

ALMA Mater Studiorum
Universita' degli Studi di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Triennale in Astronomia

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Emissione di Compton inverso e applicazioni
astrofisiche

Elaborato Finale

Candidato:

Filippo Matassoni

Relatore:

Prof.: Daniele Dallacasa



Sessione II
Anno Accademico 2013/2014

Indice

1	Trattazione fisica dell'effetto Compton inverso (IC)	2
1.1	Diffusione Thomson e diffusione Compton	2
1.2	IC per una singola interazione	3
1.3	Potenza emessa e spettro dell'IC	4
2	Applicazioni astrofisiche dell'IC	6
2.1	Comptonizzazione	6
2.2	Effetto Sunyaev-Zel'dovich (S-Z)	10
2.3	Synchrotron-self Compton (SCC)	12

Introduzione

Le modalità di interazione tra particelle libere (ad esempio gli elettroni) e i fotoni dipendono dal valore dell'energia delle parti interagenti. Distinguiamo tre casi: nel primo l'elettrone viene assunto fermo e il fotone scarsamente energetico, si parlerà allora di *diffusione Thomson*, in cui l'elettrone assorbe il fotone incidente e lo riemette alla stessa frequenza. Il secondo caso è simile al primo con la differenza che il fotone ha un'energia comparabile con l'energia a riposo dell'elettrone (nello specifico fotoni X e γ). In questo caso il fotone trasferisce parte della sua energia all'elettrone che viene messo in moto; il fotone viene pertanto spostato a energie (ovvero frequenze) minori. Questo fenomeno è chiamato *effetto Compton*. Nel terzo caso l'elettrone non viene più considerato fermo, ma in moto con energie superiori a quelle del fotone; si avrà quindi un trasferimento di energia dall'elettrone al fotone che verrà spostato a frequenze maggiori. Questo fenomeno è denominato *Compton inverso (IC)* ed è il processo radiativo che verrà approfondito nella seguente trattazione. L'IC ricopre un ruolo di fondamentale importanza in diversi campi dell'astrofisica, per esempio nella determinazione delle perdite di energia di una radiosorgente nella quale concorre con l'emissione di Sincrotrone, o nello studio dei getti di plasma emessi dai nuclei galattici attivi. In astrofisica tuttavia l'effetto Compton e IC non presentano una separazione netta, per esempio quando una popolazione di fotoni attraversa una regione occupata da elettroni liberi non relativistici all'equilibrio termico, entrambi i processi entrano in gioco. La *Comptonizzazione* descrive come lo spettro fotonico viene modificato a causa delle interazioni col plasma all'equilibrio termico. Esempi rilevanti di Comptonizzazione sono: l'*effetto Sunyaev-Zeldovich* che si osserva quando la radiazione cosmica di fondo (CMBR) attraversa una regione di gas caldo ionizzato tipica degli ammassi di galassie, in questo caso lo spettro fotonico (che originariamente è rappresentato da uno spettro di corpo nero a temperatura 2.73 K) viene spostato a energie maggiori e il *Synchrotron self-Compton*, un processo che avviene nelle radiosorgenti che emettono per Sincrotrone dove i fotoni radio possono essere energizzati per IC dagli stessi elettroni che li hanno emessi. Prima di iniziare la spiegazione dei vari processi sopracitati ci sembra importante esplicitare alcune costanti fondamentali della fisica che verranno spesso utilizzate in seguito.

$m_e = 9.1 \cdot 10^{-28} g$ massa a riposo dell'elettrone

$\sigma_T = 6.65 \cdot 10^{-25} cm^2$ sezione d'urto Thomson dell'elettrone

$h_p = 6.6 \cdot 10^{-27} erg \cdot s$ costante di Planck

$c = 3 \cdot 10^{10} cm/s$ velocità della luce

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ fattore di Lorenz

Passiamo ora alla trattazione specifica.

Capitolo 1

Trattazione fisica dell'effetto Compton inverso (IC)

L'effetto Compton inverso è uno dei principali processi radiativi dell'universo e ricopre un ruolo fondamentale in diversi campi dell'astrofisica moderna. Prima di iniziarne la trattazione specifica l'autore ha ritenuto importante riportare per completezza i risultati riguardanti la diffusione Thomson e Compton.

1.1 Diffusione Thomson e diffusione Compton

La diffusione Thomson, che avviene se l'energia del fotone $h_p\nu \ll m_e c^2$, causa una diminuzione dell'ampiezza del vettore di Poynting (\vec{S})¹ in quanto l'elettrone diffonde in tutte le direzioni l'energia intercettata, che l'onda trasportava in un'unica direzione di propagazione. Supponiamo che l'onda si muova in un elemento cilindrico di materia di spessore dl e che ogni elettrone abbia sezione d'urto σ_T (sezione d'urto Thomson dell'elettrone).² La sezione d'urto rappresenta l'area geometrica associata all'elettrone e esprime di fatto la probabilità di interazione tra le particelle in esame. Consideriamo l'elettrone come se fosse fermo. Chiamando n_e la densità elettronica avremo che:

$$\frac{|d\vec{S}|}{|\vec{S}|} = \sigma_T n_e dl \quad (1.1)$$

Da cui si ricava facilmente:

$$|\vec{S}| = |\vec{S}_0| e^{-\sigma_T n_e l} = |\vec{S}_0| e^{-\tau_e} \quad (1.2)$$

dove $\tau_e = \sigma_T n_e l$ è lo *spessore ottico Thomson*. La diffusione Thomson non modifica affatto la frequenza (e quindi l'energia) del singolo fotone.

¹Il vettore di Poynting, il cui nome è dovuto a John Henry Poynting, è un vettore che descrive il flusso di energia, per unità di superficie e tempo, associato alla propagazione del campo elettromagnetico, ed è definito come prodotto vettoriale tra campo elettrico e magnetico ($\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$).

²Nei processi di diffusione viene generalmente introdotto il concetto di *sezione d'urto*, definita come rapporto tra la potenza diffusa e il flusso incidente. Considerando una radiazione non polarizzata, mediando su tutti gli angoli di polarizzazione (definiti come l'angolo compreso fra la polarizzazione istantanea della luce e uno degli assi ortogonali alla direzione di propagazione) e su tutte le direzioni di diffusione, si ottiene l'espressione per la sezione d'urto Thomson $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2$ dove con $r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2}$ si indica il raggio classico dell'elettrone.

Al contrario nel fenomeno di diffusione Compton il fotone riemesso avrà energie minori di quello assorbito mentre l'elettrone riceverà un impulso pari a $\frac{h_p\nu}{c}$ e quindi verrà posto in movimento. La diffusione Compton avviene se l'energia del fotone incidente ($h_p\nu$) è uguale o leggermente minore rispetto all'energia dell'elettrone ($m_e c^2$). Si può dimostrare che per una singola interazione la differenza di lunghezza d'onda $\Delta\lambda$ è data da:

$$\Delta\lambda = \lambda_f - \lambda_i = \frac{h_p}{m_e c^2}(1 - \cos\theta) = \lambda_0(1 - \cos\theta) \quad (1.3)$$

dove θ è l'angolo che dopo l'urto il fotone forma con la direzione iniziale, e $\lambda_0 = \frac{h_p}{m_e c^2}$ è definita *lunghezza d'onda Compton*.

1.2 IC per una singola interazione

L'effetto IC avviene quando un elettrone ultra-relativistico incontra un fotone di frequenza tale che $h_p\nu \ll \gamma m_e c^2$; in questo caso l'elettrone molto energetico trasferisce parte della sua energia cinetica al fotone che viene di conseguenza spostato a frequenze maggiori. Come per i precedenti casi si deve considerare l'elettrone come un dischetto con una data sezione d'urto; il fatto che quest'ultimo sia ultra-relativistico pone il problema di dover utilizzare una sezione d'urto completa di correzioni relativistiche detta di Klein-Nishina non potendo utilizzare la sezione d'urto Thomson in quanto valida solo per casi classici. Questo problema può essere superato mettendosi nel sistema di riferimento dell'elettrone, dove quest'ultimo è in quiete e quindi si può utilizzare la sezione d'urto classica. Consideriamo pertanto due sistemi di riferimento: il sistema del laboratorio (S) in cui l'elettrone viaggia a velocità relativistiche e il sistema di riferimento dell'elettrone (S'). Questa situazione è illustrata in Figura 1.1.

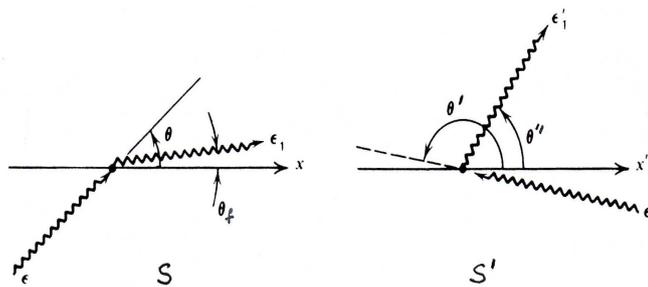


Figura 1.1: Geometria dell'effetto IC nel sistema di riferimento del laboratorio (S) e dell'elettrone (S'). Il fotone incidente è indicato, nei due sistemi di riferimento, come ϵ ed ϵ' quello diffuso come ϵ_1 ed ϵ'_1 .

Nel sistema di riferimento del laboratorio S il fotone incide sull'elettrone formando un angolo θ con la direzione dell'elettrone (asse X) e viene diffuso con un angolo θ_f ;

nel sistema di riferimento dell'elettrone S' chiamiamo θ' e θ'' rispettivamente l'angolo d'incidenza e l'angolo di deflessione, ovviamente a causa dell'aberrazione della luce questi due angoli saranno differenti da quelli del sistema S . La frequenza ν' vista nel sistema S' è legata alla frequenza ν vista dal sistema S tramite la formula dell'effetto Doppler relativistico:

$$\nu' = \nu \gamma (1 - \beta \cos \theta) \quad (1.4)$$

dove con β si indica il rapporto fra velocità dell'elettrone e velocità della luce.

In S' possiamo trattare il caso come una diffusione Thomson perciò il fotone viene riemesso alla stessa frequenza ν' , ma nuovamente per effetto doppler relativistico la frequenza ν' verrà vista nel sistema di riferimento S come $\nu'' = \nu' \gamma (1 - \beta \cos \theta'')$ e quindi risulterà essere:

$$\nu'' = \nu' \gamma (1 - \beta \cos \theta'') = \nu \gamma^2 (1 - \beta \cos \theta) (1 - \beta \cos \theta'') \quad (1.5)$$

l'angolo θ mediamente vale $\frac{\pi}{2}$ se si considera isotrope le orientazioni dei fotoni e degli elettroni, lo stesso si può dimostrare per l'angolo θ'' ; di conseguenza i termini dentro la parentesi sono dell'ordine delle unità. Quindi possiamo concludere che l'IC energizza i fotoni di un fattore γ^2 . Ovviamente il fattore γ ha valori variabili a seconda della velocità dell'elettrone ma può raggiungere valori molto elevati per elettroni iperrelativistici, essendo poi elevato al quadrato il fotone potrà acquistare una quantità enorme di energia anche in una singola collisione. Per questo motivo l'effetto IC è il processo radiativo più efficiente nella produzione di fotoni ad alte energie (X e γ).

1.3 Potenza emessa e spettro dell'IC

Per il calcolo della potenza emessa dallo scattering IC assumiamo che sia i fotoni che gli elettroni abbiano una distribuzione isotropa. A questo punto possiamo metterci nel sistema di riferimento S' e considerare l'urto come uno scattering Thomson. Pertanto la perdita di energia da parte dell'elettrone è data da:

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)' = \sigma_T c u'_{ph} \quad (1.6)$$

dove u'_{ph} è la densità di energia del campo di radiazione nel sistema S' . Quest'ultima risulta aumentata di un fattore $[\gamma (1 - \beta \cos \theta)]^2$ rispetto a quella misurata dall'osservatore nel sistema S . Un fattore $[\gamma (1 - \beta \cos \theta)]$ deriva dall'effetto Doppler relativistico, il secondo fattore $[\gamma (1 - \beta \cos \theta)]$ deriva dalla contrazione relativistica delle lunghezze che schiaccia il volume nella direzione del moto aumentando la densità fotonica. Sviluppando il termine quadratico e mediando su tutti gli angoli si ha che $\langle \cos \theta \rangle = 0$ e $\langle \cos^2 \theta \rangle = 1/3$. Quindi:

$$u'_{ph} = u_{ph} \gamma^2 \left(1 + \frac{1}{3} \beta^2\right) \quad (1.7)$$

Possiamo interpretare la densità di energia u'_{ph} come densità di energia del campo elettrico E' a cui è sottoposto l'elettrone nel suo sistema di riferimento. Pertanto scriviamo $\langle E'^2 \rangle / 8\pi = u'_{ph}$. La luminosità di Compton Inverso, che è un invariante relativistico, si può calcolare nel sistema di riferimento dell'elettrone come:

$$L_{CI} = c \sigma_T \frac{\langle E'^2 \rangle}{8\pi} = c \sigma_T u_{ph} \gamma^2 \left(1 + \frac{1}{3}\beta^2\right) \quad (1.8)$$

Esplicitando ora nell'equazione precedente il termine u_{ph} come prodotto tra n_{ph} densità di fotoni nel sistema dell'osservatore e ε_{ph} energia media dei fotoni, possiamo interpretare il termine $\sigma_T n_{ph} c$ come numero di urti al secondo, e quindi dividendo per questo termine otterremo l'energia e quindi anche la frequenza finale per ogni fotone, che saranno date rispettivamente da:

$$\varepsilon'_{ph} = \gamma^2 \varepsilon_{ph} \left(1 + \frac{1}{3}\beta^2\right) = \left(\frac{4}{3}\gamma^2 + \frac{1}{3}\right) \varepsilon_{ph} \quad \nu'_{ph} = \gamma^2 \nu_{ph} \left(1 + \frac{1}{3}\beta^2\right) \quad (1.9)$$

Dove si è tenuto conto del fatto che $\gamma^2 - 1 = \gamma^2 \beta^2$.

L'energia persa dall'elettrone nello scontro si ottiene sottraendo alla potenza irradiata l'energia che i fotoni avevano prima dell'urto ($\sigma_T c n_{ph} \varepsilon_{ph}$).

$$\omega_{CI} = -\frac{d\varepsilon}{dt} = c \sigma_T n_{ph} \varepsilon_{ph} \left[\gamma^2 \left(1 + \frac{1}{3}\beta^2\right) - 1\right] = \frac{4}{3} c \sigma_T n_{ph} \varepsilon_{ph} \gamma^2 \beta^2 \quad (1.10)$$

Il calcolo dettagliato dello spettro dei fotoni diffusi, con energia iniziale ε_{ph} , è piuttosto complesso e pertanto verrà tralasciato. Riportiamo solo il risultato rappresentato in Figura 1.2.

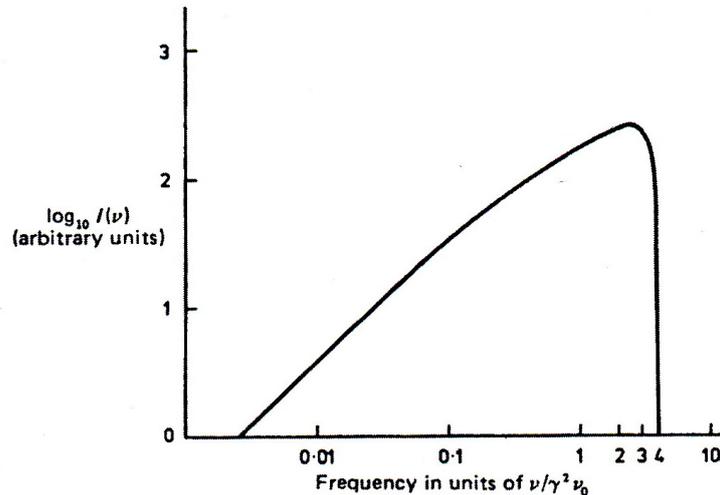


Figura 1.2: Spettro di emissione di IC ottenuto assumendo una radiazione incidente isotropa monocromatica di frequenza ν_0 .

Si può facilmente evincere dal grafico che l'energia massima guadagnata da un fotone di frequenza ν_0 è pari a $4\gamma^2 h_p \nu_0$, e corrisponde al caso in cui l'interazione vista dal sistema dell'elettrone è frontale ($\theta'' = 0$).

Capitolo 2

Applicazioni astrofisiche dell'IC

2.1 Comptonizzazione

Abbiamo visto come lo scattering Compton e Compton Inverso siano esempi particolari del più generale problema di come fotoni e elettroni scambiano energia. Consideriamo ora un caso intermedio dove entrambe le tipologie di urto siano contemplate, dato un gas di elettroni non relativistici e fotoni l'evoluzione temporale è tale da tendere sempre verso una situazione di equilibrio termodinamico. Se gli elettroni sono più energetici dei fotoni allora l'effetto dominante sarà l'IC, al contrario se i fotoni sono più energetici degli elettroni dominerà l'effetto Compton; parleremo in tal caso di Comptonizzazione. Consideriamo quindi il caso di un gas molto rarefatto in modo che non possano risultare determinanti altri processi radiativi come per esempio la Bremsstrahlung, supponiamo che valgano le condizioni $k_b T_e \ll m_e c^2$, dove T_e è la *temperatura cinetica*³ degli elettroni (che d'ora in poi chiameremo semplicemente T) e $k_b = 1.3810^{-16} \text{erg/K}$ la costante di Boltzmann, in modo da escludere il caso relativistico, e $h_p \nu \ll m_e c^2$ in modo da poter utilizzare la sezione d'urto Thomson (σ_T). L'energia che i fotoni cedono (c) agli elettroni quasi fermi attraverso lo scattering Compton, è stimabile mediando su tutti gli angoli e considerando distribuzioni isotrope, come:

$$\left\langle \frac{\Delta \varepsilon_f}{\varepsilon_f} \right\rangle_c \approx -\frac{h_p \nu}{m_e c^2} \quad (2.1)$$

l'energia acquistata (a) dai fotoni per IC è invece stimabile come:

$$\left\langle \frac{\Delta \varepsilon_f}{\varepsilon_f} \right\rangle_a \approx \frac{4}{3} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \quad \text{per} \quad \gamma \approx 1 \quad (2.2)$$

poiché $\frac{3}{2} k_b T \approx \frac{1}{2} m_e v^2$ si ha:

$$\left\langle \frac{\Delta \varepsilon_f}{\varepsilon_f} \right\rangle_a \approx \frac{4 k_b T}{m_e c^2} \quad (2.3)$$

³La temperatura cinetica è un concetto che si adotta quando le condizioni fisiche della materia precludono l'utilizzo della definizione operativa-macroscopica "classica" di temperatura (per esempio in condizioni di bassissima densità). Per temperatura cinetica si intende quindi la temperatura alla quale dovrebbero trovarsi le particelle del gas sulla superficie terrestre per muoversi con energia cinetica pari a quella che hanno nelle condizioni in cui invece si trovano, seguendo direttamente la definizione microscopica di temperatura data dalla teoria cinetica dei gas.

In media quindi la frazione di energia scambiata tra fotoni e elettroni risulterà essere:

$$\left\langle \frac{\Delta\varepsilon_f}{\varepsilon_f} \right\rangle \approx \frac{4k_bT}{m_e c^2} - \frac{h_p\nu}{m_e c^2} \quad (2.4)$$

Esaminiamo la precedente equazione: se $h_p\nu = 4k_bT$ i due differenti processi si bilanceranno, e quindi nessuna delle due componenti (fotonica e elettronica) avrà un guadagno energetico. Se invece per esempio $h_p\nu < 4k_bT$ allora saranno gli elettroni a trasferire parte della loro energia ai fotoni, ovviamente questo è il caso di maggiore interesse astrofisico perché comporta una modifica dello spettro fotonico e quindi è osservabile (invertendo la disuguaglianza precedente avremo il caso in cui i fotoni cedono energia agli elettroni). Supponiamo pertanto che $h_p\nu \ll 4k_bT$. Allora possiamo scrivere che:

$$\left\langle \frac{\Delta\varepsilon_f}{\varepsilon_f} \right\rangle \approx \frac{4k_bT}{m_e c^2} \quad (2.5)$$

A causa degli urti i fotoni acquisteranno energia e il loro spettro iniziale potrà risultare modificato. Vediamo sotto quali condizione questo fenomeno si verifica.

Sia d la dimensione della zona dove sono prodotti i fotoni, n_e la densità di elettroni e τ_e lo spessore ottico per la diffusione Thomson. Il fotone attraversando la regione farà un “random walk”, quindi possiamo introdurre il libero cammino medio dei fotoni definito come $l = \frac{1}{n_e \sigma_T}$. Il fotone subirà un numero N di collisioni il cui tempo medio è definito come $\tau_{coll} = \frac{1}{n_e \sigma_T c}$. Possiamo quindi calcolare N come:

$$N = \left(\frac{d}{l} \right)^2 = (d n_e \sigma_T)^2 = \tau_e^2 \quad (2.6)$$

In realtà la 2.6 vale solo per $\tau_e \gg 1$, per $\tau_e \ll 1$ il numero di urti N risulta essere uguale a τ_e . Questi risultati si possono ottenere con considerazioni statistiche che tralasciamo. Visto che abbiamo definito il guadagno medio di energia per scattering come $\left\langle \frac{\Delta\varepsilon_f}{\varepsilon_f} \right\rangle = \frac{4k_bT}{m_e c^2}$ allora dopo un singolo scattering avremo che $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{4k_bT}{m_e c^2} \right)$, al secondo scattering avremo nuovamente che $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \left(1 + \frac{4k_bT}{m_e c^2} \right)$ e quindi $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{4k_bT}{m_e c^2} \right)^2$. Pertanto dopo N urti l'energia finale sarà data da:

$$\varepsilon_N = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{4k_bT}{m_e c^2} \right)^N \quad (2.7)$$

che nell'approssimazione $kT \ll m_e c^2$ si riduce a:

$$\varepsilon_N \approx \varepsilon_0 e^{\left(\frac{4k_bTN}{m_e c^2} \right)} = \varepsilon_0 e^{4y} \quad (2.8)$$

dove abbiamo introdotto il parametro di Comptonizzazione $y = \frac{k_bT}{m_e c^2} \max(\tau_e, \tau_e^2)$, che descrive fondamentalmente quanto l'energia del fotone verrà cambiata durante l'attraversamento del plasma. Notiamo che la condizione $\varepsilon_N \gg \varepsilon_0$ significa $4y \geq 1$ ovvero $y \geq \frac{1}{4}$, in altre parole lo spettro viene significativamente modificato solo nella condizione che $y \geq \frac{1}{4}$. Pertanto quando la comptonizzazione è debole ($y \ll 1$) lo spettro non viene significativamente modificato, in quanto solo una piccola quantità di energia

viene trasferita ai fotoni; quando invece la comptonizzazione è molto forte ($y \gg 1$) allora la popolazione fotonica viene energizzata fino a che non raggiunge l'equilibrio termico con gli elettroni, e quindi lo spettro viene modificato. L'equilibrio termico viene raggiunto quando vale la condizione $\varepsilon_{finale} = h_p \nu_f = h_p \nu_0 e^{4y} = 4k_b T$. Da cui si ricava facilmente la condizione:

$$y = \frac{1}{4} \log \frac{4k_b T}{h_p \nu_0} \quad (2.9)$$

oppure:

$$\tau_e = \left(\log \left(\frac{4k_b T}{h_p \nu_0} \right) \frac{m_e c^2}{4k_b T} \right)^{0.5} \quad (2.10)$$

Una volta raggiunto l'equilibrio termico lo spettro modificato dei fotoni dovrà rispettare una distribuzione di equilibrio, che nella fattispecie, essendo i fotoni dei bosoni, dovrà essere la *distribuzione di Bose-Einstein*, ossia:

$$u(\nu) d\nu = \frac{8 \pi h_p \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h_p \nu}{k_b T} + \mu} - 1} d\nu \quad (2.11)$$

Il termine μ è il potenziale chimico (che è uguale a zero per un distribuzione di Planck) e esprime il fatto che, in generale, ci sarà una differenza nel numero di fotoni, che risulterà inferiore rispetto alla legge di Planck (ovvero dello spettro di Corpo Nero). Nel caso dell'IC il numero di fotoni è costante ma varia l'energia media delle singole particelle, pertanto la configurazione finale di equilibrio non sarà un Corpo Nero perfetto e si avrà quindi un potenziale chimico determinato dal numero e dall'energia dei fotoni. Per $\mu \gg 1$ si può tranquillamente trascurare il -1 al denominatore e quindi lo spettro viene ridotto di un fattore $e^{-\mu}$, gli spettri calcolati a varie μ sono presentati in Figura 2.1.

Il problema più generale è quello di calcolare gli spettri al variare del parametro y . La soluzione per una popolazione di fotoni diffusa da una popolazione di elettroni non relativistici descritti da una distribuzione termica fu trovata da Kompaneets, ed è nota appunto come equazione di Kompaneets:

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(n + n^2 + \frac{\partial n}{\partial x} \right) \right] \quad (2.12)$$

dove: $x = \frac{h_p \nu}{k_b T}$ è l'energia del fotone, $y = \int \frac{k_b T}{m_e c^2} \sigma_T n_e dl = \int \frac{k_b T}{m_e c^2} \sigma_T n_e c dt$ è la variabile temporale espressa nel parametro di Comptonizzazione, $\frac{\partial n}{\partial x}$ descrive la diffusione in frequenza e lo shift Doppler dovuto agli urti stocastici dei fotoni, n descrive la perdita di energia degli elettroni urtati e tende a limitare l'energia dei fotoni quando si è vicini all'equilibrio termico, n^2 è un termine dovuto a effetti puramente quantistici e tende anch'esso a limitare l'energia dei fotoni per $n > 1$. Le soluzioni analitiche dell'equazione di Kompaneets esistono solo per alcuni casi particolari e tendenzialmente si ricorre a metodi numerici per la soluzione dell'equazione.

Riportiamo a titolo di esempio in Figura 2.2 lo spettro di Bremsstrahlung soggetto a Comptonizzazione.

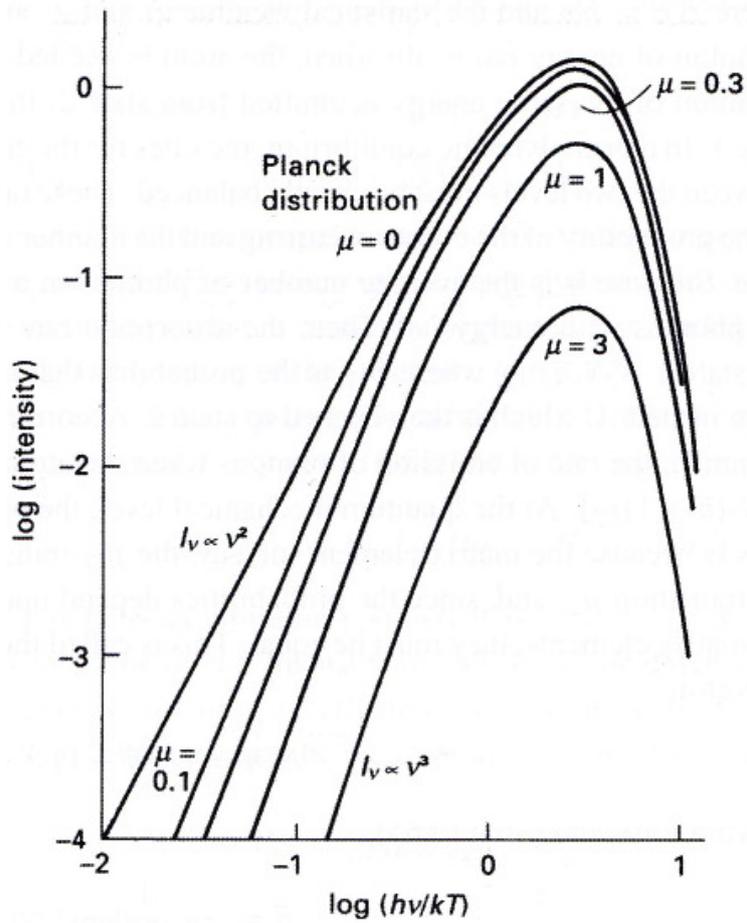


Figura 2.1: Distribuzione di Bose-Einstein per diversi valori di μ .

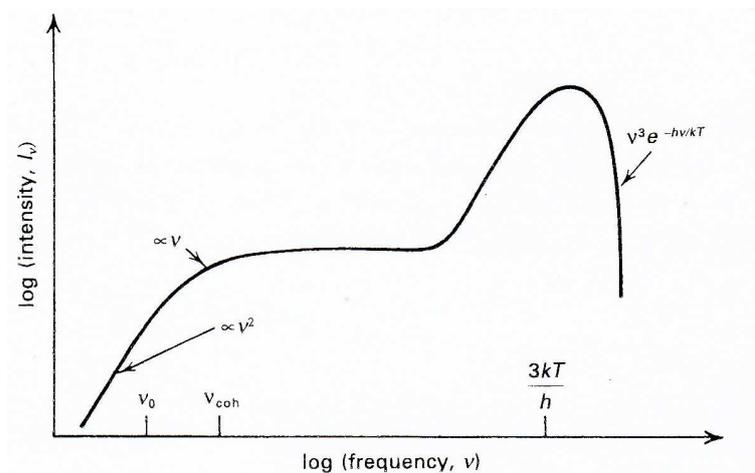


Figura 2.2: Spettro di un mezzo termico, non relativistico, nel quale la Bremsstrahlung è il processo dominante a bassa frequenza e in cui la Comptonizzazione modifica lo spettro ad alta frequenza, facendolo diventare uno spettro di Wien.

Esempi di sorgenti in cui sono state individuate le condizioni caratteristiche della Comptonizzazione sono il gas caldo nelle vicinanze delle binarie X, i plasmi caldi nei nuclei galattici attivi e il gas caldo intergalattico negli ammassi di galassie.

2.2 Effetto Sunyaev-Zel'dovich (S-Z)

L'effetto S-Z gioca un ruolo fondamentale in molti campi dell'astrofisica e della cosmologia, infatti da una parte permette studi cosmologici sull'origine dell'universo, la sua storia evolutiva, i processi che hanno provocato distorsioni nella CMBR, i parametri che descrivono il modello cosmologico assunto e l'evoluzione della densità numerica degli ammassi di galassie; dall'altra consente osservazioni sui singoli ammassi, con la possibilità di ottenere quindi informazioni sulla loro struttura, la distribuzione di massa al loro interno e le popolazioni elettroniche che li compongono. Come accennato nell'introduzione l'effetto S-Z è un caso particolare dell'IC in cui elettroni molto energetici (principalmente appartenenti al plasma presente negli ammassi di galassie) interagiscono con i fotoni della radiazione cosmica di fondo (CMBR). Esistono tre tipologie di S-Z: quello termico, dovuto al moto termico (maxwelliano) di una popolazione di elettroni caldi; quello cinetico, dovuto alla componente radiale del moto di un ammasso di galassie rispetto alla CMBR; quello di polarizzazione che è stato solo previsto teoricamente ma non è ancora stato osservato; noi tratteremo solo il primo. La CMBR è un fondo uniforme di fotoni a bassa energia che permea tutto l'universo descritta da uno spettro di corpo nero a temperatura $T = 2.73K$ la cui densità di energia si può calcolare utilizzando la *legge di Stefan-Boltzmann*⁴ e risulta essere $u \approx 4 \cdot 10^{-13} \text{erg s}^{-1}$. Consideriamo lo spettro (descritto da una planckiana) dei fotoni della CMBR, distinguiamo due regimi: a basse frequenze (ovvero per $\frac{h_p\nu}{k_bT} \ll 1$) con una semplice espansione in serie dell'equazione 2.11 (ponendo $\mu = 0$) otterremo un andamento proporzionale a ν^2 (regime di Rayleigh-Jeans), ad alte frequenze ($\frac{h_p\nu}{k_bT} \gg 1$) invece (trascurando quindi al denominatore il termine -1) avremo un andamento proporzionale a $\nu^3 e^{-\frac{h_p\nu}{k_bT}}$ (regime di Wien). Allora possiamo dire che, dato che l'effetto IC conserva il numero di fotoni, l'effetto S-Z comporta una diminuzione d'intensità nella zona di Rayleigh-Jeans e un aumento nella zona di Wien. Per questo motivo quando fu scoperto venne definito *microwave diminution*, infatti osservando nelle microonde si noterà una diminuzione di temperatura dello spettro della CMBR, questo perchè i fotoni verranno spostati a energia maggiori (tipicamente nel sub-millimetrico e nel lontano infrarosso). Lo spettro complessivo (che riportiamo in Figura 2.3) venne trovato per la prima volta da Sunyaev e Zel'dovich come soluzione dell'equazione di Kompaneets (2.12) trascurando i termini che comportano il raffreddamento dei fotoni n e n^2 e assumendo come dato di prova $n = (e^x - 1)^{-1}$. Il calcolo esplicito dello spettro completo è molto complesso e supera di molto gli obiettivi di questa trattazione, a titolo di esempio riportiamo il metodo utilizzato per ricavare lo spettro nella regione di Rayleigh-Jeans. Espandendo l'equazione di Kompaneets per valori piccoli di ν (ovvero lavorando nel regime di Rayleigh-Jeans), Sunyaev e Zel'dovich ottennero la decrescita dell'intensità come:

$$\frac{\Delta I}{I} = -2y \quad (2.13)$$

⁴ $u_{ph} = \frac{4\pi}{c}\sigma_{S-B}T^4$ dove con $\sigma_{S-B} = 5.6710^{-5} \text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{K}^{-4}$ si indica la costante di *Stefan-Boltzmann*.

dove $y = \int \frac{k_b T}{m_e c^2} \sigma_T n_e dl$ è la profondità ottica Compton. La variazione di temperatura di antenna è proporzionale alla variazione di intensità nella zona di Rayleigh-Jeans, possiamo quindi stimarlo come:

$$\frac{\Delta T}{T} \approx -2 \frac{k_b T_e}{m_e c^2} \tau \quad (2.14)$$

dove $\tau = \sigma_T \int_0^L n_e dl$ è lo spessore ottico del plasma, n_e è la densità degli elettroni e l'integrale è calcolato lungo la linea di vista. Tipicamente un ammasso di galassie ha $n_e \sim 2500 m^{-3}$, $k_b T_e \sim 5 keV$ raggio del nucleo circa $10^{22} m$. Calcolando il cammino ottico come il doppio o il triplo del raggio del core si ottiene una diminuzione di temperatura dell'ordine di $-0.3 mK$.

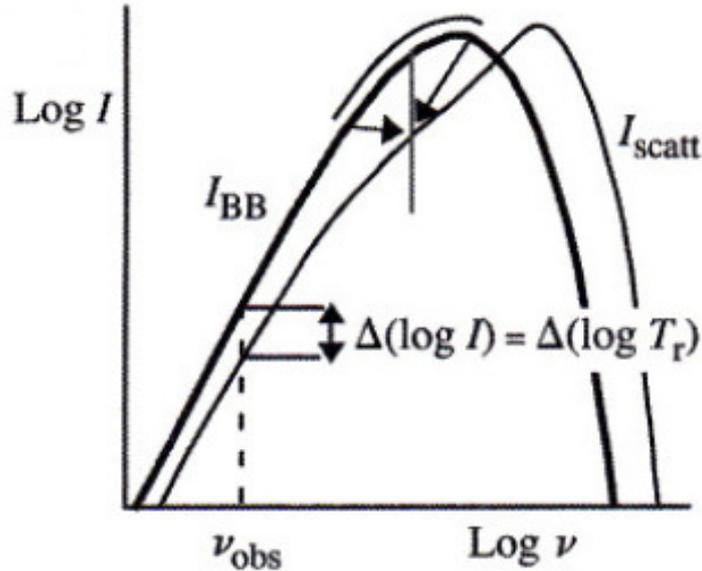


Figura 2.3: Spettro della CMBR soggetto a effetto S-Z.

Come si può notare in Figura 2.3 nella regione che va come legge di potenza (Rayleigh-Jeans) lo spettro diffuso diminuisce di intensità, viene traslato verso destra ma continua a essere descritto con una legge di potenza; in corrispondenza del picco invece presenta una depressione, mentre nella zona di Wien cresce in intensità.

L'S-Z ha poi una caratteristica molto particolare. Nel quadro cosmologico comunemente accettato, il suo spettro è indipendente dal redshift, inteso come una misura della distanza dell'ammasso in cui l'effetto viene osservato. Questo fatto lo rende un potente mezzo sia per studi cosmologici sulla formazione dell'Universo, sia per osservazioni sulla struttura di singoli ammassi di galassie lontani, e sulla loro evoluzione. Vediamo per esempio come l'effetto S-Z può essere utilizzato per calcolare la costante di Hubble (H_0), un parametro cosmologico che lega la velocità di recessione di un ammasso o di una galassia e la sua distanza ($v = H_0 d$). Il valore di H_0 si ottiene solo se si hanno misure indipendenti per v e d . La velocità di recessione si ottiene col redshift, mentre l'effetto S-Z è un comodo strumento per misurare la distanza. Il metodo si

fonda sulla combinazione delle osservazioni di emissività X per Bremsstrahlung e delle misurazioni di diminuzione di temperatura della CMBR. Infatti l'emissività del gas per Bremsstrahlung è data da:

$$\epsilon(\nu) = An_e^2 T_e^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{h\nu}{k_b T_e}} \quad (2.15)$$

mentre la variazione di temperatura per effetto S-Z (ricavabile dall'equazione 2.14) è data da:

$$\frac{\Delta T}{T} \approx -2 \frac{k_b T_e}{m_e c^2} \sigma_T n_e L \quad (2.16)$$

dove L è la dimensione dell'ammasso. La temperatura T_e si può calcolare dalla forma dello spettro di Bremsstrahlung, n_e si può eliminare combinando le due equazioni e quindi si può ricavare un'espressione per L . Noto L si può calcolare immediatamente la distanza del corpo celeste in esame considerando che $d = \frac{L}{\theta}$ dove θ è la dimensione angolare. Ricordando poi che il redshift $z = \frac{v}{c}$ si ottiene che:

$$H_0 = \frac{v}{d} = \frac{zc}{d} \quad (2.17)$$

I metodi già conosciuti per la determinazione della scala di distanza (cefeidi variabili, supernovae...) necessitano tutti la calibrazione di ogni gradino con il precedente, fino al primo che è quello dell'osservazione della parallasse di oggetti vicini. Quello proposto invece è un metodo diretto per la determinazione della distanza angolare degli ammassi e della costante di Hubble, che può essere applicato a qualsiasi redshift e senza il bisogno di una calibrazione, basandosi solo su conoscenze semplici come le proprietà di un gas totalmente ionizzato. È per questo motivo che l'effetto S-Z sta sempre più prendendo piede come strumento di ricerca avanzata in campo astrofisico e cosmologico.

2.3 Synchrotron-self Compton (SCC)

Una particella carica accelerata emette radiazione secondo la *formula di Larmor*⁵ in cui la potenza emessa è proporzionale al quadrato dell'accelerazione. Pertanto se consideriamo una nube di plasma immersa in un campo magnetico, allora gli elettroni (che considereremo ultra-relativistici) in movimento nella nube subiranno una deviazione causata dal campo magnetico (*forza di Lorenz*)⁶, e quindi emetteranno radiazione. Questo processo è noto come radiazione di Sincrotrone ed è uno dei più importanti processi di radiazione presenti nell'Universo. Non ci soffermiamo sulla trattazione matematica di questo fenomeno, ci limitiamo invece a fornire la formula che descrive le perdite di energia di un elettrone che emette per radiazione di Sincrotrone, date da:

$$-\frac{d\varepsilon}{dt_{sync}} = \frac{4}{3} c \sigma_T u_{mag} \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \quad (2.18)$$

dove con u_{mag} si indica la densità di energia del campo magnetico che è proporzionale al

⁵ $P = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3}$

⁶ $F_L = q \vec{v} \times \vec{H}$

quadrato dello stesso. Notiamo la somiglianza con l'equazione per la perdita di energia per IC (1.10). Gli elettroni relativistici della nube peraltro possono fare IC con i fotoni radio della radiazione di Sincrotrone spostandoli a frequenze maggiori (tipicamente banda X e γ). Questo fenomeno diventa importante quando la densità di energia del campo di radiazione risulta comparabile o maggiore di quella del campo magnetico, ed è conosciuto come *Synchrotron-self Compton*. Per stabilire quale dei due processi domina dobbiamo fare il confronto tra le perdite di energia del Sincrotrone e dell'IC:

$$\eta = \frac{\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{IC}}{\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{sync}} = \frac{\frac{4}{3} c \sigma_T u_{ph} \frac{v^2}{c^2} \gamma^2}{\frac{4}{3} c \sigma_T u_{mag} \frac{v^2}{c^2} \gamma^2} = \frac{u_{ph}}{u_{mag}} \quad (2.19)$$

dove u_{ph} e u_{mag} sono rispettivamente le densità di energia del campo di radiazione e del campo magnetico. Le perdite di energia per IC diventano importanti quando $\eta > 1$, in questo caso i fotoni radio vengono spostati a energie maggiori e gli elettroni perdono rapidamente la loro energia. Dato che fotoni X e γ hanno densità di energia maggiore di quelli radio il processo si intensifica fino a che la sorgente emette potenti segnali X e γ e in breve tempo si spegne. Questo fenomeno è chiamato *Catastrofe Compton*. Una semplice applicazione della formula precedente consente, conoscendo il rapporto fra le perdite di energia, ovvero il rapporto fra le luminosità dei due processi, e conoscendo u_{ph} , di ottenere una misura del campo magnetico presente nella sorgente. Possiamo inoltre considerare che sommando la 2.18 e la 1.10 otterremo la perdita di energia da parte dell'elettrone dovuta a entrambi i processi.

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{IC+sync} = b\varepsilon^2(H^2 + 8\pi u_{ph}) \quad (2.20)$$

E quindi integrando ed esplicitando le varie costanti, otterremo l'espressione per il tempo di vita media:

$$t^* = \frac{645}{\varepsilon^*(H^2 + 8\pi u_{ph})} \simeq \frac{3 \cdot 10^8}{\left(\frac{H^2}{8\pi} + u_{ph}\right) [eV \text{ cm}^{-3}]} \frac{1}{\varepsilon^*/GeV} \text{ anni} \quad (2.21)$$

La 2.21 spiega perché non vediamo radiosorgenti di età comparabile con quella dell'universo, infatti gli elettroni relativistici anche a $H = 0$ subiranno perdite di energia per via della CMBR, e quindi il loro tempo di vita radiativo sarà finito. La CMBR ha $u_{ph} \simeq 0.25 eV \text{ cm}^{-3}$ pertanto il tempo di vita radiativa medio per un elettrone relativistico risulta essere:

$$t^* \simeq \frac{3 \cdot 10^9}{\varepsilon^*/GeV} \text{ anni} \quad (2.22)$$

Che calcolato per $\gamma = 10^4$, ovvero $\varepsilon \sim 5 GeV$ risulta essere $t^* \sim 2 \cdot 10^8$ anni.

Utilizzando qualche semplice passaggio algebrico e tenendo conto della relazione tra di u_{ph} e la luminosità di Sincrotrone si dimostra che l'equazione (2.19) può anche essere scritta come:

$$\eta \simeq \frac{T_B}{10^{12} K} \frac{\nu}{GHz} \quad (2.23)$$

dove T_B e ν sono rispettivamente la temperatura di brillantezza della sorgente radio e la frequenza a cui è misurata la T_B . La temperatura di brillantezza è definita come la temperatura che dovrebbe avere un corpo nero in equilibrio termico con l'ambiente circostante per poter emettere, ad una particolare frequenza, una radiazione di intensità pari a quella osservata. La temperatura corrispondente a $\eta = 1$ è pertanto:

$$T_B = 10^{12} K \left(\frac{\nu}{\text{GHz}} \right)^{-0,2} \quad (2.24)$$

Quindi nessuna radiosorgente può avere temperatura maggiore di $T_B \sim 10^{12} K$ senza subire una perdita rapidissima di energia per IC. Le sorgenti più calde trovate sono dell'ordine di $10^{11} K$, anche se a livello osservativo si sono trovati degli AGN con temperatura di brillantezza dell'ordine di $10^{13} - 10^{14} K$ nettamente superiore al limiti fissato dal SCC. Questi eccessi di temperatura sono stati spiegati con l'effetto Doppler che interviene quando il getto di plasma viene emesso dall'AGN lungo la linea di vista dell'osservatore, causando un blu-shift dell'intensità specifica. L'effetto SCC ha avuto importanti applicazioni sia a livello galattico sia extragalattico nello studio degli AGN, permettendo di calcolarne densità di energia elettronica e campo magnetico.

Bibliografia

- [1] C. & R. Fanti, *Una finestra sull'universo "Invisibile"*, Bologna (2012)
- [2] G. Rybicki-A. Lightman, *Radiative Processes in Astrophysics*, JohnWiley & Sons, Inc. (1979)
- [3] Daniele Dallacasa, *Processi di radiazione e MHD*, Dispense
- [4] Andrea Banzatti, *L'effetto Sunyaev-Zel'dovich*, Tesi di laurea triennale, Milano (2006)
- [5] Mario Vietri, *Astrofisica delle alte energie*, Bollati Boringhieri (2006)