zero. Consideriamo ora la derivata di  $\mathcal{L}_P$ , ponendo  $V_y = VeP_y = P$  si ha

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{L}}_P &= \tilde{P}^\top \dot{\tilde{P}} \\ &= \tilde{P}^\top (-R\hat{V} + RV - R(\hat{\Omega} - \Omega)_\times \hat{P})\end{aligned}$$

e sostituendo  $\hat{V}$  dall'eqn. (8.19) si ha

$$\dot{\mathcal{L}}_P = -K_P\|\tilde{P}\|_2^2 = -2K_P\mathcal{L}_P$$

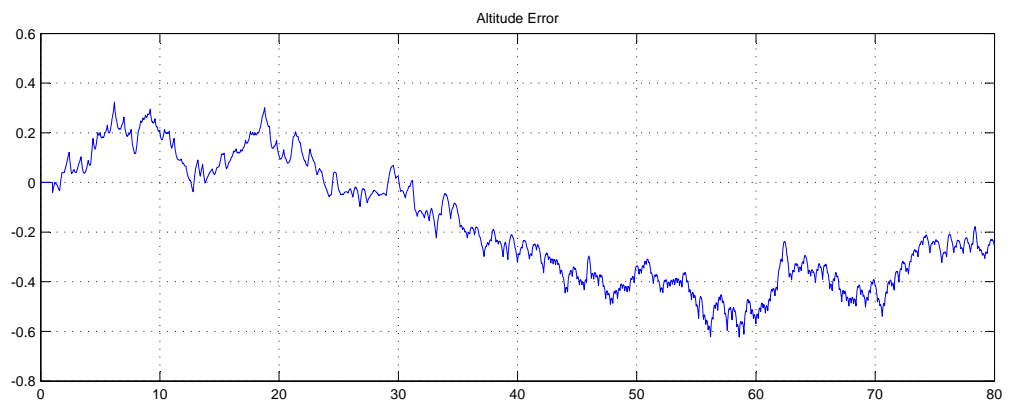
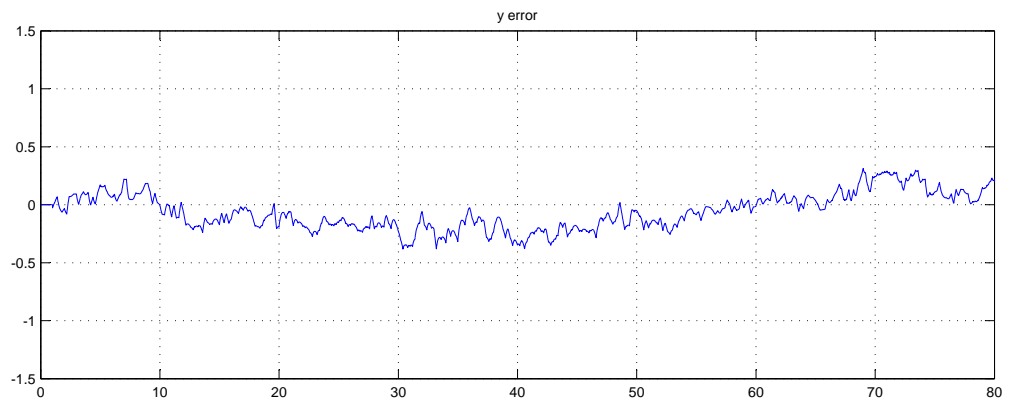
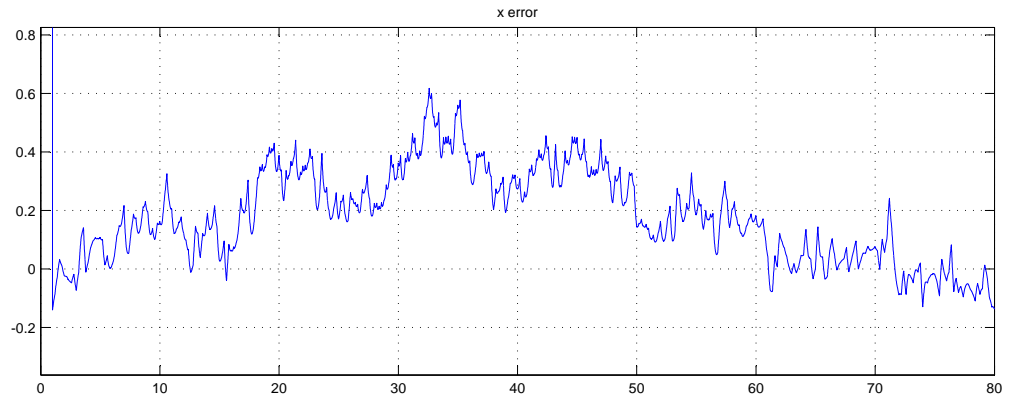
che assicura la convergenza di  $\mathcal{L}_P$  a zero, quindi si ha che  $\hat{T} \rightarrow T$ . ■

Uno svantaggio di questa formulazione è la presenza del prodotto vettoriale presente nell'eqn. (8.19). Questo termine accoppia l'assetto alla velocità lineare.

## 8.5 Termine di accoppiamento

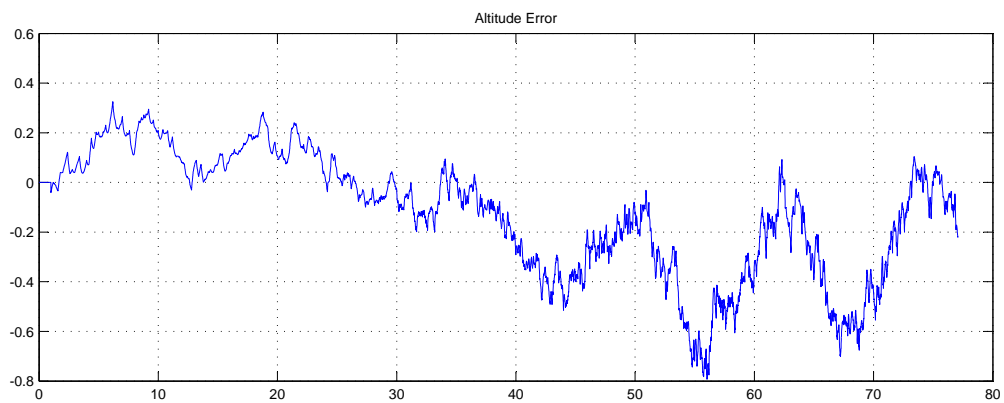
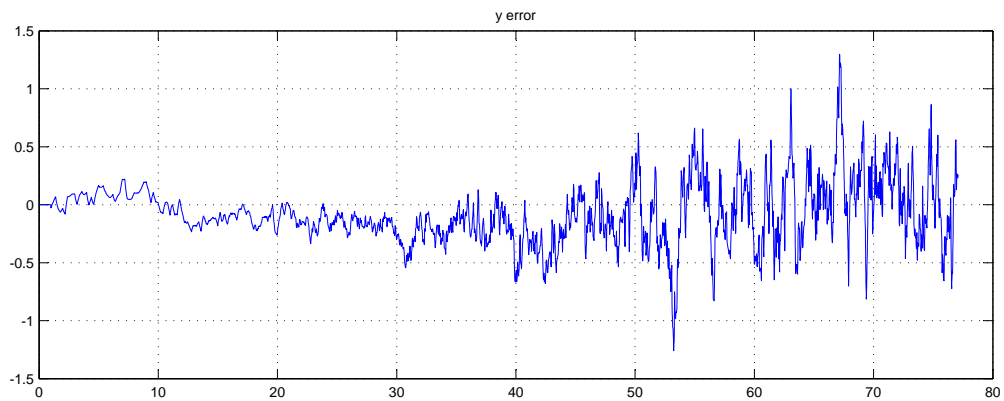
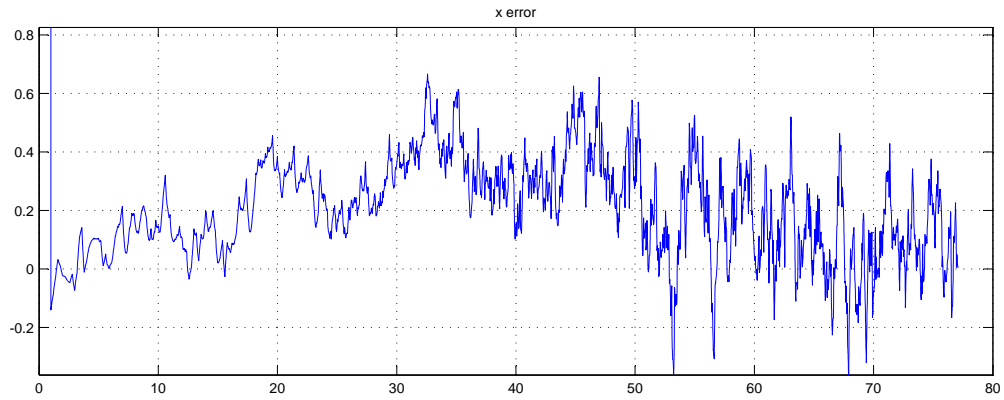
Il termine che accoppia l'assetto alla velocità lineare non si cancella perfettamente con il termine presente nella funzione candidata di Lyapunov a causa del rumore presente su  $\Omega_y$ . Mentre un rumore bianco assicura che il valore restituito dal filtro abbia le proprietà desiderate, il termine incrociato aumenta il rumore ad alta frequenza nella stima della posizione. Possiamo eliminare il problema omettendo il termine  $(\hat{\Omega} - \Omega_y)_\times \hat{P}$  nell'eqn. (8.19). Si dimostra che il filtro converge ancora, si ha come contro che questa formulazione alternativa permette una divergenza temporanea nella posizione mentre il sistema cerca di correggere un grande errore di assetto. Nelle Fig. (8.1) e (8.2) si mostra il comportamento con e senza termine di accoppiamento.

Si osserva chiaramente come, nelle stesse condizioni di sistema forzato, il termine di accoppiamento rende molto rumorosa la stima. Inoltre non è così evidente, nell'uso della formulazione semplificata, la divergenza della stima di posizione, per cui nell'implementazione è stata scelta quest'ultima formulazione.



Time offset: 0

Figura 8.1: Errore di stima della posizione senza il termine di accoppiamento



Time offset: 0

Figura 8.2: Errore di stima della posizione con il termine di accoppiamento

## 8.6 Integrazione discreta su SE(3)

Il metodo di Eulero per l'integrazione temporale è sicuramente la forma numerica più semplice per l'integrazione. Il valore della funzione viene incrementato nel tempo come se la derivata fosse costante tra i due ultimi campionamenti. Consideriamo la cinematica di T descritta dall'eqn. (8.9), una soluzione in forma chiusa, considerato il passo temporale  $\tau$ , è data da

$$T(t + \tau) = \exp(\tau \mathbf{A}(t))T(t)$$

Per il nostro filtro si ha che

$$\hat{\mathbf{A}}(t) = (\hat{\Omega}(t), \hat{V}(t))^\wedge \quad (8.21)$$

$$\hat{T}(t + \tau) = \exp(\tau \hat{T}(t) \hat{\mathbf{A}}(t) \hat{T}(t)^{-1}) \hat{T}(t) \quad (8.22)$$

### 8.6.1 Mappa esponenziale su SE(3)

Va ricordato che ci sono delle forme esplicite per l'esponenziale di matrice su SE(3), basate sulle formule di Rodriguez, che abbattano di molto il costo computazionale dell'algoritmo. Sia

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \omega \end{pmatrix}$$

il vettore delle sei coordinate nell'algebra di Lie  $\mathfrak{se}(3)$ , che comprende due vettori separati di dimensione tre:  $\mathbf{t}$  che determina la traslazione, ed  $\omega$  che determina la rotazione. Definiamo

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} [\omega]_\times & \mathbf{t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora la mappa

$$\exp : \mathfrak{se}(3) \rightarrow \mathbf{SE}(3)$$

è ben definita, suriettiva, ed ha la forma chiusa:

$$e^{\mathbf{v}} \equiv e^{\mathbf{A}(\mathbf{v})} = \begin{pmatrix} e^{[\omega]_\times} & \mathbf{V}\mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}_3 + \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} [\omega]_\times + \frac{\theta - \sin(\theta)}{\theta^3} [\omega]_\times^2$$

con  $\theta = |\omega|$  ed  $e^{[\omega]_\times}$  così definito

$$e^{[\omega]_\times} = \mathbf{I}_3 + \frac{\sin(\theta)}{\theta} [\omega]_\times + \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} [\omega]_\times^2$$



---

### Stima di posizione e velocità - uso del GPS con predittore

---

#### 9.1 Introduzione

Fino ad ora sono stati analizzati due algoritmi di stima di posizione ed assetto tratti uno dalla letteratura e l'altro da un articolo molto recente. Ai fini del progetto sherpa, in questo lavoro di tesi è stato sviluppato un nuovo algoritmo di stima per la posizione e velocità che lavora in modo non accoppiato con la determinazione d'assetto. Le informazioni di velocità e posizione sono già note dal segnale GPS, ma, a causa del tempo richiesto per l'elaborazione delle stesse, esse sono disponibili a frequenze dell'ordine dei 2-5 Hz. Si comprende quindi la necessità di un algoritmo di stima che, sfruttando l'informazione ad alta frequenza derivante dagli accelerometri, rende disponibile l'informazione di velocità e posizione a frequenze dell'ordine dei 100-200Hz. Nonostante la dinamica del multirottore non ponga dei requisiti così stringenti da questo punto di vista, diventa necessario disporre di una stima a quest'ordine di frequenze per rendere il sistema di controllo sufficientemente robusto ai disturbi esterni, quali ad esempio le raffiche di vento. Determinare una stima accurata e ad alta frequenza di velocità e posizione sfruttando il segnale GPS introduce del rumore nel sistema in quanto le due frequenze operative sono molto diverse tra loro. Da qui la necessità di un doppio sistema di stima che sfrutta un predittore per rendere disponibile all'algoritmo di stima l'informazione di posizione alla frequenza operativa dello stesso. Così facendo dai risultatti di simulazione si osserva che la stima finale risulta essere molto più pulita.



## 9.2 Modello continuo con assetto reale

Il filtro lineare proposto si sviluppa sulle seguenti equazioni

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}} = \hat{\mathbf{v}} + K_p(\mathbf{p}_y - \hat{\mathbf{p}}) \quad (9.1)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{R}_b^n(\mathbf{y}_a - \hat{\mathbf{x}}_a) + g_e \mathbf{e}_3 + K_v(\mathbf{v}_y - \hat{\mathbf{v}}) \quad (9.2)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_a = -K_a[\mathbf{R}_n^b(\mathbf{v}_y - \hat{\mathbf{v}})] \quad (9.3)$$

dove  $\mathbf{x}_a$  è la stima del bias degli accelerometri,  $\mathbf{y}_a$  è la misura dell'accelerometro,  $g_e$  è la costante di gravità terrestre pari a  $9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $\mathbf{R}_b^n$  è la matrice dei coseni direttori che rappresenta l'assetto del corpo rigido,  $\mathbf{v}_y$  è la misura di velocità,  $\mathbf{p}_y$  è la misura di posizione e  $K_p$ ,  $K_v$ ,  $K_a$  sono tre guadagni positivi.

### 9.2.1 Analisi di osservabilità

Possiamo riscrivere il sistema osservatore in coordinate errore per avere

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_p \\ \dot{\mathbf{e}}_v \\ \dot{\mathbf{e}}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_p & 1 & 0 \\ 0 & -K_v & -\mathbf{R}_b^n \\ 0 & K_a \mathbf{R}_n^b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p \\ \mathbf{e}_v \\ \mathbf{e}_a \end{bmatrix}$$

da cui si ha il polinomio caratteristico

$$-(\lambda + K_p)[\lambda^2 + K_v \lambda + K_a] \quad (9.4)$$

le cui radici sono

$$\lambda_1 = -K_p \quad (9.5)$$

$$\lambda_{23} = \frac{-K_v \pm \sqrt{K_v^2 - 4K_a}}{2} \quad (9.6)$$

Osserviamo quindi come il sistema sia completamente osservabile e scegliendo dei valori adeguati per i guadagni si può ottenere la dinamica desiderata per il filtro. Va notato che si è fatta l'ipotesi, spesso verificata, di bias degli accelerometri costante nel tempo. Se così non fosse il sistema sarebbe forzato dalla tempovarianza del bias. In Fig. 9.1 osserviamo come il bias degli accelerometri converga al valore esatto in meno di dieci secondi. In Fig.9.2 viene mostrato il comportamento del filtro nel momento in cui si aggiunge del rumore bianco alle uscite degli accelerometri, mentre in Fig. 9.3 si osserva il comportamento del filtro nel momento in cui si vanno ad utilizzare le misure di posizione e velocità del GPS anziché quelle reali.

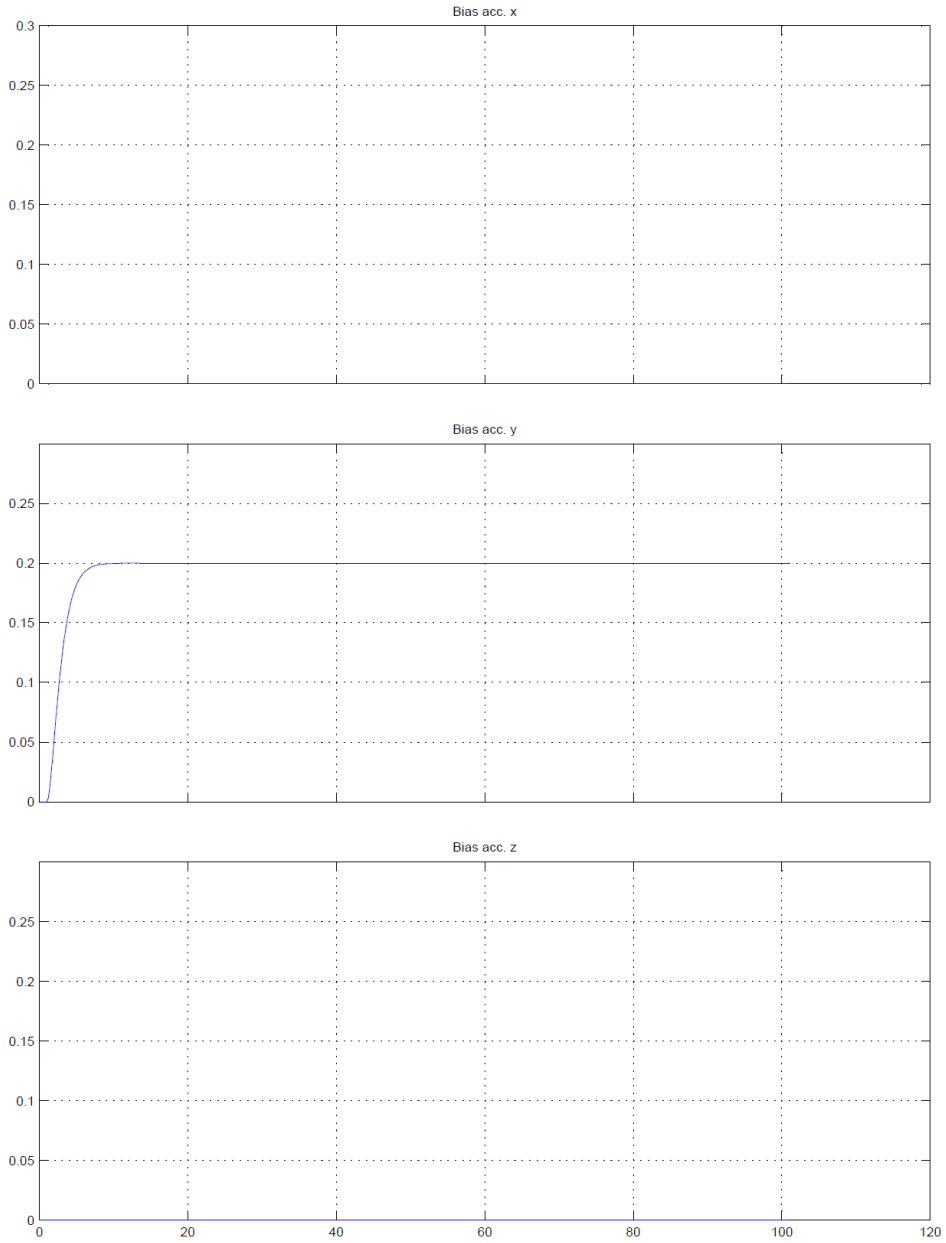


Figura 9.1: Bias accelerometri stimato con assetto reale e le altre misure prive di rumore

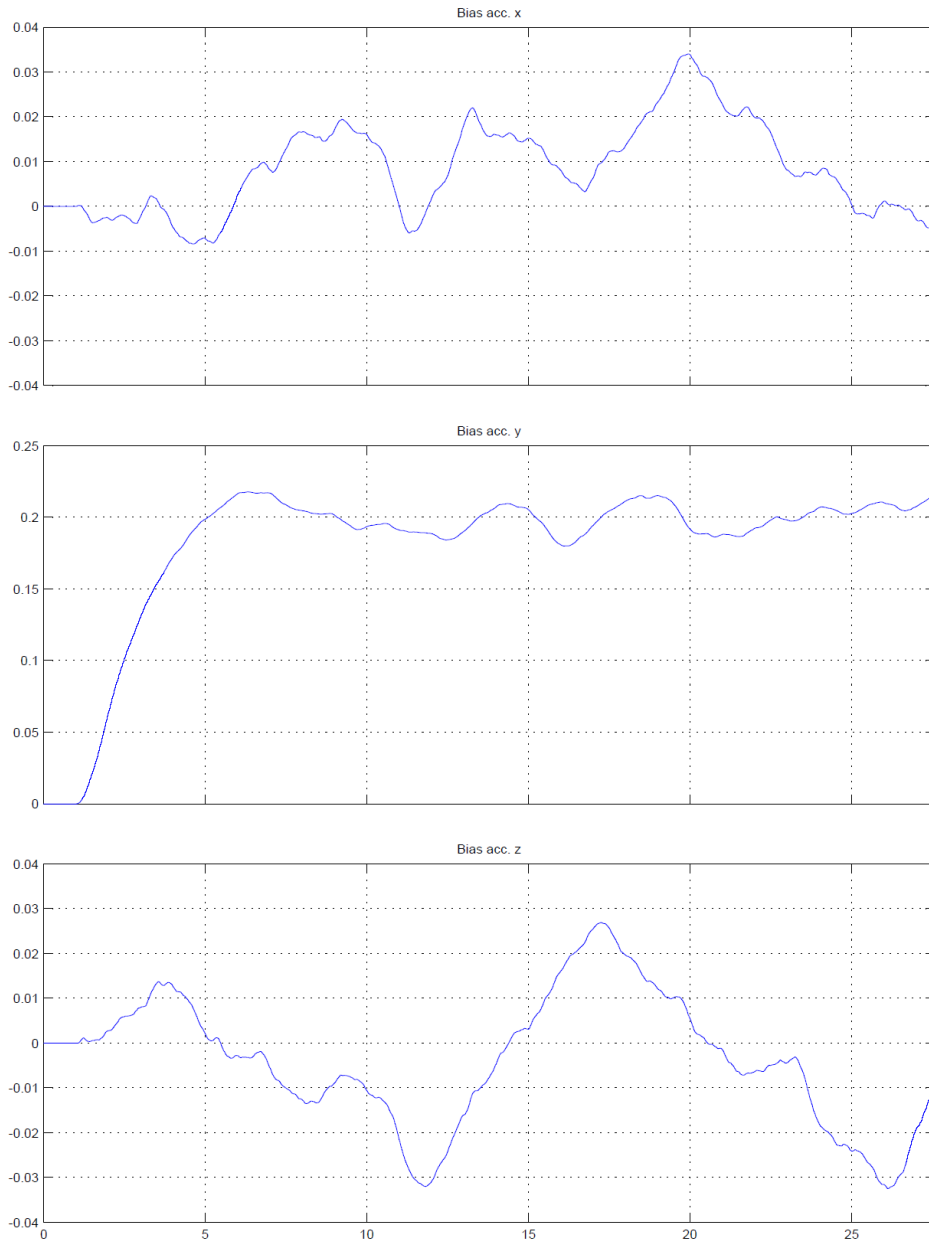


Figura 9.2: Bias accelerometri stimato con assetto reale e rumore sugli accelerometri

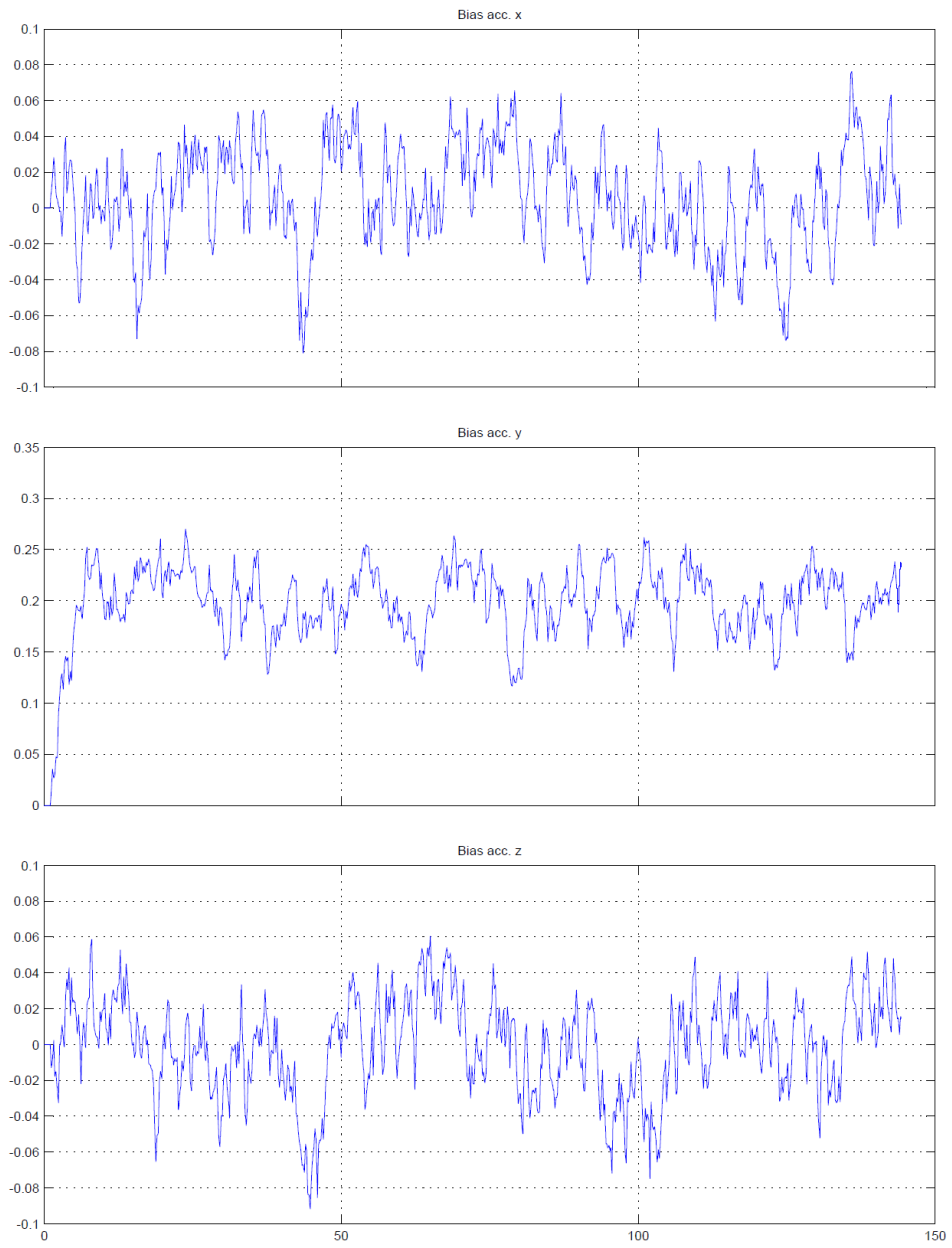


Figura 9.3: Bias accelerometri stimato con assetto reale e rumore sulle altre misure

### 9.3 Modello continuo con assetto stimato

Se fino a questo momento si è fatta l'ipotesi, non soddisfatta, di avere a disposizione l'assetto reale del corpo, ora andiamo a considerare il caso in cui si utilizzi una stima dello stesso, in particolare consideriamo il caso in cui l'assetto sia determinato con il filtro costruito sul gruppo speciale SO3 descritto in precedenza. Le equazioni si modificano in

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}} = \hat{\mathbf{v}} + K_p(\mathbf{p}_y - \hat{\mathbf{p}}) \quad (9.7)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}} = \hat{\mathbf{R}}_b^n(\mathbf{y}_a - \hat{\mathbf{x}}_a) + g_e \mathbf{e}_3 + K_v(\mathbf{v}_y - \hat{\mathbf{v}}) \quad (9.8)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_a = -K_a[\hat{\mathbf{R}}_n^b(\mathbf{v}_y - \hat{\mathbf{v}})] \quad (9.9)$$

che in coordinate errore si presenta come

$$\dot{\mathbf{e}}_p = -K_p \mathbf{e}_p + \mathbf{e}_v \quad (9.10)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_v = -K_v \mathbf{e}_v + (\mathbf{R}_b^n - \hat{\mathbf{R}}_b^n) \mathbf{y}_a + \hat{\mathbf{R}}_b^n \hat{\mathbf{x}}_a - \mathbf{R}_b^n \mathbf{x}_a \quad (9.11)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_a = K_a \hat{\mathbf{R}}_n^b \mathbf{e}_v \quad (9.12)$$

Ricordando che  $\mathbf{R}_e^n = \mathbf{R}_b^n \mathbf{R}_e^b$ , dove  $\mathbf{R}_e^n = \hat{\mathbf{R}}_b^n$  e  $\mathbf{R}_e^b$  rappresenta l'errore nella determinazione dell'assetto, che come sappiamo è influenzata principalmente dal bias degli accelerometri in quanto il filtro complementare su SO3 utilizza le informazioni di questi ultimi per correggere la stima dell'assetto, andiamo a sostituire per ottenere

$$\dot{\mathbf{e}}_p = -K_p \mathbf{e}_p + \mathbf{e}_v \quad (9.13)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_v = -K_v \mathbf{e}_v - \mathbf{R}_b^n \mathbf{e}_a + \mathbf{R}_b^n (\mathbf{I}_3 - \mathbf{R}_e^b) (\mathbf{y}_a - \hat{\mathbf{x}}_a) \quad (9.14)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_a = K_a \mathbf{R}_b^e \mathbf{R}_n^b \mathbf{e}_v \quad (9.15)$$

Si osserva che sono andate perse le proprietà di osservabilità dei bias degli accelerometri. Il sistema originale sfruttava le informazioni di velocità per stimare i bias, ora utilizzando l'assetto stimato, che presenta un errore dovuto proprio agli stessi bias degli accelerometri, non è più possibile ricostruire questo valore come mostrato dai risultati di simulazione in Fig. 9.4. Il meccanismo alla base della stima di una qualche variabile è basato sul confronto delle conseguenze che il valore assunto dalla variabile comporta ed una o più misure delle stesse conseguenze, in particolare per i bias sugli accelerometri si andava a confrontare il valore presunto della velocità, conseguenza dell'integrazione dei bias, ed il valore misurato della stessa. Poiché i bias vengono stimati in assi corpo per sfruttare il loro essere costanti in questa rappresentazione, vi è la necessità di ruotare l'errore di velocità. Effettuando questa operazione l'errore sulla matrice d'assetto entra nell'errore di velocità, e dal momento che l'errore sull'assetto è dovuto proprio agli stessi bias che si vogliono stimare, l'effetto

viene bilanciato e questi ultimi non risultano essere più osservabili. È stato deciso comunque di lasciare il termine di stima dei bias per l'effetto passa basso che presenta.



Figura 9.4: Utilizzando l'assetto stimato i bias degli acc. non sono più osservabili

## 9.4 Uso del Predittore di posizione GPS

In questa sezione viene analizzato il comportamento del filtro nel momento in cui si usa il segnale GPS per la misura di posizione e velocità. Come già detto il principale svantaggio di un ricevitore GPS è quello di rendere disponibili le informazioni a frequenze troppo basse per le applicazioni tipiche del volo. Utilizzare un'informazione che si aggiorna a 5 Hz in un sistema che gira a 100 Hz fa sì che venga introdotto molto rumore nella stima finale. La strategia qui adottata è stata quella di utilizzare un *predittore* che appunto predicesse la misura di posizione fin tanto che il ricevitore GPS non aggiornasse il dato. Dai risultati di simulazione è emerso che si ha una buona stima per velocità, di conseguenza l'integrazione diretta della stessa per periodi di tempo molto brevi, ovvero dell'ordine di 0.2 s nel caso di GPS con frequenza di aggiornamento pari a 5 Hz, rappresenta una misura della posizione migliore rispetto alla posizione GPS mantenuta costante. Se definiamo una variabile interna  $\delta$ , un tempo di aggiornamento del segnale GPS  $f_0$  possiamo scrivere che

$$\dot{\delta} = \hat{\mathbf{v}} \quad (9.16)$$

$$\mathbf{p}_y(t) = \frac{\hat{\mathbf{p}}(kf_0) + \mathbf{p}_{gps}(kf_0)}{2} + \delta(t) - \delta(kf_0) \quad kf_0 < t < (k+1)f_0 \quad (9.17)$$

Così facendo il predittore rende disponibile l'informazione di posizione nel frattempo che questa viene aggiornata dal GPS, a questo punto per avere un primo effetto passa basso sul rumore del segnale GPS, la misura di posizione  $\mathbf{p}_y$  viene riaggiornata tenendo conto non solo dell'informazione proveniente dal ricevitore ma anche del predetto di posizione. In Fig. 9.5 viene mostrato graficamente ciò che è riportato nella eqn. (9.17), mentre in Fig.9.6 si mostra l'andamento del segnale  $\mathbf{p}_y$  predetto - in azzurro - rispetto alla posizione reale - in viola - e al segnale GPS - in rosso.

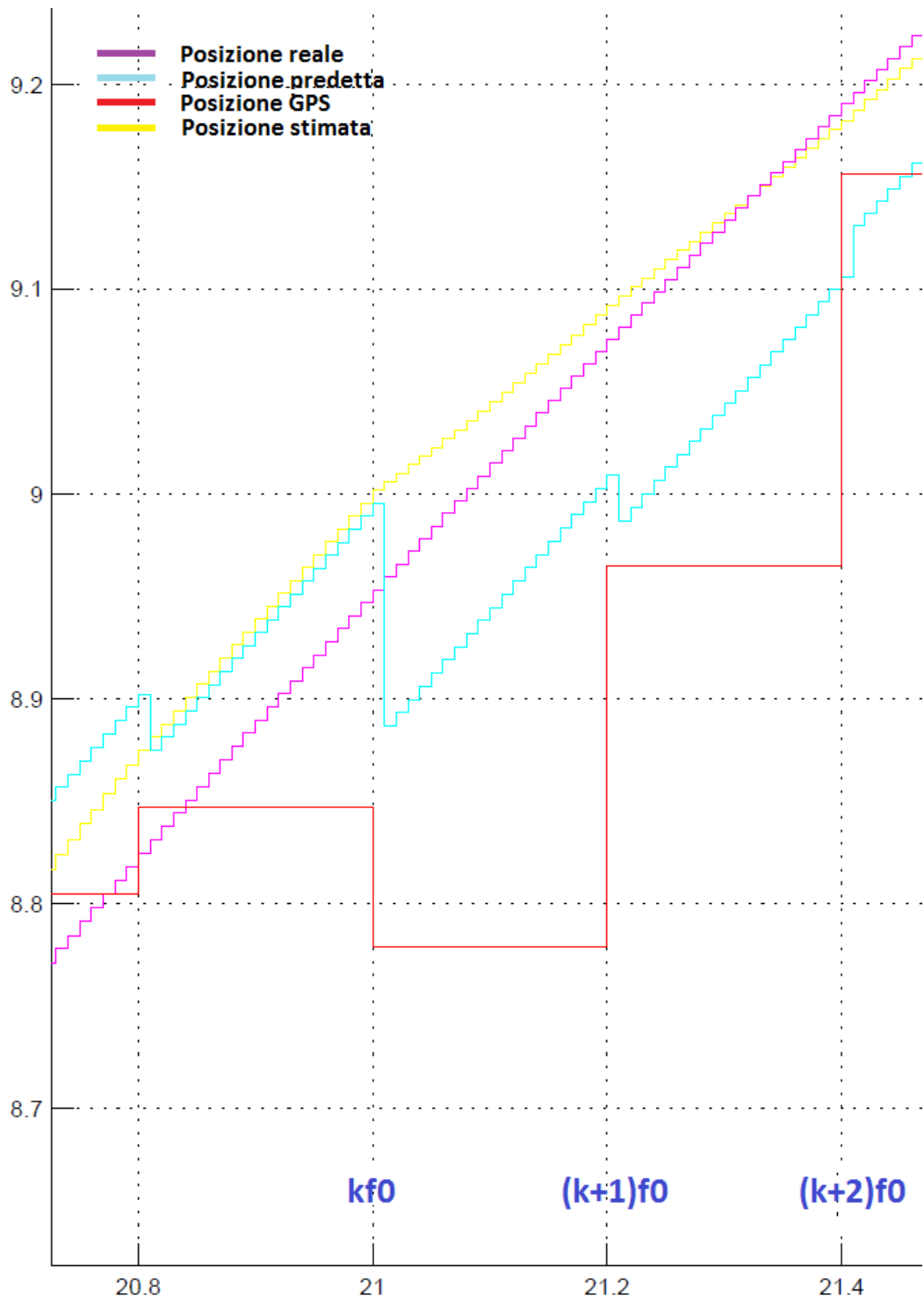
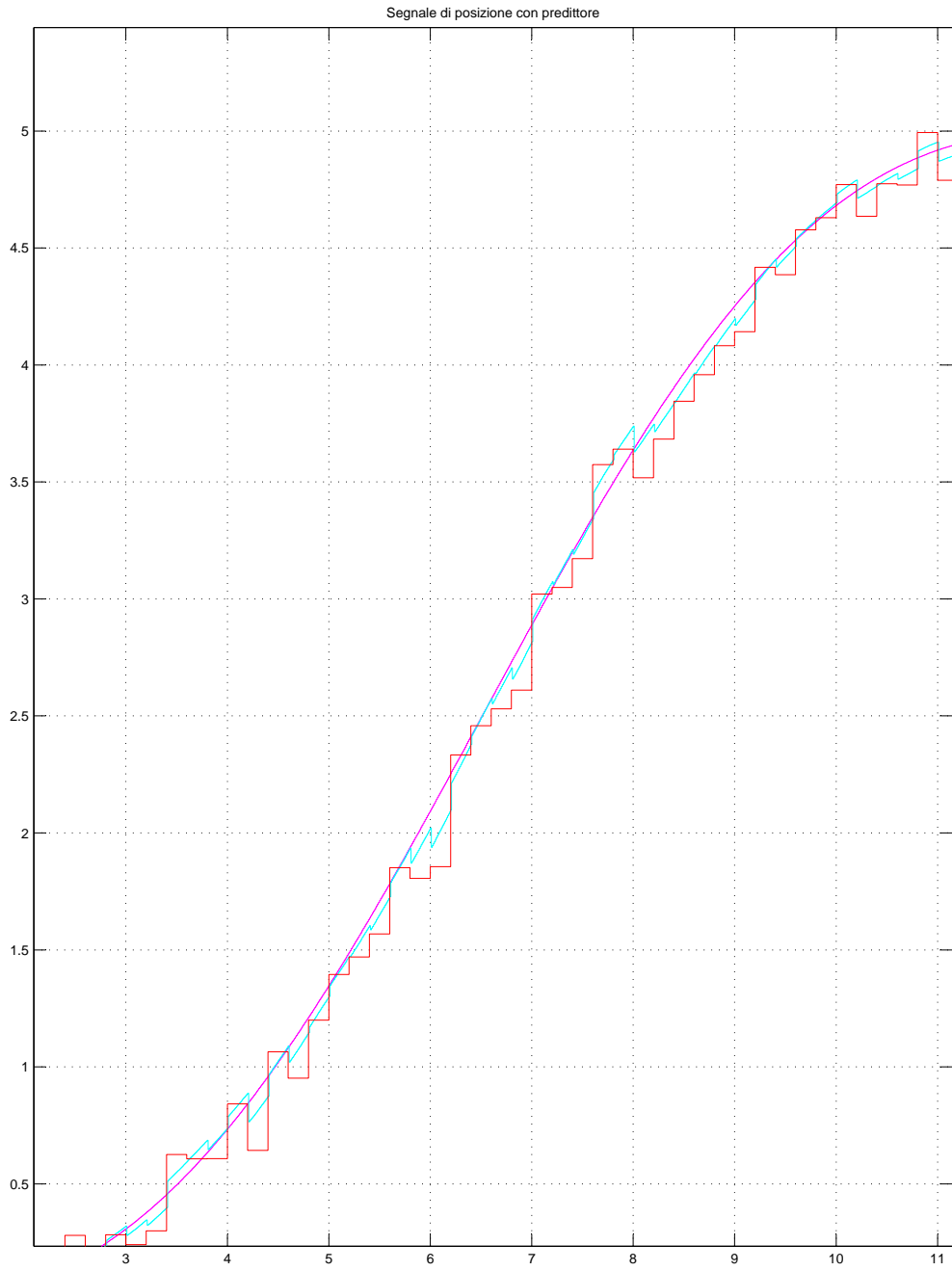


Figura 9.5: Particolare del segnale reale, predetto, GPS e stima finale





Time offset: 0

Figura 9.6: Segnale di posizione predetto vs. segnale GPS

## 9.5 Stima sull'asse $z$ - ausilio del barometro

In questa sezione si mostra come si sono utilizzate le informazioni di pressione, provenienti dal barometro, per avere una stima più accurata di velocità e posizione sull'asse  $z$ . Infatti, da un'analisi del segnale GPS, si osserva che lungo l'asse  $z$  la misura di velocità risulta essere corrotta da rumore colorato in maniera maggiore rispetto gli altri due assi, inoltre l'informazione di posizione lungo la verticale locale  $z$  risulta essere inutilizzabile dal momento che presenta oscillazioni dell'ordine di dieci - venti metri, come mostrato in Fig. (9.8). La causa di ciò è di natura prettamente geometrica, ovvero dovuto alla triangolazione. Di conseguenza risulta necessario avere a disposizione un'ulteriore misura di posizione per l'asse locale  $z$  con cui andare a correggere la stima data dagli accelerometri. In genere i multicotteri dispongono a bordo di un barometro, che misurando la pressione riesce a fornire una misura della quota s.l.m. Infatti dalla nota legge dei gas perfetti si ha:

$$p = \rho R_m T \quad (9.18)$$

Considerando l'equilibrio idrostatico si ha che

$$dp = -\rho g_e dz \quad (9.19)$$

Combinando l'eqn.(9.18) e (9.19) si ottiene

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g_e}{R_m T} dz \quad (9.20)$$

$$= -\frac{dz}{H} \quad (9.21)$$

Considerando la temperatura e le proprietà del gas costanti si può integrare per ottenere

$$p = p_0 e^{-\frac{(z-z_0)}{H}} \quad (9.22)$$

o anche

$$z = z_0 + \ln\left(\frac{p_0}{p}\right) H \quad (9.23)$$

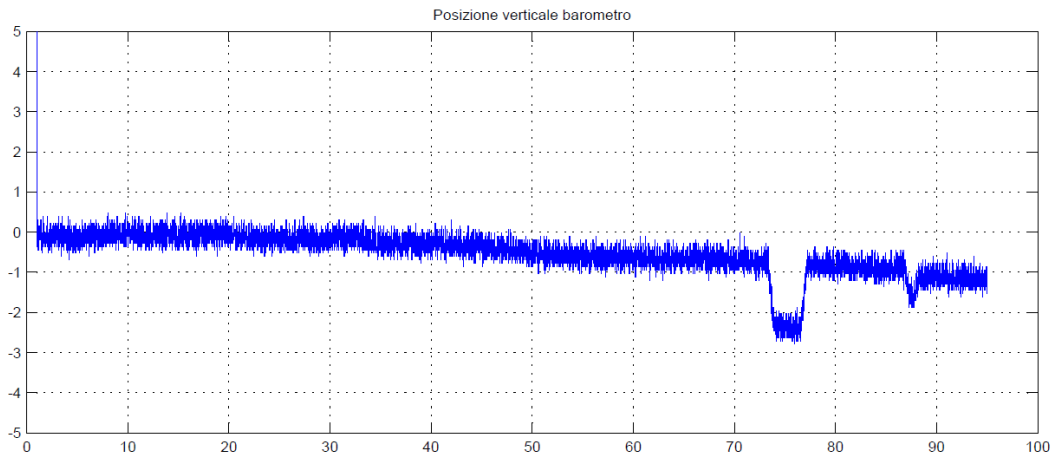
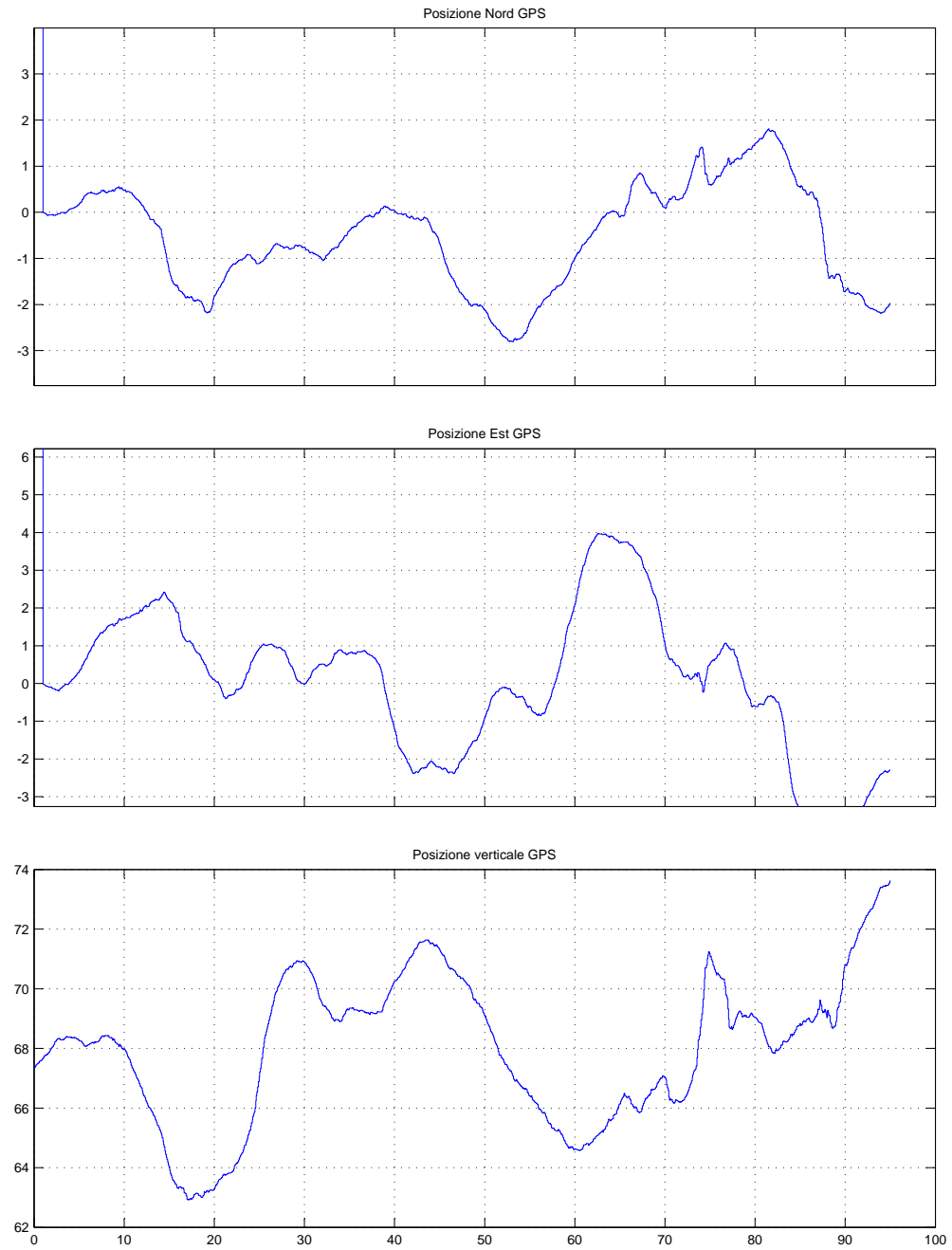


Figura 9.7: Misura di posizione verticale del barometro

Come si osserva in Fig. (9.7) la misura data dal barometro tende lentamente a diminuire, ovvero la quota del corpo ad aumentare. Ciò è dovuto al fatto che la temperatura utilizzata per calcolare il termine  $H$  è quella relativa alla scheda del microcontrollore, che va aumentando dalla sua accensione, di conseguenza anche la quota aumenta con il tempo, ovvero diminuisce in un riferimento di tipo NED.



Time offset: 0

Figura 9.8: Misura di posizione GPS

## 9.6 Filtro complementare per la stima della posizione verticale

Avendo a disposizione l'informazione di posizione molto accurata proveniente dal barometro, è stato implementato un filtro che sfrutta unicamente l'errore di posizione per la correzione di posizione e velocità, ovvero

$$\dot{\hat{p}}_z = \hat{v}_z + 0.5(\mathbf{R}_b^n(\mathbf{y}_a - \hat{\mathbf{x}}_a)_z + g_e)T + K_p(p_{yz} - \hat{p}_z) \quad (9.24)$$

$$\dot{\hat{v}}_z = \mathbf{R}_b^n(\mathbf{y}_a - \hat{\mathbf{x}}_a)_z + g_e + K_v(p_{yz} - \hat{p}_z) \quad (9.25)$$

$$\dot{\hat{x}}_{az} = -K_a[\mathbf{R}_n^b(\mathbf{p}_y - \hat{\mathbf{p}})]_z \quad (9.26)$$

In coordinate errore si ha

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{pz} \\ \dot{e}_{vz} \\ \dot{e}_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_p & 1 & 0.5T\mathbf{R}_b^n \\ -K_v & 0 & -\mathbf{R}_b^n \\ K_a\mathbf{R}_n^b & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{pz} \\ e_{vz} \\ e_{az} \end{bmatrix}$$

Il cui polinomio caratteristico risulta essere

$$\lambda^3 + K_p\lambda^2 + (K_v + 0.5TK_a)\lambda + K_a \quad (9.27)$$

Il sistema risulta essere stabile per valori positivi dei guadagni. Dal momento che la misura di quota data dal barometro tende a oscillare con una dinamica molto lenta nel tempo, la velocità lungo z stimata in questo modo presenta un valore medio diverso da zero. Si è quindi utilizzata anche la velocità del GPS per correggere questo effetto, implementando il seguente sistema:

$$\dot{\hat{p}}_z = \hat{v}_z + 0.5(\mathbf{R}_b^n(\mathbf{y}_a - \hat{\mathbf{x}}_a)_z + g_e)T + K_p(p_{yz} - \hat{p}_z) \quad (9.28)$$

$$\dot{\hat{v}}_z = \mathbf{R}_b^n(\mathbf{y}_a - \hat{\mathbf{x}}_a)_z + g_e + K_v(p_{yz} - \hat{p}_z) \quad (9.29)$$

$$\dot{\hat{x}}_{az} = -K_a[\mathbf{R}_n^b(\mathbf{p}_y - \hat{\mathbf{p}})]_z \quad (9.30)$$

$$\dot{\hat{v}}_{1z} = \mathbf{R}_b^n(\mathbf{y}_a - \hat{\mathbf{x}}_a)_z + g_e + K_v(v_{yz} - \hat{v}_z) \quad (9.31)$$

$$\dot{\hat{x}}_{1az} = -K_a[\mathbf{R}_n^b(\mathbf{v}_y - \hat{\mathbf{v}})]_z \quad (9.32)$$

$$\hat{v}_{zfin} = 0.5\hat{v}_z + 0.5\hat{v}_{1z} \quad (9.33)$$

---

## Prototipazione software e prove sperimentali

---

### 10.1 Architettura pixhawk

A concludere il lavoro di tesi è stata l'implementazione ed i test sperimentali dell'AHRS costruito sul gruppo  $SO(3)$  e del filtro di stima con predittore GPS, rispettivamente per la determinazione di assetto e di posizione-velocità, sulla scheda pixhawk, ovvero su microcontrollore. La piattaforma hardware mostrata in Fig. (10.1), basata sul microcontrollore ARM Cortex M4, include anche la IMU MPU6000, le cui caratteristiche sono riportate in Tab.10.1 e 10.2.

Questo hardware è presente a bordo di diverse macchine, tra cui il modello IRIS della 3D Robotics <sup>©</sup>, da me utilizzato nei diversi test e mostrato in Fig. (10.2). Questo modello include inoltre il magnetometro HMC5883L della Honeywell ed il ricevitore GPS LEA-6H della uBlox, le cui caratteristiche sono riportare in Tab. 10.3 e 10.4 rispettivamente. Il software, open-source, sviluppato dalla pixhawk presenta un sistema operativo real-time con struttura micro-kernel, tipica di tutti i recenti dispositivi basati su microcontrollore.



Figura 10.1: Scheda Pixhawk

A partire dai sensori connessi sino ad arrivare agli algoritmi di stima e controllo, questi vengono trattati come applicazioni gestite dall'utente, che deve provvedere quindi a far avviare all'accensione della scheda. La comunicazione interna tra processi è basata sulla filosofia *publisher-subscriber*, implementata dal *micro Object Request Broker* (uORB), l'applicazione che consente di condividere strutture dati tra processi. Lo scambio dati avviene per mezzo di bus nominativi, denominati *topic*, su ognuno dei quali viaggia una sola informazione.



Figura 10.2: IRIS della 3D Robotics ©

Ad esempio nel topic `vehicle.attitude` viene trasportata la struttura dati che contiene l'informazione di assetto. Questa architettura, molto modulare e flessibile, consente ad ogni thread di sottoscrivere ad un dato topic per ricevere una data informazione, ad esempio le misure provenienti dai sensori, ed allo stesso tempo di pubblicare su un altro topic altre informazioni, come ad esempio la posizione, per renderla disponibile ad altri thread.

PARAMETRO	MIN	TIPICO	MAX	UNITÀ
Full-Scale Range		± 250		°/s
		± 500		°/s
		± 1000		°/s
		± 2000		°/s
Risoluzione ADC		16		bits
Fattore di sensibilità in funzione del Full-Scale Range		131		LSB/(°/s)
		65.5		LSB/(°/s)
		32.8		LSB/(°/s)
		16.4		LSB/(°/s)
Sensibilità alle variazioni di temperatura		±2		%
Sensibilità alle accelerazioni lineari		0.1		(°/s)/g
Rumore totale RMS		0.05		°/s - rms
Output Data Rate	4		8000	Hz

Tabella 10.1: Specifiche del giroscopio - MPU 6000 InvenSense

PARAMETRO	MIN	TIPICO	MAX	UNITÀ
Full-Scale Range		± 2		g
		± 4		g
		± 8		g
		± 16		g
Risoluzione ADC		16		bits
Fattore di sensibilità in funzione del Full-Scale Range		16384		LSB/g
		8192		LSB/g
		4096		LSB/g
		2048		LSB/g
Sensibilità alle variazioni di temperatura		±0.02		%/° C
Power Spectral Density		400		$\mu\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}$
Output Data Rate	4		1000	Hz

Tabella 10.2: Specifiche dell'accelerometro - MPU 6000 InvenSense



PARAMETRO	MIN	TIPICO	MAX	UNITÀ
Full-Scale Range		$\pm 8$		gauss
Range magnetico dinamico	$\pm 1$		$\pm 8$	gauss
Sensitività	230		1370	LSB/gauss
Risoluzione ADC		12		bits
Risoluzione digitale	0.73		4.35	milli-gauss
Sensitività alle variazioni di temperatura		-0.3		%/° C
Rumore		2		milli-gauss
Output Data Rate			160	Hz

Tabella 10.3: Specifiche del magnetometro - HMC5883L Honeywell

PARAMETRO	SPECIFICA	VALORE	UNITÀ
Tipo di Ricevitore	50 canali GPS L1 ,C/A code GALILEO Open Service GLONASS FDMA		
Tempo di primo Fix	Cold start	26	s
	Warm start	26	s
	Hot start	1	s
Update Rate		5	Hz
Accuratezza sulla posizione orizzontale CEP		2.5	m
Accuratezza di velocità		0.1	m/s
Limiti operativi	Dinamico	<4	g
	Altitudine	50000	m
	Velocità	500	m/s

Tabella 10.4: Specifiche del ricevitore GPS - LEA-6H

## 10.2 Prototipazione software

Per potersi inserire in un contesto software come quello della pixhawk è sufficiente creare una nuova applicazione che implementi l'algoritmo desiderato e si interfacci con il sistema operativo e gli altri thread presenti. La prototipazione software si sviluppa sui seguenti passi:

- **Modello Simulink** che implementi l'algoritmo desiderato
- **Traduzione automatica** del modello Simulink in codice C
- **Wrapper** che interfacci il codice generato con il sistema operativo e tutto il resto

### Modello Simulink

Per prima cosa l'algoritmo matematico, nel mio caso per la stima di posizione, velocità ed assetto, deve essere implementato in Simulink e testato, dapprima con ingressi simulati ed in seguito con quelli reali sfruttando Real-Time di Matlab o fornendo al modello dati reali già in memoria. Verificato il suo funzionamento, ovvero l'assenza di errori di programmazione nell'implementazione dell'algoritmo matematico, si passa alla generazione del codice C.

### Codice C

Per poter generare il codice in modo automatico sfruttando Simulink Coder è necessario avere il modello nella forma riportata in Fig. (10.3), con i tipi di dato in ingresso ed i uscita definiti in termini di tipo di dato (intero, reale,...) e dimensione (numero di bit). Va precisato che anche i diversi parametri e coefficienti utilizzati dal modello vanno passati come input. Si va quindi a specificare nella pagina di setup di Simulink le diverse opzioni disponibili per la conversione, dal livello di ottimizzazione al tipo di linguaggio desiderato, per poi procedere alla conversione. Il vantaggio di questo modo di operare è legato al fatto di poter disporre di un codice da compilare per il microcontrollo esente da errori di programmazione, quindi che rappresenti l'algoritmo già testato. Lo svantaggio più grande è dato dalla non ottimizzazione del codice generato, per cui vengono create molte variabili locali che quindi vengono allocate nello stack. In questi dispositivi dove la quantità di SRAM, quindi di stack, è limitata, ciò causa un overflow.

## Wrapper

Infine è necessario scrivere, in linguaggio C, un wrapper che

- generi il thread assegnando la quantità di memoria stack
- si sottoscriva ai topic necessari per avere disponibili le informazioni di cui ha bisogno
- passi alla funzione generata automaticamente gli ingressi e la faccia eseguire
- pubblichi sul topic i risultati prodotti per renderli disponibili ad altri processi

Il wrapper scritto per gli algoritmi di stima di posizione e di assetto sono riportati in Appendice.

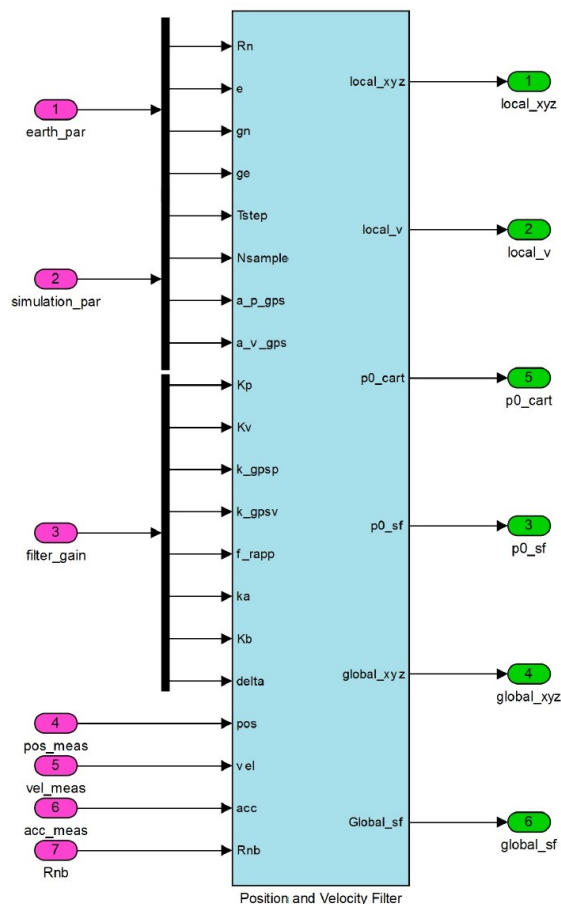


Figura 10.3: Standard Simulink per la conversione

### 10.3 Prove e risultati della stima di assetto

Il test sperimentale sull' algoritmo di stima dell'assetto è stato effettuato presso il laboratorio del CASY (Complex Autonomus System) di Bologna. Si è fatto uso del sistema di tracciamento ottico *Optitrack* che, utilizzando diverse telecamere e dei marker montati sul quadrirotore, riesce a determinare posizione, velocità ed assetto del corpo. Si è quindi utilizzata questa informazione come termine di confronto per il tuning dell' algoritmo .

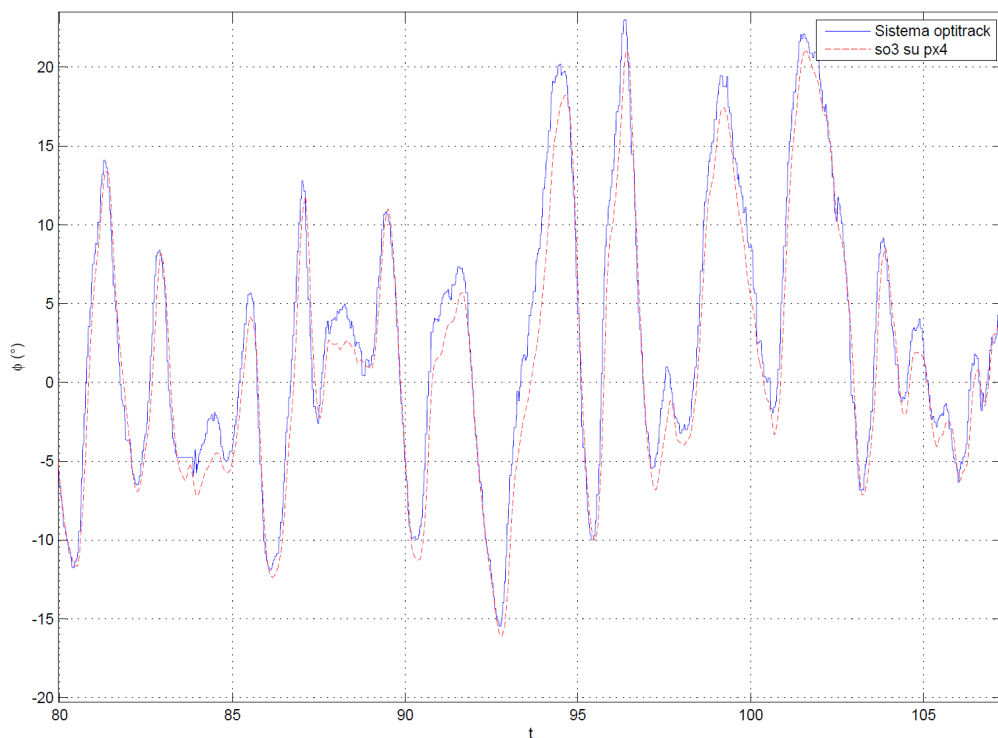


Figura 10.4: Test angolo di rollio  $\phi$

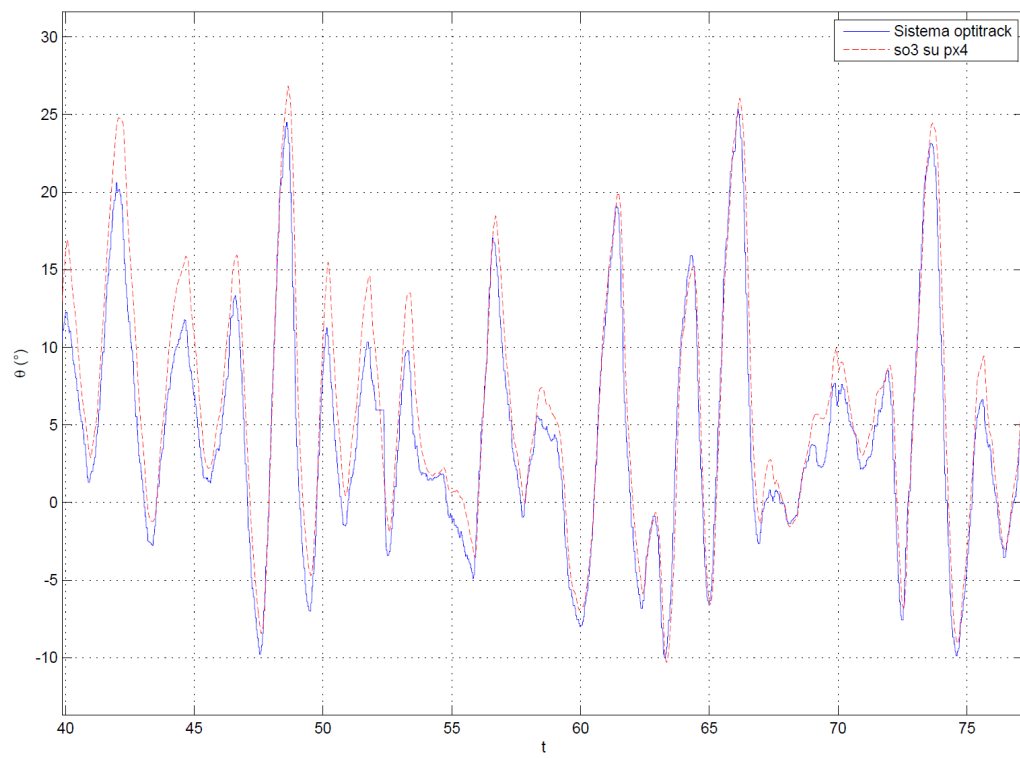


Figura 10.5: Test angolo di pitch  $\theta$

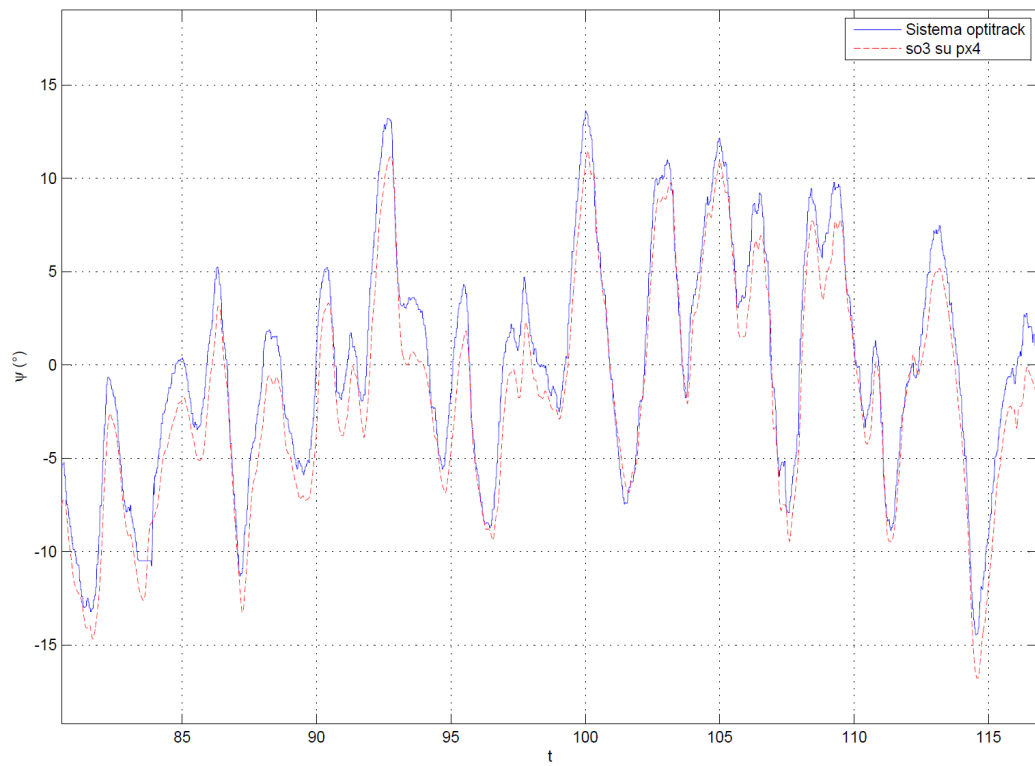


Figura 10.6: Test angolo di imbardata  $\psi$

## 10.4 Prove e risultati della stima di posizione e velocità

Il test sperimentale sull'algoritmo di stima di posizione e velocità è stato effettuato presso il CASY (Complex Autonomus System) di Bologna. Non avendo a disposizione il segnale GPS all'interno del laboratorio, si è dovuto svolgere il test all'aperto, con tutte le complicazioni di natura tecnica che ne sono nate. Non avendo a disposizione riferimenti con cui confrontarsi e non essendo stato possibile costruire un test ad hoc date le tempistiche, si è svolto un test statico con quadricotore fermo.

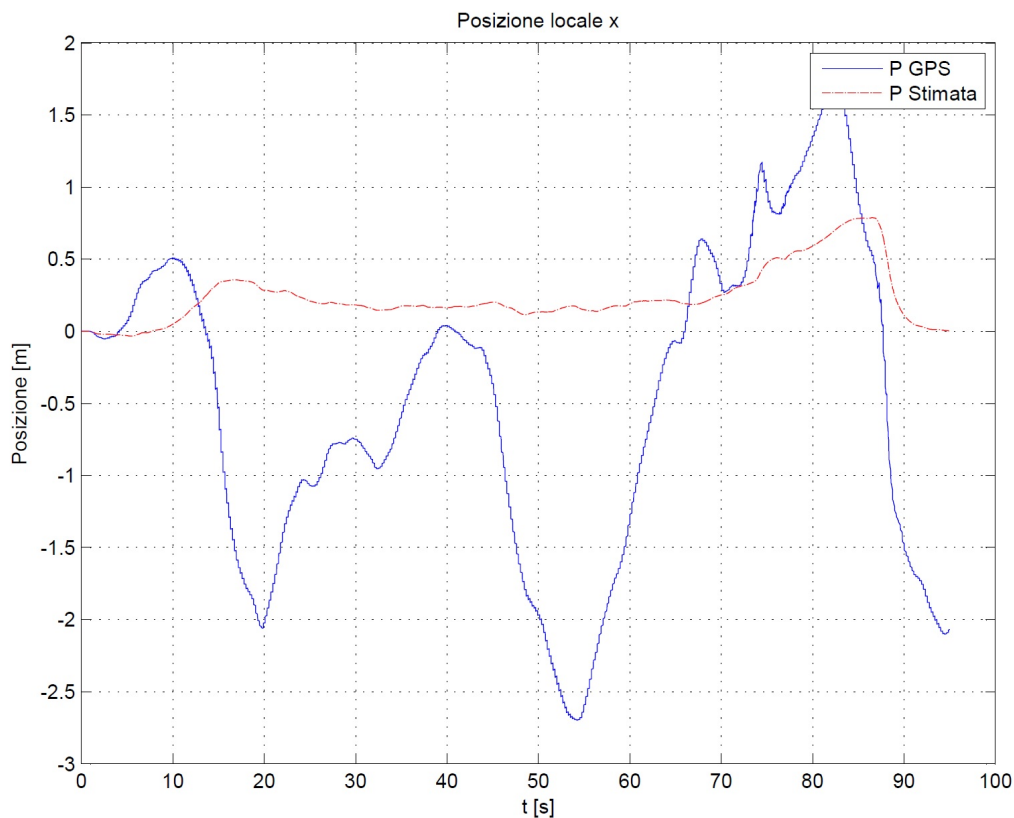


Figura 10.7: Stima posizione x locale

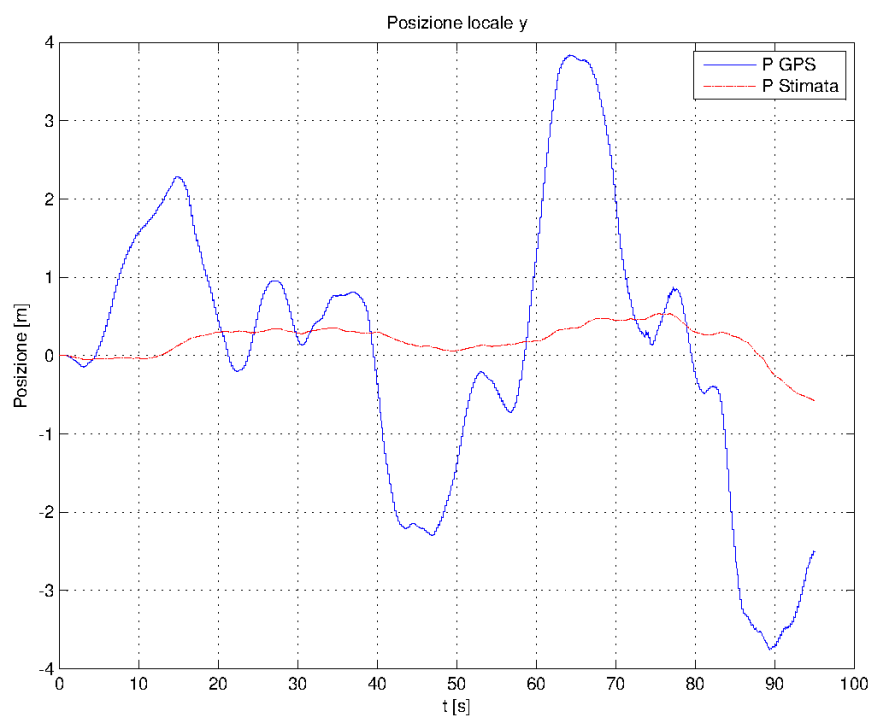


Figura 10.8: Stima posizione y locale



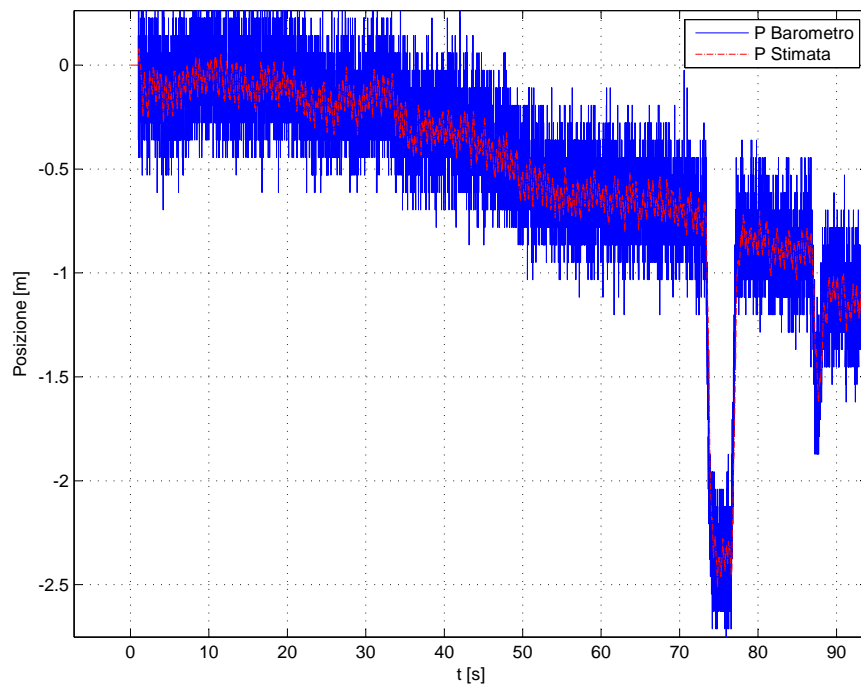


Figura 10.9: Stima posizione z locale

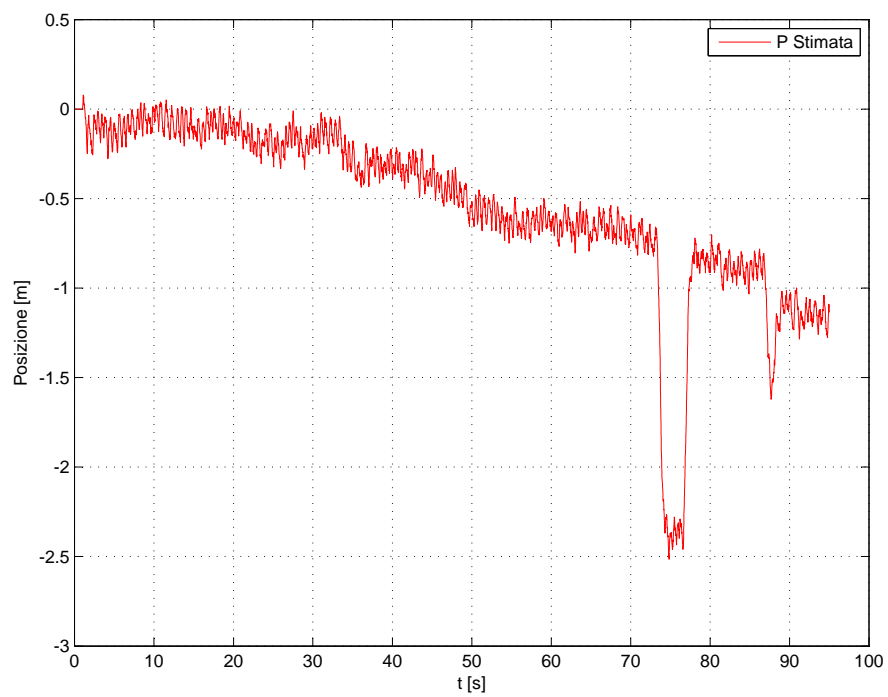


Figura 10.10: Posizione z locale stimata

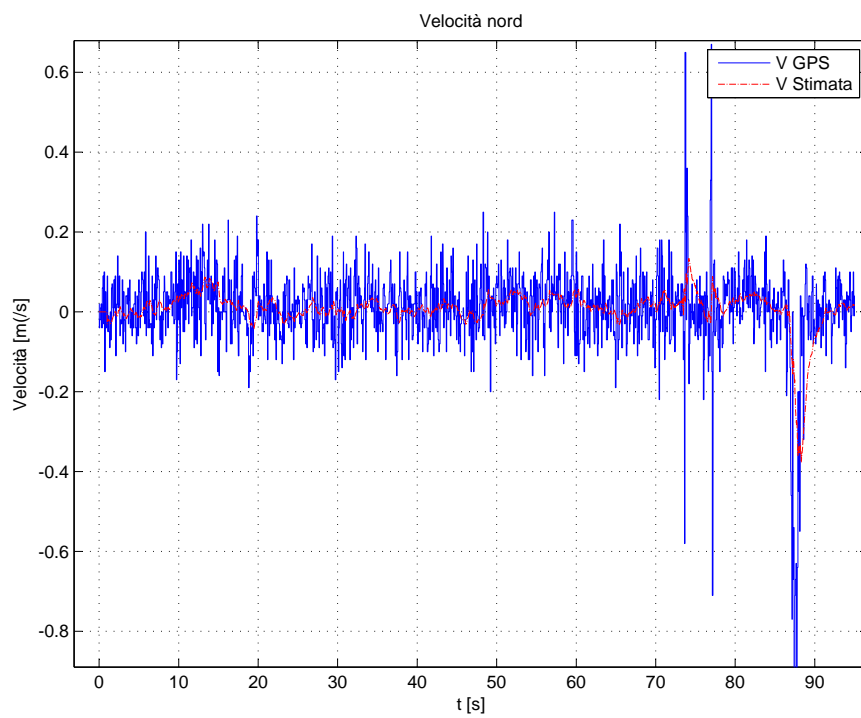


Figura 10.11: Velocità nord stimata

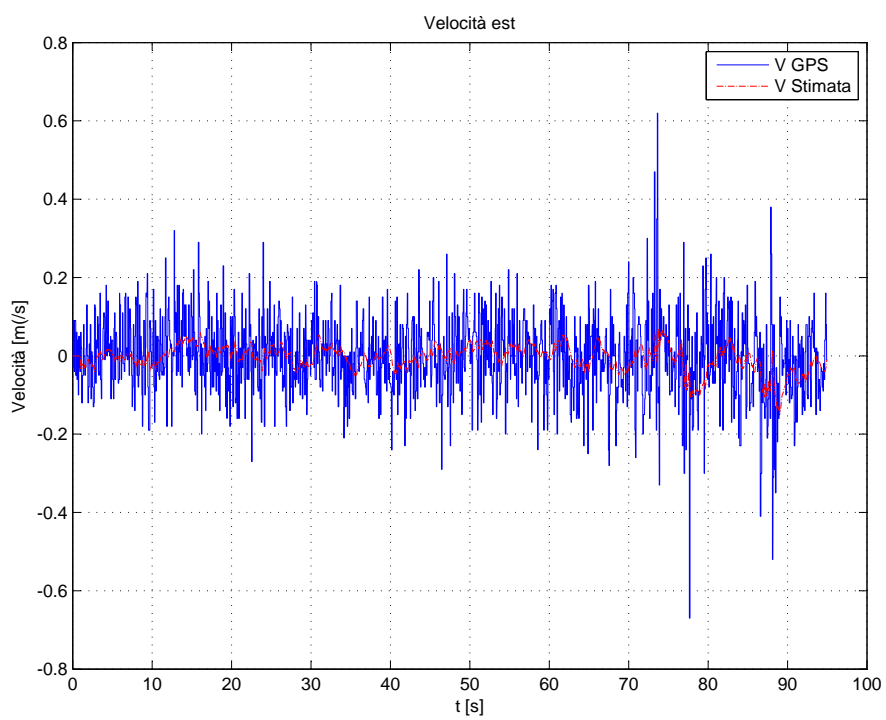


Figura 10.12: Velocità est stimata

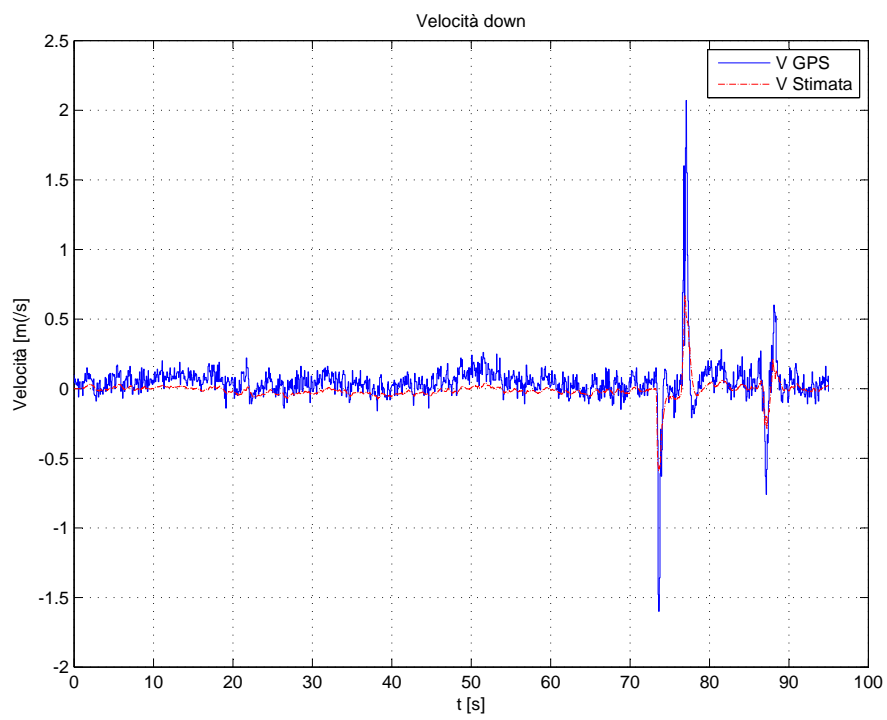


Figura 10.13: Velocità down stimata

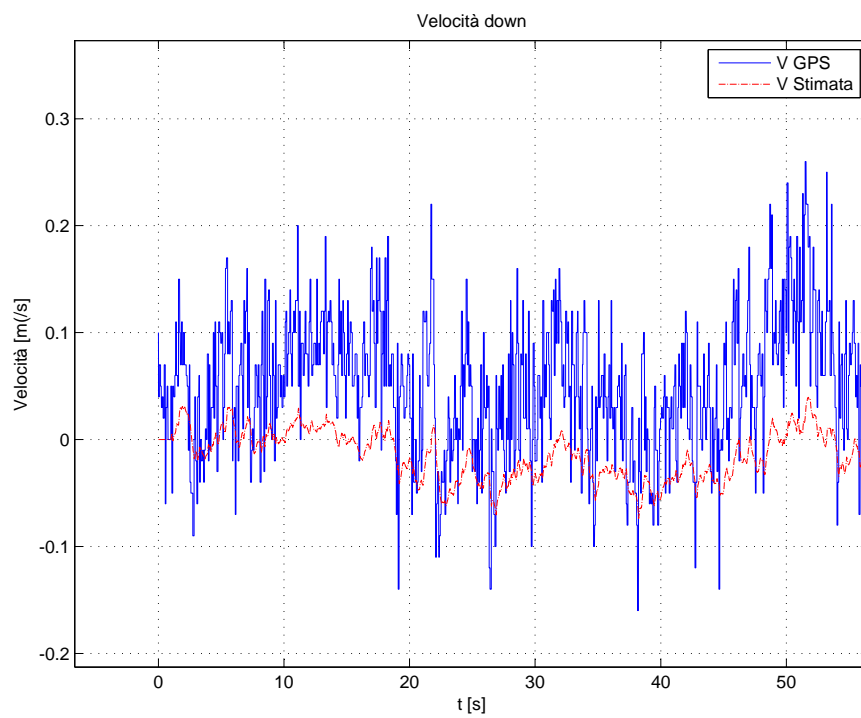


Figura 10.14: Particolare Velocità down stimata



### Lavoro svolto

In questa attività di tesi si sono studiate ed implementate diverse soluzioni per la stima di posizione, velocità ed assetto di un UAV ad ala rotante. Si sono studiati algoritmi di tipo stocastico, basati sul filtro di Kalman, presenti in letteratura, per analizzare poi algoritmi non lineari di stima dell'assetto che garantiscono la convergenza globale allo stato reale del sistema. Per la stima di posizione e velocità si sono studiati algoritmi di tipo loosely coupled che fondono dati di tipo inerziale con informazioni GPS. Nel capitolo 9 è stato presentato un filtro complementare per la stima di posizione e velocità che presenta un decisivo contributo innovativo per l'uso di un predittore GPS, il quale permette di ottenere una stima finale meno rumorosa e più accurata. Per aumentare ulteriormente le performance degli algoritmi si sono sfruttate le informazioni di velocità derivanti da misure doppler del segnale GPS. Per la stima della velocità verticale si sono implementati due filtri che, lavorando in modo autonomo ed in parallelo, permettono di ottenere una stima molto accurata della velocità verticale. In uno si sfrutta l'informazione di posizione data dal barometro in uno schema che ne ricava la derivata prima, nell'altro si sfrutta l'informazione di velocità data dal GPS. Le due stime vengono quindi pesate in modo opportuno l'una rispetto all'altra per avere a disposizione una velocità verticale il più accurata possibile. Infine l'algoritmo per la stima dell'assetto mostrato nel Cap. 6 e quello per la stima di posizione e velocità, mostrato nel Cap. 9, sono stati implementati sul microcontrollore, come descritto nel Cap. 10, e validati sperimentalmente. Si è fatto uso del sistema optitrack per il tuning e la validazione del filtro per la stima dell'assetto. La stima di posizione e velocità è stata testata e validata all'aperto con dei voli a punto fisso.



## Considerazioni

Dai test e dai risultati sperimentali si può affermare innanzitutto che il filtro complementare costruito sul gruppo  $SO(3)$  è un'alternativa più che valida agli algoritmi basati sul filtro di Kalman. Tra i principali vantaggi riscontrati vi sono la SEMPLICITÀ, la CONVERGENZA GLOBALE, il BASSISSIMO COSTO COMPUTAZIONALE.

Semplicità e basso costo computazionale sono fattori chiave per algoritmi che nascono per essere utilizzati su sistemi embedded basati su microcontrollore. Infatti questi dispositivi presentano una frequenza del clock dell'ordine delle centinaia di MHz, molto inferiore a quelle di una normale CPU di un pc, oltre che una limitatissima quantità di memoria SRAM. Di conseguenza, nei processi di prototipazione semi-automatica del software, come quello descritto nel Cap. 10, la semplicità dell'algoritmo risulta essere a volte un parametro fondamentale. La convergenza globale dell'algoritmo di stima inoltre non rende inutile l'uso di un algoritmo di controllo globale in dure condizioni operative, dove ad esempio raffiche di vento possono destabilizzare il sistema.

## Sviluppi futuri

Il sistema di navigazione sviluppato in questo lavoro di tesi fonda la base per la navigazione outdoor della prima piattaforma aerea sviluppata per il progetto europeo SHERPA, soprannominata *DreamDroneOne*. Possibili sviluppi futuri degli algoritmi proposti potrebbero vertere sulla stima del bias degli accelerometri, fattore non trascurabile in sensoristica di tipo low-cost, oltre che sulla determinazione dell'accelerazione inerziale dalle informazioni di velocità del GPS. Soluzioni di questo tipo, già studiate in [8] e [9], mostrano scarsi risultati se applicate a segnali reali.

## Wrapper per la stima di posizione

```
#include <nuttx/config.h>
#include <nuttx/sched.h>
#include <stdio.h>
#include <errno.h>

#include "./codegen/unibo_INS_types.h"
#include "./codegen/unibo_INS.h"
#include "./main_includes.h"
#include <unistd.h>
#include <poll.h>
#include <stdbool.h>
#include <uORB/uORB.h>
#include <uORB/topics/sensor_combined.h>
#include <uORB/topics/vehicle_attitude.h>
#include <uORB/topics/vehicle_gps_position.h>
#include <uORB/topics/vehicle_local_position.h>
//#include "ahrs_S03_unibo_params.h"

#include <systemlib/systemlib.h>
#include <systemlib/err.h>
/* Daemon variables */
static bool thread_should_exit = false; /**< daemon exit flag */
```

```

static bool thread_running = false; /**< daemon status flag */
static int daemon_task; /**< Handle of daemon task / thread */
static bool updated = false;

* daemon management function.
*/
__EXPORT int unibo_INS_main(int argc, char *argv[]);

/**
* Mainloop of daemon.
*/
int unibo_INS_thread_main(int argc, char *argv[]);

RT_MODEL_unibo_INS_T* model;

/**
* Print the correct usage.
*/
static void usage(const char *reason);

static void
usage(const char *reason)
{
if (reason)
warnx("%s\n", reason);
errx(1, "usage: unibo_INS {start|stop|status}
[-p <additional params>]\n\n");
}

/**
* The daemon app only briefly exists to start
* the background job. The stack size assigned in the
* Makefile does only apply to this management task.
*
* The actual stack size should be set in the call
* to task_create().
*/
int unibo_INS_main(int argc, char *argv[])

```

```
{

if (argc < 1)
usage("missing command");

if (!strcmp(argv[1], "start")) {

if (thread_running) {
warnx("daemon already running\n");
/* this is not an error */
exit(0);
}

thread_should_exit = false;
daemon_task = task_spawn_cmd("unibo_INS",
    SCHED_DEFAULT,
    SCHED_PRIORITY_MAX - 5,
    2000,
    unibo_INS_thread_main,
    (argv) ? (const char *)&argv[2] : (const char **)NULL);
exit(0);
}

if (!strcmp(argv[1], "stop")) {
thread_should_exit = true;
exit(0);
}

if (!strcmp(argv[1], "status")) {
if (thread_running) {
warnx("\trunning\n");
} else {
warnx("\tnot started\n");
}
exit(0);
}

usage("unrecognized command");
exit(1);
}
```

```

/**
 * Main execution thread
 */
int unibo_INS_thread_main(int argc, char *argv[])
{

warnx("[unibo_INS] starting\n");

thread_running = true;

warnx("Hello INS");
model = unibo_INS(); //Init model!
uint64_t last_measurement = 0;

/* subscribe to sensor_combined topic */
int sensor_sub_fd = orb_subscribe(ORB_ID(sensor_combined));
/* set data to 100Hz */
orb_set_interval(sensor_sub_fd, 10); //1000 = 1Hz (ms)

/* subscribe to vehicle_gps_position topic */
int gps_sub_fd = orb_subscribe(ORB_ID(vehicle_gps_position));

int att_sub_fd = orb_subscribe(ORB_ID(vehicle_attitude));
/* set data to 100Hz */

/* one could wait for multiple topics with this technique,
just using one here */
struct pollfd fds[] = {
{ .fd = sensor_sub_fd, .events = POLLIN },
/* there could be more file descriptors here, in the form like:
* { .fd = other_sub_fd, .events = POLLIN },
*/
};

int error_counter = 0;

static struct sensor_combined_s sensor_in;
static struct vehicle_gps_position_s gps_position;
static struct vehicle_attitude_s attitude;
static struct vehicle_local_position_s local_position;
memset(&local_position,0,sizeof(local_position));

```

```

memset(&gps_position,0,sizeof(gps_position));
orb_advert_t lpos_pub = orb_advertise(ORB_ID(vehicle_local_position),
&local_position);
int inc = 0;

INS_start();
INS_update();

static bool FirstFlg = true;

/*
 * |-----|
 * |                MAIN THREAD LOOP!                |
 * |-----|
 */

while (!thread_should_exit) {
/* wait for sensor update of 1 file descriptor for 1000 ms (1 second) */
//Imposto solo 10 ms
int poll_ret = poll(fds, 1, 100);
//filedescr, number of file descriptor to wait for, timeout in ms

/* handle the poll result */
if (poll_ret == 0) {
/* this means none of our providers is giving us data */
warnx("[unibo_INS_thread] Got no data within 100ms\n");
} else if (poll_ret < 0) {
/* this is seriously bad - should be an emergency */
if (error_counter < 10 || error_counter % 50 == 0) {
/* use a counter to prevent flooding (and slowing us down) */
warnx("[unibo_INS_thread] ERROR return value from poll(): %d\n"
, poll_ret);
}
error_counter++;
} else {
if (fds[0].revents & POLLIN) {
inc++;

orb_copy(ORB_ID(sensor_combined), sensor_sub_fd, &sensor_in);
orb_check(gps_sub_fd, &updated);

```

```

orb_copy(ORB_ID(vehicle_gps_position), gps_sub_fd, &gps_position);
orb_copy(ORB_ID(vehicle_attitude), att_sub_fd, &attitude);

/* Parametri della terra */
unibo_INS_U.earth_par[0] = 6378000; /* Raggio terrestre in metri */
unibo_INS_U.earth_par[1] = 0; /* Eccentricità terrestre */
unibo_INS_U.earth_par[2] = 0; /* Vettore gravità terrestre normalizzato [1]*/
unibo_INS_U.earth_par[3] = 0; /* Vettore gravità terrestre normalizzato [2]*/
unibo_INS_U.earth_par[4] = 1; /* Vettore gravità terrestre normalizzato [3]*/
unibo_INS_U.earth_par[5] = 9.81; /* Costante di gravità terrestre m/s2 */

/* Parametri di simulazione*/
/* Tstep - integration time */
unibo_INS_U.simulation_par[0] =
(sensor_in.timestamp - last_measurement) / 1000000.0f;
last_measurement = sensor_in.timestamp;
/* Nsample numero campioni per determinazione stato iniziale*/
unibo_INS_U.simulation_par[1] = 100;
/* costante filtro su posizione iniziale */
unibo_INS_U.simulation_par[2] = 0.2;
/* costante filtro su velocità iniziale*/
unibo_INS_U.simulation_par[3] = 0.2;
//
/* Guadagni del filtro */
/* Guadagni Kp in xyz*/
unibo_INS_U.filter_gain[0] = 0.02;
unibo_INS_U.filter_gain[1] = 0.02;
unibo_INS_U.filter_gain[2] = 5;
/* Guadagni Kv*/
unibo_INS_U.filter_gain[3] = 2;
unibo_INS_U.filter_gain[4] = 1;
unibo_INS_U.filter_gain[5] = 0.2;
/* Guadagno K_gpsp*/
unibo_INS_U.filter_gain[6] = 0.2;
unibo_INS_U.filter_gain[7] = 0.2;
unibo_INS_U.filter_gain[8] = 1;
/* Guadagno K_gpsv*/
unibo_INS_U.filter_gain[9] = 1;
unibo_INS_U.filter_gain[10] = 1;
unibo_INS_U.filter_gain
= 0.95;

```

```

/* Guadagno f_rapp*/
unibo_INS_U.filter_gain[12] = 20;
unibo_INS_U.filter_gain[13] = 20;
unibo_INS_U.filter_gain[14] = 1;
unibo_INS_U.filter_gain[15] = 10;
unibo_INS_U.filter_gain[16] = 10;
unibo_INS_U.filter_gain[17] = 1;
/* Guadagno Ka*/
unibo_INS_U.filter_gain[18] = 0.01;
unibo_INS_U.filter_gain[19] = 0.01;
unibo_INS_U.filter_gain[20] = 0.01;
/* Guadagni anti-windup sul bias*/
unibo_INS_U.filter_gain[21] = 16;
unibo_INS_U.filter_gain[22] = 16;

/* Misure dagli accelerometri */
unibo_INS_U.acc_meas[0] = sensor_in.accelerometer_m_s2[0];
unibo_INS_U.acc_meas[1] = sensor_in.accelerometer_m_s2[1];
unibo_INS_U.acc_meas[2] = sensor_in.accelerometer_m_s2[2];

/* Misure di posizione */
/* Latitudine rad*/
unibo_INS_U.pos_meas[0] = (float)1e-7*(3.14/180.0f)*gps_position.lat;
/* Longitudine rad*/
unibo_INS_U.pos_meas[1] = (float)1e-7*(3.14/180.0f)*gps_position.lon;
/* Altezza s.l.m. metri*/
unibo_INS_U.pos_meas[2] = sensor_in.baro_alt_meter;

/* Misure di velocità */
/* Velocità nord m/s */
unibo_INS_U.vel_meas[0] = gps_position.vel_n_m_s;
/* Velocità est m/s */
unibo_INS_U.vel_meas[1] = gps_position.vel_e_m_s;
/* Velocità down m/s */
unibo_INS_U.vel_meas[2] = gps_position.vel_d_m_s;

/* Misure di assetto */
unibo_INS_U.Rnb[0] = attitude.R[0][0];
unibo_INS_U.Rnb[1] = attitude.R[0][1];
unibo_INS_U.Rnb[2] = attitude.R[0][2];
unibo_INS_U.Rnb[3] = attitude.R[1][0];

```



```

unibo_INS_U.Rnb[4] = attitude.R[1][1];
unibo_INS_U.Rnb[5] = attitude.R[1][2];
unibo_INS_U.Rnb[6] = attitude.R[2][0];
unibo_INS_U.Rnb[7] = attitude.R[2][1];
unibo_INS_U.Rnb[8] = attitude.R[2][2];

// ----- STIMA POSIZIONE -----
    INS_update();
/* Passo gli output del modello Simulink al topic vehicle_local_position */
/* Posizione centro terna NED */
local_position.ref_lat = (int32_T)(unibo_INS_Y.p0_sf[0]*180*10000000/3.14);
local_position.ref_lon = (int32_T)(unibo_INS_Y.p0_sf[1]*180*10000000/3.14);
local_position.ref_alt = (int32_T)(unibo_INS_Y.p0_sf[2]*1000);

/* Posizione locale */
local_position.x = unibo_INS_Y.local_xyz[0];
local_position.y = unibo_INS_Y.local_xyz[1];
local_position.z = unibo_INS_Y.local_xyz[2];

/* Velocità locale NED */
local_position.vx = unibo_INS_Y.local_v[0];
local_position.vy = unibo_INS_Y.local_v[1];
local_position.vz = unibo_INS_Y.local_v[2];

local_position.v_xy_valid = true;
local_position.v_z_valid = true;
local_position.xy_global = true;
local_position.xy_valid = true;
local_position.z_global = true;
local_position.z_valid = true;
local_position.yaw = attitude.yaw;

if (lpos_pub > 0) {
    orb_publish(ORB_ID(vehicle_local_position), lpos_pub, &local_position);

    } else {
        warnx("NaN in roll/pitch/yaw estimate!");
        orb_advertise(ORB_ID(vehicle_local_position), &local_position);
    }
}
}

```

```
warnx("[unibo_INS_daemon] exiting.\n");  
  
thread_running = false;  
  
return 0;  
}
```



---

## Bibliografia

---

- [1] Jay A. Farrel - “Aided Navigation GPS with High Rate Sensors”
- [2] David Titterton, John L. Weston - “Strapdown Inertial Navigation Technology”
- [3] Minh-Duc Hua, Guillaume Ducard, Tarek Hamel, Robert Mahony e Konrad Rudin- “Implementation of a Nonlinear Attitude Estimator for Aerial Robotic Vehicles” *IEEE Transaction on control systems technology*, vol. 22 no. 1 January 2014
- [4] Robert Mahony, Tarek Hamel e Jean-Michel Pflimlin - “Nonlinear Complementary Filters on the Special Orthogonal Group” *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 53 no. 5, June 2008
- [5] Grant Baldwin, Robert Mahony, Jochen Trumpf, Tarek Hamel e Thibault Cheviron - “Complementary filter design on the Special Euclidean group SE(3)”
- [6] Bjornar Vikl and Thor I. Fossen - “A Nonlinear Observer for GPS and INS Integration”
- [7] Michael George, Salah Sukkarie - “Tightly Coupled INS/GPS with Bias Estimation for UAV Applications”
- [8] Minh-Duc Hua - “Attitude estimation for accelerated vehicles using GPS measurements”
- [9] I. Ahmad, A. Benallegue, A. El Hadri - “Sliding Mode Based Attitude Estimation for Accelerated Aerial Vehicles Using GPS/IMU Measurements” *2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*

- [10] Jose-Luis Blanco - “A tutorial on SE(3) transformation parameterizations and on-manifold optimization”
- [11] Howar Mason - “Basic Introduction to the use of Magnetoresistive Sensors”
- [12] Adrian Scumacher - “Integration of a GPS aided Strapdown Inertial Navigation System for Land Vehicles”
- [13] Roberto Naldi e Michele Furci, Ricardo G. Sanfelice e Lorenzo Marconi - “Robust Global Trajectory Tracking for Underactuated VTOL Aerial Vehicles using a Cascade Control Paradigm”
- [14] Roberto Naldi, Alessandro Macchetti, Dario Mengoli e Lorenzo Marconi - “A Simulator Environment for Aerial Service Robot Prototypes”
- [15] J. Wendel, C. Schlaile, Gert F. Trommer - “ Direct Kalman Filtering of GPS/INS for Aerospace Application”
- [16] Le Nhat Hieu, Vinh Hao Nguyen - “Loosely Coupled GPS/INS Inegration with Kalman filtering for land vehicle applications” *2012 International Conference on Control, Automation and Information Sciences (ICCAIS)*
- [17] Minh Duc Hua, Tarek Hamel, Pascal Morin e Claude Samson - “Introduction to Feedback Control of Underactuated VTOL Vehicles” *IEEE Control System Magazine 61, February 2013*
- [18] Karsten Grobekattofer, Zizung Yoon - “Introduction into quaternions for spacecraft attitude representation”
- [19] Malcolm D. Shuster - “A Survey of Attitude Representations” *Journal of the Astronautical Sciences, vol. 41 no. 4 Ottobre - Dicembre 1993*