Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

CONFRONTO TRA TEMPERAMENTI EQUABILI: UNO STUDIO MATEMATICO

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Marco Lenci

Presentata da:
Raffaele Pecoraro

II Sessione
Anno Accademico
2013-2014

La matematica è come la dama:

è adatta ai giovani, non troppo difficile, divertente,

e senza pericoli per lo stato.

Platone

Indice

Capitolo 1

Introduzione

La musica, definita dai dizionari come l'arte di ideare, organizzare e riprodurre suoni, è sicuramente parte integrante della cultura di un popolo. Così come la pittura, la scultura e tutte le varie forme d'arte, la musica varia in base al luogo e al contesto storico in cui viene creata. A differenza di molte altre forme artistiche però, grazie soprattutto allo sviluppo tecnologico, essa è sicuramente tra le più immediate da reperire ed è quasi impossibile al giorno d'oggi non imbattersi in qualche brano musicale dentro un locale, in macchina o semplicemente camminando per strada.

Apprezzata soprattutto per la sua capacità (relativamente ai gusti personali) di trasmettere una forte carica emotiva nell'ascoltatore, la musica nasconde uno strettissimo legame con la matematica, di cui si sente raramente parlare. Immagino che questo fatto sia dovuto, oltre che ad una sufficiente conoscenza della matematica che necessita un approfondito studio della teoria musicale, al forte senso di disgusto che si legge nei volti dei più al solo sentire la parola matematica.

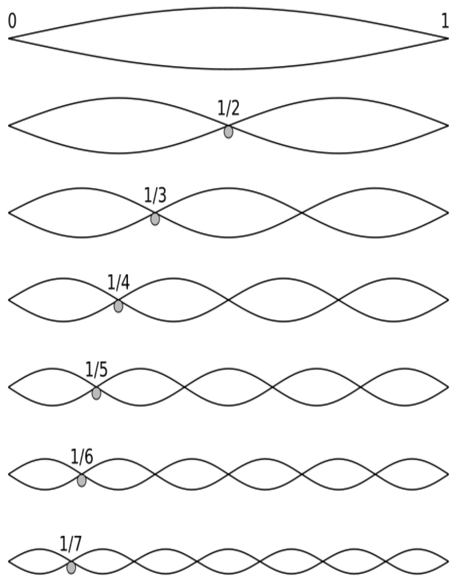
Ebbene, questa tesi nasce con lo scopo di studiare alcuni tratti dello svi-

luppo della teoria musicale occidentale, con particolare attenzione agli aspetti matematici che questa concerne.
Nell'ultima parte della tesi si cercherà di fondere quanto appreso dai primi teorici della musica con degli strumenti matematici ed informatici a nostra disposizione, per cercare una nuova scala musicale che sia, in termini puramente teorico-matematici, valida e coerente.

Capitolo 2

Il suono

Chiamasi suono l'insieme delle vibrazioni di un corpo elastico e l'effetto acustico da esse prodotto. Prendiamo ad esempio una corda con gli estremi fissati e facciamola vibrare. In questo modo si determinerà un'onda sonora con una certa frequenza (ossia numero di oscillazioni per unità di tempo) e una certa ampiezza (massimo spostamento che compiono le molecole del mezzo di propagazione al passaggio dell'onda rispetto alla posizione di stasi).
Quanto più grande è la frequenza, tanto più acuto è il suono. Mentre al crescere dell'ampiezza aumenterà la forza con cui l'onda sonora colpisce il timpano e di conseguenza l'intensità con cui il suono viene percepito.
Più in generale, la corda fissata alle due estremità vibra secondo i suoi automodi, che sono le vibrazioni elementari determinate dal numero di ventri e di nodi. Il numero di nodi determina la frequenza della vibrazione elementare e, poiché tale numero deve essere un intero, le frequenze sono multiple della frequenza base.



2.1 La corda vibrante

Continuiamo a prendere come esempio una corda vibrante di lunghezza ℓ fissata agli estremi e cerchiamo di descrivere un modello matematico che si adatti questo fenomeno.
L'equazione della corda vibrante è il caso unidimensionale dell'equazione d'onda, che diventa una funzione del tipo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)^1 \tag{2.1.1}$$

La cui soluzione dipende dalle due condizioni iniziali:

$$\begin{cases} u(x,t=0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t=0) = \omega(x) \end{cases} \tag{2.1.2}$$

E poiché abbiamo fissato la corda agli estremi, dobbiamo aggiungere le condizioni al bordo:

[1]Si sta supponendo che $u \in C^2([0,\ell] \times [0,+\infty])$

$$\begin{cases} u(x=0,t)=0 \\ u(x=\ell,t)=0 \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Grazie agli studi del matematico francese Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), questo problema è risolvibile con il metodo detto appunto metodo di Fourier, che consiste nel cercare una particolare soluzione scrivendo la funzione u a variabili separate, ossia:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

Sostituendo nell'equazione (2.1.1) si avrà:

$$X(x) \cdot T''(t) = v^2 \cdot X''(x) \cdot T(t) \Rightarrow \frac{T''(t)}{v^2 \cdot T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Si vede subito che il primo membro è una funzione nella sola variabile t, mentre il secondo dipende solo da x, quindi l'identità può essere verificata sse $\exists K \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\frac{T''(t)}{v^2 \cdot T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -K^2$$

Da cui si ricava il sistema:

$$\begin{cases} X''(x) + K^2 \cdot X(x) = 0 \\ T''(t) + v^2 \cdot K^2 \cdot T(t) = 0 \end{cases}$$

Questo sistema è composto da equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine omogenee, le cui soluzioni sono del tipo:

$$\begin{cases} X(x) = A\cos(Kx) + B\sin(Kx) \\ T(t) = C\cos(vKt) + D\sin(vKt) \end{cases}$$

Per cui la nostra equazione di partenza (2.1.1) diventa:

$$u(x,t) = (A\cos(Kx) + B\sin(Kx)) \cdot (C\cos(vKt) + D\sin(vKt))$$

Sfruttiamo ora le condizioni al bordo (2.1.3) per trovare una la soluzione. Per quanto riguarda la variabile x si avrà:

$$\begin{cases} X(x=0) = A \cdot 1 + B \cdot 0 = 0 \\ X(x=\ell) = A\cos(K\ell) + B\sin(K\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B\sin(K\ell) = 0 \Rightarrow K = \pm\frac{n\pi}{\ell} \ \textit{con}\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Poiché la soluzione positiva di K è identica a quella negativa, d'ora in poi, per comodità, considereremo solamente quella con il segno positivo.
Ora sappiamo che una soluzione del nostro problema è:

$$u(x,t) = (C\cos(v\frac{n\pi}{\ell}t) + D\sin(v\frac{n\pi}{\ell}t)) \cdot \sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

Inoltre questa soluzione è ammissibile $\forall n \in \mathbb{N}$ e lo spazio delle soluzioni è uno spazio vettoriale,dunque sarà una soluzione anche la somma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos(v\frac{n\pi}{\ell}t) + D_n\sin(v\frac{n\pi}{\ell}t)) \cdot \sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

Ora riprendiamo le condizioni iniziali (2.1.2) per ricavare i coefficienti $C_n e\ D_n$. Si otterrà subito la relazione:

$$\begin{cases} u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\frac{n\pi}{\ell}x) \\ \omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi v}{\ell} \cdot D_n \sin(\frac{n\pi}{\ell}x) \end{cases}$$

Queste somme altro non sono che gli sviluppi in serie di Fourier di $u_0\ e\ \omega$ nell'intervallo [0,ℓ]. Dunque possiamo ricavare:

$$\begin{cases} C_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell u_0(z)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}z\right)dz \\ D_n = \frac{2}{v\pi n}\int_0^\ell \omega(z)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}z\right)dz \end{cases}$$

In definitiva, sostituendo si avrà la soluzione dell'equazione della corda vibrante ad estremi fissi:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}((\frac{2}{\ell}\int_0^\ell u_0(z)\sin(\frac{n\pi}{\ell}z)dz)\cos(v\frac{n\pi}{\ell}t)+$$

$$+(\frac{2}{v\pi n}\int_0^\ell \omega(z)\sin(\frac{n\pi}{\ell}z)dz)\sin(v\frac{n\pi}{\ell}t))\cdot\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

Quello che salta subito all'occhio nella soluzione proposta è che, indipendentemente dalla posizione iniziale u_0 e dalla velocità iniziale ω, l'onda rimane comunque periodica di periodo $\frac{\ell}{v\pi}$ e costituita dalla sovrapposizione di armoniche elementari della forma:

$$C_n\cos(\frac{n\pi v}{\ell}t)\cdot\sin(\frac{n\pi}{\ell}x) + D_n\sin(\frac{n\pi v}{\ell}t))\cdot\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

Ognuna di queste armoniche ha periodo $T_n = \frac{\ell}{n\pi v}$ e quindi frequanza $\nu_n = \frac{n\pi v}{\ell}$.

Osserviamo dunque che tutte queste armoniche, dette **armoniche parziali** hanno frequenza multipla di quella che viene detta **frequenza fondamentale** $\nu_1 = \frac{v\pi}{\ell}$.

2.2 Il fenomeno dei battimenti

Riprendendo quanto detto sull'equazione della corda vibrante, il suono prodotto è una composizione di onde sinusoidali, il cui risultato può essere interpretato mediante il principio di sovrapposizione. Quand'è che un suono risulta gradevole?

Rispondere a questa domanda è pressoché impossibile. Ciò può dipendere infatti sia dallo strumento che lo produce, sia dalla sensibilità dell'ascoltatore. Come punto di partenza si possono considerare gli studi di Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821–1894), il quale attraverso una serie di esperimenti arrivò alla conclusione che la dissonanza è una caratteristica del suono sostanzialmente riconducibile al fenomeno dei battimenti. Un battimento è una particolare oscillazione che si produce in un mezzo quando si sovrappongono due onde di frequenze vicine.

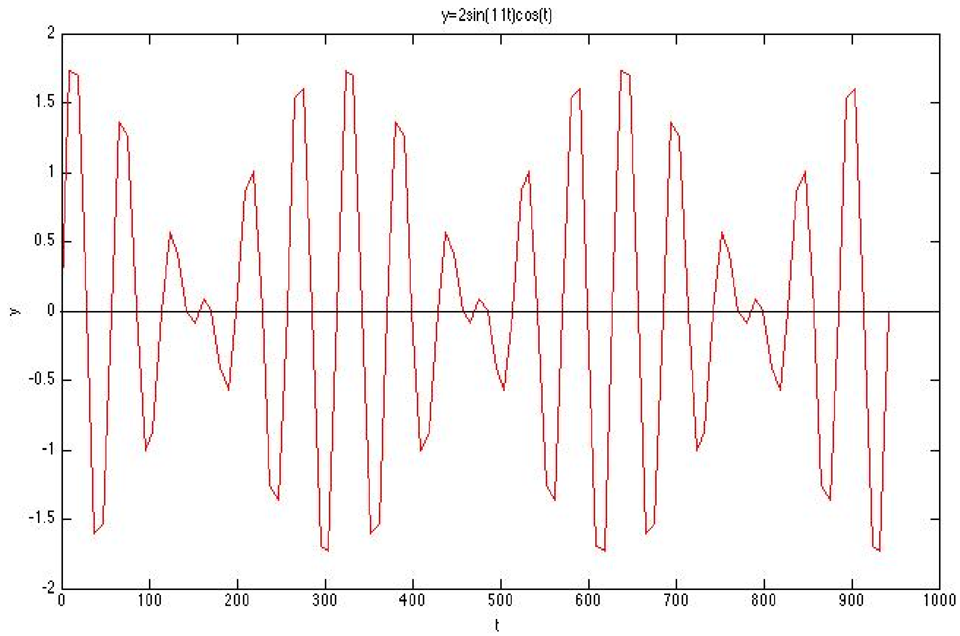
Proviamo a costruirne un esempio.
Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Chiamiamo poi $u = \frac{a+b}{2}$ e $v = \frac{a-b}{2}$. Consideriamo allora le due onde:

$$y = \sin u \ e \ y = \sin v$$

e vediamo cosa succede se le sovrapponiamo.
Dalle formule di prostaferesi si ricava la relazione:

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

Osserviamo cosa succede graficamente nel caso in cui siano a=22 e b=2.



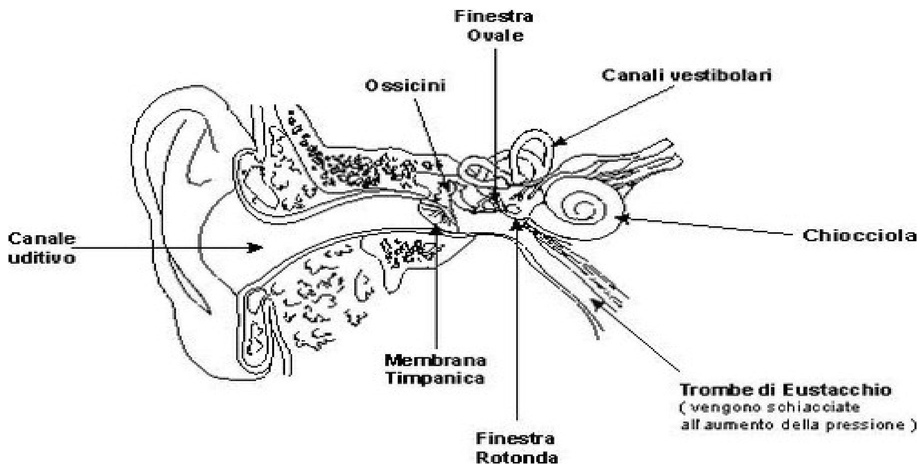
Si vede così che il suono che viene percepito dalla sovrapposizione di due suoni puri ha una frequenza pari alla media aritmetica delle frequenze dei suoi generatori, modulata da una lenta oscillazione (descritta dal fattore $\cos\frac{u-v}{2}$).

L'esperimento di Helmholtz consisteva nel riprodurre simultaneamente due suoni puri alla stessa frequenza. A questo punto un suono veniva mantenuto alla stato di partenza, mentre dell'altro ne veniva aumentata lentamente la frequenza. Von Helmholtz verificò così che per piccole differenze di frequenza i due suoni risultavano consonanti; il senso di gradevolezza andava poi perdendosi al crescere della distanza sino ad una soglia limite, superata la quale si ritornava ad una sensazione piacevole. Si capisce allora perché come fattore di dissonanza Helmholtz indicò proprio i battimenti: questi sono molto lenti per frequenze vicine, ma diventando più veloci, al crescere della differenza di frequenza, producono una sensazione di asprezza sempre più forte. Questa sensazione va poi via via scomparendo a causa proprio dell'eccessiva rapidità del fenomeno, che l'orecchio umano non è in grado di percepire oltre un certo livello.

2.3 L'orecchio umano

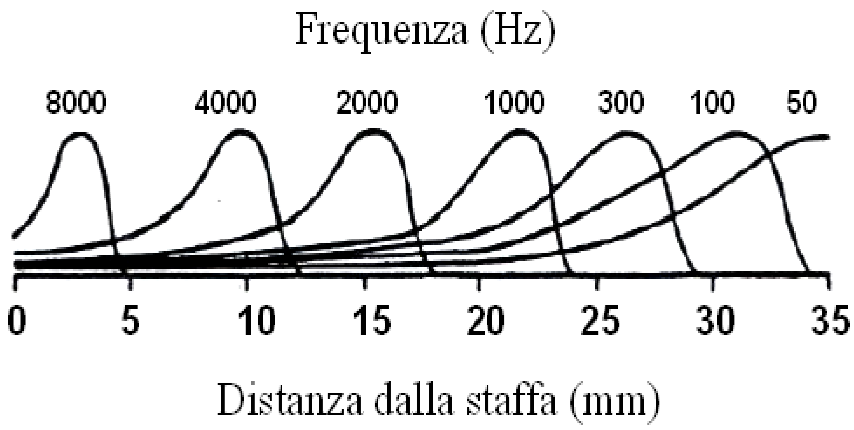
Per comprendere come l'essere umano percepisca i battimenti, e più in generale i suoni, è necessario soffermarsi un attimo sull'anatomia dell'apparato uditivo. Più precisamente, ci limiteremo a descrivere il funzionamento dell'orecchio, che si divide in tre parti: l'**orecchio esterno**, l'**orecchio medio** e l'**orecchio interno**.

L'orecchio esterno altro non è che il padiglione auricolare ed ha il compito di catturare le onde longitudinali che descrivono i suoni e di indirizzarle nel *canale uditivo*. Qui le onde vanno ad infrangersi sul timpano, il quale a sua volta è collegato alla catena di ossicini detti *martello*, *incudine* e *staffa*, che insieme compongono l'orecchio medio. Questo settore è collegato con l'esterno grazie alle *trombe di Eustachio* che permettono di regolare la pressione. Attraverso la staffa l'orecchio medio comunica con la *finestra ovale* e la *finestra rotonda* che agitano i liquidi che si trovano nella *coclea*, la quale assieme all'*apparato vestibolare* costituisce l'orecchio interno. Il percorso prosegue poi sino alla corteccia cerebrale e quindi al lobo temporale, dove saranno decodificati i segnali e verrà infine percepito il suono.



2.4 Fenomeni percettivi

Una spiegazione di come l'orecchio riesca a decifrare i diversi suoni si può trovare ancora nel libro **On the sensations of tone as a physiological basis for the theory of music** (1863) di Hermann von Helmholtz. Il noto fisiologo riteneva che l'orecchio interno, attraverso la *membrana basilare* fosse in grado di analizzare lo spettro di un'onda sinusoidale, attivandosi in posizioni diverse in base alla diversa frequenza dell'onda. Più precisamente, in base alla frequenza percepita dal padiglione auricolare, la staffa reagirà in un certo modo sulla coclea, ovvero sul fluido che essa contiene. La velocità di questo fluido dipenderà poi dall'area della membrana interessata. La membrana basilare, infatti, è costituita da una massa di fibre elastiche, che sono molto più fitte e tese vicino alla base, andando poi a diradarsi verso l'interno. La conseguenza di questa struttura è che un'onda si propagherà a velocità sempre minore man mano che ci si allontana dalla base della membrana e questa distanza sarà tanto più piccola quanto più alta è la frequenza del suono percepito.



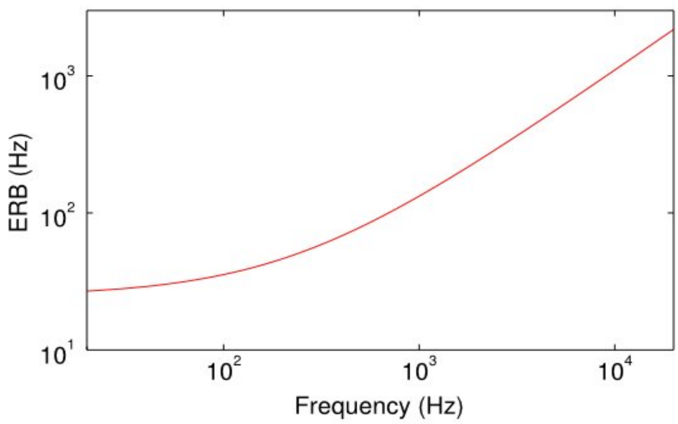
Da questa struttura emergono tre fenomeni percettivi:

- Esiste un intervallo di frequenze al di fuori del quale non sono percettibili onde acustiche. Indicativamente questo intervallo va da 20 a 20000 Hz

- Gli intervalli musicali sono percepiti come rapporti di frequenze e non come differenze. Questo perché se moltiplichiamo una frequenza per un certo fattore, la posizione sulla membrana varia di una quantità costante.

- Un suono intenso a bassa frequenza indebolisce sensibilmente la percezione di un suono meno intenso a frequenza più alta. Ciò si deve al fatto che un suono a bassa frequenza interagisce con una regione della membrana basilare più vicina alla base e dunque più vicina alla staffa, andando così ad interferire con la percezione del suono ad alta frequenza.

Un altro concetto da tenere a mente è quello della **larghezza di banda critica**. Questa nozione si riferisce al fatto che per ogni frequenza percepita, la sezione della membrana basilare che viene messa in movimento ha una larghezza precisamente definita. Questo significa che due suoni con una differenza di frequenza che non supera la larghezza della banda critica verranno percepiti come un unico suono, distorto per via dei battimenti. Nell'intervallo delle frequenze udibili si contano circa 24 bande critiche. Approssimativamente, queste bande hanno una larghezza costante sino a 500 Hz, per poi crescere in modo lineare rispetto al logaritmo della frequenza.



Capitolo 3

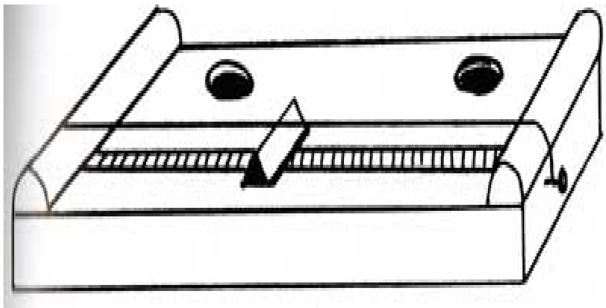
Temperamenti musicali

3.1 Archita e il canone

La prima modellizzazione della teoria musicale si deve in gran parte agli studi del matematico greco Archita di Taranto (428 a.C. - 360 a.C.).
Per comprendere le scelte strutturali alla base di quello che più avanti chiameremo Temperamento Pitagorico, ricordiamo il risultato dovuto appunto ad Archita [1], secondo cui non è possibile suddividere un intervallo della forma $(n+1) : n$ in due intervalli di ampiezza uguale per mezzo di un numero razionale. Equivalentemente, il medio proporzionale tra due numeri naturali successivi non può essere mai un numero razionale, ovvero si può dimostrare che che $\nexists p, q \in \mathbb{Z}$ tali che $(n+1) \times n = (\frac{p}{q})^2$. [2]

Il supporto meccanico usato da Archita era il canone (detto anche monocordo): uno strumento composto da una singola corda collegata ad una cassa di risonanza per mezzo di due ponticelli posti all'estremità della corda stessa e da un terzo ponticello mobile, che, posizionato tra la cassa e la corda, divide quest'ultima in due sezioni.

[1] Reperibile come Proposizione 3 della Sectio Canonis di Euclide.
[2] Dimostrazione in appendice.



Attraverso il canone i pitagorici definirono gli intervalli musicali consonanti secondo lo schema che segue, detta 2ℓ la lunghezza della corda: $\frac{2}{1}\ell$ definisce il rapporto di ottava, $\frac{3}{2}\ell$ il rapporto di quinta e $\frac{4}{3}\ell$ quello di quarta [3]. Dunque ,suonate due note contemporaneamente , queste sarebbero state consonante se e solo se il rapporto delle rispettive lunghezze sul monocordo fosse stato riconducibile all'ottava, alla quarta o alla quinta.
I pitagorici diedero anche un ordine qualitativo di consonanza, introducendo il concetto di *elemento dissimile*. Dato un rapporto $\frac{p}{q}$ di numeri interi coprimi tali che $1 \leq q < p$, si chiama elemento dissimile il numero $d := p + q - 2$. Un accordo è tanto più perfetto quanto più è piccolo l'elemento dissimile relativo al rapporto tra le due note.
In questo modo l'ottava è il miglior rapporto possibile, poi viene la quinta ed infine la quarta.

3.2 Il Temperamento Pitagorico

Un temperamento musicale è l'insieme delle regole con cui si intende costruire una scala musicale a partire da alcuni intervalli di riferimento. Nella musica occidentale, il primo temperamento fu quello pitagorico. Come abbiamo già detto, i pitagorici definirono per mezzo del canone gli intervalli di ottava, di quinta e di quarta.

[3]Questi nomi sono legati al numero di note contenute in un intervallo, ma hanno un origine più moderna. I greci chiamavano questi intervalli rispettivamente *Diapason*, *Diapente* e *Diatessaron*.

Scartando l'ultimo di questi, il temperamento pitagorico si basa solo su due regole:

- Si passa da un'ottava all'altra raddoppiando la frequenza (si va nell'ottava successiva) o dimezzandola (ottava precedente).
- Triplicando la frequenza si passa da un'ottava alla quinta dell'ottava successiva.

Partendo da una frequenza "centrale", che si indicherà con il rapporto 1:1, si costruisce l'intera scala musicale combinando queste due regole. In particolare, si chiama *scala diatonica*, la gamma delle prime sette note (quelle che noi oggi conosciamo come DO-RE-MI-FA-SOL-LA-SI) che si trovano all'interno di ogni singola ottava.

Ad esempio, ponendo il primo DO in posizione 1:1, avremo il secondo DO in posizione 2:1. Dentro questa ottava il SOL è nel posto 3:2 (quinta giusta). Ora, triplicando e poi dimezzando la frequenza del SOL ritorniamo nella prima ottava con il rapporto 9:8, che chiamiamo RE. Ad una quinta giusta dal RE abbiamo il LA a 27:16. Andando avanti in questo modo si potrà comporre la scala diatonica:

NOTE	DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO
INTERVALLI	1:1	9:8	81:64	4:3	3:2	27:16	243:128	2:1

Tra due note successive esistono così solo due intervalli possibili:

Tono intero : $T = \frac{9}{8} = 3^2 : 2^3$

Semitono diatonico : $S = \frac{256}{243} = 2^8 : 3^5$

Il semitono diatonico è quasi la metà del tono intero[4]. Il suo complementare $S' = \frac{2187}{2048}$ (tale cioè che $S + S' = T$) si chiama *semitono cromatico*. Prende

[4]Noi sapevamo a priori che non sarebbe potuto essere la metà esatta in quanto il risultato presentato da Archita ci garantisce l'impossibilità di suddividere il tono intero, che si presenta nella forma (n+1):n, in parti uguali per mezzo di un razionale.

poi il nome di **comma pitagorico** la differenza tra i due semitoni, che si può misurare come $\frac{2187/2048}{256/243} \approx 1,01364$. L'esistenza di questo comma, seppure sia una grandezza effettivamente piccola è causa di alcuni problemi.

Quello che succede a causa del comma pitagorico è che il temperamento preso in esame darà necessariamente origine a note fortemente disarmoniche (nel senso in cui lo intendevano i greci). Fu proprio Pitagora a scoprire empiricamente che, benché in 7 ottave ci siano 12 quinte (ogni ottava contiene una quinta giusta e 12 semitoni), dividendo per sette volte la lunghezza del monocordo il suono ottenuto è ben diverso da quello che si può ascoltare se si diminuisce per 12 volte la lunghezza di un terzo.

Ovvero, presa una nota qualsiasi, salendo di 12 quinte e scendendo poi di 7 ottave si otterrà una nuova nota che differisce da quella di partenza di un comma pitagorico. La nota di partenza e la nota d'arrivo di questa procedura formano *coppie enarmoniche*

Nel caso specifico questo succede perché $(\frac{3}{2})^{12} \neq 2^7$.
Più in generale, non è possibile trovare soluzioni intere, non nulle, dell'equazione $(\frac{3}{2})^N = 2^K$ in quanto si avrebbe $3^N = 2^{K-N}$ e questo è assurdo dato che 2 e 3 sono coprimi.

La scala diatonica si può estendere alla *scala cromatica* di dodici note seguendo questo procedimento: fissato il DO fondamentale, sarà $r_n = (\frac{3}{2})^n \cdot 2^{-k}$, con r_n che è la nota trovata applicando n volte l'intervallo di quinta e moltiplicando per il fattore 2^{-k}, dove k è il numero di passi a ritroso, di ottava in ottava, necessario a rientrare nell'ottava di riferimento. Ad esempio, partendo dal $LA\flat$ a $\frac{128}{81}$ si troverà velocemente:

$$\frac{128}{81}LA\flat \hookrightarrow \frac{32}{27}MI\flat \hookrightarrow \frac{16}{9}SI\flat \hookrightarrow \frac{4}{3}FA \hookrightarrow \frac{1}{1}DO \hookrightarrow \frac{3}{2}SOL \hookrightarrow \frac{9}{8}RE \hookrightarrow \frac{27}{16}LA$$

$$\hookrightarrow \frac{81}{64}MI \hookrightarrow \frac{243}{128}SI \hookrightarrow \frac{729}{512}FA\sharp \hookrightarrow \frac{2187}{2048}DO\sharp \hookrightarrow \frac{6561}{4096}SOL\sharp$$

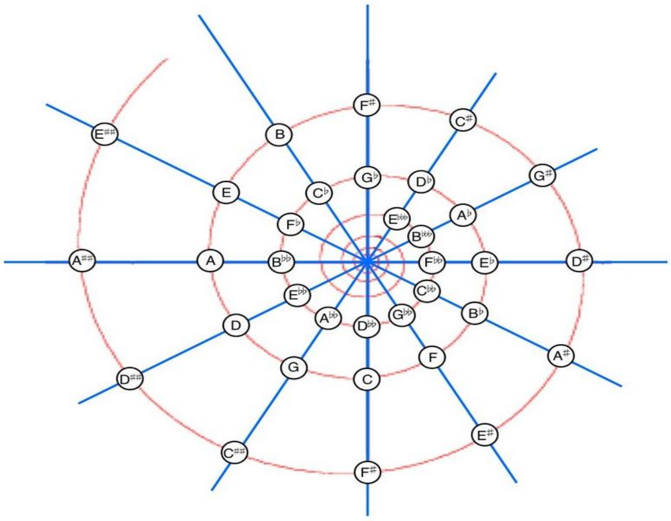
La scala appena mostrata non prevede più toni interi tra una nota ed un'altra, ma solo solo semitoni diatonici e semitoni cromatici.
Inoltre si può così vedere perfettamente la distanza che c'è tra il $LA\flat$ ed il $SOL\sharp$: $\frac{6561}{4096} \cdot \frac{81}{128} \approx 1,01364$, ossia un comma pitagorico.

Da un punto di vista pratico, il comma pitagorico implica che nella costruzione di una scala cromatica si debba scegliere uno dei due elementi di una coppia enarmonica da scartare, per evitare di formare forti dissonanze all'interno di una scala[5].

Questa scelta operativa dà origine al fenomeno della *spirale delle quinte*, che è in sostanza una successione di note dove ognuna di queste dista dalla successiva una quinta giusta e non si chiude mai.
Per essere chiari, se anziché essere una spirale, questo gruppo[6] di intervalli fosse un cerchio (cioè chiuso), allora $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ con $n_1 \neq n_2$ tali che $r_{n_1} = r_{n_2}$.
Come già mostrato, però, questa uguaglianza implica $3^N = 2^{K-N} \lightning$

[5]Ovviamente una scelta del genere limita la dissonanza della scala, ma al contempo anche l'armonia generale viene intaccata, dato che vengono così a mancare degli intervalli consonanti.

[6]L'uso del termine verrà giustificato successivamente



3.3 Temperamento Naturale

Nel 1558 il teorico musicale Gioseffo Zarlino riprese in mano la struttura musicale dei pitagorici e, seguendo lo stesso schema costruttivo, aggiunse ai rapporti di base di ottava e di quinta, anche quelli di *terza maggiore* 5:4 e di *terza minore* 6:5. Il temperamento naturale si può costruire prendendo un'armonica fondamentale ν e un certo numero di suoi multipli interi e sottomultipli:
$\nu, 2\nu, 3\nu, 4\nu, 5\nu, \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{3}\nu, \frac{1}{4}\nu, \frac{1}{5}\nu$
da ricondurre all'ottava di riferimento.
Per esempio, si avranno così i rapporti:

- 1:1 per le 2^k-esime armoniche con $k \in \mathbb{Z}$
- 3:2 per le $3 \cdot 2^k$-esime armoniche con $k \in \mathbb{Z}$
- 5:4 per le $5 \cdot 2^k$-esime armoniche con $k \in \mathbb{Z}$

Conosciamo già i rapporti di ottava, di quinta e di quarta, ma in questo temperamento vediamo comparire anche le terze, prese come rapporti di base, e le seste (la *sesta maggiore* 5:3 e la *sesta minore* 8:5).

Possiamo registrare una consonanza tra i nuovi oggetti introdotti da Zarlino, precisamente: tra la terza maggiore e minore ($\frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{2}$), tra la terza maggiore e la sesta minore ($\frac{5}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{2}{1}$) e tra la terza minore e la sesta maggiore ($\frac{6}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{2}{1}$).

Come fatto col temperamento pitagorico, riusciamo con queste regole a trarre una prima scala diatonica:

NOTE	DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO
PITAGORICA	1:1	9:8	81:64	4:3	3:2	27:16	243:128	2:1
NATURALE	1:1	9:8	5:4	4:3	3:2	5:3	15:8	2:1

Gli intervalli presenti tra due note successive questa volta sono tre:

Tono maggiore: T= 9:8

Tono minore: T'=10:9

Semitono diatonico: S=16:5

Questa scala presenta una discrepanza evidente con la scala pitagorica, visibile ad esempio osservando il rapporto tra il RE ed il LA che non distano più una quinta giusta, ma sono in rapporto di 40:27. Il rapporto tra la quinta giusta e questo nuovo rapporto misura $\frac{3}{2} \cdot \frac{27}{40} = \frac{81}{80}$ ed è chiamato **comma sintonico**.

Se da un lato dunque il temperamento naturale perfezione l'armonia di alcuni accordi, compromette quella esistente nel temperamento pitagorico tra altri accordi della stessa ottava.

Ora, moltiplicando gli intervalli della scola diatonica per il loro minimo comune multiplo (m.c.m.(2,3,4,8)=24) otteniamo questo schema:

- DO: $24 = 2^3 \cdot 3$
- RE: $27 = 3^3$
- MI: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
- FA: $32 = 2^5$
- SOL: $36 = 2^2 \cdot 3^2$
- LA: $40 = 2^3 \cdot 5$
- SI: $45 = 3^2 \cdot 5$

Si osserva allora che il temperamento naturale si può descrivere utilizzando solamente i 3 numeri primi 2,3, e 5.
L'intera scala cromatica si può costruire moltiplicando per 5 gli intervalli che caratterizzano le note : RE, MI, LA, SI e riportandole poi all'ottava di partenza moltiplicando opportunamente il denominatore, come fatto per la scala pitagorica. Si troveranno così il $FA\sharp$, il $SOL\sharp$, il $DO\sharp$ ed il $RE\sharp$. Ad esempio, moltiplicando per 5 il Re a $9/8$ si otterrà l'intervallo $45/8$ che riportato indietro di 2 ottave restituirà il $FA\sharp$ a $45/32$. Infine applicando lo stesso procedimento al $FA\sharp$ si arriverà al $LA\sharp$, ultima nota mancante per comporre la scala cromatica naturale, definita dagli intervalli:

$$\frac{1}{1}, \frac{25}{24}, \frac{9}{8}, \frac{75}{64}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{45}{32}, \frac{3}{2}, \frac{25}{16}, \frac{5}{3}, \frac{225}{128}, \frac{15}{8}, \frac{2}{1}.$$

3.3.1 Temperamenti naturali e teoria dei gruppi

Definizione 1. Si definisce **Gruppo** la coppia $(G, *)$, dove G è un insieme e $*$ un'operazione binaria tra gli elementi di G tale che:

- $\forall a, b, c \in G$ vale $(a * b) * c = a * (b * c)$
- $\exists e \in G$ tale che $\forall a \in G$ $a * e = e * a = a$
- $\forall a \in G$ $\exists b \in G$ tale che $a * b = b * a = e$

Inoltre, se $\forall a, b \in G$ $a * b = b * a$ allora il gruppo si dice **Abeliano** (oppure *commutativo*).

Per come si è costruita la scala pitagorica, non ci sarà difficile identificare la totalità delle sue note con l'insieme $P_2 := \{2^p \cdot (\frac{3}{2})^q | p, q \in \mathbb{Z}\}$.
Allo stesso modo, $P_3 := \{2^p \cdot (\frac{3}{2})^q \cdot (\frac{5}{4})^r | p, q, r \in \mathbb{Z}\}$ sarà l'insieme delle note generate secondo il temperamento naturale.
Ebbene, si può provare immediatamente che questi due insiemi, con l'operazione di prodotto, sono entrambi gruppi abeliani. Più in generale, è un gruppo abeliano con l'operazione di prodotto l'insieme $P_n := \{2^{q_1} \cdot (\frac{3}{2})^{q_2} \cdot (\frac{5}{4})^{q_3} \cdot \ldots (\frac{p_n}{p_n - 1})^{q_n} | q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n \in \mathbb{Z}$ e p_n è l'n-esimo numero primo$\}$.
Si chiama Temperamento naturale di ordine n il temperamento identificato dal gruppo $(P_n, \cdot)$. Il temperamento pitagorico risulta così essere il temperamento naturale di ordine 2, mentre il temperamento naturale introdotto da Zarlino sarà quello di ordine 3.

Definizione 2. Siano $(X, *)$ e $(Y, \circ)$ due gruppi.
Si chiama omomorfismo tra X e Y un'applicazione $\phi : X \to Y$ tale che:
$\forall a, b \in X$ $\phi(a * b) = \phi(a) \circ \phi(b)$.
Un omomorifmo biettivo si chiama **isomorfismo**.

Consideriamo ora il gruppo additivo $(\mathbb{Z}^3, +)$, e l'applicazione $\phi : P_3 \to \mathbb{Z}^3$ tale che $2^p \cdot (\frac{3}{2})^q \cdot (\frac{5}{4})^r \mapsto (p, q, r)$.

Siano $x_1 = 2^{p_1} \cdot (\frac{3}{2})^{q_1} \cdot (\frac{5}{4})^{r_1}$ e $x_2 = 2^{p_2} \cdot (\frac{3}{2})^{q_2} \cdot (\frac{5}{4})^{r_2} \in P_3$.

Risulta:

$\phi(x_1 \cdot x_2) = \phi(2^{p_1} \cdot (\frac{3}{2})^{q_1} \cdot (\frac{5}{4})^{r_1} \cdot 2^{p_2} \cdot (\frac{3}{2})^{q_2} \cdot (\frac{5}{4})^{r_2}) = \phi(2^{p_1+p_2} \cdot (\frac{3}{2})^{q_1+q_2} \cdot (\frac{5}{4})^{r_1+r_2}) =$
$(p_1 + p_2, q_1 + q_2, r_1 + r_2) = (p_1, q_1, r_1) + (p_2, q_2, r_2) = \phi(x_1) + \phi(x_2)$.

Cioè ϕ è un omomorfismo. Inoltre, si vede subito che

$$\phi(2^p \cdot (\frac{3}{2})^q \cdot (\frac{5}{4})^r) = (0, 0, 0) \iff p = q = r = 0 \iff x = 1$$

ma allora al nucleo di ϕ appartiene solo l'elemento neutro $\Rightarrow$ ϕ è biettiva.

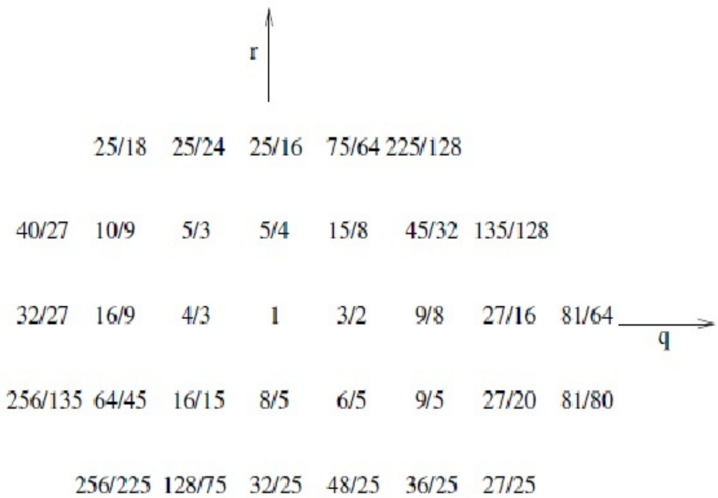
Restringiamoci ora sulla proiezione $\pi : P_3 \to \mathbb{Z}^2$ tale che
$2^p \cdot (\frac{3}{2})^q \cdot (\frac{5}{4})^r \mapsto (q, r)$.
Chiaramente π è ancora un omomorfismo, ma questa applicazione stabilisce una relazione di equivalenza tra certi elementi di P_3, infatti presi x_1 e x_2 come sopra, si avrà:
$\pi(x_1) = \pi(x_2) \iff q_1 = q_2$ e $r_1 = r_2$.

Diremo che due elementi che soddisfano tale relazione appartengono alla stessa *classe di equivalenza.*
Dato un generico $x = 2^p \cdot (\frac{3}{2})^q \cdot (\frac{5}{4})^r \in P_3$, ognuna di queste classi di equivalenza si può rappresentare come $[x] := \{y = 2^{p_y} \cdot (\frac{3}{2})^{q_y} \cdot (\frac{5}{4})^{r_y} \in P_3 | q_y = q \text{ e } r_y = r\}$.

Si intuisce subito che il Nucleo di π è composto da tutti gli intervalli di ottava, dato che $\pi(2^p) = (0, 0) \forall p \in \mathbb{Z} \Rightarrow \pi(P_1) = \{(0, 0)\}$, e questo si traduce nel fatto che ogni classe di equivalenza ha uno ed un solo rappresentante all'interno di ogni intervallo di ottava.

Prendiamo adesso in esame il *gruppo quoziente* $\mathcal{P} := P_3/P_2$, che si può identificare con $\mathcal{P} = \{x \cdot P_1 | x \in P_3\}$.

Questo insieme si può immaginare come una griglia sul piano cartesiano, in cui compaiono tutte le classi di equivalenza all'interno di un ottava, le quali si possono ottenere applicando di volta in volta una quinta o una terza maggiore:



Da questa struttura si può ben vedere come, analogamente al temperamento pitagorico, nemmeno il temperamento naturale di ordine 3 sia chiuso rispetto ai propri intervalli fondamentali. In generale, estendendo questo ragionamento, si proverà che nessun temperamento naturale può essere chiuso. Pertanto queste strutture basate su rapporti razionali fissi daranno sempre origine a commi e scismi (che sono semplicemente combinazioni di commi); ossia, questi temperamenti ammettono sempre una discrepanza tra il concetto di scala cromatica, ossia la struttura delle note, ed il concetto di scala armonica, ossia la struttura delle frequenze assegnate alle note.

3.4 Altri Temperamenti

Come abbiamo visto, il temperamento naturale, seppure risulti tendenzialmente meglio intonato rispetto a quello pitagorico nella tonalità di DO, non prevede solo quinte giuste, il che genera un problema pratico per tutti gli strumenti ad intonazione fissa (come il pianoforte o la chitarra). Questo si traduce nel fatto che questi strumenti, grazie al temperamento naturale, suonino meglio nella tonalità di DO, ma necessitino di essere riaccordati ogni volta che si debba cambiare tonalità.

Per ovviare a questo problema nacquero negli anni alcuni temperamenti alternativi: come il *temperamento mesotonico*, con cui si correggono le quinte stonate, rendendole il più intonate possibili alle terze maggiori, che rimangono invece fisse, oppure i vari *temperamenti irregolari*, i quali permettono, a scapito della struttura matematica, di suonare in più tonalità con una stessa accordatura.

3.5 Temperamento Equabile

Già nel IV secolo a.C Aristosseno di Taranto propose un modello alternativo al temperamento pitagorico che prenderà il nome di **Temperamento Equabile**. Questo temperamento prevede la suddivisione dell'ottava in intervalli della stessa ampiezza. Come abbiamo già ripetuto più volte, citando la proposizione di Archita, questa operazione richiede l'utilizzo di numeri irrazionali.
Per via dei problemi estetici (e filosofici se pensiamo all'importanza che ha rivestito la numerologia nella Grecia Antica fino al Rinascimento) questo modello fu reintrodotto solo nel XVI secolo d.C. ed ebbe un'affermazione molto graduale.
Nel sistema musicale occidentale, come si può osservare ricordando le scale cromatiche viste nei capitoli precedenti, il numero di intervalli che si preferisce proporre all'interno di un'ottava è 12. Per costruire una scala equabile a 12 toni basta tenere presente che l'ampiezza α degli intervalli dovrà rispettare la relazione $\alpha^{12} = 2 : 1 \Rightarrow \alpha = 2^{\frac{1}{12}}$. Si può così costruire direttamente la scala cromatica:

NOTE	DO	$DO\sharp$	RE	$RE\sharp$	MI	...	SI	DO
Ampiezza	1	$2^{\frac{1}{12}}$	$2^{\frac{2}{12}}$	$2^{\frac{3}{12}}$	$2^{\frac{4}{12}}$	...	$2^{\frac{11}{12}}$	2

Questo sistema adatta l'accordatura a tutte le tonalità, ma chiaramente perde il carattere di consonanza per come lo intendevano i pitagorici (rapporti razionali con denominatori appartenenti alla tetrade 1, 2, 3, 4). Inoltre, in termini pratici, per l'accordatura degli strumenti sarà sempre necessario approssimare gli intervalli.
Per semplicità, risulta comodo utilizzare anziché il rapporto tra le frequenze, il logaritmo di tale rapporto. Così facendo per misurare la consonanza tra due note, invece di dividere i rapporti delle rispettive frequenze, come fatto per i temperamenti precedenti, sarà sufficiente calcolare la somma dei logaritmi.

3.6 La consonanza

Nel prossimo capitolo cercheremo di mettere a confronto il temperamento equabile con i temperamenti antecedenti ed in particolare di analizzare al modo dei primi teorici della musica una scala composta quasi esclusivamente da numeri irrazionali.

Anzitutto spieghiamo perché il modello teorico in uso al tempo dei greci è valido e valorizzabile anche oggi. Una prima spiegazione si può trovare nei *Discorsi intorno a due nuove scienze* di G. Galilei. Quando all'orecchio arrivano due note il cui rapporto di frequenza è esprimibile per mezzo di una frazione, la sensazione di consonanza è relativa alla regolarità con cui le onde che identificano le note recuperano la sincronia. Dato per vero questo fatto, si capisce perché un rapporto con numeri piccoli (più precisamente, è necessario che il denominatore sia piccolo) venga percepito come più consonante rispetto ad uno con un rapporto caratterizzato da numeri grandi. Per essere più chiari, riportiamo l'esempio dello stesso Galilei; prendiamo due pendoli e facciamoli oscillare in modo che terminino l'oscillazione rispettivamente in 2 e 3 secondi. Quello che succede è che dopo 6 secondi (il minimo comunque multiplo del periodo) i due pendoli saranno tornati in sincronia. Se il rapporto di frequenze fosse invece espresso da numeri più grandi, la sincronia verrebbe recuperata dopo un maggiore lasso di tempo e quindi sarebbe difficile per l'occhio percepire la regolarità (ovvero la consonanza nell'ottica di Galilei) del fenomeno oscillatorio nel suo complesso. La stessa osservazione si può fare per le onde acustiche.

Questa modellizzazione del fenomeno acustico di consonanza risulta tanto suggestiva quanto semplicistica. Proviamo ad ordinare alcune obiezioni a Galilei e cerchiamo di collocare questo modello in un contesto di conoscenze scientifiche (acustiche e anatomiche) più moderno.

- La consonanza dipende in generale, oltre che dal rapporto tra le frequenze, anche dal valore assoluto delle frequenze stesse. In termini pratici questo significa che due note nello stesso rapporto non mantengono lo stesso grado di consonanza se rilevate in due ottave di riferimento differenti[7].

- Per Galilei il suono è caratterizzato da un'unica frequenza (quello che noi oggi chiamiamo suono puro), mentre noi sappiamo che in generale quella che avvertiamo è una sovrapposizione di onde armoniche.

- Nel contesto del temperamento equabile non si ha a che fare con rapporti razionali.

Per rispondere agli interrogativi proposti riprendiamo il lavoro di H. von Helmholtz.
Il motivo per cui si percepiscono differentemente due rapporti di frequenza in base al modulo delle frequenze stesse è dovuto al fatto che, spostandosi dai suoni acuti verso quelli più grevi, le fibre nervose che vengono coinvolte sono sempre più vicine a parità di rapporto, e questo genera confusione nell'elaborazione cerebrale del suono. Come abbiamo già spiegato nel primo capitolo, secondo Helmholtz c'è una relazione molto forte tra dissonanza e battimenti; più precisamente si suppone che la dissonanza sia tanto più marcata quanto più le armoniche parziali generino dei battimenti.

A livello sperimentale possiamo dire che la teoria di Galilei non sia poi così lontana dalla realtà, visto che note con un rapporto di frequenza piccolo, ad esempio come il DO centrale ed il SOL (a distanza di una quinta giusta), hanno coincidenze abbastanza frequenti tra le armoniche parziali. Inoltre, dato che

[7]Se necessario, si guardi nuovamente il capitolo 2.4

la distinzione di due suoni è possibile solo se la distanza logaritmica tra le due frequenze è rilevante [8], possiamo approssimare i nostri intervalli irrazionali con dei rapporti razionali con una certa tranquillità.

[8]Molto difficile dare delle stime precise visto che la percezione del suono è una caratteristica fortemente soggettiva, in quanto dipendente dalla sensibilità acustica dell'ascoltatore. Inoltre, ale misura può dipendere sia dall'ordine di grandezza con cui si sta lavorando (in termini di Hertz), sia dal fatto che le due note vengano suonate contemporaneamente o una di seguito all'altra.

Capitolo 4

Studio del temperamento equabile

A questo punto, accettata l'idea di suddividere l'ottava in intervalli uguali per eliminare il problema del comma, cercheremo di fondere la struttura del temperamento equabile al concetto galileiano di consonanza, per poi spostarci dalla canonica scala cromatica di 12 note, allo studio dei temperamenti equabili con un diverso numero degli intervalli. Affinché ciò sia possibile, abbiamo innanzitutto bisogno di approssimare le frequenze ricavate dal suddetto temperamento con dei rapporti razionali. In seguito definiremo dei parametri di consonanza e di dissonanza che ci permetteranno di analizzare qualitativamente le diverse scale al variare degli intervalli.

4.1 Approssimazione di intervalli irrazionali

Per approssimare gli intervalli con dei numeri razionali abbiamo costruito un algoritmo[1] che per ogni frequenza $t(k)$, scelta a priori una tolleranza d, sia in grado di calcolare il razionale $p(k)/q(k)$, dove:

- $q(k) = min\{q \in \mathbb{Z}^+ | \exists p : |\log_2 t(k) - \log_2 \frac{p}{q}| < d\}$
- $p(k) = argmin\{p \in \mathbb{Z}^+ | \, |\log_2 t(k) - \log_2 \frac{p}{q(k)}|\}$

[1] Che si potrà trovare, insieme a tutti gli altri algoritmi, nell'Appendice B.

Dove il parametro di tolleranza d potrà essere modificato in base alle necessità, ma sarà sempre un numero del tipo $\frac{1}{n \cdot K}$ con $n \in \mathbb{N}$ e K="numero degli intervalli". Poiché dunque la tolleranza dipende da K, denoteremo $d = d_K$

In questo modo $\frac{p(k)}{q(k)}$ è il razionale con il più piccolo denominatore possibile che meglio approssima (logaritmicamente) la frequenza $t(k)$ nell'intervallo $[t(k) - d_K, t(k) + d_K]$. [2]

Ad esempio, specificato il parametro di tolleranza $d = 1/36$ (cioè $d_{12} = \frac{1}{3 \cdot 12}$), il temperamento naturale con 12 note viene così approssimato:

$DO = \ 1$

$DO\sharp \simeq \ 16/15$

$RE \simeq \ 9/8$

$RE\sharp \simeq \ 6/5$

$MI \simeq \ 5/4$

$FA \simeq \ 4/3$

$FA\sharp \simeq \ 17/12$

$SOL \simeq \ 3/2$

$SOL\sharp \simeq \ 8/5$

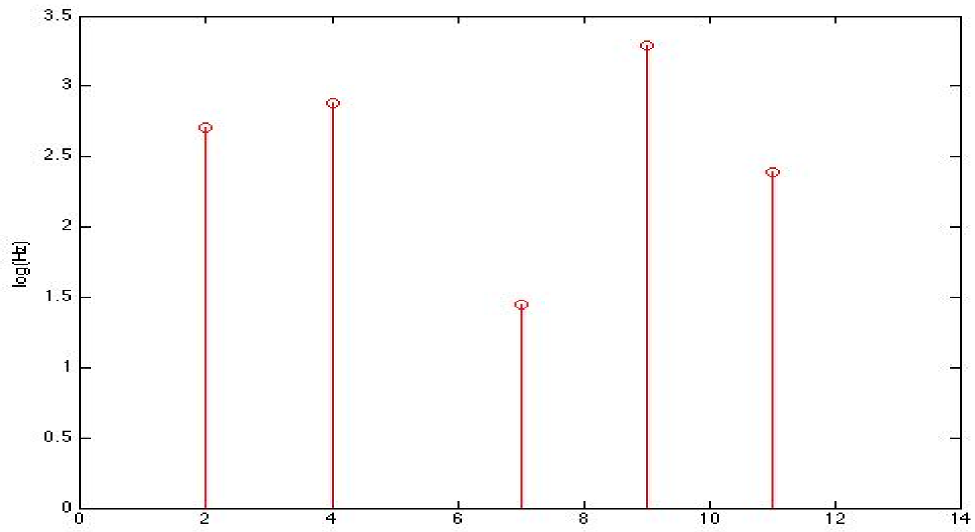
$LA \simeq \ 5/3$

$LA\sharp \simeq \ 16/9$

$SI \simeq \ 15/8$

[2]Questo metodo di approssimazione potrebbe sembrare ingenuo, poiché esistono altri metodi computazionalmente più veloci e più precisi in termini assoluti; noi però dobbiamo tener presente che in questo contesto la precisione di approssimazione che a noi interessa è relativa solo all'ampiezza degli intervalli ed una precisione eccessiva sarebbe più deleteria che d'aiuto.

Confrontando questi rapporti con quelli della scala a 12 note del temperamento naturale, notiamo che molti intervalli vengono approssimati allo stesso modo; in particolare, con questa approssimazione del temperamento equabile non si perdono le consonanze più importanti, come il rapporto di quinta o quello di quarta.
Il grafico qua sotto mostra la differenza in termini numerici degli intervalli del temperamento naturale con quelli del temperamento equabile[3] :



4.2 Misura della consonanza

Come abbiamo cercato di spiegare nel capitolo precedente, il temperamento equabile sacrifica in parte l'armonia tra gli intervalli fondamentali del temperamento naturale, ma guadagna in termini di armonia generale e cancella il problema legato al comma e quindi alle coppie enarmoniche.
Si può pensare di recuperare le consonanze del temperamento naturale?

[3]La prima nota è il DO 261.62 Hz

A priori non siamo in grado di rispondere a questa domanda, ma viene spontanea un'idea per cercare una soluzione: applicando lo stesso metodo costruttivo del temperamento equabile, anziché limitarsi a considerare 12 note[4], costruire ed analizzare dei temperamenti con un diverso numero di intervalli. Mantenendo il rapporto di ottava uguale a 2:1, basterà avere intervalli dell'ampiezza $\alpha = 2^{\frac{1}{n}}$ se si desiderano n intervalli.

A questo punto utilizzeremo lo stesso metodo visto in precedenza per approssimare gli intervalli a rapporti razionali. Come limite di tolleranza, d'ora in avanti, utilizzeremo sempre $d_K = \frac{1}{3 \cdot K}$.

Ancor prima di iniziare lo studio vero e proprio, dichiariamo che i rapporti che definiremo consonanti saranno tutti quelli che hanno come denominatore un numero appartenente all'insieme $\{2, 3, 4, 5, 6\}$[5]. Dunque, in prima analisi, per avere un'idea di quali potrebbero essere le scale più interessanti ai fini del nostro studio, andiamo a costruire una tabella che per ogni scala indichi quanti e quali degli intervalli a noi utili sono presenti.

A questo scopo è stato costruito uno script che, dato un vettore "C" contenente i rapporti da verificare (che sono 11) e una matrice "Lista" nulla di dimensione $N \times 11$, man mano che le scale vengono formate e gli intervalli approssimati con dei numeri razionali, controlla "ordinatamente" se gli elementi del vettore sono presenti nella scala. Precisamente, se siamo alla scala j-esima e la i-esima frazione di C è presente, allo 0 di posto $j \times i$ verrà sostituito un 1, e così via...

---

[4] Retaggio culturale dell'Occidente

[5] I rapporti $1/1$ e $2/1$ sono chiaramente presenti in ogni scala, essendo l'ottava l'intervallo di base da cui partiamo, pertanto si può decidere di ometterli.
Inoltre, la scelta di fermarci al numero 6 ci avvicina anche all'idea di consonanza di Zarlino, il quale nelle *Istitutioni* afferma che nel numero *senario* sono contenute tutte le consonanze possibili

Il responso della macchina sarà una matrice di questo tipo:

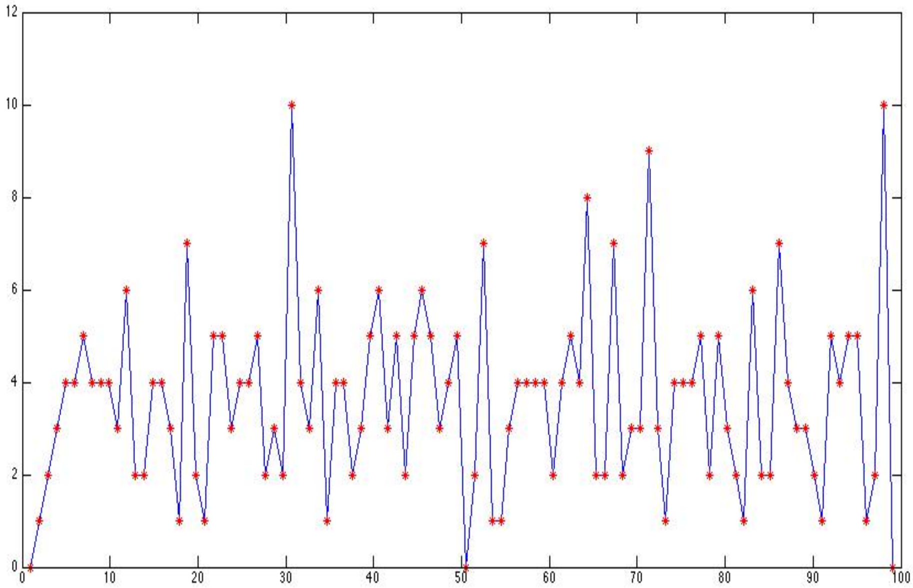
Intervalli	3/2	4/3	5/3	5/4	7/4	6/5	7/5	8/5	9/5	7/6	11/6
N=1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
N=2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
N=3	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
⋮											
N=23	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
N=24	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
N=25	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
⋮											
N=30	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
N=31	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
N=32	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1
⋮											
N=96	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
N=97	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
N=98	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
⋮											

La scala che stiamo cercando dovrà avere quanti più 1 possibile nella propria riga, con priorità per le prime colonne [6].

La prima riga che meglio si avvicina a quanto richiesto è la 31°, cioè la scala equabile con 31 intervalli, dove l'unico dei rapporti che manca è 9/5. Altrettanto buona è la 98° scala, che però avendo così tanti intervalli avrà anche una percentuale molto maggiore di accordi dissonanti.

[6] Ricordiamo che il rapporto 3/2 è il più consonante dopo l'ottava; seguono 4/3, 5/3 etc...

Per avere un'idea più precisa di questo risultato, andiamo anche a costruire un grafico che mostri il numero totali dei rapporti consonanti all'interno delle varie scale equabili, trascurando stavolta l'aspetto qualitativo dei razionali approssimanti:



Possiamo vedere che, con le nostre approssimazioni, l'unica altra scala che ha 10 consonanze, oltre alla 31° è la 98° e che nessuna riesce a contenerle tutte.

4.3 Parametro di dissonanza

A questo punto cerchiamo un'altro parametro per misurare la bontà di un temperamento andando a definire un parametro di dissonanza. Per farlo dovremo tenere conto del denominatore dei vari rapporti (che è il vero discriminante tra rapporti consonanti e dissonanti) e dell'errore di approssimazione.

Presa dunque una scala andremo a chiamare *dissonanza media* del temperamento con N intervalli il numero risultante dalla formula:

$$\frac{\sum_{k=1}^{K} |\log_2(t(k)) - \log_2(\frac{p(k)}{q(k)})| \cdot q(k)^{-\alpha}}{\frac{d_K}{2} \cdot \sum_{k=1}^{K} q(k)^{-\alpha}}$$

dove $d_K = \frac{1}{3 \cdot K}$ è il parametro di tolleranza della scala con K intervalli, $t(k)$ è la frequenza della k-esima nota da approssimare e $\frac{p(k)}{q(k)}$ è la frazione approssimante.

Una formula di questo tipo non ha valore in termini assoluti e risulta poco indicativa se il confronto viene fatto tra poche scale.

D'altro canto, se volessimo confrontare dei temperamenti molto differenti tra loro per numero di note, dovremmo tenere presente che l'errore di approssimazione sarà anch'esso molto differente, in quanto il parametro di tolleranza della stima razionale di ogni scala dipende proprio dal numero degli intervalli in cui si suddivide l'ottava[7]. Per questa ragione è necessario normalizzare la somma $\sum_{k=1}^{K} |\log_2(t(k)) - \log_2(\frac{p(k)}{q(k)})|$ confrontandola con la massima discrepanza, cioè $\frac{d_K}{2}$.

[7]Si veda 4.1.

Prendendo $\alpha = 0$ ci troviamo di fronte ad un grafico di questo tipo:

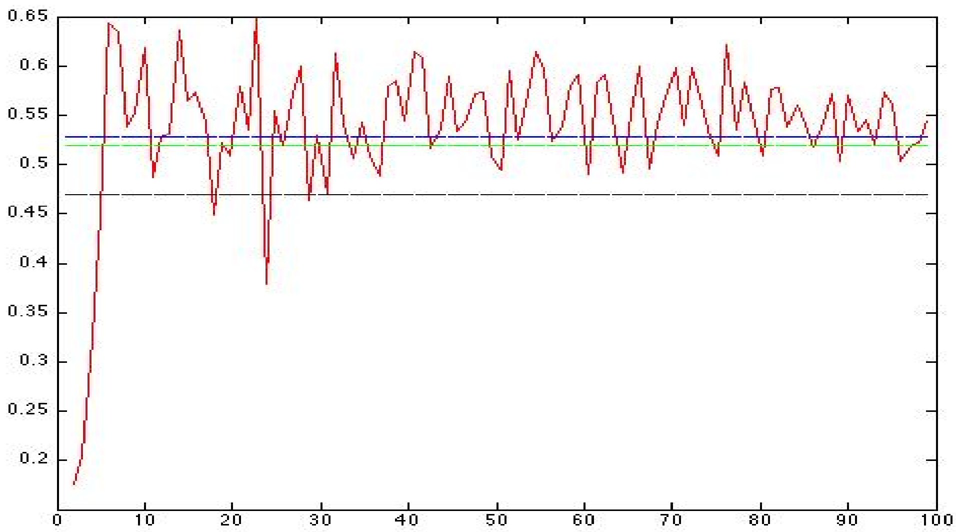


Figura 4.1: Legenda:
— = 12 intervalli
— = 31 intervalli
— = 98 intervalli

Con questo grafico, data la scelta di α, stiamo misurando la vera e propria media dell'errore di approssimazione. In questo senso vediamo che la scala equabile a 31 note è, tra quelle prese in considerazione nel primo studio, quella che si comporta sensibilmente meglio.

Provando $\alpha = \frac{1}{5}$ vediamo:

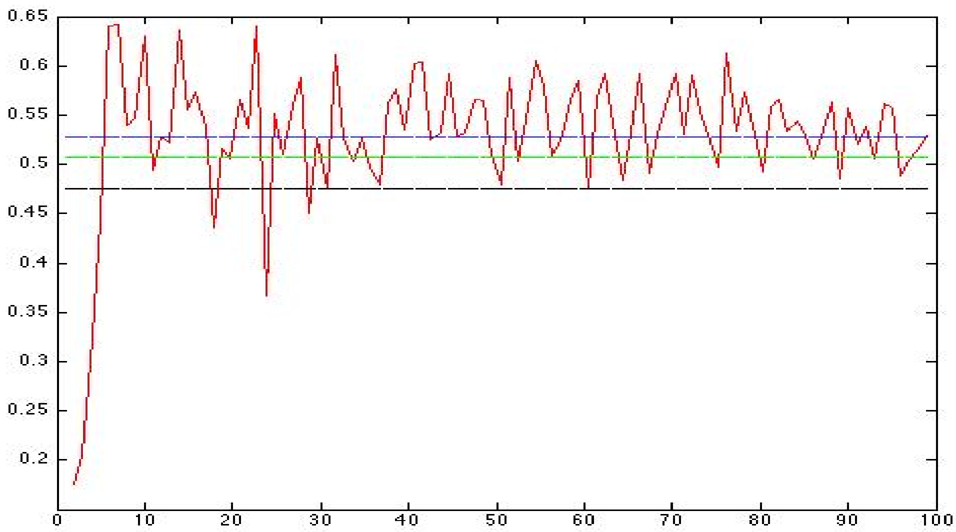


Figura 4.2: Legenda:
— = 12 intervalli
— = 31 intervalli
— = 98 intervalli

In questo caso, rispetto al precedente, stiamo prendendo un α che dà più peso ai razionali con denominatore basso, anche se non tanto quanto nel caso presentato più sotto. Il comportamento del grafico, anche in questo caso, ci induce a pensare alla scala a 31 note come una delle migliori scelte possibili.

Ad attirare l'attenzione più di tutti qui è la scala con 24 note, che manifesta un picco verticale piuttosto marcato. Andando a vedere i risultati precedenti, però, ci accorgiamo che questa scala approssima solo 3 rapporti consonanti (che sono per la precisione 3/2, 4/3 e 11/6).

Se scegliamo invece $\alpha = 5$, il grafico si presenta così:

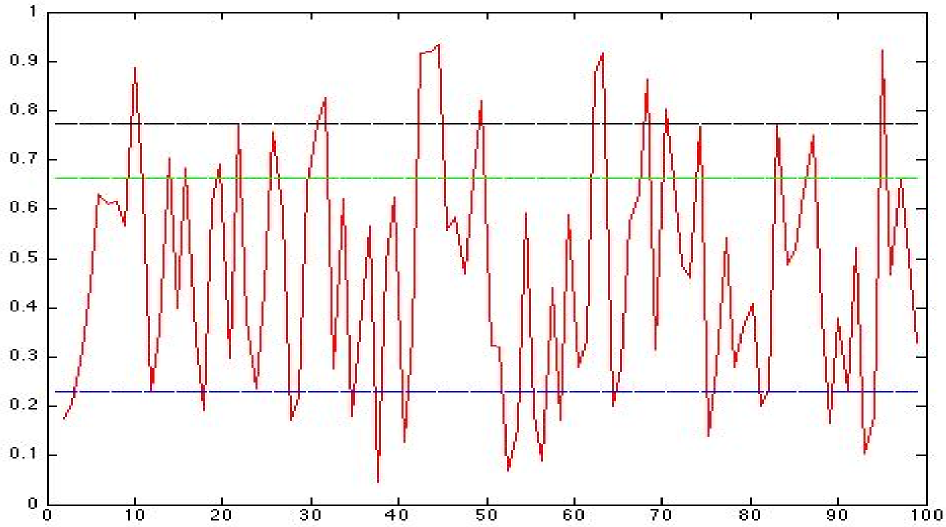


Figura 4.3: Legenda:
— = 12 intervalli
— = 31 intervalli
— = 98 intervalli

Con quest'ultimo grafico stiamo verificando quanto siano bene approssimati gli intervalli con denominatore basso, ossia quelli che secondo noi sono più consonanti. Ciò che possiamo dedurre è che, in questo caso, la scala a 31 note non si comporta particolarmente bene, come neanche quella che di note ne ha 98. Decisamente migliore è invece l'approssimazione della scala equabile "classica" di 12 intervalli.

In questi grafici non ha senso cercare la scala migliore, ovvero quella con dissonanza media più bassa, in quanto questo parametro di misurazione, come già detto, è poco preciso, ma può comunque darci un'idea della qualità del temperamento. In questi termini, possiamo riassumere quanto visto dicendo che, mediamente, la scala equabile a 31 note potrebbe essere una buona alternativa ai temperamenti storicamente più utilizzati, malgrado non riesca a raggiungere la precisione, in termini di consonanza, del temperamento equabile a 12 note.

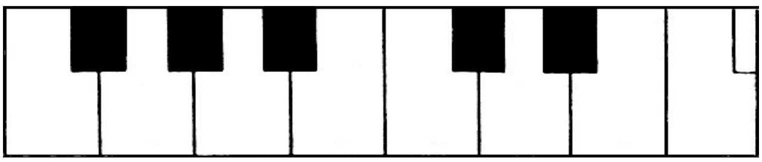
4.4 Nicola Vicentino e l'archicembalo

Come dichiarato nell'introduzione, lo studio di differenti scale musicali, e quindi i risultati presentati nella tesi, derivano dall'applicazione di nozioni matematiche e strumenti informatici alla teoria musicale senza l'ausilio di alcun supporto strumentale. Soprattutto, questo studio è stato affrontato per osservare alcune problematiche legate all'ambito più astratto della teoria musicale, ovvero senza alcuna pretesa o ambizione di risultato per quanto riguarda l'aspetto pratico e dunque l'applicabilità dei risultati proposti.

Detto questo, si potrà capire l'importanza che ricopre la figura di Nicola Vicentino (Vicenza 1511 - Roma 1572) nel contesto di questo studio; teorico musicale e compositore, egli, con circa cinque secoli di anticipo, raggiunse il nostro stesso risultato, seppure in modo diametralmente opposto.

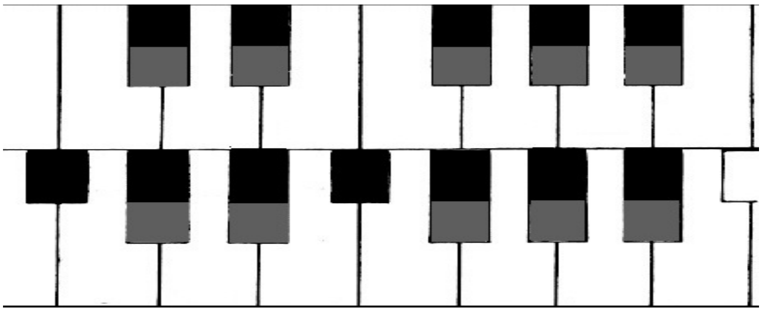
Contemporaneo del già citato G. Zarlino, Nicola Vicentino fu un vero e proprio eretico della teoria musicale; in contrasto con la concezione classica dell'intonazione, egli ideò un clavicembalo che permetteva di avere a disposizione sulla tastiera un numero molto maggiore di intervalli consonanti rispetto agli strumenti del suo tempo (ma anche rispetto a quelli in uso oggi).

Questo strumento è l' **archicembalo**[8]. L'unico reperto originale: un clavicembalo con due tastiere sovrapposte accordate in modo che una risulti più crescente rispetto all'altra, secondo il sistema di temperamento mesotonico. Il problema del clavicembalo classico è legato al fatto che il temperamento mesotonico ha come riferimento la consonanza con la *terza maggiore*, pertanto i tasti neri sono bemolli o diesis e mai utilizzabili in senso enarmonico (che è quello che succede nel temperamento equabile, dove ad esempio il DO diesis coincide con il RE bemolle e così via). Partendo allora dalla configurazione del clavicembalo



il Vicentino aggiunge una seconda tastiera e raddoppia tutti i tasti neri (cioè i semitoni) e aggiunge due tasti neri nella tastiera inferiore.

[8]Un' esemplare di questo strumento si può trovare al *Museo internazionale e biblioteca della musica* di Bologna.



Ogni ottava gode così di 36 tasti, ma dato che 5 tasti neri della tastiera superiore risultano accordati all'unisono con quelli della scala inferiore, di fatto, l'ottava risulta suddivisa in 31 intervalli tutti della stessa ampiezza.

In sostanza si può dire che Nicola Vicentino, abbandonando l'idea di rappresentare gli intervalli musicali per mezzo di rapporti superparticolari, abbia risolto tramite un'invenzione tecnologica un problema che mezzo millennio più tardi noi abbiamo affrontato adattando la teoria classica della musica al più moderno temperamento equabile.

Possiamo chiudere allora questa trattazione con la seguente riflessione.
Per moltissimi anni musica e matematica sono state due discipline saldamente legate tra loro. Col passare del tempo, a causa dei problemi che abbiamo osservato nella struttura matematica insita nei più antichi temperamenti musicali, questo legame è andato indebolendosi. Con Nicola Vicentino ed il suo archicembalo tale relazione sembra addirittura scomparire in favore di un approccio all'armonia puramente sperimentale. Eppure, come possiamo constatare dai risultati presentati in questa tesi, ottenuti secondo una via esclusivamente teorico-matematica, confrontandoli proprio con quelli del Vicentino, ci accorgiamo che musica e matematica rimangono pur sempre inesorabilmente vicine.

Appendice A

Unicità della soluzione della corda vibrante

Dimostrare l'unicità della soluzione per un problema come quello proposto, che è lineare, equivale a dimostrare che l'unica soluzione plausibile con dati iniziali nulli sia proprio la soluzione identicamente nulla. Pertanto cercheremo di dimostrare l'implicazione:

$$\begin{cases} u(x,t=0)=0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t=0)=0 \end{cases} \Rightarrow u(x,t)\equiv 0 \tag{A.0.1}$$

Definiamo anzitutto la funzione $E(t)=\int_0^\ell (u_t^2(x,t)+v^2u_x^2(x,t))dx$ [1].
Date le condizioni iniziali e la regolarità della funzione[2], si ottiene naturalmente $E(0)=\int_0^\ell (u_t^2(x,0)+v^2u_x^2(x,0))dx=0$.
Ora, $E'(t)=2\int_0^\ell (u_t(x,t)u_{tt}(x,t)+v^2u_x(x,t)u_{xt}(x,t))dx$
A questo punto, integrando per parti, si ottiene la relazione:

$$\int_0^\ell u_x(x,t)u_{xt}(x,t))dx=[u_x(x,t)u_t(x,t))]_{x=0}^{x=\ell}-\int_0^\ell u_{xx}(x,t)u_t(x,t))dx$$

[1] Per alleggerire il testo si è scelta la notazione u_t per indicare $\frac{\partial u}{\partial t}$.
[2] Ricordiamo che quantomeno $u\in C^2([0,\ell]\times[0,\infty])$.

Sempre rifacendoci alla regolarità di u, possiamo di dire che:

$u(0,t) = 0 \Rightarrow u_t(0,t) = 0$ e $u(\ell,t) = 0 \Rightarrow u_t(\ell,t) = 0$

da cui segue:

$[u_x(x,t)u_t(x,t))]_{x=0}^{x=\ell} = 0 \Rightarrow \int_0^\ell u_x(x,t)u_{xt}(x,t))dx = -\int_0^\ell u_{xx}(x,t)u_t(x,t))dx$

Ma allora

$E'(t) = 2\int_0^\ell (u_t(x,t)u_{tt}(x,t) - v^2 u_t(x,t)u_{xx}(x,t))dx = 2\int_0^\ell (u_{tt}(x,t) - v^2 u_{xx}(x,t))u_t(x,t)dx.$

Dunque, dato che $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial u^2}(x,t) = 0 \Rightarrow E'(T) = 0.$

In definitiva,

$E'(t) = 0$ e $E(0) = 0 \Rightarrow E(t) \equiv 0 \iff u_t^2(x,t) + v^2 u_x^2(x,t) = 0 \Rightarrow u_x = u_t =$

$0 \Rightarrow u(x,t) \equiv 0.$

Appendice B

Teorema di Archita

Teorema 1. $\nexists\ x \in \mathbb{Q}$, $\nexists\ n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{n+1}{x} = \frac{x}{n}$.

Dimostrazione. Sia per assurdo $x \in \mathbb{Q} \;\Rightarrow \exists\ p, q \in \mathbb{N}$ tali che $MCD(p, q) = 1$ e $x = \frac{p}{q}$.

Dunque, $\frac{n+1}{x} = \frac{x}{n} \;\Leftrightarrow\; n(n+1) = x^2 = \frac{p^2}{q^2} \;\Leftrightarrow p \cdot p = q^2 \cdot n(n+1)$

$\Rightarrow p \mid q^2 \cdot n(n+1)$

Poiché per ipotesi $MCD(p, q) = 1 \;\Rightarrow\; p \nmid q^2 \;\Rightarrow p \mid n(n+1)$.

Cioè $\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $n(n+1) = k \cdot p$.

Ma allora l'equazione diventa $p^2 = q^2 \cdot k \cdot p \;\Rightarrow\; p = q^2 \cdot k$

$\Rightarrow\; q \mid p \;\Rightarrow\; MCD(p, q) \neq 1$ ↯

□

Appendice C

Funzioni e script Matlab

Funzione utilizzata per approssimare gli intervalli con numeri razionali:

```
 function [frazione,p,q] = stima_razionale(num,d)

p=3;
q=2;

while abs(log2(num)-log2(p/q))>d/2
    if p< 2*q-1
        p=p+1;
    else
        q=q+1;
        p=q+1;
    end
end

for k=p:2*q
    if abs(log2(num)-log2(p/q)) > abs(log2(num)-log2((k+1)/q))
        p=p+1;
```

```
    end
end

frazione=rats(p/q);
```

Funzione per generare le scale equabili

```
function T = scala_equabile(N)

T=[261.6256,zeros(1,N-1)];

for k=2:N
    T(k)=T(1)*((2.^(k-1))^(1/N));

end

end
```

Script per identificare quali siano gli intervalli consonanti delle varie scale equabili:

```
N=100
C=[3/2;4/3;5/3;5/4;7/4;6/5;7/5;8/5;9/5;7/6;11/6];
Lista=zeros(N,11);

yy=zeros(1,N);

for K=2:N
```

```
    T=scala_tonale(K);
    for j=2:K
        [frazione,p,q] = stima_razionale(T(j)/T(1),1/(3*K));
        h(j)= p;
        k(j)= q;

    end

    conta=0;
    for n= 1:11
        for m=2:K;
            if C(n) == h(m)/k(m);
                Lista(K,n) = 1;
            end
        end
    end
end
Lista
```

Script per calcolare il numero degli intervalli consonanti

```
N=100

yy=zeros(1,N);

for K=1:N
    T=scala_tonale(K);
    for j=1:K
```

```
        [frazione,p,q] = stima_razionale(T(j)/T(1),1/(3*K));
        h(j)=p;
        k(j)=q;

    end

    conta=0;
    for m= 1:K
        if k(m)<7
            conta = conta + 1;
        end
    end
    Per_Fst_gen=(conta)
    yy(K)=(Per_Fst_gen);
end



xx=linspace(1,N-1,N);
plot(xx,yy, 'r*')
```

Script per calcolare la dissonanza media:

```
N=100
alpha=5
yy=zeros(1,N);

for K=2:N

    T=scala_tonale(K);
    p=zeros(1,K);
```

```
    q=zeros(1,K);


    for j=2:K
        [frazione,h,k] = stima_razionale(T(j)/T(1),1/(3*K));
        p(j)=h;
        q(j)=k;
    end


    s=0;
    t=0;
    for m = 2:K
    s = s + (abs(log2(T(m)/T(1))- log2(p(m)/q(m))))/(q(m)^(-alpha));
    t = t + q(m)^(-alpha);
    end


    Dissonanza = 6*(s*K)/t
    yy(K)=6*(s*K)/t;
end
xx=linspace(1,N-1,N);


figure()
plot(xx,yy,'r-', xx,yy(12), 'b-', xx,yy(31), 'k-')
```

Bibliografia

[1] Stefano Isola, *Temperamenti: matematica e teoria musicale*, manoscritto

[2] Hermann von Helmholtz, *On the sensations of tone as a physiological basis for the theory of music*, Longmans, Green, and Co., 1895

[3] Galileo Galilei, *Discorsi intorno a due nuove scienze*, Leida, 1638

[4] Gioseffo Zarlino, *Istitutioni Harmoniche*, 1558

[5] Gerald B. Folland, *Fourier analysis and its application*, Wadsworth & Brooks/Cole, 1992

[6] Annamaria Montanari, *Appunti del corso Complementi di Analisi*, 2013/2014

[7] Marco Tiella, *La ricostruzione dell'archicembalo di Nicola Vicentino (1555)*, *Strumenti e Musica* 1 e 2, 1980