

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

**Dislocazioni in un
semispazio elastico
con superficie libera**

Relatore:
Prof. Maurizio Bonafede

Presentata da:
Enrico Baglione

Sessione I
Anno Accademico 2013/2014

Sommario

Questa tesi tratta di problemi dislocativi in spazi elastici, utili per rappresentare campi di spostamento, deformazione e sforzo generati da sorgenti interne. In particolare, considerando la Terra come un corpo elastico, i problemi trattati si riferiscono alla descrizione dei campi di sforzo in prossimità della superficie terrestre, lo studio della cui deformazione rappresenta uno dei più utili metodi di indagine delle sorgenti sismiche e vulcaniche.

È possibile, con ottima approssimazione, descrivere la superficie terrestre come una *superficie libera*, ovvero una superficie su cui le trazioni applicate dall'esterno sono nulle. Tale approssimazione, per il tipo di studio cui mira questa trattazione, è giustificata dal fatto che le sorgenti sismiche sono situate solitamente a diversi chilometri di profondità, dove risulta legittimo trascurare le forze esterne dovute a pressione atmosferica, azione di correnti d'aria, forze di gravità esercitata dal Sole ed altri corpi celesti, etc.

Volendo studiare regioni con dimensioni lineari molto inferiori al raggio terrestre, è possibile approssimare la Terra ad un semispazio elastico omogeneo con superficie libera orizzontale. Nel seguito si farà riferimento ad un sistema cartesiano ortogonale con assi y e z diretti lungo l'orizzontale e asse x diretto verticalmente verso l'interno del semispazio. La superficie terrestre è perciò descritta dal piano $x = 0$ e, denotando con τ_{ij} il tensore di sforzo, la **condizione di superficie libera** risulta:

$$\tau_{xx} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0, \quad \text{in } x = 0$$

Nella tesi sono esposti alcuni metodi che consentono di estendere soluzioni già note per spazi elastici illimitati al caso di semispazi delimitati da una superficie libera.

Indice

1	Introduzione	1
2	Dislocazioni a vite	3
2.1	Sup. libera per una dislocazione a vite	4
2.2	Soluzione per una faglia di strike-slip inclinata	6
2.2.1	Calcolo della matrice di rotazione e del tensore trasformato	8
2.2.2	Sup. libera per una faglia di strike-slip inclinata	9
2.3	Metodo delle immagini	11
3	Dislocazioni di bordo	13
3.1	Sup. libera per dislocazione di bordo	14
3.1.1	Calcolo di $s(k)$	17
3.1.2	Calcolo di T_{yy}	19
3.1.3	Calcolo di T_{xx}	20
3.1.4	Calcolo di T_{xy}	21
3.1.5	Calcolo degli spostamenti	21
3.2	Dislocazione di bordo limitata	28
3.3	Stress function di Airy	31
4	Conclusione	37
	Bibliografia	39

Capitolo 1

Introduzione

Fra le sorgenti deformative di interesse in Sismologia un ruolo molto importante è giuocato dalle “dislocazioni elastiche” che descrivono un evento di frattura con scorrimento relativo (rigetto) fra le due facce di una superficie di faglia. In approssimazione di “deformazione piana” si assume che il vettore spostamento abbia una componente nulla (per es. $u_z = 0$) e che le componenti u_x e u_y dipendano solo dalle coordinate x, y . La superficie di dislocazione è illimitata nella direzione z . Affinché la dislocazione non sia accompagnata da compenetrazione della materia o dalla creazione di vuoti fra le due facce della faglia, occorre che lo spostamento relativo sia parallelo alla superficie di faglia. Una configurazione alternativa è quella “anti-piana”, in cui si assume che il vettore spostamento abbia la sola componente u_z diversa da zero e dipendente solo dalle coordinate x, y . Anche in questo caso la superficie di dislocazione è illimitata nella direzione z .

Nei prossimi capitoli introdurremo le dislocazioni “a vite” (anti-piane) e “di bordo” (piane) illustrando dei metodi che consentono di generalizzare le soluzioni elasto-statiche valide in mezzi elastici illimitati al caso di semispazi elastici con superficie libera. Nel caso delle dislocazioni a vite è sufficiente utilizzare la “tecnica delle immagini” per rimuovere le trazioni τ_{xz} sulla superficie $x = 0$. Nel caso delle dislocazioni di bordo, la componente τ_{xz} è nulla per via della configurazione piana, ma solo una delle restanti componenti (per es. τ_{xy}) può essere eliminata tramite la tecnica delle immagini; la terza componente τ_{xx} può essere eliminata tramite una opportuna funzione di Airy.

Capitolo 2

Dislocazioni a vite

Sia data una superficie di dislocazione (coincidente con il semipiano x, z con $x > 0$) in un sistema di riferimento in cui l'asse x indica la profondità e il piano y, z ($x = 0$) la superficie terrestre. La superficie di dislocazione è orientata secondo la normale $\hat{n} = \hat{j}$ (con \hat{j} versore relativo all'asse y), e la linea di dislocazione è orientata lungo l'asse z . Ovvero: $\hat{\tau} = \hat{k}$, $\vec{b} = b\hat{k}$, con \vec{b} vettore di Burgers. Supponendo $u_x = u_y = 0$ l'equazione di dislocazione risulta:

$$\nabla^2 u_z = 0$$

Ad essa si affianca la condizione:

$$\oint_L du_z = -b$$

Dove L indica la linea di dislocazione.

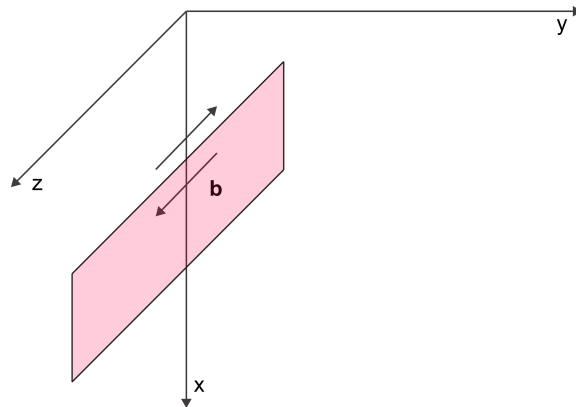


Figura 2.1: Sorgente di dislocazione S antipiana

La soluzione per il campo di spostamento è:

$$u_z = \frac{b}{2\pi} \text{Atan}(x, y) \quad (2.1)$$

con:

$$\text{Atan}(x, y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{y} & \text{se } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{y} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

Le deformazioni non nulle risultano:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{b}{4\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} &= \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial y} = -\frac{b}{4\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Tramite la relazione costitutiva $\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$ (dove λ e μ sono le costanti di Lamè), possiamo ricavare le componenti del tensore di sforzo:

$$\tau_{\mathbf{ik}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{vmatrix}$$

con:

$$\tau_{xz} = \frac{\mu b}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (2.2)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\mu b}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (2.3)$$

In coordinate polari nel piano x, y ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$) le componenti di sforzo risultano:

$$\tau_{xz} = \frac{\mu b}{2\pi r} \sin \theta \quad \tau_{yz} = \frac{\mu b}{2\pi r} (-\cos \theta)$$

2.1 Soluzione in prossimità della superficie libera per una dislocazione a vite

Consideriamo ora una faglia che si apre in $x = x_1$ e si chiude in $x = x_2$. La soluzione del campo di spostamento sarà in tal caso:

$$u_z = \frac{b}{2\pi} \left[\arctan \left(\frac{x - x_1}{y} \right) - \arctan \left(\frac{x - x_2}{y} \right) \right] \quad (2.4)$$

E le componenti di sforzo:

$$\tau_{xz} = \frac{\mu b}{2\pi} \left[\frac{y}{(x-x_1)^2 + y^2} - \frac{y}{(x-x_2)^2 + y^2} \right] \quad (2.5)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\mu b}{2\pi} \left[\frac{x-x_1}{(x-x_1)^2 + y^2} - \frac{x-x_2}{(x-x_2)^2 + y^2} \right] \quad (2.6)$$

Ora, volendo considerare la soluzione in condizione di superficie libera, dobbiamo richiedere che $\tau_{xx} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$ in $x = 0$. Nel nostro caso si tratta di annullare solo la componente τ_{xz} . Adottiamo il metodo delle immagini, considerando una faglia S^* speculare a quella reale S rispetto al piano $x = 0$. S^* avrà stesso vettore di Burgers e si aprirà in $x = -x_2$ e si chiuderà in $x = -x_1$.

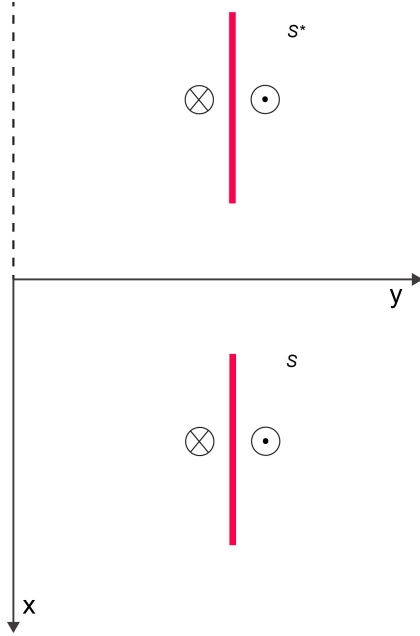


Figura 2.2: Sorgente di dislocazione S e relativa immagine S^*

La soluzione del campo di spostamento sarà in tal caso:

$$u_z^* = \frac{b}{2\pi} \left[\arctan \left(\frac{x+x_2}{y} \right) - \arctan \left(\frac{x+x_1}{y} \right) \right]$$

In tal caso il tensore di sforzo τ^* sarà:

$$\tau_{\mathbf{ik}}^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz}^* \\ 0 & 0 & \tau_{yz}^* \\ \tau_{xz}^* & \tau_{yz}^* & 0 \end{vmatrix}$$

con:

$$\tau_{xz}^* = \frac{\mu b}{2\pi} \left[\frac{y}{(x+x_2)^2+y^2} - \frac{y}{(x+x_1)^2+y^2} \right] \quad (2.7)$$

$$\tau_{yz}^* = -\frac{\mu b}{2\pi} \left[\frac{x+x_2}{(x+x_2)^2+y^2} - \frac{x+x_1}{(x+x_1)^2+y^2} \right] \quad (2.8)$$

che, sommate alle precedenti (2.5) e (2.6), forniscono le componenti totali di sforzo:

$$T_{xz} = \tau_{xz} + \tau_{xz}^* = \frac{\mu b}{2\pi} \left[\frac{y}{(x-x_1)^2+y^2} - \frac{y}{(x-x_2)^2+y^2} \right] + \frac{\mu b}{2\pi} \left[\frac{y}{(x+x_2)^2+y^2} - \frac{y}{(x+x_1)^2+y^2} \right] \quad (2.9)$$

$$T_{yz} = \tau_{yz} + \tau_{yz}^* = -\frac{\mu b}{2\pi} \left[\frac{x-x_1}{(x-x_1)^2+y^2} - \frac{x-x_2}{(x-x_2)^2+y^2} \right] - \frac{\mu b}{2\pi} \left[\frac{x+x_2}{(x+x_2)^2+y^2} - \frac{x+x_1}{(x+x_1)^2+y^2} \right] \quad (2.10)$$

Che, in superficie ($x=0$) risultano:

$$T_{xz} = \tau_{xz} + \tau_{xz}^* = \frac{\mu b}{2\pi} \left[\frac{y}{x_1^2+y^2} - \frac{y}{x_2^2+y^2} + \frac{y}{x_2^2+y^2} - \frac{y}{x_1^2+y^2} \right] = 0$$

$$T_{yz} = \tau_{yz} + \tau_{yz}^* = -\frac{\mu b}{2\pi} \left[-\frac{x_1}{x_1^2+y^2} - \frac{-x_2}{x_2^2+y^2} + \frac{x_2}{x_2^2+y^2} - \frac{x_1}{x_1^2+y^2} \right] = 2\tau_{yz}$$

Infine, lo spostamento complessivo vale:

$$U_z = u_z + u_z^* = \frac{b}{2\pi} \left[\arctan \frac{x-x_1}{y} - \arctan \frac{x-x_2}{y} + \arctan \frac{x+x_2}{y} - \arctan \frac{x+x_1}{y} \right]$$

In superficie ($x=0$) risulta:

$$U_z(y) = \frac{b}{\pi} \left[\arctan \frac{x_2}{y} - \arctan \frac{x_1}{y} \right]$$

2.2 Soluzione per una faglia di strike-slip inclinata

Ora consideriamo un faglia inclinata di un angolo $-\alpha$ attorno all'asse z . Scegliamo allora un sistema di riferimento x', y', z' ruotato rispetto al precedente

di un angolo α attorno all'asse z , la cui matrice di rotazione è data da:

$$C_{ik} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

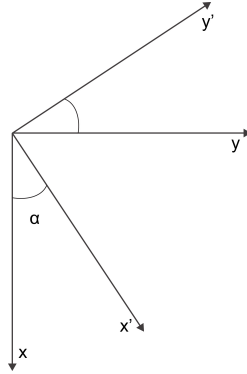


Figura 2.3: Rotazione di angolo α

Applicando tale rotazione al tensore di sforzo secondo la regola tensoriale $\tau'_{ik} = C_{ji}C_{lk}\tau_{jl}$, otteniamo:

$$\tau'_{ik} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tau'_{xz} \\ 0 & 0 & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & 0 \end{vmatrix}$$

con:

$$\tau'_{xz} = \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \sin \alpha = \frac{\mu b}{2\pi r^2} (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \quad (2.11)$$

$$\tau'_{yz} = -\tau_{xz} \sin \alpha + \tau_{yz} \cos \alpha = \frac{\mu b}{2\pi r^2} (-y \sin \alpha - x \cos \alpha) \quad (2.12)$$

Ma

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Da cui osserviamo che:

$$\tau'_{xz} = \frac{\mu b}{2\pi} \frac{y'}{x'^2 + y'^2} \quad (2.13)$$

$$\tau'_{yz} = -\frac{\mu b}{2\pi} \frac{x'}{x'^2 + y'^2} \quad (2.14)$$

L' invarianza formale di τ_{13} , τ_{23} per ciò che riguarda la dipendenza da x, y (ovvero τ'_{13} , τ'_{23} da x', y') indica che la soluzione dipende solo dalla posizione della linea di dislocazione e del vettore di Burgers (come mostrato dalle equazioni dislocative).

2.2.1 Calcolo della matrice di rotazione e del tensore trasformato

Calcoliamo la matrice di rotazione tramite il coseno di un angolo fra due versori:

$$c_{ki} = \cos \widehat{ki'}$$

Nel caso di una rotazione di angolo α attorno all'asse z :

$$C_{ik} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) & \cos \frac{\pi}{2} \\ \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) & \cos \alpha & \cos \frac{\pi}{2} \\ \cos \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} & \cos 0 \end{vmatrix}$$

Da cui:

$$C_{ik} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

A questo punto, date le matrici:

$$\tau_{ik} = \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix} \quad C_{ik} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

Applichiamo la regola del prodotto tensoriale:

$$\tau'_{ij} = c_{ki} c_{lj} \tau_{kl}$$

per calcolare τ'_{ij} .

Nel caso di una dislocazione a vite inclinata di $-\alpha$ attorno all'asse z risulta:

$$\tau_{ik} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{vmatrix} \quad C_{ik} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Esempio

$$\begin{aligned}
\tau'_{13} &= c_{k1}c_{l3}\tau_{kl} = c_{11}(c_{l3}\tau_{1l}) + c_{21}(c_{l3}\tau_{2l}) + c_{31}(c_{l3}\tau_{3l}) = \\
&= c_{11}(c_{13}\tau_{11} + c_{23}\tau_{12} + c_{33}\tau_{13}) + c_{21}(c_{13}\tau_{21} + c_{23}\tau_{22} + c_{33}\tau_{23}) \\
&= c_{11}c_{33}\tau_{13} + c_{21}c_{33}\tau_{23} \\
&= \tau_{13} \cos \alpha + \tau_{23} \sin \alpha
\end{aligned}$$

2.2.2 Soluzione in prossimità della superficie libera per una faglia di strike-slip inclinata

Adesso vogliamo considerare una faglia inclinata di un angolo $-\alpha$ attorno all'asse z che si apre in $(x'_1; y'_1)$ e si chiude in $(x'_2; y'_2)$. È possibile osservare che:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$$

Sottraendo a entrambi i membri il vettore $(x_0; y_0)$:

$$\begin{cases} x - x_0 = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha - x_0 \\ y - y_0 = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha - y_0 \end{cases}$$

Ma:

$$\begin{cases} x_0 = x'_0 \cos \alpha - y'_0 \sin \alpha \\ y_0 = x'_0 \sin \alpha + y'_0 \cos \alpha \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} x - x_0 = (x' - x'_0) \cos \alpha - (y' - y'_0) \sin \alpha \\ y - y_0 = (x' - x'_0) \sin \alpha + (y' - y'_0) \cos \alpha \end{cases}$$

che conducono a:

$$\begin{cases} x' - x'_0 = (x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \sin \alpha \\ y' - y'_0 = -(x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha \end{cases}$$

Pertanto, le nuove soluzioni risultano:

$$\tau'_{xz} = \frac{\mu b}{2\pi} \left[\frac{y' - y'_1}{(x' - x'_1)^2 + (y' - y'_1)^2} - \frac{y' - y'_2}{(x' - x'_2)^2 + (y' - y'_2)^2} \right] \quad (2.15)$$

$$\tau'_{yz} = -\frac{\mu b}{2\pi} \left[\frac{x' - x'_1}{(x' - x'_1)^2 + (y' - y'_1)^2} - \frac{x' - x'_2}{(x' - x'_2)^2 + (y' - y'_2)^2} \right] \quad (2.16)$$

Ora, volendo considerare la soluzione in condizione di superficie libera, dobbiamo richiedere che $\tau'_{xx} = \tau'_{xy} = \tau'_{xz} = 0$ in $x = 0$. Nel nostro caso si tratta di annullare solo la componente τ'_{xz} . Adottiamo il metodo delle immagini, considerando una faglia S^* speculare a quella reale S rispetto al piano $x = 0$. S^* avrà stesso vettore di Burgers e si aprirà in $(-x'_2; y'_2)$ e si chiude in $(-x'_1; y'_1)$.

Pertanto, le nuove soluzioni risultano:

$$\tau'_{xz} = \frac{\mu b}{2\pi} \left[\frac{y' - y'_2}{(x' + x'_2)^2 + (y' - y'_2)^2} - \frac{y' - y'_1}{(x' + x'_1)^2 + (y' - y'_1)^2} \right] \quad (2.17)$$

$$\tau'_{yz} = -\frac{\mu b}{2\pi} \left[\frac{x' + x'_2}{(x' + x'_2)^2 + (y' - y'_2)^2} - \frac{x' + x'_1}{(x' + x'_1)^2 + (y' - y'_1)^2} \right] \quad (2.18)$$

che, sommate alle precedenti (2.15) e (2.16), e calcolate sulla superficie libera ($x' = 0$) forniscono le componenti totali di sforzo:

$$T'_{xz} = \tau'_{xz} + \tau'_{xz} = 0 \quad (2.19)$$

$$T'_{yz} = \tau'_{yz} + \tau'_{yz} = 2\tau'_{yz} \quad (2.20)$$

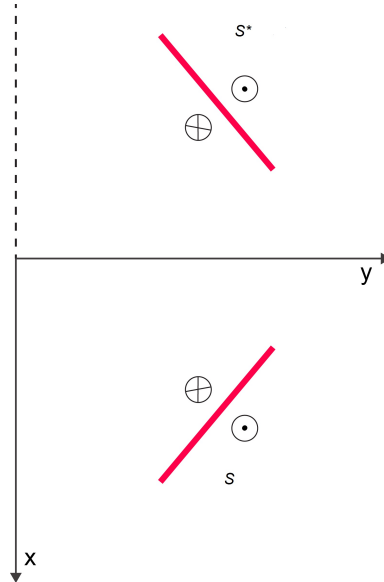


Figura 2.4: Sorgente S e immagine S^* inclinate

Le dislocazioni a vite sono particolarmente semplici da rappresentare in un semispazio, dato che è sufficiente utilizzare la tecnica delle immagini grazie al fatto che le trazioni τ_{xy} e τ_{xx} sono identicamente nulle.

2.3 Metodo delle immagini

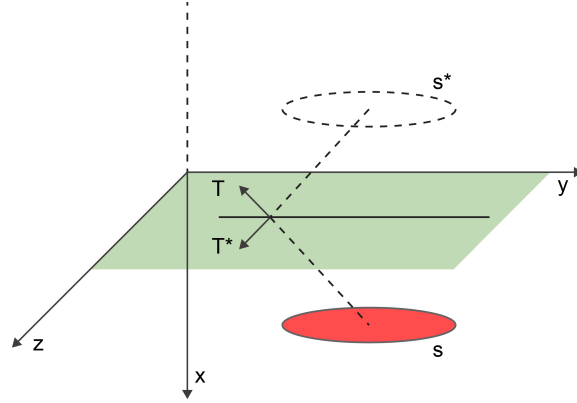


Figura 2.5: Una sorgente di dislocazione S in $x > 0$ e la sua immagine speculare in $x < 0$

Consideriamo una sorgente deformativa S posta nel semipiano $x > 0$. In generale, la soluzione avrà valori degli sforzi non nulli sul piano $x = 0$. Indichiamo con u il campo di spostamento generato da S . Ora, specularmente a S rispetto al piano $x = 0$, consideriamo una sorgente immagine S^* , con relativo campo di spostamento u^* . Il vettore spostamento totale risulta generato dalla sovrapposizione delle soluzioni u e u^* : $U = u + u^*$. Per simmetria, esso presenterà una componente U_x dispari in x , e le due componenti orizzontali U_y e U_z pari in x .

$$\begin{cases} U_x(-x) = -U_x(x) \\ U_y(-x) = U_y(x) \\ U_z(-x) = U_z(x) \end{cases}$$

Conseguentemente, le componenti del gradiente dello spostamento complessivo dovuto a $S + S^*$ si divideranno in pari e dispari. Sapendo che:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

allora ϵ_{xy} , ϵ_{yx} , ϵ_{xz} , ϵ_{zx} sono dispari in x . Invece, ϵ_{yy} , ϵ_{zz} , ϵ_{xx} , ϵ_{yz} , ϵ_{zy} sono pari in x . Ricordando le relazioni costitutive:

$$\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

Gli sforzi complessivi risultano:

$$T_{ij} = \tau_{ij} + \tau'_{ij}$$

Che, applicati in superficie ($x = 0$) divengono:

$$\begin{array}{ll} T_{xx} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) & \text{pari in } x \\ T_{yx} = \mu(\epsilon_{yx} + \epsilon_{xy}) & \text{dispari in } x \\ T_{zx} = \mu(\epsilon_{zx} + \epsilon_{xz}) & \text{dispari in } x \end{array}$$

in $x = 0$ si avrà:

$$\begin{array}{l} T_{yx} = T_{zx} = 0 \text{ e} \\ T_{xx} = 2\tau_{xx} \end{array}$$

Per ottenere la soluzione in un semispazio con superficie libera è quindi sufficiente trovare una strategia per eliminare la sola componente normale τ_{xx} .

Capitolo 3

Dislocazioni di bordo

Consideriamo nuovamente una superficie di dislocazione coincidente con il semipiano x, z con $x > 0$ e la linea di dislocazione con l'asse z . Questa volta sia però il vettore di Burgers \vec{b} orientato nella direzione positiva dell'asse x :

$$\begin{aligned}\hat{\tau} &= \hat{k} \\ \vec{b} &= b\hat{i} \\ \vec{b} \times \vec{\tau} &= b\hat{j}\end{aligned}$$

L'equazione di equilibrio si riduce a:

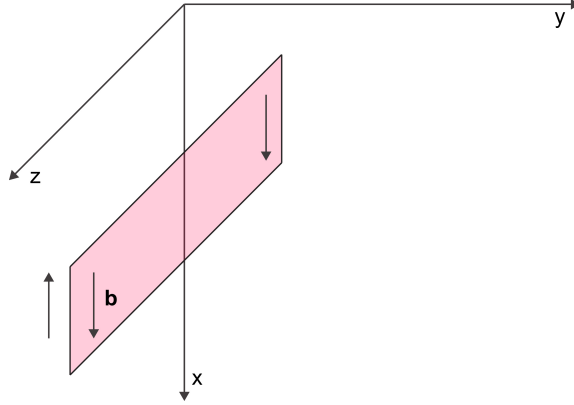
$$\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot u) = b\hat{j}\delta(r) \quad (\text{con } \nu \text{ Modulo di Poisson})$$

La condizione di dislocazione risulta:

$$\oint_L du_x = -b$$

Dove L indica la linea di dislocazione. Risulta:

$$\begin{aligned}u_z &= 0 \\ u &= u(x, y)\end{aligned}$$

Figura 3.1: Sorgente di dislocazione S piana

Le soluzioni del campo di spostamento sono:

$$u_x = \frac{b}{2\pi} \left[\arctan \frac{x}{y} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right] \quad (3.1)$$

$$u_y = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right] \quad (3.2)$$

Da cui si possono ricavare le componenti del campo di sforzo:

$$\tau_{xx} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{y(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad (3.3)$$

$$\tau_{yy} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad (3.4)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{x(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad (3.5)$$

$$\tau_{zz} = \nu(\tau_{xx} + \tau_{yy}) = \frac{\mu b \nu}{\pi(1-\nu)} \frac{y}{(x^2 + y^2)} \quad (3.6)$$

3.1 Soluzione in prossimità della superficie libera per una dislocazione di bordo

Per una superficie che si apre in $x = x_0$ e si chiude in ∞ :

$$u_x = \frac{b}{2\pi} \left[\arctan \frac{x - x_0}{y} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{(x - x_0)y}{(x - x_0)^2 + y^2} \right] \quad (3.7)$$

$$u_y = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \cdot \frac{1}{2} \ln[(x - x_0)^2 + y^2] - \frac{y^2}{(x - x_0)^2 + y^2} \right] \quad (3.8)$$

Le trazioni relative alla superficie $x = \text{costante}$ (piani paralleli a yz) sono:

$$\tau_{xx} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{y [3(x-x_0)^2 + y^2]}{[(x-x_0)^2 + y^2]^2} \quad (3.9)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-x_0) [y^2 - (x-x_0)^2]}{[(x-x_0)^2 + y^2]^2} \quad (3.10)$$

La faglia immagine sarà una faglia che si apre in $-\infty$ e si chiude in $x = -x_0$. Gli sforzi τ_{ij}^* dovuti alla dislocazione immagine S^* sono descritti dalle precedenti soluzioni con x_0 sostituita da $-x_0$ e con b cambiato di segno. Le componenti dello sforzo per una tale faglia risultano pertanto:

$$\tau_{xx}^* = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{y [3(x+x_0)^2 + y^2]}{[(x+x_0)^2 + y^2]^2} \quad (3.11)$$

$$\tau_{xy}^* = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x+x_0) [y^2 - (x+x_0)^2]}{[(x+x_0)^2 + y^2]^2} \quad (3.12)$$

che, sommate alle precedenti (3.9), (3.10) in superficie ($x = 0$) forniscono:

$$T_{xx} = \tau_{xx}^* + \tau_{xx} = \frac{\mu b}{\pi(1-\nu)} \frac{y(3x_0^2 + y^2)}{(x_0^2 + y^2)^2} = 2\tau_{xx} \quad (3.13)$$

$$T_{xy} = \tau_{xy}^* + \tau_{xy} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{x_0(y^2 - x_0^2)}{(x_0^2 + y^2)^2} + \frac{-x_0(y^2 - x_0^2)}{(x_0^2 + y^2)^2} \right] = 0 \quad (3.14)$$

Quindi ora dobbiamo annullare la componente T_{xx} . Utilizziamo la tecnica della funzione di Airy.

Nel nostro caso risulta:

$$T_{xx}(y) = A \frac{y(3x_0^2 + y^2)}{(x_0^2 + y^2)^2} \quad \text{con } A = \frac{\mu b}{\pi(1-\nu)}$$

Sviluppiamo la $T_{xx}(y)$ secondo la “ Trasformata - seno ” di Fourier, dato che la funzione $T_{xx}(y)$ è dispari in y :

$$T_{xx}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty s(k) \sin(ky) dk$$

dove la trasformata di Fourier è calcolato tramite:

$$s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty T_{xx}(y) \sin(ky) dy$$

Dal calcolo integrale (riportato più avanti):

$$s(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot A \cdot e^{-kx_0} (kx_0 + 1)$$

Adesso, in analogia con le equazioni ricavate nella sezione relativa alla funzione di Airy e per la linearità dell'integrale che definisce la trasformata, otteniamo:

$$T_{yy} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty s(k)(1 - kx)e^{-kx} \sin(ky) dk \quad (3.15)$$

$$T_{xx} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty s(k)(1 + kx)e^{-kx} \sin(ky) dk \quad (3.16)$$

$$T_{xy} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty s(k) \cdot kx \cdot e^{-kx} \cos(ky) dk \quad (3.17)$$

Calcolando gli integrali per parti (svolti più avanti):

$$T_{yy} = \frac{\mu b}{\pi(1 - \nu)} \left\{ \frac{y}{(x + x_0)^2 + y^2} - \frac{2y(x^2 - x_0^2)}{[(x + x_0)^2 + y^2]^2} - \frac{2yxx_0 [3(x + x_0)^2 - y^2]}{[(x + x_0)^2 + y^2]^3} \right\} \quad (3.18)$$

$$T_{xx} = \frac{\mu b}{\pi(1 - \nu)} \left\{ \frac{y}{(x + x_0)^2 + y^2} + \frac{2y(x + x_0)^2}{[(x + x_0)^2 + y^2]^2} + \frac{2yxx_0 [3(x + x_0)^2 - y^2]}{[(x + x_0)^2 + y^2]^3} \right\} \quad (3.19)$$

$$T_{xy} = -\frac{\mu b}{\pi(1 - \nu)} \left\{ \frac{x [(x + x_0)^2 - y^2]}{[(x + x_0)^2 + y^2]^2} + \frac{2xx_0(x + x_0) [(x + x_0)^2 - 3y^2]}{[(x + x_0)^2 + y^2]^3} \right\} \quad (3.20)$$

Calcolando T_{xx} in superficie ($x = 0$):

$$T_{xx} = \frac{\mu b}{\pi(1 - \nu)} \left\{ \frac{y(3x_0^2 + y^2)}{[(x + x_0)^2 + y^2]^2} \right\}$$

L'espressione coincide con quella data dalla somma della faglia S e della sua immagine S^* . Pertanto, è da sottrarre ad essa per annullare la componente T_{xx} in superficie.

Le equazioni ottenute per il campo di spostamento sono:

$$u_x^a = -\frac{b}{\pi} \arctan \frac{y}{x+x_0} - \frac{b}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{y[x+2(1-\nu)x_0]}{(x+x_0)^2+y^2} + \frac{2y(x+x_0)xx_0}{[(x+x_0)^2+y^2]^2} \right\} \quad (3.21)$$

$$u_y^a = \frac{b}{2\pi(1-\nu)} \frac{1-2\nu}{2} \ln[(x+x_0)^2+y^2] + \frac{b}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(1-\nu)(x^2-x_0^2)+\nu(x+x_0)^2}{(x+x_0)^2+y^2} + \frac{[y^2+(x+x_0)^2]xx_0}{[(x+x_0)^2+y^2]^2} \right\} \quad (3.22)$$

Che in superficie ($x=0$) assumono la forma:

$$u_x^a(y) = -\frac{b}{\pi} \arctan \frac{y}{x_0} - \frac{b}{\pi} \left[\frac{yx_0}{x_0^2+y^2} \right]$$

$$u_y^a(y) = \frac{b}{2\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{1}{2} \ln(x_0^2+y^2) + \frac{x_0^2}{x_0^2+y^2} \right]$$

E sottratte ai valori u_x, u_y di S e u_x^*, u_y^* di S^* , forniscono in superficie:

$$U_{X_{TOT}}(y) = u_x + u_x^* - u_x^a = -u_x^a = \frac{b}{\pi} \arctan \frac{y}{x_0} + \frac{b}{\pi} \left[\frac{yx_0}{x_0^2+y^2} \right]$$

$$U_{Y_{TOT}}(y) = u_y + u_y^* - u_y^a = 2u_y - u_y^a = -\frac{b}{2\pi(1-\nu)}$$

3.1.1 Calcolo di $s(\mathbf{k})$

$$s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot A \int_0^\infty \frac{y(3x_0^2+y^2)}{(x_0^2+y^2)^2} \sin(ky) dy$$

Per la parità dell'integrando è possibile calcolare l'integrale come:

$$s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot A \cdot \frac{1}{2} \cdot Im \int_{-\infty}^\infty \frac{y(3x_0^2+y^2)}{(x_0^2+y^2)^2} e^{iky} dy$$

Calcoliamo l'integrale che definisce $s(k)$ servendoci del teorema dei residui:

$$s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot A \cdot \frac{1}{2} \cdot Im \left\{ 2\pi i \sum_{interni} Res \left[\frac{y(3x_0^2+y^2)}{(x_0^2+y^2)^2} e^{iky} \right] \right\}$$

Consideriamo un percorso chiuso di integrazione nel semipiano complesso positivo.

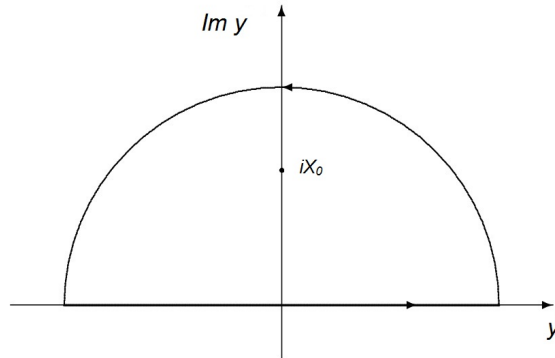


Figura 3.2: percorso di integrazione

La funzione ammette un polo del second'ordine interno al percorso di integrazione: $y = ix_0$. Ricordando la formula per il calcolo del residuo per un polo di ordine n :

$$\text{Res}f(y) \Big|_{y=y_0} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \left[(y - y_0)^n f(y) \right]$$

Si ottiene:

$$\text{Residuo} = \frac{[(3y^2 + 3x_0^2)e^{-iky} - ik(y^3 + 3x_0^2y)e^{-iky}] (y + ix_0)^2}{(y + ix_0)^4} - \frac{2(y + ix_0)(y^3 + 3x_0^2y)e^{-iky}}{(y + ix_0)^4}$$

$$\text{Residuo} = \frac{e^{-kx_0}}{2}(kx_0 + 1)$$

Da cui:

$$s(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot A \cdot e^{-kx_0}(kx_0 + 1)$$

3.1.2 Calcolo di T_{yy}

$$\begin{aligned}
T_{yy} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty s(k)(1 - kx)e^{-kx} \sin(ky) dk \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot A \int_0^\infty e^{-kx_0}(1 + kx_0)(1 - kx)e^{-kx} \sin(ky) dk \\
&= A \cdot \text{Im} \int_0^\infty e^{-kx_0}(1 + kx_0)(1 - kx)e^{-kx} e^{iky} dk \\
&= A \cdot \text{Im} \int_0^\infty e^{-k(x+x_0-iy)} [-xx_0k^2 + (x_0 - x)k + 1] dk = A \cdot \text{Im}\{I\}
\end{aligned}$$

Calcoliamo l'integrale per parti:

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{x + x_0 - iy} \left[-xx_0k^2 + (x_0 - x)k + 1 \right] e^{-k(x+x_0-iy)} \Big|_0^\infty + \\
&\quad + \frac{1}{x + x_0 - iy} \int_0^\infty e^{-k(x+x_0-iy)} [-2xx_0k + (x_0 - x)] dk
\end{aligned}$$

Si giunge a:

$$I = \frac{1}{x + x_0 - iy} - \frac{x - x_0}{[x + x_0 - iy]^2} - \frac{2xx_0}{[x + x_0 - iy]^3}$$

Razionalizzando:

$$I = \frac{x + x_0 + iy}{(x + x_0)^2 + y^2} - \frac{(x - x_0)(x + x_0 + iy)^2}{[(x + x_0)^2 + y^2]^2} - \frac{2xx_0(x + x_0 + iy)^3}{[(x + x_0)^2 + y^2]^3}$$

Considerando la parte immaginaria:

$$\text{Im}\{I\} = \frac{y}{(x + x_0)^2 + y^2} - \frac{2y(x^2 - x_0^2)}{[(x + x_0)^2 + y^2]^2} - \frac{2xx_0y [3(x + x_0)^2 - y^2]}{[(x + x_0)^2 + y^2]^3}$$

Da cui infine:

$$T_{yy} = A \left\{ \frac{y}{(x + x_0)^2 + y^2} - \frac{2y(x^2 - x_0^2)}{[(x + x_0)^2 + y^2]^2} - \frac{2xx_0y [3(x + x_0)^2 - y^2]}{[(x + x_0)^2 + y^2]^3} \right\}$$

3.1.3 Calcolo di T_{xx}

$$\begin{aligned}
T_{xx} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty s(k)(1+kx)e^{-kx} \sin(ky) dk \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot A \int_0^\infty e^{-kx_0}(1+kx_0)(1+kx)e^{-kx} \sin(ky) dk \\
&= A \cdot \text{Im} \int_0^\infty e^{-kx_0}(1+kx_0)(1+kx)e^{-kx} e^{iky} dk \\
&= A \cdot \text{Im} \int_0^\infty e^{-k(x+x_0-iy)} [xx_0k^2 + (x+x_0)k + 1] dk = A \cdot \text{Im}\{I\}
\end{aligned}$$

Calcoliamo l'integrale per parti:

$$\begin{aligned}
I &= - \frac{e^{-k(x+x_0-iy)}}{x+x_0-iy} [xx_0k^2 + (x+x_0)k + 1] \Big|_0^\infty + \\
&\quad + \frac{1}{x+x_0-iy} \int_0^\infty e^{-k(x+x_0-iy)} [2xx_0k + (x+x_0)] dk
\end{aligned}$$

Si giunge a:

$$I = \frac{1}{x+x_0-iy} + \frac{x+x_0}{[x+x_0-iy]^2} + \frac{2xx_0}{[x+x_0-iy]^3}$$

Razionalizzando:

$$I = \frac{(x+x_0)+iy}{(x+x_0)^2+y^2} + \frac{(x+x_0)(x+x_0+iy)^2}{[(x+x_0)^2+y^2]^2} + \frac{2xx_0(x+x_0+iy)^3}{[(x+x_0)^2+y^2]^3}$$

Considerando la parte immaginaria:

$$\text{Im}\{I\} = \frac{y}{(x+x_0)^2+y^2} + \frac{2y(x+x_0)^2}{[(x+x_0)^2+y^2]^2} + \frac{2yxx_0[3(x+x_0)^2-y^2]}{[(x+x_0)^2+y^2]^3}$$

Da cui infine:

$$T_{xx} = A \left\{ \frac{y}{(x+x_0)^2+y^2} + \frac{2y(x+x_0)^2}{[(x+x_0)^2+y^2]^2} + \frac{2yxx_0[3(x+x_0)^2-y^2]}{[(x+x_0)^2+y^2]^3} \right\}$$

3.1.4 Calcolo di T_{xy}

$$\begin{aligned}
T_{xy} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty s(k) k x e^{-kx} \cos(ky) dk \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot A \int_0^\infty e^{-kx_0} (1 + kx_0) k x e^{-kx} \cos(ky) dk \\
&= -A \cdot \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-kx_0} (1 + kx_0) k x e^{-kx} e^{iky} dk \\
&= -A \cdot \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-k(x+x_0-iy)} [k^2 x x_0 + kx] dk = -A \cdot \operatorname{Re}\{I\}
\end{aligned}$$

Calcoliamo l'integrale per parti:

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{e^{-k(x+x_0-iy)}}{x+x_0-iy} [k^2 x x_0 + kx] \Big|_0^\infty + \\
&\quad + \frac{1}{x+x_0-iy} \int_0^\infty e^{-k(x+x_0-iy)} [2x x_0 k + x] dk
\end{aligned}$$

Si giunge a:

$$I = \frac{x}{(x+x_0-iy)^2} + \frac{2x x_0}{[x+x_0-iy]^3}$$

Razionalizzando:

$$I = \frac{x(x+x_0+iy)^2}{[(x+x_0)^2+y^2]^2} + \frac{2x x_0(x+x_0+iy)^3}{[(x+x_0)^2+y^2]^3}$$

Considerando la parte reale:

$$\operatorname{Re}\{I\} = \frac{x[(x+x_0)^2-y^2]}{[(x+x_0)^2+y^2]^2} + \frac{2x x_0[(x+x_0)^3-3y^2(x+x_0)]}{[(x+x_0)^2+y^2]^3}$$

Da cui infine:

$$T_{xy} = -A \left\{ \frac{x[(x+x_0)^2-y^2]}{[(x+x_0)^2+y^2]^2} + \frac{2x x_0(x+x_0)[(x+x_0)^2-3y^2]}{[(x+x_0)^2+y^2]^3} \right\}$$

3.1.5 Calcolo degli spostamenti

Siano date

$$\begin{aligned}
T_{yy} &= \int_0^\infty s(k)(1-kx)e^{-kx} \sin(ky) dk \\
T_{xx} &= \int_0^\infty s(k)(1+kx)e^{-kx} \sin(ky) dk \\
T_{xy} &= -\int_0^\infty s(k) \cdot kx \cdot e^{-kx} \cos(ky) dk
\end{aligned}$$

con:

$$s(k) = A \cdot e^{-kx_0}(kx_0 + 1)$$

Consideriamo le singole componenti armoniche:

$$\tilde{T}_{yy} = s(k)(1 - kx)e^{-kx} \sin ky \quad (3.23)$$

$$\tilde{T}_{xx} = s(k)(1 + kx)e^{-kx} \sin ky \quad (3.24)$$

$$\tilde{T}_{xy} = -s(k) \cdot kx \cdot e^{-kx} \cos ky \quad (3.25)$$

Adesso, note le singole armoniche del tensore di sforzo, è nostro obiettivo ricavare, sfruttando le relazioni costitutive, le armoniche del campo di spostamento.

Le componenti del tensore di deformazione sono:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \epsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Dalle relazioni costitutive:

$$\begin{aligned} T_{xx} &= (2\mu + \lambda)\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \\ T_{yy} &= (2\mu + \lambda)\epsilon_{yy} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz}) \\ T_{zz} &= (2\mu + \lambda)\epsilon_{zz} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \\ T_{xy} &= 2\mu\epsilon_{xy} \\ T_{xz} &= 2\mu\epsilon_{xz} \\ T_{yz} &= 2\mu\epsilon_{yz} \end{aligned}$$

Ricaviamo, nel caso di una dislocazione di bordo ($u_z = 0$ e $u = u(x, y)$):

$$\begin{aligned} T_{xx} &= (2\mu + \lambda)\epsilon_{xx} + \lambda\epsilon_{yy} \\ T_{yy} &= (2\mu + \lambda)\epsilon_{yy} + \lambda\epsilon_{xx} \\ T_{zz} &= \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \\ T_{xy} &= 2\mu\epsilon_{xy} \end{aligned}$$

Risolviamo ora il sistema lineare:

$$\begin{cases} T_{xx} = (2\mu + \lambda)\epsilon_{xx} + \lambda\epsilon_{yy} \\ T_{yy} = (2\mu + \lambda)\epsilon_{yy} + \lambda\epsilon_{xx} \end{cases}$$

Risolvendo in ϵ_{xx} e ϵ_{yy} , si ottiene:

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{1-\nu^2}{E}T_{xx} - \frac{\nu(\nu+1)}{E}T_{yy} \\ \epsilon_{yy} = \frac{1-\nu^2}{E}T_{yy} - \frac{\nu(\nu+1)}{E}T_{xx} \end{cases}$$

con $E = 2\mu(1 + \nu) = \frac{\mu(3\lambda+2\nu)}{\lambda+\nu}$ che rappresenta il *Modulo di Young* ($\frac{\tau_{11}}{\epsilon_{11}}$).
Pertanto:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1-\nu^2}{E} \int (T_{xx} - \beta T_{yy}) dx \\ u_y &= \frac{1-\nu^2}{E} \int (T_{yy} - \beta T_{xx}) dy \end{aligned}$$

Dove si è posto:

$$\beta = \frac{\nu}{1-\nu}$$

Calcoliamo per cominciare le singole armoniche:

$$\tilde{u}_x = \frac{1-\nu^2}{E} \int (\tilde{T}_{xx} - \beta \tilde{T}_{yy}) dx \quad \tilde{u}_y = \frac{1-\nu^2}{E} \int (\tilde{T}_{yy} - \beta \tilde{T}_{xx}) dy$$

1. \tilde{u}_x

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x &= \frac{1-\nu^2}{E} s(k) \int [(1+kx) - \beta(1-kx)] e^{-kx} \sin(ky) dx \\ &= \frac{1-\nu^2}{E} s(k) \sin(ky) \int [(1+kx) - \beta(1-kx)] e^{-kx} dx \\ &= \frac{1-\nu^2}{E} s(k) \sin(ky) \int [k(1+\beta)x + (1-\beta)] e^{-kx} dx \\ &= \frac{1-\nu^2}{E} s(k) \sin(ky) \left\{ -\frac{e^{-kx}}{k} [k(1+\beta)x + (1-\beta)] + \int \frac{1}{k} k(1+\beta) e^{-kx} dx \right\} \\ &= \frac{1-\nu^2}{E} s(k) \sin(ky) \left\{ -\frac{e^{-kx}}{k} [k(1+\beta)x + (1-\beta)] - \frac{e^{-kx}}{k} (1+\beta) \right\} \\ &= -\frac{1-\nu^2}{E} s(k) \sin(ky) \left[(1+\beta)x + \frac{2}{k} \right] e^{-kx} \end{aligned}$$

2. \tilde{u}_y

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_y &= \frac{1-\nu^2}{E} s(k) \int [(1-kx) - \beta(1+kx)] e^{-kx} \sin(ky) dy \\
&= \frac{1-\nu^2}{E} s(k) \int [(1-kx) - \beta(1+kx)] e^{-kx} \sin(ky) dy \\
&= \frac{1-\nu^2}{E} s(k) [(1-kx) - \beta(1+kx)] e^{-kx} \int \sin(ky) dy \\
&= -\frac{1-\nu^2}{k} \frac{1}{E} s(k) [-x(1+\beta)k + (1-\beta)] e^{-kx} \cos(ky)
\end{aligned}$$

Quindi adesso calcoliamo u_x e u_y come:

$$u_x = \int_0^\infty \tilde{u}_x dk \quad u_y = \int_0^\infty \tilde{u}_y dk$$

1. u_x

$$\begin{aligned}
u_x &= -\frac{1-\nu^2}{E} \int_0^\infty s(k) \left[(1+\beta)x + \frac{2}{k} \right] e^{-kx} \sin(ky) dk \\
&= -\frac{A(1-\nu^2)}{E} \int_0^\infty e^{-kx_0} (1+kx_0) \left[(1+\beta)x + \frac{2}{k} \right] e^{-kx} \sin(ky) dk \\
&= -\frac{A(1-\nu^2)}{E} \int_0^\infty e^{-kx_0} (1+kx_0) \left[(1+\beta)x + \frac{2}{k} \right] e^{-kx} \sin(ky) dk \\
&= -\frac{A(1-\nu^2)}{E} \int_0^\infty \left[(1+\beta)xx_0k + (1+\beta)x + 2x_0 + \frac{2}{k} \right] e^{-(x+x_0)k} \sin(ky) dk
\end{aligned}$$

Spezziamo u_x nella somma di due integrali:

$$\begin{aligned}
u_x &= -\frac{A(1-\nu^2)}{E} \left\{ \int_0^\infty [(1+\beta)xx_0k + (1+\beta)x + 2x_0] e^{-(x+x_0)k} \sin(ky) dk + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \frac{2}{k} e^{-(x+x_0)k} \sin(ky) dk \right\} \\
&= -\frac{A(1-\nu^2)}{E} \left\{ I_1 + I_2 \right\}
\end{aligned}$$

Calcoliamo il primo integrale:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\infty [(1+\beta)xx_0k + (1+\beta)x + 2x_0] e^{-(x+x_0)k} \sin(ky) dk \\
&= \text{Im} \int_0^\infty [(1+\beta)xx_0k + (1+\beta)x + 2x_0] e^{-(x+x_0-iy)k} dk
\end{aligned}$$

Integrando per parti:

$$\begin{aligned} I_1 &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{[(1+\beta)x + 2x_0]}{(x+x_0-iy)} + \frac{[(1+\beta)xx_0]}{(x+x_0-iy)^2} \right\} \\ &= \left\{ \frac{y[(1+\beta)x + 2x_0]}{(x+x_0)^2 + y^2} + \frac{[2y(x+x_0)(1+\beta)xx_0]}{[(x+x_0)^2 + y^2]^2} \right\} \end{aligned}$$

Ora calcoliamo il secondo integrale:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\infty \frac{2}{k} e^{-(x+x_0)k} \sin(ky) dk \\ I_2(x, y) &= 2 \int_0^\infty \frac{1}{k} e^{-(x+x_0)k} \sin(ky) dk \end{aligned}$$

Deriviamo rispetto a y per far sparire la variabile k a denominatore, per poi re-integrare successivamente:

$$\begin{aligned} \frac{dI_2(x, y)}{dy} &= 2 \int_0^\infty e^{-(x+x_0)k} \cos(ky) dk \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-(x+x_0-iy)k} dk \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{[x+x_0-iy]} \right\} \\ &= 2 \frac{x+x_0}{[(x+x_0)^2 + y^2]} \end{aligned}$$

Perciò:

$$\begin{aligned} I_2(x, y) &= 2 \int_0^y \frac{x+x_0}{[(x+x_0)^2 + y^2]} dy \\ &= 2 \arctan \left(\frac{y}{x+x_0} \right) \end{aligned}$$

Ricomponendo i due integrali ottengo:

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{A(1-\nu^2)}{E} 2 \arctan \left(\frac{y}{x+x_0} \right) - \frac{A(1-\nu^2)}{E} \left\{ \frac{y[(1+\beta)x + 2x_0]}{(x+x_0)^2 + y^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2y(x+x_0)(1+\beta)xx_0}{[(x+x_0)^2 + y^2]^2} \right\} \end{aligned}$$

Ricordando che:

$$E = 2\mu(1+\nu); \quad A = \frac{\mu b}{\pi(1-\nu)} \quad \implies \quad \frac{A}{E} = \frac{b}{2\pi(1-\nu^2)}$$

$$\begin{aligned}
u_x &= -\frac{b}{2\pi} 2 \arctan \left(\frac{y}{x+x_0} \right) - \frac{b}{2\pi} \frac{1}{1-\nu} \left\{ \frac{y[x+2(1-\nu)x_0]}{(x+x_0)^2+y^2} + \frac{2y(x+x_0)xx_0}{[(x+x_0)^2+y^2]^2} \right\} \\
&= -\frac{b}{\pi} \arctan \frac{y}{x+x_0} - \frac{b}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{y[x+2(1-\nu)x_0]}{(x+x_0)^2+y^2} + \frac{2y(x+x_0)xx_0}{[(x+x_0)^2+y^2]^2} \right\}
\end{aligned}$$

2. u_y

$$\begin{aligned}
u_y &= -\frac{1-\nu^2}{E} \int_0^\infty \frac{1}{k} s(k) \left[-x(1+\beta)k + (1-\beta) \right] e^{-kx} \cos(ky) dk \\
&= -\frac{A(1-\nu^2)}{E} \int_0^\infty e^{-kx_0} (1+kx_0) \frac{1}{k} \left[-x(1+\beta)k + (1-\beta) \right] e^{-kx} \cos(ky) dk \\
&= -\frac{A(1-\nu^2)}{E} \int_0^\infty e^{-kx_0} \left(\frac{1}{k} + x_0 \right) \left[-x(1+\beta)k + (1-\beta) \right] e^{-kx} \cos(ky) dk \\
&= -\frac{A(1-\nu^2)}{E} \int_0^\infty \left[-xx_0(1+\beta)k - (1+\beta)(x+x_0) + \frac{1-\beta}{k} \right] e^{-k(x+x_0)} \cos(ky) dk
\end{aligned}$$

Spezziamo u_y nella somma di due integrali:

$$\begin{aligned}
u_y &= -\frac{A(1-\nu^2)}{E} \left\{ \int_0^\infty \left[-xx_0(1+\beta)k - (1+\beta)(x+x_0) \right] e^{-(x+x_0)k} \cos(ky) dk + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \frac{1-\beta}{k} e^{-(x+x_0)k} \cos(ky) dk \right\} \\
&= -\frac{A(1-\nu^2)}{E} \left\{ I_1 + I_2 \right\}
\end{aligned}$$

Calcoliamo il primo integrale:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\infty \left[-xx_0(1+\beta)k - (x-x_0) - \beta(x+x_0) \right] e^{-(x+x_0)k} \cos(ky) dk \\
&= -\operatorname{Re} \int_0^\infty \left[xx_0(1+\beta)k + (x-x_0) + \beta(x+x_0) \right] e^{-(x+x_0-iy)k} dk
\end{aligned}$$

Integrando per parti:

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\operatorname{Re} \left\{ \frac{(x-x_0) + \beta(x+x_0)}{(x+x_0-iy)} + \frac{[(1+\beta)xx_0]}{(x+x_0-iy)^2} \right\} \\
&= -\left\{ \frac{(x^2-x_0^2) + \beta(x+x_0)^2}{(x+x_0)^2+y^2} + \frac{[y^2+(x+x_0)^2][(1+\beta)xx_0]}{[(x+x_0)^2+y^2]^2} \right\}
\end{aligned}$$

Resta da calcolare:

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{1-\beta}{k} e^{-(x+x_0)k} \cos(ky) dk$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_2(x, y)}{dy} &= -(1-\beta) \int_0^\infty e^{-(x+x_0)k} \sin(ky) dk \\ &= -(1-\beta) \operatorname{Im} \int_0^\infty e^{-(x+x_0-iy)k} dk \\ &= -(1-\beta) \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{[x+x_0-iy]} \right\} \\ &= -(1-\beta) \frac{y}{[(x+x_0)^2 + y^2]} \end{aligned}$$

Perciò:

$$\begin{aligned} I_2(x, y) &= -(1-\beta) \int_0^y \frac{y}{[(x+x_0)^2 + y^2]} dy \\ &= -\frac{1-\beta}{2} \ln[(x+x_0)^2 + y^2] \end{aligned}$$

Ricomponendo i due integrali ottengo:

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{A(1-\nu^2)(1-\beta)}{2E} \ln[(x+x_0)^2 + y^2] + \\ &+ \frac{A(1-\nu^2)}{E} \left\{ \frac{(x^2 - x_0^2) + \beta(x+x_0)^2}{(x+x_0)^2 + y^2} + \frac{[y^2 + (x+x_0)^2][(1+\beta)xx_0]}{[(x+x_0)^2 + y^2]^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{b}{4\pi} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \ln[(x+x_0)^2 + y^2] + \\ &+ \frac{b}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(1-\nu)(x^2 - x_0^2) + \nu(x+x_0)^2}{(x+x_0)^2 + y^2} + \frac{[y^2 + (x+x_0)^2]xx_0}{[(x+x_0)^2 + y^2]^2} \right\} \end{aligned}$$

3.2 Soluzione in prossimità della superficie libera per una dislocazione di bordo limitata

Per una superficie che si apre in $x = x_1$ e si chiude in $x = x_2$:

$$u_x = \frac{b}{2\pi} \left[\arctan \frac{x - x_1}{y} - \frac{1}{2(1 - \nu)} \frac{(x - x_1)y}{(x - x_1)^2 + y^2} - \right. \quad (3.26)$$

$$\left. - \arctan \frac{x - x_2}{y} + \frac{1}{2(1 - \nu)} \frac{(x - x_2)y}{(x - x_2)^2 + y^2} \right] \quad (3.27)$$

$$u_y = \frac{b}{4\pi(1 - \nu)} \left[(1 - 2\nu) \cdot \frac{1}{2} \ln[(x - x_1)^2 + y^2] - \frac{y^2}{(x - x_1)^2 + y^2} - \right. \quad (3.28)$$

$$\left. - (1 - 2\nu) \cdot \frac{1}{2} \ln[(x - x_2)^2 + y^2] + \frac{y^2}{(x - x_2)^2 + y^2} \right] \quad (3.29)$$

Le trazioni relative alla superficie $x = \text{costante}$ (piani paralleli a yz) sono:

$$\tau_{xx} = \frac{\mu b}{2\pi(1 - \nu)} \left[\frac{y[3(x - x_1)^2 + y^2]}{[(x - x_1)^2 + y^2]^2} - \frac{y[3(x - x_2)^2 + y^2]}{[(x - x_2)^2 + y^2]^2} \right] \quad (3.30)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\mu b}{2\pi(1 - \nu)} \left[\frac{(x - x_1)[y^2 - (x - x_1)^2]}{[(x - x_1)^2 + y^2]^2} - \frac{(x - x_2)[y^2 - (x - x_2)^2]}{[(x - x_2)^2 + y^2]^2} \right] \quad (3.31)$$

La faglia immagine sarà una faglia che si apre in $x = -x_2$ e si chiude in $x = -x_1$. Le componenti dello sforzo per una tale faglia risultano pertanto:

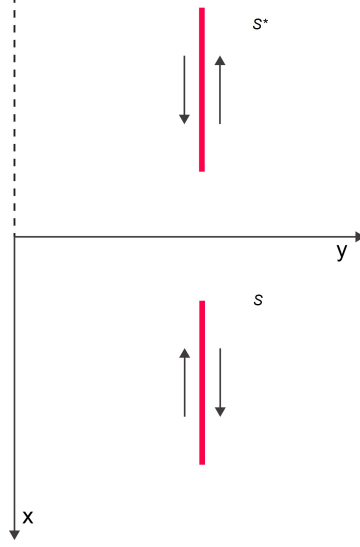
$$\tau_{xx}^* = \frac{\mu(-b)}{2\pi(1 - \nu)} \left[\frac{y[3(x + x_2)^2 + y^2]}{[(x + x_2)^2 + y^2]^2} - \frac{y[3(x + x_1)^2 + y^2]}{[(x + x_1)^2 + y^2]^2} \right] \quad (3.32)$$

$$\tau_{xy}^* = \frac{\mu(-b)}{2\pi(1 - \nu)} \left[\frac{(x + x_2)[y^2 - (x + x_2)^2]}{[(x + x_2)^2 + y^2]^2} - \frac{(x + x_1)[y^2 - (x + x_1)^2]}{[(x + x_1)^2 + y^2]^2} \right] \quad (3.33)$$

che, sommate alle precedenti (3.30), (3.31) in superficie ($x = 0$) forniscono:

$$T_{xx} = \tau_{xx}^* + \tau_{xx} = \frac{\mu b}{\pi(1 - \nu)} \left[\frac{y(3x_1^2 + y^2)}{(x_1^2 + y^2)^2} - \frac{y(3x_2^2 + y^2)}{(x_2^2 + y^2)^2} \right] = 2\tau_{xx} \quad (3.34)$$

$$T_{yz} = \tau_{xy}^* + \tau_{xy} = 0 \quad (3.35)$$

Figura 3.3: Sorgente di dislocazione S e relativa immagine S^*

Quindi ora dobbiamo annullare la componente T_{xx} . Utilizziamo la tecnica della funzione di Airy.

Nel nostro caso risulta:

$$T_{xx}(y) = A \left[\frac{y(3x_1^2 + y^2)}{(x_1^2 + y^2)^2} - \frac{y(3x_2^2 + y^2)}{(x_2^2 + y^2)^2} \right] \quad \text{con } A = \frac{\mu b}{\pi(1 - \nu)}$$

Sviluppiamo la $T_{xx}(y)$ secondo la “Trasformata-seno” di Fourier, dato che $T_{xx}(y)$ è dispari in y :

$$T_{xx}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty s(k) \sin(ky) dk$$

dove la trasformata di Fourier è calcolato tramite:

$$s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty T_{xx}(y) \sin(ky) dy$$

Dal calcolo integrale:

$$s(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot A \cdot [e^{-kx_1}(kx_1 + 1) - e^{-kx_2}(kx_2 + 1)]$$

Adesso, in analogia con le equazioni ricavate nella sezione relativa alla funzione di Airy e per la linearità dell'integrale che definisce la trasformata,

ottengo:

$$T_{yy} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty s(k)(1 - kx)e^{-kx} \sin(ky)dk \quad (3.36)$$

$$T_{xx} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty s(k)(1 + kx)e^{-kx} \sin(ky)dk \quad (3.37)$$

$$T_{xy} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty s(k) \cdot kx \cdot e^{-kx} \cos(ky)dk \quad (3.38)$$

Calcolando gli integrali per parti:

$$T_{yy} = \frac{\mu b}{\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{y}{(x+x_1)^2+y^2} - \frac{2y(x^2-x_1^2)}{[(x+x_1)^2+y^2]^2} - \frac{2yxx_1[3(x+x_1)^2-y^2]}{[(x+x_1)^2+y^2]^3} \right. \\ \left. - \frac{y}{(x+x_2)^2+y^2} + \frac{2y(x^2-x_2^2)}{[(x+x_2)^2+y^2]^2} + \frac{2yxx_2[3(x+x_2)^2-y^2]}{[(x+x_2)^2+y^2]^3} \right\} \quad (3.39)$$

$$T_{xx} = \frac{\mu b}{\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{y}{(x+x_1)^2+y^2} + \frac{2y(x+x_1)^2}{[(x+x_1)^2+y^2]^2} + \frac{2yxx_1[3(x+x_1)^2-y^2]}{[(x+x_1)^2+y^2]^3} \right. \\ \left. - \frac{y}{(x+x_2)^2+y^2} - \frac{2y(x+x_2)^2}{[(x+x_2)^2+y^2]^2} - \frac{2yxx_2[3(x+x_2)^2-y^2]}{[(x+x_2)^2+y^2]^3} \right\} \quad (3.40)$$

$$T_{xy} = -\frac{\mu b}{\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{x[(x+x_1)^2-y^2]}{[(x+x_1)^2+y^2]^2} + \frac{2xx_1(x+x_1)[(x+x_1)^2-3y^2]}{[(x+x_1)^2+y^2]^3} \right. \\ \left. - \frac{x[(x+x_2)^2-y^2]}{[(x+x_2)^2+y^2]^2} - \frac{2xx_2(x+x_2)[(x+x_2)^2-3y^2]}{[(x+x_2)^2+y^2]^3} \right\} \quad (3.41)$$

Calcolando T_{xx} in superficie ($x = 0$):

$$T_{xx} = \frac{\mu b}{\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{y(3x_1^2+y^2)}{(x_1^2+y^2)^2} - \frac{y(3x_2^2+y^2)}{(x_2^2+y^2)^2} \right\}$$

L'espressione coincide con quella data dalla somma della faglia S e della sua immagine S^* . Pertanto, è da sottrarre ad essa per annullare la componente T_{xx} in superficie.

Le equazioni ottenute per il campo di spostamento sono:

$$u_x^a = -\frac{b}{\pi} \arctan \frac{y}{x+x_1} - \frac{b}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{y[x+2(1-\nu)x_1]}{(x+x_1)^2+y^2} + \frac{2y(x+x_1)xx_1}{[(x+x_1)^2+y^2]^2} \right\} + \\ + \frac{b}{\pi} \arctan \frac{y}{x+x_2} + \frac{b}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{y[x+2(1-\nu)x_2]}{(x+x_2)^2+y^2} + \frac{2y(x+x_2)xx_2}{[(x+x_2)^2+y^2]^2} \right\}$$

$$u_y^a = \frac{b}{2\pi(1-\nu)} \frac{1-2\nu}{2} \ln[(x+x_1)^2 + y^2] + \frac{b}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(1-\nu)(x^2 - x_1^2) + \nu(x+x_1)^2}{(x+x_1)^2 + y^2} + \frac{[y^2 + (x+x_1)^2]xx_1}{[(x+x_1)^2 + y^2]^2} \right\} - \frac{b}{2\pi(1-\nu)} \frac{1-2\nu}{2} \ln[(x+x_2)^2 + y^2] - \frac{b}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(1-\nu)(x^2 - x_2^2) + \nu(x+x_2)^2}{(x+x_2)^2 + y^2} - \frac{[y^2 + (x+x_2)^2]xx_2}{[(x+x_2)^2 + y^2]^2} \right\}$$

Che sottratte ai contributi u_x, u_y di S e u_x^*, u_y^* di S^* , forniscono in superficie ($x = 0$):

$$\begin{aligned} U_{X_{TOT}}(y) &= u_x + u_x^* - u_x^a = -u_x^a = \\ &= \frac{b}{\pi} \arctan \frac{y}{x_1} + \frac{b}{\pi} \left(\frac{yx_1}{x_1^2 + y^2} \right) - \frac{b}{\pi} \arctan \frac{y}{x_2} - \frac{b}{\pi} \left(\frac{yx_2}{x_2^2 + y^2} \right) \\ U_{Y_{TOT}}(y) &= u_y + u_y^* - u_y^a = 2u_y - u_y^a = 0 \end{aligned}$$

3.3 Stress function di Airy

Consideriamo un problema di deformazione piana con $u_z = w = 0$, $f_z = Z = 0$, $u_x = u(x, y)$, $u_y = v(x, y)$. Le equazioni di equilibrio sono:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -f_x \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = -f_y \end{cases}$$

Per una deformazione piana in (x, y) risulta $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ mentre $\tau_{zz} = \nu(\tau_{xx} + \tau_{yy})$. Volendo determinare le tre incognite τ_{xx} , τ_{xy} , τ_{yy} serve una ulteriore equazione da affiancare alle equazioni di equilibrio. L'equazione mancante è fornita da una delle condizioni di compatibilità di Beltrami-Mitchell. Sfruttiamo la condizione:

$$\nabla^2 \tau_{kk} = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla \cdot \mathbf{f}$$

Ponendo $\tau_{zz} = \nu(\tau_{xx} + \tau_{yy})$ e $f_z = 0$, si ottiene:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\tau_{xx} + \tau_{yy}) = -\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right)$$

Consideriamo ora l'ipotesi che le forze di volume siano conservative, e pertanto derivabili da un potenziale:

$$f_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad f_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

Le equazioni di equilibrio risultano allora:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx} - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy} - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

Per soddisfare identicamente tali equazioni è sufficiente introdurre due funzioni Φ e Ψ tali che:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} - V &= \frac{\partial \Phi}{\partial y}, & \tau_{xy} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, & \tau_{yy} - V &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned}$$

Dovrà essere $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$. Ciò è garantito se esiste una funzione χ tale che:

$$\Phi = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \Psi = \frac{\partial \chi}{\partial x}$$

Denotiamo con χ la funzione di Airy. Risulta:

$$\tau_{xx} - V = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}; \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}; \quad \tau_{yy} - V = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$$

Se τ_{xx} , τ_{xy} , τ_{yy} sono ricavate da una tale funzione χ secondo queste relazioni, allora le equazioni di equilibrio sono identicamente soddisfatte. Ma χ deve soddisfare la equazione di compatibilità. Si ottiene pertanto:

$$\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial y^4} = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (3.42)$$

E, nel caso in cui le forze di volume siano trascurabili, si ottiene una equazione *bi-armonica*:

$$\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial y^4} = 0 \quad (3.43)$$

Consideriamo un semispazio elastico $x \geq 0$, in configurazione di deformazione piana e in assenza di forze di volume. Perciò $w = 0$, $u_x = u(x, y)$, $u_y = v(x, y)$. Siano assegnate sulla superficie del semispazio le trazioni:

$$\tau_{xx} = C \sin ky, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \text{in } y = 0 \quad (3.44)$$

Cerchiamo la soluzione al campo di sforzi τ_{ij} nel semispazio $x > 0$ servendoci della funzione di Airy. Per invarianza traslazionale è possibile indovinarne la forma:

$$\chi(x, y) = \sin ky f(x)$$

Cerchiamo $f(x)$ sostituendo la espressione della $\chi(x, y)$ nella equazione bi-armonica:

$$k^4 f(x) - 2k^2 f''(x) + f^{(4)}(x) = 0$$

La cui soluzione generale è:

$$f(x) = B_1 e^{-kx} + B_2 x e^{-kx} + B_3 e^{kx} + B_4 x e^{kx}$$

Chiaramente $B_3 = B_4 = 0$ per problemi di divergenza all'infinito. Servendosi delle equazioni che definiscono le trazioni nota la χ , si ottiene:

$$\begin{aligned}\tau_{yy} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \sin ky [B_1 k^2 + B_2(-2k + k^2 x)] e^{-kx} \\ \tau_{xx} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = -k^2 \sin ky [B_1 + B_2 x] e^{-kx} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} = -k \cos ky [-kB_1 + B_2(1 - kx)] e^{-kx}\end{aligned}$$

Dalle condizioni iniziali $\tau_{xy} = 0$ e $\tau_{xx} = C \sin ky$ in $x = 0$, risulta che:

$$B_2 = kB_1 \quad \rightarrow \quad B_1 = -\frac{C}{k^2}, \quad B_2 = -\frac{C}{k}$$

Risulta infine:

$$\begin{aligned}\tau_{yy} &= C(1 - kx)e^{-kx} \sin ky \\ \tau_{xx} &= C(1 + kx)e^{-kx} \sin ky \\ \tau_{xy} &= -Ckx e^{-kx} \cos ky.\end{aligned} \tag{3.45}$$

Adesso, cerchiamo delle espressioni del campo di spostamento in funzione della χ . Sapendo che $T_{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}$ è possibile ricavare la forma della χ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \chi}{\partial y} &= \int T_{xx} dy + f(x) \\ \chi &= \int \int T_{xx} dy + yf(x) + g(x)\end{aligned}$$

Dove f e g sono funzioni arbitrarie della sola x . Cerchiamo una loro precisa espressione calcolando $\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \chi}{\partial x} &= Cx e^{-kx} \sin ky + yf'(x) + g'(x) \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} &= C(1 - kx)e^{-kx} \sin ky + yf''(x) + g''(x)\end{aligned}$$

Ma deve essere:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = T_{yy}$$

Quindi, dal confronto delle due espressioni, deve essere $f = g = 0$ identicamente. E risulta:

$$\chi = -\frac{1}{k^2} C(1 + kx)e^{-kx} \sin ky$$

Riprendendo le espressioni precedentemente ricavate:

$$u_x = \frac{1 - \nu^2}{E} \int (T_{xx} - \beta T_{yy}) dx$$

$$u_y = \frac{1 - \nu^2}{E} \int (T_{yy} - \beta T_{xx}) dy$$

Posso sfruttare la funzione di Airy:

$$u_x = \frac{1 - \nu^2}{E} \int \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - \beta \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right) dx$$

$$u_y = \frac{1 - \nu^2}{E} \int \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) dx$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - \beta \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{(1 - \nu^2)(1 - \beta)}{E} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E} \nabla^2 \chi$$

Quindi ora, consideriamo il problema cardine di questa trattazione: trovare la soluzione per una sorgente deformativa (ad esempio una faglia) in un semispazio elastico con superficie libera a partire dalla soluzione dell'analogo problema in un mezzo elastico illimitato. Se la soluzione nota ha in $x = 0$ trazioni $\tau_{xy} = 0$ e $\tau_{xz} = 0$ è possibile operare secondo i successivi passi:

- calcolare le trazioni generate sul piano $x = 0$ dalla soluzione nel mezzo illimitato;
- separarle nelle componenti del tipo (3.44) armoniche servendosi delle trasformate di Fourier;

- ricomporre il campo di sforzo servendosi della trasformata inversa di Fourier sulle (3.45);
- sottrarre dalla soluzione iniziale le soluzioni ottenute al passo precedente.

Capitolo 4

Conclusione

Nota la soluzione dei problemi dislocativi in un semispazio illimitato, siamo riusciti a trovare la soluzione in prossimità della superficie libera.

Per le dislocazioni a vite è stato sufficiente servirsi della tecnica delle immagini, in quanto la soluzione per la sorgente di partenza prevede sforzi τ_{xx} identicamente nulli. Tale dislocazione può fornire un semplice modello per descrivere sforzi e deformazioni indotte da faglie trasformi (o di strike-slip) molto lunghe.

Invece, per quanto riguarda le dislocazioni di bordo (che forniscono un semplice modello per le faglie di dip-slip verticali) è stato necessario ricorrere, oltre che alla tecnica delle immagini per annullare τ_{xy} in $x = 0$, all'uso di una opportuna funzione di Airy. La soluzione del problema dislocativo è stata in tal caso trovata come: soluzione per una sorgente in un semispazio illimitato, più soluzione per la sorgente immagine, meno la soluzione per un semispazio con trazioni T_{xx} applicate alla superficie.

Bibliografia

- [1] Landau L. D., Lifshitz E. M., *Theory of Elasticity*, Pergamon Press, 1970
- [2] Bonafede M., Appunti dal corso di Fondamenti di Geofisica, 13 Dicembre 2012
- [3] Ortolani F., Appunti di Metodi Matematici per la Fisica, 19 Febbraio 2013
- [4] Bonafede M., Appunti dal corso di Fisica del Sistema Terra, Meccanica dei continui ,14 maggio 2013
- [5] Asaro Robert J., Lubarda Vlado A., *Mechanics of Solids and Materials*, Cambridge University Press, 2006