Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

LA TEORIA DEI GIOCHI IN CLASSE: COSA E' CAMBIATO

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Giorgio Bolondi

Correlatore:
Chiar.mo Prof.
Gianfranco Gambarelli

Presentata da:
Laura Michela d'Astore

I Sessione
Anno Accademico 2013/2014

Introduzione

In un articolo di D'Amore, Fandiño Pinilla e Marazzani (2004) si discutono i risultati di un laboratorio di "esercizi anticipati" di matematica, cioè particolari situazioni di problem solving in cui testi-stimolo tipici della pratica didattica vengono proposti appunto "in anticipo" rispetto al programma: l'unico requisito è che il risolutore capisca il senso del testo e della richiesta. Confrontando situazioni autonome e collaborative nello studio in questione si conclude che un apprendimento collaborativo in presenza di motivazione positiva produce apprendimento autonomo : se ne deduce l'importanza di un ripensamento della pratica didattica che tenga conto della collaborazione tra compagni. Si discute inoltre il falso timore legato alla proposta di compiti che possono portare al fallimento: stimolando la motivazione, infatti, il fallimento può diventare uno stimolo per far lavorare insieme gli studenti e far sì che possano insieme "costruire conoscenza" (D'Amore, Fandiño Pinilla e Marazzani, 2004).

Wæge (2009) mostra come cambiamenti nella pratica didattica possano influenzare la motivazione degli studenti per l'apprendimento della matematica; promuovere la partecipazione attiva, incoraggiare alla comprensione, stimolare allo sviluppo di idee personali, applicare la matematica in situazioni realistiche, trarre le proprie conclusioni e collaborare con i compagni: tutti esempi di pratiche che possono avvicinare gli studenti all'intenzione di apprendere la matematica.

"Insights into Game Theory: an alternative mathematical experience" è un libro scritto da Gura e Maschler (2008): è pensato come uno spunto per l'insegnante di scuola superiore o università che voglia introdurre la Teoria dei Giochi alla sua classe. Uno degli obiettivi del libro è quello di presentare al lettore e agli studenti una "matematica diversa", che non sia sepolta sotto complicate formule ma che metta in luce il pensiero matematico. Un altro scopo è quello di mostrare che la matematica può efficacemente occuparsi di questioni sociali. Un terzo obiettivo è quello di intensificare e addirittura arricchire il pensiero matematico della persona che legge questo libro (Gura, 2009).

I tre lavori appena citati hanno ispirato la sperimentazione discusso nella presente tesi: un laboratorio di esercizi anticipati di Teoria dei Giochi proposto ad alunni delle classi prima e seconde di scuola superiore di secondo grado in situazione collaborativa, con l'obiettivo di agire sulla motivazione e di far conoscere la Teoria dei Giochi.
Nel primo capitolo è data la definizione di motivazione in matematica in relazione alle diverse teorie esistenti, elaborate da psicologi e ricercatori in Didattica della matematica; nel secondo capitolo si tratta di Teoria dei Giochi e si analizzano dal punto di vista matematico alcuni argomenti cui si fa riferimento nel laboratorio; nel terzo capitolo è descritto la sperimentazione e nel quarto le relative conclusioni; in Appendice i materiali utilizzati.

Indice

Capitolo 1

La Motivazione

Fino a circa 20 anni fa la ricerca sulle attività cognitive prendeva in minima parte in considerazione la dimensione emozionale delle stesse, mentre soprattutto in matematica i fattori emozionali, motivazionali e volitivi sono centrali (Pellerey e Orio, 1996). La motivazione rappresenta infatti le ragioni che gli individui hanno per comportarsi in un certo modo in una data situazione: esse esistono in quanto parte strutturante degli obiettivi di una persona, delle sue convinzioni circa l'importanza delle cose, e determinano se la persona sarà o no coinvolta in una data attività (Middleton e Spanias, 1999).

1.1 Definizioni generali

Pellerey e Orio suggeriscono la doppia validità di convinzioni, atteggiamenti, motivazioni ed emozioni: questi sono elementi tutti collegati e segnati sia dalla dimensione affettiva che da quella cognitiva.

Le *emozioni* si compongono di due momenti: la reazione fisiologica a uno stimolo esterno o interno e il seguente apprezzamento soggettivo della stessa; l'interpretazione dello stimolo è mediata dal sistema personale di convinzioni e valori. In matematica le emozioni svolgono un ruolo fondamentale e in generale prevalgono quelle negative su quelle positive, come mostrano ad esempio le percentuali di Prawat e Anderson (1994, citati da Pellerey e Orio, 1996) ricavate da uno studio su bambini di quarta e quinta primaria:

Emozioni positive	%	Emozioni negative	%
Felicità	21.1	Rabbia	27.5
Eccitazione	1.9	Ansietà	9.6
Divertimento	2.2	Frustrazione	5.8
Fiducia	2.6	Infelicità	5.4
Sollievo	1.9	Noia	4.2
		Altre	16.7

Ansietà, rabbia e frustrazione, le emozioni negative più forti, sono correlate in matematica con la percezione di mancanza di competenza e di comprensione delle aspettative. In più l'ansia legata all'esperienza scolastica della matematica aumenta con l'avanzamento del grado nella carriera scolastica.

Per *convinzioni* in matematica si intende il complesso sistema composto da percezione della propria capacità, concezione dell'intelligenza matematica, concezione della matematica come disciplina scolastica, concetto di sè in relazione alla matematica e al suo apprendimento e valore ad essi attribuito. I valori della matematica, del suo apprendimento e del successo personale, sono elementi che influiscono altamente sulla motivazione, sulle emozioni e sulle scelte personali.

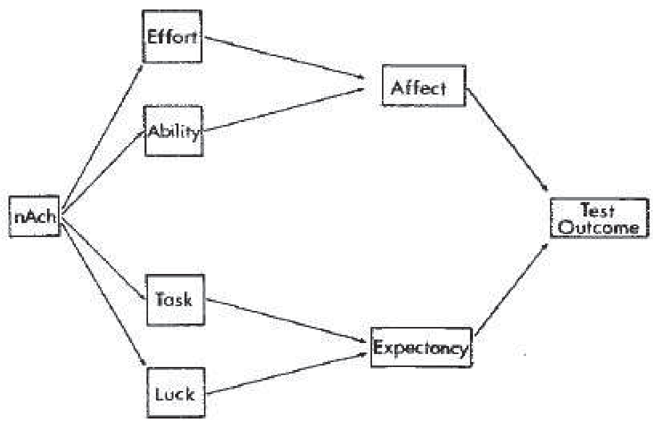
La *motivazione* è rappresentata da uno stato interno che nasce dall'incontro di valori, convinzioni e percezione della situazione presente. In base alle convinzioni e agli obiettivi dello studente sono state sviluppate diverse teorie (vedi paragrafi successivi).

Gli *atteggiamenti* sono definiti come manifestazioni esterne di valori interni. Gli atteggiamenti negativi nei confronti della matematica si sviluppano abbastanza presto negli studenti; Mc Leod (1989, citato da Pellerey e Orio, 1996) parla di "automatizzazione delle reazioni negative ripetute e trasferimento di atteggiamenti negativi già presenti a situazioni di apprendimento correlate". Motivazione, percezione di competenza e atteggiamenti positivi diminuiscono nel corso dell'esperienza matematica scolastica fino a un'avversione che sfocia anche in un rifiuto totale.

Lester (1980, citato da Pellerey e Orio, 1996) segnala come *volizione*, perseveranza e fiducia in sè stessi siano i maggiori fattori che influenzano la prestazione degli studenti in matematica. Alcuni studiosi distinguono tra il momento motivazionale (o predecisionale) e quello volitivo (o post decisionale), ovvero tra intenzione di agire e decisione.

1.1.1 Teoria delle attribuzioni

L'intenzione di un individuo di intraprendere una data attività è mediata dal valore che le conseguenze di un eventuale successo hanno per il soggetto. La teoria dell'*attribuzione* sostiene che, nelle situazioni di profitto scolastico, gli studenti tendono ad attribuire il proprio successo o fallimento a una tra quattro ampie categorie di cause: la propria capacità (Ability), la propria fortuna (Luck), il proprio impegno (Effort), la difficoltà del compito (Task) (Pellerey e Orio, 1995); tali cause possono poi essere controllabili o incontrollabili, stabili o instabili.



Nella figura (Covington, 1983) "nAch" sta per *need for achievement*, ovvero il bisogno di ottenere un successo. Fondamentale tra le attribuzioni è la percezione della propria competenza o abilità: quando gli studenti attribuiscono il successo alla propria abilità tendono ad ottenere ancora successi, mentre quando l'attribuzione del fallimento è legato alla propria mancanza di abilità tendono a fallire; questi risultati sono molto importanti nel caso in cui l'abilità sia ritenuta soggetta a cambiamenti o ad accrescimento attraverso lo sforzo: questo tipo di studenti tende a impegnarsi sempre più in matematica e risulta più soggetto a realizzazione rispetto agli altri.

Una conseguenza della teoria della attribuzione è l'attenzione dei ricercatori nei confronti della *learned helplessness*, ovvero la condizione di impotenza in cui volgono gli studenti che, per mancanza di successi e attribuzione dei fallimenti alla propria mancanza di abilità, iniziano a vedere il successo come non raggiungibile. Per questo tipo di studenti si propone una rieducazione alle attribuzioni contemporaneamente a un rinforzo delle abilità.

Kloostermann (1992) nota come l'esperienza evidenzi l'efficacia dei controesempi per quanto riguarda in generale il superamento di convinzioni negative/sbagliate: perciò per esempio studenti che credono di non essere in grado di risolvere problemi hanno bisogno di avere esperienze di successo in questo campo; in aggiunta propone gruppi di discussione per mettere gli studenti nella condizione di riflettere sulle proprie convinzioni.

1.1.2 Ego- e task- involvement

Diversi orientamenti della motivazione generano diversi tipi di coinvolgimento in una attività; se ne evidenziano due tipi: task-involvement, ovvero coinvolgimento nel compito, e ego-involvement, che quindi si riferisce all'individuo. Gli studenti con una *task orientation* hanno una definizione di successo come mezzo per l'acquisizione di conoscenze o abilità o per il raggiungimento di un obiettivo particolarmente impegnativo; la *ego-orientation* identifica il successo con l'affermazione della propria superiorità rispetto agli altri. Questi due tipi di coinvolgimento sono indipendenti l'uno dall'altro; c'è una terza dimensione, la *work avoidance*, l'evitare il lavoro, che è negativamente correlata con la task-orientation e non correlata o positivamente correlata alla ego-orientation.

Cobb (1985) analizza i casi di due bambini, Scenetra e Tyrone, in uno studio longitudinale di due anni. Scenetra è un classico esempio di ego-involved: si evidenzia la sua tendenza a confrontare la sua performance con quella degli altri bambini; il fallimento non da luogo alla ricerca di altri modi di procedere, ma è motivo di dubbio circa le proprie competenze; i problemi da risolvere sono visti come "ostacoli" posti dall'insegnante o minacce alla propria autostima e non sfide all'intelletto.
Tyrone è invece motivato da un desiderio di capire e di dare senso alle esperienze; giudica le proprie competenze in relazione al livello precedente di performance o di comprensione; il fallimento lo porta a una nuova sfida intellettuale, come se le difficoltà fossero opportunità per acquisire nuove conoscenze.
In conclusione la motivazione sembra influenzare anche il modo in cui vedono il fallimento, la sicurezza, la persistenza, la volontà di prendere l'iniziativa e il modo in cui ottengono soddisfazione dallo svolgimento di un compito.

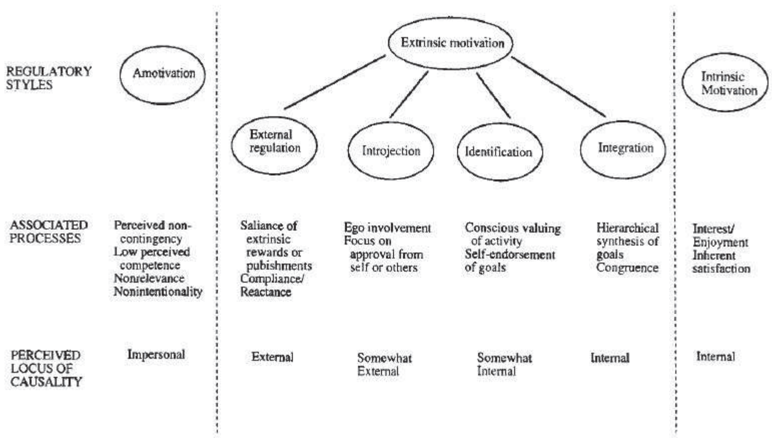
Da uno studio sugli orientamenti della motivazione di alcune classi di scuola primaria (Nicholls, Cobb, Wood, Yackel, Patashnick, 1990) si ricava l'associazione tra task-orientation e convinzione che il successo dipende da interesse, sforzo, tentativi di dare senso alle cose e collaborazione con i compagni; una ego-orientation risulta associata invece con la convinzione che il successo dipende da una abilità superiore e dagli sforzi per primeggiare sugli altri. La percezione di abilità non risulta correlata con nessuno dei due orientamenti.
Lo stesso studio prevedeva alcune classi target in cui i bambini lavoravano a coppie in un'atmosfera di dialogo: l'insegnante non suggeriva le risposte ma piuttosto facilitava il dialogo tra studenti. Nonostante i due orientamenti considerati siano perlopiù stabili nel tempo, i dati dello studio in questione indicano che la pratica didattica può invece avere un'influenza considerabile su di essi. Nelle classi target risultano poi, diversamente dalle altre, una maggiore propensione per la task-orientation e la convinzione che il successo in matematica dipenda dai tentativi di dare un significato; allo stesso

tempo si registra una minore presenza di work avoidance, ego orientation e convinzione dell'importanza di fattori esterni all'attività.

1.1.3 Motivazione Intrinseca ed Estrinseca

La motivazione di un individuo è caratterizzata anche dall'origine della stessa; si hanno due tipi di motivazione: quella intrinseca, che si genera direttamente dall'interesse nei confronti del compito/attività da svolgere, e quella estrinseca, ovvero la spinta ad agire in funzione di un risultato o premio esterni.

E' stato riscontrato che la motivazione intrinseca si indebolisce andando avanti nella carriera scolastica; tale motivazione infatti, non è innata nell'individuo ma tende ad essere catalizzata da determinati fattori sociali e ambientali. La percezione di competenza, o auto-efficacia, durante un'azione può accrescere la motivazione intrinseca per quell'azione; tuttavia questo non basta se non è presente anche un senso di autonomia, o *internal perceived locus of casuality*. Molti studi hanno confermato che insegnanti che sostengono negli alunni un sentimento di autonomia catalizzano in essi maggiore motivazione intrinseca, curiosità e desiderio di sfida. Si ricorda comunque che la motivazione intrinseca compare solo per attività reputate interessanti dall'individuo, per le altre si parla di motivazione estrinseca. Ryan e Deci (2000) propongono una tassonomia della motivazione:



Come si vede dalla figura ci sono diversi tipi di motivazione estrinseca: infatti per esempio uno studente che fa i compiti solo perchè teme la punizione dei genitori ha un motivo per agire differente da quello che può avere un alunno che studia perchè ritiene che sia importante per il suo futuro. Per poter spiegare queste differenze Ryan e Deci (2000) si servono di due processi: *internalizzazione*, ovvero dare un valore alle cose, e *integrazione*, cioè attribuire a tale valore un senso tale da sentirlo proprio.
E' il diverso grado di autonomia che determina una diversa sfumatura nella motivazione. A sinistra in figura vediamo la *amotivation*, uno stato in cui prevale la non intenzione ad agire; le cause possono essere diverse: ritenere l'attività senza valore, non sentirsi competente, non credere che porterà a un risultato.
Subito a destra la *external regulation* descrive comportamenti volti a soddisfare una richiesta esterna o a ottenere un'eventuale ricompensa imposta dall'esterno; gli individui sembrano agire come controllati e alienati e, in contrasto con la motivazione intrinseca, sono caratterizzati da un *external locus of casuality* (EPLOC).
Gli individui che sviluppano una motivazione del tipo *introjection* agiscono con lo scopo di evitare il senso di colpa o di ansietà o per ottenere accrescimento dell'ego o orgoglio personale; difatti una classica forma di regolazione introspettiva è la ego-involvement. I comportamenti non sono però direttamente emanati dalla persona, vi è ancora quindi un EPLOC.
Un'altra forma più autonoma di motivazione estrinseca è la *identification*: qui la persona si immedesima con l'importanza di un comportamento e lo accetta come proprio; può essere per esempio il caso di un bambino che impara lo spelling delle parole perchè servono per scrivere, cosa che ritiene un obiettivo importante.
L'ultima forma di motivazione estrinseca, la più vicina a quella intrinseca, è la *integrated regulation*, in cui, internalizzando le ragioni di un'azione e assimilandole come proprie, i comportamenti estrinsecamente motivati diventano auto-determinati.

La categorizzazione appena vista non deve essere presa come un continuum: difatti non è vero che internalizzando maggiormente si può passare da motivazione estrinseca a intrinseca. In generale a scuola l'apprendimento auto-determinato e determinante necessita di condizioni che soddisfano i tre bisogni umani primari (vedi paragrafo successivo): sentirsi connesso, efficace e agente nel momento in cui si è esposti a nuove idee e esercizio di nuove abilità (Ryan e Deci, 2000).

1.1.4 Needs e Goals

La Self Determination Theory (SDT) è una teoria generale della motivazione che focalizza la sua attenzione sugli obiettivi (*goals*) di un comportamento e su cosa lo induce. La SDT si basa su tre assunti: il primo afferma che l'uomo ha una innata tendenza all'integrazione (*develop an even more elaborated and unified sense of self*); il secondo sostiene l'influenza dei fattori socio-contestuali in quanto catalizzanti oppure ostacolanti tale tendenza; l'ultimo parla dei tre bisogni (*needs*) fondamentali dell'essere umano, ovvero competenza (o sentimento di auto-efficacia), relazionalità (o sentirsi connessi con gli altri) e autonomia (o sentirsi l'origine dei propri comportamenti).
Secondo la teoria la motivazione diventa un potenziale che dirige il comportamento e che è costruito nel sistema che controlla le emozioni: questo potenziale può manifestarsi sotto forma di attività cognitiva, emozioni e/o comportamenti (Hannula, 2004). In quest'ottica i bisogni sono gli attivatori della motivazione. I bisogni sono diretti verso una categoria di oggetti, mentre gli obiettivi sono specifici per l'oggetto in questione; la relazione tra i due è mediata dalle convinzioni: alcuni studi mostrano come bisogni differenti danno luogo a obiettivi differenti e dunque a comportamenti differenti nelle situazioni matematiche. Sembra che un cambiamento della motivazione sia possibile in determinate condizioni: prima di tutto deve esserci un obiettivo desiderato; in secondo luogo il sistema di convinzioni deve supportare la causa.

Hannula (2004) suggerisce la pratica didattica come campo per la ricerca futura; sostiene infatti l'importanza di imparare ad usare i bisogni degli studenti e non a controllarli; a questo proposito attività collaborative ben architettate possono incontrare ogni tipo di bisogno sociale e di autonomia; l'interesse e la proposta di attività stimolanti provocano un senso di familiarità con il compito o anche condivisa con gli altri (Hannula, 2004).

1.2 Misurare la motivazione

Nel progettare lo studio descritto al capitolo 3 si presentava il problema della "misurazione" della motivazione. Seguendo le teorie sopradescritte sono stati sviluppati due tipi di strumenti: il tema ha permesso di contestualizzare il campione, i due questionari sono stati poi utilizzati per valutare la motivazione in relazione anche all'attività di laboratorio svolta.
Si è cercato, nel costruire gli strumenti, di ridurre al minimo la *social desirability*, cioè la tendenza di rispondere a una domanda in maniera tale da compiacere qualcun'altro. Tale tendenza è, per le ricerche di questo tipo, un problema: diventa infatti difficile distinguere le persone con tratti positivi che rispondono attenendosi ai fatti da coloro che invece distorcono le risposte in una direzione positiva.

1.2.1 Il tema

Agli alunni del campione è stato assegnato un tema libero dal titolo "Il mio rapporto con la matematica dalle elementari ad oggi", che è stato poi utilizzato per analizzare il contesto dello studio (vedi cap 3.1). Lo strumento è descritto da Zan e Di Martino (2009) ed è stato utilizzato nel progetto nazionale finanziato dal Miur "L'atteggiamento negativo nei confronti della matematica: analisi di un fenomeno allarmante per la cultura del nuovo millennio". Zan e Di Martino sottolineano la necessità di comprendere i motivi dei comportamenti degli studenti, piuttosto che di spiegarne le cause: con questo strumento il narratore non deve esprimere la sua posizione circa argomenti scelti da qualcun'altro ma può scegliere gli aspetti che considera più importanti per parlare della sua esperienza in matematica.

L'insegnante può utilizzare il tema per monitorare la situazione della classe e anche per conoscere meglio i bisogni dei suoi studenti in modo da strutturare apposite pratiche didattiche; lo studente a cui viene richiesto di scrivere un tema si sentirà poi considerato dall'insegnante non solo in base ai suoi successi scolastici ma anche per quanto riguarda i suoi pensieri e sentimenti circa la materia (Zan e Di Martino, 2009).

1.2.2 I questionari

E' stato necessario analizzare la motivazione degli studenti prima e dopo l'attività di laboratorio svolta: per fare questo sono stati sviluppati due questionari utilizzando il framework della motivazione proposto da Wæge, basato sulla SDT. Sono state analizzate 5 variabili:

1. focalizzazione sull'apprendimento e la comprensione dei concetti matematici;

2. divertimento nelle attività matematiche;

3. sentimenti nei confronti della matematica;

4. volontà di rischiare e mettersi in gioco;

5. sicurezza nell'apprendimento;

Le variabili appena espresse fanno riferimento ai bisogni di competenza e autonomia.
Per poter ridurre ancora di più la social desirability i questionari somministrati erano anonimi e si è cercato di porre le domande nella maniera più neutrale possibile e in forma aperta. A seguito dell'analisi dei questionari sono stati intervistati alcuni studenti in modo da confermare o smentire la veridicità delle risposte e per comprendere meglio queste ultime.

1.3 Motivation Achievement

La costruzione o l'accrescimento di una giusta motivazione si ottiene sicuramente attraverso l'esperienza di successo; è possibile sviluppare un'orientazione verso il successo proprio all'interno delle lezioni di matematica (Middleton e Spanias, 1999). Slavin (1984, citato da Middleton, 1999) sostiene l'importanza dei lavori di gruppo per lo sviluppo della motivazione. Se poi, in più, è prevista una ricompensa gli studenti sono motivati ad aiutare gli altri e stimolati a imparare a loro volta; il successo viene così attribuito a se stessi e il fallimento al gruppo, riducendo l'eventuale onere personale. Willson (1983, citato Schiefele e Csikszentmihalyi, 1995) studia la relazione tra sistemi emozionali- motivazionali e il successo nelle materie scientifiche: se nei primi anni di scuola le emozioni sono determinate dal successo, procedendo con la carriera scolastica si trova che invece è il successo che dipende dal sistema emozionale. Schiefele e Csikszentmihalyi (1995) scoprono infatti che negli alunni di 15-16 anni l'interesse è un predittore del successo migliore di quanto non sia il successo per l'interesse.

Quando l'insegnante si focalizza sulla comprensione dei concetti e costruisce ambienti facilitativi lo studente tende ad essere più ricettivo e meno ansioso: le buone esperienze in matematica sono più internalizzate e più influenti rispetto alle altre altre materie (Middleton e Spanias, 1999). Schiefele e Csikszentmihalyi (1995) mostrano come la qualità dell'esperienza sia correlata con l'interesse e con l'accrescimento della motivazione; queste ultime, poi, si influenzano a vicenda. L'abilità, invece, non risulta correlata con l'esperienza.

In conclusione, tenendo presente che cambiamenti nella pratica didattica possono portare anche cambiamenti nella motivazione, è necessario dare spazio alla ricerca autonoma, alla discussione e alla costruzione sociale dei significati (Pellerey e Orio, 1996): è quello che si è cercato di fare nello studio descritto nei capitoli successivi.

Capitolo 2

La Teoria dei Giochi

Una delle applicazioni della Matematica alla realtà è la Teoria dei Giochi: questa scienza matematica studia le interazioni strategiche tra esseri umani detti *giocatori*. I *giochi* non sono quelli a cui normalmente si fa riferimento con questa parola, bensì situazioni di conflitto tra giocatori: ci sono *giochi competitivi*, come per esempio un'asta oppure una gara d'appalto o una partita a scacchi, e *giochi cooperativi*, cioè situazioni in cui i giocatori possono collaborare per ottenere e poi spartirsi un guadagno. Si considerano come giocatori i cosiddetti soggetti razionali, ossia esseri umani che, se chiamati a scegliere, optano sempre per la mossa che porta loro il massimo guadagno.

E' fondamentale che tutti i giocatori conoscano le regole del gioco, tutte le mosse che hanno a disposizione e ogni conseguenza che ne deriva; è poi possibile che conoscano anche la mossa scelta dall'altro giocatore, e quindi parleremo di *informazione perfetta*, oppure la mossa potrebbe essere per esempio simultanea e dunque ogni giocatore non saprebbe cosa hanno fatto gli altri, quindi parleremo di *informazione imperfetta*. Essendo lo scopo del giocatore quello di ottenere il massimo guadagno possibile, introdurremo una funzione, detta *pay-off* che associa ad ogni mossa del giocatore il guadagno che ottiene.
La storia della Teoria dei Giochi è relativamente breve: si può dire infatti che nasce nel 1928, quando John Von Neumann pubblica il suo teorema

del MinMax, che permette di trovare soluzioni per alcuni tipi di giochi competitivi (vedi dopo); lo stesso Von Neumann pubblica poi, insieme a Oskar Morgestern, il libro "The Theory of Games and Economic Behaviour", essendo difatti l'economia l'ambito in cui la Teoria dei Giochi trova la sua massima applicazione. Non per ultimo John Forbes Nash pubblica, nel 1950, la sua tesi di dottorato in cui dimostra il suo celebre teorema sull'Equilibrio di Nash.

La Teoria dei Giochi è una branca della matematica sfruttata in molti ambiti: come suddetto sicuramente in Economia è molto utilizzata, ma anche in Politica, Medicina, Finanza, Biologia, Marketing, situazioni di guerra; si interessano di Teoria dei Giochi anche studiosi di Psicologia, Sociologia, Logica, Filosofia, proprio per la componente umana e sociale che domina tutta la teoria.
I giochi si possono rappresentare in diverse forme: normale, estesa e caratteristica; la forma normale prevede l'utilizzo di tabelle (vedi 2.2), per quella estesa si utilizzano gli alberi (vedi 2.3), la caratteristica è la forma deputata a rappresentare i giochi cooperativi (vedi 2.4). Nei prossimi paragrafi analizzeremo alcune tipologie di giochi con le relative soluzioni, facendo riferimenti agli esercizi guidati in appendice, che sono quelli sviluppati per il laboratorio di cui al capitolo 3.

2.1 Matching System

La prima tipologia di problemi fa riferimento a un articolo del 1962, *"College admissions and the stability of marriage"*, di David Gale e Lloyd Stowell Shapley. Alla RAND Corporation i due studiosi cercavano un algoritmo per risolvere il problema delle ammissioni ai college americani: in queste occasioni gli studenti mandano la propria candidatura a molti college, nella speranza di essere accettati; allo stesso tempo le università accettano più candidature del necessario, immaginando che molti rifiuteranno, generando così un meccanismo perverso che quasi mai porta a trovare un vero equilibrio tra le parti.

Gale e Shapley partirono dal problema più semplice di n candidati e n università, utilizzando l'esempio semi-realistico di n uomini e n donne da accoppiare (vedi Appendice A).
Gli uomini e le donne propongono ciascuno la propria lista di preferenze, per esempio (in corsivo gli uomini)

	a	*b*	*c*	*d*
A	3	4	2	1
B	3	1	4	2
C	2	3	4	1
D	3	2	1	4

	A	B	C	D
a	1	2	3	4
b	1	4	3	2
c	2	1	3	4
d	4	2	3	1

A questo punto è necessario caratterizzare gli accoppiamenti che cerchiamo, affinchè siano ritenuti accettabili: infatti non sarà di certo possibile accoppiare ognuno con la sua prima scelta, ma dobbiamo decidere come vogliamo il nostro sistema di coppie, che chiameremo stabile.

Definizione 2.1. Un sistema si dice *stabile* se in esso non si trovano un uomo e una donna non accoppiati tra loro che preferirebbero essere accoppiati.

Per esempio il sistema

A	B	C	D
a	*b*	*c*	*d*
4x1	2x2	4x3	3x4

non è stabile perchè troviamo A, attualmente accoppiato con la sua quarta scelta, e *c*, accoppiato con la sua terza scelta; guardando le liste di preferenze si nota che A ha *c* come seconda scelta e allo stesso modo *c* ha messo A come seconda scelta: preferirebbero dunque essere accoppiati tra loro piuttosto che con il loro attuale compagno.

2.1.1 L'algoritmo Gale-Shapley per un sistema stabile

Gli autori dell'articolo di cui sopra propongono il seguente algoritmo, con lo scopo di trovare un sistema stabile. L'algoritmo prevede 3 step:

1^o **step:** Ogni uomo si propone alla donna che è la sua prima scelta; ogni donna che riceve più proposte sceglie in base alle sue preferenze un uomo e rifiuta gli altri. Chi non è stato rifiutato è in lista d'attesa.

2^o **step:** Gli uomini rifiutati si propongono alle loro seconde scelte; di nuovo le donne che hanno ricevuto più proposte (considerando anche quelli in attesa dallo step precedente) scelgono il preferito tra questi e lo mettono in lista d'attesa, gli altri sono rifiutati.

3^o **step:** Gli uomini rifiutati si propongono alla loro prossima scelta e si procede come nello step 2.

La procedura continua fino a quando non ci saranno più uomini rifiutati.

Esempio 2.1. Utilizzando le liste di preferenza di cui sopra possiamo applicare l'algoritmo in questo modo:

A	B	C	D
a	c		d
$b*$			

Ovvero a b c d si propongono alle loro prime scelte. A questo punto A si troverà a scegliere tra a e b, che sono rispettivamente la sua terza e quarta scelta: a sarà messo in lista d'attesa e b, rifiutato, andrà ora a proporsi alla sua seconda scelta, ovvero D:

A	B	C	D
a	c		$d*$
			b

Ora D sceglierà b e rifiuterà d, il quale andrà a proporsi a sua volta alla sua seconda scelta, cioè B:

A	B	C	D
a	$c*$		b
	d		

Procediamo fino a quando non ci sarà più nessun uomo rifiutato:

$$\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ a* & d & & b \\ c & & & \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ c & d & & b \\ & a* & & \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ c & d & a & b \\ \mathrm{2x2} & \mathrm{2x2} & \mathrm{2x3} & \mathrm{2x2} \end{array}$$

Dimostreremo adesso che l'algoritmo non è infinito e che porta sempre a un sistema stabile.

Teorema 2.1.1. *L'algoritmo Gale-Shapley termina in un numero finito di passi.*

Dimostrazione. Vediamo che il numero di passi non è infinito e che non è possibile che un uomo venga rifiutato a mai accettato.

1. Il numero di uomini è uguale al numero di donne, dunque finchè ci sarà una donna con più proposte ce ne sarà un'altra che non ne avrà ricevute.

2. Una volta che una donna riceve una proposta avrà sempre un uomo in lista d'attesa.

3. Quando ogni donna ha una proposta, allora ognuna ne avrà una sola, essendo il numero di uomini uguale al numero di donne. A questo punto l'algoritmo termina: vediamo che è possibile arrivare al presente step.

4. E' possibile arrivare alla situazione di cui sopra perchè ogni volta l'uomo si propone alla donna che è la successiva nella sua lista di preferenze e non può tornare indietro; essendo gli uomini e le donne in numero finito e non potendo gli uomini tornare indietro si arriverà sempre alla situazione in cui ogni donna avrà una proposta e per il punto precedente la procedura terminerà lì.

□

Teorema 2.1.2. *L'algoritmo Gale-Shapley termina in un sistema stabile.*

Dimostrazione. Consideriamo un sistema ottenuto con l'algoritmo Gale-Shapley e focalizziamoci su due coppie:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \mathrm{R} & \dots & \mathrm{S} & \dots \\ & \downharpoonleft & \nwarrow & \downharpoonright & \\ \dots & \mathrm{r} & \dots & \mathrm{s} & \dots \end{array}$$

Supponiamo che il signor s preferisca la signora R alla sua attuale compagna, ovvero S; allora dimostriamo che R non preferisce s a r e dunque rifiuterebbe di stare con s.
Se s preferisse R allora avrebbe dovuto proporsi in uno dei passi precedenti: in questo caso R deve averlo rifiutato, altrimenti sarebbero accoppiati. E' stato rifiutato perchè in quel momento R aveva ricevuto una proposta da qualcuno che preferiva, e che magari più avanti è stato a sua volta rifiutato a favore di qualcun'altro a sua volta preferito a quest'ultimo ...
Alla fine il signor r si è proposto a R, la quale lo ha preferito a tutti coloro che si sono proposti in precedenza, incluso il signor s.

Abbiamo dimostrato che in questo sistema non è possibile trovare due persone che preferirebbero essere accoppiati tra loro piuttosto che con il loro attuale compagno: ritroviamo dunque la definizione di sistema stabile.

□

Teorema 2.1.3. *Sia n il numero di uomini e il numero di donne; allora il massimo numero di step dell'algoritmo Gale-Shapley è* $n^2 - 2n + 2$.

Dimostrazione. L'algoritmo termina quando ogni donna ha esattamente una proposta. Il numero massimo di step si ha quando ad ogni passaggio solo un uomo è rifiutato e se una donna rimane senza proposte dopo che gli uomini si sono proposti a tutti tranne che a lei. Dunque dopo il primo step gli uomini si propongono ciascuno a $(n-2)$ donne; essendo il numero di uomini pari a n, per fare tutti i passaggi dopo il primo ci vorranno $n(n-2)$ step. Quindi al massimo il numero di passaggi totali sarà

$$\underset{\text{primo step}}{1} \quad + \quad \underset{\text{rifiuti}}{n(n-2)} \quad + \quad \underset{\text{ultimo step}}{1} \quad = n^2 - 2n + 2$$

□

Generalizzazioni

E' possibile utilizzare l'algoritmo appena visto anche per situazioni che più si avvicinano alla realtà: per esempio si può considerare il caso in cui il numero degli uomini non è uguale al numero delle donne; un altro caso possibile è quello in cui le liste di preferenze non includono tutti i partecipanti dell'altro sesso, per esempio nella tabella seguente

	a	b	c	d
A	3	0	2	1
B	3	1	4	2
C	2	0	0	1
D	3	2	1	4

A preferisce stare da solo piuttosto che con b; ugualmente C: se non ha la possibilità di stare con d o con a, allora vuole stare da solo.

Si vede subito, dunque, che in entrambi questi casi alla fine il sistema prevederà che ci siano delle persone accoppiate con nessuno, ovvero single. Un'altra possibile situazione è quella in cui nelle liste di preferenze compare l'indifferenza; per esempio:

	a	b	c
A	1	2	2
B	1	1	2
C	1	2	3

ovvero A ha come prima scelta a, mentre per la seconda scelta è indifferente tra b e c, eccetera.

Per poter applicare l'algoritmo visto sarà sufficiente sostituire la lista con indifferenza con un'altra lista che non contenga indifferenza, per esempio questa:

	a	b	c
A	1	2	3
B	1	2	3
C	1	2	3

Proposizione 2.1.4. *Ogni sistema stabile ottenuto tramite liste di preferenze "riviste" in modo che non ci sia indifferenza è stabile anche per le liste di preferenze originali con indifferenza.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che il sistema ottenuto con le liste riviste non sia stabile per le liste originali. Esistono dunque la signora X e il signor y che non sono accoppiati tra di loro ma preferirebbero esserlo. Visto che le relazioni di preferenza non cambiano nella conversione delle liste, X e y si preferiranno anche secondo le liste "riviste" e dunque il sistema sarà instabile anche per quelle: contraddizione dell'ipotesi.

□

L'ammissione alle scuole di medicina

Attraverso le generalizzazioni appena viste è possibile applicare l'algoritmo a un problema ben più reale delle coppie, cioè la distribuzione degli studenti nelle scuole di medicina o nei college: in queste situazioni un gran numero di candidati cerca di essere ammesso in una delle poche scuole disponibili, le quali mettono a disposizione un certo numero di posti.

Per risolvere il problema ci si serve di un centro di collocamento: qui i candidati presentano le proprie liste di preferenza, omettendo le scuole a cui non sono interessati; alle scuole vengono inviati i nominativi dei candidati interessati; a questo punto ogni scuola rende pubblico il numero di posti disponibili e invia al centro le proprie liste, dichiarando chi non sarà ammesso anche nel caso di eventuali posti vacanti: in questo modo sarà possibile stilare nuovamente le liste dei candidati, omettendo le scuole che non li ammetteranno comunque.

A questo punto si procede con l'algoritmo: ogni candidato viene assegnato alla scuola di prima scelta: se il numero di candidati accettati dalla scuola è inferiore al numero massimo di posti disponibili, allora i candidati saranno messi in lista d'attesa; se il numero di candidati supera il numero di posti, allora si riempiono i posti secondo le preferenze delle scuole e si rifiutano gli altri. Gli studenti rifiutati saranno assegnati alla seconda scelta, e così via.

La procedura termina quando ogni studente è su una lista d'attesa oppure è stato rifiutato da tutte le scuole in cui sarebbe voluto andare. Tutti quelli in lista d'attesa saranno accettati, gli altri non andranno in nessuna scuola.

2.2 Giochi in forma strategica

Alcuni giochi si possono rappresentare tramite una matrice, detta dei pagamenti (vedi Appendice B):

A\B	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**
A1	4	2	1	7
A2	-1	3	0	1
A3	5	-6	-2	0
A4	3	0	-2	5

Nella prima colonna si trovano tutte le mosse possibili del primo giocatore, A, mentre nella prima riga vediamo le mosse a disposizione del secondo giocatore, B; all'interno ci sono i pagamenti, cioè i *pay-offs*. In questo caso specifico il gioco in questione è detto *a somma zero*, perchè quello che vince il primo giocatore è esattamente quello che perde il secondo: si è scelto qui di rappresentare le vincite in funzione di A; se avessimo voluto scriverle in funzione di B sarebbe stato sufficiente scrivere gli opposti dei numeri in matrice.

Osservando la matrice si nota che c'è una mossa che A, se è un giocatore razionale, non sceglierà mai: infatti, confrontando la **A4** con la **A1**, si vede facilmente che per qualsiasi mossa di B la **A1** è sempre preferibile alla **A4**. Esprimiamo questo concetto dicendo che la **A4** è *dominata* rispetto alla **A1**. La stessa cosa possiamo dire per le mosse di B: la **B4** infatti è certamente meno conveniente della **B3**. Le mosse dominate non saranno mai scelte e dunque possiamo eliminarle senza influire sul gioco; otteniamo:

A\B	**B1**	**B2**	**B3**
A1	4	2	1
A2	-1	3	0
A3	5	-6	-2

2.2.1 Un algoritmo per i giochi a somma zero

A questo punto dobbiamo cercare una soluzione, ovvero una coppia di mosse, una per A e una per B, che rappresentino un modo per concludere il gioco. Parleremo solo di soluzioni in *strategie pure*, ovvero senza l'utilizzo di probabilità; consideriamo però che nella maggior parte dei casi le soluzioni di questi giochi si ricercano in *strategie miste*, ovvero la soluzione sarà la probabilità con cui conviene scegliere una mossa: le strategie pure sono dunque un caso particolare delle miste, in cui le probabilità sono 0 e 1.

Consideriamo per esempio **A3**: potremmo vederla come la mossa più conveniente per A, infatti nella migliore della ipotesi egli otterrà il massimo guadagno per questo gioco, ovvero 5; tuttavia, B, essendo a conoscenza di questo ragionamento, potrebbe pensare di scegliere **B2**, in modo tale da capovolgere completamente la situazione; ma allora A, che sa che l'altro sa, dovrebbe scegliere **A2**, in modo da ottenere anch'egli qualcosa ... In questo modo non otterremo altro che un loop di pensieri e nessuna soluzione. Piuttosto sappiamo che lo scopo di A è massimizzare i numeri in matrice, mentre quello di B è minimizzarli; quello che possiamo fare è cercare il massimo dei minimi e il minimo dei massimi (indicati dalle frecce):

	B1	**B2**	**B3**	**min**	max
A1	4	2	$\boxed{1}$	1	←
A2	-1	3	0	-1	
A3	5	-6	-2	-6	
max	5	3	1		
min			↑		

La soluzione trovata si dice *punto di sella* e rappresenta la strategia tale che, se un giocatore la sceglie, all'altro non conviene discostarsene. Il tipo di giochi appena analizzati sono un caso particolare di giochi *a somma costante*: questi ultimi sono giochi in cui la somma dei pagamenti del primo e del secondo giocatore è sempre lo stesso numero. Si capisce che i ragionamenti fatti finora valgono allo stesso modo per i giochi a somma costante, ma anche per quelli che non lo sono. Non tutti i giochi in forma normale hanno però un punto di sella.

2.2.2 La soluzione cooperativa di Nash

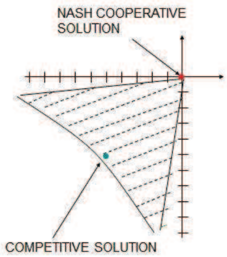
Abbiamo detto che tra i giochi esiste una distinzione: essi possono infatti essere competitivi o cooperativi. Il contributo di Nash è rappresentato dall'intuizione che anche tra soluzioni esiste la stessa distinzione. Vediamo per esempio il dilemma del prigioniero, oggetto di studio nei più svariati campi (vedi Appendice B):

	B confessa	B non confessa
A confessa	(-5,-5)	(-1,-10)
A non confessa	(-10,-1)	(0,0)

Questo tipo di giochi non è a somma costante, ma possiamo comunque applicare il MinMax, stando attenti a notare che qui entrambi i numeri rappresentano le "vincite":

	B confessa	B non confessa	max(B)	min
A confessa	$\boxed{(-5,-5)}$	(0,-7)	-5	←
A non confessa	(-7,0)	(-1,-1)	0	
max(A)	-5	0		
min	↑			

Ragionando infatti competitivamente possiamo dire che la seconda mossa di entrambi è dominata rispetto alla prima. Tuttavia, rispetto alla soluzione ottenuta possiamo dire che di certo sarebbe molto conveniente per entrambi scegliere la seconda mossa contemporaneamente: in questo modo accetterebbero il rischio di perdere di più ma con l'ottica di fare gli interessi del gruppo, in questo caso dell'altro giocatore, in modo da non ostacolarsi.



Vediamo come ottenere questo tipo di soluzione.

Definizione 2.2. Un modello di contrattazione è una coppia (C, x), dove C è un insieme chiuso, convesso e limitato in $\mathbb{R}^2$ e $x \in \mathbb{R}^2$. C rappresenta i *pay-offs* dei giocatori in caso di accordo.

Dunque se $v = (v_1, v_2) \in C$ allora v_1 è la vincita del primo giocatore, mentre v_2 sarà la vincita del secondo. La soluzione di Nash è una funzione f che ad ogni coppia (C, x) associa un elemento $v \in C$ e che soddisfi i seguenti assiomi:

ASSIOMA 1. Sia dato (C, x) e supponiamo sia (C', x') ottenuto da (C, x) così: dati $h, k > 0$ e $a, b \in R$, si ha che $x' = (hx_1 + a, kx_2 + b)$ e ogni $y \in C'$ si scrive come $(hz_1 + a, kz_2 + b)$ con $z = (z_1, z_2) \in C$. Allora $f((C', x')) = (hf_1((C, x)) + a, kf_2((C, x)) + b)$.

ASSIOMA 2. Sia (C, x) tale che $x = (u, u)$ e se $z = (z_1, z_2) \in C$ allora anche $w = (z_2, z_2) \in C$. Allora $f_1((C, x)) = f_2((C, x))$.

ASSIOMA 3. Se (C, x) e (C', x) sono tali che $C' \supseteq C$ e $f((C', x)) \in C$, allora $f((C, x)) = f((C', x))$.

ASSIOMA 4. Se esiste in $z \in C$ con entrambe le componenti maggiori di y, allora dev'essere $f((C, x)) \neq y$.

Vediamo cosa significano:

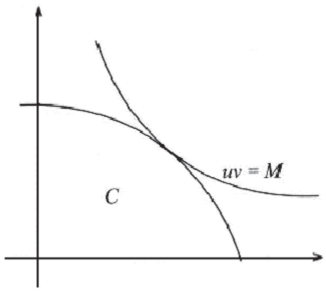
- il primo assioma è detto d'*invarianza*, cioè il risultato non cambia se lo esprimiamo con diverse unità di misura (i fattori h e k) e/o spostando i livelli zero (i valori a e b);

- il secondo è detto di *simmetria*, ovvero se i giocatori sono indistinguibili per quanto riguarda pay-offs e punto di partenza, il risultato dev'essere uguale per entrambi;
- il terzo assioma si dice di *indipendenza dalle alternative irrilevanti*: se, partendo da C', ottenuto da C aggiungendo elementi, si ottiene un risultato che sta ancora in C, allora quest'ultima è ancora soluzione per C.
- il quarto assioma tratta di *efficienza*, ovvero non accettare un risultato che non sia il migliore per entrambi i giocatori.

Teorema 2.2.1. *di Nash. Sia $\boldsymbol{C}$ l'insieme di tutti i giochi (C, x), con C chiuso, convesso e limitato in $\mathbb{R}^2$ e $x = (x_1, x_2) \in C$. Inoltre $\exists y = (y_1, y_2) \in C$ con $y_1 > x_1, y_2 > x_2$. Allora $\exists! f$ definita in $\boldsymbol{C}$ tale che $f((C, x)) \in C$ e che soddisfi gli assiomi di cui sopra. Precisamente $f((C, x))$ è il massimo di $g(u, v) = (u - x_1)(v - x_2)$ su $C \cap \{(u, v) : u \geq x_1, u \geq x_2\}$.*

Dimostrazione. La dimostrazione consiste nel verificare che il punto esiste ed è unico. Grazie agli assiomi possiamo semplificare il procedimento ponendo $x = (0, 0)$ ed escludendo i punti di C con almeno una coordinata negativa. Dunque la nostra f diventa $f(u, v) = uv$. Ora dobbiamo prima far vedere che la f così definita soddisfa gli assiomi 1-4 e poi che essa è l'unica possibile.

Per prima cosa vediamo che f è ben definita, ovvero che $f((C, x)) \in C$. Poichè C è chiuso e limitato, la $g(u, v) = uv$ ha almeno un punto di massimo su C con valore $M > 0$, che è unico perchè deve stare contemporaneamente sull'iperbole $uv = M$ e nel convesso C:



Ora abbiamo che:

- la soluzione trovata rispetta l'efficienza imposta dall'assioma 4;
- l'assioma 1 si verifica grazie a macchinosi conti;
- per l'assioma 2 diciamo che se C è simmetrico e se $(\overline{x}, \overline{y})$ massimizza uv su C' allora anche $(\overline{y}, \overline{x})$ massimizza uv su C. Ma noi abbiamo $\overline{x} = \overline{y}$ per l'unicità del massimo;
- l'assioma 3 è verificato, in quanto se $(\overline{x}, \overline{y})$ massimizza uv su C' e $(\overline{x}, \overline{y}) \in C$ allora sarà massimo anche su C, essendo $C \subseteq C'$.

Per provare l'unicità supponiamo che esista una soluzione h, proviamo che $h = f$. Diciamo subito che per gli assiomi 2 e 4 sarà di certo $h(C, x) = f(C, x)$ per ogni gioco (C, x) simmetrico: difatti, poichà la soluzione deve stare sulla diagonale (2) ed essere efficiente (4) otteniamo l'unicità. Prendiamo un gioco (C, x): per l'assioma 1 possiamo applicare una trasformazione in questo modo:

$$h = \frac{1}{f_1(C, x) - x_1}$$

$$k = \frac{1}{f_2(C, x) - x_2}$$

$$a = \frac{-x_1}{f_1(C, x) - x_1}$$

$$a = \frac{-x_2}{f_2(C, x) - x_2}$$

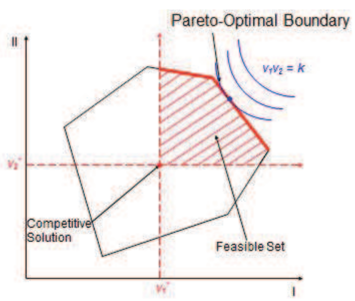
Otteniamo quindi il gioco $(C', (0,0))$, che è tale che $f(C', (0,0)) = (1,1)$. Si può vedere che $(1,1)$ è l'unico punto di C' che sta anche nell'inisieme convesso $Y = \{(u,v) : u \geq 0, v \geq 0, uv \geq 1\}$. Allora la retta $u+v = 2$ separa C' da Y. Ora costruiamo un gioco simmetrico $(A, (0,0))$ che contenga C' e che abbia i punti efficienti su $u+v=2$, per esempio

$$A = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 2\}.$$

Ma dato che $(A, (0,0))$ è simmetrico, allora per quanto detto prima abbiamo che $f((A,(0,0))) = h((A,(0,0)))$. Ora per l'assioma 3 delle alternative irrilevanti possiamo concludere che $f((C',(0,0))) = h((C',(0,0)))$. Tornando infine al gioco (C,x) possiamo finalmente dire che $h((C,x)) = f((C,x))$.

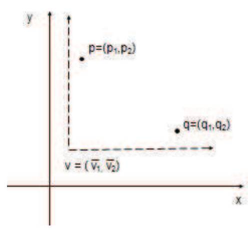
$\square$

Operativamente questo si traduce nel tracciare il convesso generato dai punti che rappresentano i pagamenti, unendo tra loro quelli che sono sulla stessa riga/colonna; poi si trasla l'origine degli assi nel punto che rappresenta la soluzione competitiva:



Si ottiene così l'insieme delle possibili soluzioni (*feasible set*) e la *frontiera pareto-ottimale*, cioè quella su cui si troverà la soluzione come intersezione della frontiera con il fascio di iperboli equilatere; sarà sufficiente dunque risolvere il sistema:

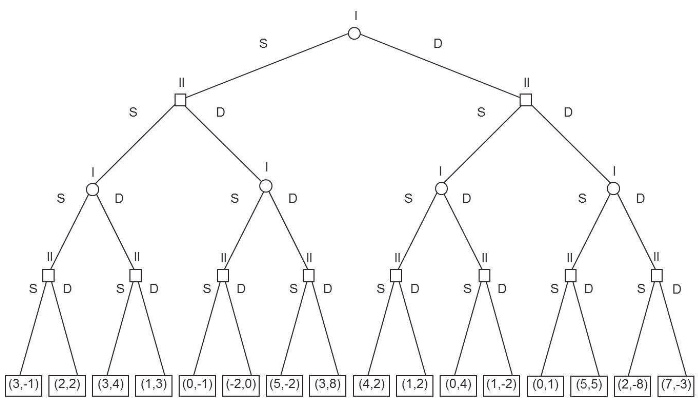
$$\begin{cases} \dfrac{y-p_1}{q_2-p_2} = \dfrac{x-p_1}{q_1-p_1} \\ (x-\overline{v}_1)(y-\overline{v}_2) = k \\ \Delta = 0 \end{cases}$$



2.3 Alberi di gioco

Esistono dei giochi che si possono rappresentare servendosi di uno schema ad albero (vedi Appendice D). Questo tipo di schemi è di facile interpretazione: ad ogni nodo si possono vedere le mosse a disposizione del giocatore di turno. Essendo il gioco a turni ogni giocatore sa quale è stata la mossa dell'altro: ci troviamo davanti a un gioco finito a informazione perfetta. Come per i giochi in forma normale la soluzione di questi giochi è rappresentata nella maggior parte dei casi dalla probabilità con cui conviene scegliere una mossa.

Matematicamente parlando, questo tipo di schemi si chiamano *digrafi*:



Definizione 2.3. Si dice *digrafo* orientato un insieme finito V di punti e un insieme R di coppie ordinate di punti *distinti* di V. I punti di V sono i *vertici* o *nodi*, mentre gli elementi di R sono i *rami*. Due elementi $v, w \in V$ sono *adiacenti* se $\exists r \in R$ tale che $r = (v, w)$. Diciamo che *v precede w* o che *w segue v* se $\exists (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ catena, tale che

$$y_i = x_{i+1} \forall i = 1, ..., n-1 \quad e \quad x_1 = v, y_n = w.$$

Si indica con R_v l'insieme dei rami $(v, x) \in R$, ovvero quelli che escono da v. Si dice che v è un *nodo terminale* se $R_v = \varnothing$. Si indica con V_T l'insieme dei nodi terminali: sarà sempre $V_T \neq \varnothing$.

Definizione 2.4. Un digrafo si dice *etichettato* sull'insieme $\{1, ..., n, N\}$ se

$$V = \bigcup^{n} V_i \bigcup V_N \bigcup V_T,$$

con $V_i \bigcap V_j = \varnothing$, per $i \neq j$.

Possiamo allora definire il nostro schema ad albero nel seguente modo:

Definizione 2.5. Un *gioco in forma estensiva* Γ è un digrafo etichettato sull'insieme $\{1, ..., n, N\}$ con le seguenti proprietà:

1. $\exists! v_0 \in V$ che precede ogni altro elemento di V, detto radice del gioco;

2. ad ogni $v \in V_T$ è associata una n-pla ordinata di numeri reali;

3. $\forall i = 1, ..., n \quad \exists W_i^k, k = 1, ..., k(i)$ partizione di V_i;

4. se $v, w \in W_i^k$ c'è un isomorfismo tra R_v e R_w;

5. se $v, w \in W_i^k$, allora v non precede w e w non precede v;

6. se $v \in V_N$, su R_v è definita una distribuzione di probabilità.

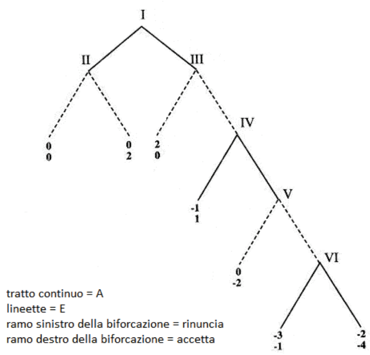
Data la 4., denotiamo con R_i^k un rappresentante degli R_v, $v \in W_i^k$. Si dice che i ha *informazione perfetta* se $\forall k$, $\mathrm{card} W_i^k = 1$.

Interpretazione - v_0 è lo stato iniziale del gioco; gli altri nodi sono tutte le situazioni possibili dello svolgimento del gioco. Se $v \in V_i$, il giocatore i deve decidere nella situazione espressa da v e ha come scelte possibili quelle dell'insieme R_v. Gli elementi di V_N sono gli stati in cui interviene un fatto aleatorio e sui rami di $v \in V_N$ è definita una distribuzione di probabilità. La n-pla associata a $v \in V_T$ è il vettore dei pagamenti. Per la partizione $W_i^k, k = 1, ..., k(i)$ di V_i diciamo che il giocatore i sa di trovarsi nell'insieme W_i^k, ma non sa in quale dei suoi nodi si trova precisamente; da qui possiamo giustificare i punti 5. e 6. e la definizione di gioco a informazione perfetta tramite la cardinalità di W_i^k. Diciamo *cammino* una sequenza di nodi consecutivi che porta dalla radice a un nodo terminale; il cammino avrà *lunghezza* l se lungo il cammino ci sono l rami. La lunghezza del gioco sarà pertanto la lunghezza del cammino più lungo. In più, essendo il gioco a informazione perfetta, partendo da un nodo qualsiasi e considerandolo come radice di ciò che segue, si ottiene di nuovo un gioco finito a informazione perfetta.

Osservazione 1. Possiamo eliminare da V il nodo v_0 e da R il sottoinsieme R_{v0}; otterremo ben definiti i sottogiochi $\Gamma_1, ...\Gamma_r$, con $r =$cardR_{v_0}. La radice di Γ_k è v_k, dove $(v_0, v_k) \in R$. I rami di Γ_k sono tutti e soli i (x, y), con x che segue v_k.

2.3.1 La ricerca di una soluzione

Grazie alle caratteristiche di questo tipo di giochi è sempre possibile trovare una soluzione, applicando il procedimento dell'*induzione a ritroso*. In questo caso per esempio



si considera il nodo VI: qui il giocatore A, la cui vincita corrisponde al primo numero di ogni coppia, sceglierà di andare a destra perchè così può limitare le perdite. Al nodo V, poi, il giocatore E vorrà andare a sinistra, sapendo cosa sceglierà A nel turno successivo ...
Utilizzando le definizioni di cui sopra possiamo anche definire

Definizione 2.6. Una *strategia* per i nel gioco Γ è una funzione

$$\sigma : \{W_i^k, k = 1, ..., k(i)\} \rightarrow R$$

tale che $\sigma(W_i^k) \in R_i^k \quad \forall k$.

Osservazione 2. Una strategia non è una mossa, ma la definizione di una mossa in ogni insieme di informazione del giocatore che stiamo considerando. Indichiamo con S_i l'insieme delle strategie di i. Una n-pla

$$(\sigma_1, ..., \sigma_n) \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$$

è detta *multistrategia*. Una multistrategia definisce univocamente una distribuzione di probabilità su V_T (in accordo con le probabilità definite su V_N), e dunque sui vettori associati ad ogni suo elemento: tale vettore si dice vettore di pagamento relativo alla multistrategia $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$, la cui componente i-esima si indica con $f_i(\sigma_1, ..., \sigma_n)$.

Definizione 2.7. Una multistrategia $(\sigma_1, ..., \sigma_n) \in S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$ è *di equilibrio*, ovvero è soluzione, per il gioco se, $\forall(\tau_1, ..., \tau_n) \in S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$ e $\forall i = 1, ..., n$ si ha:

$$f_i(\sigma_1, ..., \sigma_{i-1}, \sigma_i, \sigma_{i+1}, ..., \sigma_n) \geq f_i(\sigma_1, ..., \sigma_{i-1}, \tau_i, \sigma_{i+1}, ..., \sigma_n).$$

Teorema 2.3.1. *di Zermelo. Ogni gioco a informazione perfetta ammette un equilibrio.*

Dimostrazione. Si basa sul principio d'induzione ed è costruttiva. Chiamiamo $l(\Gamma)$ la lunghezza del gioco Γ. Ovviamente se $l(\Gamma) = 1$ sicuramente Γ ha un equilibrio perchè c'è un solo giocatore che sceglie la cosa a lui più conveniente.

Supponiamo che ogni gioco di lunghezza $l - 1$ abbia equilibrio e consideriamo un gioco Γ di lunghezza l. Sia v_0 la radice del gioco e r la cardinalità di R_{v_0}. Consideriamo V, l'insieme dei vertici di Γ meno v_0, e R, i rami del gioco meno R_{v_0}. Poiché Γ é a informazione perfetta sono ben definiti $\Gamma_1, ...\Gamma_r$, r nuovi giochi a informazione perfetta di lunghezza al massimo $l - 1$, che per ipotesi induttiva hanno ognuno almeno un equilibrio.

Sia $(\sigma_1^j, ..., \sigma_n^j)$ un equilibrio di Γ^j. Data una strategia τ_i del giocatore i, indichiamo con τ_i^j la sua restrizione a Γ^j. Ora dobbiamo perciò costruire una multistrategia di equilibrio per Γ.

Dobbiamo distinguere due casi:

1. $v_0 \in V_N$;

2. il nodo iniziale appartiene a V_1.

Caso 1. Non è necessario definire un ramo da associare a v_0, quindi data una r-pla di multistrategie $(\tau_1^1, ..., \tau_n^1), ..., (\tau_1^r, ..., \tau_n^r)$ tale che $(\tau_1^k, ..., \tau_n^k)$ è una multistrategia per Γ^k , rimane definita una multistrategia per Γ, che è del tipo $(\tau_1, ..., \tau_n)$ che ristretta a Γ^j vale $(\tau_1^j, ..., \tau_n^j)$. La multistrategia di equilibrio è del tipo $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ tale che la sua restrizione a Γ^j è la strategia di equilibrio $(\sigma_1^j, ..., \sigma_n^j)$ vista prima.

Vediamo che è una multistrategia di equilibrio per Γ. Siano $\lambda_1, ..., \lambda_r$ i coefficienti relativi ai rami di R_{v_0}. Allora se $(\tau_1, ..., \tau_n)$ è una multistrategia qualsiasi, $\forall i = 1, ..., n$ si ha

$$f_i(\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j f_i^j(\sigma_1^j, ..., \sigma_i^j, ..., \sigma_n^j) \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{r} \lambda_j f_i^j(\sigma_1^j, ..., \tau_i^j, ..., \sigma_n^j) = f_i(\sigma_1, ..., \tau_i, ..., \sigma_n)$$

che dimostra l'asserto.

Caso 2. Supponiamo che il giocatore che fa la prima mossa sia quello con $i = 1$. Allora avremo $\sigma_1(v_0) = a$, con $max_{1 \leq j \leq r} f_1^j(\sigma_1^j, ..., \sigma_n^j)$ si ha per $j = a$.

Negli altri nodi, che apparterranno a un certo sottogioco, il giocatore 1 decide in base alla strategia di equilibrio del sottogioco in questione, e così faranno anche gli altri giocatori.

Verifichiamo che la multistrategia così ottenuta è di equilibrio per Γ. Sia τ_1 una strategia per 1, tale che $\tau_1(v_0) = j$. Si ha:

$$f_1(\tau_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = f_1^j(\tau_1^j, \sigma_2^j, ..., \sigma_n^j) \leq$$

$$\leq f_1^j(\sigma_1^j, \sigma_2^j, ..., \sigma_n^j) \leq f_1^a(\sigma_1^a, \sigma_2^a, ..., \sigma_n^a) =$$

$$= f_1(\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$$

che dimostra che σ_1 è la migliore strategia per 1 nel caso gli altri giocatori utilizzino le strategie $\sigma_2, ..., \sigma_n$. Per gli altri giocatori si può dire che la loro strategia è un equilibrio per Γ_a; quindi anche per loro la multistrategia proposta è di equilibrio (per ipotesi induttiva).

□

2.4 Giochi di cooperazione

Ci sono alcune situazioni in cui sono previste coalizioni o accordi tra i giocatori: in questo caso ognuno non deve pensare solo al proprio guadagno ma tenere in considerazione anche le diverse possibilità di accordo; per esempio ci può essere la necessità di spartirsi una somma oppure, in campo politico, quella di valutare diverse coalizioni (vedi Appendice C e D). Consideriamo per esempio il caso del consiglio di classe (Appendice C): se su 10 giocatori fissiamo la maggioranza a 6, con la composizione 4 Genitori, 4 Professori e 2 Studenti, si dice che il *gioco di maggioranza* è $(6; 4, 4, 2)$. Esistono degli indici numerici, detti *indici di potere*, che permettono di interpretare a priori la capacità di un partito di influenzare la situazione finale, calcolando la sua influenza all'interno dell'insieme di tutte le possibili coalizioni. I più famosi indici di questo genere sono l'Indice di Shapley-Shubik e quello di Banzhaf: vista la propensione dell'Indice di Banzhaf verso il campo politico tratteremo quest'ultimo.

2.4.1 L'Indice di Banzhaf

Torniamo al nostro esempio: nel caso in cui la maggioranza sia fissata a 6 voti la spartizione dei poteri dei tre partiti calcolata con l'Indice di Banzhaf è $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Vediamo perchè.

Definizione 2.8. Un gioco a N giocatori è una funzione $v : N \to \mathbb{R}$ con $v(\varnothing) = 0$. Tale funzione, detta *caratteristica*, associa ad ogni giocatore o coalizione la sua vincita. Chiameremo $\mathcal{G}(N)$ l'insieme di tutti i giochi di questo tipo.

Definizione 2.9. Un gioco è *superadditivo* se

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \quad , S \cap T = \varnothing$$

Sia $\mathcal{G}_{sa}(N)$ l'insieme di tutti i giochi di questo tipo.

Definizione 2.10. Un gioco si dice *semplice* se può assumere solo i valori 0 e 1; esso ha la proprietà di monotonia

$$v(S) \geqslant v(T) \quad , S \supset T$$

e non è identicamente 0, dunque è sempre $v(N) = 1$. Si capisce che questi sono i giochi in cui si può solo vincere o perdere, coalizzandosi oppure no. Sia $\mathcal{C}(N)$ l'insieme di tutti i giochi semplici e $\mathcal{C}_{sa}(N)$ l'insieme dei giochi semplici superadditivi o semplici *propri*, in cui tale proprietà è equivalente a

$$v(S) + v(N - S) \leq 1 \quad , \forall S.$$

Gli insiemi S tali che $v(S) = 1$ saranno detti *coalizioni vincenti*, quelle con $v(S) = 0$ saranno evidentemente quelle perdenti. Gli insiemi di giocatori il cui complementare è una coalizione perdente si dicono *bloccanti*.

Definizione 2.11. Uno *swing* per l'i-mo giocatore è una coppia di insiemi del tipo $(S, S-i)$ tale che S è una coalizione vincente e $S-i$ no e il giocatore i si dice *cruciale* per la coalizione S. Per ogni $i \in N$ sia $\eta_i(v)$ il *numero di swings di i* nel gioco $v \in \mathcal{C}(N)$. Sia poi $\overline{\eta}_i(v) = \sum_{i\in N} \eta_i(v)$.

Si dice *dummy player* un giocatore con $\eta_i(v) = 0$ perchè non può mai aiutare una coalizione a vincere; si dice *dittatore* il giocatore con $\eta_i(v) = \overline{\eta}_i(v)$. Chiameremo $\eta_i(v)$ Indice di Banzhaf "grezzo". Tuttavia, visto che l'interesse di questo indice risiede nella sua proporzionalità, utilizzeremo l'*Indice di Banzhaf normalizzato*

$$\beta_i(v) = \frac{\eta_i(v)}{\overline{\eta}_i(v)} \quad , i = 1, \ldots, n.$$

Un'altra normalizzazione per alcuni aspetti più naturale è

$$\beta'_i(v) = \frac{\eta_i(v)}{2^{n-1}} \quad ,i = 1, \ldots, n$$

che potremmo chiamare *probabilità degli swing* di un giocatore.

2.4.2 Assiomatizzazione dell'Indice di Banzhaf

Definizione 2.12. Per ogni gioco $v \in \mathcal{G}(N)$ se π è una permutazione di N, si definisce πv

$$(\pi v)(S) = v(\pi^{-1}(S)).$$

Per $v, w \in \mathcal{C}(N)$ definiamo le operazioni:

$$(v \vee w)(S) = max(v(S), w(S)), \qquad (v \wedge w)(S) = min(v(S), w(S)).$$

Si ha che $\mathcal{C}(N)$ è chiuso per $\pi, \wedge$ e $\vee$, mentre $\mathcal{C}_{sa}(N)$ è chiuso per π e $\wedge$.

Teorema 2.4.1. *C'è un unica funzione $\varphi : \mathcal{C}(N) \to \mathbb{R}^n$ che soddisfa i seguenti assiomi:*

A1: *se i è un* dummy *in v allora $\varphi_i(v) = 0$*

A2: $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = \overline{\eta}_i(v)$

A3: *Per ogni permutazione π di $N, \varphi_{\pi(i)}(\pi v) = \varphi_i(v)$*

A4: *Per ogni $v, w \in \mathcal{C}(N), \varphi(v \vee w) + \varphi(v \wedge w) = \varphi(v) + \varphi(w)$*

In più $\varphi(v) = \eta(v)$ per ogni $v \in \mathcal{C}(N)$.

Dimostrazione. Per ogni $S \subset N, S \neq \varnothing$ si definisce il gioco v_S

$$v_S(T) = \begin{cases} 0 & T \neq S \\ 1 & T \supset S \end{cases}$$

Ogni $i \in N - S$ è un *dummy* in v_S e dunque per A1 $\varphi_i(v_S) = 0$. Se π è la permutazione che scambia i con j, $i, j \in S$, e lascia gli altri giocatori fissi si ha $\pi v_S = v_S$ e dunque per A3

$$\varphi_i(v_S) = \varphi_j(v_S).$$

Allora $\varphi(v_S)$ è univocamente determinata, se esiste, e per A2 è data da

$$\varphi_i(v_S) = \begin{cases} 0 & i \in N - S \\ \dfrac{\overline{\eta}(v_S)}{|S|} = 2^{|N-S|} & i \in S \end{cases}$$

Ogni $v \in \mathcal{C}(N)$ ha un numero finito di coalizioni vincenti *minimali*, cioè formate da soli giocatori cruciali, siano $S_1, \ldots, S_m$ che determinano completamente v, essendo $v(T) = 1$ se e solo se $T \supset S_j$ per almeno un $j = 1, \ldots, m$. Si ha certamente $v = v_{S_1} \vee v_{S_2} \vee \ldots \vee v_{S_m}$, dove il secondo membro è definito associativamente. Ora se $v \in \mathcal{C}(N)$ non è del tipo v_S, allora $m > 1$, dunque v si può scrivere come $v' \vee v''$, dove v' e v'' sono giochi con meno coalizioni vincenti di v. Per esempio sia $v' = v_{S_1}$ e $v'' = v_{S_2} \vee \ldots \vee v_{S_m}$. Si avrà che il gioco $v' \wedge v''$ ha ancora meno coalizioni vincenti e quindi per induzione sul numero di coalizioni vincenti, per A4

$$\varphi(v) = \varphi(v' \vee v'') = \varphi(v') + \varphi(v'') - \varphi(v' \wedge v'')$$

da cui $\varphi(v)$ è univocamente determinata.

Ora dobbiamo provare l'esistenza. La precedente dimostrazione di unicità prendeva in considerazione una costruzione ricorsiva di φ che ne stabiliva l'esistenza; è comunque molto semplice verificare direttamente che la funzione η già definita soddisfa A1-A4: infatti A1-A3 sono ovvie, mentre la A4 segue dall'equazione

$$\eta_i(v) = \sum_{S: i \in S \subset N} [v(S) - v(S - i)]$$

che mostra che $\eta(v)$ può essere estesa a una funzione lineare in $\mathcal{G}(N)$. Essendo

$$(v \vee w) + (v \wedge w) \equiv v + w$$

A4 risulta ovvia. □

Dunque l'indice di Banzhaf si ottiene dalla formula:

$$\beta_i(v) = K \sum_{S \subseteq N} [v(S) - v(S - i)].$$

2.4.3 Applicazioni pratiche

Come abbiamo potuto trovare quindi la ripartizione del potere $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ per il gioco dell'esempio dato da $(6; 4, 4, 2)$?

Innanzitutto proviamo a ragionare: abbiamo 4 genitori, 4 professori e 2 studenti. I tre raggruppamento sono tutti cruciali allo stesso modo, infatti anche senza i 2 studenti gli altri due da soli non potranno mai raggiungere le 6 componenti (la crucialità degli altri due è ovvia).

Ci sono però casi in cui non è così semplice, per esempio $(6; 5, 3, 2)$. Si costruisce dunque una tabella come la seguente, nella quale si conteggiano gli swings di ogni componente del gioco:

Coalizioni formate da	Genitori	Professori	Studenti	Totale
1 giocatore	0	0	0	
2 giocatori	1+1	1	1	
3 giocatori	1	0	0	
Swings Totali	3	1	1	5
				$v(G, P, S) = 1$

Si vede che:

- da soli non sono vincenti quindi metteremo degli 0 nella riga corrispondente;

- nella riga successiva consideriamo per ogni giocatore le possibili coalizioni di due componenti in cui compare. Per esempio per i genitori $v(G, P) - v(P) = 1 - 0 = 1$ e $v(G, S) - v(S) = 1 - 0 = 1$ quindi in entrambi i casi i genitori sono cruciali: scriviamo il numero 2; procediamo facilmente anche per gli altri;

- con lo stesso ragionamento si trova che $v(G, P, S) - v(P, S) = 1 - 0 = 1$;

- facciamo il totale sulle colonne e scriviamolo nella riga sottostante;

- sommiamo i numeri sulla riga ottenuta e scriviamo il risultato nella colonna "Totale";

- nella casella sottostante scriviamo $v(G, P, S)$ come indicato;

e abbiamo finito. Si trova infatti il coefficiente di normalizzazione

$$K = \frac{v(G, P, S)}{sommadegliswing} = \frac{1}{5}$$

e si moltiplica per gli swing totali, ottenendo $(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$.

Il campo politico è quello in cui l'Indice di Banzhaf trova la sua massima applicazione ma si può utilizzare lo stesso concetto anche per spartizioni di denaro o utilità in generale: in questo caso si chiamerà *Valore del gioco secondo Banzhaf*. Costruendo la stessa tabella si considerano non gli swing ma i contributi di ogni giocatore sempre valutando $v(A, B) - v(A)$, in cui però compariranno cifre e non più solamente 1 o 0. Il procedimento è lo stesso (vedi Appendice C).

Capitolo 3

Descrizione dell'esperimento

Mi sono insediata all'inizio dell'anno scolastico delle classi di cui sotto in qualità di tirocinante: ho dunque avuto modo di conoscere bene i ragazzi e le loro potenzialità, al fine di poter sviluppare la sperimentazione ad un livello che fosse congruo alle loro capacità.

3.1 Contesto

L'esperimento è stato condotto presso il Liceo Scientifico A. B. Sabin, nelle classi del professor Paolo Bascetta, di cui due classi seconde e una prima del Liceo Scientifico e una classe seconda con indirizzo Scienze Umane; gli studenti erano di età compresa tra i 15 e i 17 anni. Per poter analizzare al meglio il contesto dal punto di vista specifico della materia, durante il periodo delle vacanze natalizie i ragazzi hanno svolto un tema non anonimo dal titolo "*Il mio rapporto con la matematica dalle elementari ad oggi*" (Di Martino), in cui hanno potuto esprimere i loro stati d'animo nei confronti della materia.

3.1.1 Classe 1A

Il coordinatore di classe, il professor Paolo Bascetta, descrive così la situazione iniziale della classe, primo anno del Liceo Scientifico:

> *"La classe è composta da 29 alunni, 19 maschi e 10 femmine. Sono presenti 5 alunni stranieri che non presentano alcuna difficoltà di comprensione della lingua italiana. [...] Il test d'ingresso ha rilevato, nella media dei tests effettuati, 5 alunni con insufficienza grave, 9 con lievi carenze e 14 sufficienti. La classe appare interessata e motivata. Sono diligenti, educati, rispettosi delle regole e partecipi al dialogo educativo."*

Dai temi consegnati dopo il periodo natalizio emerge una descrizione della matematica come *una materia molto importante*, utile per la vita quotidiana, ma senza troppa convinzione: *me ne sono convinto al* 75% (alunno S.S.). E' frequentissimo il confronto con i programmi e i professori delle medie, che nella maggior parte dei casi sono descritti come buoni, bravi e pazienti: è dichiarata una maggiore difficoltà rispetto agli anni passati, associata a frasi del tipo *prima mi piaceva di più*. In 4 o 5 casi si dichiara *è una delle mie materie preferite* perchè *mi piace scoprire cose nuove*.

3.1.2 Classe 2A

Il coordinatore di classe, la professoressa Maria Grazia Leoni, descrive così la situazione iniziale della classe, secondo anno del Liceo Scientifico:

> *"La classe risulta composta da 27 alunni, 12 maschi e 15 femmine. Tre alunni provengono da altri istituti. E' presente un alunno DSA [...] Gli allievi si mostrano nel complesso rispettosi delle regole, disponibili al dialogo educativo e discretamente impegnati, a parte qualche ragazzo che risulta più vivace e meno attento."*

Dall'analisi dei temi svolti durante le vacanze di Natale emerge un buon equilibrio numerico per quanto riguarda la visione della matematica: mentre alcuni la definiscono una materia *bella* e *utile*, altri al contrario sostengono che tratti di cose non utili nella vita oppure che *è difficile, non mi piace.*

Un buon numero di persone aggiungono che *è difficile ma affascinante*. E' evidente in generale che il giudizio più o meno positivo sulla disciplina è influenzato dai relativi successi; si legge infatti: *mi piace solo quando riesco*.

3.1.3 Classe 2BArt

Il coordinatore di classe, la professoressa Raffaella Giordani, descrive così la situazione iniziale della classe, secondo anno del Liceo Scientifico, sezione articolata:

> *"La classe risulta composta da 28 alunni, 19 maschi e 9 femmine. Sono giunti quest'anno 5 studenti nuovi: 3 dal Liceo Copernico e 2 dal Liceo Righi. La classe è articolata in due gruppi: uno segue l'Indirizzo Scientifico Tradizionale (16) e l'altro l'opzione Scienze Applicate (12); è stato messo in atto un potenziamento di Scienze per il primo gruppo e di Matematica per il secondo. [...] Rispetto al giudizio di fine a.s. 2012/2013 la classe appare decisamente peggiorata sul piano del comportamento. Gli alunni si dimostrano entusiasti verso le proposte didattiche, ma molto difficili da gestire sul piano del comportamento. Essendo composta in prevalenza da maschi, molti dei quali estremamente egocentrici, è molto difficile mantenere l'ordine perchè ognuno di loro si sente legittimato a intervenire a sproposito con domande anche non inerenti la lezione in corso. Il livello cognitivo permane medio-alto [...] I risultati delle prime verifiche non sono stati in linea con le aspettative, visto il buon livello di base degli alunni. "*

Come riferito dal coordinatore di classe, il livello cognitivo della classe è abbastanza alto; la stessa considerazione si può fare in relazione alla materia specifica in questione: la maggior parte dei ragazzi, come emerge dai temi, reputa la matematica una materia utile, spesso la preferita, con la quale intrattiene un *buon rapporto*. Non sono rari i casi in cui è definita come la materia che dà *grandi soddisfazioni e grandi delusioni* allo stesso tempo. Tuttavia, una parte cospicua della classe sostiene, insieme a una speranza di miglioramento, come questa materia, che prima era la preferita, ora non piaccia più e se ne attribuiscono le cause all'umore del professore ma anche alla macchinosità degli esercizi: *mi annoio a svolgere meccanicamente espressioni ed equazioni [...] cerco problemi di logica, come quelli delle Olimpiadi* (alunno K.T.); e ancora: *ritengo che ogni tanto si debba staccare e giocare con la matematica, rendendola più piacevole da studiare e allo stesso tempo ampliando le proprie abilità con indovinelli logici e matematici* (alunno G.N.).

3.1.4 Classe 2ASU

Il coordinatore di classe, la professoressa Barbara Bianchini, descrive così la situazione iniziale della classe, secondo anno del Liceo delle Scienze Umane:

> *"La classe risulta composta da 23 alunni, 3 maschi e 20 femmine, delle quali 7 sono ripetenti: 2 da altri istituti e 5 interne. La maggior parte è sembrata, agli inizi, traumatizzata dall'alto numero di bocciature nel precedente anno. Ora il clima sembra più sereno, ma vi è una certa preoccupante tendenza alla passività. [...] I livelli di attenzione, puntualità e partecipazione non sono omogenei ma nel complesso sembrano accettabili, tranne che in alcune discipline."*

Rispetto alla materia si riscontra lo stesso fatto evidenziato dal coordinatore, ovvero il confronto con l'a.s. precedente, in cui, anche a detta degli alunni, il clima era caotico e scarsamente produttivo; quasi la totalità della classe, compresi i ripetenti, dichiarano come il loro rapporto con la matematica sia *migliore rispetto all'anno scorso*. In generale la classe si divide poi in tre: ad alcuni *proprio non piace*, ad altri è *indifferente* ed altri ancora si sentono *realizzati* nel fare matematica. La logica è un argomento molto presente: alcuni sostengono che la matematica serva per *far ragionare gli* *studenti*, altri sostengono di odiare non tanto la matematica ma proprio la logica.

3.2 Metodi

Nella prima settimana di Marzo ai ragazzi è stato somministrato un questionario volto a qualificare le diverse componenti della motivazione in matematica individuate da Kjersty Wæge (2009); si è scelto di non far scrivere il proprio nome ma la data di nascita, in modo da assicurare l'anonimato. Il questionario era composto dalle seguenti domande:

1. Scrivi tre emozioni che associ alla parola matematica
2. C'è qualcosa che ti piace del fare matematica?
3. E qualcosa che non ti piace?
4. Sai cos'è un rompicapo? Sì - No
5. Se sì
   a) ti piacciono?
   b) come spiegheresti a qualcuno che non lo sa cos'è un rompicapo?
6. Secondo te quali sono le doti assolutamente necessarie affinchè una persona possa riuscire in matematica?
7. In che misura ritieni di possedere le doti scritte al punto 6) ?

In base all'analisi delle componenti della motivazione è stato possibile costituire dei gruppi di lavoro, con all'interno profili misti: così ad esempio era possibile trovare in un gruppo uno studente completamente positivo nei confronti della materia, uno con sole tre componenti su cinque positive, uno con

solo una componente positiva e uno completamente negativo.
Nelle settimane successive sono stati sottoposti ai gruppi degli esercizi guidati di Teoria dei Giochi (vedi Appendici); partendo dalle situazioni descritte nei problemi i ragazzi sono riusciti a decifrare le richieste e pian piano a comprendere i metodi proposti per la risoluzione. Io ho osservato il lavoro e risposto alle richieste di aiuto, cercando di non fornire risposte ma stimoli di ragionamento. Gli esercizi erano divisi in quattro tipologie, una per argomento: solo una volta risolto il problema era possibile passare al successivo argomento.
A conclusione del laboratorio sono state proposte alcune lezioni frontali per chiarire i metodi visti e inquadrarli all'interno della Teoria dei Giochi; successivamente i ragazzi hanno svolto un compito in classe.
Un paio di settimane dopo è stato proposto un secondo questionario, con l'intento di analizzare ancora la motivazione dei ragazzi e verificare eventuali cambiamenti nella stessa; anche per questo questionario infatti è stato chiesto di scrivere la data di nascita, in modo da mantenere l'anonimato ma allo stesso tempo potersi ricollegare al primo questionario. Le domande:

1. Quando ti trovi davanti ad un problema nuovo o difficile prevale la voglia di mettersi alla prova o la paura di non riuscire? Perché secondo te?
2. Ti senti a tuo agio quando fai matematica? Quanto? Perché?
3. A tuo avviso serve la memoria in matematica? Se sì quanto? E per cosa?
4. Durante le attività a gruppi cosa ti è piaciuto? Cosa non ti è piaciuto? Che emozioni hai provato?

Grazie alla data di nascita è stato possibile confrontare i due questionari per ogni studente e trovare eventuali cambiamenti nella motivazione: alcuni dei soggetti in cui è stato riscontrato un cambiamento sono stati intervistati per poter confermare l'analisi e attribuirne le cause.

3.3 Risultati

Di seguito si espongono le osservazioni raccolte durante le diverse fasi della sperimentazione: il lavoro sulla Teoria dei Giochi, il confronto dei questionari, le interviste finali. In generale si riscontra una buona dose di entusiasmo e curiosità da parte dei ragazzi, impegno, collaborazione e il giusto stimolo che deriva dalla competizione.

3.3.1 Il laboratorio

L'esperienza a gruppi viene accolta di buon grado dagli alunni: in generale, a parte pochissimi casi di scarso impegno, i ragazzi collaborano, discutono, cercano di convincersi tra di loro ed è evidente l'impegno volto alla reale comprensione dei problemi; anche alcuni studenti solitamente disinteressati durante le ore di matematica partecipano attivamente.
Siamo una squadra!, esclamano dopo aver risolto un problema (alunno N.O., 2Bart).

Non sono rari i casi di alunni solitamente meno brillanti che tuttavia arrivano subito a comprendere e si trovano a spiegare agli altri. A questo proposito si nota che chi è più capace apprezza maggiormente i problemi in cui si ritrovano formule e numeri; in assenza di questi è insistente la ricerca di procedure e algoritmi imparati in classe: non trovando il senso nelle situazioni proposte, vorrebbero utilizzare il calcolo del m.c.m. nell'esercizio sul Matching System, oppure impostare un sistema lineare per risolvere il problema della spartizione dei soldi; durante l'esercitazione sul MinMax lo studente M.G. (2A) esclama: *Prof, questo io lo so, qui ci vuole la probabilità: ma lei lo sa che non lo abbiamo fatto?*
Nell'esercizio sulla distribuzione dei seggi applicano la proporzione tra seg-

gi e potere, arrivando a rispondere che *bisogna assegnare 4,5 seggi ad ogni partito: forse non ha molto senso ma così torna!* (alunna G.B., 2Bart)

Le stesse osservazioni si registrano anche nel confronto tra le classi del Liceo Scientifico e quelli del Liceo delle Scienze Umane: questi ultimi, avendo meno strumenti matematici a disposizione, si calano direttamente nella situazione e cercano soluzioni personalissime, notando anche particolari e informazioni diverse. Capiscono subito, per esempio, il concetto di base del MinMax nonostante facciano fatica ad applicarlo; sostengono, nel Dilemma del Prigioniero, che sia più giusto confessare, nonostante questo possa portare una pena più severa, diversamente dagli studenti dello Scientifico; nel problema delle coppie, poi, i ragazzi delle Scienze Umane deducono subito che il giocatore Jane è il meno preferito, attraverso una semplice somma sulle colonne.

In generale sembra che i ragazzi delle Scienze Umane si sentano più vicini ai problemi descritti, mentre quelli dello Scientifico si mostrano alle volte pigri, non trovando algoritmi e/o procedimenti conosciuti da applicare. Anche nella classe 1A i gruppi con gli studenti solitamente più bravi chiedono continuamente aiuto, dicendo che non capiscono, senza però aver finito di leggere il problema. Si segnala comunque una maggiore difficoltà da parte degli studenti di 1A nella comprensione sia dei problemi sia delle modalità di risoluzione proposte.

Alla fine di ogni giornata i ragazzi vorrebbero fare altri problemi e saperne di più. *Ce n'è un altro?*, mi chiedono, sostenendo che *se non c'è il voto lo faccio più volentieri perché posso prendermi il tempo che voglio e approfondire su internet*. Il voto è un pensiero presente durante tutto l'esperimento: di continuo mi viene richiesta la modalità della valutazione.

Durante le spiegazioni alla fine del laboratorio si riscontra maggiore partecipazione, attenzione e silenzio; alle volte gli studenti si siedono nei posti davanti, sostenendo di voler seguire meglio.

3.3.2 Il confronto dei questionari

A seguito della somministrazione dei questionari finali si ricavano i giudizi sull'attività svolta. Le risposte ai questionari sono state analizzate con particolare attenzione al confronto con quelle dei questionari iniziali: grazie a tale confronto è stato possibile notare effettivi cambiamenti nella motivazione dei ragazzi, verificati poi attraverso le interviste.

Classe 1A

E' evidente che l'aspetto fondamentale dell'attività sia stato, per la classe 1A, il lavoro di gruppo: *confrontarsi* , *aiutarsi* e *lavorare insieme* sono i verbi più utilizzati nelle risposte. La novità dell'attività è altrettanto ben accolta: *nuovi e interessanti* argomenti generano poi emozioni *diverse* o addirittura *migliori del solito.*

Si rilevano cambiamenti di motivazione a seguito dell'attività per:
alunno A.A. Nel primo questionario scriveva *pressione, confusione e rabbia* per quanto riguarda le emozioni associate alla matematica e dichiarava che non c'è nulla che gli piace del fare matematica, mentre sostiene poi nel secondo questionario di non aver trovato aspetti negativi nell'attività, nonostante si sia trovato in difficoltà. In più, se nel primo questionario non emergeva la voglia di mettersi alla prova, nel secondo scrive che invece quest'ultima prevale *per il fatto che la nostra mente è proiettata verso l'obiettivo di superare gli ostacoli che ci troviamo di fronte.*
alunna G.C. Anche qui si trova un cambiamento positivo per quando riguarda il mettersi alla prova. In più l'alunna esplicita di aver provato *emozioni migliori del solito.* L'alunna rappresenta anche un caso problematico.
alunno F.R. Non c'è un evidente cambiamento di motivazione ma una frase eloquente nel secondo questionario: *nei confronti della matematica ho provato molto più interesse, ma soprattutto molta più passione per riuscire a*

trovare una soluzione per i problemi.

Tra i casi problematici si evidenziano gli alunni:
alunna J.P. Nonostante nel primo questionario compaia la noia tra le emozioni associate alla matematica, nel secondo si ha un resoconto molto positivo delll'attività: *Mi è piaciuto molto collaborare con i miei compagni e applicare una parte della matematica che non conoscevo [...] (Ho provato) emozioni diverse dal solito.*
alunna V.F. L'alunna mostra grande impegno e voglia di fare; riguardo l'attività scrive: *ho trovato i problemi molto interessanti [...] carini, un modo per ragionare in gruppo confrontando le idee diverse e mi è piaciuto. Spero di fare altre attività del genere.*

Classe 2A

Anche in questa classe compare, tra gli aspetti positivi legati all'attività, il confronto tra idee diverse e la collaborazione. L'emozione che ha accompagnato l'attività è decisamente la soddisfazione di essere riusciti a risolvere i problemi: *soddisfazioni nuove*, per sè stessi e con gli altri. Di nuovo c'è anche la matematica, una matematica *diversa*, piacevolmente scoperta, una matematica che ti fa *ragionare e usare la logica*.

Si notano cambiamenti di motivazione per i seguenti alunni, di cui i primi tre sono anche casi problematici:
alunno F.B. Nel primo questionario scrive *tristezza, vuoto e lutto* tra le emozioni associate alla matematica. Sicuramente dopo il secondo questionario mostra più voglia di mettersi alla prova *perchè prendo un ostacolo come una prova per crescere.* Dell'attività dice: *E' stata una matematica nuova, ho dovuto ragionare ed utilizzare la logica, mentre di solito faccio tutto meccanicamente.*
alunna M.T. Sull'attività scrive: *Ho avuto l'occasione di mettermi alla prova, risolvendo problemi mai fatti prima. E' stata una sfida in cui mi*

sono impegnata, non ho avuto ansie o paure; il presente commento è particolarmente importante perchè nel primo questionario scriveva proprio *ansia e paura* tra le emozioni associate alla materia.
alunna M.C. L'alunna presenta grosse difficoltà a relazionarsi con le prove di valutazione, soprattutto quelle orali, che sono per il soggetto motivo di trauma; infatti tra le emozioni nel primo questionario scriveva *ansia, paura e confusione*, mentre nel secondo esplicita che *con i lavori a gruppi i sentimenti sono migliorati, infatti non vedevamo l'ora di fare matematica per avere un confronto tra di noi. Le emozioni che ho provato sono state gioia e soddisfazione.* L'alunna proviene dal Copernico.
alunna R.S. Nel primo questionario scriveva tra le emozioni *soddisfazione, stress e rabbia* e riguardo alla matematica sosteneva che fosse *interessante, anche se verrà poi usata raramente nella vita di tutti i giorni*; a seguito dell'attività sostiene che questa l'ha *riavvicinata alla matematica, che era diventata un po' troppo astratta.*

Classe 2Bart

L'attenzione dei ragazzi è puntata sul lavoro a gruppi: la maggior parte parla di collaborazione, aiuto e confronto tra gli aspetti positivi dell'attività, a tal punto che si legge *da solo non sarei mai riuscito.* Si evidenzia anche il ragionamento come fondante di questa matematica *diversa*, che alcuni definiscono come *utile per la vita quotidiana.*

Si vogliono discutere i seguenti casi, che presentano sia un cambiamento nella motivazione, sia la qualità di caso problematico:
alunna G.B. Dall'analisi dei questionari emerge l'entusiasmo per i problemi proposti (evidente in classe) e per l'attività, in cui *ognuno aiutava l'altro a colmare le lacune.* L'alunna si è *divertita molto* a risolvere i problemi, mentre nel primo questionario le emozioni segnalate erano *frustrazione, ansia e terrore.* L'alunna è ripetente.
alunno M.P. L'alunno dichiarava, nel primo questionario, di non possedere

minimamente le doti necessarie per fare matematica (*in misura 0*); per quanto riguarda l'attività si nota come il ragionamento sia stato fondamentale per l'alunno: ha provato *soddisfazione per essere riuscito a capire il ragionamento per risolvere i problemi* e l'aspetto che sottolinea è *il fatto di vedere come ragionavano i miei compagni.*

alunno N.O. L'alunno, nel tema libero, sottolinea più volte che la matematica gli *fa schifo*; nel primo questionario, poi, utilizza i termini *noia, frustrazione e disgusto*; nel secondo dice che non si sente a suo agio a fare matematica perchè *è una materia che non sento mia, tutta logica e rinchiusa in formule; a me piace far viaggiare la mente.* Durante l'attività non ha presentato un impegno costante: i primi due giorni (come ammetterà anche nell'intervista) si rifiuta anche solo di leggere, mentre il terzo giorno scopre che gli argomenti lo interessano, infatti nel questionario scrive: *mi sono piaciuti molto i problemi da fare perchè era un lavoro diverso e più piacevole della solita matematica.*

alunna A.R. L'alunna dimostra capacità di molto sopra la media, tuttavia non fa esercizi e non lavora a casa: questa tesi è confermata dalle sue stesse parole, che riporta in tutti i questionari e nel tema, in cui aggiunge: *la matematica era la mia materia preferita [...] partecipavo ai Giochi Matematici [...] sono andata alle fasi nazionale [...] la matematica non è come le altre materie, non bisogna imparare solo nozioni a memoria, ma sulla quale ragionare, per la quale serve logica. Però da quando sono alle superiori non mi piace per nulla [...] dovrei impegnarmi di più ma non ne ho voglia, non riesco a farmela piacere.* Durante l'attività a gruppi l'alunna è l'unica a lavorare nel gruppo e cerca di stimolare gli altri; il primo giorno dopo le attività è l'unica ad aver risolto tutti i problemi (erano stati assegnati per casa quelli che non erano riusciti a fare in classe). Sul laboratorio scrive: *l'ho trovato molto stimolante ed interessante e anche più utile per la vita quotidiana.*

Classe 2ASU

Le emozioni della classe nei confronti dell'attività sono scandite dai risultati dei problemi: *soddisfazione quando ci venivano, odio quando non riuscivamo*, moltissimi presentano le loro emozioni esattamente in questo modo; si parla addirittura di *realizzazione*, mentre l'aspetto negativo è rappresentato per alcuni dalla verifica finale. Il lavoro di gruppo e la collaborazione rimangono sempre il filo conduttore dell'esperienza.

Nel confronto tra i questionari sorprendono, tra tutti, due casi, di cui il primo è anche un caso problematico:
alunna A.B. Nel primo questionario scriveva tra le sue emozioni nei riguardi della materia *odio, ansia e panico*: seppure anche nel secondo questionario scriva come non si senta a suo agio nel fare matematica *perchè vado in panico, come se tutto quello che ho studiato scomparisse all'improvviso*, queste sensazioni vanno sfumando nell'attività, in cui si è trovata bene, e ha capito di più di quanto avrebbe capito da sola: *a volte la matematica può essere anche divertente attraverso queste piccole cose, forse te la fanno apprezzare un po' di più.*
alunna G.R. Nel primo questionario sosteneva di essere *saltuariamente* dotata per fare matematica, mentre nel secondo dichiara di essere a proprio agio nel fare matematica *perchè mi viene semplice applicarmi e riesco ad essere serena.* Prova infine, nei confronti dell'esperienza, *curiosità per cose nuove, interesse e piacere nel fare esercizi diversi dove non basta sapere qualche formula ma ragionare e sforzare la mente.* L'alunna è ripetente.

3.3.3 Le interviste

I casi messi in evidenza nel paragrafo precedente sono stati intervistati, alcuni singolarmente, altri con i compagni del gruppo in cui hanno lavorato: tale procedura differenziata non ha portato ad alcuna conclusione particolare, in quanto gli studenti in esame si sono mostrati molto determinati

nell'esprimere la loro opinione e nessuno è stato influenzato dal gruppo.
L'intervista prevedeva la richiesta di un brain storming sull'attività, la successiva analisi delle parole scelte e varie domande-stimolo, durante e dopo le loro spiegazioni; a tutti è stato poi chiesto in cosa l'attività è stata diversa dal resto delle lezioni curricolari di matematica. Le domande e le conversazioni che ne sono derivate, registrate e successivamente attentamente analizzate, hanno permesso di capire a fondo il punto di vista degli studenti e se/a cosa è servita l'esperienza.

Classe 1A

alunno A.A. Durante l'intervista emerge come la matematica curricolare sia per l'alunno *poco interessante e ripetitiva*: nel lavoro a gruppi è potuto *andare oltre la solita matematica, grazie all'ingegno perchè bisognava mettersi dalla parte dei protagonisti, all'intuito e al gioco di squadra*, che normalmente non sono richiesti. *Potrebbe essere un'attività da svolgere con più frequenza*, dice. Quando gli vengono chieste le cause delle differenze tra il primo e il secondo questionario risponde: *Quando ho risposto al primo questionario non sapevo che attività si potessero svolgere e quindi quando ho avuto l'occasione di provarle ho visto che mi sono molto piaciuti, mi hanno preso e quindi ho dato un giudizio diverso.*
alunna G.C. L'alunna sostiene di essere pigra per quanto riguarda lo studio in generale. Dell'attività sottolinea come aspetto positivo il fatto di aiutarsi l'uno con l'altro, spiegarsi le cose a vicenda: ha provato *soddisfazione* nello spiegare agli altri, cosa che, dice, non le era mai successa. Di diverso dalla matematica curricolare c'è che *è più complicata ma è più bello perchè sono cose reali, potrebbero succedere e sapresti come risolverli.*
alunno F.R. Il ragazzo è molto attento alle problematiche attuali e ne parla durante tutta l'intervista: tra le parole/aggettivi/frasi richieste per caratterizzare l'attività l'alunno scrive *molto diversa rispetto a quello che si fa con le altre discipline*; a una richiesta di spiegazione risponde: *è uguale perchè serve la logica come in latino, ma diversa perchè le altre materie non insegnano*

come affrontare i problemi della vita quotidiana [...] con la TdG mi sono sentito più vicino alla realtà e ai suoi problemi che di certo aumenteranno [...] comunque secondo me mi è molto servita: mi si è rafforzata la logica e mi ha aumentato l'interesse verso i problemi con le equazioni. Aggiunge che l'attività è stato un modo per socializzare con i compagni.
alunna J.P. Secondo il parere dell'alunna la cooperazione è stato uno stimolo in più, *ci ha spinti a fare l'uno per l'altro: se uno non fa niente ci rimettono tutti, quindi ci siamo dati una mossa*; aggiunge che dopo l'attività hanno iniziato a confrontarsi in classe anche per altri argomenti. Per quanto riguarda il contenuto dice di fare i problemi con più voglia rispetto al programma curricolare, dove bisogna solo *applicare le stesse regoline*, e per questo parlava nel questionario di emozioni diverse dal solito: *fare 1+1 è semplicissimo, ma è trovare quell'uno il problema!* Conoscere la TdG, dice, la invoglia anche a fare il resto: *cioè, ci saranno altre parti della matematica che mi piaceranno!*.
alunna V.F. L'attività è stata utile per *conoscere meglio le idee e i pensieri dei compagni e il loro modo di ragionare*, infatti, dice, al primo anno non si ha esperienza e dunque si ha paura, perciò nessuno alza la mano: l'attività ha aiutato anche a conoscersi e ad apprendere nuovi metodi di ragionamento che, dice, sta mettendo in pratica. L'alunna è soprattutto affascinata dalla TdG: *stupore quando vedi che sono cose fattibili, che c'è dietro una teoria: è giusto fare una teoria su queste cose! [...] Ho ammirato chi ha progettato questa TdG, è molto interessante per spiegare i problemi della vita quotidiana [...]: la matematica sono dei calcoli che sì servono per cose materiali ma in pratica sono sempre calcoli, mentre questi problemi sono pensieri, idee, confronti.* Rispetto alla sua situazione scolastica dice: *prima la pensavo diversamente, non mi ero aperta [...] poi c'è stata questa TdG che mi ha reso più aperta a nuove proposte.*

Classe 2A

alunno F.B. L'alunno è un estremo caso problematico che ha trovato nell'attività un modo per ottenere soddisfazioni dalla matematica: dice infatti che è stato *coinvolgente* perchè ha dovuto usare la testa, mentre lui normalmente non segue perchè gli *fa schifo*; *è stato utile perchè si è creata un'aria di competitività: se mi dai un'espressione io lascio perdere perchè non me ne frega niente e non ce la faccio, invece se è scritto in un testo devi usare la logica e lì dico: io ho la logica come tutti gli altri, ci posso arrivare benissimo [...] quelle sono regole ma ci siamo arrivati con la logica, associando ai numeri qualcosa di reale, invece le equazioni le faccio a macchinetta [...] geometria per esempio hai qualcosa davanti, ci puoi arrivare: per me è molto diversa dalla matematica anche se mi dicono che è la stessa cosa.*
alunna M.T. L'assenza di ansia è giustificata dal fatto di essere a gruppi; dice infatti di essersi *buttata, messa alla prova* perchè poteva anche sbagliare, dato che non dipendeva tutto da lei. E' stata poi un'esperienza interessante perchè *al di là dei calcoli c'è proprio un ragionamento dietro e quindi bisogna pensare a applicarsi e questo mi piace.*
alunne M.C. e R.S. Sono state intervistate insieme alle altre due componenti del loro gruppo: tutte e quattro hanno apprezzato la modalità, ovvero *farci lavorare senza aver spiegato prima è stato più utile/ innovativo perchè abbiamo potuto toccare con mano prima/ ci hai spinti a usare il cervello/ ci hai coinvolti/ invece di darci la regolina/ forse noi apprendiamo di più così, rimane più impresso/ hai catturato il nostro interesse facendo qualcosa di diverso dal solito: qui c'è discussione, partecipazione[...].* Anche i contenuti dell'esperienza hanno contribuito a rendere *utile e istruttiva* la matematica: *qui ci sono situazioni di tutti i giorni che magari puoi applicare, invece la matematica di scuola ti serve solo se fai fisica/ poi se si ragiona sui soldi uno si attiva di più perchè è più interessato: cioè se ti dico ≪ti do 100 euro oppure 50≫ è un conto, ma se ti dico ≪ti do x o y≫ è troppo astratto e il cervello non si attiva (R.S.).*
In particolare l'alunna R.S. sostiene di essersi *depressa con le disequazioni*

ma con la TdG è riuscita a capire: *c'è più attenzione e apertura mentale nel riuscire a fare cose nuove; un giorno mi è venuta l'idea di guardare il film su Nash, allora ho sviluppato un'opinione positiva della matematica, anche quella di scuola.*
L'alunna M.C. parla invece della sua insicurezza: con questi argomenti si è trovata bene e a suo agio, dice; *anche se era l'ultima ora di matematica facevamo insieme qualcosa che ci piaceva: questo mi ha dato più sicurezza in me stessa e sono riuscita [...] da sola non capisco mai dov'è l'errore, qui si poteva discutere e cambiare idea [...] mi ha preso l'argomento, come hai gestito la cosa, come ci hai divisi, anche il fatto dei questionari.*

Classe 2Bart

alunna G.B. L'alunna sostiene che, grazie a questa attività, ha *imparato a collaborare*: dice infatti che prima di questa esperienza non si era mai confrontata con i suoi compagni, mentre ora lo fa; aggiunge che ha anche spiegato agli altri, cosa che non le era mai successa. Riguardo ai contenuti dice che le piacerebbe approfondirli maggiormente, nonostante non sia solita approfondire argomenti trattati in classe. L'alunna parla del disagio provato nella precedente scuola, il Liceo Copernico, in cui, dice, *non ci si ferma*, e lei rimaneva spesso indietro; grazie all'attività sembra aver riacquistato un po' di fiducia in sè stessa: *l'attività mi ha aiutato specialmente per il carattere: ero rilassata, sapevo di poterci riuscire, sono agitata di solito, mentre qui se non ricordo la formula ci posso arrivare con la logica [...] è frustrante normalmente; ora sono più sicura perchè ho visto che posso riuscirci: una bella soddisfazione! Mi sono anche divertita, e poi sono problemi che prendono in causa avvenimenti che possono succedere sul serio anche al di fuori della scuola, possono sempre servire [...] sono più tranquilla perchè so che posso usare la logica e non mi diranno più che non so farlo.*
alunno M.P. L'alunno parla di matematica nuova: *questa è matematica ma sono azioni di vita quotidiana: sono metodi che puoi applicare anche quando fai un colloquio per esempio, oppure quando devi decidere qualcosa [...] pen-*

savo che la matematica nella vita servisse solo per calcoli o cose più tecniche, non per queste cose! La sua attenzione è però focalizzata sul lavoro di gruppo che non aveva mai fatto e che gli è stato *utile per sperimentare nuovi metodi di studio dato che ho delle difficoltà*: sostiene di aver osservato il compagno *bravo*, come ragiona, che metodo utilizza, cosa ritiene più importante fare; *adesso faccio più attenzione a queste cose e mi sto impegnando di più*, dice.

alunno N.O. L'alunno, di cui si riporta per intero il discorso vista la sua eloquenza, è stato intervistato insieme ai suoi compagni del gruppo, ma ha da subito mostrato l'interesse ad esprimere la sua opinione. *Il problema più è utile più ti viene da risolverlo, perchè se devo risolvere un problema come quelli di geometria che non si presentano nella vita reale sinceramente non mi interessa neanche tanto, invece quello ho un motivo in più per farlo; che non è detto che riesca a risolverlo ma ho una stimolazione [. . .] quando lavori da solo e non ti vengono ti butti giù e invece con gli altri c'era D.M. che li sapeva fare, ce li spiegava e capivo; all'inizio pensavo "c'è D.M., perchè devo farli?", ma poi ho visto che mi piacevano, anche perchè ci puoi mettere il tuo parere personale, e mi sono messo lì.*

alunna A.R. L'alunna ammette: *solitamente gli esercizi di matematica non è che li faccia più di tanto e invece questa volta li ho rifatti e ne ho fatti anche altri perchè è stimolante e utile [. . .] possono accadere*; aggiunge che per lei è anche più facile perchè sono problemi *naturali* e non capisce perchè alcuni suoi compagni fanno invece più fatica. Sostiene che il lavoro di gruppo è *un modo per gestircela noi e aiutarci a vicenda [. . .] tutti capiscono tutto se viene fatto il lavoro in maniera corretta, ma anche solo con una lezione più dialogata ed esempi concreti*; aggiunge che studia meglio in gruppo e ottiene risultati migliori, anche perchè, dice, *alle volte a spiegare le cose agli altri le capisci meglio tu.* Conclude dicendo: *l'attività mi ha reso più piacevole la matematica [. . .] potrei anche pensare di cominciare a farli (gli esercizi)!*

Classe 2Asu

alunna A.B. L'alunna dice di volerne sapere di più *della TdG, dei matematici, delle loro teorie [...] non pensavo che nella vita ci fosse tanta matematica, che fosse così importante! [...] La matematica può essere anche divertente: non l'avevo mai pensato!* Parla poi di *crescita personale e sviluppo*: per lei questa attività è stata *un'opportunità per far vedere al prof che so fare determinate cose [...] c'è stato un cambiamento nei confronti della matematica grazie a questa attività, a come mi sono trovata, ai risultati ottenuti [...] se mi impegno e mi piace posso portare a casa dei risultati [...] mi sono voluta mettere in gioco: da sola non sarei riuscita, è stata la prima e grande soddisfazione!* L'alunna ha infatti dei problemi nelle valutazioni scritte, in cui, dice, *mi si resetta il cervello*: nel test finale di valutazione ha svolto invece un ottimo compito.
alunna G.R. L'alunna esprime curiosità nei confronti degli argomenti trattati: *è diverso, più bello, perchè in matematica facciamo sempre esercizi per i quali bisogna sapere le formule e basta applicarle [...] cose che nella vita servono veramente poco, invece questo era più interessante ed ero curiosa perchè era nuovo e poteva servire per sforzare la mente e usare logica, sono cose che possono succedere nella vita.* Ha apprezzato il fatto di essere a gruppi, un modo per confrontarsi e alle volte cambiare idea. Conclude dicendo che prima non aveva molta voglia di *sforzare la mente: invece adesso mi piace proprio, forse questo lavoro mi ha avvicinato di più a queste cose [...] mi è stato utile perchè applicandomi così tanto faccio anche il resto più volentieri, mi ha avvicinato alla matematica perchè mi piacciono le cose diverse rispetto a quelle che si fanno in classe, ora vedo in un'ottica diversa tutta la matematica [...] prima non trovavo un senso a certe cose mentre ora ho visto che ci sono cose interessanti che possono tornare utili [...] questo lavoro mi ha reso più positiva.*

Capitolo 4

Conclusioni

Si può affermare che l'ipotesi di partenza è stata confermata; la motivazione degli studenti ha infatti subìto un cambiamento significativo, emerso soprattutto dalle interviste, a seguito di una pratica didattica non convenzionale: il lavoro a gruppi senza una spiegazione dell'insegnante a precederlo; un argomento extracurricolare con basi matematiche forti ma con una componente nuova, tale da mettere in evidenza il collegamento tra realtà e matematica e un utilizzo diverso degli strumenti di quest'ultima. Anche Pellerey e Orio (1996) affermano che pratiche didattiche ben orchestrate sostengono un orientamento motivazionale favorevole e fanno crescere le convinzioni che la matematica è un'attività significativa, che il successo dipende dal cercare di dare senso a quello che si fa [. . .] La comprensione è la fonte principale di un'esperienza positiva nel fare matematica, particolarmente nel risolvere problemi significativi: questa è la base per sviluppare atteggiamenti positivi, per interiorizzare valori, per generare stati motivazionali che sollecitano e dirigono l'azione in modo adeguato. E' importante riconoscere il ruolo fondamentale svolto dalla percezione di essere capace [. . .] tale percezione è particolarmente influenzata da: esperienze stimolanti, significative e positive; il feedback e il clima orchestrato dall'insegnante; l'apprendistato di strategie cognitive, affettive e motivazionalicoinvolte nell'apprendimento della matematica. [. . .] Percepire se stessi come capaci di comprendere e controllare le esperienze matematiche è una forza trainante dell'apprendimento (Pellerey e Orio, 1996).

Si possono raggruppare le cause dei cambiamenti nella motivazione in tre categorie:

- il lavoro a gruppi;
- l'argomento oggetto di studio;
- la scoperta di percezione di competenza.

La collaborazione è stata molto apprezzata dagli alunni perchè ha permesso momenti di aggregazione (soprattutto per la classe prima) e di aiuto reciproco; si segnala l'utilità del lavoro a gruppi per i casi problematici, che hanno potuto confrontarsi con i più capaci per sperimentare nuove tecniche di apprendimento.
Come suddetto la Teoria dei Giochi ha riscosso molto successo per la sua componente sociale, che ha risvegliato l'interesse anche di chi normalmente si mostra passivo nei confronti della materia; è stato possibile mostrare agli studenti il vero utilizzo della matematica nella vita quotidiana e nuovi risvolti di una materia che era pensata come solitaria e arroccata nelle proprie formule.
L'interesse ritrovato ha permesso anche una partecipazione attiva di tutti gli studenti, alcuni dei quali si sono riscoperti capaci di fare matematica: sentimenti nuovi o rinnovati per molti, dai quali si è generato stimolo a impegnarsi anche nelle attività curricolari poi riprese dopo il laboratorio.

Dal presente studio si deduce quindi l'importanza di attività non convenzionali o comunque diverse dalla lezione frontale quotidiana: attività di questo genere, anche realizzate con scarsa frequenza, possono stimolare e ridare fiducia a chi non crede di poter fare matematica.

Appendice A

Matrimoni combinati

Siamo a Londra a metà del XVII secolo. Come sappiamo non è raro sentire di famiglie che organizzano matrimoni combinati: è questo il caso che coinvolge quattro rispettabili signori e altrettante dame. Ci sono

Sir William Darcy	Mrs. Mary Anning
Sir Thomas Buckland	Mrs. Caroline de Bourgh
Mr. Charles Bingley	Mrs. Jane Bennet
Lord George Gardiner	Mrs. Elisabeth Philips

Le signore sono tutte di bell'aspetto e istruite ma ovviamente ognuno dei signori avrà una sua preferita e viceversa; tuttavia, si sa, le famiglie sono ben poco interessate ai sentimenti, mentre fanno più caso ai benefici economici e sociali che il matrimonio può portare. Non si riesce proprio a non litigare! Il cappellano Bradley si propone per trovare una soluzione: ogni famiglia stili una lista di preferenze in base all'economia di casa e mettendo d'accordo anche i pareri dei figli. Ecco le liste: mettiamo nella prima tabella le preferenze delle signore, nella seconda quelle dei signori (indichiamo solo le iniziali dei nomi per praticità):

	W	T	C	G
M	3	4	2	1
C	3	1	4	2
J	2	3	4	1
E	3	2	1	4

	M	C	J	E
W	1	2	3	4
T	1	4	3	2
C	2	1	3	4
G	4	2	3	1

Così ad esempio vediamo che il favorito per la famiglia della signorina Jane (J) è lord George (G), poi c'è sir William (W), sir Thomas (T) è al terzo posto e per ultimo mr. Charles (C).
Il tempo stringe! Il cappellano butta giù in fretta e furia delle possibili coppie:

M	C	J	E
W	T	C	G
4x1	2x2	4x3	3x4

Quindi mrs. Mary farà coppia con sir Thomas, che è la sua quarta scelta, mentre lei rappresenta la prima scelta per sir Thomas, da cui la scrittura 4x1, e così via.
"Sì, non sarà possibile mettere d'accordo tutti ma così proprio non va bene!"Sbottano i signori Anning e i signori Bingley: sapete dire perché?

Proviamo a combinare ogni uomo con la sua prima scelta, la seconda al massimo: cosa otteniamo? Chi si potrebbe lamentare?
A questo punto notiamo che:

a) Sicuramente non sarà possibile accoppiare tutti con le loro prime scelte;

b) Una soluzione che chiameremo "stabile"(ovvero con il minimo di lamentele possibili) deve essere tale che un uomo e una donna non accoppiati tra loro non preferiscano stare insieme piuttosto che col il compagno che è stato loro assegnato: mettiamo che A stia con B con preferenze 4x3 e C con D con preferenze 3x1; ma se A fosse secondo nella lista di C e altrettanto C nella lista di A essi preferirebbero fare coppia piuttosto che stare con il compagno che è stato loro assegnato, dunque diciamo che la soluzione che contiene questa coppia non sarà stabile. (nell'esempio precedente infatti ...)

Il cappellano si rimette quindi al lavoro e propone una procedura che metterà d'accordo tutti.

i) Come tutti i corteggiamenti che si rispettino ogni uomo si proporrà alla sua prima scelta; chi delle donne avrà ricevuto più proposte rifiuterà la meno favorita, tutti quelli non rifiutati saranno messi in lista d'attesa:

M	C	J	E
W	C		G
T*			

Così sir William si proporrà a Mrs Mary, mr Charles a mrs Caroline, lord George a mrs Elisabeth e sir Thomas a mrs Mary. A questo punto mrs Mary dovrà scegliere tra William e Thomas, che sono rispettivamente al terzo e al quarto posto nella sua lista di preferenze: sir Thomas sarà dunque rifiutato, tutti gli altri rimarranno in attesa.

ii) Ora gli uomini rifiutati si proporranno alla loro prossima scelta sulla lista delle preferenze, in questo caso alla seconda scelta; le signore con più proposte rifiuteranno quella meno favorita e metteranno in attesa l'altro:

M	C	J	E
W	C		G*
			T

Sir Thomas porterà dunque un mazzo di fiori a mrs Elisabeth, che dovrà a questo punto rifiutare lord George perché gli preferisce sir Thomas.

ii) Ora è la volta di lord George, che andrà a bussare alla porta di mrs Caroline che è la sua seconda scelta, la quale rifiuterà allora Charles, che è la sua quarta scelta:

M	C	J	E
W	C^*		T
	G		

Eccetera. Sapete continuare?
Controllate se la soluzione trovata si può chiamare stabile, secondo la definizione che abbiamo dato prima.

Il corpo di ballo

Il famoso coreografo Gaetano Vestris deve inscenare il suo nuovo balletto con la partecipazione di 5 ballerine, Stefania, Carola, Giorgia, Martina e Angelica, e 3 ballerini, Roberto, Federico e Emanuele. La coreografia prevede 3 coppie fisse e due ballerine in secondo piano . . . Ma quanti problemi! All'incontro con il corpo di ballo il maestro Vestris non sa proprio come fare: Angelica non sopporta le prese di Federico, Giorgia non può fare a meno della complicità che si è creata tra lei e Emanuele, a Martina non dispiacerebbe ballare con Emanuele, anche se il suo compagno preferito è senz'altro Federico; d'altro canto Emanuele e Federico devono assolutamente stare con Carola!!! Il maestro è tempestato di richieste, le ragazze si litigano i ballerini pur di non stare sullo sfondo e anche i ragazzi non riescono proprio a mettersi d'accordo! Preso dalla disperazione il coreografo urla: "mettete per iscritto le vostre preferenze!"

	E	F	R
A	1	3	2
C	2	3	1
G	1	2	3
M	2	1	3
S	1	2	3

	A	C	G	M	S
E	5	1	2	3	4
F	4	1	2	5	3
R	5	4	1	3	2

Cos'ha in mente il famoso coreografo? Riuscirà a trovare una soluzione che non lasci scontento nessuno? Dovrà decidere considerando prima le liste delle ballerine o prima quelle dei ballerini?

L'ammissione a medicina

Come ogni anno, freschi di maturità, gli aspiranti medici tedeschi fanno domanda per entrare alla facoltà di Medicina. C'è chi, come Cristoph, Stephan, Kirsten e Giesela, mette tutte le possibili scelte pur di entrare; anche Maximilian vorrebbe ma Augsburg è troppo lontano; Dorothea, Philipp e Ines, invece, si iscriveranno solo se saranno accettati dalla scuola della città in cui vivono perché non hanno la possibilità di spostarsi. Ognuno ha le sue preferenze insomma. Anche ogni facoltà ha un tetto massimo di studenti da ammettere e delle preferenze in base al voto di diploma.
Ma le cose non andrebbero come dovrebbero se le liste di preferenze fossero rese note: qualcuno potrebbe bluffare e poi lasciare gli altri con un pugno di mosche in mano! Così un centro di smistamento prende in carico sia le domande delle scuole sia quelle dei candidati e cerca il modo più giusto per assegnare ad ogni scuola la sua lista di ammessi, rispettando il numero massimo, e ad ogni aspirante la sua facoltà, nel caso sia possibile.
Nel nostro caso il funzionario Karl del centro di smistamento ha 20 candidati da ripartire su 5 scuole: Augsburg, Bonn, Chemnitz, Dortmund e Essen. I candidati sono: Anton, Birgit, Christoph, Dorothea, Emma, Friedrich, Giesela, Hans, Ines, Johannes, Kirsten, Louise, Maximilian, Niklas, Olga, Philipp, Quentin, Rebecka, Stephan e Thomas. Il centro di smistamento riceve le liste di preferenze degli aspiranti medici, che omettono le scuole alle quali non sono interessati (qui segnate con 0):

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t
A	1	0	2	1	2	1	5	1	0	2	1	1	0	0	0	0	0	4	1	1
B	2	0	3	0	1	0	1	2	0	0	2	2	4	0	0	0	1	0	2	0
C	3	0	4	0	3	0	2	3	0	0	3	3	1	1	1	0	0	1	3	2
D	0	1	5	0	0	2	3	4	0	0	4	0	2	2	0	1	0	2	4	0
E	0	2	1	0	0	3	4	0	1	1	5	0	3	0	0	0	0	3	5	0

Karl dal centro manda ad ogni scuola i nominativi di tutti i candidati che l'hanno inserita nella loro lista, senza le preferenze. A questo punto le scuole rendono noti i posti disponibili: Augsburg ne può ammettere al massimo 9, Bonn 6, Chemnitz 7, Dortmund 5 e Essen 4. Ogni scuola manda poi la sua lista di preferenze:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t
A	8	9	1	0	0	0	2	3	0	6	4	5	0	0	10	0	0	0	0	7
B	1	2	3	4	5	6	7	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	1	2	0	0	0	0	0	3	6	0	4	5	8	9	0	0	0	0	0	7
D	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	5	0
E	2	3	0	4	1	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

A questo punto ci sono due modi per procedere:

1. Karl assegna ad ogni candidato la sua prima scelta; tramite le preferenze della scuola si metteranno in attesa alcuni e si rifiuteranno degli altri: questi ultimi saranno poi assegnati alla loro seconda scelta, e così via. Ma attenzione ai posti disponibili per ogni scuola!

2. Ogni scuola manda l'invito ai suoi candidati preferiti, tanti quanti sono i posti disponibili: ogni candidato che ha ricevuto più inviti può rifiutare in base alle sue preferenze e mettere in attesa la favorita. A questo punto la scuola manda gli inviti agli altri candidati nella sua lista di preferenze, cercando di occupare tutti i posti vacanti, ecc ...

Provate a implementare entrambi i metodi: chi rimarrà fuori? Ci sono differenze?

Appendice B

Il dilemma del prigioniero

Due terroristi si trovano in due celle separate senza la possibilità di comunicare. Il giudice vuole stimolarli a confessare il reato più grave nel quale sono implicati, non avendo le prove sufficienti per incastrarli: se non lo faranno potrà condannarli solo per il reato minore, per il quale ha invece le prove, e dunque dovranno scontare 1 anno di pena ciascuno. Per il reato più grave sono previsti 7 anni di carcere: chi dei due lo confesserà verrà scagionato in qualità di pentito, l'altro invece se li sconterà tutti. La confessione da parte di entrambi porterà loro invece uno sconto di pena e avranno così 5 anni ciascuno. Possiamo schematizzare in questo modo la situazione:

	B confessa	B non confessa
A confessa	(-5,-5)	(0,-7)
A non confessa	(-7,0)	(-1,-1)

Voi cosa fareste se foste il prigioniero A?

Un problema di concorrenza

Gucci e Prada sono vogliono aprire dei punti vendita in città per i loro profumi. Gli spazi disponibili si trovano in piazza Garibaldi e in piazza de' Medici: di certo non conviene a nessuno dei due aprire un negozio nella stessa piazza dell'altro, perciò si trova un modo per decidere dove apriranno i loro

negozi: faranno una gara d'appalto in busta chiusa, ovvero scriveranno una somma su ognuna delle piazze senza vedere cosa farà l'altro; chi avrà puntato la cifra maggiore userà quei soldi per aprire i suoi negozi, se invece avranno scritto la stessa cifra sulla stessa piazza nessuno dei due potrà aprirvi un negozio.
Per esempio Gucci potrebbe decidere di giocare 400.000 sulla prima piazza e 0 sull'altra (mossa 4,0) oppure 200.000 su ciascuna piazza (mossa 2,2) oppure 100.000 sulla prima e 300.000 sulla seconda (mossa 1,3), e così via anche Prada; così Gucci potrà aprire il suo punto vendita in una delle due piazze (1), oppure in entrambe (2), oppure in nessuna delle due (0); se decidiamo di vedere tutta la gara in funzione della vincita di Gucci, potremmo dire che la vittoria di Prada di una piazza corrisponde in realtà alla perdita di una piazza per Gucci (quindi -1) e dunque se Gucci vince per esempio piazza Garibaldi e Prada piazza de' Medici la vincita di Gucci sarebbe in realtà 1+(-1)=0, quindi nessuno avrà vantaggio da questa situazione, avendo un negozio ciascuno. Sapendo che Gucci e Prada hanno a disposizione rispettivamente 400.000$e 200.000$, mettiamo sulla prima colonna le mosse di Gucci e sulla prima riga le mosse di Prada, ottenendo tutte le possibili combinazioni ed esprimendo le vincite di Gucci:

G\P	**2,0**	**1,1**	**0,2**
4,0	1	0	0
3,1	2	1	0
2,2	1	2	1
1,3	0	1	2
0,4	0	0	1

1. Cosa fareste se foste l'amministratore di Prada?

2. C'è qualche mossa da evitare per Gucci? E per Prada? Se sì cancelliamo tutta la riga/colonna. Cosa rimane?

3. A questo punto vediamo che per Gucci c'è una mossa molto conveniente (la ...), così Prada penserà "so che Gucci giocherà quella mossa, allora

io sicuramente non giocherò la . . . ”, ovvero Prada cercherà di minimizzare la sua perdita, mentre Gucci punterà a massimizzarla! Giusto?!?

4. Proviamo adesso con questo nuovo esempio a cercare:

   - Il massimo su ogni colonna e indichiamo con una freccia il minimo tra i numeri così ottenuti

   - Il minimo su ogni riga e indichiamo con una freccia il massimo tra i numeri così ottenuti

	B1	**B2**	**B3**	**min**
A1	4	2	1	1
A2	-1	3	0	-1
A3	5	-6	-2	-6
max	5	3	1	

Cosa possiamo dire della strategia ottenuta, ovvero della coppia di mosse appena trovata? Se un giocatore la sceglie, conviene all'altro discostarsene?

La dogana

Siamo nell'aprile 1546: il capitano Dubois approda sulle coste inglesi per vendere il suo carico che vale 100 Sterline e sa che una volta arrivato alla dogana dovrà pagare il 10% di tasse sul valore del carico. Tuttavia il re Enrico VIII, interessato alla merce preziosa del capitano ma ignaro del suo vero valore, gli propone una sfida che potrebbe risultare conveniente per entrambi: il capitano dichiarerà il valore del suo carico e il re potrà comprare tutto il carico (senza chiedergli le tasse!), oppure potrà farlo passare facendogli pagare le tasse. Vogliamo rappresentare la situazione in funzione della vincita del re:

	CAPITANO DICHIARA				
	80	90	100	110	120
RE COMPRA	20	...	...	-10	...
RE NON COMPRA	8	...	...	...	...

Il capitano potrebbe dichiarare che il carico vale 80 sterline, quindi 20 in meno del suo vero valore; a questo punto il re potrebbe pensare di avere tra le mani un buon affare e decidere di comprare tutto: senza saperlo avrà "vinto" 20 sterline, ottenendo merce ben più preziosa di quanto l'ha pagata; se invece deciderà di non comprarlo, tutto quello che guadagnerà sarà il 10% di 80, ovvero 8 sterline di tasse.
Ma il capitano potrebbe dichiarare più del valore del carico, per esempio 110 sterline: allora il re lo potrebbe comprare ma in questo caso egli ne avrebbe di fatto "perse" 10, pagando troppo per un carico che vale meno; farebbe meglio invece a chiedere solo le tasse, guadagnando ...

1. Cosa dovrebbe fare il capitano? E il re?

2. Ci sono strategie da evitare? Se sì quali? Cancellarle eventualmente.

3. Possiamo trovare una strategia che sia il più conveniente possibile per entrambi i giocatori?

Appendice C

Come dividiamo?

Tre amici, Gennaro, Antonio e Carmelo, vorrebbero aprire un'attività ma sarebbe una bella svolta! Meglio fare una botta di conti ...
Gennaro è un cuoco, Antonio e Carmelo due camerieri. Da soli è impossibile riuscire a fare andare avanti qualcosa, ma forse mettendosi in società si riuscirebbe a fare di meglio! Antonio e Carmelo insieme potrebbero aprire un bar: uno al bancone e uno a servire, tra locale e alcolici il guadagno si aggirerebbe sui 1000€al mese. Gennaro e Antonio potrebbero invece aprire una piccola trattoria, con Gennaro in cucina e Antonio a servire: vini, cibi prelibati ma anche tavoli e clienti li porterebbero a guadagnare sui 2000€al mese, e così anche per la società di Gennaro e Carmelo. Ma è laccordo tra tutti e tre che porterebbe il massimo guadagno: Gennaro in cucina, Antonio e Carmelo a servire, un bel ristorantino frutterebbe 3000€al mese!
Ma ora il problema è: come dividersi quei 3000€?
Si pensa subito a 1000 a testa; Gennaro però a quel punto potrebbe giustamente dire: "voi due da soli guadagnereste solo 1000€, senza di me non arrivereste mai a 3000!".
Indichiamo per esempio con $v(A, C)$ il guadagno della società Antonio& Carmelo; otteniamo:
$v(A) = v(C) = v(G) = 0$ perché da soli non possono aprire nulla;
$v(A, C) = 1000$

$v(G, A) = v(G, C) = 2000$
$v(A, C, G) = 3000$
Sembra proprio che nelle società formate da due persone Gennaro abbia un certo ascendente! Dobbiamo fare in modo di considerare il contributo di Gennaro anche nella società finale. Facciamo una tabella e calcoliamo i contributi di ogni giocatore a tutte le possibili società che si possono formare:

Società formate da	Antonio	Gennaro	Carmelo	Totale
1 giocatore	0	0	0	
2 giocatori	3000			
3 giocatori	1000			
Contributi totali	4000			
				$v(A, C, G) =$

- da soli non ottengono nulla, dunque sulla prima riga, corrispondente alle società formate da 1 giocatore, mettiamo degli 0;

- sulla seconda riga compaiono i contributi alle società di due persone: allora per esempio Antonio compare nelle società (A, C) e (A, G). Ci chiediamo: qual è il contributo di Antonio a queste società? $v(A, C) = 1000$ ma senza Antonio rimarrebbe solo Carmelo, che da solo guadagna 0. Dunque $v(A, C) - v(C) = 1000 - 0 = 1000$ rappresenta quello che Antonio di fatto dà alla società.
  E allora cosa dà Antonio alla società (A, G)? $v(A, G) - v(G) = 2000$.
  Dunque il contributo totale di Antonio alle società formate da due persone è la somma dei contributi: $1000 + 2000 = 3000$.
  Facciamo lo stesso ragionamento con Gennaro e poi con Carmelo.

- nella terza riga compaiono i contributi alle società di 3 giocatori: $v(A, C, G) - v(C, G) = 3000 - 2000 = 1000$ sarà il contributo di Antonio. E così via con gli altri.

- nella quarta riga ("Contributi totali") facciamo le somme dei contributi di ogni giocatore, ovvero le somme dei numeri sulla stessa colonna:

per esempio nella colonna di Antonio sommeremo i suoi contributi alle società di 1, 2 e 3 giocatori, eccetera.

- Sommiamo i tre numeri ottenuti nella quarta riga e mettiamo il risultato alla fine della stessa riga sotto la colonna "Totale"

- nella casella sottostante scriviamo la somma corrispondente al guadagno che deriva dalla società di tutti e tre insieme, come indicato.

Ora abbiamo finito! I contributi totali rappresentano quello che i giocatori dovrebbero ricevere con la spartizione del guadagno; vediamo però che la loro somma dà ben più di 3000, che è quello che devono spartirsi: come fare?
Si trova il coefficiente K che ci permette di proporzionare i contributi alla somma guadagnata: si ottiene con la frazione

$$K = \frac{v(A, C, G)}{sommedeicontributitotali(4, 4)}$$

Moltiplicando per K per ognuno dei contributi totali otterremo i guadagni dei giocatori: scriviamoli nella quinta riga. Quanto guadagnerà ognuno alla fine del mese?
Verificare che la somma dei guadagni è 3000€, eventualmente facendo il calcolo lasciando le frazioni.

Quello che abbiamo ottenuto si chiama *Valore di un gioco secondo Banzhaf*, dal nome di chi l'ha inventato.

Il voto

Nella scuola statale Garibaldi è il giorno delle votazioni: viaggi d'istruzione, progetti, attività extracurricolari... sono tante le cose di cui parlare! Le decisioni saranno prese a votazione dalle tre maggiori componenti della scuola: studenti, genitori e professori. Qui si può solo vincere (1) o perdere (0): ad esempio supponiamo di dover votare per decidere se far fare o no la gita agli

studenti di 4A, che quest'anno sono parecchio irrequieti. Presumibilmente i professori potrebbero essere contrari alla gita di 4A e voteranno di conseguenza: se alla fine si deciderà di non fare la gita, allora potremmo dire che i professori avranno "vinto". La decisione verrà presa a maggioranza: con 10 voti fissiamo la maggioranza a 6 e consideriamo ogni possibile votazione. Il consiglio è composto da 4 studenti, 2 genitori e 4 professori: quale sarà il peso di ognuna delle tre componenti nella decisione?
Ragioniamo un po':

- nessuna delle tre componenti da sola può ottenere la maggioranza;

- ogni possibile coalizione, ovvero accordo, tra due fazioni porta a ottenere la maggioranza, ma non c'è nessuna che dà un maggiore contributo rispetto agli altri: infatti, nonostante i genitori abbiano solo 2 voti a disposizione, hanno lo stesso potere decisionale degli altri, e cioè senza i voti dei genitori nessuno potrà raggiungere la maggioranza. Provatelo!

Esprimiamo questa cosa dicendo che il potere è distribuito in questo modo $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Proviamo ad usare il calcolo dell'esercizio precedente: lo chiameremo *Indice di Potere di Banzhaf*. Ricordiamo che la vincita è uguale a 1, la perdita è 0. Dunque $v(S) = 0$ e $v(S, P) - v(P) = v(S, G) - v(G) = 1 - 0 = 1$ è il contributo di S alle coalizioni di 2 componenti ...
Cosa otteniamo?

1. Cosa succede se la maggioranza è spostata a 7 voti?

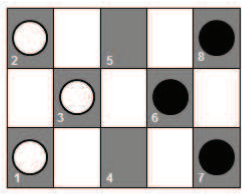
2. E se abbiamo 5 professori, 3 genitori e 2 studenti e la maggioranza è raggiunta con 6 voti? Qual è il potere di ognuno?

Provate a ragionare e poi a verificare con il calcolo dell'indice di Banzhaf.

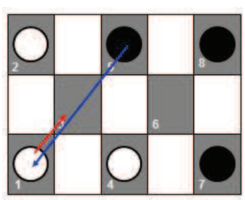
Appendice D

Una dama semplificata

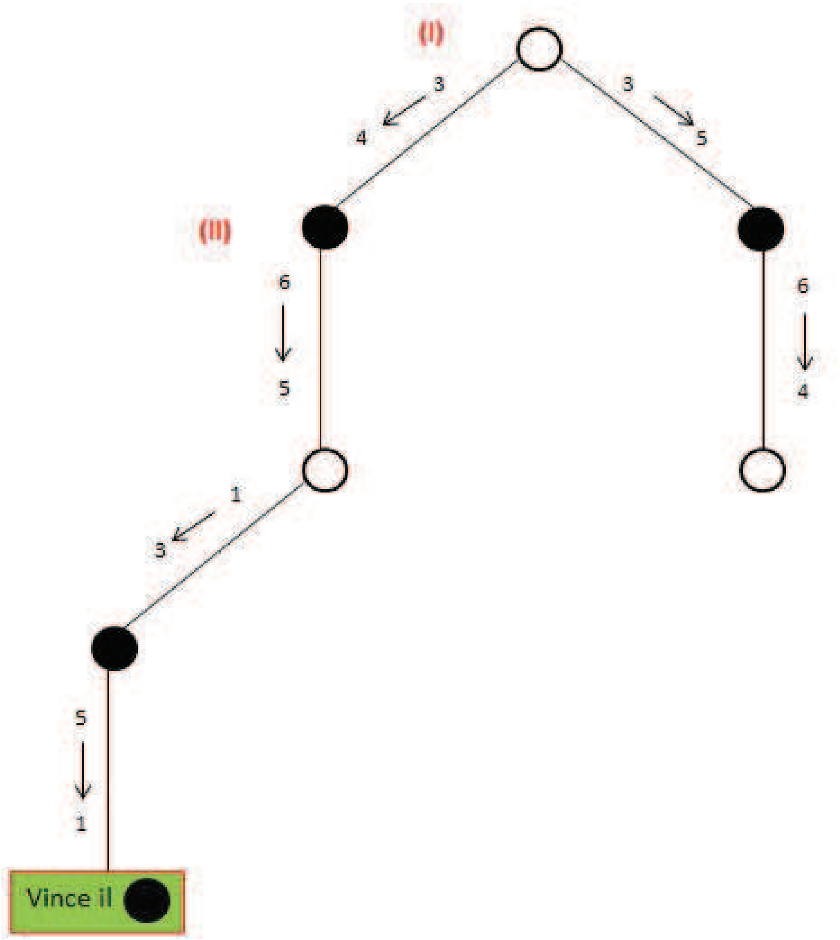
Consideriamo la dama in figura: Inizia il bianco: che mosse può fare?



L'unica pedina che può spostare è quella nella casella 3, che può andare o nella casella 4 o nella 5 ((I) nell'albero in figura nella pagina seguente). A questo punto il nero può muovere la pedina della casella 6 e spostarla o nella 5 o nella 4... Ovviamente non nella stessa casella della bianca! ((II) nell'albero)
E poi?



Un modo per schematizzare questo gioco è l'albero:



Sapreste continuare a disegnare l'albero?

Sapreste dire se conviene giocare con il nero o con il bianco?

Distribuzione di seggi

Vi ricordate l'indice di Banzhaf? E' un numero che esprime il potere decisionale di un giocatore in una situazione in cui sono ammesse coalizioni, ovvero accordi tra le parti (se non vi ricordate riprendete in mano gli esercizi vecchi).

Nel quartiere Torre del Lago della città di Casaldeimatti ci sono tre partiti: Movimento5Cerchi, ForzAzzurri e DemocraziaSimpatica. Gli abitanti del quartiere sono 100. In tabella sono rappresentati 4 possibili esiti delle votazioni per la formazione del Consiglio di Quartiere: per ognuno sono indicati i voti ricevuti da ogni partito e il calcolo del relativo indice di potere (Banzhaf). Sapendo che i seggi del Consiglio sono in tutto 15, come li distribuireste in ciascuno dei casi?

	PARTITI	**VOTI**	**POTERE**	**SEGGI**
	DS	40	$\frac{1}{3}$	
1)	M5C	30	$\frac{1}{3}$	
	FA	30	$\frac{1}{3}$	
	DS	49	$\frac{1}{3}$	
2)	M5C	49	$\frac{1}{3}$	
	FA	2	$\frac{1}{3}$	
	DS	51	1	
3)	M5C	48	0	
	FA	1	0	
	DS	50	$\frac{3}{5}$	
4)	M5C	30	$\frac{1}{5}$	
	FA	20	$\frac{1}{5}$	

Il Parlamento Europeo

Siamo al Parlamento Europeo. In tabella possiamo vedere la sua composizione nel 1989, anno di entrata di Spagna e Portogallo: nella prima colonna di dati si trova la percentuale che rappresenta la popolazione di ogni paese rispetto al totale; nella seconda colonna il potere di ogni nazione è calcolato in base al numero di abitanti; nella terza colonna troviamo i seggi assegnati ad ogni stato, su un totale di 518, e a fianco il potere decisionale (in percentuale) che quel numero di seggi rappresenta.

Che considerazioni vi sentite di fare?

Nazione	Popolazione		Seggi	
	%	Potere	Numero	Potere
Germania	18.9	19.3	81	16.6
Italia	17.7	18.7	81	16.6
Gran Bretagna	17.6	18.5	81	16.6
Francia	17.2	17.9	81	16.6
Spagna	12.0	16.5	60	13.4
Olanda	4.5	2.1	25	3.7
Portogallo	3.2	2.0	24	3.7
Grecia	3.1	1.9	24	3.7
Belgio	3.0	1.7	24	3.7
Danimarca	1.6	0.8	16	2.7
Irlanda	1.1	0.5	15	2.5
Lussemburgo	0.1	0.1	6	0.4
Totali	100.0	100.0	518	100.0

Bibliografia

[1] Cobb, P. (1985). Two childrens' anticipations, beliefs and motivations. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 111-126.

[2] Covington, M. V. (1983). Motivated cognitions. In S. G. Paris, G. M. Olson & H. W. Stevenson (Eds.) *Learning and Motivation in the Classroom*, Lawrence Erlbaum Associates, (b), 139-164.

[3] D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I. & Marazzani, I. (2004). "Esercizi anticipati"e "zona di sviluppo prossimale": comportamento strategico e linguaggio comunicativo in attività di problem solving. *La matematica e la sua didattica*, 2, 71-95.

[4] Dubey, P. & Shapley, L. S. (1979). Mathematical properties of the Banzhaf power index. *Mathematics of Operation Research*, 4, 99131.

[5] Di Martino, P. & Sabena, C. (2011). Elementary pre-service teachers' emotions: shadows from the past to the future. In K. Kislenko (ed.), *Current State of Research on Mathematical Beliefs XVI, Proceedings of the MAVI-XVI European Workshop, Tallin, 26-29 June 2010*, 89-105.

[6] Di Martino, P. & Zan, R. (2010). 'Me and math': towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 13, 27-48.

[7] Gambarelli, G. (2003). "Giochi competitivi e cooperativi ", Giappichelli Ed.

[8] Gura, E. Y. & Maschler, M. B. (2008) “Insights into Game Theory: an alternative mathematical experience” Cambridge University Press.

[9] Gura, E. Y. (2009). Insights into Game Theory: an alternative mathematical experience. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, n.19, 172-183.

[10] Hannula, M. S. (2004). Regulating motivation in mathematics. *ICME 10*.

[11] Kloosterman, P. & Stage, F. (1992). Measuring beliefs about mathematical problem solving. *School Science and Mathematics*, 92(3), 109-115.

[12] Lucchetti, R. (2008). “Di duelli, scacchi e dilemmi. La teoria matematica dei giochi”, Bruno Mondadori Ed.

[13] Middleton, J. A. & Spanias, P. A. (1999). Motivation for achievement in mathematics: findings, generalizations, and criticism of the research. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol.30, n.1, 65-88.

[14] Nicholls, J. G., Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Patashnick, M. (1990). Assessing students’ theories of success in mathematics: individual and classrooms differences. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol.21, n.2, 109-122.

[15] Pellerey, M. & Orio, F. (1995). La diagnosi delle strategie cognitive, affettive e motivazionali coinvolte nell’apprendimento scolastico. Costruzione, validazione e standardizzazione di un questionario di autovalutazione. *Orientamenti Pedagogigi*, n.4, 683-726.

[16] Pellerey, M. & Orio, F. (1996). La dimensione affettiva e motivazionale nei processi di apprendimento della matematica. *ISRE*, n.2, 52-73.

[17] Ryan, R. M. & Deci, E. L. (2000). Intrinsic and extrinsic motivations: classic definitions and new directions. *Contemporary Educational Psychology*, 25, 54-67.

[18] Sansone, C. & Morgan, C. (1992). Intrinsic motivation and education: competence in context. *Motivation and Emotion*, Vol.16, n.3, 249-270.

[19] Schiefele, U. & Csikszentmihalyi, M. (1995). Motivation and ability as factors in mathematics experience and achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol.26, n.2, 163-181.

[20] Wæge, K. (2009). Motivation for learning mathematics in terms of needs and goals. *CERME 6, Working Group 1*, 84-93.