

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

STATISTICA DEGLI EVENTI RARI NEI SISTEMI DINAMICI

Tesi di Laurea in Sistemi Dinamici e Applicazioni

Relatore:
Chiar.mo Professore
Marco Lenci

Presentata da:
Marta Fagioli

III Sessione
Anno Accademico 2012-2013

Ai miei genitori, Silvia e Marcello.

Indice

Introduzione	iii
1 Preliminari: probabilità e sistemi dinamici	1
1.1 Richiami di probabilità	1
1.2 Teoria degli operatori in spazi di Banach	7
1.2.1 Spettro e risolvente	7
1.2.2 Proiezioni	8
1.2.3 Separazione dello spettro	10
1.2.4 Autovalori isolati	10
1.3 Il teorema di Perron-Frobenius	12
1.3.1 Classificazione delle matrici	12
1.3.2 Teorema di Perron-Frobenius per matrici positive e per matrici non negative	14
1.4 Funzioni a variazione limitata in una dimensione	17
1.5 Richiami di teoria ergodica	21
1.5.1 Sistemi dinamici, ricorrenza ed ergodicità	22
1.5.2 Mixing ed esattezza	24
1.6 Misure invarianti assolutamente continue	24
1.6.1 Esistenza di misure invarianti assolutamente continue .	24

1.7	Operatore di Perron-Frobenius	26
1.7.1	Proprietà dell'operatore $P_\tau f$	27
1.7.2	Operatore di Perron-Frobenius per le mappe monotone a tratti in una dimensione	28
2	Statistica di eventi rari per processi stocastici	31
2.1	Caso di variabili aleatorie i.i.d.	32
2.2	Caso di una catena di Markov omogenea a numero finiti di stati	33
3	Sistemi aperti e misure condizionalmente invarianti	39
3.1	Cornice concettuale generale	39
3.2	Misura condizionalmente invariante e tasso di fuga	40
3.3	Trasformazioni di Markov	44
3.3.1	Trasformazioni di Markov lineari a tratti e matrice di rappresentazione dell'operatore di Perron-Frobenius	46
3.3.2	Autovettori della matrice indotta da una trasformazione di Markov lineare a tratti	47
4	Approssimazione del tasso di fuga per piccoli buchi	49
4.1	Perturbazione di operatori	50
4.1.1	Applicazione alle mappe espandenti a tratti su intervalli	55
4.1.2	Osservazioni sul tasso di fuga	56
4.1.3	Tassi di decadimento	58
4.1.4	Caso in cui il buco è definito da un'osservabile	67
	Bibliografia	73
	Ringraziamenti	75

Introduzione

La teoria dei sistemi dinamici studia l'evoluzione nel tempo di sistemi fisici e di altra natura. Ammesso che tale evoluzione abbia natura deterministica intrinseca, il problema vero risiede nella difficoltà di assegnare con esattezza la condizione iniziale. Data infatti una condizione iniziale, a livello teorico dovremmo poter conoscere l'evoluzione del sistema. In molti sistemi, tuttavia, si osserva che se prendiamo due punti tra loro molto vicini, le loro traiettorie si separano molto velocemente (un errore viene cioè ingigantito in tempo breve). Questo *non-controllo* della dinamica del sistema, nonostante siano note le leggi del moto, dimostra un'evidente dipendenza intrinseca dalle condizioni iniziali. Questo è quello che si intende generalmente con il termine *caos deterministico*. È ormai noto infatti che i sistemi deterministici possono esibire comportamenti a lungo termine molto strani e complessi. Questo ci spinge a studiare il comportamento asintotico della maggior parte delle orbite. Se dunque assumiamo di conoscere non l'esatta condizione iniziale del sistema, ma solo una sua distribuzione di probabilità, la teoria ergodica ci permette, in alcuni casi, di trovare la probabilità che un certo evento accada. Un sistema dinamico (per semplicità discreto) è dato dalla terna (M, τ, μ) , dove M è lo spazio delle fasi, $\tau : M \rightarrow M$ una mappa definita su tale spazio e μ la misura di probabilità con cui viene scelta la condizione iniziale. Assumiamo anche che τ preservi μ (equivalentemente che μ sia τ -invariante), cioè $\mu(A) = \mu(\tau^{-1}(A))$ per ogni insieme misurabile $A \subseteq M$. Il ruolo delle misure invarianti risulta quindi fondamentale,

poiché esse descrivono il comportamento asintotico del sistema e forniscono una buona descrizione della sua dinamica caotica, cosa molto richiesta nelle applicazioni pratiche. Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ un'osservabile generica: la *dinamica* del sistema si realizza iterando la mappa τ ed applicando l'osservabile f ai valori che tali iterazioni assumono, per ottenere la sequenza delle osservazioni sulle orbite, cioè $f \circ \tau^n$. In quest'ottica i sistemi dinamici possono essere considerati oggetti del tutto simili ai processi stocastici. Lo scopo di questa tesi è lo studio degli eventi rari, che ha molti punti di contatto con la cosiddetta *teoria delle grandi deviazioni per i sistemi dinamici*, cf. [14]: si cerca quindi di avere informazioni asintotiche sulla distribuzione del primo tempo in cui essi avvengono, nell'ipotesi di ergodicità del sistema. In termini formali possiamo quindi considerare un generico sistema dinamico (M, τ, μ) , un evento raro E (cioè tale che $\mu(E) \ll 1$), un generico punto $x_0 \in M$ distribuito con legge μ e la sua orbita $\theta_\tau^+(x_0) = \{\tau^n(x_0), n \in \mathbb{N}\}$, dove $\tau^n(x_0)$ indica l'iterato n -esimo della mappa τ , ovvero lo stato del sistema al tempo n . Se assumiamo che prima o poi l'orbita entrerà in E , perlomeno per q.o. x (ipotesi di ergodicità), ci proponiamo di trovare, fissato $n \in \mathbb{N}$, la misura dell'insieme:

$\mu\{x \in M; \tau^n(x) \in E, \tau^k(x) \notin E, k = 0, \dots, n-1\}$, ovvero di calcolare la probabilità che il primo istante in cui E si verifica, sia proprio n . Tuttavia, invece di considerare l'evoluzione delle orbite nello spazio delle fasi, studiamo quella delle densità di probabilità iniziali (con cui si suppone siano distribuite le condizioni iniziali nello spazio delle fasi) sotto l'azione dell'*operatore di Perron-Frobenius*. In particolare, senza perdere di generalità, consideriamo il caso di mappe di Markov espandenti sull'intervallo $[0, 1]$, dato che sono gli esempi più semplici- ma allo stesso modo paradigmatici- dei sistemi caotici e sono comode da usare nell'ottica di studiare l'evoluzione delle funzioni densità sotto l'azione dell'operatore di Perron-Frobenius. Per tali trasformazioni siamo interessati a considerare quelle misure invarianti che sono supportate

su insiemi con misura di Lebesgue positiva (dato che questi corrispondono alle osservabili e ai fenomeni fisicamente rilevanti), quindi, senza perdere molto di generalità, consideriamo il caso di mappe che preservano la misura di Lebesgue.

In molti campi sta crescendo l'interesse verso quei problemi in cui la dinamica del sistema viene modificata o bloccata dopo che accade un certo evento, che noi definiamo *evento raro*; si cerca quindi di calcolare la probabilità di un tale evento al fine di acquisire informazioni globali sul sistema. Molte di queste situazioni sono modellate dai sistemi dinamici *aperti*, cioè sistemi che presentano piccole vie di fuga o stati meta-stabili e che possono essere visti come una perturbazione dei sistemi dinamici chiusi: un'evoluzione chiusa e a tempo discreto sullo spazio delle fasi può essere infatti *aperta* definendo una regione da cui le particelle possono fuoriuscire. Tali situazioni vengono modellate dalla presenza di un *buco* (o più buchi) nel sistema. Fermo restando che il nostro scopo è quello di studiare il comportamento asintotico di certi sistemi relativamente all'accadere o meno di un evento, ci serviamo degli strumenti matematici utilizzati per lo studio dei sistemi dinamici aperti, nell'assunzione che cadere nel buco corrisponda al verificarsi di un tale evento. Se la dinamica del sistema è sufficientemente caotica, la misura dei punti che dopo n iterazioni non sono ancora caduti, decade esponenzialmente e il tasso di decrescita esponenziale, chiamato *tasso di fuga*, è strettamente connesso alle proprietà spettrali dell'operatore di Perron-Frobenius. Il primo capitolo di questa tesi richiama le nozioni base della teoria della probabilità e della misura, della teoria ergodica, dei sistemi dinamici e degli operatori negli spazi di Banach (con particolare accento sull'operatore di Perron-Frobenius e le sue proprietà), fino ad arrivare all'introduzione del concetto di misura invariante e alle condizioni necessarie per la loro esistenza. Il secondo capitolo è invece incentrato sul calcolo della statistica di eventi rari definiti da una successione di variabili aleatorie, prima nel caso i.i.d., poi nel caso di

una catena di Markov con un numero finito di stati. In entrambi, una volta definito l'evento raro, si dimostra che la probabilità che il primo tempo in cui tale evento accade sia esattamente n decade esponenzialmente. In particolare nel secondo caso, sfruttando le proprietà delle catene di Markov e l'ipotesi di ergodicità del sistema, viene dimostrato che la coda della distribuzione decade esponenzialmente per n che tende all'infinito, risultato che ci permette di trovare una stima asintotica del comportamento del sistema, studiando le proprietà spettrali della matrice di transizione associata alla catena. Nel terzo capitolo si introducono i sistemi dinamici aperti, importanti nelle applicazioni, che vengono qui visti come perturbazioni di sistemi chiusi. In quest'ottica vengono definite le misure condizionalmente invarianti, come ampiamente spiegato in [7]. Il quarto capitolo presenta infine un risultato di analisi funzionale, dovuto a Keller e Liverani [6], che abbiamo applicato al caso specifico delle mappe di Markov espandenti con buco su $[0,1]$ e dal quale si ricava una formula esplicita del tasso di fuga al primo ordine nella taglia del buco. Coerentemente con il nostro scopo, tale risultato è stato usato per il caso di sistemi in cui l'evento raro (nel concreto rappresentato dal buco) è definito dai punti in cui certe osservabili assumono valore maggiore o uguale ad un dato numero reale a . In questo modo abbiamo ricavato il nostro risultato finale, cioè l'andamento asintotico in n della probabilità che l'evento raro non si sia verificato al tempo n (equivalentemente, la traiettoria è sopravvissuta- cioè non è uscita dal buco- fino al tempo n), al primo ordine per $a \rightarrow +\infty$.

Capitolo 1

Preliminari: probabilità e sistemi dinamici

1.1 Richiami di probabilità

Sia X un insieme.

Definizione 1.1. Una famiglia Ω di sottoinsiemi di X , è detta σ -algebra se e solo se:

- 1) $X \in \Omega$
- 2) per ogni $A \in \Omega$, $X \setminus A \in \Omega$
- 3) Se $A_n \in \Omega$, per $n = 1, 2, \dots$ allora $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega$

Gli elementi di Ω sono detti *insiemi misurabili*.

Definizione 1.2. Una funzione $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ è misurabile su Ω se e solo se:

- 1) $\mu(\emptyset) = 0$.

2) Per ogni successioni di insiemi disgiunti $A_n \in \Omega$, per $n = 1, 2, \dots$ si ha

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Definizione 1.3. La tripletta (X, Ω, μ) si chiama *spazio di misura*. Se $\mu(X) = 1$ allora X si chiama *spazio di probabilità*. Se X è unione numerabile di insiemi di μ -misura finita, allora μ si dice che è una misura finita.

Definizione 1.4. Sia X uno spazio topologico. Sia Δ una famiglia di insiemi aperti di X . Allora la σ -algebra $\Omega = \sigma(\Delta)$ generata da Δ è chiamata σ -algebra di Borel di X ed è data dall' intersezione di tutte le σ -algebra che contengono Δ . Gli elementi di $\sigma(\Delta)$ sono chiamati *boreliani*.

Definizione 1.5. Una misura definita su $\sigma(\Delta)$ si chiama *misura di Borel*.

Definizione 1.6. Sia $(X, \sigma(\Delta), \mu)$ uno spazio di misura.

La funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è misurabile se per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha che

$f^{-1}(c, \infty) \in \sigma(\Delta)$ o equivalentemente se $f^{-1}(A) \in \sigma(\Delta)$, per ogni boreliano $A \in \mathbb{R}$.

Se X è uno spazio topologico e Ω la σ -algebra di sottoinsiemi boreliani di X , allora ogni funzione continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è misurabile.

Definizione 1.7. Sia (X, Ω, \mathbb{P}) uno spazio di probabilità. Una funzione $Y : X \rightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni $x \in X$ un numero reale $Y(x) \in \mathbb{R}$ è chiamata *variabile aleatoria su X* .

Definizione 1.8. Sia (X, Ω, \mathbb{P}) uno spazio di probabilità, ed F uno spazio dotato della σ -algebra \mathcal{Y} . Una funzione $Y : X \rightarrow F$ si dice *variabile aleatoria a valori in F* se per ogni $A \in \mathcal{Y}$ si ha che $Y^{-1}(A) = \{x \in X; Y(x) \in A\}$.

Definizione 1.9. Sia $\{X_n\}_n$ una successione di variabili aleatorie definite su uno spazio di probabilità. Tale successione è una *catena di Markov (CM)* se $\mathbb{P}(X_0, X_1, \dots, X_n) = \mathbb{P}(X_0)\mathbb{P}(X_1|X_0) \dots \mathbb{P}(X_n|X_{n-1})$. Scriveremo $X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_n$.

Definizione 1.10. Sia $\{X_n\}_n$ una catena di Markov. Allora $\{X_n\}_n$ è una *catena di Markov omogenea (CMO)* se $\forall k \geq 1$ si ha:

$$\mathbb{P}(X_k = x_1 | X_{k-1} = x_0) = \mathbb{P}(X_1 = x_1 | X_0 = x_0)$$

Proposizione 1.1.1. $\{X_n\}_n$ è una *catena di Markov omogenea*, allora $\{X_n\}_n$ è *stazionaria* cioè $\forall k \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_k = x_0, \dots, X_{n+k} = x_n)$$

Per la dimostrazione si veda [4].

Richiamiamo ora le definizioni e i teoremi di base relativi agli *spazi di funzioni e di misure*.

Definizione 1.11. Sia X uno spazio lineare. Una funzione $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ è chiamata norma se, per ogni $f, g \in X$, e $\alpha \in \mathbb{R}$, gode delle seguenti proprietà:

- 1) $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$
- 2) $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$
- 3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

In particolare lo spazio $(X, \|\cdot\|)$ è detto *spazio normato lineare*.

Definizione 1.12. Una successione $\{f_n\}_n \in X$ si dice che *converge a f in X* e si scrive $f_n \rightarrow f$, se esiste $f \in X$ tale che $\|f_n - f\| \rightarrow 0$, per $n \rightarrow \infty$.

Definizione 1.13. Uno spazio lineare normato $(X, \|\cdot\|)$ è completo se ogni successione di Cauchy $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in X converge, cioè se esiste una funzione $f \in X$ tale che $f_n \rightarrow f$, per $n \rightarrow \infty$.

In particolare uno spazio normato e completo si chiama *spazio di Banach*.

Sia (X, Ω, μ) uno spazio di misura dotato di norma.

Definizione 1.14. Sia $1 \leq p < \infty$. La famiglia di funzioni misurabili a valori reali $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, uguali quasi dappertutto (cioè uguali a meno di insiemi di μ -misura nulla), tali che soddisfano: $\int_X |f(x)|^p d\mu < \infty$, è chiamato *spazio L^p* , e denotato con $(L^p(X, \Omega, \mu))$.

In particolare l'integrale $\|f\|_p = (\int_X |f(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ si chiama *norma L^p di f* .

Lo spazio $(L^p, \|\cdot\|_p)$ è uno spazio di Banach.

Definizione 1.15. $C^0(X) = C(X)$ è lo spazio di tutte le funzioni continue reali, con la norma $\|f\|_{C^0} = \sup_{x \in X} |f(x)|$

Definizione 1.16. $M(X)$ denota lo spazio delle misure μ su $\Omega(X)$, cioè la σ -algebra di X . La norma, chiamata *norma a variazione totale su $M(X)$* , è definita da:

$\|\mu\| = \sup_{\{A_i\}_{i=1}^N} \{|\mu(A_1)| + \dots + |\mu(A_N)|\}$, dove $\{A_i\}_{i=1}^n$ è una partizione di X .

I seguenti risultati sono esposti e dimostrati in [1].

Teorema 1.1.2. *Sia X uno spazio metrico compatto. Allora lo spazio autoaggiunto di $C(X)$ è $C^*(X) = M(X)$.*

Osservazione 1. Due misure μ_1 e μ_2 si dicono identiche se e solo se $\int_X g d\mu_1 = \int_X g d\mu_2$ per ogni $g \in C(X)$.

Definizione 1.17. Siano μ e ν due misure sullo stesso spazio di misura (X, Ω) . Allora si dice che ν è assolutamente continua rispetto a μ se per ogni $A \in \Omega$ tale che $\mu(A) = 0$ allora $\nu(A) = 0$. Scriveremo $\nu \ll \mu$.

Teorema 1.1.3. *Siano ν e μ due misure sullo stesso spazio di misura (X, Ω) . $\nu \ll \mu$ se e solo se dato un $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che se $\mu(A) < \delta$ allora $\nu(A) < \varepsilon$, per ogni $A \in \Omega$.*

Teorema 1.1.4. *(Radon-Nikodym)*

Sia (X, Ω) uno spazio di misura e siano μ e ν due misure su tale spazio. Se $\nu \ll \mu$ allora esiste un'unica $f \in L^1(X, \Omega, \mu)$ tale che per ogni $A \in \Omega$ si ha:

$$\nu(A) = \int_A f d\mu.$$

$f = \frac{d\nu}{d\mu}$ è chiamata derivata di Radon-Nikodym.

Definizione 1.18. Siano μ e ν due misure non nulle sullo stesso spazio di misura (X, Ω) . Dico che μ e ν sono *mutuamente singolari*, scriveremo $\mu \perp \nu$, se e solo se esistono degli insiemi disgiunti $A_\mu, A_\nu \in \Omega$ tali che $X = A_\mu \cup A_\nu$ e $\mu(A_\nu) = \nu(A_\mu) = 0$.

Osservazione 2. Si ha che $\nu \ll \mu$ allora $\text{supp}(\mu) = \text{supp}(\nu)$.

Sia $M(X)$ lo spazio delle misure su (X, Ω) . Sia $\tau : X \rightarrow X$ una trasformazione misurabile, ovvero $\tau^{-1}(A) \in \Omega$ per ogni $A \in \Omega$, dove $\tau^{-1}(A) = \{x \in X; \tau(x) \in A\}$. Allora τ definita su X , induce una trasformazione $\tau_*\mu$ su $M(X)$, definita in questo modo:

$$(\tau_*\mu)(A) = \mu(\tau^{-1}(A)) \quad (1.1)$$

Dato che τ è misurabile, allora lo è anche $\tau_*\mu$.

In particolare $\tau_*\mu$ è una misura ([1]).

Definizione 1.19. Sia (X, Ω, μ) uno spazio di misura dotato di norma. Allora $\tau : X \rightarrow X$ è *non singolare* se e solo se $\tau_*\mu \ll \mu$, ovvero se per ogni $A \in \Omega$ tale che $\mu(A) = 0$, si ha $\mu(\tau^{-1}(A)) = 0$.

Proposizione 1.1.5. Sia (X, Ω, μ) uno spazio di misura dotato di norma e sia $\tau : X \rightarrow X$ non singolare. Allora $(\nu \ll \mu) \Rightarrow (\tau_*\nu \ll \tau_*\mu \ll \mu)$.

Definizione 1.20. Sia (X, Ω, μ) uno spazio di misura dotato di norma. Lo spazio $D = D(X, \Omega, \mu) = \{f \in L^1(X, \Omega, \mu) : f \geq 0, \|f\|_1 = 1\}$ denota lo spazio delle funzioni di densità di probabilità.

Osservazione 3. Se $f \in D$ allora $\mu_f(A) = \int_A f d\mu \ll \mu$ è una misura e $f = \frac{d\mu_f}{d\mu}$ è chiamata *densità di μ_f* .

Osservazione 4. Sia $\nu \ll \mu$. Dalla proposizione 1.1.5 si ha che $\tau_*\nu \ll \mu$. Allora la densità di ν è trasformata in quella di $\tau_*\nu$. Questa trasformazione è riconducibile all'operatore $P_\tau : D \rightarrow D$, chiamato *operatore di Perron-Frobenius* (che sarà definito a breve), strettamente collegato all'operatore $\tau_* : M(X) \rightarrow M(X)$ e più facile da usare dato che agisce su L^1 .

Teorema 1.1.6. (*Teorema di Rota*)

Se P è un operatore positivo su $L^1(X, \Omega, \mu)$, allora l'insieme:

$\{\frac{\lambda}{|\lambda|} : \lambda \text{ autovalore di } P, |\lambda| = \|P\|\}$ è un sottogruppo moltiplicativo del cerchio unitario.

1.2 Teoria degli operatori in spazi di Banach

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach. È possibile che un operatore lineare $T : X \rightarrow X$ non sia definito per tutti i vettori di X , quindi lo consideriamo come una funzione che manda ogni vettore u di una certa varietà lineare $D \subset X$, in un vettore $v = Tu \in X$. $D = D(T)$ si chiama *dominio di T* .

Definizione 1.21. Un operatore lineare $T : X \rightarrow X$ si dice *limitato* se per ogni $u \in D(T)$, $\exists M > 0$ tale che: $\|T(u)\| \leq M\|u\|$.

Proposizione 1.2.1. Un operatore $T \in B(X)$ è continuo se e solo se è *limitato*.

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda [12]. □

Sia $B(X)$ lo spazio di tutti gli operatori lineari e limitati da X a X . Per ogni $S, T \in B(X)$ vale che $ST \in B(X)$ e $\alpha S + \beta T \in B(X)$, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Lo spazio $B(X)$ è di Banach, in particolare si dice che è un' *algebra di Banach* (per dettagli si veda [12]).

1.2.1 Spettro e risolvente

Definizione 1.22. Un *autovalore* di un operatore $T \in B(X)$ è definito come un numero complesso λ , tale che esiste un vettore non nullo $u \in D(T)$, detto *autovettore*, per cui $Tu = \lambda u$. In altre parole λ è un autovalore di T se $\det(T - \lambda\mathbb{I}) = 0$, cioè se lo *spazio nullo* $N(T - \lambda\mathbb{I})$ è non nullo. Questo spazio è detto *autospazio relativo a λ* e la sua dimensione è la *molteplicità geometrica di λ* . L'insieme degli autovalori dell' operatore T si chiama *spettro di T* e si indica con $\Sigma(T)$.

Definizione 1.23. Un operatore $T \in B(X)$ si dice *chiuso* se e solo se $D(T)$ è chiuso.

Se T è un operatore chiuso in X allora per ogni $z \in \mathbb{C}$, $(T - z)$ è chiuso.

Definizione 1.24. Un operatore $T \in B(X)$ è *compatto* se l'immagine $\{Tu_n\}$ di una successione limitata $\{u_n\}$ in X , contiene una sottosuccessione di Cauchy.

Definizione 1.25. Un operatore T è *quasi compatto* se è continuo e una sua qualche potenza è compatta.

Definizione 1.26. Se $(T-z) : D(T) \rightarrow X$ è biiettivo allora $R(z) = R(z, T) = (T-z)^{-1}$ si chiama *risolvente di T* e l'insieme $IR(T) = \{z \in \mathbb{C}; (T-z) \text{ è biiettivo}\}$ si chiama *insieme risolvente di T* .

Se $T \in B(X) \Rightarrow \Sigma(T) \neq \emptyset$ e $IR(T) \neq \emptyset$. Più precisamente $IR(T)$ contiene l'esterno del cerchio $|z| = \rho$, dove ρ è il *raggio spettrale* di T , definito nel seguente modo: $\rho = \sup_{\lambda \in \Sigma(T)} |\lambda| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. Invece esiste almeno un punto di questo cerchio in $\Sigma(T)$.

Osservazione 5. Il risolvente di T è la somma della serie di Neumann, cioè $R(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}T^n$, che ha dominio di convergenza $|z| > \rho$, quindi esiste almeno un punto di $\Sigma(T)$ sul cerchio $|z| = \rho$, purchè $\rho > 0$.

In particolare $\Sigma(T)$ è un sottoinsieme del disco chiuso $|z| \geq \|T\|$. Inoltre si nota che:

$$\|zR(z) - 1\| \rightarrow 0, \text{ per } z \rightarrow \infty.$$

Per i dettagli e le dimostrazioni, si veda [12].

1.2.2 Proiezioni

Un operatore $P \in B(X)$ è una *proiezione* se $P = P^2$, cioè se è un operatore *idem-potente*. Anche l'operatore $(1 - P)$ è una proiezione. Si ha la seguente decomposizione dello spazio X :

$$X = M \oplus N, \tag{1.2}$$

dove $M = P(X)$ e $N = (1 - P)(X)$. M e N sono esattamente gli spazi nulli di P e di $(1 - P)$ rispettivamente quindi sono varietà lineari e chiuse di X . Viceversa la decomposizione 1.2 di uno spazio di Banach X nella somma diretta di due varietà lineari e chiuse di X definisce una proiezione P .

In [12] si dimostra che P è un operatore lineare e limitato. Per una data varietà lineare e chiusa M di X non è sempre possibile trovare un sottospazio complementare N tale che sia verificata la decomposizione 1.2.

Se P è una proiezione che commuta con l'operatore $T \in B(X)$, allora T si decompone in accordo con 1.2, e l'operatore T_M è l'operatore $TP = PT$, dove il prodotto è definito come segue: per ogni $u \in X$, $TP(u) = T(Pu)$.

Osservazione 6. Siano $P, Q \in B(X)$ due proiezioni, allora restano verificate:

$$P(1 - P) = (1 - P)P = 0 \text{ (stessa cosa per } Q\text{)}.$$

$R = (P - Q)^2$ commuta sia con P sia con Q . Allo stesso modo si ha che $(1 - P - Q)^2$ commuta sia con P sia con Q , dato che anche $(1 - P)$ e $(1 - Q)$ sono proiezioni.

$$\text{Vale la seguente identità: } (P - Q)^2 + (1 - P - Q)^2 = 1$$

Per la dimostrazione si veda [12]

1.2.3 Separazione dello spettro

A volte succede che lo spettro $\Sigma(T)$ di un operatore chiuso T contiene una parte Σ' separata dalla restante Σ'' in modo tale che una curva γ chiusa, semplice e rettificabile (o in generale un numero finito di tali curve) racchiuda un aperto tale che il suo interno contiene Σ' e il suo esterno Σ'' .

Teorema 1.2.2. *Sia T un operatore chiuso definito in X e sia $\Sigma(T)$ separato in due parti Σ' e Σ'' . Allora esiste una decomposizione $X = M \oplus N$, tale che $T_M := T|_M : M \rightarrow M$ e $T_N := T|_N : N \rightarrow N$, in modo che gli spettri di $T_M \in B(M)$ e di $T_N \in B(N)$ coincidano rispettivamente con Σ' e Σ'' .*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda [12]. □

1.2.4 Autovalori isolati

Sia T un operatore chiuso definito in X e sia λ un punto isolato di $\Sigma(T)$. Allora $\Sigma(T) = \Sigma' \oplus \Sigma'' = \{\lambda\} \oplus \Sigma''$. Sia γ la curva chiusa (definita come nella sezione precedente) che include λ e nessun altro punto di $\Sigma(T)$. Allora l'operatore T si decompone negli operatori T_M con spettro $\Sigma' = \{\lambda\}$ e T_N con spettro Σ'' , in accordo con la decomposizione 1.2 dello spazio.

1) Dato che $M = P(X)$, l'operatore T_M ha risolvente:

$$R_M(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T_M - \lambda)^n}{(z - \lambda)^{n+1}} \quad (1.3)$$

che è convergente tranne che nella singolarità $z = \lambda$. La 1.3 equivale a

$$R_M(z) = R(z)P = - \frac{P}{(z - \lambda)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^n}{(z - \lambda)^{n+1}}, \quad (1.4)$$

dove $D = (T - \lambda)P = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (z - \lambda)R(z)dz$ e $D = DP = PD$.

2) Dato che $N = (1 - P)X$, l'operatore T_N ha risolvente:

$$R_N(z) = R(z)(1 - P) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - \lambda)^n S^{n+1}, \quad (1.5)$$

dove $S = R_N(\lambda)(1 - P) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{R(z)}{z - \lambda} dz$. Inoltre $ST \subset TS$,
 $(T - \lambda)S = (1 - P)$ e $PS = SP = 0$.

Allora si ottiene un'espressione per il risolvente di T in questo modo:

$$R(z) = R(z)P - R(z)(1 - P) = -\frac{P}{(z - \lambda)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^n}{(z - \lambda)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (z - \lambda)^n S^{n+1}. \quad (1.6)$$

L'espressione 1.6 è la serie di Laurant di $R(z)$ per la singolarità $z = \lambda$. Questa ha parte principale $\frac{P}{(z - \lambda)}$ finita se la dimensione di M è finita. In questo caso λ è un autovalore di T perché se $\lambda \in \Sigma'$ allora è un autovalore di T_M quindi di T . In questo caso la dimensione di M è la *molteplicità geometrica* di λ .

Possiamo estendere questo risultato al caso in cui lo spettro di T abbiamo $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ punti isolati. In questo caso $\Sigma(T) = \Sigma' \oplus \Sigma'' = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} \oplus \Sigma''$. L'operatore T si decompone negli operatori T_{M_h} con spettro $\{\lambda_h\}$, per ogni $h = 1, \dots, s$ e in T_N con spettro Σ'' , in accordo con la decomposizione 1.2 dello spazio dove, in questo caso, $M = (P_1 + \dots + P_s)(X)$ e $N = (1 - (P_1 + \dots + P_s))(X)$.

1) Per ogni $h = 1, \dots, s$ l'operatore T_{M_h} ha risolvente

$$R_{M_h}(z) = R(z)P_h = -\frac{P_h}{(z - \lambda_h)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_h^n}{(z - \lambda_h)^{n+1}}, \quad (1.7)$$

dove $P_h P_k = \delta_{h,k} P_h$ e $D_h = D_h P_h = D_h P_h = (T - \lambda_h)P_h$.

T ha autovalore λ_h se la dimensione di M_h è finita.

2) L'operatore T_N ha risolvente $R_N(z) = R(z)(1 - (P_1 + \dots + P_s))$.

Si ha quindi che il risolvente di T è:

$$R(z) = \sum_{h=1}^s R_{M_h}(z) + R_N(z) = -\sum_{h=1}^s \left[\frac{P_h}{(z - \lambda_h)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_h^n}{(z - \lambda_h)^{n+1}} \right] + R_N(z). \quad (1.8)$$

Allora si ha che $TP = \sum_{h=1}^s \lambda_h P_h + D_h$, con $P = (P_1 + \dots + P_s)$.

Per dettagli e dimostrazioni si veda [12].

1.3 Il teorema di Perron-Frobenius

Sia $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ una matrice quadrata ($n \times n$), reale e sia $\Sigma(A)$ lo spettro di A come definito in 1.22. Sappiamo che il tasso di crescita esponenziale della matrice potenza k -esima di A , cioè A^k , per $k \rightarrow \infty$, è controllato dall'autovalore massimo in modulo di A , altrimenti chiamato *raggio spettrale di A* ed indicato con $\rho(A)$. Diamo ora un risultato che descrive le proprietà dell'autovalore massimo e del corrispondente autovettore di una matrice quadrata reale e positiva ed estendiamo poi al caso di una matrice irriducibile e non negativa.

1.3.1 Classificazione delle matrici

Definizione 1.27. Una matrice quadrata reale A è detta *positiva* se i suoi elementi sono numeri reali, tutti positivi. A si dice *non negativa* se i suoi elementi sono numeri reali, tutti non negativi.

Definizione 1.28. Una matrice quadrata A reale si dice *irriducibile* se non esiste una matrice di permutazione P tale che A si possa scrivere a blocchi in forma triangolare superiore in questo modo:

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ 0 & G \end{pmatrix}$$

dove E e G sono matrici quadrate non banali (cioè di dimensione maggiore di zero).

In particolare se A è una matrice quadrata, reale, non negativa allora A è *irriducibile* se vale una delle seguenti condizioni:

- 1) Per ogni coppia di indici i, j , esiste un numero naturale m tale che $a_{i,j}^m \neq 0$.
- 2) Se il grafico G_A , associato ad A , (quindi con esattamente n vertici, come la dimensione di A) è fortemente connesso, cioè per ogni coppia di indici i, j , $a_{i,j} > 0$ (ovvero esiste un cammino dall'indice i all'indice j).

Definizione 1.29. Una matrice reale A si dice *ergodica* se esiste un $k \in \mathbb{Z}^+$ tale che A^k è positiva.

Definizione 1.30. Una matrice quadrata reale A si dice *riducibile* se non è irriducibile.

Osservazione 7. Sia A una matrice quadrata, non negativa. Fissiamo un indice i e definiamo *periodo di indice i* il massimo comun divisore tra tutti i numeri naturali m , tali che $a_{j,j}^m > 0$.

Se A è irriducibile allora il periodo di tutti gli indici è lo stesso e viene chiamato *indice di A* .

Definizione 1.31. Una matrice quadrata, reale (non negativa e irriducibile) A si dice *aperiodica* se il periodo di A è 1.

Definizione 1.32. Una matrice quadrata, reale A si dice *primitiva* se è non negativa e per ogni numero naturale m , A^m è positiva (cioè per lo stesso m e ogni coppia di indici i, j si ha $a_{i,j}^m > 0$).

Definizione 1.33. Una matrice $A = (a_{i,j})_{i,j}$, quadrata $n \times n$ e non negativa, si dice *stocastica*, rispettivamente *di transizione*, se la somma degli elementi su ogni riga, rispettivamente colonna, è 1, cioè:
 $a_{i,j} \geq 0$ e $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ (oppure $\sum_{i=1}^n a_{i,j} = 1$).

1.3.2 Teorema di Perron-Frobenius per matrici positive e per matrici non negative

Teorema 1.3.1. *(Teorema di Perron-Frobenius per matrici positive)*

Sia $A = (a_{i,j})_{i,j}$ una matrice quadrata ($n \times n$) e positiva ($a_{i,j} > 0, \forall i, j$).

Allora valgono le seguenti affermazioni:

- 1) Esiste un numero reale positivo λ , chiamato radice di Perron, tale che λ è un autovalore di A ed è quello massimo in modulo, cioè è il raggio spettrale di A : $\lambda = \rho(A)$.
- 2) λ è un autovalore semplice, cioè è una radice semplice del polinomio caratteristico di A , di conseguenza l'autospazio associato a λ ha dimensione 1 (lo stesso è vero per l'autospazio sinistro di A , ovvero l'autospazio di A^t).
- 3) L'autovettore $v = (v_1, \dots, v_n)$ di A , con autovalore λ , ha tutte le componenti positive (cioè $v_i > 0, \forall i = 1, \dots, n$). (Rispettivamente esiste un autovettore positivo sinistro $w = (w_1, \dots, w_n)$ tale che $(A^t w)^t = w^t A = \lambda w^t$ con $w_i > 0, \forall i$).
- 4) Non esistono altri autovettori positivi oltre ai multipli positivi di v , (rispettivamente autovettori sinistri diversi da w) cioè gli altri autovettori devono avere almeno una coppia di componenti discordi o una componente complessa.
- 5) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k}{\lambda^k} = v w^t$, dove gli autovettori sinistro e destro di A sono normalizzati in modo che $w^t v = 1$. Oltretutto la matrice $v w^t$ è la proiezione sull'autospazio corrispondente a λ . Questa proiezione è chiamata proiezione di Perron.

- 6) *Formula di Collatz-Wielandt: per ogni vettore x non negativo e non nullo, sia $f(x)$ il minimo valore di $\frac{[Ax]_j}{x_j}$, per j tale che $x_j \neq 0$, allora f è una funzione a valori reali il cui massimo è la radice di Perron.*
- 7) *Per ogni vettore x strettamente positivo, se $g(x)$ è il valore massimo di $\frac{[Ax]_j}{x_j}$, allora g è una funzione a valori reali il cui valore minimo è la radice di Perron.*
- 8) *La radice di Perron soddisfa:*

$$\min_i \sum_j a_{i,j} \leq \lambda \leq \max_i \sum_j a_{i,j}$$

Osservazione 8. Il teorema di Perron-Frobenius non può essere applicato direttamente alle matrici non-negative. In questo caso infatti l'autovalore massimo in modulo della matrice potrebbe non essere una radice semplice del polinomio caratteristico o la matrice stessa potrebbe avere più autovalori in modulo uguali al raggio spettrale: è il caso rispettivamente delle matrici quadrate non negative $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Teorema 1.3.2. *(Teorema di Perron-Frobenius per matrici irriducibili)*

Sia A una matrice $(n \times n)$, non negativa ed irriducibile, di periodo h e raggio spettrale $\rho(A) = \lambda$. Allora valgono le seguenti affermazioni:

- 1) *λ è un numero reale positivo ed è un autovalore della matrice A , chiamato autovalore di Perron-Frobenius.*
- 2) *L'autovalore di Perron-Frobenius λ è semplice, quindi entrambi gli autospazi, destro e sinistro, associati a λ , sono spazi di dimensione 1.*
- 3) *A ha un autovettore sinistro v , associato all'autovalore λ , le cui componenti sono tutte positive. Allo stesso modo A ha un autovettore destro w , associato a λ , le cui componenti sono tutte positive.*

- 4) Gli unici autovettori le cui componenti sono tutte concordi sono associati all'autovalore λ .
- 5) La matrice A ha esattamente h autovalori complessi con valore assoluto λ . Ciascuno di questi è una radice semplice del polinomio caratteristico di A ed è il prodotto di λ con la radice h -esima dell'unità.
- 6) Se $h > 1$ allora esiste una matrice di permutazione P , tale che:

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{h-1} & \dots \\ A_h & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- 7) Formula di Collatz-Wielandt: per ogni vettore non negativo e non nullo x , sia $f(x)$ il valore minimo di $\frac{[Ax]_j}{x_j}$, per j tale che $x_j \neq 0$. Allora f è una funzione a valori reali il cui massimo è l'autovalore di Perron.
- 8) La radice di Perron soddisfa la seguente disuguaglianza:
- $$\min_i \sum_j a_{i,j} \leq \lambda \leq \max_i \sum_j a_{i,j}.$$

1.4 Funzioni a variazione limitata in una dimensione

Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo limitato e sia m la misura di Lebesgue su tale intervallo. per ogni successione di punti $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, $n \geq 1$, definiamo una partizione $\Gamma = \{I_i = [x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n\}$ di $[a, b]$. I punti $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sono chiamati *estremi della partizione* Γ . Scriveremo $\Gamma = \Gamma\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$.

Definizione 1.34. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $\Gamma = \Gamma\{x_0, \dots, x_n\}$ una partizione di $[a, b]$. Se esiste un numero positivo M tale che:

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq M$$

per ogni partizione Γ , allora f si dice funzione a variazione limitata su $[a, b]$.

Osservazione 9. Se f è una funzione crescente o che soddisfa la *condizione di Lipschitz* $|f(x) - f(y)| < K|x - y|$, $\forall x, y$ con $K \geq 0$ allora è a variazione limitata.

Definizione 1.35. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a variazione limitata su $[a, b]$. Il numero $V_{[a,b]}f = \sup_{\Gamma} \{\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|\}$, per ogni partizione Γ di $[a, b]$, si chiama *variazione totale di f su $[a, b]$* .

Proposizione 1.4.1. *Sia f una funzione a variazione limitata su $[a, b]$, allora f è limitata su $[a, b]$, infatti:*

$$|f(x)| \leq |f(a)| + V_{[a,b]}f, \text{ per ogni } x \in [a, b].$$

Dimostrazione. Sia $f \in BV([a, b])$, sia $x \in [a, b]$ un punto qualunque dell'intervallo. Ovviamente $x \geq a$.

$$\text{Se } x = a \text{ allora } |f(a)| \leq |f(a)| + V_{[a,b]}f, \text{ dato che } 0 < V_{[a,b]}f < \infty.$$

Se $a < x \leq b$ allora

$$|f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq V_{[a,b]}f + |f(a)|.$$

□

Lemma 1.4.2. *Sia f una funzione a variazione limitata (quindi tale che $\|f\|_1 < \infty$ per la proposizione 1.4.1). Allora $|f(x)| \leq V_{[a,b]}f + \frac{\|f\|_1}{b-a}$, per ogni $x \in [a, b]$*

(dove $\|\cdot\|_1$ indica la norma in L^1).

Dimostrazione. Diciamo che esiste un $y \in [a, b]$ tale che $|f(y)| \leq \frac{\|f\|_1}{(b-a)}$. Se questo non fosse vero, per ogni $x \in [a, b]$ si avrebbe che: $\|f\|_1 < (b-a)|f(x)|$. Tuttavia sappiamo che $\|f\|_1 = \int_a^b \frac{\|f\|_1}{(b-a)} dm < \int_a^b |f(x)| dm = \|f\|_1$ ed avremmo una contraddizione. Allora dato che $|f(x)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y)|$, si ha: $|f(x)| \leq V_{[a,b]}f + \frac{\|f\|_1}{(b-a)}$. □

Proposizione 1.4.3. *Siano f, g funzioni a variazione limitata su $[a, b]$. Allora la loro somma, differenza e prodotto lo sono ancora. Inoltre vale:*

$$V_{[a,b]}(f \pm g) \leq V_{[a,b]}f + V_{[a,b]}g \text{ e } V_{[a,b]}(fg) \leq \|g\|_\infty V_{[a,b]}f + \|f\|_\infty V_{[a,b]}g.$$

Osservazione 10. Il quoziente tra due funzioni a variazione limitata non è detto che sia una funzione a variazione limitata. Per esempio si consideri una generica funzione $f(x)$ tale che $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$. La funzione $\frac{1}{f(x)}$ non è limitata in ogni intervallo che contiene x_0 e quindi in questi intervalli non è una funzione a variazione limitata.

Dimostrazione. Dimostriamo la prima disuguaglianza: siano $f, g, \in BV([a, b])$, allora sappiamo che:

$$V_{[a,b]}f = \sup_\Gamma \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|,$$

$$V_{[a,b]}g = \sup_\Gamma \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| \text{ e}$$

$$V_{[a,b]}(f \pm g) = \sup_\Gamma \sum_{k=1}^n |(f \pm g)(x_k) - (f \pm g)(x_{k-1})| = \sup_\Gamma \sum_{k=1}^n |f(x_k) \pm g(x_k) - (f(x_{k-1}) \mp g(x_{k-1}))|.$$

Con Γ partizione qualsiasi dell'intervallo $[a, b]$. Dato che:

$$|f(x_k) - f(x_{k-1}) + g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq$$

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| + |g(x_k) - g(x_{k-1})| \text{ allora } V_{[a,b]}(f+g) \leq V_{[a,b]}f + V_{[a,b]}g. \text{ Allo}$$

$$\text{stesso modo dato che } |f(x_k) - g(x_k) - f(x_{k-1}) + g(x_{k-1})| =$$

$$|f(x_k) - f(x_{k-1}) + g(x_{k-1}) - g(x_k)| = |f(x_k) - f(x_{k-1}) - (g(x_k) - g(x_{k-1}))| \leq$$

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| + |g(x_k) - g(x_{k-1})|, \text{ allora } V_{[a,b]}(f-g) \leq V_{[a,b]}f + V_{[a,b]}g.$$

Dimostriamo ora la seconda disuguaglianza:

$$V_{[a,b]}(fg) = \sup_{\Gamma} \sum_{k=1}^n |(fg)(x_k) - (fg)(x_{k-1})| \leq$$

$$\sup_{x \in [a,b]} |g(x)| \sup_{\Gamma} \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| +$$

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \sup_{\Gamma} \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| = \|g\|_{\infty} V_{[a,b]}f + \|f\|_{\infty} V_{[a,b]}g. \quad \square$$

Teorema 1.4.4. *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a variazione limitata sull'intervallo $[a, b]$ e supponiamo che esista un numero $\alpha > 0$, tale che $|f(x)| \geq \alpha$, per ogni $x \in [a, b]$. Allora $g = \frac{1}{f}$ è a variazione limitata su $[a, b]$ e $V_{[a,b]}g \leq \frac{1}{\alpha^2} V_{[a,b]}f$.*

Dimostrazione. Sia $f \in BV([a, b])$ tale che $|f(x)| \geq \alpha > 0$ allora

$\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{1}{\alpha}$. Sia $g = \frac{1}{f}$, quindi per come è definita g e per quanto osservato si ha che:

$$V_{[a,b]}g = \sup_{\Gamma} \sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})} \right| \leq \frac{1}{\alpha^2} \sup_{\Gamma} \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| =$$

$$\frac{1}{\alpha^2} V_{[a,b]}f. \quad \square$$

Consideriamo ora lo spazio delle funzioni a variazione limitata, ovvero

$$BV([a, b]) = \{f \in L^1 : \inf_{f_1=f \text{ q.o.}} V_{[a,b]}f_1 < +\infty\}.$$

Definiamo quindi una norma su tale spazio:

$$\|f\|_{BV} = \|f\|_1 + \inf_{f_1=f \text{ q.o.}} V_{[a,b]}f_1.$$

Quindi senza la norma in L^1 , lo spazio BV potrebbe non avere una norma ben definita perché una funzione non nulla potrebbe avere variazione nulla.

Osservazione 11. È necessario dare una tale definizione dello spazio $(BV([a, b]), \|\cdot\|_{BV})$ dato che ci proponiamo di considerare funzioni uguali a meno di insiemi di

misura μ nulla. Questo è fondamentale in quanto i fenomeni fisici e le osservabili possono essere visti come insiemi con misura di Lebesgue positiva (come più ampiamente spiegheremo nei prossimi capitoli), quindi andremo a considerare trasformazioni invarianti rispetto alla misura di Lebesgue m e a lavorare con misure assolutamente continue rispetto a m .

Proposizione 1.4.5. *Lo spazio $BV([a, b])$ è denso in $L^1([a, b])$.*

Dimostrazione. Dato che $BV([a, b]) \supset C^1([a, b])$ e lo spazio $C^1([a, b])$ è denso in $L^1([a, b])$, allora $BV([a, b])$ è denso in $L^1([a, b])$. \square

1.5 Richiami di teoria ergodica

Sia (X, Ω, μ) uno spazio di misura dotato di norma.

Definizione 1.36. Diciamo che la trasformazione misurabile $\tau : X \rightarrow X$ preserva la misura μ o che μ è τ -invariante se per ogni $A \in \Omega$ vale:

$$\mu(A) = \mu(\tau^{-1}(A)).$$

Esempio 1.1. Sia $X = [0, 1]$, Ω la σ -algebra di Borel su $[0, 1]$ e sia m la misura di Lebesgue su $[0, 1]$. Considero la trasformazione $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tale che $\tau(x) = rx \pmod{1}$, con $r \geq 2$ intero. Allora μ è τ -invariante perché se si considera $[a, b] \subset [0, 1]$, si ha che $\tau^{-1}([a, b]) = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_r$, dove \sqcup indica l'unione disgiunta. In particolare $I_i = [a + \frac{(i-1)(b-a)}{r}, a + \frac{i(b-a)}{r})$, per $i = 1, \dots, r-1$ e $I_r = [b - \frac{(b-a)}{r}, b]$. Quindi per ogni $i = 1, \dots, r$ si ha $m(I_i) = \frac{1}{r}(b-a)$, allora $m(\tau^{-1}[a, b]) = \sum_{i=1}^r m(I_i) = \sum_{i=1}^r \frac{1}{r}(b-a) = r \frac{1}{r}(b-a) = m([a, b])$.

Il concetto di *invarianza* di una misura equivale a quello di *stazionarietà*. Se infatti μ è una misura τ -invariante, se x_0 indica la posizione iniziale di x e x_n quella al tempo n (cioè $\tau^n(x_0)$, l' n -esimo iterato di x_0 tramite τ), allora si ha :

$$\mathbb{P}(x_n \in A) = \mu(\{x \in [0, 1]; \tau^n(x) \in A\}) = \mu(\tau^{-n}(A)) = \mu(\tau^{-n+1}(A)) = \dots = \mu(\tau^{-1}(A)) = \mu(A) = \mathbb{P}(x_0 \in A).$$

Definizione 1.37. Si consideri una mappa τ su $[0, 1]$. Allora τ si dice *liscia a tratti* se $\tau(x)$, $\tau'(x)$ e $\tau''(x)$ sono continue e limitate, tranne al più in un numero finito di punti. Se inoltre esiste una costante $\alpha > 1$ tale che $|\tau'(x)| \geq \alpha$, tranne al più un numero finito di punti, allora τ si dice *espandente a tratti*.

Teorema 1.5.1. Sia τ una funzione liscia ed espandente a tratti su $[0, 1]$. Allora τ ammette una misura invariante μ . Inoltre la densità (invariante) è

limitata, cioè esiste una costante c tale che $\mu([a, b]) \leq c|b - a|$, per ogni a, b tali che $0 \leq a \leq b \leq 1$.

Per la dimostrazione si veda [1].

1.5.1 Sistemi dinamici, ricorrenza ed ergodicità

Definizione 1.38. Sia (X, Ω, μ) uno spazio di misura dotato di norma e sia $\tau : X \rightarrow X$ una trasformazione che conserva la misura μ (equivalentemente, sia μ τ -invariante). Allora la quadrupla (X, Ω, μ, τ) è chiamata *sistema dinamico*.

Sia $\tau : X \rightarrow X$ una trasformazione. L' n -esimo iterato di τ è denotato con τ^n , cioè $\tau^n(x) = \tau \circ \dots \circ \tau(x)$, n volte. Nello studio dei sistemi dinamici si è interessati allo studio delle proprietà dell'orbita $\{\tau^n(x)\}_{n \geq 0}$, per esempio la proprietà per cui se un'orbita inizia in un certo insieme, essa ritorna in tale insieme infinite volte.

Teorema 1.5.2. (*Teorema dei ritorni di Poincaré*)

Sia (X, Ω, μ) uno spazio di misura dotato di norma, tale che $\mu(X) < \infty$. Sia $\tau : X \rightarrow X$ una trasformazione che preserva μ . Sia $A \in \Omega$ con $\mu(A) > 0$. Allora quasi tutti i punti di A tornano infinite volte in A iterando τ .

Per la dimostrazione si veda [1].

Osservazione 12. Sia (X, Ω, μ) uno spazio di misura dotato di norma. e sia μ τ -invariante, con $\tau : X \rightarrow X$. Se per qualche $A \in \Omega$ vale $\tau^{-1}(A) = A$ allora $\tau^{-1}(X \setminus A) = X \setminus A$ e quindi lo studio di τ si può dividere in quello di $\tau|_A$ e di $\tau|_{(X \setminus A)}$.

La proprietà dell' *ergodicità* per una trasformazione τ che conserva la misura μ si realizza quando essa è *indecomponibile*, ovvero quando non può essere studiata distinguendo queste due restrizioni.

Definizione 1.39. Una trasformazione $\tau : (X, \Omega, \mu) \rightarrow (X, \Omega, \mu)$ che preserva μ si dice *ergodica* se per ogni $A \in \Omega$ tale che $\tau^{-1}(A) = A$ si ha $\mu(A) = 0$ oppure $\mu(X \setminus A) = 0$.

Definizione 1.40. Sia (X, Ω, μ, τ) un sistema dinamico. Un insieme $A \in \Omega$ si dice τ -*invariante* se $\tau^{-1}(A) = A$ e *quasi τ -invariante* se $\mu(\tau^{-1}(A) \Delta A) = 0$, dove il simbolo Δ indica la differenza simmetrica tra insiemi ovvero:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Analogamente una funzione misurabile f è detta τ -*invariante* se $f \circ \tau = f$ μ -q.o.

Definizione 1.41. Sia (X, Ω, μ) uno spazio di misura normalizzato e sia μ τ -invariante, con $\tau : X \rightarrow X$, tale che $\tau(A) \in \Omega$, se $A \in \Omega$. τ si dice *esatta* se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\tau^n A) = 1, \text{ per ogni } A \in \Omega, \text{ con } \mu(A) > 0.$$

1.5.2 Mixing ed esattezza

Definizione 1.42. Si consideri la trasformazione $\tau : (X, \Omega, \mu) \rightarrow (X, \Omega, \mu)$ allora τ si dice: *mixing* ≥ 1 se per ogni $A, B \in \Omega$ si ha:

$$\mu(\tau^{-n}(A) \cap B) \rightarrow \mu(A)\mu(B)$$

per $n \rightarrow +\infty$.

Osservazione 13. Vale che τ mixing $\Rightarrow \tau$ ergodica.

Teorema 1.5.3. (*Teorema ergodico*) Sia P la matrice di transizione di una CMO, ergodica $\Rightarrow \exists$ una distribuzione iniziale π tale che:

$$1) \pi P = \pi$$

$$2) \forall i = 1, \dots, m, p_{ij} \rightarrow \pi_j \text{ e la convergenza è esponenziale}$$

Per la dimostrazione si veda [4].

1.6 Misure invarianti assolutamente continue

Poichè le osservabili e i fenomeni fisici rilevanti che trattiamo, possono essere visti come insiemi con misura di Lebesgue positiva, consideriamo sistemi dinamici dotati di misure assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue e invarianti rispetto alle trasformazioni in gioco. Ci interessa dunque il caso di sistemi in cui la misura iniziale è la misura di Lebesgue.

1.6.1 Esistenza di misure invarianti assolutamente continue

Si consideri un generico intervallo $I = [0, 1]$, con misura di Lebesgue m , normalizzata su I . Definiamo $T(I)$, la classe delle trasformazioni $\tau : I \rightarrow I$, tali che:

1) τ è espandente a tratti, cioè esiste una partizione

$\Gamma = \{I_i = [a_{i-1}, a_i], i = 1, \dots, n\}$ di I tale che τ_{I_i} è C^1 , $|\tau'_i(x)| \geq \alpha > 1$,
per ogni $i = 1, \dots, n$ e per ogni $x \in (a_{i-1}, a_i)$.

2) $g(x) = \frac{1}{|\tau'(x)|}$ è una funzione a variazione limitata.

Per ogni $n \geq 1$, si definisce la partizione $\Gamma^{(n)}$ come segue:

$$\Gamma^{(n)} = \{I_{i_0} \cap \tau^{-1}(I_{i_1}) \cap \dots \cap \tau^{-n+1}(I_{i_n}) : I_{i_j} \in \Gamma\}.$$

Quindi se τ è espandente a tratti su Γ , τ^n è espandente a tratti di Γ^n .

Teorema 1.6.1. *Sia $\tau \in T(I)$. Allora ammette una misura invariante assolutamente continua, la cui densità è una funzione a variazione limitata.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda [1]. □

1.7 Operatore di Perron-Frobenius

Nell'ottica di studiare i risultati di esistenza, unicità e le proprietà delle misure invarianti assolutamente continue (a.c.i.m.), si fornisce ora una definizione dell'*operatore di Perron-Frobenius* relativo ad una trasformazione τ : questo operatore, che in simboli si indica con $P_\tau f$, descrive l'effetto di τ su una funzione densità di probabilità.

Sia χ una variabile random sullo spazio $I = [a, b]$, distribuita con densità f e sia m la misura di Lebesgue su I . Allora per ogni insieme misurabile $A \subset I$ si ha: $\mathbb{P}(\chi \in A) = \int_A f dm$.

Sia ora $\tau : I \rightarrow I$ una trasformazione. Allora $\tau(\chi)$ è ancora una variabile random, di cui ci si chiede quale sia la funzione densità di probabilità. Si ha: $\mathbb{P}(\tau(\chi) \in A) = \mathbb{P}(\chi \in \tau^{-1}(A)) = \int_{\tau^{-1}(A)} f dm$.

Per avere la densità con cui è distribuita la variabile $\tau(\chi)$, dovremmo poter trovare una funzione $\phi \in L^1$ (che se esiste dipende sia da f che da τ) tale che:

$$\int_{\tau^{-1}(A)} f dm = \int_A \phi dm.$$

Assumiamo che A sia un insieme misurabile arbitrario, $f \in L^1$ e definiamo:

$$\mu(A) = \int_{\tau^{-1}(A)} f dm. \text{ Sia inoltre } \tau \text{ non singolare.}$$

Allora $\tau_* m \ll m \Rightarrow \mu(A) = 0 \Rightarrow \mu \ll m$.

Quindi per il teorema 1.1.4 esiste una (q.o.)-unica $\phi \in L^1$, tale che per ogni insieme misurabile A si ha che $\mu(A) = \int_A \phi dm$.

Si definisce $P_\tau f = \phi$. Allora la funzione densità di probabilità f relativa alla variabile χ , viene trasformata tramite l'operatore P_τ in una nuova densità di probabilità $P_\tau f$, relativa a $\tau(\chi)$.

Dato che $f \in L^1$, $P_\tau f \in L^1$, allora l'operatore $P_\tau f : L^1 \rightarrow L^1$ è ben definito. Sia ora $A = [a, x] \subset I$ si ha: $\int_a^x P_\tau f dm = \int_{\tau^{-1}([a, x])} f dm$, e derivando entrambi i lati per x si ha:

$$P_\tau f = \frac{d}{dx} \int_{\tau^{-1}([a, x])} f dm.$$

Vengono ora presentate le proprietà di base dell'*operatore di Perron-Frobenius* su un generico intervallo $[a, b]$, che possono poi essere estese al caso di uno spazio di misura qualunque.

1.7.1 Proprietà dell'operatore $P_\tau f$

- 1) L'operatore di Perron-Frobenius $P_\tau : L^1 \rightarrow L^1$ è un operatore lineare.
- 2) Positività: se $f \in L^1$ e $f \geq 0$ allora $P_\tau f \geq 0$.
- 3) Conservazione dell'integrale: $\int_{[a,b]} P_\tau f dm = \int_{[a,b]} f dm$.
- 4) L'operatore di Perron-Frobenius è una contrazione cioè per ogni $f \in L^1$,
 $\|P_\tau f\|_1 \leq \|f\|_1$
- 5) Proprietà di composizione: siano $\tau, \sigma : [a, b] \rightarrow [a, b]$ non singolari.
 Allora $P_{\tau \circ \sigma} f = P_\tau \circ P_\sigma f$. In particolare: $P_{\tau^n} f = P_\tau^n f$.
- 6) Proprietà del punto fisso: sia $\tau : [a, b] \rightarrow [a, b]$ non singolare. Allora f^*
 è un punto fisso per P_τ , formalmente $P_\tau f^* = f^*$ se e solo se la misura
 μ_{f^*} , definita da $\mu(A) = \int_A f^* dm$, per ogni A misurabile, è τ -invariante
 (ovvero se e solo se $\mu(A) = \mu(\tau^{-1}(A))$ per ogni A misurabile, dove
 $f^* \geq 0$, $f^* \in L^1$ e $\|f^*\|_1 = 1$).
- 7) Sia $\tau : [a, b] \rightarrow [a, b]$ e sia μ una misura τ -invariante. Allora P_τ è una
 contrazione in ogni L^p , con $1 \leq p \leq \infty$.
- 8) Se $f \in L^1$ e $g \in L^\infty$ allora: $\int (P_\tau f) g dm = \int (f \circ \tau) g dm$.

1.7.2 Operatore di Perron-Frobenius per le mappe monotone a tratti in una dimensione

Definizione 1.43. Si consideri l'intervallo $[0, 1]$. La trasformazione $\tau : [a, b] \rightarrow [a, b]$ è detta *monotona a tratti* se esiste una partizione di $[a, b]$, $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ e un numero $r \geq 1$ tale che:

- 1) $\tau|_{(a_{i-1}, a_i)}$ è una funzione C^r , $\forall i = 1, \dots, n$ che può essere estesa a una funzione C^r su $[a_{i-1}, a_i]$, $\forall i = 1, \dots, n$
- 2) $|\tau'(x)| > 0$ su (a_{i-1}, a_i) , $\forall i = 1, \dots, n \Rightarrow \tau$ è monotona su ogni (a_{i-1}, a_i) , $\forall i$

Se inoltre vale che $\tau'(x) \geq \alpha > 1$ ovunque esista la derivata, allora τ è chiamata *monotona a tratti ed espandente*.

Andiamo ora a dare una rappresentazione comoda dell'operatore di Perron-Frobenius per le funzioni monotone a tratti. Dalla definizione di P_τ si ha:

$$\int_A P_\tau f dm = \int_{\tau^{-1}(A)} f dm, \text{ per ogni boreliano } A \text{ in } [a, b] \quad (1.9)$$

Dato che $\tau|_{(a_{i-1}, a_i)}$ è monotona allora è invertibile su ogni intervallo (a_{i-1}, a_i) $\forall i$. Ponendo $B_i = \tau([a_{i-1}, a_i])$, per ogni $i = 1, \dots, n$ è possibile definire $\phi_i : B_i \rightarrow [a_{i-1}, a_i]$, come l'inversa di $\tau|_{[a_{i-1}, a_i]}$. Si ha quindi che

$$\tau^{-1}(A) = \bigsqcup_{i=1}^n \phi_i(B_i \cap A) \quad (1.10)$$

dove gli insiemi $\{\phi_i(B_i \cap A)\}_{i=1}^n$ sono a due a due disgiunti e dato che dipendono da A , gli insiemi $\phi_i(B_i \cap A)$ potrebbero essere vuoti. Sostituendo 1.10 in 1.9 si ottiene:

$$\int_A P_\tau f dm = \int_{\bigcup_{i=1}^n \phi_i(B_i \cap A)} f dm = \sum_{i=1}^n \int_{\phi_i(B_i \cap A)} f dm = \sum_{i=1}^n \int_{B_i \cap A} f(\phi_i(x)) |\phi_i'(x)| dm,$$

sfruttando la formula del cambio variabile per ogni i . Andando avanti si ha:

$\sum_{i=1}^n \int_{B_i \cap A} f(\phi_i(x)) |\phi_i'(x)| dm = \sum_{i=1}^n \int_A f(\phi_i(x)) |\phi_i'(x)| \chi_{B_i}(x) dm =$
 $\int_A \sum_{i=1}^n \frac{f(\tau_i^{-1}(x))}{|\tau'(\tau_i^{-1}(x))|} \chi_{\tau(a_{i-1}, a_i)}(x) dm$, e dato che A è arbitrario si ha per ogni
 $f \in L^1$:

$$P_\tau f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{f(\tau_i^{-1}(x))}{|\tau'(\tau_i^{-1}(x))|} \chi_{B_i}(x) \quad (1.11)$$

In modo più compatto l'operatore può essere scritto nella seguente forma:

$$P_\tau f(x) = \sum_{y \in \{\tau^{-1}(x)\}} \frac{f(y)}{|\tau'(y)|} \quad (1.12)$$

Osservazione 14. Per ogni x , l'insieme $\{\tau^{-1}(x)\}$ ha al massimo n punti. Se y è uno di questi punti, cioè $y \in (a_{i-1}, a_i)$, per qualche i allora il termine corrispondente $\frac{f(y)}{\tau'(y)}$ compare nell'equazione precedente.

Capitolo 2

Statistica di eventi rari per processi stocastici

Osservazione 15. Sia A una matrice quadrata, riducibile. Allora A si può scrivere in *forma normale di una matrice riducibile*, cioè può essere scritta a blocchi in forma triangolare superiore nel seguente modo:

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 & * & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * & * \\ 0 & 0 & B_2 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & B_h \end{pmatrix}$$

dove P è una matrice di permutazione e ciascun blocco B_i per $i = 1, \dots, h$ sono matrici irriducibili o di soli zeri.

In particolare se A è non negativa \Rightarrow i blocchi $B_i, \forall i$ sono matrici non negative e lo $\Sigma(A) = \bigcup_j \Sigma(B_j)$.

Per dimostrazioni e dettagli si veda [12].

Si consideri ora un generico sistema dinamico (M, τ, μ) , un evento raro E ($\mu(E) \ll 1$) e la variabile aleatoria Y del primo tempo in cui E si verifica. Ci proponiamo di calcolare la probabilità: $\mathbb{P}(Y = n)$.

2.1 Caso di variabili aleatorie i.i.d.

Si consideri una famiglia di v.a. $(X_0, X_1, \dots, X_n, \dots)$ i.i.d sullo spazio (\mathbb{R}, π) . Sia E un evento raro, definito nel seguente modo:

$E = \{X_i > a, a \in \mathbb{R}\}$. Allora la probabilità di avere ai primi $n - 1$ tempi un'insuccesso e all' n -esimo un successo è la seguente:

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y \geq n) - \mathbb{P}(Y \geq n + 1) \text{ dove}$$

$$\mathbb{P}(Y \geq n) = \mathbb{P}(X_i \notin E, \forall i = 0, \dots, n - 1) = \mathbb{P}(X_i \leq a, \forall i = 0, \dots, n - 1) \text{ è}$$

la coda della distribuzione. Quindi:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = n) &= \mathbb{P}(Y \geq n) - \mathbb{P}(Y \geq n + 1) = \\ &= \mathbb{P}(X_i \leq a, \forall i = 0, \dots, n - 1) - \mathbb{P}(X_i \leq a, \forall i = 0, \dots, n) = \\ &= \mathbb{P}(X_0 \leq a, \dots, X_{n-1} \leq a) - \mathbb{P}(X_0 \leq a, \dots, X_n \leq a) = \\ &= \mathbb{P}(X_0 \leq a) \dots \mathbb{P}(X_{n-1} \leq a) - \mathbb{P}(X_0 \leq a) \dots \mathbb{P}(X_n \leq a) = \\ &= \mathbb{P}(X_0 \leq a) \dots \mathbb{P}(X_{n-1} \leq a)(1 - \mathbb{P}(X_n \leq a)) = q^{n-1}p \end{aligned}$$

dove $q = \mathbb{P}(X_i \leq a)$, $\forall i$ è la probabilità di insuccesso e $p = 1 - q = \mathbb{P}(X_i > a)$ la probabilità di successo.

La variabile Y segue quindi la distribuzione esponenziale. In particolare si vede che la variabile Y decade esponenzialmente.

Sia $a > 1$ tale che $q = \frac{1}{a} \Rightarrow q < 1$ allora:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = n) &= (1 - q)q^{n-1} = (1 - q) \exp(\ln(q^{n-1})) = (1 - q) \exp((n - 1)\ln(q)) = \\ &= (1 - q) \exp((n - 1) \ln(\frac{1}{a})) = (1 - q) \exp(-(n - 1) \ln(a)) \end{aligned}$$

2.2 Caso di una catena di Markov omogenea a numero finiti di stati

Si consideri una catena di Markov omogenea (CMO) (X_0, X_1, \dots) a numero finito di stati $\mathbb{Z}_m = \{1, \dots, m\}$, con matrice di transizione P , ergodica. Sia E un evento raro definito nel modo seguente: $E = E_i = \{X_i = m, \forall i\}$ e Y la v.a del primo tempo in cui E si verifica. Si dice che è accaduto l'evento raro se lo stato della catena di Markov è m . Più precisamente definiamo $E := \{X_0 = m\}$. Quindi l'evento raro accade al tempo n se $\sigma^n(X_0, X_1, \dots) \in E$, dove σ è lo *shift* (cioè la dinamica) sulla catena di Markov. In altre parole l'evento raro accadrà al tempo n se la catena si trova nell'insieme $E_n := \{X_n = m\}$. Allora la probabilità di avere ai primi $n - 1$ tempi un'insuccesso e all' n -esimo un successo è anche in questo caso:

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y \geq n) - \mathbb{P}(Y \geq n + 1), \text{ dove}$$

$$\mathbb{P}(Y \geq n) = \mathbb{P}(X_i \neq m, \forall i = 0, \dots, n - 1).$$

Si dimostra che la distribuzione di questa CMO è esponenziale decadente.

Infatti:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \geq n) &= \mathbb{P}(X_i \neq m, \forall i = 0, \dots, n - 1) = \\ &= \mathbb{P}(X_0 \neq m, \dots, X_{n-1} \neq m) = \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{x_0, \dots, x_{n-1}=1}^{m-1} X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}\right). \end{aligned}$$

Per ogni $i = 1, \dots, n - 1$ gli eventi $X_i = x_i$ sono eventi disgiunti quindi la probabilità dell'unione è la somma delle singole probabilità, per cui:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{x_0, \dots, x_{n-1}=1}^{m-1} X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}\right) &= \\ \sum_{x_0, \dots, x_{n-1}=1}^{m-1} \mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \end{aligned}$$

Per le proprietà delle catene di *perdita della memoria* (1.9) la probabilità congiunta si scrive in termini delle probabilità condizionate (quello che succede in ogni istante risente solo di ciò che è successo all'istante precedente):

$$\begin{aligned} & \sum_{x_0, \dots, x_{n-1}=1}^{m-1} \mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = \\ & \sum_{x_0, \dots, x_{n-1}=1}^{m-1} \mathbb{P}(X_0 = x_0) \mathbb{P}(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) \dots \dots \\ & \mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1} | X_{n-2} = x_{n-2}) \end{aligned}$$

Sia ora μ_{x_0} la misura iniziale e siano $p_{x_{i-1}x_i} = \mathbb{P}(X_i = x_i | X_{i-1} = x_{i-1})$ le probabilità di transizione dallo stato $i - 1$ allo stato successivo, allora:

$$\begin{aligned} & \sum_{x_0, \dots, x_{n-1}=1}^{m-1} \mathbb{P}(X_0 = x_0) \mathbb{P}(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) \dots \dots \\ \mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1} | X_{n-2} = x_{n-2}) &= \sum_{x_0, \dots, x_{n-1}=1}^{m-1} \mu_{x_0} p_{x_0 x_1} \dots p_{x_{n-2} x_{n-1}} \end{aligned}$$

Ponendo $(\mu^{(i)})_{x_i} = (\mu P^i)_{x_i}$ per $i = 1, \dots, n - 1$, si ottiene:

$$\begin{aligned} & \sum_{x_0, \dots, x_{n-1}=1}^{m-1} \mu_{x_0} p_{x_0 x_1} \dots p_{x_{n-2} x_{n-1}} = \\ & \sum_{x_1, \dots, x_{n-1}=1}^{m-1} (\mu P)_{x_1} p_{x_1 x_2} \dots p_{x_{n-2} x_{n-1}} = \\ & \sum_{x_2, \dots, x_{n-1}=1}^{m-1} (\mu P^2)_{x_2} p_{x_2 x_3} \dots p_{x_{n-2} x_{n-1}} = \dots \dots = \sum_{x_{n-1}=1}^{m-1} (\mu P^{n-1})_{x_{n-1}} \end{aligned}$$

Analogamente a sopra quindi si ha $\mathbb{P}(Y \geq n+1) = \sum_{x_n=1}^{m-1} (\mu P^n)_{x_n}$, allora:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = n) &= \mathbb{P}(Y \geq n) - \mathbb{P}(Y \geq n+1) = \\ & \sum_{x_{n-1}=1}^{m-1} (\mu P^{n-1})_{x_{n-1}} - \sum_{x_n=1}^{m-1} (\mu P^n)_{x_n} = \\ & 1 - (\mu P^{n-1})_{x_{n-1}=m} - [1 - (\mu P^n)_{x_n=m}] = 1 - (\mu P^{n-1})_{x_{n-1}=m} - 1 + (\mu P^n)_{x_n=m} = \\ & (\mu P^n)_{x_n=m} - (\mu P^{n-1})_{x_{n-1}=m} = (\mu^{(n)})_m - (\mu^{(n-1)})_m, \\ & \text{e } (\mu^{(n)})_m - (\mu^{(n-1)})_m \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty \text{ per il teorema ergodico (1.5.3)}. \end{aligned}$$

Osservazione 16. È possibile dimostrare un risultato più forte. Sia \bar{P} la sottomatrice $(m-1) \times (m-1)$ di P ottenuta da P togliendo l'ultima riga e colonna. Sia \bar{P}_0 la matrice $m \times m$ ottenuta da \bar{P} aggiungendo una riga e una colonna di zeri, rispettivamente agli indici (i, m) e (m, j) per $i, j = 1, \dots, m$ e sia $\mu = \sum_{j=1}^m a_j \nu_j$ misura qualunque su \mathbb{R}^m , con $a_j \in \mathbb{R}$ e $a_1 \neq 0$, ν_j autovettore destro di \bar{P}_0 relativo all'autovalore λ_j (dove $\lambda_1 = 1$ per il teorema

1.5.3), per ogni j .

Si dimostra che $\mu \bar{P}_0^n$ decade esponenzialmente a zero per $n \rightarrow \infty$.

La matrice \bar{P}_0 rappresenta infatti la situazione per cui dall'istante iniziale fino all' $n-1$ -esimo non accade l'evento raro e ci serve per calcolare $\mathbb{P}(Y \geq n)$.

Osservazione 17. La misura $\mu = \sum_{j=1}^m a_j \nu_j$ è definita con $a_1 \neq 0$ perché se fosse $a_1 = 0$ avrei $\mu = \sum_{j=2}^m a_j \nu_j$ quindi

$\mu P^n = \sum_{j=2}^m a_j \nu_j P^n = \sum_{j=2}^m a_j \lambda_j^n \nu_j \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ dato che P è una matrice di transizione ergodica quindi i suoi autovalori (escluso il raggio spettrale) sono in modulo minore di 1. In questo modo avrei però una contraddizione col fatto che ogni misura converge alla misura invariante.

La matrice P è una matrice di transizione (quindi stocastica) ed ergodica, la matrice \bar{P}_0 invece non è nè stocastica, (quindi non è una matrice di transizione) nè ergodica, ma è riducibile e a entrate non negative, tutte minori di 1. Anche se il teorema 1.3.1 non può essere applicato direttamente a matrici non negative (e riducibili), possiamo scrivere \bar{P}_0 in *forma normale per matrici riducibili* (come visto precedentemente), esiste cioè una matrice di permutazione T tale che:

$$T \bar{P}_0 T^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 & * & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * & * \\ 0 & 0 & B_2 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & B_h \end{pmatrix}$$

Poichè \bar{P}_0 è non negativa \Rightarrow i blocchi $B_j, \forall j = 1, \dots, h$ sono matrici non negative irriducibili (o di soli zeri). Per $\forall j = 1, \dots, h$ i blocchi B_j sono matrici quadrate $p_j \times p_j$ con $p_j < m$. Siano $\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{jk}$ gli autovalori di B_j con

$k \leq p_j \Rightarrow$ le matrici B_j possono essere scritte in forma canonica di Jordan J_j , cioè \exists sempre una matrice di trasformazione Q_j invertibile tale che:

$$Q_j^{-1}B_jQ_j = J_j = \begin{pmatrix} J_{j1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & J_{j2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & J_{jk} & \dots \end{pmatrix}$$

dove $\forall i = 1, \dots, k$ si ha: $J_{ji} = \begin{pmatrix} \lambda_{ji} & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \lambda_{ji} & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_{ji} \end{pmatrix}$

In particolare la matrice Q_j ha come colonne ordinatamente gli autovettori generalizzati di B_j , corrispondenti rispettivamente agli autovalori $\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{jk}$. Usando il teorema 1.3.2, punto 8, siccome la somma degli elementi di una riga di B_j è somma degli elementi di una riga di \bar{P}_0 , si vede che il raggio spettrale di B_j è $\leq 1, \forall j$. Sia ora D la matrice del cambio di base totale, ovvero la matrice tale per cui:

$$D(T\bar{P}_0T^{-1})D^{-1} = (DT)\bar{P}_0(DT)^{-1} = \begin{pmatrix} J_1 & * & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & J_2 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & J_h & \dots \end{pmatrix}$$

Quindi si ha che $\Sigma(\overline{P}_0) = \Sigma((DT)\overline{P}_0(DT^{-1})) = \bigcup_j \Sigma(J_j) = \bigcup_j \Sigma(B_j)$.

Questo dimostra che gli autovalori di \overline{P}_0 hanno tutti modulo ≤ 1 . Vogliamo ora dimostrare che hanno modulo strettamente < 1 .

Osservazione 18. La matrice $T\overline{P}_0T^{-1}$ è la matrice \overline{P}_0 con un cambio di base di tipo permutazione, quindi ogni elemento (blocco) non nullo della matrice $T\overline{P}_0T^{-1}$ è un elemento non nullo della matrice \overline{P}_0 .

Richiamiamo il seguente teorema:

Teorema 2.2.1. (*Teorema spettrale*)

Sia A una matrice quadrata $n \times n$ e ρ il suo raggio spettrale. Allora:
 $\sqrt[n]{\|\overline{P}_0^n\|} \rightarrow \rho$ per $n \rightarrow \infty$.

Osservazione 19. La matrice \overline{P}_0 è quadrata $m \times m$. Allora per il teorema spettrale vale: $\sqrt[n]{\|\overline{P}_0^n\|} \rightarrow \rho$ per $n \rightarrow \infty$.

Dato che $\|\overline{P}_0\| = \sup_{\|\mu\|_1 \leq 1} \|\mu\overline{P}_0\| \leq 1 \Rightarrow \|\overline{P}_0^n\| \leq 1 \Rightarrow \rho \leq 1$ (per il teorema 2.2.1) \Rightarrow tutti gli altri autovalori di \overline{P}_0 , cioè $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ con $l \leq m$ sono in modulo ≤ 1 .

Se P è ergodica, come abbiamo assunto, allora esiste un $k \in \mathbb{Z}^+$ tale che P^k è positiva. Sia $(\overline{P}^k)_0$ la matrice ottenuta da P^k , mettendo a zero l'ultima riga e l'ultima colonna. Vale $(\overline{P}_0)^k \leq (\overline{P}^k)_0$. Infatti per ogni $i, j \in \mathbb{Z}_{m-1}$

$$(\overline{P}_0)_{i,j}^k = \sum_{x_2, \dots, x_{k-1}=1}^{m-1} p_{ix_2} p_{x_2x_3} \cdots p_{x_{k-1}j} \leq \sum_{x_2, \dots, x_{k-1}=1}^m p_{ix_2} p_{x_2x_3} \cdots p_{x_{k-1}j}.$$

Ma se P^k è positiva, ogni riga di $(\overline{P}^k)_0$ ha somma strettamente < 1 . Sia α il massimo di questa somma su tutte le righe. Lo stesso vale quindi per \overline{P}_0^k .

Applicando il teorema spettrale (2.2.1) si ha:

$$\rho(\overline{P}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\overline{P}_0^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|\overline{P}_0^{nk}\|^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{k}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\|(\overline{P}_0^k)^n\|^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{k}} = (\rho(\overline{P}_0^k))^{\frac{1}{k}} < 1, \text{ cioè tutti gli autovalori di } \overline{P}_0 \text{ sono in modulo } < 1, \text{ come affermato.}$$

In questo modo si può dimostrare che la matrice $\mu\overline{P}_0^n$ tende a zero per $n \rightarrow \infty$, infatti:

$$\mu\overline{P}_0^n = \sum_j a_j \nu_j \overline{P}_0^n = (a_1 \nu_1 + \sum_{j \geq 2} a_j \nu_j) \overline{P}_0^n = a_1 \nu_1 \overline{P}_0^n + \sum_{j \geq 2} a_j \nu_j \overline{P}_0^n =$$

$(a_1 \lambda_1^n \nu_1 + \sum_{j \geq 2} a_j \lambda_j^n \nu_j) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ poichè $|\lambda_j| < 1, \forall j \geq 2$.

In particolare la decadenza è esponenziale perché:

$\nu_j \bar{P}_0^n = \lambda_j^n \nu_j = \exp(\ln(\lambda_j^n)) \nu_j = \exp(n \ln(\lambda_j)) \nu_j \simeq \exp(-n \ln(c)) \nu_j$ con $c < 1$ costante.

Capitolo 3

Sistemi aperti e misure condizionalmente invarianti

3.1 Cornice concettuale generale

Lo studio delle proprietà statistiche dei sistemi dinamici caotici è strettamente connesso a quantità in equilibrio e collegato a questioni di convergenza asintotica nel tempo. D'altra parte, nelle applicazioni, sta enormemente crescendo l'interesse verso quei problemi in cui l'evoluzione dinamica del sistema viene bloccata o modificata dopo che accade un certo evento. Si cerca quindi di calcolare la probabilità di un tale evento, che noi abbiamo definito *evento raro*, o per esempio di capire se colpire una determinata regione dello spazio delle fasi, possa essere considerato un evento rilevante per l'evoluzione del sistema, a patto che tale regione sia l'unica accessibile per poter guadagnare informazioni globali. Molte di queste situazioni sono modellate dai *sistemi dinamici aperti* (cioè sistemi con piccole vie di fuga, buchi o stati meta-stabili) che possono essere visti come una perturbazione dei sistemi dinamici chiusi: un'evoluzione chiusa e a tempo discreto su uno spazio delle fasi M può essere infatti *aperta* definendo una regione $E \subset M$,

da cui le particelle possono fuoriuscire. Tuttavia, se la *teoria delle perturbazioni* può essere applicata alla maggior parte dei sistemi *lisci*, essa non basta per trattare quelli che presentano discontinuità, essendo queste modellate da *buchi*. Sappiamo inoltre che, se la dinamica del sistema è sufficientemente caotica, la misura dei punti che rimangono nel sistema dopo n iterazioni, decresce esponenzialmente. Il tasso di decrescita esponenziale, chiamato *tasso di fuga*, è strettamente legato alle proprietà spettrali dell'operatore di Perron-Frobenius, quindi è invariante per una larga classe di densità iniziali. Tuttavia solo in alcuni casi si è osservato che dalla posizione del buco dipende la vita media delle particelle che fuoriescono dal sistema (come visto in [13]).

3.2 Misura condizionalmente invariante e tasso di fuga

Si consideri ora il sistema dinamico $(\hat{M}, \hat{\tau}, m)$, $\hat{\tau} : \hat{M} \rightarrow \hat{M}$. Sia $M \subset \hat{M}$ tale che $\hat{\tau}(M) \cap M \neq \emptyset$, $\hat{\tau}(M) \not\subseteq M$ e definiamo, nello spazio delle fasi \hat{M} , un buco $H = \hat{M} \setminus M$. Se un punto x dello spazio delle fasi, alla k -esima iterazione della mappa $\hat{\tau}$, cade nel buco, non lo si considera più. Per questo siamo interessati soltanto alla dinamica dei punti in $M = \hat{M} \setminus H$. Si consideri quindi il sistema *aperto* (M, τ, m) , dove $\tau = \hat{\tau}|_M$, cioè la restrizione a M della mappa $\hat{\tau}$.

Definizione 3.1. $Y(x) = \min\{n > 0; \hat{\tau}^n(x) \in H\}$ è la variabile aleatoria che indica il primo tempo in cui il punto x cade nel buco e si chiama *tempo di fuga*.

Sia inoltre $M^n = \{x \in M; Y(x) > n\}$, l'insieme dei punti che all' n -esima iterazione di $\hat{\tau}$ non sono ancora caduti.

Si ha che $M \supset M^1 \supset \dots \supset M^\infty = \bigcap_{n \geq 0} M^n$.

Consideriamo ora, per ogni misura di Borèl μ su M , la misura $\tau_*\mu$ su M , definita come in (1.1).

Definizione 3.2. Una misura μ su M si chiama *condizionalmente invariante* se per ogni boreliano $A \subset M$, vale:

$$\mu(A) = \frac{\tau_*\mu(A)}{\tau_*\mu(M)}. \quad (3.1)$$

Se μ è una misura condizionalmente invariante su M allora:
 $\lambda = \tau_*\mu(M) = \mu(\tau^{-1}(M))$. Iterando 3.1, per ogni boreliano $A \subset M$, si ottiene che:

$$\tau_*^n\mu(A) = \lambda^n\mu(A) \quad (3.2)$$

In generale $0 \leq \lambda \leq 1$. Se $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$, la misura μ si dice *misura condizionalmente banale*. In particolare nel caso $\lambda = 0$, tutta la massa del sistema cade nel buco alla prima iterazione.

Il *tasso di fuga* viene definito come $-\ln \lambda > 0$. Infatti

$\tau_*^n\mu(A) = \exp(\ln(\lambda^n\mu(A))) = \exp(-n(-\ln \lambda)\mu(A))$ quindi per $n \rightarrow \infty$ la misura $\tau_*^n\mu(A)$ decade esponenzialmente.

Osservazione 20. Se μ è una misura condizionalmente invariante non banale allora per μ -q.o. $x \in M$ e per ogni $z \in \mathbb{Z}^+$, esiste un $y \in M$, tale che $\tau^i(y) \in M$, per ogni $i \leq n$ e $\tau^n(y) = x$.

Se la mappa $\hat{\tau}$ è invertibile allora per ogni μ -q.o. $x \in M$, $\hat{\tau}^{-n}(x) \in M$, $\forall n \geq 0$.

Proposizione 3.2.1. *Esiste una misura condizionalmente invariante non banale se e solo se esiste un'orbita $\{x_i\}_{i=-\infty}^n \subset M$, tale che $\tau(x_i) = x_{i+1}$ e $\hat{\tau}(x_n) \in H$.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda [7]. □

Se $0 < \lambda < 1$, $\forall i$ posso costruire una tale misura ponendo $\mu\{x_i\} = \lambda^{n-i}(1 - \lambda)$. Infatti si ha l'invarianza condizionalmente dato che

$$\mu(\tau^{-1}(x_i)) = \mu(x_{i-1}) = \lambda^{n-(i-1)}(1-\lambda) = \lambda\lambda^{n-i}(1-\lambda) = \lambda\mu\{x_i\}.$$

Per questo possiamo considerare solo le misure invarianti, assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue.

Definiamo ora l'operatore normalizzato $\tau_1\mu = \frac{\tau_*\mu}{|\tau_*\mu|}$, dove $|\tau_*\mu| = \tau_*\mu(M) \neq 0$ e μ è una misura di Borèl su M .

Se vale che $\tau_1^n m \rightarrow \mu$, per $n \rightarrow \infty$, allora:

- 1) $|\tau_*\mu| = \Lambda$ è il tasso di fuga della misura di Lebesgue m .
- 2) $\tau_*\mu = \Lambda\mu$.
- 3) μ è la misura condizionalmente invariante di interesse.

Per i dettagli si veda [7].

Si consideri ancora la mappa $\hat{\tau} : \hat{M} \rightarrow \hat{M}$, localmente invertibile con Jacobiana $J\hat{\tau}$. L'operatore di Perron-Frobenius per la mappa $\hat{\tau}$ è definito così:

$$P_{\hat{\tau}}f = \sum_{y \in \hat{\tau}^{-1}(x)} \frac{f(y)}{|J\hat{\tau}(y)|} \quad (3.3)$$

Allo stesso modo se consideriamo la mappa ristretta $\tau : M \rightarrow M$, si ha $f : M \rightarrow M$ e $P_{\tau}f : M \rightarrow M$ dove:

$$P_{\tau}f = \sum_{y \in \tau^{-1}(x)} \frac{f(y)}{|J\tau(y)|} \quad (3.4)$$

Da (3.3) e (3.4) si ottiene:

$$P_{\tau}f = P_{\hat{\tau}}(\hat{f}\chi_{M^1}), \quad (3.5)$$

dove \hat{f} è l'estensione di f a \hat{M} . L'operatore P_{τ} è la diretta generalizzazione di $P_{\hat{\tau}}$, quindi è l'operatore di Perron-Frobenius e soddisfa $P_{\tau}^n = P_{\tau^n}$.

Definiamo ora l'operatore normalizzato $P_1f = \frac{P_{\tau}f}{|P_{\tau}f|}$, dove f è la densità di μ e P_1f di $\tau_1\mu$.

Sia $P_{\tau} = P$.

- 1) Supponiamo che l'operatore P agisca su uno spazio di Banach $(B, \|\cdot\|)$, con $B \subset L^1$. Se esiste un autovalore $\lambda \in (0, 1]$ con autofunzione $f \geq 0$ tale che $\int f dm = 1$, allora si ha: $\tau_*\mu = \lambda\mu$, dove $\mu \ll m$, cioè $\frac{d\mu}{dm} = f$.
- 2) Se P è un operatore quasi compatto e λ è un autovalore semplice ed è l'unico autovalore di modulo massimo, allora la linearità di P implica che:
 - a) $B = H \oplus \{f\}$, dove $P(H) \subset H$ e $\{f\}$ è lo spazio uno-dimensionale generato da f .
 - b) Per ogni $g \in B \setminus H$, esiste una costante $C_g \neq 0$ tale che

$$\|\lambda^{-n} P^n(g) - C_g f\| \rightarrow 0, \text{ per } n \rightarrow \infty,$$
 (equivalentemente $\|P_1^n g - f\| \rightarrow 0, \text{ per } n \rightarrow \infty$)
 - c) Se esiste $g \in B \setminus H$, $0 \leq g < \infty$, allora $\lambda = \Lambda$, dove $-\ln \Lambda$ è il tasso di fuga della misura di Lebesgue e vale $\tau_1^n m \rightarrow \mu$

La *quasi compatezza* dell'operatore di trasferimento è provata per le mappe espandenti a tratti in [8].

3.3 Trasformazioni di Markov

All'interno della classe delle trasformazioni monotone a tratti in una dimensione, iniziamo a considerare più da vicino le *trasformazioni di Markov lineari*. Sia $I = [a, b]$, $\tau : [a, b] \rightarrow [a, b]$. Si consideri la partizione Γ di I data dai punti $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$. Per ogni $i = 1, \dots, n$ sia $I_i = (a_{i-1}, a_i)$ e si denoti con $\tau_i = \tau|_{I_i}$. Se τ_i è un morfismo da I_i a un'unione di intervalli di Γ , ovvero $\tau_i = \bigcup_{k=1}^i (a_{j_{k-1}}, a_{j_k})$, allora τ si chiama *mappa di Markov* e la partizione $\Gamma = \{I_i\}_{i=1}^n$, *partizione di Markov rispetto alla mappa τ* . Se inoltre $|\tau'(x)| > 0$ su ogni I_i allora τ è monotona a tratti, in simboli $\tau \in T_M(\Gamma)$. Se τ_i è anche lineare su ogni I_i allora τ è detta *trasformazione di Markov lineare a tratti*, in simboli $\tau \in L_M(\Gamma)$. Ovviamente $L_M(\Gamma) \subset T_M(\Gamma)$.

Definizione 3.3. Se $\tau'(x)$ è definita per ogni $x \in I_i$ e $\forall i$, e $|\tau'(x)| > \alpha > 1$ allora τ si dice *mappa di Markov espandente a tratti*.

Esempio 3.1. Diamo degli esempi di mappe di Markov espandenti a tratti, lineari e non:

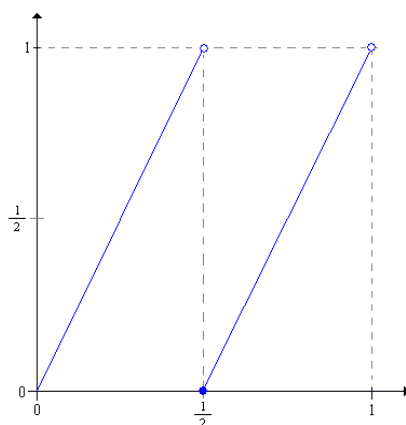


Figura 3.1: Doubling Map

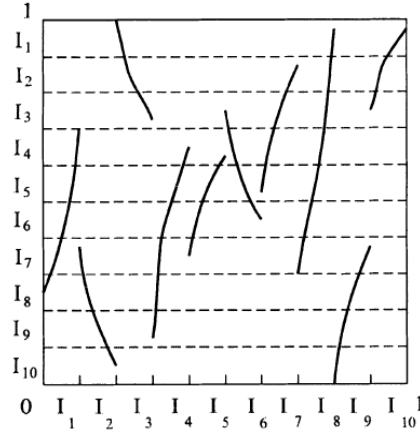


Figura 3.2: Mappa di Markov non lineare

Le mappe di Markov lineari a tratti sono dunque gli esempi più semplici (ma allo stesso tempo ugualmente paradigmatici) dei sistemi caotici e i sistemi dinamici dotati di tali mappe equivalgono a catene di Markov. Infatti un sistema dinamico generico (M, τ, μ) con τ mappa lineare di Markov, equivale a una catena di Markov omogenea $\{X_n\}_n$ in cui gli elementi della partizione di Markov associata corrispondono agli *stati del sistema*, cioè all'insieme dei valori che le variabili aleatorie X_n della catena possono assumere. Infatti se $\tau : M \rightarrow M$ una mappa di Markov lineare a tratti associata alla partizione $\Gamma = \{I_1, I_2, \dots, I_m\}$ dello spazio delle fasi M , m la misura di Lebesgue, x un punto scelto uniformemente su M e $\{X_n\}_n$ una catena di Markov a numero di stati finiti, $S = \{1, 2, \dots, m\}$, si ha che:

$\mathbb{P}(x \in I_i, \tau(x) \in I_j) = \mathbb{P}(x \in I_i \cap \tau^{-1}(I_j)) = \mathbb{P}(X_i = i | X_j = j)$ è la probabilità di transizione dallo stato i allo stato j di x , con $i, j \in S$. Inoltre se $x \in I_i$ ed è uniformemente distribuito in I_i , e consideriamo $B \subset I_i$ si ha:

$\mathbb{P}(x \in B) = m(B|I_i) = \frac{m(B \cap I_i)}{m(I_i)} = \frac{m(B)}{m(I_i)}$. In questo caso ci si può ricondurre al caso di catene di Markov (omogenee) come visto nel secondo capitolo.

Definizione 3.4. Sia $\tau : I \rightarrow I$ una trasformazione monotona a tratti e sia $P = \{I_i\}_{i=0}^n$ una partizione di I . Si definisce *matrice di incidenza indotta da τ e da Γ* , la matrice $A_\tau = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$, dove:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } I_j \subset \tau(I_i) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.6)$$

La definizione di *matrice di incidenza* è particolarmente utile per le trasformazioni di Markov. Infatti in questo caso se $a_{i,j} = 0 \Rightarrow I_j \cap \tau(I_i)$ contiene al massimo un punto (un *estremo* di I_j).

Definizione 3.5. Sia $\tau : I \rightarrow I$ una trasformazione monotona a tratti e sia $\Gamma = \{I_i\}_{i=0}^n$ una partizione di I . Si definisce *matrice di incidenza generalizzata indotta da τ e da Γ* , la matrice $A_\tau^* = (a_{i,j}^*)_{0 \leq i, j \leq 1}$, dove:

$$a_{i,j}^* = \begin{cases} 1 & \text{se } \exists k \geq 1; I_j \subset \tau^k(I_i) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.7)$$

3.3.1 Trasformazioni di Markov lineari a tratti e matrice di rappresentazione dell'operatore di Perron-Frobenius

Diamo ora una semplice rappresentazione dell'operatore di Perron-Frobenius P_τ , quando τ è una trasformazione di Markov lineare a tratti. Sia $\Gamma = \{I_i\}_{i=1}^n$ una partizione di I ed F l'insieme delle funzioni costanti a tratti su Γ . Si ha che: $f \in F \Leftrightarrow f = \sum_{i=1}^n \pi_i \chi_{I_i}$, per qualche costante π_i , per $i = 1, \dots, n$. Si osserva che f si può anche rappresentare con il vettore colonna $\pi^f = (\pi_1, \dots, \pi_n)^t$, dove t indica il trasposto. Si ha il seguente teorema:

Teorema 3.3.1. *Sia $\tau : I \rightarrow I$ una trasformazione di Markov lineare sulla partizione $\Gamma = \{I_i\}_{i=1}^n$ di I . Allora esiste una matrice B_τ , $(n \times n)$, tale che $P_\tau f = B_\tau^t \pi^f$, per ogni $f \in F$, dove π^f è il vettore colonna ottenuto da f .*

La matrice B_τ è nella forma $B_\tau = (b_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ dove $b_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{|\tau'_i|} = \frac{m(I_i \cap \tau^{-1}(I_j))}{m(I_i)}$, con $0 \leq i, j \leq n$, m misura di Lebesgue e $A_\tau = (a_{i,j})_{i,j}$ matrice di incidenza indotta da τ e da Γ .

Per la dimostrazione si veda [1].

Osservazione 21. La matrice B_τ si chiama *matrice indotta da τ* , è una matrice non negativa e per ogni $i = 1, \dots, n$ le sue entrate non nulle in ogni riga sono contigue e tutte uguali a $|\tau'_i|^{-1}$.

Osservazione 22. Ogni trasformazione τ determina in modo univoco la matrice B_τ , ma il viceversa non è vero. Su ogni I_i infatti τ_i può essere rimpiazzata con una trasformazione lineare che ha stesso dominio e intervallo di valori, ma con pendenza $-\tau'_i$. Allora esistono 2^n trasformazioni di Markov lineari a tratti che inducono la stessa matrice B_τ .

3.3.2 Autovettori della matrice indotta da una trasformazione di Markov lineare a tratti

Sia $\tau : I \rightarrow I$, trasformazione di Markov lineare a tratti e sia B_τ la matrice indotta da τ . Se B_τ ha come autovalore 1 allora il suo autovettore corrispondente, visto come funzione a scalini su I , è una densità invariante sotto l'azione di τ . In generale la matrice B_τ è stocastica ma non è necessariamente irriducibile. Se B_τ è una matrice irriducibile, allora per il teorema di Perron-Frobenius (1.3.1), B_τ ha 1 come autovalore di modulo massimo, con molteplicità algebrica e geometrica entrambe uguali a 1.

Teorema 3.3.2. *Sia $\tau : I \rightarrow I$ una trasformazione di Markov lineare a tratti e sia B_τ la matrice indotta da τ , allora la matrice B_τ ha 1 come autovalore di modulo massimo. Se B_τ è anche irriducibile allora l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica e geometrica pari a 1.*

Per la dimostrazione si veda [1].

Osservazione 23. Per il teorema precedente esiste sempre una funzione a gradini invariante sotto l'azione di P_τ , ovvero esistono sempre soluzioni non banali del sistema lineare di equazione $\pi B_\tau = \pi \Rightarrow$ esistono funzioni di densità invariante per ogni trasformazione di Markov τ , lineare a tratti. Quindi se τ ha un'unica densità invariante allora tale densità è costante a tratti nella partizione rispetto alla quale τ è una trasformazione di Markov.

Capitolo 4

Approssimazione del tasso di fuga per piccoli buchi

Il prossimo capitolo presenta un risultato di analisi funzionale di Keller e Liverani [6], dal quale ricaviamo una formula esplicita del primo ordine di espansione del tasso di fuga λ_ε del sistema aperto (visto come perturbazione del sistema chiuso), in funzione della dimensione ε del *buco*. Dato che il nostro scopo è quello di studiare gli eventi rari in generale, abbiamo applicato il risultato di Keller e Liverani, al caso in cui l'evento raro venga rappresentato dall'intervallo dei punti dello spazio delle fasi in cui certe osservabili f , assumono valore maggiore o uguale ad un dato numero reale a . Una volta trovata la relazione che lega misura dell'intervallo con il valore a , ci si può ricondurre al caso generale e sfruttare quanto fornito da Keller e Liverani. Abbiamo considerato in particolare il caso specifico di sistemi dinamici di Markov (mappe di Markov espandenti a tratti definite su $[0, 1]$ con buco) che, sebbene rappresentino i sistemi dinamici più semplici, vengono largamente usati nelle approssimazioni generali dei sistemi aperti e sono allo stesso grado rappresentativi dei sistemi caotici. Come spiegato in [7], adottiamo l'ottica per cui le osservabili o gli eventi fisicamente rilevanti sono rappresentati da

insiemi di misura di Lebesgue positiva, quindi consideriamo il caso particolare, ma non troppo, di mappe invarianti rispetto alla misura di Lebesgue, misure condizionali invarianti assolutamente continue rispetto alla Lebesgue e funzioni a variazione limitata sull'intervallo $[0, 1]$, dato che consideriamo classi di equivalenza di funzioni uguali quasi dappertutto, cioè uguali a meno di insiemi di misura nulla.

4.1 Perturbazione di operatori

Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale, reale o complesso e sia $(V', \|\cdot\|)$ il suo duale. Sia $\varepsilon \in E$, $E \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ un'insieme chiuso di parametri con $\varepsilon = 0$ punto di accumulazione ($\varepsilon = 0$ è il parametro corrispondente al sistema chiuso). Sia $P_\varepsilon : V \rightarrow V$ una famiglia di operatori lineari uniformemente limitati al variare di ε .

Assunzioni su P_ε

$\exists \lambda_\varepsilon \in \mathbb{C}, \varphi_\varepsilon \in V, \nu_\varepsilon \in V'$ e un operatore lineare $Q_\varepsilon : V \rightarrow V$ tali che:

$$1) \lambda_\varepsilon^{-1} P_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \otimes \nu_\varepsilon + Q_\varepsilon$$

$$2) P_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon \varphi_\varepsilon,$$

$$\nu_\varepsilon P_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \nu_\varepsilon,$$

$$Q_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) = 0 \text{ e } \nu_\varepsilon Q_\varepsilon = 0.$$

Queste condizioni implicano che: $\forall \varepsilon, \nu_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) = 1$.

$$3) \text{ Condizione di sommabilità: } \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\varepsilon \in E} \|Q_\varepsilon^n\| =: C_1 < \infty.$$

Questa condizione è soddisfatta solo se l'operatore P_ε ha un gap spettrale uniforme.

$$4) \nu_0(\varphi_\varepsilon) = 1 \text{ e } \sup_{\varepsilon \in E} \|\varphi_\varepsilon\| =: C_2 < \infty$$

5) Per controllare l'entità (taglia) della perturbazione:

$$\eta_\varepsilon := \|\nu_0(P_0 - P_\varepsilon)\| \rightarrow 0 \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0,$$

con $\nu_0(P_0 - P_\varepsilon) : V \rightarrow \mathbb{R}$ funzionale lineare.

6) Esiste una costante $C_3 > 0$ tale che:

$$\eta_\varepsilon \|(P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0)\| \leq C_3 |\Delta_\varepsilon|, \text{ con } \Delta_\varepsilon := \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0)).$$

NOTA: Le assunzioni 4) e 5) implicano che: $|\lambda_0 - \lambda_\varepsilon| \leq C_2 \eta_\varepsilon$:

$$\text{infatti } |\lambda_0 - \lambda_\varepsilon| = \|\nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_\varepsilon))\| \leq \|\nu_0(P_0 - P_\varepsilon)\| \|\varphi_\varepsilon\|$$

$$\leq \eta_\varepsilon \sup_\varepsilon \|\varphi_\varepsilon\| = \eta_\varepsilon C_2.$$

In particolare si ha:

$\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda_0$ per $\varepsilon \rightarrow 0$, dato che $|\lambda_0 - \lambda_\varepsilon| \leq \eta_\varepsilon C_2$ e $\eta_\varepsilon \rightarrow 0$ per $\varepsilon \rightarrow 0$ per la condizione 5).

Si è quindi pronti a dare il seguente risultato:

Teorema 4.1.1. *Assumiamo che valgano le assunzioni 1)-6), allora:*

a) $\exists \varepsilon_0 > 0$ tale che se $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $\Delta_\varepsilon = 0$ allora $\lambda_\varepsilon = \lambda_0$

b) Se $\Delta_\varepsilon \neq 0$, $\forall \varepsilon \in E$ sufficientemente piccolo e se \forall intero $k \geq 0$ esiste

$$q_k := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q_{k,\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\nu_0((P_0 - P_\varepsilon)P_\varepsilon^k(P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0))}{\Delta_\varepsilon} \text{ allora:}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_0 - \lambda_\varepsilon}{\Delta_\varepsilon} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_0^{-(k+1)} q_k$$

Dimostrazione. Definiamo $k_N := \sum_{n=N}^{\infty} \sup_\varepsilon \|Q_\varepsilon^n\|$ e diamo il seguente lemma.

Lemma 4.1.2. *Esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $\varepsilon \in E$ e per ogni $N \geq 0$:*

a) $|1 - \nu_\varepsilon(\varphi_0)| \leq C\eta_\varepsilon$

b) $\|Q_\varepsilon^N \varphi_0\| \leq Ck_N(\|(P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0)\| + |\lambda_0 - \lambda_\varepsilon|)$

Per la dimostrazione del lemma si veda [6].

Procediamo quindi con la dimostrazione del teorema.

Dato che $\lambda_0 - \lambda_\varepsilon = \lambda_0\nu_0(\varphi_\varepsilon) - \nu_0(\lambda_\varepsilon(\varphi_\varepsilon)) = \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_\varepsilon))$, allora per ogni $n > 0$ si ha che:

$$\nu_\varepsilon(\varphi_0)(\lambda_0 - \lambda_\varepsilon) = \nu_\varepsilon(\varphi_0)\nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_\varepsilon)).$$

Dato che $\Delta_\varepsilon = \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0))$ e per l'assunzione 1) del teorema si ha che $\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon = (\varphi_\varepsilon \otimes \nu_\varepsilon) + Q_\varepsilon$, allora vale:

$$\nu_\varepsilon(\varphi_0)\nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_\varepsilon)) =$$

$$\Delta_\varepsilon - \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\mathbb{I} - (\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon)^n)(\varphi_0)) - \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)Q_\varepsilon^n(\varphi_0)) =$$

$$\Delta_\varepsilon - \sum_{k=0}^{n-1} \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon)^k(\mathbb{I} - (\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon)(\varphi_0)) - \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)Q_\varepsilon^n(\varphi_0)) =$$

$$\Delta_\varepsilon - \sum_{k=0}^{n-1} \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon)^k(\mathbb{I} - (\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon)(\varphi_0)) - O(\eta_\varepsilon\|Q_\varepsilon^n(\varphi_0)\|),$$

dove l'ultima uguaglianza è vera dato che $\nu_0((P_0 - P_\varepsilon)Q_\varepsilon^n(\varphi_0)) = O(\eta_\varepsilon\|Q_\varepsilon^n(\varphi_0)\|)$.

Infatti: $\nu_0((P_0 - P_\varepsilon)Q_\varepsilon^n(\varphi_0)) \leq \|\nu_0((P_0 - P_\varepsilon)Q_\varepsilon^n(\varphi_0))\| \leq \|\nu_0(P_0 - P_\varepsilon)\| \|Q_\varepsilon^n(\varphi_0)\| =$

$\eta_\varepsilon \|Q_\varepsilon^n(\varphi_0)\| \leq C\eta_\varepsilon \|Q_\varepsilon^n(\varphi_0)\|$. Quindi si ha che:

$$\begin{aligned} & \Delta_\varepsilon - \sum_{k=0}^{n-1} \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon)^k(\mathbb{I} - (\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon))(\varphi_0)) - O(\eta_\varepsilon \|Q_\varepsilon^n(\varphi_0)\|) = \\ & \Delta_\varepsilon - \lambda_0^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon)^k(P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0)) + \\ & \lambda_0^{-1}(\lambda_0 - \lambda_\varepsilon) \sum_{k=1}^n \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon)^k(\varphi_0)) + O(k_n)(|\Delta_\varepsilon| + \eta_\varepsilon|\lambda_0 - \lambda_\varepsilon|). \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza è vera per i seguenti due motivi:

$$\begin{aligned} 1) \quad & - \sum_{k=0}^{n-1} \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon)^k(\mathbb{I} - \lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon)(\varphi_0)) = \\ & - \sum_{k=0}^{n-1} \{ \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon)^k(\varphi_0)) - \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon)^{k+1}(\varphi_0)) \} = \\ & - \sum_{k=0}^{n-1} \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon)^k(\varphi_0)) + \sum_{k=0}^{n-1} \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon)^{k+1}(\varphi_0)) = \\ & - \lambda_0^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon)^k(P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0)) + \\ & \lambda_0^{-1}(\lambda_0 - \lambda_\varepsilon) \sum_{k=1}^n \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon)^{k+1}(\varphi_0)). \end{aligned}$$

$$2) \text{ Inoltre vale: } O(\eta_\varepsilon \|Q_\varepsilon^n(\varphi_0)\|) = O(k_n)(|\Delta_\varepsilon| + \eta_\varepsilon|\lambda_0 - \lambda_\varepsilon|).$$

Infatti per il punto b) del lemma 3.2.2 si ha:

$$\begin{aligned} \eta_\varepsilon \|Q_\varepsilon^n(\varphi_0)\| & \leq \eta_\varepsilon C k_n (\|(P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0)\| + |\lambda_0 - \lambda_\varepsilon|) = \\ & C k_n (\eta_\varepsilon \|(P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0)\| + \eta_\varepsilon |\lambda_0 - \lambda_\varepsilon|) = \\ & O(k_n) (\|\nu_0(P_0 - P_\varepsilon)\| \|(P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0)\| + \eta_\varepsilon |\lambda_0 - \lambda_\varepsilon|) = \\ & O(k_n) (|\nu_0(P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0)| + \eta_\varepsilon |\lambda_0 - \lambda_\varepsilon|) = O(k_n)(|\Delta_\varepsilon| + \eta_\varepsilon |\lambda_0 - \lambda_\varepsilon|). \end{aligned}$$

Quindi ponendo $q_{k,\varepsilon} = \frac{\nu_0((P_0 - P_\varepsilon)P_\varepsilon^k(P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0))}{\nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0))} = \frac{\nu_0((P_0 - P_\varepsilon)P_\varepsilon^k(P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0))}{\Delta_\varepsilon}$, si

ottiene che:

$$\begin{aligned} & \Delta_\varepsilon - \lambda_0^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon)^k(P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0)) + \\ & \lambda_0^{-1}(\lambda_0 - \lambda_\varepsilon) \sum_{k=1}^n \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon)^k(\varphi_0)) + O(k_n)(|\Delta_\varepsilon| + \eta_\varepsilon|\lambda_0 - \lambda_\varepsilon|) = \\ & \Delta_\varepsilon(1 - \lambda_0^{-1} \sum_{k=1}^n \lambda_\varepsilon^{-k} q_{k,\varepsilon}) + O(\eta_\varepsilon)|\lambda_0 - \lambda_\varepsilon| \sum_{k=1}^n (\|\nu_\varepsilon(\varphi_0)\| \|\varphi_\varepsilon\| + \|Q_\varepsilon^k(\varphi_0)\|) + \\ & O(k_n)(|\Delta_\varepsilon| + \eta_\varepsilon|\lambda_0 - \lambda_\varepsilon|), \text{ dove l'ultima uguaglianza è vera dato che:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda_0^{-1}(\lambda_0 - \lambda_\varepsilon) \sum_{k=1}^n \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\lambda_\varepsilon^{-k}P_\varepsilon^k)(\varphi_0)) = \\ & O(\eta_\varepsilon)|\lambda_0 - \lambda_\varepsilon| \sum_{k=1}^n (\|\nu_\varepsilon(\varphi_0)\| \|\varphi_\varepsilon\| + \|Q_\varepsilon^k(\varphi_0)\|). \end{aligned}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} & \lambda_0^{-1}(\lambda_0 - \lambda_\varepsilon) \sum_{k=1}^n \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon)^k(\varphi_0)) \leq \\ & \lambda_0^{-1}|\lambda_0 - \lambda_\varepsilon| \sum_{k=1}^n \|\nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon)^k(\varphi_0))\| \leq \\ & \lambda_0^{-1}|\lambda_0 - \lambda_\varepsilon| \sum_{k=1}^n \|\nu_0((P_0 - P_\varepsilon))\| \|(\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon)^k(\varphi_0)\| = \end{aligned}$$

$\lambda_0^{-1}\eta_\varepsilon|\lambda_0 - \lambda_\varepsilon| \sum_{k=1}^n \|(\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon)^k(\varphi_0)\|$. Per l'assunzione 1) del teorema

sappiamo che: $\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon = (\varphi_\varepsilon \otimes \nu_\varepsilon) + Q_\varepsilon$, quindi si ha:

$$\begin{aligned} \lambda_0^{-1}\eta_\varepsilon|\lambda_0 - \lambda_\varepsilon| \sum_{k=1}^n \|(\lambda_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon)^k(\varphi_0)\| &= \lambda_0^{-1}\eta_\varepsilon|\lambda_0 - \lambda_\varepsilon| \sum_{k=1}^n \|(\varphi_\varepsilon \otimes \nu_\varepsilon) + Q_\varepsilon\|^k \leq \\ &C\eta_\varepsilon|\lambda_0 - \lambda_\varepsilon| \sum_{k=1}^n \|(\varphi_\varepsilon \otimes \nu_\varepsilon)(\varphi_0)\| + \|Q_\varepsilon^k(\varphi_0)\| = \\ &O(\eta_\varepsilon)|\lambda_0 - \lambda_\varepsilon| \sum_{k=1}^n |\nu_\varepsilon(\varphi_0)|\|\varphi_\varepsilon\| + \|Q_\varepsilon^k(\varphi_0)\|. \end{aligned}$$

Ora il lemma 3.2.2 ci permette di stimare gli errori in questo modo:

$$\begin{aligned} O(\eta_\varepsilon)|\lambda_0 - \lambda_\varepsilon| \sum_{k=1}^n |\nu_\varepsilon(\varphi_0)|\|\varphi_\varepsilon\| + \|Q_\varepsilon^k(\varphi_0)\| + O(k_n)(|\Delta_\varepsilon| + \eta_\varepsilon|\lambda_0 - \lambda_\varepsilon|) &= \\ O(\eta_\varepsilon)|\lambda_0 - \lambda_\varepsilon| \{ \sum_{k=1}^n |\nu_\varepsilon(\varphi_0)|\|\varphi_\varepsilon\| + \|Q_\varepsilon^k(\varphi_0)\| + O(k_n) \} + O(k_n)|\Delta_\varepsilon| &\leq \\ O(\eta_\varepsilon)|\lambda_0 - \lambda_\varepsilon| \{ \sum_{k=1}^n Ck_n\|\varphi_\varepsilon\| + Ck_n(\|(P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0)\| + |\lambda_0 - \lambda_\varepsilon|) + O(k_n) \} + \\ O(k_n)|\Delta_\varepsilon| &\leq O(\eta_\varepsilon)n|\lambda_0 - \lambda_\varepsilon| + O(k_n)|\Delta_\varepsilon|. \end{aligned}$$

Quindi per ogni $n > 0$ vale che:

$$(1 + O(\eta_\varepsilon))(\lambda_0 - \lambda_\varepsilon)(1 + nO(\eta_\varepsilon)) = \Delta_\varepsilon(1 - \lambda_0^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_\varepsilon^{-k} q_{k,\varepsilon}) + O(k_n)|\Delta_\varepsilon|.$$

Se $\Delta_\varepsilon = 0$ e η_ε è piccolo, allora $\lambda_0 = \lambda_\varepsilon$. Altrimenti se assumiamo che per ogni intero $k \geq 0$ esiste $q_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q_{k,\varepsilon}$, si ha:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_0 - \lambda_\varepsilon}{\Delta_\varepsilon} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_0^{-(k+1)} q_k + O(k_n), \text{ per ogni } n > 0.$$

Allora vale la tesi del teorema per al limite per $n \rightarrow \infty$.

□

4.1.1 Applicazione alle mappe espandenti a tratti su intervalli

Sia $I = [0, 1]$ e sia $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una mappa di Markov espandente, con un numero finito di tratti.

Osservazione 24. Come da definizione (3.3) questo implica che ogni tratto $\tau_i = \tau|_{I_i}$, è differenziabile in modo continuo in $\overset{\circ}{I}_i$ ma la derivata anche di un singolo ramo potrebbe essere non limitata.

Osservazione 25. Nel nostro caso dimostreremo quindi che l'operatore di Perron-Frobenius soddisfa le assunzioni 1), 2), 3) per $\varepsilon = 0$ (cioè per il sistema chiuso), con $\nu_0 = m$ (misura di Lebesgue), $\lambda_0 = 1$ e $0 \leq \varphi_0 \in BV(I)$.

L'osservazione alla base di questo discorso è che nel sistema chiuso (cioè per $\varepsilon = 0$) è soddisfatta la seguente disuguaglianza detta *disuguaglianza di Lasota-Yorke*:

$\exists r \in (0, 1), R > 0$ tale che per $\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in BV(I)$:

$$\|P_\varepsilon^n f\| \leq R(r^n \|f\| + \int |f| dm) \quad (4.1)$$

dove $\|f\|$ è la variazione di $f_{\mathbb{R}}$, definita come l'estensione di f sull'intera retta reale, ovvero:

$$f_{\mathbb{R}}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{su } [0, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.2)$$

Per la dimostrazione della disuguaglianza 4.1 si veda [10].

Osservazione 26. Per le applicazioni dimostreremo che la disuguaglianza 4.1 vale per costanti uniformi (r, R) e per tutti gli $\varepsilon \in E$.

4.1.2 Osservazioni sul tasso di fuga

Nell'ottica di trovare la probabilità di un evento raro, qualunque esso sia, consideriamo dunque un sistema dinamico aperto $([0, 1], \tau, m)$, con τ mappa di Markov espandente, lineare a tratti in cui il buco è rappresentato dall'intervallo $I_\varepsilon \subset [0, 1]$ di misura ε . L'operatore di Perron-Frobenius del sistema aperto P_ε , viene visto come una perturbazione, di dimensione ε , dell'operatore di Perron-Frobenius P del sistema chiuso. Nella prossima sezione infatti P_ε viene definito come l'operatore P che agisce sulla restrizione, a tutto l'intervallo $[0, 1]$ meno il buco, di una densità f , cioè che agisce sulla funzione $f\chi_{[0,1]\setminus I_\varepsilon}$; infatti la parte di massa che cade nel buco corrisponde alla parte di misura che viene persa e che poi, ad ogni iterazione, verrà rinormalizzata. Questa restrizione ha senso nel momento in cui siamo interessati, coerentemente al metodo Keller-Leverani, alla dinamica di $[0, 1] \setminus I_\varepsilon$, dato che i punti che cadono nel buco non vengono più considerati, come spiegato nel terzo capitolo (anche se questo per noi rappresenta solamente uno strumento matematico di cui ci serviamo per studiare gli eventi rari in generale, non solo i sistemi dinamici aperti). In quest'ottica quindi il nostro scopo è lo studio dell'autovalore principale λ_ε (che è strettamente legato al tasso di fuga), relativo all'autovettore φ_ε , dell'operatore P_ε e dimostrare che la misura di Lebesgue dell'insieme dei punti del sistema che dopo l' n -esima iterazione della mappa non sono ancora fuoriusciti, decade asintoticamente come λ_ε^n . Questa situazione viene descritta osservando che il tasso di fuga è $-\ln \lambda_\varepsilon$, secondo la stima asintotica per cui $m(\{x \in [0, 1]; \tau^k(x) \notin I_\varepsilon, \forall k = 0, 1, \dots, n-1\}) = o(\exp(-(-\ln \lambda_\varepsilon)n))$. Siamo infatti interessati al tasso di decadimento della densità 1, ovvero della densità della misura di Lebesgue, per poter dire che essa viene trasformata in misure la cui massa decade esponenzialmente con base λ_ε .

Applichiamo ora il teorema 4.1.1 al nostro problema di sistemi dinamici. In particolare consideriamo una mappa di Markov espandente a tratti su $[0, 1]$

che preserva la misura di Lebesgue.

4.1.3 Tassi di decadimento

Si consideri una situazione in cui valgano le seguenti assunzioni:

Sia $I = [0, 1]$ e sia $(I, \|\cdot\|)$ lo spazio $BV(I)$.

Sia $E = [0, \varepsilon_1]$ insieme chiuso di parametri.

Sia $\{I_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$ una famiglia di sottointervalli compatti di $[0, 1]$ tali che $I_\varepsilon \subseteq I_{\varepsilon'}$ se $\varepsilon \leq \varepsilon'$.

Si definisce ora la famiglia degli operatori P_ε , al variare di ε , in questo modo:

$P_\varepsilon(f) := P(f\chi_{([0,1]\setminus I_\varepsilon)})$. Vale: $(P_0 - P_\varepsilon)(f) = P_0(f\chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)})$. Infatti:

$$(P_0 - P_\varepsilon)(f) = P_0(f) - P_\varepsilon(f) = P(f\chi_{([0,1]\setminus I_0)}) - P(f\chi_{([0,1]\setminus I_\varepsilon)}) =$$

$$P(f(\chi_{([0,1]\setminus I_0)} - \chi_{([0,1]\setminus I_\varepsilon)})) = P_0(f\chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)}), \text{ dato che } [0, 1] \setminus I_0 \cap I_\varepsilon \setminus I_0 = I_\varepsilon \setminus I_0.$$

L'operatore P_0 coincide quindi con l'operatore di Perron-Frobenius P . Inoltre φ_ε è l'autovettore relativo all'autovalore principale λ_ε dell'operatore P_ε .

Come già detto, nel nostro caso consideriamo τ mappa di Markov espandente a tratti. Allora τ soddisfa la disuguaglianza 4.1, come viene dimostrato in [1]. Questo implica che τ ha un gap spettrale $\Rightarrow \tau$ è mixing.

Dimostriamo l'ultima implicazione.

Proposizione 4.1.3. *Un sistema dinamico è mixing se e solo se $\forall f, g \in L^2$, con $\int g dm = 0$ si ha: $\int (f \circ \tau^n) g dm \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.*

Dimostrazione. L'implicazione \Rightarrow è ovvia.

Dimostriamo quindi l'implicazione \Leftarrow . Per definizione sappiamo che un sistema dinamico è mixing se $\forall f, g \in L^2$ vale: $\int (f \circ \tau^n) g dm \rightarrow \int f dm \int g dm$.

Sia $m(g) = \int g dm$ la media di g . Posso sempre considerare $g' = g - m(g)$, quindi $m(g') = m(g - m(g)) = m(g) - m(g) = 0$. Allora:

$$\int (f \circ \tau^n) g' dm = \int (f \circ \tau^n)(g - m(g)) dm = \int (f \circ \tau^n) g dm - m(g) \int (f \circ \tau^n) dm.$$

Per l'invarianza si ha che $\int (f \circ \tau^n) dm = \int f dm = m(f)$, quindi:

$$\int (f \circ \tau^n) g dm - m(g) \int (f \circ \tau^n) dm = \int (f \circ \tau^n) g dm - m(g) \int f dm =$$

$$\int (f \circ \tau^n) g dm - m(g) m(f). \text{ Dato che per ipotesi } \int (f \circ \tau^n) g' dm \rightarrow 0, \text{ per ogni}$$

$f, g, \in L^2$, allora $\int (f \circ \tau^n) g dm - m(g)m(f) \rightarrow 0$, quindi
 $\int (f \circ \tau^n) g dm \rightarrow m(f)m(g)$, ovvero il sistema è mixing. \square

Dimostriamo ora che se esiste un gap spettrale, allora è soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente per avere un sistema mixing, appena dimostrata nella Proposizione 4.1.3.

Sia $X = BV([0, 1])$. Si consideri \hat{Q}_0 , cioè la proiezione sulla parte di spazio relativa a tutto lo spettro meno l'autovalore principale dell'operatore di Perron-Frobenius $P = P_0$. Se esiste un gap spettrale per l'operatore P , allora il raggio spettrale essenziale r di P (cioè il raggio spettrale dell'operatore di proiezione \hat{Q}_0) è strettamente minore al raggio spettrale ρ di P e vale $r < \rho \leq 1$. Si consideri $\Pi_0 = (\mathbb{I} - \hat{Q}_0)$, la proiezione sulla parte di spazio relativa all'autovalore principale dell'operatore di Perron-Frobenius. Si ha che $\forall g \in \hat{Q}_0(X): (\mathbb{I} - \hat{Q}_0)(g) = 0 \Rightarrow \hat{Q}_0(g) = P(g)$, quindi:

$\forall g \in L^2, m(g) = 0$ se e solo se $g \in Q_0(X)$ se e solo se $\Pi_0(g) = 0$.

$\|P^n g\| = \|Q_0^n g\| \leq \|Q_0^n\| \|g\| \leq r^n \|g\| \rightarrow 0$, per $n \rightarrow \infty$. Dunque si ha:

$\int (f \circ \tau^n) g dm \leq |\int (f \circ \tau^n) g dm| = |\int f P^n g dm| \leq \int |f P^n g| dm \leq \|f\|' \|P^n g\| \rightarrow 0$, per $n \rightarrow \infty$, dove $\|f\|'$ indica la norma duale.

Osservazione 27. Per la proprietà di idempotenza vale che

$Q_0 \Pi_0 = \Pi_0 Q_0 = 0$. Nel nostro caso $\varphi_0 \equiv 1$, quindi $\Pi_0(\varphi_0) \neq 0$, perché Π_0 è non nullo solo se agisce sull'autovettore relativo all'autovalore principale.

In particolare se consideriamo una curva γ semplice, chiusa e rettificabile intorno all'autovalore massimo ($\lambda_0 = 1$), si ha che:

$\Pi_0(1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} R(P, z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (P - z)^{-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (1 - z)^{-1} dz = 1$, per il teorema dei residui. Quindi $\hat{Q}_0(\Pi_0(1)) = \hat{Q}_0(1) = 0$ e allo stesso modo $\Pi_0(\hat{Q}_0(1)) = \Pi_0(0) = 0$.

Si può dimostrare il seguente lemma:

Lemma 4.1.4. *Vale che $Q_0 = \hat{Q}_0 P_0 \hat{Q}_0 = P_0 \hat{Q}_0$.*

Se $m(g) = 0$ allora $g \neq 1$ altrimenti $m(g) = 1$.

Allora l'operatore di Perron-Frobenius P_0 (che coincide con P) soddisfa le condizioni 1),2),3) per $\varepsilon = 0$ (sistema chiuso), $\nu_0 = m$ (misura di Lebesgue), $\lambda_0 = 1$ autovalore massimo dell'operatore di Perron-Frobenius, $0 \leq \varphi_0 \in BV(I)$.

N.B. Se $m(I_{\varepsilon_1})$ è sufficientemente piccola, vale il teorema 4.1.1 a condizione che sia soddisfatta la disuguaglianza 4.1 per $\varepsilon = 0$. In particolare le assunzioni 1), 2), 3), 4) valgono per $\varepsilon \in E$. L'assunzione 1) è vera per la decomposizione spettrale dell'operatore P_ε : $(\varphi_\varepsilon \otimes \nu_\varepsilon)$ è la proiezione sulla parte di spazio relativa all'autovalore principale di P_ε , Q_ε quella sulla parte di spazio relativa alla restante parte dello spettro (che comprende i punti isolati e il gap spettrale).

L'assunzione 2) è altrettanto soddisfatta per i seguenti motivi:

φ_ε è l'autovettore relativo all'autovalore principale λ_ε di P_ε quindi vale che $P_\varepsilon \varphi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \varphi_\varepsilon$.

Come già detto, l'operatore P_ε è una perturbazione dell'operatore P_0 , per ogni $\varepsilon \in E$. Dato che $\varphi_0 \equiv 1$ è l'autovettore relativo all'autovalore principale $\lambda_0 = 1$ di P_0 (che, come visto, è un punto isolato), la sua perturbazione φ_ε varia di poco e in modo tale che l'autovalore associato λ_ε resti minore o uguale a 1, perché $\|P_\varepsilon\| \leq 1$. Quindi dato che $\nu_0(\varphi_0) = 1$, se perturbiamo φ_0 in φ_ε , possiamo sempre intervenire moltiplicando o dividendo per una costante in modo tale che $\nu_0(\varphi_\varepsilon) = 1$. Se inoltre viene perturbato anche il funzionale ν_0 in ν_ε , si può sempre moltiplicare o dividere per una costante (opportunamente rispetto a quanto fatto sopra) per avere $\nu_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) = 1$, per ogni $\varepsilon \in E$.

Per la decomposizione dell'operatore P_ε nelle due "proiezioni" $(\varphi_\varepsilon \otimes \nu_\varepsilon)$ e Q_ε si ha che: $Q_\varepsilon = \lambda_\varepsilon^{-1} - (\varphi_\varepsilon \otimes \varphi_\varepsilon) \Rightarrow (\varphi_\varepsilon \otimes \nu_\varepsilon)Q_\varepsilon = Q_\varepsilon(\varphi_\varepsilon \otimes \nu_\varepsilon) = 0$. Allora restano verificate le condizioni: $Q_\varepsilon \varphi_\varepsilon = 0$ e $\nu_\varepsilon Q_\varepsilon = 0$ per ogni

$\varepsilon \in E$. Allo stesso modo si ha $\nu_\varepsilon P_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \nu_\varepsilon$, dato che $(\varphi_\varepsilon \otimes \nu_\varepsilon)$ è la proiezione sulla parte di spazio relativa all'autovalore principale λ_ε di P_ε , il cui autovettore associato è φ_ε .

L'assunzione 3) si verifica osservando che se P_ε ha un gap spettrale uniforme per ogni $\varepsilon \in E$, allora l'autovalore massimo di P_ε è isolato e in modulo minore o uguale di 1. In particolare quindi la proiezione Q_ε sulla porzione di spazio relativa alla restante parte dello spettro (cioè tutto lo spettro meno l'autovalore principale) è un operatore in norma minore di 1, ovvero il raggio spettrale di Q_ε è $r < 1$, per ogni $\varepsilon \in E$:

$\|Q_\varepsilon\| \leq r < 1 \Rightarrow \|Q_\varepsilon^n\| \leq r^n < 1, \forall n \Rightarrow \sup_{\varepsilon \in E} \|Q_\varepsilon^n\| < \infty$. Al crescere di $n \in \mathbb{N}$, $\|Q_\varepsilon^n\|$ decresce velocemente, quindi $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\varepsilon \in E} \|Q_\varepsilon^n\| < \infty$.

Inoltre sappiamo che $\varphi_\varepsilon \in BV(I)$ è una perturbazione del vettore φ_0 , quindi $\|\varphi_\varepsilon\|_{BV(I)} = \|\varphi_\varepsilon\|_1 + \inf_{\psi=\varphi_\varepsilon q.o.} V_I \psi$ è limitata al variare di ε . Allora $\sup_{\varepsilon \in E} \|\varphi_\varepsilon\| < \infty$, ovvero è soddisfatta anche l'assunzione 4) per ogni ε .

Verifichiamo ora le condizioni 5) e 6).

Si ha che $\Delta_\varepsilon = \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0)) = \nu_0 P_0(\varphi_0 \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)}) = \mu_0((I_\varepsilon \setminus I_0))$, ma nel nostro caso $\varphi_0 \equiv 1$ quindi $\mu_0 = \nu_0$. Ricordiamo che le condizioni 5) e 6) sono:

$$5) \quad \eta_\varepsilon = \|\nu_0(P_0 - P_\varepsilon)\| \rightarrow 0 \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$6) \quad \eta_\varepsilon \| (P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0) \| \leq C_3 |\Delta_\varepsilon|$$

Si ha che:

$$\begin{aligned} \eta_\varepsilon &= \|\nu_0(P_0 - P_\varepsilon)\| = \sup_{\|\psi\| \leq 1} \|\nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\psi))\| = \\ & \sup_{\|\psi\| \leq 1} \|\nu_0(P_0(\psi \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)}))\| \text{ per come è stato definito l'operatore } P_\varepsilon, \text{ quindi:} \\ & \sup_{\|\psi\| \leq 1} \|\nu_0(P_0(\psi \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)}))\| \leq \sup_{\|\psi\| \leq 1} \|\nu_0\| \|P_0(\psi \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)})\| \\ & \text{Dato che } \|P_0(\psi \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)})\| \leq \|\psi \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)}\| \text{ si ha:} \\ & \sup_{\|\psi\| \leq 1} \|\nu_0\| \|P_0(\psi \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)})\| \leq \|\nu_0\| \sup_{\|\psi\| \leq 1} \|\psi \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)}\|. \end{aligned}$$

Dato che la funzione

$$\chi_{I_\varepsilon \setminus I_0} = \begin{cases} 1 & \text{su } (I_\varepsilon \setminus I_0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.3)$$

è a valori costanti (o 0 o 1) su questo intervallo, si ha:

$$\|\nu_0\| \sup_{\|\psi\| \leq 1} \|\psi \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)}\| = \|\nu_0\| \sup_{\|\psi\| \leq 1} \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)} \|\psi\| = \|\nu_0\| \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)} \sup_{\|\psi\| \leq 1} \|\psi\|,$$

ma $\sup_{\|\psi\| \leq 1} \|\psi\| = 1$ quindi:

$$\|\nu_0\| \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)} \sup_{\|\psi\| \leq 1} \|\psi\| = \|\nu_0\| \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)} = \nu_0((I_\varepsilon \setminus I_0)) = |\lambda_0| \nu_0((I_\varepsilon \setminus I_0)),$$

dato che nel nostro caso $\lambda_0 = 1$.

Osservazione 28. In particolare, sfruttando la definizione di P_ε si ha:

$$|\Delta_\varepsilon| = |\nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0))| = |\nu_0(P_0(\varphi_0 \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)}))| \leq |\nu_0| |P_0(\varphi_0 \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)})|,$$

ma l'operatore di Perron-Frobenius è una contrazione quindi:

$$|\nu_0| |P_0(\varphi_0 \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)})| \leq |\nu_0| |\varphi_0 \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)}| = |\nu_0(\varphi_0 \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)})| = \int_{(I_\varepsilon \setminus I_0)} \varphi_0 d\nu_0 = |\lambda_0| \int_{(I_\varepsilon \setminus I_0)} \varphi_0 d\nu_0.$$

Osservazione 29. Per lo stesso motivo si può inoltre notare che:

$$\|(P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0)\| = \|P_0(\varphi_0 \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)})\| \leq \|\varphi_0 \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)}\|.$$

Riassumendo le ultime due osservazioni si ha quindi che:

$$\text{a) } |\Delta_\varepsilon| \leq |\lambda_0| \int_{(I_\varepsilon \setminus I_0)} \varphi_0 d\nu_0$$

$$\text{b) } \|(P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0)\| \leq \|\varphi_0 \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)}\|$$

La condizione 5) risulta quindi verificata dato che:

$$\nu_0((I_\varepsilon \setminus I_0)) \rightarrow 0 \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0.$$

(infatti per $\varepsilon \rightarrow 0$, l'intervallo I_ε si restringe a I_0 e vale:

$$\nu_0((I_\varepsilon \setminus I_0)) = (\nu_0(I_\varepsilon) - \nu_0(I_0)).$$

Verifico ora la condizione 6):

Per la disuguaglianza b) si ha:

$$\eta_\varepsilon \|(P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0)\| \leq \eta_\varepsilon \|\varphi_0 \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)}\| \leq |\lambda_0| \nu_0((I_\varepsilon \setminus I_0)) \|\varphi_0 \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)}\| = 1 \nu_0((I_\varepsilon \setminus I_0)) \|\varphi_0 \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)}\|, \text{ essendo } \eta_\varepsilon \leq |\lambda_0| \nu_0((I_\varepsilon \setminus I_0)).$$

Osservazione 30. Quindi si deduce che basta chiedere che:

$\|\varphi_0\|_{(I_\varepsilon \setminus I_0)} \leq C \frac{1}{\nu_0((I_\varepsilon \setminus I_0))} \int_{(I_\varepsilon \setminus I_0)} \varphi_0 d\nu_0$, perché venga soddisfatta la condizione 6), infatti:

$$\nu_0((I_\varepsilon \setminus I_0)) \|\varphi_0 \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)}\| \leq \frac{C \nu_0((I_\varepsilon \setminus I_0))}{\nu_0((I_\varepsilon \setminus I_0))} \int_{(I_\varepsilon \setminus I_0)} \varphi_0 d\nu_0 = C \int_{(I_\varepsilon \setminus I_0)} \varphi_0 d\nu_0 = C \nu_0(\varphi_0 \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)}) = C \lambda_0 \nu_0(\varphi_0 \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)}) = C \nu_0(P_0(\varphi_0 \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)})) = C \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0)) = C \Delta_\varepsilon,$$

dato che nel nostro caso $\lambda_0 = 1$.

Osservazione 31. Come spiegato in [6], la condizione 6) è sempre soddisfatta se $\inf_{\varphi_0|_{I_\varepsilon}} > 0$, e questo è vero dato che φ_0 è la densità della misura ν_0 (che è la misura di Lebesgue) ed è quindi la funzione costantemente uno.

Si consideri ora un punto generico $z \in I_\varepsilon$. Per $\varepsilon \rightarrow 0$, sappiamo che $m(I_\varepsilon \setminus I_0) \rightarrow 0$, quindi $m(I_\varepsilon) \rightarrow m(I_0)$. Assumiamo che $I_0 = \{z\}$ ($m(I_0) = 0$) e, per semplicità, che la mappa τ sia continua in z e che $\Delta_\varepsilon > 0$, infatti:

$$\Delta_\varepsilon = \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0)) = \nu_0(P_0(\varphi_0 \chi_{(I_\varepsilon \setminus I_0)})) = \mu_0(I_\varepsilon \setminus I_0) = \mu_0(I_\varepsilon) = \nu_0(I_\varepsilon),$$

dato che, come già detto, μ_0 coincide con ν_0 essendo $\varphi_0 \equiv 1$.

In particolare quindi $\Delta_\varepsilon \neq 0$.

Nel nostro caso i $q_{k,\varepsilon}$ restano dunque definiti come segue:

$$q_{k,\varepsilon} = \frac{\nu_0((P_0 - P_\varepsilon) P_\varepsilon^k (P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0))}{\Delta_\varepsilon} = \frac{\nu_0(I_\varepsilon \cap U_{k,\varepsilon})}{\nu_0(I_\varepsilon)},$$

dove l'insieme $U_{k,\varepsilon} := \tau^{-1}([0, 1] \setminus I_\varepsilon) \cap \dots \cap \tau^{-k}([0, 1] \setminus I_\varepsilon) \cap \tau^{-(k+1)}(I_\varepsilon)$ rappresenta i punti $x \in [0, 1]$, tali che fino alla k -esima iterazione restano in $[0, 1] \setminus I_\varepsilon$ e alla $(k+1)$ -esima iterazione cadono nel buco.

Definizione 4.1. Sia $([0, 1], \tau, m)$ un sistema dinamico. Un punto $z \in [0, 1]$ si dice *periodico di periodo p* , con $p \in \mathbb{Z}^+$ se $\tau^p(z) = z$, e per ogni k tale che $1 \leq k < p$ si ha $\tau^k(z) \neq z$.

Possiamo quindi considerare due casi:

1) Se z non è un punto periodico:

L'insieme $U_{k,\varepsilon} = \emptyset$ per ε abbastanza piccolo, quindi $I_\varepsilon \cap \emptyset = \emptyset$ e $\nu_0(\emptyset) = 0 \Rightarrow q_{k,\varepsilon} = \frac{\nu_0(\emptyset)}{\nu_0(I_\varepsilon)} = 0, \forall k$. Allora si ha che:

$$\forall k \ q_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q_{k,\varepsilon} = 0.$$

Nel nostro caso $\mu_0 = \nu_0$, quindi si ha che:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1-\lambda_\varepsilon}{\nu_0(I_\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1-\lambda_\varepsilon}{\varepsilon} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_0^{-(k+1)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q_{k,\varepsilon} = 1.$$

Allora possiamo ricavare la formula del primo ordine di espansione di λ_ε nel caso non periodico:

$$\lambda_\varepsilon = 1 - \varepsilon + o(\varepsilon)$$

2) Se z è un punto periodico di periodo p :

L'insieme $U_{k,\varepsilon} = \emptyset$ per ε abbastanza piccoli eccetto che per $k = p - 1$ quindi $U_{p-1,\varepsilon} \neq \emptyset$ per la periodicità, infatti:

$$U_{p-1,\varepsilon} = \tau^{-1}([0, 1] \setminus I_\varepsilon) \cap \dots \cap \tau^{-(p-1)}([0, 1] \setminus I_\varepsilon) \cap \tau^{-p}(I_\varepsilon), \text{ quindi}$$

$$I_\varepsilon \cap U_{p-1,\varepsilon} = I_\varepsilon \cap \tau^{-p}(I_\varepsilon) \text{ e } q_{(p-1),\varepsilon} = \frac{\nu_0(I_\varepsilon \cap U_{p-1,\varepsilon})}{\nu_0(I_\varepsilon)} = \frac{\nu_0(I_\varepsilon \cap \tau^{-p}(I_\varepsilon))}{\nu_0(I_\varepsilon)}.$$

Quindi per il teorema 4.1.1 si ha:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1-\lambda_\varepsilon}{\nu_0(I_\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1-\lambda_\varepsilon}{\varepsilon} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_0^{-(k+1)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q_{k,\varepsilon}.$$

Nel nostro caso $\lambda_0 = 1$, $\mu_0 = \nu_0$, e l'unico k che da contributo non nullo è $k = p - 1$ quindi:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1-\lambda_\varepsilon}{\varepsilon} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_0^{-(k+1)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q_{k,\varepsilon} = 1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q_{p-1,\varepsilon} =$$

$$1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\nu_0(I_\varepsilon \cap \tau^{-p} I_\varepsilon)}{\nu_0(I_\varepsilon)} = 1 - \frac{1}{|(\tau^p)'(z)|}.$$

Allora possiamo ricavare la formula del primo ordine di espansione di λ_ε nel caso di un punto periodico periodo p :

$$\lambda_\varepsilon = 1 - \varepsilon \left(1 - \frac{1}{|(\tau^p)'(z)|}\right) + o(\varepsilon)$$

Esempio 4.1. Consideriamo la doubling map, ovvero la mappa $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, definita da $\tau(z) = 2z \pmod{1}$ con densità $\varphi_0(z) = z$ e sia $z \in I_\varepsilon$ è un punto periodico di periodo $p > 0$.

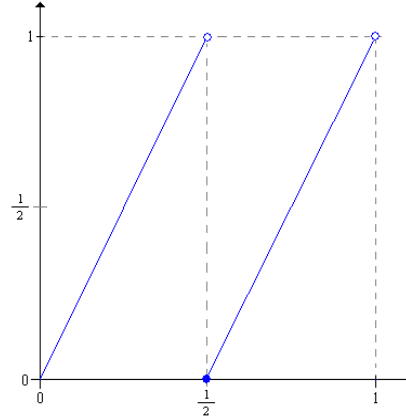


Figura 4.1: Doubling Map

Derivando la mappa, si ha: $\tau'(x) = 2 \Rightarrow (\tau^p)'(x) = 2^p \Rightarrow \frac{1}{|(\tau^p)'|} = 2^{-p}$.
 Quindi $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1-\lambda_\varepsilon}{\varepsilon} = (1 - 2^{-p})$. Allora la formula del primo ordine di espansione di λ_ε in funzione di ε è:

$$\lambda_\varepsilon = 1 - \varepsilon(1 - 2^{-p}) + o(\varepsilon)$$

Ora possiamo dunque dimostrare che la misura di Lebesgue viene trasformata in misure la cui massa decade esponenzialmente con base λ_ε . Infatti, per come è definito l'operatore P_ε nell'assunzione 1) del teorema 4.1.1, si ha che:

$$P_\varepsilon(\varphi_0) = \lambda_\varepsilon((\varphi_\varepsilon \otimes \nu_\varepsilon)(\varphi_0) + Q_\varepsilon(\varphi_0)) = \lambda_\varepsilon(\varphi_\varepsilon + Q_\varepsilon(\varphi_0)).$$

Iterando l'operatore P_ε e sfruttando le prime quattro assunzioni del teorema 4.1.1, si dimostra che la densità φ_0 viene trasformata in quella di misure la cui massa decade asintoticamente come λ_ε^n , con un errore che va come Q_ε^n .

Infatti si vede che:

$$P_\varepsilon^2(\varphi_0) = P_\varepsilon(P_\varepsilon(\varphi_0)) = \lambda_\varepsilon P_\varepsilon(\varphi_\varepsilon + Q_\varepsilon(\varphi_0)) = \lambda_\varepsilon[\lambda_\varepsilon \varphi_\varepsilon \nu_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) + \lambda_\varepsilon \varphi_\varepsilon \nu_\varepsilon Q_\varepsilon(\varphi_0) + \lambda_\varepsilon Q_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) + \lambda_\varepsilon Q_\varepsilon^2(\varphi_0)] = \lambda_\varepsilon^2 \varphi_0 + \lambda_\varepsilon^2 Q_\varepsilon^2(\varphi_0).$$

Iterando ancora si ottiene: $P_\varepsilon^n(\varphi_0) = \lambda_\varepsilon^n \varphi_0 + \lambda_\varepsilon^n Q_\varepsilon^n(\varphi_0)$.

Come abbiamo visto, per le proprietà spettrali di P_ε , sappiamo che l'operatore Q_ε è la proiezione di P_ε sulla parte di spazio relativa a tutto lo spettro meno l'autovalore principale, (cioè 1) di P_ε . Quindi, se r è il raggio spettrale di Q_ε , vale che $\|Q_\varepsilon\| \leq r < 1 \Rightarrow \forall n > 0, \|Q_\varepsilon^n\| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

Così $P_\varepsilon^n(\varphi_0)$ tende a zero per $n \rightarrow \infty$ e la decadenza è esponenziale, infatti: $P_\varepsilon^n(\varphi_0) \sim \exp(\ln(\lambda_\varepsilon^n))(\varphi_0) = \exp(-n(-\ln \lambda_\varepsilon))(\varphi_0) \rightarrow 0$, per $n \rightarrow \infty$, dove il tasso di fuga è $(-\ln \lambda_\varepsilon) > 0$, essendo $\lambda_\varepsilon < 1$.

4.1.4 Caso in cui il buco è definito da un'osservabile

Si consideri sempre il caso del nostro sistema dinamico $([0, 1], \tau, m)$, con $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mappa di Markov espandente e m misura di Lebesgue. Si consideri il punto iniziale x_0 distribuito uniformemente su $[0, 1]$ (dato che la misura di Lebesgue è uniforme). Sappiamo che l'orbita di x_0 è $\{\tau^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$, ovvero iterando la mappa si ha che:

$x_0, x_1 = \tau(x_0), x_2 = \tau(x_1) = \tau^2(x_0), \dots$. Si consideri ora un'osservabile $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, avente un unico asintoto verticale $x = x'$, con $x' \in [0, 1]$. Senza perdere di generalità assumiamo che $\lim_{x \rightarrow x'} f(x) = +\infty$. La sequenza delle osservazioni tramite f quindi è:

$$f(x_0), f(x_1) = f(\tau(x_0)), f(x_2) = f(\tau(x_1)) = f(\tau^2(x_0)), \dots$$

Definiamo ora l'evento raro come $E_a = \{x \in [0, 1] : f(x) \geq a\}$, con $a \in \mathbb{R}$ e ci proponiamo di trovare la distribuzione statistica della variabile aleatoria Y che indica il primo tempo in cui avviene l'evento E_a , cioè Y è la v.a. definita in questo modo: $Y = \min\{n ; \tau^n(x) \in E_a\}$.

Osservazione 32. È ovvio che se $a < b \Rightarrow E_a \supset E_b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, dato che $f(x) \geq b \Rightarrow f(x) \geq a$.

Per come è stato definito l'evento E_a , si deduce che $Y = \min\{n ; f(\tau^n(x_0)) \geq a\}$, quindi la *probabilità di sopravvivenza* fino all' n -esima iterazione sarà definita da:

$$\begin{aligned} \mu(Y \geq n) &= \mu\{x \in [0, 1]; \tau^k(x) \notin E_a, \forall k = 0, \dots, n-1\} = \\ &= \mu\{x \in [0, 1]; f(\tau^k(x)) < a, \forall k = 0, \dots, n-1\}. \end{aligned}$$

Il nostro obiettivo è quello di riportare il risultato di Keller e Liverani ([6]) in funzione di a e non di ε , in modo tale da avere la formula del primo grado di espansione del tasso di fuga in funzione di a e non della dimensione del buco.

Possiamo per esempio considerare i seguenti casi:

caso 1) Sia $\delta > 0$. Se $f(x) \sim |x - x'|^{-\delta}$, per $x \rightarrow x'$, per semplicità assumiamo che $f(x) = |x - x'|^{-\delta}$. Allora

$E_a = \{x \in [0, 1]; |x - x'|^{-\delta} \geq a\} = \{x \in [0, 1]; |x - x'| \leq a^{-\frac{1}{\delta}}\}$. Quindi in questo caso $m(E_a) \sim a^{-\frac{1}{\delta}}$. Per esempio se $\delta = 2$ e $x' = \frac{1}{2}$ si ha la seguente situazione:

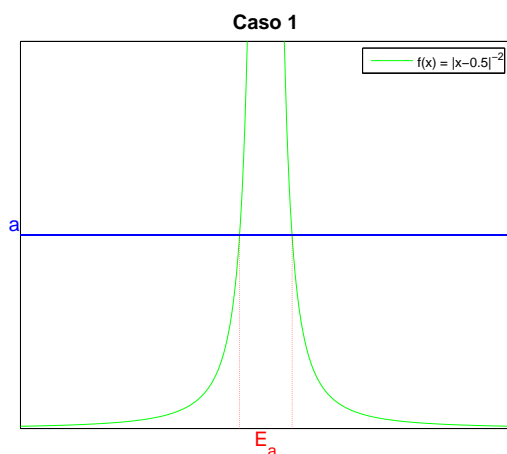


Figura 4.2: Caso 1

caso 2) Se $f(x) = |\ln |x - x'||$, per $x \rightarrow x'$, allora

$$E_a = \{x \in [0, 1]; |\ln |x - x'|| \geq a\} = \\ \{x \in [0, 1]; \ln |x - x'| \leq -a\} = \\ \{x \in [0, 1]; |x - x'| \leq e^{-a}\}.$$

Quindi il buco rimane definito come segue:

$E_a = \{x \in [0, 1]; |x - x'| \leq e^{-a}\}$ e la sua misura è $m(E_a) \sim e^{-a}$. Per esempio se $\delta = 2$ e $x' = \frac{1}{2}$ si ha la seguente situazione:

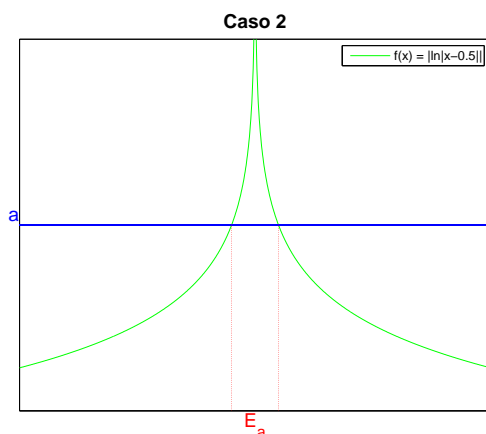


Figura 4.3: Caso 2

caso 3) Sia $\delta > 0$. Se $f(x) = |\ln|x - x'||^\delta$, per $x \rightarrow x'$, allora

$$E_a = \{x \in [0, 1]; |\ln|x - x'||^\delta \geq a\} =$$

$$\{x \in [0, 1]; |\ln|x - x'|| \geq a^{\frac{1}{\delta}} = \sqrt[\delta]{a}\} = \{x \in [0, 1]; \ln|x - x'| \leq -\sqrt[\delta]{a}\} =$$

$$\{x \in [0, 1]; |x - x'| \leq e^{-\sqrt[\delta]{a}}\}.$$

Quindi la misura del buco è $m(E_a) \sim e^{-\sqrt[\delta]{a}}$. Per esempio se $\delta = 2$ e $x' = \frac{1}{2}$ si ha la seguente situazione:

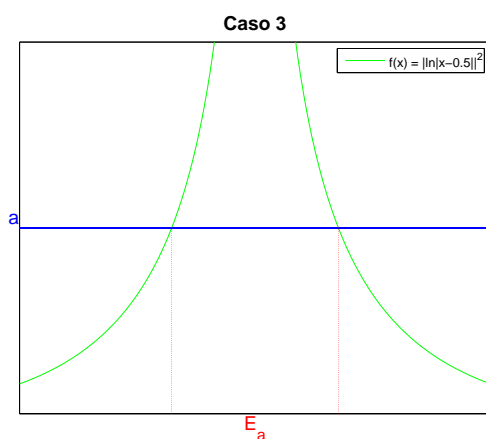


Figura 4.4: Caso 3

Si consideri ora $z \in E_a$. In tutti i quattro casi vale che $m(E_a) \rightarrow 0$, per $a \rightarrow +\infty$. Applichiamo il risultato di Keller e Liverani ([6]), per trovare la formula del primo grado di espansione del tasso di fuga in funzione del valore a .

a) Se $z \in E_a$ non è periodico, allora:

caso 1) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1-\lambda_\varepsilon}{a^{-\frac{1}{\delta}}} = 1$, da cui $1 - \lambda_\varepsilon \sim a^{-\frac{1}{\delta}}$, per $a \rightarrow +\infty$. Allora la formula del primo grado di espansione di λ_ε in funzione di a è:

$$\lambda_\varepsilon = 1 - a^{-\frac{1}{\delta}} + o(a^{-\frac{1}{\delta}})$$

caso 2) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1-\lambda_\varepsilon}{e^{-a}} = 1$, da cui $1 - \lambda_\varepsilon \sim e^{-a}$, per $a \rightarrow +\infty$. Allora la formula del primo grado di espansione di λ_ε in funzione di a è:

$$\lambda_\varepsilon = 1 - e^{-a} + o(e^{-a})$$

caso 3) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1-\lambda_\varepsilon}{e^{-\sqrt[\delta]{a}}} = 1$, da cui $1 - \lambda_\varepsilon \sim e^{-\sqrt[\delta]{a}}$, per $a \rightarrow +\infty$. Allora la formula del primo grado di espansione di λ_ε in funzione di a è:

$$\lambda_\varepsilon = 1 - e^{-\sqrt[\delta]{a}} + o(e^{-\sqrt[\delta]{a}})$$

b) Se $z \in E_a$ è un punto periodico di periodo p , allora:

caso 1) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1-\lambda_\varepsilon}{a^{-\frac{1}{\delta}}} = 1 - \frac{1}{|(\tau^p)'(z)|}$, da cui
 $1 - \lambda_\varepsilon \sim a^{-\frac{1}{\delta}}(1 - \frac{1}{|(\tau^p)'(z)|})$, per $a \rightarrow +\infty$. Allora la formula del primo grado di espansione di λ_ε in funzione di a è:

$$\lambda_\varepsilon = 1 - a^{-\frac{1}{\delta}}(1 - \frac{1}{|(\tau^p)'(z)|}) + o(a^{-\frac{1}{\delta}})$$

caso 2) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1-\lambda_\varepsilon}{e^{-a}} = 1 - \frac{1}{|(\tau^p)'(z)|}$, da cui
 $1 - \lambda_\varepsilon \sim e^{-a}(1 - \frac{1}{|(\tau^p)'(z)|})$, per $a \rightarrow +\infty$. Allora la formula del primo grado di espansione di λ_ε in funzione di a è:

$$\lambda_\varepsilon = 1 - e^{-a}(1 - \frac{1}{|(\tau^p)'(z)|}) + o(e^{-a})$$

caso 3) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1-\lambda_\varepsilon}{e^{-\delta\sqrt{a}}} = 1 - \frac{1}{|(\tau^p)'(z)|}$, da cui

$1 - \lambda_\varepsilon \sim e^{-\delta\sqrt{a}} \left(1 - \frac{1}{|(\tau^p)'(z)|}\right)$, per $a \rightarrow +\infty$. Allora la formula del primo grado di espansione di λ_ε in funzione di a è:

$$\lambda_\varepsilon = 1 - e^{-\delta\sqrt{a}} \left(1 - \frac{1}{|(\tau^p)'(z)|}\right) + o(e^{-\delta\sqrt{a}})$$

Bibliografia

- [1] A. Boyarsky, P. Góra, *Laws of chaos. Invariant measures and dynamical systems in one dimension. Probability and its Applications*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997.
- [2] G. Cristadoro, G. Knight, M. Degli Esposti, *Follow the fugitive: an application of the method of images to open systems*, J. Phys. A **46** (2013), no. 27, 272001, 8 pp.
- [3] G. Cristadoro, M. Degli Esposti, appunti del corso di *Sistemi dinamici*, Bologna, 2013.
- [4] M. Lenci, appunti del corso di *Fisica matematica applicata*, Bologna, 2012.
- [5] E. Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, Torino, 1997.
- [6] G. Keller, C. Liverani, *Rare events, escape rates and quasistationarity: some exact formulae*, J. Stat. Phys. **135** (2009), no. 3, 519-534.
- [7] M. F. Demers, L-S. Young, *Escape rates and conditionally invariant measures*, Nonlinearity **19** (2006), no. 2, 377-397.
- [8] D. Rhoads, *Quasi-compact operators in topological linear spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **25** (1970), 261-265.

-
- [9] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke, *Chaos. An introduction to dynamical systems*, Textbooks in Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [10] G. Keller, C. Liverani, *Stability of the spectrum for transfer operators*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **28** (1999), no. 1, 141-152.
- [11] C. Liverani, V. Maume-Deschamps, *Lasota-Yorke maps with holes: conditionally invariant probability measures and invariant probability measures on the survivor set*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **39** (2003), no. 3, 385-412.
- [12] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Reprint of the 1980 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [13] V. Paar, N. Pavin, *Bursts in average lifetime of transients for chaotic logistic map with a hole*, Physical Review E **55** (1997), 4112-4115.
- [14] L. Rey-Bellet, L-S. Young, *Large deviations in non-uniformly hyperbolic dynamical systems*, Ergodic Theory Dynam. Systems **28** (2008), no. 2, 587-612.

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare enormemente il professore Marco Lenci, per essere stata la mia guida verso la fine di un percorso così denso ed importante. Lo ringrazio per la professionalità, l'intelligenza e per la disponibilità che ha avuto nei miei confronti e perché mi ha aiutato a ritrovare quell'entusiasmo e quell'energia, che a tratti ho temuto di poter perdere.

Ringrazio inoltre Georgie Knight per il grande aiuto tecnico, per il supporto morale e per l'infinita pazienza che mi ha dimostrato in tutti questi mesi.