Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

ORIGINI DEL CALCOLO DELLE PROBABILITÁ E APPLICAZIONI ALLA VALUTAZIONE DEL PREZZO EQUO DI UN GUADAGNO INCERTO

Tesi di Laurea in Teoria delle Decisioni

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PAOLO NEGRINI

Presentata da:
FELETTI CHIARA

3^a Sessione
Anno Accademico 2013 - 2014

A Emanuele, alle nostre famiglie e ai miei nonni..

Indice

Introduzione

L'evoluzione della ricerca e dei sistemi di elaborazione, complice lo sviluppo di nuove piattaforme informatiche, ha reso possibile un progressivo affinamento delle tecniche previsionali e computazionali fino a livelli molto avanzati. Tuttavia, quando si parla di previsioni, ancora oggi l'incertezza assume un ruolo predominante ed imprescindibile, e ambire a prevedere esattamente il futuro é un lavoro da veggenti piuttosto che da studiosi. L'imprevedibilitá dei mercati finanziari é stata ampiamente dimostrata dalle vicissitudini turbolente degli ultimi anni e la crisi finanziaria ha messo in luce tutte le debolezze presenti nell'operativitá dei soggetti partecipanti, sia da un punto di vista previsionale (e, piú in generale, modellistico ex-ante), che da un punto di vista di ricerca delle soluzioni ex-post. Premesso ció, é peró nostro interesse specificare che con queste affermazioni non intendiamo screditare l'efficacia di modelli previsionali in grado di garantire risultati comunque validi, altrimenti il lavoro da noi svolto nelle pagine successive non avrebbe ragion d'esistere.

Sottolineando che il fine ultimo di questa trattazione é quello di porre le basi per la costruzione di un portafoglio valido, sia dal punto di vista della ragionevolezza dei risultati, che da un punto di vista rigoroso, il primo capitolo sará destinato ad un'analisi storica per stabilire cosa ha spinto l'uomo fin dai tempi antichi ad avvicinarsi al campo della probabilitá. Seguirá un capitolo in cui viene presentata la teoria delle decisioni in condizioni di incertezza, descrivendo le modalitá tramite le quali i nostri antenati si sono posti di fronte a problemi in condizioni di incertezza (analizzando la teoria dell'attesa matematica e la teoria dell'utilitá attesa), per poi studiare l'applicazione di queste teorie in campo finanziario. Mostreremo l'approccio di Harry Markowitz, esponendo il suo metodo media-varianza, grazie al quale si giunge alla costruzione di portafogli basandosi esclusivamente sui primi due momenti della distribuzione dei rendimenti dei titoli considerati (media e varianza, appunto), e poi andremo a criticarne i limiti dovuti alle ipotesi (di normalitá o comunque almeno di ellitticitá, secondo Chamberlain).

I modelli a supporto dell'attivitá di asset allocation molto spesso infatti presentano l'ipotesi di distribuzione gaussiana dei rendimenti, (condizione ormai ampiamente rigettata dalla letteratura finanziaria grazie a numerosi contributi, in quanto l'evidenza empirica ha dimostrato che le serie storiche finanziarie sono molto spesso caratterizzate da fenomeni di asimmetria non nulla e leptocurtosi) semplificando cosí notevolmente gli aspetti analitici e garantendo risultati sufficientemente validi. Anche se da un lato la presenza di queste ipotesi semplificatrici é necessaria per assicurarne la trattabilitá analitica, dall'altro l'utilizzo di un modello probabilistico di tipo gaussiano, con code mesocurtiche e asimmetria nulla (contrastante le reali condizioni dei mercati), comporta imprecisioni nella costruzione dei modelli, soprattutto perché si sottovaluterebbe la frequenza probabilistica delle realizzazioni estreme del campione (erroneamente considerate sinonimi di realizzazioni impossibili). Segue che l'obiettivo ultimo si é spostato nel tempo dalla ricerca della soluzione giusta, alla ricerca di quella meno erronea, compromesso che un qualunque modello previsionale deve accettare, per poter funzionare. La nostra idea é quella di proporre un metodo di costruzione di portafoglio basato sul superamento della condizione di normalitá dei rendimenti, approfondendo invece il discorso probabilistico e sviluppando uno studio basato sugli "higher moments" della distribuzione dei rendimenti, con l'obiettivo di specificare in maniera maggiormente precisa la loro struttura probabilistica. Si arriverá, nell'ultimo capitolo, alla soluzione dei paradossi di San Pietroburgo e di Allais grazie all'applicazione di questo metodo.

Capitolo 1

NASCITA DELLA PROBABILITÁ

1.1 UNA BREVE INTRODUZIONE

``La teoria delle probabilitá non é altro che il tentativo del genere umano di comprendere l'incertezza dell'universo, di definire l'indefinibile''
(A.D. ACZEL, divulgatore scientifico israeliano, laureato in matematica a Berkeley).

La vita quotidiana di tutti noi é costellata da considerazioni di natura probabilistica, anche se non necessariamente formalizzate come tali. In tutte le situazioni di indeterminatezza, si tende in sostanza a dare una "misura"dell'incertezza la quale, sia pur indicata con vari termini, esprime il significato intuitivo di probabilitá; ció comporta che anche lo stabilirne le regole possa, entro certi limiti, essere guidato dall'intuizione. Tuttavia, l'affidarsi completamente all'intuizione puó portare a conclusioni scorrette; vediamone alcuni esempi:

- Nel suo numero del 1 Novembre 1989, il quotidiano americano The Star-Democrat riportava la seguente affermazione: "secondo il padre, il pilota (morto mentre cercava di atterrare sulla nave USS Lexington) era certo che non sarebbe mai stato coinvolto in un incidente aereo perché il suo compagno di stanza era morto in uno di questi e la probabilitá era contraria".

- Nel bollettino mensile di una nota carta di credito, nel numero di settembre 2002 si poteva leggere: "da sempre [il circuito mondiale di sportelli Bancomat] offre un servizio ai massimi livelli in termini di qualitá,

> con una percentuale di transazioni con esito positivo pari al 99%". La percentuale di successi vantata non é poi cosí favorevole se si pensa che, usando la carta per un anno una volta alla settimana la probabilitá che almeno una transazione abbia esito negativo é pari a circa il 41%.

Per evitare di giungere a conclusioni scorrette, é necessario formalizzare il Calcolo delle probabilitá stabilendone le regole e i concetti in modo logico e rigoroso, facendo entrare in gioco la Matematica.

"Oggi pioverá?"
"L'esame andrá bene?"

La risposta a domande di questo tipo (ricorrenti nella vita di tutti i giorni) implica la conoscenza della probabilitá che uno o piú eventi si verifichino e le conseguenze associate alle modalitá dell'avverarsi di ciascuno di questi eventi si compongono in una pluralitá di rischi potenziali, a fronte dei quali un soggetto puó essere chiamato a prendere "decisioni razionali". Nella filogenesi della specie umana, la capacitá di prendere decisioni "corrette"ha rappresentato la sopravvivenza e, quindi, la salvezza della specie. Questa capacitá, variabile da individuo a individuo e da gruppo a gruppo, si é a sua volta evoluta per entrare nella scienza moderna ed essere trattata da diverse discipline, prima tra tutte dalla Teoria Statistica delle Decisioni.
Le prime tracce della moderna teoria delle decisioni si trovano giá nel XV e nel XVI secolo, quando matematici italiani, in particolar modo Pacioli (1494), Tartaglia (1556) e Cardano (1545), si interrogarono sul "problema delle parti"(problem of point) o "problema della divisione della posta in gioco".
La prima formulazione a noi nota proviene da un manoscritto anonimo del ′400, mentre la prima versione a stampa risale a Pacioli (1494, "Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalitá"); sebbene molti problemi su giochi aleatori siano stati risolti dai grandi matematici italiani nel XV e nel XVI secolo, la teoria generale sviluppata per la prima volta nella corrispondenza tra Pascal a Fermat del 1654 riguarda proprio il problema delle parti.
In queste lettere si puó scorgere infatti il germe della prima definizione di probabilitá esposta formalmente da Laplace solo nel 1812. La *definizione classica* (o *definizione classica di Laplace*) stabilisce che, dato un esperimento ben specificato ed un evento A tra quelli possibili per l'esperimento, se m é il numero dei possibili risultati che danno luogo all'evento A ed n quello di tutti i possibili esiti dell'esperimento, allora la probabilitá dell'evento A é il rapporto

$$\frac{m}{n} \tag{1.1}$$

purché tutti gli n risultati siano equiprobabili.
Data la tautologia presente nella definizione classica (per definire la probabilitá é necessario ipotizzare l'equiprobabilitá degli eventi) e data la sua applicabilitá solo a quegli esperimenti che presentano un numero finito di risultati, piú tardi von Mises propose un'altra definizione, detta *frequentista*, piú ampia rispetto alla precedente. Egli definí la probabilitá di un evento come il rapporto fra il numero di esperimenti in cui esso si é verificato e il numero totale di esperimenti eseguiti nelle stesse condizioni, essendo tale numero opportunamente grande:

$$P(A) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n_A}{n} \tag{1.2}$$

L'applicazione della definizione frequentista presuppone, quindi, che l'esperimento sia ripetibile indefinitamente ed in maniera indipendente; include anche la situazione degli eventi equiprobabili affrontata con la definizione classica, purché gli esperimenti siano riproducibili nel modo indicato. Nonostante le migliorie apportate nella definizione, anche la concezione frequentista presentava un limite: derivava da un postulato empirico del caso, cioé nasceva da una osservazione empirica a posteriori di un grande numero di esperimenti, e di conseguenza non risultava applicabile agli esperimenti che per loro natura non sono ripetibili.
Per questo motivo Ramsey, Savage e De Finetti introdussero un'altra definizione detta *soggettivista*:

``..la probabilitá che qualcuno attribuisce alla veritá - o al verificarsi - di un certo evento (fatto singolo univocamente descritto e precisato) altro non é che la misura del grado di fiducia nel suo verificarsi''.

La probabilitá perde cosí la caratteristica assoluta di numero intrinsecamente legato all'evento e per renderla operativa si puó modificarla riferendosi a delle scommesse, imponendo una condizione di equitá o coerenza:la probabilitá viene cosí definita come

``..il prezzo che un individuo ritiene equo pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica (e 0 altrimenti). Le probabilitá degli eventi devono essere attribuite in modo che non sia possibile ottenere con un insieme di scommesse una vincita certa o una perdita certa.''

É cosí evidente l'aspetto di equitá (non permette ad alcun scommettitore una vincita certa) e di coerenza (nel fissare le probabilitá non si deve permettere ad un altro di avvantaggiarsi, e se si giudica equo il prezzo si deve essere disposti ad accettare l'una o l'altra delle posizioni contrapposte nella scommessa di un evento). Nonostante il suo pregio di non richiedere né l'equiprobabilitá degli eventi né la riproducibilitá dell'esperimento, la critica piú immediata alla concezione soggettivista fu che essa avrebbe prodotto risultati diversi da soggetto a soggetto pur di fronte allo stesso esperimento, proprio perché basata su valutazioni personali di un individuo circa il verificarsi di un evento incerto. Si é sviluppata nel tempo una lunga discussione, spesso polemica, tra gli "oggettivisti"(che hanno accusato questa impostazione di rendere impossibile la comunicazione tra persone con diverse valutazioni di probabilitá, e quindi di minare alla base lo sviluppo della scienza) e i "soggettivisti"(che invece denunciavano l'illusorietá della pretesa oggettivitá delle altre impostazioni).
Nacque quindi la definizione *assiomatica* da parte di Kolmogorov[1] ("Grundbegriffe der Wahrsc heinlichkeitsrechnung", ossia "Concetti fondamentali del calcolo delle probabilitá", 1933), che affermava che la probabilitá é un numero compreso tra 0 (evento impossibile) e 1 (evento certo) che soddisfa i tre assiomi di Kolmogorov; in altre parole, preso S lo spazio campionario, C la classe degli eventi (opportuno sottoinsieme di $P(S)$) e P una funzione reale definita su C, P si chiama funzione di probabilitá e $P(A)$ probabilitá dell'evento A, se e solo se

1. Per ogni evento A in C: $P(A) > 0$

2. Per l'evento certo S in C: $P(S) = 1$

3. Per ogni numero di eventi mutuamente esclusivi $A_1, A_2, ...$, in C

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ...) = P(A_1) + P(A_2) + ... \tag{1.3}$$

Questo assegna delle regole per il calcolo delle probabilitá senza peró affrontare il problema di assegnare i valori a $P(.)$. Prima di procedere con la tesi, ripercorriamo i passi degli studiosi del XVI secolo che hanno preceduto l'assiomatizzazione di questa scienza nascente.

[1]Kolmogorov da' solo una assiomatizzazione della teoria della misura, senza tuttavia affrontare il problema di come valutare $P(.)$

1.2 CARDANO

Nel 1525 Gerolamo Cardano, uno dei piú importanti algebristi noto anche per la passione per il gioco, scrive “De Ludo Aleae”, opera riguardante la teoria della probabilitá riferita ai dadi e alle carte, il quale sará motivo di studio anche per Galileo Galilei e Pascal. I primi 8 capitoli presentano brevemente i rischi e i possibili benefici circa il giocare d’azzardo; in particolare nel capitolo 6 presenta il Principio Fondamentale del Gioco d’Azzardo:

`‘‘...il principio fondamentale é l’equitá, che dovrebbe applicarsi ai giocatori e agli spettatori, al denaro e al luogo, ai fritilli[2] e al dado stesso. Qualora ci si allontani da questa equitá a tuo svantaggio sei stolto, a tuo favore, ingiusto.’’`

Nei capitoli successivi l’opera di Cardano tratta il gioco dei dadi, analizzando le probabilitá di ottenere almeno un 1 (un “asso”) con un dado, poi con due, infine con tre; successivamente affronta il problema ben piú complesso delle somme dei valori. La trattazione sui dadi finisce al capitolo 15, per poi passare alla trattazione sui giochi di carte.

- UN DADO (EQUIPROBABILITÁ)
  Nel capitolo 9 Cardano, dato che ogni dado ha 6 facce, afferma:

  `‘‘in sex revolutionibus singula puncta evenire deberent’’`

  (su sei lanci dovrebbero verificarsi tutti i singoli valori), evidenziando il principio dell’equiprobabilitá dei valori nel lancio ($p = \frac{1}{6}$) dovuta alla simmetria del dado stesso; interessante é il fatto che scriva `‘‘deberent’’`facendoci capire che nota che nella realtá spesso succede che un numero si presenti piú volte e un altro non compaia mai.
  In queste parole si puó quasi intravedere una bozza della legge dei grandi numeri, dato che proprio facendo molte giocate le possibilitá che esca un particolare valore si avvicina sempre piú a $\frac{1}{6}$ delle giocate totali; si dovranno peró aspettare almeno due secoli perché Bernoulli formuli esplicitamente tale intuizione.
  Introduce inoltre i concetti di “circuito”e “equalitá”, riferendosi rispettivamente al numero dei possibili risultati (il circuito é quello che noi oggi chiamiamo “dimensione dello spazio campione”) e alla previsione:

[2] il fritillo era il bussolotto usato per il lancio dei dadi

poiché un dato punto (faccia del dado) in teoria dovrebbe uscire una volta all'interno del "circuito"(6 lanci), esso potrebbe uscire ugualmente ("equalmente") al primo, al secondo, al terzo lancio.
Sempre nello stesso capitolo suggerisce che la probabilitá che esca un numero dispari é uguale a quella che esca un numero pari, sottintendendo la definizione di probabilitá come rapporto

$$\frac{casi\ \ favorevoli}{casi\ \ possibili}.$$

Se infatti consideriamo 1,3,5 come valori favorevoli e 2,4,6 come valori avversi, 3 valori favorevoli su 6 possibili ci danno $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ delle probabilitá che esca un numero dispari e simmetricamente $\frac{1}{2}$ che esca un numero pari. L'uguaglianza (equalitá) viene dunque definita come "la metá di un evento (circuito in questo caso) che ha tante probabilitá di verificarsi quante ne ha la sua metá complementare". Si nota subito che l'intero spazio delle possibilitá é $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, ovvero che banalmente il complementare di un evento con probabilitá p é un evento con probabilitá $1 - p$.

> ''...in un gioco equo il numero di casi favorevoli e sfavorevoli dovrebbe essere lo stesso cosí come le possibilitá per ogni giocatore $\frac{1}{2}$.''

(Prof. Oystein Ore in "Cardano, The gambling scholar")

- DUE DADI (TEOREMA DEL PRODOTTO LOGICO O DELLE PROBABILITÁ COMPOSTE)
  Nel capitolo 11 Cardano affronta il caso dei 2 dadi notando inizialmente che il numero dei casi possibili diventa 36, ma invece che ottenere tale risultato dal prodotto $36 = 6 \cdot 6$ (6 casi possibili per il primo dado e 6 per il secondo), lo ricava dalla somma $6 + 15 + 15 = 36$.

  > ''ci sono sei tiri possibili che presenteranno coppie uguali di punti , e quindici che presenteranno coppie diverse che raddoppiate portano a trenta, cosicché ci sono trentasei lanci totali.''

  Rappresentando i risultati con coppie ordinate, osserva infatti che 6 sono i punteggi simili (le coppie $(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)(5,5)(6,6)$) e 15 i punteggi dissimili (le coppie $(1,2)$ $(1,3)$ $(1,4)$ $(1,5)$ $(1,6)$ $(2,3)$ $(2,4)$ $(2,5)$ $(2,6)$ $(3,4)$ $(3,5)$ $(3,6)$ $(4,5)$ $(4,6)$ $(5,6)$), a cui si sommano altri 15 punteggi dissimili gemelli (le coppie precedenti in cui si inverte l'ordine delle componenti). Si cimenta poi nel calcolo della probabilitá di ottenere un determinato punto ("asso") con almeno un dado nei calchi (lanci) di due dadi:

> ``il numero di lanci che contengono almeno un asso é undici in un circuito di 36 (poco piú della metá della paritá o equitá), e in due calchi di due dadi la probabilitá di avere un doppio asso é maggiore di $\frac{1}{6}$ ma minore di $\frac{1}{4}$ della paritá (o equitá)''

Per calcolare la probabilitá di ottenere almeno un 1 con il tiro di due dadi, intuendo una certa simmetria combinatoria sfrutta il problema complementare e nota che la probabilitá di ottenere almeno un 1 é complementare alla probabilitá di non ottenerne neanche uno. Se con un dado tale probabilitá risulta essere $\frac{5}{6}$ (5 valori su 6 sono differenti dal numero 1), con due dadi la probabilitá é semplicemente $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$, da cui si puó dedurre che la probabilitá di ottenere almeno un 1 é $1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$.

Non é chiaro quale ragionamento abbia seguito nell'analizzare il duplice lancio del dado, anche se quasi sicuramente possiamo escludere che l'abbia dedotto provando tutte le disposizioni (sarebbero $36\cdot 36 = 1296$!!). Sembra piú verosimile che sia partito dal risultato precedente per un unico lancio di due dadi e che anche nel caso di due lanci scorrelati, sempre per il prodotto logico, abbia calcolato la probabilitá moltiplicando $\frac{11}{36}\cdot\frac{11}{36}=\frac{121}{1296}$, in cui 121 effettivamente é minore di $\frac{1}{4}$ dell'equitá (ossia di $\frac{1296}{2}\cdot\frac{1}{4}=162$) e maggiore di $\frac{1}{6}$ dell'equitá (ossia di $\frac{1296}{2}\cdot\frac{1}{6}=108$). La probabilitá é compresa dunque tra $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{12}$

- TRE DADI

  Nel capitolo 12 Cardano si spinge ancora oltre e deduce correttamente che con tre dadi le possibilitá (disposizioni) diventano 216, da cui l'equitá risulta essere $\frac{216}{2}=108$. Commette peró un errore nel calcolare la probabilitá di ottenere almeno un 1, trovando 108 casi favorevoli invece che 91, numero riportato solo piú avanti:

``...su 216 possibili risultati, ogni singola faccia si troverá in 108 di essi''

Probabilmente, avrá pensato che, dato che per il lancio di un singolo dado un "asso" ha probabilitá $\frac{1}{6}$ di presentarsi, in tre lanci la probabilitá diventa $\frac{1}{2}$ (3 volte $\frac{1}{6}$), risultando favorevoli 108 risultati su 216 possibili. Nonostante l'abbaglio, piú avanti riporta il valore corretto, ma ancora una volta Cardano non ci spiega come ottiene il risultato; possiamo ipotizzare che abbia usato di nuovo il metodo precedentemente illustrato, partendo dal ragionamento che l'uscita di almeno un 1 é l'evento complementare di non ottenerne nessuno, calcolandone poi la probabilitá con il prodotto $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$. Grazie a questo risultato riesce quindi a calcolare la probabilitá di ottenere almeno un uno, ossia $1 - p = \frac{216}{216} - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$, valore leggermente inferiore alla metá.

- SOMMA DI PUNTI

  Cardano infine nei capitoli 13 e 14 affronta per primo il problema ancor piú complesso della somma di punti (risultato ottenuto sommando i numeri usciti nel lancio di piú dadi) e lo fa con ottimi risultati. Ad esempio afferma che con due dadi si puó ottenere 10 con le coppie ordinate di valori $(5,5)$ e $(4,6)$, dove si accorge anche che la seconda coppia, avendo il reciproco $(6,4)$, ha una probabilitá di uscire pari a 3 su 36 ossia $\frac{1}{12}$, invece che $\frac{1}{36}$.

  ``nel caso di due dadi, i punteggi 12 e 11 possono essere ottenuti rispettivamente come $(6,6)$ e $(6,5)$. Il punteggio 10 invece $(5,5)$ e $(6,4)$ ma quest'ultimo si puó presentare anche come $(4,6)$ cosí che la gamma di possibilitá per ottenere un 10 sará $\frac{1}{12}$ del circuito e $\frac{1}{6}$ dell'equitá''

  Ancora piú notevole é il risultato con tre dadi e molto probabilmente lo stesso Galileo Galilei lo utilizzerá per risolvere un problema niente affatto banale (almeno a quei tempi) che assillava i giocatori dell'epoca. Cardano riassume infatti le probabilitá di uscita per ogni numero e comprendendone la simmetria li dispone a coppie, giungendo alla conclusione che il 9 ed il 12 hanno la stessa probabilitá di uscire, pari a $\frac{25}{216}$.

1.3 GALILEO

Galileo Galilei all'inizio del ′600, su richiesta di un accanito giocatore, il Granduca di Toscana, analizzó i vari casi possibili nel gioco della zara per poter arrivare a una serie di risultati piú probabili e quindi piú favorevoli al giocatore. Per poter seguire i suoi ragionamenti, spieghiamo innanzitutto che la zara é un gioco di antiche origini (presumibilmente medievali) che consiste nel lanciare tre dadi e nell'indovinare la somma dei tre numeri che usciranno. Il nome stesso "Zara"viene dal volgare arabo *sar* o *zar* (dado) da cui verosimilmente deriva anche azzardo (preceduto dall'articolo *al-zar* o *al-sahr*, lett. il gioco dei dadi). I giocatori piú incalliti si erano accorti giá prima di Galileo che le terne 1.1.1 e 6.6.6 erano sfavorevoli e in alcune versioni addirittura non potevano essere giocate (si gridava zara in concomitanza di tali triplette); i piú esperti avevano notato inoltre che i numeri piú probabili erano quelli prossimi alla media, ovvero 9,10,11,12, anche se non capivano perché dalle loro osservazioni sembrava che l'11 fosse piú probabile del 12 nonostante sia l'11 che il 12 fossero ottenibili con 6 triplette ciascuno:

- 11 si ottiene con 1.5.5, 1.4.6, 2.4.5, 2.3.6, 3.3.5, 4.4.3 (6 triplette)
- 12 si ottiene invece con 1.5.6, 2.5.5, 2.4.6, 3.4.5, 3.3.6, 4.4.4 (anch'esso 6 triplette)

Galileo mostró che l'osservazione era corretta (l'11 é in effetti piú probabile del 12) ma il ragionamento no:

> ``.... Tuttavia ancorché il 9 e il 12 in altrettante maniere si compongano in quante il 10 e l'11 perloché d'equal uso devriano esser reputati; si vede non di meno, che la lunga osservazione ha fatto dai giocatori stimarsi piú vantaggioso il 10 e l'11 che il 9 e il 12''

e inizió proprio la sua opera affermando

> ``Che nel gioco dei dadi alcuni punti sieno piú vantaggiosi di altri, vi ha la sua ragione assai manifesta, la quale é, il poter quelli piú facilmente e piú frequentemente scoprirsi, che questi, il che dipende dal potersi formare con piú sorte di numeri''

É verosimile che Galileo si fosse giá avvicinato al problema avendo letto gli scritti in cui Cardano si occupava proprio di questo, nonostante la pubblicazione assai tardiva dell'opera (1633) non la rese meritevole di attenzione ai suoi contemporanei.

``Che il 9 e il 10 si formino (e quel che di questi si dice intendasi de' lor sossopri 12 e 11) si formino dico con pari diversitá di numeri, é manifesto; imperocché il 9 si compone con 1.2.6, 1.3.5, 1.4.4, 2.2.5, 2.3.4, 3.3.3 che sono sei triplicitá, ed il 10 con 1.3.6, 1.4.5, 2.2.6, 2.3.5, 2.4.4, 3.3.4 e non in altri modi, che pur son sei combinazioni. Ora io per servire a chi m'ha comandato, che io debba produr ció, che sopra tal difficoltá mi sovviene, esporró il mio pensiero, con isperanza, non solamente di scorre questo dubbio, ma di aprire la strada a poter puntualissimamente scorger le ragioni, per le quali tutte le particolaritá del giuoco sono state con grande avvedimento e giudizio compartite ed aggiustate.''

Da "Sopra le scoperte dei dadi", Galileo Galilei (1612)

Come si evince da queste righe, Galileo sapeva che molti risultati sono simmetrici, come ad esempio il 9 e il 12, il 10 e l'11, concludendo che parlare di una coppia o dell'altra sarebbe stato equivalente. Giá Cardano prima di lui aveva osservato che:

- il minimo punteggio possibile con tre dadi é 3, il massimo 18 e che i numeri piú probabili sono quelli piú prossimi al valor medio ossia 10 e 11, i piú vicini a $\frac{3+18}{2} = 10,5$;
- con 2 dadi il minimo punteggio é 2, il massimo é 12, e il risultato piú probabile é $\frac{2+12}{2} = 7$;
- analogamente per 4 dadi il minimo é 4, il massimo é 24 e il risultato piú probabile é $\frac{4+24}{2} = 14$.

Piú in generale quindi, era noto che con n dadi il minimo punteggio era n, il massimo era $6n$ e il valore piú probabile sarebbe stato:

- Per n pari (un solo valore piú probabile): $V = \frac{7n}{2}$
- Per n dispari (due valori piú probabili): $V_1 = \frac{7n+1}{2}$; $V_2 = \frac{7n-1}{2}$

``Ma perché i punti dei tiri di tre dadi non sono se non 16, cioé 3, 4, 5 sino a 18, tra i quali si hanno a compartire le dette 216 scoperte, é necessario, che ad alcuni di essi ne tocchino molte; e se noi ritroveremo quante ne toccano per `ciascheduno, averemo aperta la strada di scoprire quanto cerchiamo, e basterá fare tale investigazione dal 3 sino al 10 perché quello che converrá a uno di questi numeri, converrá ancora al suo sossopra.''`

Galileo chiarí fin da subito che le triplette non coprivano tutte le 216 configurazioni possibili e ribadí che era sufficiente fare lo studio da 3 a 10, risultando simmetrici gli altri risultati:

- Le triplette composte da 3 numeri uguali (1.1.1, 2.2.2 ecc.) si possono ottenere in un solo modo.
- Le triplette composte da 2 numeri uguali (ad esempio 1.1.2) si possono ottenere in 3 modi diversi: il numero diverso ottenuto con il primo dado, con il secondo oppure il terzo: 1.1.2; 1.2.1; 2.1.1
- Le triplette composte da 3 numeri differenti (ad esempio 1.3.4) si possono ottenere in 6 modi diversi: 1.3.4; 1.4.3; 3.4.1; 3.1.4; 4.1.3; 4.3.1

Osservando questo, Galileo si accorse ad esempio che, sebbene il 4 potesse essere ottenuto solo con una tripletta (1.1.2) come il 3 (1.1.1) il 4 risultava 3 volte piú probabile del 3. Come sintesi del suo lavoro Galileo riportó una tabella simile a questa:

10		9		8		7		6		5		4		3	
6.3.1	6	6.2.1	6	6.1.1	3	5.1.1	3	4.1.1	3	3.1.1	3	2.1.1	3	1.1.1	1
6.2.2	3	5.3.1	6	5.2.1	6	4.2.1	6	3.2.1	6	2.1.1	3				
5.4.1	6	5.2.2	3	4.3.1	6	3.3.1	3	2.2.2	1						
5.3.2	6	4.4.1	3	4.2.2	3	3.2.2	3								
4.4.2	3	4.3.2	6	3.3.2	3										
4.3.3	3	3.3.3	1												
27		25		21		15		10		6		3		1	

Nella prima riga inserí la somma dei risultati dei tre dadi (riportando solo i numeri da 10 a 3 ed evitando gli altri in quanto speculari, cambiando solo le triplette) e in quelle successive le varie combinazioni per le triplette,

per poi arrivare a sommare il numero di triplette nell'ultima riga. Si nota effettivamente che il 10 ha $\dfrac{27}{216}$ di probabilitá di uscire contro i $\dfrac{25}{216}$ del 9; inoltre le possibilitá risultano essere $27+25+21+15+10+6+3+1=108$ e, sommandole alle speculari, otteniamo proprio $108+108=216$
Sebbene parole come "probabilitá"ancora non vengano direttamente usate, questa idea é espressa nell'utilizzo di parole come "vantaggio"o "svantaggio". La Matematica Combinatoria e il riconoscimento di un'equipossibilitá di eventi singoli (ottenuta sia riconoscendo simmetrie del dado o dall'osservazione dei risultati) formeranno la base per la nascitura scienza della Probabilitá.
Non si pensi peró che sia questo il maggior contributo di Galileo a questa nuova scienza: interessanti sono anche i contributi da lui apportati sempre alla teoria della probabilitá riguardo al problema degli errori di misurazione, legati prevalentemente ai suoi studi astronomici.

1.4 PASCAL E FERMAT

Come giá precedentemente accennato, tra il XV e il XVI secolo grandi matematici italiani quali Pacioli, Cardano e Tartaglia si occuparono del “problema delle parti”o “problem of point”.Questo problema riguarda la suddivisione della posta fra due (o piú) giocatori di “uguale valore”(ossia che hanno la stessa probabilitá di guadagnare un punto) costretti a interrompere una partita prima che uno dei due giocatori abbia totalizzato il numero di punti necessari a vincerla. In riferimento a due giocatori A e B, i dati del problema sono:

- il numero n di punti necessari per vincere la partita;
- i numeri a e b di punti che hanno totalizzato, rispettivamente, A e B al momento dell’interruzione della partita.

Tali dati possono essere riassunti con la notazione $[n : a; b]$ ove a e b sono numeri naturali minori di n. Il problema della divisione della posta in gioco venne sottoposto a Pascal e Fermat da Antoine Gombaud o Cavaliere de Mere (un giocatore che aveva la fama di avere un’attitudine alla vincita insolita persino per un matematico); per mostrare la natura del problema, riportiamo parti delle lettere scambiate tra i due matematici, partendo proprio da Fermat che per primo suggerisce una timida soluzione:

De Fermat á Blaise Pascal.[3]

Monsieur,

Si j’entreprends de faire un point avec un seul dé en huit coups si nous convenons, aprés que l’argent est dans le jeu, que je ne jeurai pas le premier coup, il faut, par mon principe, que je tire du jeu $\frac{1}{6}$ du total pour étre désintéressé, á raison dudit premier coup. Que si encore nous convenons aprés cela que je ne jouerai pas le second coup, je dois, pour mon indemnité, tirer le 6 du restant, qui est $\frac{5}{36}$ du total.

Et si aprés cela nous convenons que je ne jouerais pas le troisiéme coup, je dois, pour mon indemnité, tirer le 6 du restant, qui est $\frac{25}{216}$ du total.

Et si aprés cela nous convenons encore que je ne jouerais pas le quatriéme coup, je dois tirer le 6 du restant, qui est $\frac{125}{1296}$ du total, et je conviens avec vous que c’est la valeur du quatriéme coup, supposé qu’on ait deja traité des précédents. Mais vous me proposez dans l’example dernier de votre lettre (je mets vos propres termes) : si j’entreprends de trouver le six en huit coups et que j’en aie joué trois sans le rencontrer, si mon joueur

[3]Le lettere seguenti sono state pubblicate nel “Varia Opera Mathematica Petri de Fermat; Toulouse, 1679. La prima non é datata ma risale al 1654 e risponde ad una lettera perduta di Pascal. É superfluo ricordare che Pierre de Fermat (1601-1665), consigliere del Parlamento di Toulouse, é uno dei creatori del calcolo delle probabilitá

me propose de ne point jouer mon quatriéme coup et qu'il veuille me désintéresser á cause que je pourrais le rencontrer, il m'appartiendra $\frac{125}{1296}$ de la somme entiére de nos mises ce qui pourtant n'est pas vrais, souvant mon principe. Car, en ce case, les trois premiers coups n'ayant rien acquis á celui qui tient le dé, la somme totale restant dans le jeu, celui qui tient le dé et qui convient de ne pas jouer son quatriéme coup, doit prendre pour son indemnité une 6 du total.
Et s'il avait joué quatre coups sans trouver le point cherché et qu'on convint qu'il ne jouerait pas le cinquiéme , il aurait de méme pour son indemnité un 6 du total. Car la somme entiére restant dans le jeu, il ne suit pas seulement du principe, mais il est de meme du sens naturel que chaque coup doit donner un égal avantage.
Je vous prie donc que je sache si nous sommes conformes au principe, ainsi que je crois, ou si nous différons seulement en l'application.
Je suis, etc.
FERMAT

Pascal nella risposta del 29 luglio 1654 afferma di ammirare la soluzione del problema precedentemente inviatagli da Fermat ma, poiché il metodo delle combinazioni é "faticoso", ne propone un altro iterativo, partendo dall'ipotesi che i due giocatori si trovino sul punteggio di 2 a 1 e che chi arriva per primo a 3 vinca 64 pistole:

... Il vostro metodo é molto valido ed é il primo che mi venne in mente in queste ricerche, ma perché la fatica delle combinazioni era eccessiva, ho trovato una riduzione e esattamente un altro metodo che é molto piú breve e piú pulito, che mi piacerebbe esporvi qui in poche parole; perché io vorrei aprire il mio cuore a voi d'ora in poi se mi é consentito, tanto grande é il piacere che ho avuto nel nostro essere d'accordo. Io chiaramente vedo che la veritá é la stessa a Tolosa e a Parigi. Questo é il mio modo di trovare il valore di ciascuna delle parti quando due giocatori giocano, per esempio, in tre mani, e quando ognuno ha messo 32 *pistole in gioco: supponiamo che il primo di essi abbia due (punti) e l'altro uno. Essi ora giocano una mano in cui le possibilitá sono tali che, se il primo vincesse, vincerebbe la posta intera che é in gioco, vale a dire* 64 *pistole. Se vincesse l'altro, sarebbero* $2-2$ *e, di conseguenza, se vogliono separarsi, ne consegue che ognuno riprenderá la sua posta, vale a dire* 32 *pistole. Considerate allora, signore, che se il primo vincesse,* 64 *pistole apparterrebbero a lui. Se perdesse, ne avrebbe* 32*. Quindi se a questo punto non desiderano giocare, e vogliono separarsi senza farlo, il primo dovrebbe dire: "Sono certo di* 32 *pistole, perché le avrei anche se perdessi. Per quanto riguarda le altre* 32*, forse li avró io e forse li avrai tu, le possibilitá sono uguali. Quindi dividiamo le* 32 *pistole a metá, e dammi le* 32 *di cui sono certo."Egli allora avrá* 48 *pistole e l'altro ne avrá* 16*.*

Supponendo invece che il punteggio sia $2 - 0$:

Ora supponiamo che il primo abbia due punti e l'altro nessuno, e che stiano per cominciare una nuova mano. Le possibilitá sono tali che, se il primo vincesse, vincerebbe l'intera posta di 64 *pistole. Se vincesse l'altro, ecco, essi tornerebbero al caso precedente in cui il primo ha due punti e l'altro uno. Ma abbiamo giá dimostrato che in questo caso* 48 *pistole apparterrebbero a colui che ha due punti. Pertanto, se non desiderano giocare a questo punto, egli dovrebbe dire: "Se vincessi, guadagnerei tutto, cioé* 64 *[pistole]. Se perdessi,* 48 *[pistole] sarebbero legittimamente mie. Pertanto dammi le* 48 *che sono mie di certo, anche se perdessi, e dividiamoci le altre* 16 *a metá perché vi sono le stesse probabilitá che le guadagni tu o io."Cosí egli avrá* 48 *piú* 8*, che sono* 56 *pistole.*

Analizzando il caso $1 - 0$:
Supponiamo ora che il primo abbia un solo punto e l'altro nessuno. Vedete, Monsieur, che se si giocasse una nuova mano, le possibilitá sono tali che, in caso di vittoria del primo, egli sarebbe sul due a zero, e dividendo come nel caso precedente, 56 *[pistole] apparterrebbero a lui. In caso di sconfitta, essi sarebbero sull'* $1 - 1$*, ed egli avrebbe diritto a* 32 *pistole. Pertanto, dovrebbe dire: "Se non vuoi giocare, dammi le* 32 *pistole di cui sono certo, e dividiamo quello che resta dalle* 56 *a metá. Da* 56 *sottraiamo* 32*, e ne restano* 24*."*

Andando ad analizzare la soluzione di Fermat nel caso in cui al primo giocatore manchino 2 punti alla vittoria e al secondo bastino 3 punti per vincere, notiamo che riporta una tabella con tutti i possibili svolgimenti delle successive 4 partite per un totale di 16 casi (risultato di 2^4 e non 4^2 come afferma Pascal), dato che la partita si concluderá al massimo in 4 partite. Indicando con a la vincita di un punto da parte del primo giocatore, con b quella del secondo, con 1 la vittoria finale del primo giocatore e con 2 quella del secondo, Pascal ottiene quanto segue:
Ecco il modo in cui procedere quando ci sono due giocatori. Se, in una partita di piú mani, due giocatori si ritrovano in una situazione tale che, per vincere la posta, al primo di loro mancano due punti e al secondo tre, voi dite che occorre vedere dopo quante mani l'esito del gioco verrá definitivamente deciso. Per convenienza possiamo supporre che ció accadrá dopo quattro mani, cosa da cui concludete che é necessario vedere in quanti modi questi quattro punti possono essere distribuiti fra i due giocatori, calcolare quante combinazioni portano alla vincita del primo e quante a quella del secondo e, quindi, dividere la posta in accordo con questa proporzione. Se non fossi giá stato a conoscenza di questo ragionamento, sarei riuscito a malapena a intender-

lo; ma anche voi l'avete scritto nella vostra esposizione. Quindi, per vedere in quanti modi i quattro punti possono essere distribuiti fra due giocatori, dobbiamo immaginare che essi giochino con un dado a due facce (dato che ci sono soltanto due giocatori), come se gareggiassero a testa o croce, e che lancino quattro di questi dadi (dato che devono giocare ancora quattro mani). Ora, dobbiamo vedere in quanti modi differenti questi dadi possono fermarsi. É una cosa facile da calcolare. Ce ne possono essere sedici, ossia quattro alla seconda o, in altri termini, al quadrato. Adesso supponiamo che una delle facce sia contrassegnata con una a *(l'esito favorevole al primo giocatore) e l'altra con una* b *(favorevole al secondo). Dunque, i quattro dadi possono fermarsi in una di queste sedici combinazioni (...)*

a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b
a	a	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	b	b	b	b
a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2

E, poiché al primo giocatore mancano due punti, tutte le combinazioni che contengono almeno due a *- ce ne sono complessivamente* 11 *- lo portano alla vittoria; e dato che al secondo giocatore mancano tre punti, tutte le combinazioni che contengono tre* b *- ce ne sono complessivamente* 5 *- lo fanno vincere. Pertanto, essi dovranno spartirsi la somma in un rapporto di* 11 *a* 5*. Ecco il vostro metodo nel caso in cui ci siano due giocatori. Dopodiché voi dite che, qualora i giocatori siano in maggior numero, la spartizione potrá essere fatta senza difficoltá procedendo in questo medesimo modo.*

Inzialmente Pascal non fu convinto dal fatto che si dovesse tener conto del numero di partite prefissato necessario alla conclusione naturale del gioco (metodo utilizzato da Fermat per il calcolo delle probabilitá di vincita dei due giocatori); sempre in questa lettera riporta infatti anche un'obiezione di Roberval, un `gentleman` come loro.
Ho esposto il vostro metodo ad altri gentiluomini come noi, uno dei quali, monsieur de Roberval, mi ha mosso la seguente obiezione. É sbagliato basare il metodo di spartizione sulla supposizione che i giocatori debbano per forza disputare quattro mani, dato che vediamo che, quando a uno di loro mancano due punti e all'altro tre, non c'é necessitá che giochino tutte e quattro le mani. Puó accadere che ne giochino soltanto due o tre, o che forse arrivino veramente a quattro. Egli non vede il motivo per cui si debba avere la pre-

tesa di fare una spartizione equa basandosi sul presupposto che si giochi per quattro mani, in vista del fatto che il termine naturale del gioco prevede che si smetta di lanciare il dado dopo che uno dei partecipanti ha vinto; e ritiene che, anche ammettendo che questo presupposto non sia falso, esso andrebbe perlomeno dimostrato. Di conseguenza, egli sospetta che abbiamo commesso un paralogismo. Io gli [a monsieur de Roberval] ho risposto che il mio ragionamento non é basato tanto su questo metodo delle combinazioni che, in veritá, in tale occasione é fuori luogo, quanto piuttosto sul mio metodo universale, dal quale non sfugge nulla e che porta con sé la dimostrazione. Questo metodo giunge alla stessa precisa divisione che si ottiene con quello delle combinazioni. Inoltre, gli ho giá mostrato la validitá delle spartizioni tra due giocatori stabilite tramite il metodo delle combinazioni. Non é forse vero che se due giocatori, vedendo che secondo le condizioni delle nostre ipotesi a uno di loro mancano due punti e all'altro tre, si accordano per giocare tutte e quattro le mani rimanenti (ossia, per lanciare insieme quattro dadi a due facce), non é forse vero, dicevo, che se qualcosa impedisce loro di fare i quattro lanci, la spartizione dovrebbe avvenire, come abbiamo detto, in accordo con le combinazioni favorevoli a ciascuno dei due? Egli si é detto d'accordo con me su questo punto, che puó di fatto considerarsi dimostrato. Tuttavia, ha negato che la stessa cosa valga anche quando i giocatori non sono obbligati a fare i quattro lanci. Gli ho quindi risposto in questi termini. Non é forse chiaro che gli stessi giocatori, che ora non sono costretti a fare i quattro lanci, ma vogliono terminare la partita prima che uno di loro abbia ottenuto il punteggio pieno, potrebbero, senza che vi siano perdite o guadagni, essere obbligati a giocare tutte e quattro le mani, e che questo accordo non cambierebbe in alcun modo la loro condizione? Infatti, se il primo giocatore vince i primi due dei quattro punti in gioco, colui che ha vinto si rifiuterá forse di fare l'atri due tiri, vedendo che se vince i primi due dei quattro punti in gioco, colui che ha vinto si rifiuterá forse di fare altri due tiri, vedendo che se vince queste altre due mani non vincerá di piú di quanto abbia giá fatto e che se le perde avrá nondimeno vinto? In quest'ultimo caso, infatti, i due punti vinti dal secondo giocatore non gli sarebbero comunque sufficienti per ottenere la vittoria finale, dato che gliene mancano tre, e in quattro lanci non ci sono abbastanza punti perché ciascuno dei due partecipanti possa ottenere quelli che gli mancano. É certamente opportuno considerare che é assolutamente uguale e indifferente per ciascuno dei due gareggiare seguendo la condizione naturale del gioco, cioé finire non appena uno di loro raggiunge il punteggio che gli serve per vincere la partita, oppure fare tutti e quattro i lanci. Pertanto, dato che queste due condizioni sono uguali e indifferenti, la spartizione della posta dovrebbe essere la stessa in entrambi i casi. Ma visto che quando sono obbligati a giocare tutte e quattro le mani é giusto dividere *la posta nel modo che ho indicato, ne segue che é giusto dividerla in questo stesso modo anche nell'altro caso. É cosí che l'ho dimostrato; e, come sapete, questa dimostrazione si basa sull'uguaglianza delle due condizioni, quella naturale e quella assunta riguardo ai due giocatori; la spartizione della posta é la stessa in entrambi i metodi e, se un giocatore vince o perde secondo un metodo, vincerá o perderá anche secondo l'altro, e il risultato ottenuto dai due sará comunque sempre il medesimo. Applichiamo ora il medesimo ragionamento a tre giocatori e assumiamo che al primo manchi un punto, al secondo due a al terzo due. Per fare la spartizione seguendo lo stesso metodo delle combinazioni, é necessario innanzitutto scoprire in quante mani la partita risulterá decisa, cosí come abbiamo fatto quando c'erano due giocatori. Essa sará decisa in tre mani, dato che é impossibile che i partecipanti disputino tre mani senza che ne esca necessariamente il vincitore. Occorre ora vedere in quanti modi tre lanci possono essere combinati fra tre giocatori, e quanti di questi lanci sono favorevoli al primo, quanti al secondo e quanti al terzo, per poi seguire questa medesima proporzione nel distribuire la posta, come abbiamo fatto nell'ipotesi dei due giocatori. É facile vedere quante combinazioni ci sono in tutto. Il numero che cerchiamo é* 3 *alla terza potenza, ossia* 3 *al cubo, cioé* 27*. Infatti, se si lanciano insieme tre dadi (dato che é necessario lanciare ognuno di essi tre volte), e questi dadi hanno tre facce ciascuno (dato che ci sono tre giocatori), una marcata con una* a *(l'esito favorevole al primo giocatore), l'altra con una* b *(favorevole al secondo) e l'altra con una* c *(favorevole al terzo), é evidente che questi tre dadi lanciati assieme possono fermarsi in* 27 *modi differenti, e cioé:*

a	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
a	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*
a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1			1	1	1	1					
				2						2		2	2	2		2						2				
								3									3			3			3	3	3	3

Dato che al primo manca soltanto un punto, ne segue che tutti gli esiti in cui c'é almeno una a *sono a lui favorevoli. Ce ne sono* 19*. Al secondo mancano due punti, cosí che tutti gli esiti in cui ci sono almeno due* b *sono* *a suo favore. Ce ne sono* 7*. Al terzo mancano due punti, pertanto tutti gli esiti in cui compaiono almeno due* c *sono a lui favorevoli. Ce ne sono* 7*. Se da questo concludiamo che é necessario spartire la posta dando a ciascuno secondo il rapporto di* $19 - 7 - 7$*, stiamo peró commettendo un grave errore, ed esito a credere che voi lo fareste. Ci sono infatti diversi casi favorevoli sia al primo sia al secondo, come* abb*, dove ci sono sia la* a *che manca al primo, sia le due* b *che servono al secondo. Allo stesso modo, il risultato* acc *é favorevole al primo e al terzo. I risultati che portano alla vittoria di due giocatori non dovrebbero quindi essere contati come esiti che valgono l'intera posta in gioco, ma soltanto la metá di essa. Infatti, se si verifica l'esito* acc*, il primo e il terzo avranno il medesimo diritto alla somma, dato che ognuno ha raggiunto il punteggio che gli serve. Di conseguenza, dovrebbero dividersi la posta a metá. Ma se esce il risultato* aab*, vince soltanto il primo. É necessario fare questa assunzione. Ci sono* 13 *esiti che assegnano l'intera posta al primo,* 6 *che gliene danno la metá e* 8 *che non gli danno nulla. Pertanto, se l'intera somma ammonta a una pistola, ci sono* 13 *esiti che gli assegnano una pistola,* 6 *che gliene fruttano mezza e* 8 *che non gli portano nulla. Quindi, in questo caso di spartizione, dobbiamo moltiplicare*

13 *per una pistola, che fa* 13
6 *per mezza, che fa* 3
8 *per zero, che fa* 0
Totale 27 *Totale* 16

e dividere la posta dei valori, cioé 16*, per la somma degli esiti possibili, cioé* 27*, ottenendo cosí la frazione* $\frac{16}{27}$*. Questa sará quindi la parte della posta che dovrá andare al primo giocatore nel caso di una spartizione:* 16 *pistole su* 27*. Al secondo e al terzo giocatore andranno due quote identiche: [...]. Pertanto, al secondo giocatore andranno cinque pistole e mezza su ventisette, e lo stesso al terzo. E la somma di* $5\frac{1}{2}$*,* $5\frac{1}{2}$ *e* 16 *fa appunto* 27*. Mi sembra che questo sia il modo in cui é necessario fare la spartizione seguendo il vostro metodo delle combinazioni, a meno che su questo argomento non ci sia qualche altro elemento di cui non sono ancora a conoscenza. Ma, se non mi sbaglio, questa spartizione non é giusta...*

Nella lettera di risposta del 29.08.1654, Fermat difende la sua posizione, sottolineando che tutto quello che accade dopo la vittoria di uno dei due giocatori non ha alcuna rilevanza sul risultato finale (*acc* é favorevole solo al primo, *cca* solo al terzo). Questo accorgimento serve solo al fine di rendere "uguali tutti i casi".

Nel riprendere l'esempio dei tre giocatori in cui al primo manca un punto, e a ciascuno degli altri ne mancano due, che é il caso che mi avete posto, trovo solo 17 *combinazioni per il primo e* 5 *per ciascuno degli altri, perché quando affermate che la combinazione* acc *é favorevole al primo, ricordate che tutto ció che viene fatto dopo che uno dei giocatori ha vinto non vale niente. Ma questa combinazione che ha fatto vincere il primo muore dopo il primo lancio, e cosa importa che il terzo guadagni due punti in seguito, poiché anche quando ne guadagnasse trenta tutto questo sarebbe inutile? Di conseguenza, questa finzione, come la avete ben definita, di estendere il gioco ad un certo numero di lanci serve solo a rendere semplice la regola e (secondo il mio parere) a rendere uguali tutte le opportunitá; o meglio, in maniera piú comprensibile, per ridurre tutte le frazioni allo stesso denominatore. In modo che non si possa avere piú alcun dubbio, se invece di tre partite si estendesse la finzione a quattro, non ci saranno solo* 27 *combinazioni, ma* 81*; e sará necessario vedere quante combinazioni fanno guadagnare al primo il suo punto prima che ognuno degli altri ne guadagni due, e quante combinazioni fanno vincere due punti a ciascuno degli altri prima che il primo ne vinca uno. Troverete che le combinazioni che fanno vincere il primo sono* 51 *e quelle per ciascuno degli altri due sono* 15*, che sono nella stessa proporzione [di* 17 *e* 5*]. In modo che se si prendono cinque tiri o qualsiasi altro numero si voglia, si troveranno sempre tre numeri nella proporzione di* 17, 5, 5*. E di conseguenza ho ragione nel dire che la combinazione* acc *é [favorevole] al primo e non al terzo, e che* cca *é [favorevole] solo al terzo e non al primo, e di conseguenza la mia regola con le combinazioni é lo stessa per tre giocatori come per due, e in generale per tutti i numeri ...*

Capitolo 2

TEORIA DELLE DECISIONI IN CONDIZIONI DI INCERTEZZA

2.1 INTRODUZIONE

``Noi viviamo solo conoscendo qualche cosa del futuro: i problemi della vita ... derivano dal fatto che noi ne conosciamo troppo poco''.
(Knight, 1971)

Le conseguenze delle azioni che un individuo intraprende spesso si prolungano nel futuro, ma nel momento in cui l'individuo agisce tali conseguenze non sono note, dato che nella maggior parte dei casi non si puó essere completamente sicuri che gli esiti ipotizzati si verificheranno realmente. Di qui, il ruolo centrale che il problema dell'incertezza assume nell'ambito dei processi decisionali. L'uomo ha sempre teso, per natura, a ridurre lo stato di incertezza al fine di esercitare un controllo sull'ambiente che lo circonda. L'incertezza appare infatti amplificata dall'instabilitá dell'ambiente esterno, posto che, se l'ambiente esterno si modifica di volta in volta, diviene impossibile per un soggetto economico prendere delle decisioni che si basino su previsioni corrette : l'incertezza risulta dunque essere figlia dei cambiamenti che avvengono nel mondo esterno.
Nei tempi piú antichi l'individuo ha cercato di ridurre lo stato di incertezza con pratiche magiche o mediante la ritualizzazione delle azioni, modificando con il passaggio del tempo le modalitá di controllo da lui escogitate; una di queste, utilizzata soprattutto nelle organizzazioni, consiste nella reiterazione di modelli comportamentali e strategie che in passato hanno giá avuto suc-

cesso.
Ma che cos'é l'incertezza? E ancora: essa é in qualche modo misurabile, o é un concetto del tutto vago e indefinito?
Ebbene, il grado di incertezza di un evento é valutabile e la stima avviene assegnando una qualche probabilitá all'esito atteso. Cosí, se siamo certi che un evento si realizzerá, diciamo che questo esito é sicuro al 100%. Viceversa, é del tutto intuitivo che quanto piú é elevato il grado di incertezza circa il verificarsi di un evento, tanto piú la probabilitá si discosterá dal 100% e l'incertezza assoluta coincide con il 50% delle probabilitá: 50% che si verifichi, 50% che non si verifichi.
Quando valutiamo l'incertezza, quindi, possiamo utilizzare espressioni numeriche di probabilitá, corrispondenti ad una misura abbastanza precisa del grado di incertezza. Tuttavia, affinché il concetto di incertezza ora illustrato sia realmente corretto, occorre una precisazione: il termine stesso come da noi utilizzato, é inteso in senso lato e senza tener conto della distinzione proposta dall'economista F.H. Knight, per il quale esisterebbero situazioni di rischio e situazioni di incertezza:

- le situazioni di rischio si riferiscono a contesti in cui sono noti gli esiti della decisione da prendere e anche le probabilitá ad essi associate;
- le situazioni di incertezza si riferiscono a contesti in cui l'individuo conosce gli esiti della scelta, ma é all'oscuro delle probabilitá legate ai diversi esiti (Lopes, 1983).

Secondo questa distinzione quindi, l'incertezza non sarebbe misurabile secondo alcuna stima probabilistica, ma assumerebbe i connotati di un concetto vago e indefinibile, caratteristica che la distinguerebbe dal rischio. Secondo altri studiosi, la parola "rischio"verrebbe utilizzata con un'accezione esclusivamente negativa e si configurerebbe come la probabilitá della perdita (Vlek e Stallen, 1980). Tuttavia, poiché la maggior parte dei testi di economia non tiene conto della distinzione terminologica proposta da Knight, anche qui ci siamo uniformati a questa impostazione, utilizzando il termine "incertezza"per definire entrambe le situazioni presentate.
Dal punto di vista matematico parliamo di decisione in condizioni di incertezza quando viene stabilita una corrispondenza tra un insieme D ("decisioni") e C ("conseguenze") di variabili aleatorie; noi affronteremo il caso piú semplice, in cui le variabili assumono valori numerici che rappresentano guadagni oppure perdite, stabilendo un ordinamento di preferibilitá grazie all'attribuzione di un valore numerico certo, "equivalente"al guadagno aleatorio considerato, ad ogni variabile. Il problema é che non esiste un unico metodo per assegnare questi indici di preferibilitá a causa della molteplicitá e

della variabilitá degli aspetti da considerare. Di seguito analizzeremo quindi i metodi piú seguiti in questi secoli fino ad ora, per poi andarne ad analizzare uno non ancora diffuso, nato pochi decenni fa grazie ad Hicks. Ricordiamo solamente, ai fini di un'adeguata comprensione dei paragrafi successivi, che accettare una valutazione g di una variabile aleatoria X, significa essere disposti a scambiare l'importo certo g con quello aleatorio X, in <u>entrambi</u> i versi della transazione.

2.2 TEORIA DELL'ATTESA MATEMATICA

Nella teoria della probabilitá, il valore atteso (o speranza matematica, o aspettazione, o valor medio) di un esperimento casuale che puó assumere un numero finito di risultati reali, é dato dalla somma delle probabilitá di ciascun risultato moltiplicate per il risultato stesso. Rappresenta quindi quanto mi "attendo"in media dall'esperimento, pesato in base alle probabilitá dei risultati stessi. In termini matematici, se X é una variabile aleatoria a valori reali definita su uno spazio di probabilitá (Ω, F, P) sufficientemente regolare(X deve appartenere a $L^1(\Omega, F, P)$, ossia deve essere una funzione misurabile $X : \Sigma \to R$), il valore atteso di X, indicato con $E(X)$, é dato da

$$E(X) = \int_\Omega X dP \tag{2.1}$$

con P distribuzione di probabilitá di X, a condizione che l'integrale sia finito (intendendo qui l'integrale di Lebesgue).
Nel caso in cui X sia una variabile aleatoria continua, presa $f(x)$ la sua funzione di densitá di probabilitá, avremo che il valore atteso sará

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \tag{2.2}$$

sempre ammesso che l'integrale esista. Alternativamente, se X é una variabile aleatoria discreta che assume valori $x_1, x_2, ...$ con probabilitá $p_1, p_2, ...$, l'integrale diviene una somma:

$$E(X) = \sum_n x_n p_n = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots \tag{2.3}$$

sempre a condizione che la somma esista (clausola necessaria se l'insieme $\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ é infinito).
La notazione E, di uso comune nella letteratura internazionale (si utilizza anche $M(X)$), é l'iniziale della parola inglese expectation, a sua volta mutuata dal latino exspectatio, termine introdotto da C. Huygens nel primo trattato organico di teoria della probabilitá, pubblicato nel 1657 ("De ratiociniis in ludo aleae").

Nel caso di distribuzioni simmetriche[1] e unimodali [2] il significato di $E(X)$ come tendenza centrale rappresentativa dell'intera distribuzione é ovvio dato che $E(X)$ é anche la moda della distribuzione (cioé la determinazione di massima probabilitá) e la distribuzione é simmetrica rispetto al suo valore atteso (un esempio ne puó essere la distribuzione normale). Nelle distribuzioni asimmetriche $E(X)$ rappresenta comunque un riferimento, in particolare nelle applicazioni in cui X é il risultato lordo di una operazione economica detta, nel linguaggio probabilistico, lotteria; in tal caso, $E(X)$ é inteso come il prezzo equo di un biglietto della lotteria, perché indicando con

$$G(X) = X - P \tag{2.4}$$

il guadagno netto della lotteria (differenza fra la vincita aleatoria X e il prezzo P del biglietto), risulta che il valore atteso del guadagno,

$$E(G) = E(X - P) = E(X) - P \tag{2.5}$$

é pari a 0 (cioé il prezzo é equo) se e solo se $P = E(X)$, cioé il prezzo é pari al valore atteso. Ció che rende conveniente partecipare ad una scommessa, é che abbia un valore atteso anzitutto positivo, e, in secondo luogo, superiore al costo da sostenere per parteciparvi. Tuttavia, per non incorrere in errori di valutazione, é bene tener presente che il valore atteso é solo una media di quello che potranno essere le vincite partecipando al gioco piú volte, pertanto partecipando al gioco una sola volta é improbabile che si vinca la cifra prevista dal valore atteso (anzi, il piú delle volte é impossibile).

[1] Nella teoria delle probabilitá una distribuzione é simmetrica quando la sua funzione di probabilitá P (nel caso discreto) o la sua funzione di densitá di probabilitá (nel caso continuo) sono simmetriche rispetto ad un valore fissato x_0; per questo tipo di distribuzioni il valore atteso, la mediana e la moda (se é unica) coincidono

[2] Una distribuzione é unimodale se la sua densitá ammette un solo valore modale, ossia un solo un punto di massimo (che rappresenta sia il massimo relativo che il massimo assoluto); la moda nella teoria delle probabilitá é il valore piú frequente di una distribuzione, o meglio, la modalitá piú ricorrente della variabile (cioé quelle a cui corrisponde la frequenza piú elevata)

2.3 TEORIA DELL'UTILITÁ ATTESA

''I matematici valutano il denaro in proporzione alla sua quantitá mentre gli uomini di buon senso in proporzione all'uso che ne fanno''
(21 maggio 1728,Cramer)

Il valore atteso non é l'unico elemento da tenere in considerazione quando ci si trova davanti ad una scelta in condizioni di incertezza, soprattutto in situazioni in cui o sono coinvolti importi monetari molto alti, oppure la probabilitá di vincere é particolarmente ridotta.
Si pensi ad esempio ad una scommessa, in cui se viene testa si vincono 30.000 dollari, se viene croce se ne perdono 20.000. Qui, nonostante il valore atteso della scommessa, sia molto alto ($E(T) = 5.000$, con l'evento T =esce testa), molti individui non accetterebbero di giocare semplicemente perché non avrebbero la possibilitá economica di far fronte ad una perdita tanto ingente. Risulta quindi evidente che l'interesse economico non é l'unica variabile che rappresenta l'interesse di un individuo; si consideri a riguardo un ulteriore esempio tratto (e adattato) da Schotter (1997):

Un malato esce dalla visita del medico con una drammatica notizia: se non verrá operato entro 24 ore morirá certamente. L'operazione costa peró 100 milioni. Il malato non dispone di quella cifra. Non ha amici o parenti che possano prestargli la somma. Mentre cammina per strada incontra una persona che gli offre la possibilitá di partecipare a due lotterie. La lotteria A gli offre la possibilitá di vincere 40 milioni con probabilitá 50% e 60 milioni con probabilitá 50%. La lotteria B gli offre la possibilitá di vincere 1 milione con probabilitá 99% e 100 milioni con probabilitá 1%.

Anche se la lotteria A ha un valore atteso molto piú alto (pari a 50 milioni) della lotteria B (pari a 1.99 milioni), é ovvio che se il nostro malato scegliesse il gioco A morirebbe certamente, in quanto non riuscirebbe a disporre della cifra necessaria all'operazione, mentre scegliendo la lotteria B avrebbe una probabilitá (per quanto molto ridotta) di ottenere la cifra necessaria alla sua salvezza.
É chiaro che qui l'interesse economico é solo strumentale ad un interesse ben superiore: sopravvivere. Dació bisogna concludere che, in condizioni di incertezza, non sempre é sufficiente considerare il valore monetario atteso ma puó essere necessario un criterio decisionale che tenga conto anche degli interessi e delle caratteristiche dell'individuo.

In generale, diversamente dall'esempio riportato sopra, il beneficio risultante per un individuo in seguito ad un incremento unitario del suo patrimonio é tanto meno sensibile quanto piú é elevato l'ammontare del suo patrimonio.A tal proposito, dobbiamo ringraziare Daniel Bernoulli se nella prima metá del Settecento nasce l'idea di una funzione utilitá, crescente con l'importo ma piú lentamente via via che questo aumenta (essendo una funzione monotona crescente concava), tale che l'utilitá marginale di un bene diminuisca al crescere del livello assoluto di consumo del bene. Secondo il matematico, ogni individuo basa le proprie scelte su una funzione utilitá, la quale dipende sia dai livelli di consumo dei panieri, sia dalle probabilitá di verificarsi loro associate, facendo convergere la scelta verso quel paniere di consumo che massimizza tale funzione. Se ad esempio, un soggetto deve scegliere tra due panieri di consumo x_1 e x_2 associati agli stati di natura[3] 1 e 2 con probabilitá p_1 e p_2, la funzione di utilitá attesa puó essere scritta come $u(x_1, x_2, p_1, p_2) = p_1u(x_1) + p_2u(x_2)$, cioé come somma ponderata di una qualche funzione del consumo nei sui due stati $u(x_1)$ e $u(x_2)$, dove i pesi sono le probabilitá p_1 e p_2. L'espressione $p_1u(x_1) + p_2u(x_2)$ rappresenta dunque l'utilitá media (o attesa) del piano di consumo (x_1, x_2). La funzione che Bernoulli propose per spiegare la sua teoria fu

$$U(x) = b \cdot \log([\frac{\alpha + x}{\alpha}]) \tag{2.6}$$

dove x rappresenta la ricchezza. Si noti come $\frac{\partial U(x)}{\partial x} = \frac{b}{(\alpha + x)}$ sia inversamente proporzionale alla ricchezza, da cui segue il fatto che l'utilitá aumenta meno che proporzionalmente rispetto alla ricchezza stessa.
Mentre peró Bernoulli si limitó a presentare un modello descrittivo dell'utilitá, nel 1947 John Von Neumann dell'Institute for Advanced Studied e Oskar Morgenstern dell'Universitá di Princeton attraverso un processo di assiomatizzazione formalizzarono una vera e propria teoria per l'analisi delle decisioni in condizioni di incertezza definita appunto <u>teoria dell'utilitá attesa</u> (EUT), ipotizzando che gli individui effettuino le scelte valutando l'utilitá attesa di ciascuna alternativa. Essi riuscirono a provare che la massimizzazione dell'utilitá attesa poteva essere un criterio razionale di decisione derivabile da tre precisi assiomi sulle preferenze; la EUT é dunque sia una teoria positiva (ossia un modello che spiega <u>come</u> gli individui scelgono) che prescrittiva/normativa (<u>come</u> dovrebbero scegliere). Secondo il "Teorema dell'utilitá attesa"formulato da questi due studiosi, gli individui invece di massimizzare il valore monetario atteso, massimizzano l'utilitá attesa corrispondente a

[3]Possibili esiti di un processo aleatorio

ciascun valore monetario, calcolata sostituendo l'utilitá al valore monetario nella formula del valore atteso:

Teorema 2.3.1. *TEOREMA DELL'UTILITÁ ATTESA*
Una relazione di preferenza $\prec$ sull'insieme $\mathcal{P}$ delle lotterie semplici[4] *su C soddisfa gli assiomi di completezza*[5]*, transitivitá*[6]*, continuitá*[7] *e indipendenza*[8] *se e solo se esiste una funzione $u : C \rightarrow \mathcal{P}$ tale che, per due lotterie qualsiasi $L = (p_1; \cdots p_n)$ e $L' = (p'_1 \cdots p'_n)$, si abbia:*

$$L \succ L' \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i u(c_i) > \sum_{i=1}^{n} p'_i u(c_i)$$

con $U(p_1, p_2, \cdots p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(c_i)$ e $U'(p'_1, p'_2, \cdots p'_n) = \sum_{i=1}^{n} p'_i u(c_i)$ "funzioni di utilitá Von Neumann-Morgenstern".

Essi affermavano che:

``dai postulati [che abbiamo definito] possiamo derivare il carattere numerico dell'utilitá $[\cdots]$ il valore numerico

[4]Se $C = (c_1; c_2; \cdots; c_n)$ é un insieme di possibili risultati (ossia si ottiene la conseguenza c_1 con probabilitá p_1, la conseguenza c_2 con probabilitá p_2, etc.), una lotteria semplice L é un vettore di $\mathcal{R}^n$,$L = (p_1; p_2; \cdots; p_n)$ tale che:

- $p_i \equiv Prob\{c = c_i\} \quad \forall i \in 1, 2, \cdots n;$
- $p_i \geq 0 \quad \forall i \in 1, 2, \cdots n;$
- $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

[5]. Si ipotizza che le preferenze siano complete, ossia i consumatori possano confrontare e classificare tutti i panieri possibili (cioé un particolare gruppo di beni e servizi; piú specificamente, un paniere di mercato é un elenco completo di specifiche quantitá di uno o piú beni). In termini matematici, definita la relazione di preferenza $\prec$ tale che se il consumatore si trova di fronte ai panieri x e y preferisce x o si dichiara indifferente, segue che per ogni coppia (x, y) di panieri appartenenti all'insieme di consumo, $x \prec y$ e/o $y \prec x$. L'assioma prescrive quindi che si verifichi sempre almeno una delle due condizioni $x \prec y$ e $y \prec x$, senza escludere che si verifichino entrambe, caso in cui risulterá $x \approx y$.

[6]Le preferenze sono transitive ossia, per ogni terna di panieri (x, y, z) appartenenti all'insieme di consumo, tali che $x \prec y$ e $y \prec z$, risulta anche $x \prec z$

[7]Dati due panieri x,y appartenenti all'insieme di consumo con $x \prec y$, esistono un intorno di x e un intorno di y tali che ciascun punto del primo rappresenta un paniere preferito a ciascun punto del secondo.

[8]Presi x, y, z panieri appartenenti all'insieme di consumo con $x \prec y$ e $\Theta \in [0, 1]$, se indichiamo con $x\Theta + (1-\Theta)z$ un paniere ottenuto mescolando il paniere x nella proporzione Θ e il paniere z nella proporzione $1-\Theta$ e con $y\Theta+(1-\Theta)z$ un paniere ottenuto mescolando il paniere y nella proporzione Θ e il paniere z nella proporzione $1-\Theta$, risulta $(x\Theta+(1-\Theta)z)$ $\prec (y\Theta + (1 - \Theta)z)$

dell'utilitá si combina (con la probabilitá) allo stesso modo del valore atteso [$\cdots$] Il fatto che si possa costruire [dai nostri assiomi] un'utilitá numerica - con la formula che si usa in modo simile al valore atteso-,sembra indicare questo: abbiamo praticamente definito un'utilitá numerica come quella entitá per la quale il calcolo del valore atteso é legittimato.''

Come riassume Lindley in "La logica dell'indecisione", 1990:

``In primo luogo, le incertezze presenti debbono essere quantificate in termini di valori detti probabilitá. In secondo luogo, le varie conseguenze delle azioni possibili debbono essere descritte in termini di utilitá. Infine, deve essere scelta quella decisione che ha la massima utilitá prevista rispetto alle probabilitá giá calcolate. Il significato di dovere, usato ben tre volte, é semplicemente che ogni procedura di decisione che si discosti dalle nostre regole é dimostrabilmente assurda o [$\cdots$] incoerente.

Dunque l'utilitá di una lotteria viene calcolata semplicemente facendo una media ponderata, rispetto alle rispettive probabilitá, delle utilitá dei risultati possibili.

Tornando all'esempio del malato, sappiamo che qualsiasi cifra inferiore ai 100 milioni non ha per lui alcuna utilitá; se poniamo invece l'utilitá dei 100 milioni pari a 1,

1. l'utilitá attesa $E(U)$ nel caso in cui si scelga la prima lotteria é i pari a:

   $$E(U_1) = \text{utilitá del reddito } 60 \cdot \text{ probabilitá del reddito } 60 + \text{ utilitá del reddito } 40 \cdot \text{ probabilitá del reddito } 40 = 0 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5 = 0$$

2. l'utilitá attesa della seconda lotteria é:

   $$E(U_2) = \text{utilitá del reddito } 1 \cdot \text{ probabilitá del reddito } 1 + \text{ utilitá del reddito } 100 \cdot \text{ probabilitá del reddito } 100 = 0 \cdot 0.99 + 1 \cdot 1 = 1$$

Individui diversi hanno peró funzioni di utilitá diverse e quindi preferenze diverse rispetto alla stessa scelta; diversamente dal calcolo del valore atteso, in questo caso si pondera con la probabilitá l'utilitá garantita da quell'incasso e non il semplice incasso monetario. Il criterio é analogo, ma tiene conto anche delle caratteristiche dell'individuo: il punto cruciale di questa teoria é infatti che non necessariamente la classificazione in base al valore atteso rispecchia quella delle preferenze, e non c'é da stupirsi se i valori attesi degli esiti delle diverse alternative non hanno il medesimo ordinamento di preferenze delle utilitá attese delle alternative. Tali differenze sono possibili perché l'utilitá non sempre é una funzione lineare della ricchezza visto che dipende in maniera determinante dalle attitudini del soggetto o meglio dalla sua propensione al rischio. Quest'ultima é una caratteristica che esula del tutto da motivazioni di ordine congetturale, poiché infinite possono essere le variabili che inducono un soggetto ad essere in un modo o in un altro (certi individui possono essere talmente poveri da giudicare di "non avere nulla da perdere", e quindi rischiare molto; altri possono decidere di scommettere per un motivo del tutto opposto, e cioé per avere tanto denaro da "poter permettersi di perderlo"). Indipendentemente dalle motivazioni, la funzione di utilitá di questi individui é differente:

- Un individuo avverso al rischio ha una funzione di utilitá concava rispetto alla ricchezza, ossia quando la ricchezza aumenta, l'utilitá aumenta meno che proporzionalmente; si dice anche che essa é caratterizzata da un'utilitá marginale decrescente.

- Gli individui avversi al rischio rifiuteranno sempre di partecipare ai cosiddetti giochi equi (in cui valore atteso é pari a 0) e ció é spiegabile proprio con la particolare forma che assume la funzione di utilitá ad essi relativa[9]. Prendendo come gioco equo il lancio della moneta, in cui si vincono 30 dollari se esce testa e si perdono 30 dollari se esce croce, il valore atteso risulta essere:

$$EV = \frac{1}{2} \cdot 30 + \frac{1}{2} \cdot (-30) = 0$$

  Come é intuibile da questo risultato, in un gioco equo il valore atteso della ricchezza se si accetta la scommessa é uguale al valore certo della ricchezza nel caso in cui si rinunci a giocare. Tornando al caso del malato terminale, il livello di utilitá sará pari a $U(40)$, pertanto é chiaro che si dovrá accettare la scommessa solo se l'utilitá attesa di essa sará maggiore di $U(40)$. Ebbene l'utilitá attesa di una persona avversa al rischio sará sempre inferiore all'utilitá di non giocare.

[9]Dalla concavitá della funzione utilitá, segue infatti che $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$,$\forall \alpha \in [0,1]$ ossia, per ogni $x_0 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, $x_0 \in [x_1, x_2]$, $f(x_0)$ é sempre al di sopra della retta congiungente $f(x_1)$ e $f(x_2)$

Caratteristica importante riscontrabile sia nella funzione utilitá che nella speranza matematica é l'associativitá[10], che limita il confronto tra due variabili coincidenti su certi valori ai soli in cui essi differiscono. L'introduzione di una funzione utilitá diversa dall'identitá $u(x) = x$ ha peró come conseguenza l'alterazione della scala dei valori monetari: puó ridurre il peso di un guadagno molto alto ma poco probabile, preferendogli un guadagno minore ma piú probabile, pur mantenendo la preferenza di un importo maggiore rispetto ad uno minore grazie alla sua monotonia.
La teoria dell'utilitá attesa é la teoria formale della scelta in condizioni di incertezza; rappresenta l'evoluzione naturale della teoria della scelta economica del consumatore, estesa a situazioni di non perfetta informazione e cioé senza una conoscenza completa delle alternative rilevanti. Siccome la maggior parte delle scelte che ci troviamo ad affrontare quotidianamente presuppongono questa circostanza, si comprende l'importanza di questo modello. Si comprenderá ancor di piú l'importanza di quegli studi empirici volti a dimostrare come in realtá gli individui tendono a violare le assunzioni derivanti dall'applicazione del modello. Questi studi sono stati la base da cui siamo partiti per tentare l'elaborazione di teorie alternative a quella dell'utilitá attesa, che prendessero in considerazione e tenessero in debito conto quelle variabili, per lo piú di natura psicologica, in grado di inficiare il modello classico.

[10] proprietá equivalente all'indipendenza, vd. nota 8 di questa sezione

2.4 HICKS

Accanto all'applicazione del calcolo delle probabilitá al gioco dei dadi, al problema dei punti, all'estrazione di palle di diverso colore da un sacchetto e ad altri giochi, compare, intorno al XVII secolo, la matematica attuariale, ossia l'applicazione del calcolo delle probabilitá alle attivitá assicurative, specialmente per ció che riguarda le assicurazioni sulla vita. Basandosi su ipotesi (fissate alla luce di esperienze passate e anticipando tendenze future) inerenti ai tassi di mortalitá, ai salari, ai tassi di interesse e ai dividendi, la matematica attuariale si prefigge di "predire"risultati futuri.
Alla base di questa disciplina vi é il concetto delle "tavole di vita", il primo esempio delle quali fu pubblicato da John Graunt nel suo Natural and Political Observations (1662), basato su una analisi statistica delle Tabelle di Mortalitá Londinesi. Il principale scopo di queste tavole era quello di avvertire la gente quando stava per cominciare un'epidemia, cosí da dare il tempo alla popolazione di abbandonare il paese. James Howell aveva giá usato le Tabelle di Mortalitá di Londra e di Amsterdam per dedurre che la seconda cittá era meno popolata della prima, ma Graunt fu il primo a dimostrare come la statistica avrebbe potuto portare ad una serie di interessanti conclusioni. Per esempio, valutó che la popolazione di Londra era costituita da circa 384000 unitá, contro il milione comunemente assunto. Soprattutto, egli produsse la prima vera tavola di vita, che mostrava, per ogni 100 bambini concepiti, quanti raggiungevano le etá successive; successivamente applicó questa tavola (anticipando il metodo delle popolazioni stazionarie) per stimare il numero degli uomini che sopravvivevano alle diverse etá. Anche il matematico Jan De Witt si interessó a queste questioni, riunendo i suoi interessi di statista nel "Trattato sulle rendite vitalizie"(1671) prendendo spunto, forse, dal breve saggio di Huygens sulle probabilitá. Nel suo trattato De Witt introdusse quella nozione che oggi viene descritta come speranza matematica e prese in considerazione il problema della rendita annuale dell'ultimo sopravvissuto tra due o piú persone.
Come affermato nei paragrafi precedenti, inizialmente nel XVII secolo il valore di una prospettiva incerta (vale a dire una variabile random nel linguaggio moderno) era definito dal suo valore atteso o semplicemente dal "valore". L'opera di Christian Huygens ("De ratiociniis in ludo alae") del 1657 rappresentó, subito dopo il carteggio tra Pascal e Fermat, la pietra miliare nello sviluppo teorico: "provó a giustificare un metodo per dare un prezzo ai rischi il quale era molto simile a quello dell'attesa matematica"(Hacking, 1975, p.95). Nella prima edizione del suo trattato "The doctrine of Chances"(1718), De Moivre riconobbe ad Huygens di essere stato il primo ad avere fornito una qualche sistemazione ad un certo numero di problemi relativi al gioco d'az-

zardo, ponendo le basi del calcolo delle probabilitá. Successivamente l'opera venne ripresa anche da Jakob Bernoulli, il quale la pose come prima parte del suo trattato "Ars conjectandi", rimasto incompiuto nella sua quarta parte a causa della morte dell'autore. In "De ratiociniis in ludo alae", Christian Huygens parla dell'attesa come del valore di un gioco, considerando il valore atteso come il giusto prezzo da pagare per partecipare ad una scommessa che ci puó dare varie possibilitá di vincita (o perdita). Tale concezione dell'attesa matematica come metodo di stima del rischio duró fino ai primi anni del 1700, quando il matematico svizzero Nicolaus Bernoulli, membro della gloriosa famiglia di matematici svizzeri, pose in una lettera a Pierre Raymond de Montmort (risalente a settembre 1713) un problema che a suo modo di vedere era un paradosso:il "paradosso di St. Pietroburgo". Il nome é dovuto alla soluzione, proposta da Daniel Bernoulli (1738) sulla rivista dell'Accademia Imperiale delle Scienze di San Pietroburgo, alla domanda posta dal cugino Nicolaus. In accordo con le parole di quest'ultimo (datate 9 settembre 1713 e riportate da Bernoulli nel 1738), il gioco di St. Pietroburgo (o strategia della martingala) viene formulato cosí:

> Ci viene offerta la possibilitá di partecipare al seguente gioco. Viene lanciata una moneta, se esce croce allora vinciamo 1, mentre se esce testa procediamo a un nuovo lancio della moneta. Se esce croce allora vinciamo 2, mentre se esce testa si lancia ancora la moneta. Il gioco va avanti in questo modo, con premi che raddoppiano ad ogni mano per l'uscita della croce. Per intenderci se esce croce al decimo tiro allora la nostra vincita sará di 512. Quanto pagare per partecipare a questo gioco?

Qui il problema é come stimare equamente il prezzo G per iniziare il gioco, tenendo conto che

- il gioco del lancio di una moneta produce un'attesa matematica infinita anche se nessuno pagherebbe una cifra per cosí dire infinita per giocare.
- il prezzo deve essere almeno 1 (il guadagno minimo)

Lancio	*Probabilita'*	*Prezzo*
1	$\frac{1}{2}$	1
2	$\frac{1}{4}$	2
...	...	...
n	$\frac{1}{2}^n$	2^{n-1}
...	...	...

Secondo Huygens, per stimare equamente il prezzo é sufficiente calcolare l'attesa del gioco:

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = +\infty \tag{2.7}$$

In questo modo peró otteniamo che ogni termine della serie é pari ad $\frac{1}{2}$ e di conseguenza la serie diverge. Dal punto di vista di Huygens, abbiamo quindi che il valore del gioco é infinito, ovvero che dovremmo offrire qualunque cifra pur di giocare. E non c'é nulla di paradossale: il risultato é matematicamente corretto anche se il senso comune sconsiglia di partecipare se ci richiedono una cifra troppo alta. Bernoulli notó infatti che in nessun caso un individuo avrebbe pagato una cifra arbitrariamente grande per giocare:

> ``bisogna ammettere che ogni uomo abbastanza ragionevole venderebbe la sua chance con suo gran piacere per 20 ducati''(Bernoulli, 1738, p.32).

Come é possibile ottenere una media infinita da un gioco d'azzardo quando le risorse presenti nel mondo sono finite? Il problema qui é dovuto al fatto che la speranza matematica assegna un valore esageratamente alto a premi di importi alti, nonostante la bassa probabilitá di essere pagati; per risolvere il paradosso si potrebbe fissare un tetto massimo di vincita, alto a piacere, ma comunque finito: cosí facendo l'attesa diventa non solo finita, ma assume dei valori molto bassi rispetto al tetto massimo fissato. Se fissiamo un tetto alla vincita M (per evitare approssimazioni consideriamo M una potenza di

2), dobbiamo comunque fermare il gioco dopo un numero finito di lanci della moneta. Tale numero di lanci L sará pari a $\log_2 M$ e se esce testa entro i primi L lanci si vince la stessa somma di prima, se escono L croci consecutive si vince l'intera somma M. L'attesa allora sará

$$E = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2} + M\frac{1}{2^L} = \frac{L}{2} + 1 = \frac{\log_2 M}{2} + 1 \tag{2.8}$$

Avremo cosí che partendo da un euro e con una vincita massima di 2^{30} euro, cioé circa un miliardo, l'attesa sará di solo di 16 euro. Questa "soluzione"al paradosso peró non ci soddisfa in quanto, fissando un limite alle vincite, otteniamo un problema differente da quello iniziale che in pratica elimina il problema alla radice.
Il primo a cercare di dare un'interpretazione matematica nella direzione da noi voluta fu lo svizzero Gabriel Cramer che, venuto a conoscenza del problema, scrisse a Nicolaus Bernoulli (le sue parole furono riportate da Daniel alla fine della propria memoria). La soluzione di Cramer-Bernoulli forní uno stratagemma innovativo, introducendo il concetto di utilitá (attesa morale) e riducendo l'attesa ad un valore finito:

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} U(2^{n-1}) \cdot \frac{1}{2^n} < +\infty \tag{2.9}$$

Ció ebbe due conseguenze rilevanti:

1. suggerí la possibilitá di utilizzare grandezze diverse dal valore atteso per trattare la teoria dell'incertezza;

2. diede origine alla teoria delle decisioni come scienza esatta.

Rispettando entrambe le conseguenze, si puó notare che questo tipo di scelta intrapreso dalla maggior parte degli studiosi non é l'unico possibile:

1. riguardo al primo punto, la teoria matematica dell'incertezza puó essere trattata partendo da una definizione assiomatica dell'attesa;

2. passando al secondo punto, una soluzione diversa (in qualche caso piú semplice) si puó ottenere introducendo, al posto dell'utilitá, ulteriori momenti di ordine maggiore rispetto a quello rappresentante le differenti dimensioni o caratteristiche dell'incertezza.

Ció fu affermato da Hicks (1962, 1967) nella sua teoria della selezione del portafoglio. Avendo scartato l'attesa e l'utilitá attesa

> ``la terza alternativa é guardare ai parametri statistici regolari dell'evento (considerato come una distribuzione di probabilitá) non solo il primo momento (E) ma anche tutti gli altri''.

Nelle pagine seguenti, considereremo la linea di pensiero di Hicks, mostrando come questo possa semplificare molto la teoria dell' "asset price". La nostra speranza é di esserci spinti un pó avanti, riconoscendo che quando una distribuzione di probabilitá viene espressa con un numero appropriato di parametri, questi parametri rappresentano proprio la quantitá dei risultati connessi direttamente al prezzo del mercato.
Giá nel 1935 John Hicks all'inizio del suo saggio "A suggestion for simplifying the theory of money"descrisse la difficoltá di un economista non monetario nel provare a cimentarsi in questa materia completamente privata del risultato base della teoria del valore, ossia del fatto che il valore relativo di due beni dipende dalla loro utilitá marginale:

> ``per un ingenuo che si avvicina alla teoria monetaria, é estremamente stancante essere privati di questa ancora di salvezza''

Ció che veramente é alla base della teoria del valore é infatti l'utilitá marginale e ció a cui si ispira é una "rivoluzione marginale".

Capitolo 3

IL METODO "MEDIA-VARIANZA"

Anche se "mercato"é una parola familiare, alla portata di tutti, quando si parla di strumenti finanziari questo termine acquista un significato specifico, indicando con esso il luogo dove sono negoziati i titoli; un tempo era un luogo fisico, ma dal 1994 i processi di contrattazione sono stati informatizzati e solitamente oggi vengono sintetizzati con degli indici - come il FTSE e il MIB italiano - che riflettono l'andamento di tutti (o comunque una parte significativa) i titoli presenti all'interno degli stessi. Ogni titolo azionario quotato sul mercato rappresenta un'azienda reale, e un aumento del valore e della domanda di un'azione corrisponde a un aumento del suo corso. I corsi azionari riflettono gli utili e i dividendi distribuiti da un'azienda, e possono essere influenzati da vari fattori, alcuni dei quali intuitivi (come l'impatto di un rincaro del petrolio sulle compagnie aeree), e altri maggiormente soggetti a interpretazioni e congetture (come l'ingresso di un nuovo concorrente sul mercato o l'introduzione di nuove normative). É necessario ricordare inoltre che il prezzo stesso del titolo rispecchia anche il grado di fiducia degli investitori: se questi ritengono che una notizia influirá negativamente sulla capacitá di un'azienda di generare profitti, la domanda di azioni potrebbe indebolirsi e ridurre a sua volta il prezzo; talvolta questo discorso puó valere anche per informazioni non specificamente correlate ad un'azienda, e se ad esempio tutti ritessero che l'economia statunitense si stesse indebolendo, i mercati azionari di tutto il mondo ne potrebbero risentire.
Con il seguente lavoro cercheremo di analizzare il modello di asset allocation (distribuzione dei fondi disponibili fra le varie attivitá di investimento finanziario dette anche "asset class"[1]), cercando di individuare la strategia

[1] liquiditá, azioni, obbligazioni, immobiliari, etc. $\cdots$

che possa portare ad un effettivo miglioramento delle performance del portafoglio.
La creazione di un portafoglio (inteso come l'insieme delle attivitá finanziarie, appartenenti a persone fisiche o giuridiche, in seguito ad un investimento) si spiega con l'esigenza per l'investitore di operare una diversificazione dei propri investimenti, cosí da ridurre il piú possibile il rischio di perdite generalizzate dovute agli andamenti negativi di un singolo titolo. Risulta infatti facilmente intuibile (anche se i principali studi in campo finanziario a questo riguardo si devono ai Premi Nobel Harry Markowitz, Merton Miller e William Sharpe, solo nel 1990) che l'investimento in un portafoglio di titoli sia meno rischioso dell'allocazione di un capitale su un'unica tipologia di titoli (solo azioni o solo obbligazioni) se opportunamente diversificati (trasformando la correlazione tra le attivitá finanziarie in una quantitá negativa).
Il rendimento di un portafoglio é effettivamente dato dalla media ponderata dei rendimenti delle attivitá considerate, mentre il suo rischio é minore o uguale al rischio medio ponderato delle attivitá considerate: da ció segue che il portafoglio ha un effetto positivo in termini non di maggiore rendimento bensí di minore rischio proprio in seguito alla diversificazione. In una logica di portafoglio, i criteri di selezione degli investimenti cambiano: il migliore non considera le singole rischiositá dei titoli scelti, bensí la relazione tra i loro rispettivi rendimenti, ossia la loro correlazione. Questa grandezza misura infatti la tendenza di due attivitá finanziarie a muoversi nella stessa direzione e la loro intensitá, diminuendo man mano che il rischio si riduce:

- la correlazione perfettamente positiva ($= +1$) indica che le attivitá si muovono nella stessa direzione e con la stessa intensitá;
- la correlazione positiva (> 0) connota le attivitá che si muovono in genere nella stessa direzione;
- la correlazione nulla ($= 0$) denota le attivitá che si muovono in modo indipendente l'una dall'altra;
- la correlazione negativa (< 0) indica le attivitá che si muovono in genere in direzione opposta;
- la correlazione perfettamente negativa ($= -1$) connota le attivitá che si muovono in direzione opposta con la stessa intensitá.

3.1 MOMENTI

Dato che i portafogli possono essere visti come un insieme di funzioni di variabili aleatorie, dobbiamo introdurre i "momenti", definiti come medie delle potenze della variabile aleatoria X con esponente intero positivo (ovviamente quando esiste l'integrale corrispondente). Queste grandezze rappresentano i "valori tipici"delle variabili aleatorie, indici che ne descrivono alcuni aspetti:

$$\mu_r = E(X^r) = \int_{\mathcal{R}} x^r dF(x) = \int_{\Omega} X^r(\omega) dP(\omega) \tag{3.1}$$

Nel caso in cui le v.a. siano discrete si ha

$$\mu_r = E(X^r) = \sum_j x_j^r p_j \tag{3.2}$$

e, nel caso di v.a. assolutamente continue

$$\mu_r = E(X^r) = \int_{\mathcal{R}} x^r f(x) dx \tag{3.3}$$

I momenti vengono presi in considerazione piú frequentemente per r intero positivo:

- con $r = 0$ si ha $\mu_0 = \int_{\mathcal{R}} x^0 f(x)dx = \int_{\mathcal{R}} f(x)dx = 1$, che esprime la condizione di normalizzazione per la distribuzione $f(x)$.
- con $r = 1$ si ha il primo momento, ossia la media, indicata semplicemente con μ;
- con $r = 2$ si ha il secondo momento, che ha la proprietá di essere nullo se e solo se la v.a. é nulla q.c. fuori da 0, cioé $P(X = 0) = 1$
- etc $\cdots$;

Ai fini della nostra trattazione, hanno molta importanza i "momenti $\bar{\mu_r}$ rispetto alla media"definiti da

$$\bar{\mu_r} = E(X - \mu)^r = E(X - E(X))^r \tag{3.4}$$

Dato che $(X-E(X))$ é detta anche "variabile aleatoria scarto (della media)", i μ_r possono essere chiamati anche "momenti della variabile aleatoria scarto"; tra essi ha particolare importanza il secondo momento detto "varianza"e indicato con σ_x^2 o $\sigma^2(X)$ o $Var(X)$, uguale al secondo momento meno il quadrato del primo:

$$\sigma_x^2 = \bar{\mu_2} = E(E - E(X))^2 = E[X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2] =$$

$$E(X^2) - 2(E(X))(E(X)) + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = \mu_2 - \mu^2 \quad (3.5)$$

Altra peculiaritá di questo momento é che si annulla se e solo se la v.a. X é degenere, cioé se X assume con probabilitá 1 un solo valore, che ovviamente coincide con la sua media:

$$E(X - E(X))^2 = 0 \Leftrightarrow X - E(X) = 0 \quad q.c. \quad (3.6)$$

3.2 MODELLO MEDIA-VARIANZA

Passiamo ora alla risoluzione del problema dell'allocazione della ricchezza in un portafoglio di titoli rischiosi, per cui solitamente si utilizza il modello media-varianza introdotto nel 1952 da Harry Markowitz. Ció é dovuto al fatto che, sotto opportune ipotesi, produce portafogli ottimali: nello specifico, con l'applicazione di tale modello si giunge alla costruzione di portafogli basandosi esclusivamente sui primi due momenti della distribuzione dei rendimenti dei titoli considerati (media e varianza, appunto). Peculiaritá di questo approccio é l'ipotesi di normalitá della distribuzione dei rendimenti degli assets utilizzati, vincolo che svanisce successivamente grazie soprattutto all'opera di Chamberlain (1983). Questo studioso dimostró come il modello media-varianza sia applicabile anche in assenza di normalitá, richiedendo piú genericamente l'ellitticitá della distribuzione dei rendimenti, in modo tale che media e varianza rappresentino statistiche sufficienti. Tale ipotesi infatti, assieme alla necessitá di agenti caratterizzati da una funzione di utilitá quadratica possono risultare a volte troppo stringenti, rendendo l'applicazione del modello di Markowitz sub-ottimale (si trova una vasta letteratura che dimostra la non normalitá della distribuzione dei rendimenti di attivitá finanziarie, spesso caratterizzate invece da distribuzioni asimmetriche[2] e fortemente leptocurtiche[3]).

Appurato ció, partiamo osservando che ogni agente economico interessato a detenere un portafoglio di assets finanziari deve affrontare delle scelte durante la fase di investimento, come quali titoli acquistare, che rendimento ottenere, il livello di rischio che si é disposti ad accettare,... In particolare, bisogna sottolineare che vi é un trade-off tra rischio e rendimento atteso di ciascuna attivitá (basti pensare al fatto che titoli maggiormente rischiosi solitamente garantiscono un rendimento piú elevato), motivo per cui l'investitore deve decidere come distribuire al meglio la propria ricchezza, al fine di massimizzare il rendimento del proprio portafoglio e minimizzarne il rischio. Come giá affermato precedentemente, una prima soluzione a tale problema venne proposta da Harry Markowitz, economista dell'Universitá di Chicago, nel "Portfolio Selection", pubblicato nel 1952 nel "Journal of Finance". Nell'articolo venne presentato un modello per la costruzione di portafogli di assets denominato "modello media-varianza", il quale utilizzava i primi due momenti della distribuzione dei rendimenti dei titoli come input, determinando (sotto opportune ipotesi) l'insieme dei portafogli ammissibili.

[2]una distribuzione é simmetrica (rispetto alla mediana) se le modalitá che sono equidistanti dalla mediana hanno la stessa frequenza, asimmetrica se ció non avviene

[3]una distribuzione leptocurtica/iponormale ha la forma allungata con un picco accentuato dato dalla concentrazione dei dati intorno al valore massimo.

Sottolineiamo il fatto che il processo di costruzione di un portafoglio di assets rischiosi costringe l'investitore a prendere determinate decisioni in condizioni di incertezza perché, non essendo noti i rendimenti futuri di ciascun titolo, anche il rendimento del portafoglio risulta ignoto.
Come giá affermato nei capitoli precedenti, in accordo alla teoria economica dell'utilitá attesa di Von Neumann e Morgenstern risalente al 1947, in condizioni di incertezza ciascun agente decide massimizzando il valore atteso della propria funzione di utilitá $U(.)$, la quale associa a ciascun livello di ricchezza un determinato livello di utilitá, scegliendo l'alternativa che garantisce una maggior utilitá attesa. L'investitore che utilizza il modello media-varianza per costruire il proprio portafoglio, alloca la propria dotazione di ricchezza iniziale P_0 su un numero finito n di assets (che possono anche non essere della stessa tipologia). Al termine dell'orizzonte temporale stabilito, il portafoglio avrá generato un rendimento casuale r_p. Formalmente, se $a_1, a_2 \cdots a_n$ sono gli n strumenti finanziari scelti dall'investitore per costruire il portafoglio e P_0 la dotazione disponibile ad inizio periodo, allora la ricchezza al termine dell'orizzonte temporale d'investimento sará pari a

$$P_T = P_0(1 + r_p) \tag{3.7}$$

dove r_P é il rendimento (aleatorio) del portafoglio, ottenuto come media ponderata dei rendimenti r_i, $i = 1 \cdots n$ dei singoli strumenti a_i, $i = 1 \cdots n$ quindi:

$$r_P = \sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i \tag{3.8}$$

Come precedentemente affermato, in condizioni di incertezza ciascun agente economico decide massimizzando il valore atteso della propria funzione di utilitá. Tuttavia, la selezione dei pesi ω_i, $i = 1 \cdots n$ da assegnare ai singoli assets richiede la risoluzione di un problema di programmazione stocastica non lineare che puó risultare non banale, dato che bisognerebbe calcolare:

$$E[U(P_T)] = \int U(P_T) dF(P_T) \tag{3.9}$$

con $F(P_T)$ funzione di ripartizione della ricchezza futura (aleatoria) strettamente connessa ai pesi, ancora incogniti, del portafoglio.

A tal proposito, Markowitz propose di approssimare l'utilitá attesa $E[U(P_T)]$ con una funzione dipendente dai primi due momenti della distribuzione dei rendimenti dei titoli rischiosi. Per giungere a tale approssimazione utilizzó uno sviluppo in serie di Taylor del secondo ordine centrato su $E[P_T]$ (valore atteso della ricchezza al termine dell'orizzonte d'investimento). Sfruttando la definizione di P_T presente in 3.7, partí da:

$$E[P_T] = E[P_0(1 + r_p)] = P_0(1 + E[r_p]) \tag{3.10}$$

grazie alla linearitá di $E[.]$ e al fatto che $E[P_0] = P_0$; da qui, ponendo P_0 pari ad 1 e tralasciando il termine additivo, calcoló lo sviluppo in serie di Taylor dell'utilitá, centrata sul rendimento atteso del portafoglio $E[r_p]$. Considerando il suo valore atteso, si ottiene infatti:

$$E[U(r_p)] \cong U(E[r_p]) + U'(E[r_p])(E[r_p - E[r_p]]) + \frac{1}{2}U''(E[r_p])E[(r_p - E[r_p])^2]$$

$$+E[R_3] \cong U(E[r_p]) + \frac{1}{2}U''(E[r_p])E[(r_p - E[r_p])^2] + E[R_3] \tag{3.11}$$

perché $(E[r_p - E[r_p]]) = 0$, con

$$R_3 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!}U^{(n)}(E[P])E(P - E[P])^n$$

il resto dello sviluppo di ordine 2. Tralasciando il termine del resto, dopo opportune semplificazioni Markowitz ottenne l'approssimazione della funzione di utilitá attesa, senza perdere di generalitá:

$$E[U(r_p)] \cong E[r_p] - \frac{R_a}{2}Var[r_p] \tag{3.12}$$

Si puó facilmente notare come l'utilitá attesa dipenda unicamente dai primi due momenti della distribuzione dei rendimenti del portafoglio (da qui nasce il nome "funzione di utilitá media-varianza") e dall'avversione assoluta al rischio R_a[4]. Utilizzando tale approssimazione, (che diviene esatta sotto

[4] $R_a = -\frac{\frac{\partial^2 U(P)}{\partial P^2}}{\frac{\partial U(P)}{\partial P}}$, con P quantitá di ricchezza dell'agente economico. Data una funzione di utilitá concava, la derivata seconda sará negativa e R_a positivo, denotando avversione al rischio; viceversa, se la funzione é convessa, R_a risulterá negativo, denotando un soggetto amante del rischio

opportune ipotesi [5]), il problema dell'allocazione della ricchezza su n titoli rischiosi si semplifica notevolmente e i momenti utilizzati dalla funzione di utilitá media-varianza diventano:

$$E[r_p] = \mu_p \tag{3.13}$$

$$Var[r_p] = E[(r_p - \mu_p)^2] = \sigma_p^2 \tag{3.14}$$

La soluzione al problema dell'allocazione si ottiene quindi risolvendo il seguente problema di massimo vincolato:

$$\max_{\omega} E[U(r_p)] = \max_{\omega}(E[r_p] - \frac{R_a}{2}Var[r_p]) \tag{3.15}$$

in cui, variando il coefficiente di avversione R_a, si ottengono tutti i possibili portafogli raggiungibili dall'agente. Tuttavia, non tutte le soluzioni individuate risultano efficienti in quanto vi sono portafogli che, a paritá di rischio, offrono un rendimento maggiore e viceversa. L'insieme dei portafogli efficienti si ottiene calcolando:

- $\max_{\omega} E[r_p]$:in questo modo, fissato un livello di rischio σ_p^2, si ricerca il vettore ottimo di pesi ω che massimizzi il rendimento atteso del portafoglio.

- alternativamente il $\min_{\omega} Var[r_p]$ é una soluzione speculare alla precedente poiché, fissato un livello di rendimento μ_p, si cerca il vettore ottimale ω che minimizzi il rischio del portafoglio.

Utilizzando qui di seguito la seconda impostazione, costruiamo il Lagrangiano e le rispettive FOCs (First Order Conditions, o condizioni del primo ordine). Per fare ció, riscriviamo il nostro problema in forma matriciale e avremo che

$$r_p = \omega^T R \tag{3.16}$$

[5] La metodologia proposta da Markowitz richiede che la distribuzione dei rendimenti dei titoli utilizzati sia ellittica (ad esempio Normale) e che la funzione di utilitá sia quadratica. Con tale tipologia di utilitá, l'espansione in serie di Taylor é priva di resto e l'approssimazione diviene esatta.

con $R \in \mathcal{R}^n$ il vettore aleatorio contenete i rendimenti degli n assets ed $\omega \in \mathcal{R}^n$ il vettore dei pesi del portafoglio, da cui

$$E[r_p] = \omega^T \mu$$
$$Var[r_p] = \omega^T \Sigma \omega$$

con $\mu \in \mathcal{R}^n$ vettore dei valori attesi e Σ matrice (definita positiva) di varianza e covarianza dei rendimenti degli n assets. Il problema di massimo vincolato diventa quindi

$$\max_{\omega}(\omega^T \mu - \frac{R_a}{2}\omega^T \Sigma \omega) \tag{3.17}$$

con $\omega^T I = 1$ e $r_p = \omega^T R$, in cui I é un vettore di n componenti uguali a 1. Per trovare l'insieme dei portafogli efficienti si calcolerá

$$\max_{\omega} \omega^T \mu \tag{3.18}$$

con $\omega^T I = 1$ e $\omega^T \Sigma \omega = \sigma_p^2$, oppure

$$\min_{\omega} \omega^T \Sigma \omega \tag{3.19}$$

con $\omega^T = 1$ e $\omega^T \mu = \mu_p$ e, seguendo il secondo procedimento, il corrispondente lagrangiano[6] sará

[6]Nella programmazione matematica, il metodo dei moltiplicatori di Lagrange é quello che riduce i punti stazionari di una funzione (chiamata obiettivo) in I variabili e J vincoli di frontiera $\vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}$, a quelli di una funzione in $I + K$ variabili non vincolata detta Lagrangiana, introducendo cioé tante variabili quanti sono i vincoli chiamati appunto moltiplicatori. Se $\vec{x}$ é stazionario per il problema vincolato originario, allora esiste un $\vec{\gamma *}$ tale che $(\vec{x*}, \vec{\gamma *})$ é stazionario per la lagrangiana(ossia non tutti i punti stazionari portano ad una soluzione del problema originario). Questo metodo fornisce infatti una soluzione necessaria ma non sufficiente per l'ottimizzazione nei problemi vincolati. In economia l'ottimizzazione vincolata gioca un ruolo centrale perché economicamente il valore del moltiplicatore di Lagrange della soluzione ottimale é interpretabile come shadow price (il prezzo a cui ammonta l'aumento della funzione oggetto se il vincolo diminuisce di una unitá, ossia il prezzo massimo che si é disposti a pagare per una unitá in piú di una data risorsa limitata) associato al vincolo, ossia l' infinitesimale cambiamento nella funzione obiettivo derivante da una variazione infinitesimale nel vincolo. Ció deriva dal fatto che alla soluzione ottimale il gradiente della funzione oggetto é una combinazione lineare dei gradienti delle funzioni vincolo con i pesi uguali ai moltiplicatori di Lagrange.
Per esempio se un vincolo limita la quantitá di lavoro disponibile a 40 ore settimanali,

$$\mathcal{L} = \omega^T \Sigma \omega - \gamma_1(\omega^T \mu - \mu_P) - \gamma_2(\omega^T I - 1) \tag{3.20}$$

con γ_1 moltiplicatore di rendimento e γ_2 moltiplicatore di budget.
Le $n+2$ FOCs saranno[7]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega^T} = \Sigma\omega - \gamma_1 \mu - \gamma_2 I = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_1} = \omega^T \mu - \mu_P = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_2} = \omega^T I - 1 = 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

da cui segue immediatamente l'espressione per il vettore di pesi del portafoglio appartenente alla frontiera in funzione dei moltiplicatori di Lagrange γ_1 e γ_2:

$$\hat{w} = \Sigma^{-1}(\gamma_1 \mu + \gamma_2 I) \tag{3.22}$$

Sostituendo nella seconda e terza equazione si ha un sistema di equazioni in γ_1 e γ_2, per la cui risoluzione risulta utile definire

$$\begin{gathered} A = \mu^T \Sigma^{-1} \mu \\ B = \mu^T \Sigma^{-1} I \\ C = I^T \Sigma^{-1} I \\ \Delta = AC - B^2 \end{gathered}$$

lo shadow price dirá quanto si dovrebbe essere disposti a pagare per un ulteriore ora di lavoro; se il costo del vincolo é pari a \$ 10, per esempio, non si dovrebbero pagare piú di 10 dollari l'ora per il lavoro supplementare. Il costo del lavoro minore di \$ 10 all'ora aumenterá il valore oggettivo, il costo maggiore diminuirá il valore oggettivo e il costo del lavoro pari a esattamente 10 dollari fará si che il valore della funzione oggetto rimanga la stessa.

[7]Qui con $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega^T}$ intendiamo il gradiente rispetto alle variabili $\omega_1, \omega_2 \cdots \omega_n$ ossia
$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_1}$
$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_2}$
$\cdots$
$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_n}$

Di sicuro A e B saranno positivi dato che Σ é una matrice definita positiva; analogamente anche Δ avrá segno positivo perché $(B\mu - AI)^T\Sigma(B\mu - AI) > 0$ al contrario, non avremo informazioni sulla positivitá di B. Il sistema da risolvere sará quindi

$$A\gamma_1 + B\gamma_2 = \mu$$
$$B\gamma_1 + C\gamma_2 = I$$

da cui

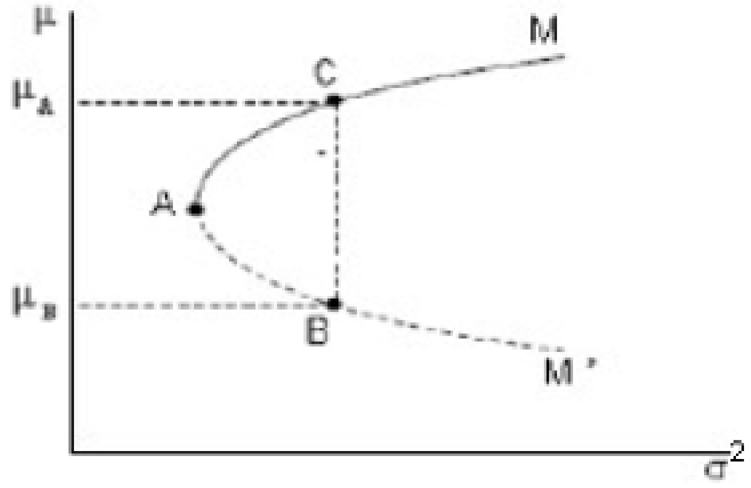
$$\gamma_1 = \frac{C\mu_P - B}{\Delta}$$
$$\gamma_2 = \frac{A - B\mu_P}{\Delta}$$
$$\widehat{w} = \frac{1}{\Delta}[A\Sigma^{-1}I - B\Sigma^{-1}\mu + (C\Sigma^{-1}\mu - B\Sigma^{-1}I)\mu_P]$$

Risulta cha la varianza di questo portafoglio (ottimo) si esprime in funzione di μ mediante un polinomio di secondo grado, dato che

$$\widehat{w^T}\Sigma\widehat{w} = \sigma_P^2 = \gamma_1\mu_P + \gamma_2 = \frac{A - 2B\mu_P + C\mu_P^2}{\Delta} \tag{3.23}$$

Ad una stessa varianza corrisponderanno cosí in generale (a parte il caso del portafoglio con varianza minima) piú rendimenti attesi, corrispondenti a portafogli sulla frontiera. Dato che in corrispondenza del rendimento atteso $\frac{B}{C}$ abbiamo la varianza minima $\frac{1}{C}$, per valori del rendimento atteso superiori a tale valore avremo la frontiera efficiente o frontiera dei portafogli efficienti (formata dai portafogli con rendimento atteso maggiore rispetto a quelli con varianza minima), per valori del rendimento atteso inferiori a $\frac{B}{C}$ avremo la frontiera dei portafogli non efficienti.
L'intera curva MM' della figura 3.1 (compresa la parte tratteggiata) rappresenta la frontiera dei portafogli di minima varianza; per ogni dato livello di μ, su MM' troviamo il portafoglio che ha uno scarto quadratico medio, e di conseguenza una varianza, minima. La parte AM non tratteggiata della curva, il tratto crescente di MM', é la frontiera dei portafogli efficienti. Lo scarto quadratico medio σ_P rappresenta il primo insieme di valori, ed é un ramo di iperbole sul piano $\sigma - \mu$; ogni investitore avente una funzione di utilitá di tipo "media-varianza", individua il portafoglio ottimale tra quelli appartenenti alla frontiera efficiente, in base alla propria avversione al rischio. Osserviamo anche che, partendo dall'equazione 3.22 in cui nel primo addendo

Figura 3.1: Frontiera dei portafogli di minima varianza e di efficienza



moltiplichiamo per B e dividiamo per B^T [8] e nel secondo moltiplico per C e divido per C^T [9], qualunque portafoglio della frontiera puó essere espresso come combinazione lineare di due portafogli:

$$\widehat{w} = \gamma_1 B \frac{\Sigma^{-1}\mu}{I^T\Sigma^{-1}\mu} + \gamma_2 C \frac{\Sigma^{-1}I}{I^T\Sigma^{-1}I} \tag{3.24}$$

Questo risutato, in apparenza molto banale, va sotto il nome di Teorema di separazione tramite due fondi comuni, il cui risultato ha l'interessante implicazione che un investitore con preferenze di tipo media-varianza non ha bisogno di valutare tutti i titoli scambiati sul mercato, ma é sufficiente che si concentri sui due fondi comuni, ossia sui portafogli

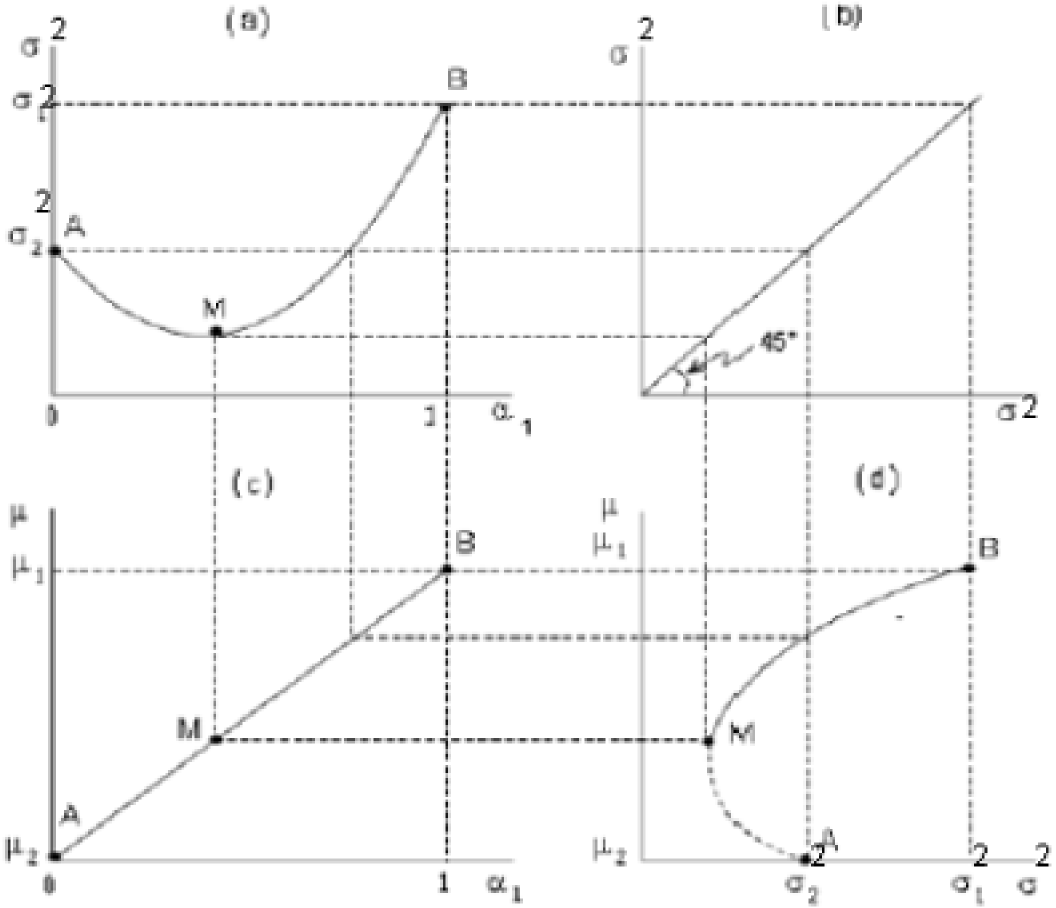
[8] Dato che $\Sigma = \Sigma^T$ per definizione di matrice varianza-covarianza, anche il prodotto tra le matrici μ^T, Σ^{-1} e I (ossia B per definizione precedentemente data) é uguale al prodotto tra le matrici I^T, $(\Sigma^{-1})^T = \Sigma^{-1}$ e $(\mu^T)^T = \mu$ (ovvero B^T per la proprietá della trasposizione del prodotto di tre matrici). B^T sará quindi uguale a B da cui segue che, se moltiplichiamo e dividiamo il primo addendo di 3.22 per la stessa quantitá, il risultato rimane invariato

[9] Analogamente alla precedente nota, dato che $\Sigma = \Sigma^T$ per definizione di matrice varianza-covarianza, anche il prodotto tra le matrici I^T, Σ^{-1} e I (ossia C per definizione precedentemente data) é uguale al prodotto tra le matrici $(I^T)^T = I$, $(\Sigma^{-1})^T = \Sigma^{-1}$ e I^T (ovvero C^T per la proprietá della trasposizione del prodotto di tre matrici). Avremo quindi che $C^T = C$ da cui segue che, se moltiplichiamo e dividiamo il secondo addendo di 3.22 per la stessa quantitá, il risultato rimane invariato

$$\frac{\Sigma^{-1}\mu}{I^T\Sigma^{-1}\mu} \text{ e } \frac{\Sigma^{-1}I}{I^T\Sigma^{-1}I}$$

Indicando con μ_1, μ_2, σ_1 e σ_2 rispettivamente il valore atteso del titolo 1, il valore atteso del titolo 2, la varianza del titolo 1 e la varianza del titolo 2, α_1 e α_2 i costi dei due titoli, possiamo osservare come sono legate tra loro queste grandezze: nel primo grafico é rappresentato lo scarto quadratico medio del

Figura 3.2: Frontiera dei portafogli di minima varianza e di efficienza



portafoglio in funzione di α_1, nel secondo si ottiene una retta con coefficiente angolare pari a 1 (l'inclinazione rispetto all'asse delle ascisse é di 45^o) e nel terzo ottengo ancora una retta, ma questa volta $\mu = \alpha_1(\mu_1 - \mu_2) + \mu_2$.

Capitolo 4

ESTENSIONE A MOMENTI DI ORDINE SUPERIORE

4.1 PORTAFOGLIO CON SINGOLA ATTIVITÁ RISCHIOSA

Supponiamo di trovarci di fronte ad una singola attivitá rischiosa, congiuntamente ad un titolo privo di rischio endogeno[1] che matura all'orizzonte T; in questo caso, l'attivitá rischiosa coincide col portafoglio di mercato.
Supponendo in accordo con la teoria appena enunciata che esistano solo i primi due "momenti", deviazione standard e media, avremo un valore medio μ_0 e una deviazione standard $\sigma_0 = 0$ per l'attivitá senza rischio, e μ_M e σ_M per il portafoglio di mercato. Possiamo immaginare questi due parametri come "prodotti congiunti"[2] spettanti al proprietario dei titoli e, proprio come ogni altro prodotto trattato dal mercato, entrambi hanno i loro prezzi di mercato: il "prezzo del ritorno monetario atteso"(expected money) (ad esempio il prezzo per un Euro che ci aspettiamo di ricevere tra un anno), e il "prezzo del rischio"(cioé il rischio di ricevere un Euro in piú o in meno rispetto al ritorno previsto). Con ció non vogliamo affermare che questi parametri rappresentino il risultato della "massimizzazione dell'utilitá attesa"(come succede di solito), piuttosto vogliamo sottolineare come questi due

[1]che dipende dalle altre variabili del modello, diversamente dalle variabili esogene che sono predeterminate a prescindere dalle altre

[2]I prodotti congiunti, secondo la definizione di Alfred Marshall, sono quei prodotti per cui non é possibile produrne uno senza produrre anche gli altri; tale definizione risulta corretta solo in parte in quanto essa ipotizza che la produzione congiunta avvenga per inevitabili vincoli tecnici, mentre in realtá la produzione congiunta puó essere indotta anche da ragioni di opportunitá economica che suggeriscono di avvantaggiarsi di particolari economie di scala o di scopo che il grande impianto congiunto puó offrire

parametri rappresentino beni e servizi: possono essere misurati, hanno un loro prezzo di mercato e vanno concepiti come una funzione di utilitá, anche se di tipo ordinale[3]. Indichiamo ora col simbolo P_μ il prezzo unitario di mercato del ritorno previsto e con P_σ il prezzo unitario di mercato del rischio (inteso come deviazione attesa, volatilitá etc etc). Anche se solitamente le persone amano ricevere un ritorno economico ma non un rischio, quest'ultimo é una componente imprescindibile delle attivitá e la sua assenza influirebbe direttamente sul prezzo di mercato. Il termine "rischio"tende (erroneamente) ad assumere una valenza esclusivamente negativa, ma nella realtá, poiché fa riferimento all'incertezza dei risultati, un maggior livello di rischio sta ad indicare una:

- maggiore probabilitá di riportare delle perdite;
- maggiore probabilitá di riportare dei guadagni piú elevati.

rivelandosi essere, al tempo stesso, un elemento negativo ed una opportunitá. Possiamo scrivere il prezzo del portafoglio di mercato come :

$$P_M = \mu_M P_\mu + \sigma_M P_\sigma \tag{4.1}$$

La formula ha, per la teoria dell'asset price, lo stesso valore di quello che ha il conto in un ristorante : semplicemente afferma che il valore totale é dato dalla somma dei singoli prezzi presi tante volte quanto ogni singola componente. Il titolo privo di rischio (in cui scompare il secondo termine della somma) non ha eccezioni:

$$P_0 = \mu_0 P_\mu \tag{4.2}$$

e se il valore atteso vale 1 ($\mu_0 = 1$), allora possiamo identificare il prezzo di mercato della media con il prezzo del bond zero-coupon[4]:

$$P_0 = P_\mu \tag{4.4}$$

[3]Secondo la teoria dell'utilitá ordinale, l'utilitá non é misurabile e quantificabile in base al consumo di ciascun bene, ma all'interno di questa concezione é comunque possibile esprimere le proprie preferenze, stabilendo semplicemente "l'ordine"delle utilitá, affermando con precisione se un bene é preferito ad un altro (cioé se l'utilitá derivante dal consumo di un bene é maggiore o minore di quella derivante dal consumo di un altro bene).

[4]Un'obbligazione zero-coupon é un bond il cui rendimento é calcolato come differenza tra la somma che il sottoscrittore riceve alla scadenza e la somma che versa al momento

Sostituendo la 4.4 in 4.1 avremo

$$P_M = \mu_M P_0 + \sigma_M P_\sigma \tag{4.5}$$

ossia il prezzo P_M é il valore atteso scontato $\mu_M P_0$ a cui si aggiunge $\sigma_M P_\sigma$ proporzionale al rischio. Bisogna ora notare che il prezzo P_M e i suoi momenti sono osservabili e che il mercato riflette l'equilibrio dei valori, infatti possiamo ottenere:

$$P_\sigma = \frac{P_M - \mu_M P_0}{\sigma_M} \tag{4.6}$$

Sottolineiamo inoltre che l'avversione al rischio coincide con la negativitá di P_σ, dovuto al prezzo del portafoglio minore rispetto al valore atteso scontato. Per esempio, andando a sostituire valori numerici nella formula precedente tali che $P_M < \mu_M$:

- $P_M = 1$
- $\mu_M = 1,1$
- $P_0 = 0,97$
- $\sigma_M = 0,50$

otteniamo $P_\sigma < 0$:

$$P_\sigma = \frac{1 - 1,1 \cdot 0,97}{0,50} = -0,134 < 0 \tag{4.7}$$

della sottoscrizione, ossia

$$r = \frac{Somma \;\; rimborsata - Somma \;\; versata}{Somma \;\; versata} \tag{4.3}$$

Viene chiamato cosí perché quando le obbligazioni avevano forma cartacea, il pagamento degli interessi avveniva dietro consegna di un tagliando staccato dal bond; in questo caso non esisteva tale tagliando.

4.2 PORTAFOGLIO CON DIVERSE ATTIVITÁ RISCHIOSE

Se invece ora supponiamo che il portafoglio di mercato sia una combinazione lineare di diverse attivitá rischiose, il prezzo di ciascun portafoglio P_j con rendita x_j é semplicemente ottenuta dalla 4.5 con

$$P_j = \frac{\partial P_M}{\partial x_j} = \mu_j P_0 + \frac{\partial P_\sigma}{\partial \sigma_M} \cdot \frac{\partial \sigma_M}{\partial x_j} = \mu_j P_0 + P_\sigma \cdot \frac{\partial \sigma_M}{\partial x_j} \tag{4.8}$$

con

$$\frac{\partial \sigma_M}{\partial x_j} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \sigma_{jk}}{\sigma_M} = \frac{Cov(\tilde{P}_j, \sum_{k=1}^{n} x_k \tilde{P}_k)}{\sigma_M} = \frac{Cov(\tilde{P}_j, \tilde{P}_M)}{\sigma_M} = \frac{E[(\tilde{P}_M - \mu_M)(\tilde{P}_j - \mu_j)]}{\sigma_M} \tag{4.9}$$

da cui, sostituendo la 4.6 e la 4.9 in 4.8 otteniamo

$$P_j = \mu_j P_0 + \frac{Cov(\tilde{P}_j, \tilde{P}_M)}{\sigma_M^2}(P_M - \mu_M P_0) \tag{4.10}$$

che é chiaramente la CAPM di Sharpe (1964) in termini di prezzo. Infatti risistemando:

$$P_j = \mu_j P_0 + \frac{P_M \cdot P_j \cdot Cov(\frac{\tilde{P}_j}{P_j}, \frac{\tilde{P}_M)}{P_M}}{\sigma_M^2}(P_M - \mu_M P_0) \tag{4.11}$$

$$P_j = \mu_j P_0 + \frac{P_M^2 \cdot P_j \cdot Cov(\frac{\tilde{P}_j}{P_j}, \frac{\tilde{P}_M)}{P_M}}{\sigma_M^2}(1 - \mu_M \frac{P_0}{P_M}) \tag{4.12}$$

e dividendo entrambi i membri per P_0 e per P_j otteniamo

$$\frac{1}{P_0} = \frac{\mu_j}{P_j} + \frac{P_M^2 \cdot Cov(\frac{\tilde{P}_j}{P_j}, \frac{\tilde{P}_M)}{P_M}}{\sigma_M^2}(\frac{1}{P_0} - \frac{\mu_M}{P_M}) \tag{4.13}$$

da cui, risistemando

$$\frac{\mu_j}{P_j} = \frac{1}{P_0} - \frac{P_M^2 Cov(\frac{\tilde{P}_j}{P_j}, \frac{\tilde{P}_M}{P_M})}{\sigma_M^2}(\frac{1}{P_0} - \frac{\mu_M}{P_M}) \tag{4.14}$$

ossia

$$\bar{R}_j = R_F + \frac{Cov(\tilde{R}_j, \tilde{R}_M)}{\sigma_{RM}^2}(\bar{R}_M - R_F) \tag{4.15}$$

Ricordiamo che con Capital Asset Pricing Model (brevemente, CAPM) intendiamo un modello di equilibrio dei mercati finanziari, proposto da William Sharpe in uno storico contributo nel 1964, e indipendentemente sviluppato da Lintner nel 1965 e Mossin 1966. Questo modello si basa su 7 ipotesi:

- Ogni investitore sceglie il proprio portafoglio massimizzando l'utilitá attesa. L'utilitá attesa differisce da investitore a investitore ma dipende in ogni caso soltanto da μ e σ^2; ció equivale ad assumere che i rendimenti dei titoli seguano una distribuzione normale o che la funzione di utilitá sia quadratica. Le scelte di portafoglio sono effettuate in base al criterio media-varianza;

- L'investitore puó indebitarsi e concedere prestiti al tasso di interesse di un'attivitá priva di rischio (RFR), ossia esiste un titolo non rischioso che puó essere venduto o acquistato in quantitá illimitate;

- Tutti gli investitori dispongono delle stesse informazioni e hanno le stesse aspettative riguardo ai rendimenti futuri dei titoli e alla loro variabilitá; tutti gli investitori infatti concordano sui rendimenti attesi dei titoli e sulle loro varianze e covarianze;

- Tutti gli investitori hanno lo stesso orizzonte temporale, ovvero tutte le decisioni di acquisto e vendita dei titoli vengono prese nello stesso istante e hanno la medesima durata;

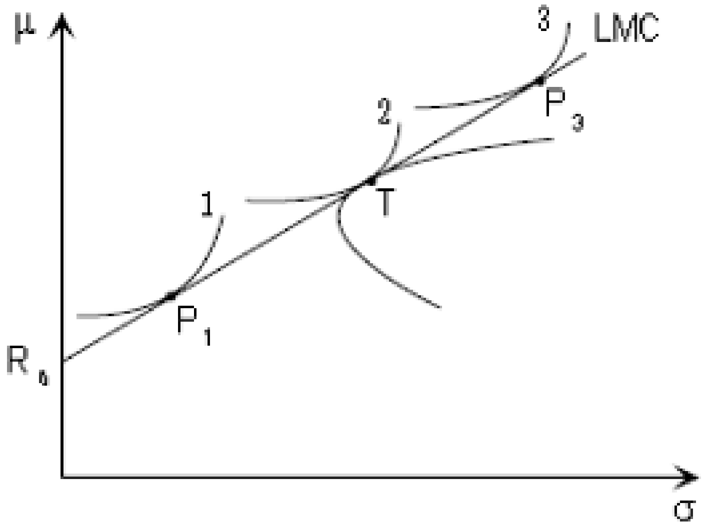
- Tutti gli investitori assumono come dati i prezzi dei titoli;

- Non ci sono costi di transazione o negoziazione che gravano sugli scambi, neanche imposte;

- Le quantitá disponibili di tutti i titoli sono fisse e, inoltre, ogni titolo é infinitamente divisibile.

Le prime due ipotesi ci permettono di trarre l'importante conclusione che i portafogli richiesti da tutti gli individui si trovano sulla stessa frontiera efficiente, anche se (naturalmente) differiscono tra loro.

Figura 4.1: Tre diversi titoli sulla medesima frontiera



Benché le scelte di questi tre investitori siano diverse, tutte e tre si trovano sulla medesima frontiera. Questa conclusione discende dall'ipotesi di aspettative omogenee: poiché tutti gli investitori percepiscono lo stesso insieme di opportunitá e quindi lo stesso portafoglio di tangenza, la retta é rappresentativa dell'intero mercato e viene denominata linea del mercato dei capitali (lmc).
In breve, la CAPM stabilisce una relazione tra il rendimento di un titolo e la sua rischiositá, misurata tramite un unico fattore di rischio, detto beta, che indica quanto il valore del titolo si muova in sintonia col mercato. Dato che il rischio sistematico o market risk (β) é la componente di rischio spiegata dalla sensibilitá del prezzo del titolo alle oscillazioni di mercato, matematicamente é proporzionale alla covarianza tra rendimento del titolo e andamento del mercato, ossia

$$\beta_{im} = \frac{Cov(r_i, r_m)}{Var(r_m)} \tag{4.16}$$

La formula alla base di questo modello puó essere espressa come

$$E[r_i] = \beta_{im}(E[r_m] - r_f) + r_f \tag{4.17}$$

dove r_i,r_m e r_f sono rispettivamente il rendimento lordo del titolo in questione, del portafoglio di mercato, e quello privo di rischio. Una formulazione alternativa nota come zero-beta CAPM, puó essere scritta come

$$E[r_i] - E[r_0] = \beta_{im}(E[r_m] - E[r_0]) \tag{4.18}$$

dove r_0 denota il rendimento del portafoglio appartenente alla frontiera dei portafogli avente covarianza nulla con il portafoglio di mercato.

4.3 SCELTA DEL PORTAFOGLIO

Come affermato fin'ora, é ben noto che la teoria delle decisioni in condizioni di incertezza indirizza le decisioni verso le distribuzioni di probabilitá, in modo che le preferenze e l'utilitá ordinale V siano definite sopra l'insieme $\mathcal{J}$ delle funzioni di distribuzione:

$$V : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{R} \tag{4.19}$$

$$V : F \longmapsto V(F) \tag{4.20}$$

Invece di introdurre l'assioma di indipendenza e il teorema dell'utilitá attesa ad esso collegato(vedi capitolo 2, sezione Teoria dell'utilitá), rappresentiamo la distribuzione di probabilitá attraverso i suoi momenti, in modo che in generale

$$V(F) = H(\mu, \sigma, \zeta, \kappa, \cdots) \tag{4.21}$$

con $\mu, \sigma, \zeta, \kappa, \cdots$ momenti. Ció implica che ogni attivitá, cosí come ogni bene di consumo nella teoria di Lancaster (1966), é un insieme di caratteristiche (momenti) con implicazioni significative sul prezzo. Ricordiamo che secondo questa teoria, il consumo si configura come un processo nel quale merci singole o gruppi di merci (input) vengono trasformati per ottenere determinate modalitá per soddisfare una particolare esigenza (output); qui le qualitá attribuite a uno o piú beni vengono tradotte in una categoria quantitativa, in un insieme di attributi misurabili mediante numeri reali: ogni bene puó essere definito da un vettore di caratteristiche alle quali é connessa la sua utilitá e allo stesso tempo ogni bisogno puó essere soddisfatto da differenti beni presenti nel mercato. Il consumatore sceglierá quel prodotto che presenta un insieme di caratteristiche tali da massimizzare la sua soddisfazione. Lancaster fonda la sua teoria su 3 postulati:

1. l'utilitá di un bene é data dalle sue caratteristiche intrinseche e oggettive;
2. ogni bene possiede piú di una caratteristica e ogni caratteristica puó essere posseduta da piú beni;
3. ogni combinazione di beni puó presentare caratteristiche diverse dalla somma di quelle possedute da ogni singolo bene.

La differenza tra questo approccio e quello tradizionale consiste nel fatto che qui si definiscono due spazi: lo spazio delle caratteristiche in cui é espressa la funzione di utilitá, e lo spazio dei beni, in cui é espresso il vincolo di bilancio; si risolvono trasformando il primo spazio nel secondo o viceversa. Supponendo che il reddito sia destinato tutto all'acquisto di un solo prodotto, il consumatore sceglierá quella quantitá che gli permette di avere l'ammontare maggiore delle due caratteristiche, nel rispetto della propria capacitá di spesa. Egli puó peró decidere di consumare anche un paniere di due beni, e anche in questo caso il soggetto si collocherá in punti dello spazio che gli garantiscano comunque i valori piú elevati delle due caratteristiche; questi punti sono rappresentati dalla spezzata che unisce le combinazioni ottime delle due qualitá ricavabili da ciascun processo di consumo: questa é la frontiera di efficienza del consumo, dove, a paritá di tecnologia e di prezzi, nessun altro insieme di due beni consente di ottenere livelli maggiori delle due quantitá compatibili con il reddito a disposizione. Se, peró, il prezzo di una delle merci aumentasse, allora, per il principio di utilitá marginale decrescente, la quantitá acquistata diminuirebbe e, di conseguenza, anche il livello raggiungibile delle due caratteristiche. La frontiera avrebbe un diverso andamento ma non sarebbe piú il luogo delle combinazioni ugualmente efficienti, in quanto un diverso paniere di beni potrebbe fornire una soddisfazione maggiore in termini delle due quantitá, indipendentemente dai gusti del consumatore. La teoria del comportamento del consumatore affronta quindi il problema dei modi di utilizzazione dei beni non dal punto di vista delle preferenze ma dal punto di vista del valore intrinseco dei beni di consumo. L'elemento di originalitá introdotto da Lancaster rispetto al modello tradizionale consiste nel fatto che egli parte dalla constatazione che ciascuna merce possiede determinate caratteristiche sulle quali si sofferma l'interesse del consumatore:egli ipotizza che l'obiettivo principale legato all'attivitá di consumo svolta dal soggetto sia quello di ottenere o di entrare in possesso di queste caratteristiche. Una delle critiche che Lancaster rivolge ai modelli tradizionali riguarda il fatto che ci sono alcuni fenomeni come l'introduzione di un nuovo bene, che la teoria tradizionale riesce a collocare nel proprio ambito solo con grande difficoltá. Il metodo suggerito dalla teoria tradizionale per procedere in questo senso consiste nel presumere che quando ci siano diversi beni, il consumatore abbia un ordinamento di preferenze definito rispetto a questi beni e che, con l'introduzione del nuovo bene, il suo ordinamento di preferenze venga ridefinito in base a tutti gli altri, senza peró spiegare in che modo i due ordinamenti di preferenze siano interrelati e perció quale sará l'effetto legato all'introduzione del nuovo bene sulla domanda degli altri beni. In alternativa, si potrebbe anche presumere che il consumatore possegga un ordinamento di preferenze definito rispetto a tutti i beni: quelli che esistono ora e quelli che esisteranno

nel futuro, ma si tratta anch'essa di una procedura insoddisfacente perché necessiterebbe una quantitá di conoscenze sul consumatore e sul suo comportamento molto ampie e difficilmente ottenibili.
Tornando alla nostra tesi, nel caso di una singola attivitá rischiosa abbiamo, per l'investitore rappresentativo con bene attuale P:

$$\begin{cases} \max_{x_0,x_M} H(\mu,\sigma) \\ \mu = x_0\mu_0 + x_M\mu_M \\ \sigma = x_M\sigma_M \\ P = x_0P_0 + x_MP_M \end{cases} \tag{4.22}$$

il cui lagrangiano sará

$$\mathcal{L} = H(\mu,\sigma) - \gamma \cdot P = H(\mu,\sigma) - \gamma(x_0P_0 + x_MP_M) \tag{4.23}$$

La prima condizione al bordo (FOC) é:

$$\frac{\partial H}{\partial x_0} - \gamma\frac{\partial P}{\partial x_0} = 0$$

che si scrive anche

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x_0} + \frac{\partial H}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x_0} - \gamma\frac{\partial P}{\partial x_0} = 0$$

cioé

$$\frac{\partial H}{\partial \mu}\mu_0 - \gamma P_0 = 0 \tag{4.24}$$

dato che $\frac{\partial H}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x_0} = 0$ perché $\frac{\partial \sigma}{\partial x_0} = 0$.
La seconda condizione al bordo é invece:

$$\frac{\partial H}{\partial x_M} - \gamma\frac{\partial P}{\partial x_M} = 0$$

ossia

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x_M} + \frac{\partial H}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x_M} - \gamma\frac{\partial P}{\partial x_M} = 0$$

da cui deriva

$$\frac{\partial H}{\partial \mu}\mu_M + \frac{\partial H}{\partial \sigma}\sigma_M - \gamma P_M = 0 \tag{4.25}$$

Da 4.24 otteniamo

$$\gamma = \frac{\partial H}{\partial \mu} \cdot \frac{\mu_0}{P_0} \tag{4.26}$$

andando a sostituire in 4.25 avremo che

$$\frac{\partial H}{\partial \mu}\mu_M + \frac{\partial H}{\partial \sigma}\sigma_M - \frac{\partial H}{\partial \mu}\frac{\mu_0}{P_0}P_M = 0 \tag{4.27}$$

Ora, dividendo per $\dfrac{\partial H}{\partial \mu}$ e risistemando, assumendo senza perdere di generalitá che $\mu_0 = 1$, otteniamo

$$\mu_M + \frac{\frac{\partial H}{\partial \sigma}}{\frac{\partial H}{\partial \mu}}\sigma_M - \frac{\mu_0}{P_0}P_M = 0 \tag{4.28}$$

$$\frac{P_M}{P_0} = \mu_M + \frac{\frac{\partial H}{\partial \sigma}}{\frac{\partial H}{\partial \mu}}\sigma_M \tag{4.29}$$

In termini di momenti, il bene attuale P puó equivalentemente essere espresso come

$$P = \mu P_\mu + \sigma P_\sigma \tag{4.30}$$

e, conseguentemente dalle FOC, da

$$\frac{\partial H}{\partial \sigma} = P_\sigma \text{ e } \frac{\partial H}{\partial \mu} = P_\mu$$

segue che

$$\frac{\frac{\partial H}{\partial \sigma}}{\frac{\partial H}{\partial \mu}} = \frac{P_\sigma}{P_\mu} \tag{4.31}$$

da cui moltiplicando entrambi i mebri della 4.29 e sostituendo in questa equazione la 4.31

$$P_M = \mu_M P_0 + \frac{P_\sigma}{P_\mu}P_0\sigma_M = \mu_M P_0 + \sigma_M P_\sigma \tag{4.32}$$

dove l'ultima uguaglianza deriva da $P_0 = \mu_0 P_\mu = P_\mu$.
Nel caso di n attivitá rischiose, il problema diventa

$$\begin{cases} \max_{x_0,x_1,\cdots x_k,\cdots x_n} H(\mu,\sigma) \\ \mu = x_0\mu_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k\mu_k \\ \sigma = \sqrt{\sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_h x_k \sigma_{hk}} \\ P = x_0 P_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k P_k \end{cases} \tag{4.33}$$

con le *FOC*

$$\frac{\partial H}{\partial \mu}\mu_0 - \gamma P_0 = 0 \tag{4.34}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mu}\mu_j + \frac{\partial H}{\partial \sigma}\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \sigma_{jk}}{\sigma} - \gamma P_j = 0 \tag{4.35}$$

da cui, usando $P_0 = P_\mu$ e $P_j = \dfrac{\partial P_M}{\partial x_j} = \mu_j P_0 + \dfrac{\partial \sigma_M}{\partial x_j} P_\sigma$ da 4.8

$$P_j = \mu_j P_0 + \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \sigma_{jk}}{\sigma} P_\sigma = \mu_j P_0 + \frac{Cov(\tilde{P}_j, \sum_{k=1}^{n} x_k \tilde{P}_k)}{\sigma} P_\sigma \tag{4.36}$$

In condizioni di equilibrio, $x_0 = 0$ e $\sigma = \sigma_M$ (la volatilitá del portafoglio di mercato), e in questo modo la 4.36 sará equivalente a 4.8, ossia alle CAPM: ció significa che il prezzo in condizioni di equilibrio é il valore atteso μ_j scontato e aggiustato dal rischio proporzionale alla covarianza tra il prezzo e il portafoglio di mercato.
Bisogna notare che l'assetto rischioso che ha il prezzo di mercato P_σ potrebbe esistere occasionalmente nel mondo reale come un assetto con un valore atteso nullo. Per esempio, nel caso di un contratto con "synthetic forward"[5] (una

[5] Un contratto synthetic forward é ottenuto combinando un'opzione di tipo long call (contratti che conferiscono al possessore il diritto di vendere uno strumento finanziario ad una data scadenza futura ad un prezzo prefissato) e un'opzione di tipo long put (contratti che conferiscono il diritto di comprare lo strumento nanziario), con medesimo strike price (il prezzo fissato da entrambe le parti a cui poter vendere o comprare il bene sottostante), scadenza ed entrambe opzioni Europee (possono essere esercitate solo alla data di scadenza). Se il bene sottostante é inferiore allo strike price, viene esercitata l'opzione call e la put scade senza essere esercitata; viceversa. Questo tipo di opzione é usato per ridurre il rischio

opzione call long e una put long) scritto sull'assetto P_j con strike price uguale al valore atteso μ_j, la formula del prezzo risulta essere:

$$P_{FW} = P_\sigma \frac{Cov(\tilde{P}_M, \tilde{P}_j)}{\sigma_M} \tag{4.37}$$

Se l'assetto é il portafoglio di mercato stesso, abbiamo semplicemente che il prezzo del contratto é P_σ per σ_M, una quantitá negativa. In questo caso infatti, lo strike price é

$$\mu_M = \frac{P_M - P_\sigma \sigma_M}{P_0} \tag{4.38}$$

valore maggiore rispetto a $\frac{P_M}{P_0}$, prezzo per cui l'opzione ha valore zero. D'altra parte in un articolo di Cesari e D'Adda del 2003 troviamo che la semplice procedura di prezzaggio suggerita sopra potrebbe essere applicata con successo alle opzioni, permettendo di riprodurre l'equazione di Black & Scholes e le sue possibili generalizzazioni.[6]

[6]Il modello di Black-Scholes-Merton, spesso semplicemente detto di Black-Scholes, é un modello dell'andamento nel tempo del prezzo di strumenti finanziari, usato in particolar modo per le opzioni. La formula di Black e Scholes é una formula matematica per il prezzo di non arbitraggio di un'opzione call o put di tipo europeo che puó essere derivata a partire dalle ipotesi del modello. Definito S_t il prezzo del bene sottostante, $f(S_t, t)$ il prezzo dello strumento derivato, r il tasso di interesse, la formula sará

$$rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - rf = 0 \tag{4.39}$$

4.4 ESTENSIONE A MOMENTI DI ORDINE SUPERIORE

Se sfruttiamo ulteriori momenti oltre alla media e alla deviazione standard, il ragionamento procede nel modo seguente: il prezzo del portafoglio di mercato ha la semplice forma di uno scontrino:

$$P_M = \mu_M P_\mu + \sigma_M P_\sigma + \varsigma_M P_\varsigma + \kappa_M P_\kappa + \cdots \tag{4.40}$$

con ς_M e κ_M etc. rispettivamente l'asimmetria[7](il terzo momento), la curtosi[8] (il quarto momento) e gli altri momenti del portafoglio di mercato:

$$\varsigma_M = [E(\tilde{P}_M - \mu_M)^3]^{\frac{1}{3}} \tag{4.41}$$

$$\kappa_M = [E(\tilde{P}_M - \mu_M)^4]^{\frac{1}{4}} \tag{4.42}$$

e il generico assetto j ha il prezzo:

[7]una distribuzione é asimmetrica (rispetto alla mediana) se le modalitá che sono equidistanti dalla mediana non hanno la stessa frequenza. Si distingueranno due casi:

- asimmetria positiva se la coda piú lunga é a destra della media; in questo caso si notano molti valori con forti scarti positivi e pochi con scarti negativi. La distribuzione presenta pochi dati con forti scarti positivi bilanciati da molti dati con deboli scarti negativi e l'indice ha segno positivo;
- asimmetria negativa se la coda piú lunga si presenta a sinistra della media; ció implica che il numero degli scarti negativi é maggiore del numero degli scarti positivi. La distribuzione presenta pochi dati con forti scarti negativi bilanciati da molti dati con deboli scarti positivi e l'indice ha segno negativo.

[8]La curtosi (kurtose) misura il grado di appiattimento, cioé misura la concentrazione/dispersione dei dati attorno al valore centrale, la media aritmetica.

- $\kappa = 0$ distribuzione mesocurtica/normale;
- $\kappa < 0$ distribuzione platicurtica/iponormale: la forma é appiattita con valori maggiormente concentrati nelle code;
- $\kappa > 0$ distribuzione leptocurtica/iponormale: la forma é allungata con un picco accentuato dato dalla concentrazione dei dati intorno al valore massimo.

$$P_j = \frac{\partial P_M}{\partial x_j} = \mu_j P_0 + \frac{\partial \sigma_M}{\partial x_j} P_\sigma + \frac{\partial \varsigma_M}{\partial x_j} P_\varsigma + \frac{\partial \kappa_M}{\partial x_j} P_\kappa + \cdots \tag{4.43}$$

dove nella somma dei termini in aggiunta alla covarianza sono inclusi una co-asimmetria e una co-curtosi dell'assetto con il portafoglio di mercato:

$$\frac{\partial \sigma_M}{\partial x_j} = \frac{E[(\tilde{P}_M - \mu_M)(\tilde{P}_j - \mu_j)]}{\sigma_M} \tag{4.44}$$

$$\frac{\partial \varsigma_M}{\partial x_j} = \frac{E[(\tilde{P}_M - \mu_M)^2(\tilde{P}_j - \mu_j)]}{\varsigma_M^2} \tag{4.45}$$

$$\frac{\partial \kappa_M}{\partial x_j} = \frac{E[(\tilde{P}_M - \mu_M)^3(\tilde{P}_j - \mu_j)]}{\kappa_M^3} \tag{4.46}$$

Ma é questa la teoria dell'asset pricing?
In accordo con il punto di vista classico in finanza, la CAPM é la teoria dell'asset pricing basata sulla massimizzazione dell'utilitá attesa della futura ricchezza. Abbiamo risolto un problema piú semplice, applicando il prezzo del mercato osservato per l'attesa futura di un'unitá monetaria e il prezzo del mercato di un'unitá di rischio al guadagno futuro e al rischio nato dall'assetto e abbiamo ottenuto le CAPM. Se ció fosse possibile, ci aspetteremmo che John Hicks consentisse il procedimento che abbiamo seguito. Vista in questi termini, la CAPM appare come la teoria dell'asset prices quanto uno scontrino di un supermercato rappresenti la teoria dei prezzi dei beni di consumo. Ovviamente possiamo interpretare il prezzo osservato del portafoglio di mercato come l'ultimo risultato della massimizzazione dell'utilitá attesa degli agenti, aumentata dell'esecuzione di tutti i possibili arbitraggi. Di conseguenza si potrebbe interpretare la CAPM come una teoria basata sulla massimizzazione dell'utilitá attesa, posto che saranno permesse tutte le critiche dovute all'utilizzo dell'utilitá attesa.

Capitolo 5

SOLUZIONE AI PARADOSSI DI S. PIETROBURGO E DI ALLAIS

5.1 IL PARADOSSO DI ST. PIETROBURGO

Nel primo capitolo, abbiamo riportato il paradosso di S. Pietroburgo e la soluzione di Daniel Bernoulli in termini di utilitá attesa:

Lancio	*Probabilita'*	*Prezzo*
1	$\frac{1}{2}$	1
2	$\frac{1}{4}$	2
...	...	...
n	$\frac{1}{2}^n$	2^{n-1}
...	...	...

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} U(2^{n-1})\frac{1}{2^n} < +\infty \tag{5.1}$$

In alternativa, il costo del gioco puó essere ottenuto (seguendo il nostro approccio) considerando il gioco come un portafoglio di sotto-giochi (uno per ogni riga della tabella riportata sopra) cosí come segue:

- il primo implica un guadagno di 1 se viene testa al primo lancio e 0 altrimenti,
- il secondo implica un guadagno di 2 se viene testa al secondo lancio e 0 altrimenti,
- l'n-esimo implica un guadagno di 2^{n-1} se viene testa all'n lancio e 0 altrimenti.

Per ciascuno di questi n giochi, il valore atteso é sempre $\frac{1}{2}$ e la deviazione standard é $0,5 \cdot (2^n - 1)^{0,5}$:

1. $media = 2^{n-1}\frac{1}{2^n} + O(1 - \frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2}$
2. $varianza = (2^{n-1} - \frac{1}{2})^2\frac{1}{2^n} + (O - \frac{1}{2})^2(1 - \frac{1}{2^n}) = \frac{2^n - 1}{4}$

$Sotto - gioco$	$Probabilita'$	$Prezzo$	$Valore\ \ atteso$	$Deviazione\ \ standard$
1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$0,50$
2	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{1}{2}$	$0,87$
...	...	...	...	...
n	$\frac{1}{2^n}$	2^{n-1}	$\frac{1}{2}$	$0,5 \cdot (2^n - 1)^{0,5}$
...	...	...	...	...

Considerando i primi due momenti e assumendo per semplicitá la deviazione standard come rischio, calcolando lo scarto quadratico medio

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_M^2} = \frac{\sqrt{2^n - 1}}{2} \tag{5.2}$$

il valore dell'n-esimo gioco é:

$$G_n = \begin{cases} \frac{1}{2}P_0 + \frac{\sqrt{2^n - 1}}{2}P_\sigma \;\; se \;\; positivo, \;\; ossia \;\; se \;\; n < n^0 \equiv \frac{\ln(1 + (\frac{P_0}{P_\sigma})^2)}{\ln 2} \\ 0 \;\; altrimenti \end{cases} \tag{5.3}$$

dove puó essere applicata la limitata responsabilitá di forniture e il costo del gioco é proprio la somma dei costi (positivi) di tutti i sotto-giochi:

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} G_n = \sum_{n=1}^{\infty} \max(\frac{P_0}{2} + \frac{P_\sigma}{2}\sqrt{2^n - 1}, 0) \tag{5.4}$$

In 5.3, l'ultima disuguaglianza deriva dalla positivitá di G_n, ossia

$$\frac{1}{2}P_0 + \frac{\sqrt{2^n - 1}}{2}P_\sigma > 0 \tag{5.5}$$

$$\frac{\sqrt{2^n - 1}}{2} > -\frac{1}{2}\frac{P_0}{P_\sigma} \tag{5.6}$$

disequazione irrazionale che si risolve

$$2^n - 1 > (\frac{P_0}{P_\sigma})^2 \tag{5.7}$$

$$2^n > (\frac{P_0}{P_\sigma})^2 + 1 \tag{5.8}$$

$$n > \log_2((\frac{P_0}{P_\sigma})^2 + 1) \tag{5.9}$$

ossia, per il cambiamento in base e del logaritmo

$$n > \frac{\ln(1 + (\frac{P_0}{P_\sigma})^2)}{\ln 2} \tag{5.10}$$

Per esempio, se poniamo $P_0 = 1$ e $P_\sigma = -0,134$ allora $n^0 = 5,8$ e $G = 1,507$. Questo significa che i lanci successivi al quinto non hanno un valore economico.
Si potrebbe ottenere una migliore approssimazione di G usando anche i momenti successivi:

- l'asimmetria dell'n-esimo sottogioco, che risulta essere

$$[0,25 \cdot (2^n - 1)(2^{n-1} - 1)]^{\frac{1}{3}} \tag{5.11}$$

- la curtosi dell'n-esimo sottogioco, che sará pari a

$$[\frac{(2^n - 1)((2^n - 1)^3 + 1)}{2^{n+4}}]^{\frac{1}{4}} \tag{5.12}$$

5.2 SOLUZIONE AL PARADOSSO DI ALLAIS

Il paradosso di Allais é il piú celebre della teoria dell'utilitá attesa; venne scoperto da Maurice Allais nel 1953, il quale testó per la prima volta, attraverso alcuni esperimenti, la validitá dell'assioma di indipendenza riscontrando la presenza di due fenomeni che ne implicano la violazione:

- l'effetto della conseguenza comune (`common consequence effect)` : tale fenomeno prende il nome da un particolare comportamento degli individui che emerge in presenza di prospettive con componenti comuni; secondo l'assioma di indipendenza infatti se un agente é indifferente di fronte a due prospettive, deve rimanere indifferente anche se entrambe vengono combinate con una terza, ossia non devono cambiare il loro ordine di preferibilitá se viene modificata (nel risultato o nella probabilitá) una stessa realizzazione comune ad entrambe le prospettive (la "conseguenza comune")
- l'effetto della razionalitá comune (`common ratio effect)` : tale fenomeno si puó osservare nelle scelte tra prospettive con probabilitá complementari con payoff $x > y$; in questo caso la EUT afferma che le preferenze non dovrebbero dipendere dal valore della probabilitá p anche se, al contrario, numerosi esperimenti hanno dimostrato la tendenza degli individui a passare da una prospettiva all'altra al diminuire del valore di p.

In uno degli esperimenti condotti da Allais, si chiedeva alle persone di esprimere la preferenza tra il gioco A e il gioco B, in cui giocando ad A si sarebbe vinto 1 milione con certezza ($p_A = 100$) e giocando a B 1 milione con l'89% di probabilitá, 0 milioni con $p_{B2} = 1\%$ e 5 milioni con $p_{B3} = 10\%$, ossia

$$A = \left\{ \begin{array}{ll} 1 milione & 100\% \end{array} \right. \tag{5.13}$$

e

$$B = \left\{ \begin{array}{ll} 0 milioni & 1\% \\ 1 milione & 89\% \\ 5 milioni & 10\% \end{array} \right. \tag{5.14}$$

scoprendo che la maggior parte della gente preferiva A a B, ossia $A \succ B$. Chiedendo successivamente agli stessi di scegliere tra giocare ad A' e B', definendo A' il gioco al seguito del quale si sarebbero vinti 1 milione con $p_{A'1} = 11\%$ e 0 milioni con $p_{A'2} = 89\%$, e B' il gioco con cui si sarebbero vinti 5 milioni con $p_{B'1} = 10\%$ e 0 milioni con $p_{B'2} = 90\%$, ossia

$$A' = \begin{cases} 0 milioni & 89\% \\ 1 milione & 11\% \end{cases} \tag{5.15}$$

$$B' = \begin{cases} 0 milioni & 90\% \\ 5 milioni & 10\% \end{cases} \tag{5.16}$$

questi molto spesso preferiscono B' ad A': $B' \succ A'$. Il paradosso sta nel fatto che, partendo dal fatto che A sia preferibile a B, seguendo la teoria dell'utilitá attesa si deduce che $A' \prec B'$, in disaccordo con le risposte ottenute. (Allais riportó il 53% dei casi di violazione dell'implicazione logica.)
$A \succ B$ significa infatti che

$$U(1) > 0,01 \cdot U(0) + 0,89 \cdot U(1) + 0,10 \cdot U(5) \tag{5.17}$$

da cui, portando a destra del segno $U(1)$ e sommando ad entrambi i termini $0,89 \cdot U(0)$ si ottiene algebricamente

$$0,89 \cdot U(0) + 0,11 \cdot U(1) > 0,90 \cdot U(0) + 0,10 \cdot U(5) \tag{5.18}$$

ossia $A' \succ B'$, risultato contrario a quello ottenuto. Da queste risposte emerge infatti che gli individui scelgono l'alternativa A certa nonostante B incerto abbia un valore atteso maggiore, mostrando la preferenza per la certezza degli individui avversi al rischio; nel secondo esperimento l'individuo, avendo una probabilitá decisamente bassa di avere un premio, ne preferisce uno piú alto con una probabilitá minore rispetto ad uno piú basso ma con probabiitá maggiore (dando piú peso al premio che alle probabilitá). Considerando ogni lotteria come un assetto finanziario, i primi quattro momenti sono:

	A	B	A'	B'
$media, \mu$	$1,000$	$1,390$	$0,110$	$0,500$
$deviazionestandard, \sigma$	0	$1,207$	$0,3136$	$1,500$
$asimmetria, \varsigma$	0	$1,666$	$0,4243$	$2,080$
$curtosi, \kappa$	0	$2,032$	$0,513$	$2,531$

Se assumiamo i seguenti valori per i quattro momenti:

- $P_0 = 1$

- $P_\sigma = -0,34$
- $P_\varsigma = 0,01$
- $P_\kappa = -0,001$

otteniamo il prezzo delle lotterie in accordo con gli esperimenti di Allais:

1. $P(A) = 1 > P(B) = 0,994$
2. $P(A') = 0,007 < P(B') = 0,008$

Bibliografia

[1] Cesari, R. and D'Adda, C. (2004)"A suggestion for semplifying the theory of asset prices".

[2] Cesari, R. and D'Adda, C. "A simple approach to the theory of asset pricing", Social Sciences Research Network Electronic Library

[3] Hicks, J.R. (1935),"A suggestion for simplifying the theory of money", Economica, February, now in Hicks (1967b), ch. 4.

[4] Hicks, J. R. (1967a), "The pure theory of portfolio selection", in Hicks (1967b) ch. 6.

[5] Hicks, J. R. (1967b), "Critical essays in monetary theory", Oxford, OUP.

[6] Lancaster, K. (1966), "A new approach to consumer theory", Journal of Political Economy, 74, pp. 132-157

[7] http://it.wikipedia.org

[8] Daboni, (1985) "Ricerca operativa", Zanichelli

[9] Dall'aglio, G. (1987) "Calcolo delle probabilitá", Zanichelli

[10] Umberto Bottazzini, Paolo Freguglia, Laura Toti Rigatelli (1992) "Fonti per la storia della matematica : aritmetica, geometria, algebra, analisi infinitesimale, calcolo delle probabilitá, logica", Firenze : Sansoni