Alma Mater Studiorum
Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

LOGICA DELL' IDENTITÀ E DELLE DESCRIZIONI

Tesi di Laurea in Logica Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PIERO PLAZZI

Presentata da:
DANIELE FIORE

III Sessione
Anno Accademico 2012/2013

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è quello di studiare la logica dell'identità e delle descrizioni attraverso l'introduzione di metodi sempre più sofisticati che ci permettano di intraprendere attivamente questo studio, seguendo [1], senza limitarci a recepire passivamente dei contenuti.
L'approccio scelto è quello della deduzione naturale, in particolare il metodo delle derivazioni introdotto da Frederick Fitch, per il semplice fatto che il nostro scopo non è quello di 'sapere' la logica, ma di imparare ad usarla.
A tal proposito, nei primi capitoli si sono introdotte le basi di questo tipo di derivazione naturale.

- Nei primi due capitoli, vengono esposte le fondamenta del metodo che sarà la base per ogni considerazione successiva, il linguaggio L_1: esso, attraverso l'introduzione di connettivi e delle relative tavole di verità, ci permette di cominciare a valutare la validità di molte argomentazioni espresse da proposizioni italiane, il tutto preceduto da un'opportuna traduzione in L_1.

- Nel terzo capitolo, ho accennato alla logica modale, o linguaggio L_2, che, anche se non ci servirà per il proseguimento della nostra analisi, ci serve per capire che molte argomentazioni esulano dal campo matematico.

- Nel quarto capitolo, si introduce il linguaggio L_3, o logica dei termini e dei predicati, che rappresenta una significativa svolta nella nostra analisi: esso, infatti, ci permette di estendere il numero di proposizioni da poter valutare, il tutto con l'introduzione dei quantificatori e con l'identificazione di ogni mondo possibile con un modello.

Conclusa la prima parte di approccio a questo nuovo mondo, mi sono concentrato sul vero scopo della mia trattazione: lo studio della logica dei termini con identità, o linguaggio L_5, e il linguaggio delle descrizioni L_6.
In realtà, un linguaggio del tipo precedente sarebbe già sufficiente per valutare la validità delle proposizioni di L_5, in quanto ci basterebbe semplicemente

adottare degli accorgimenti tecnici nella formulazione della nostra argomentazione, però, specificare le caratteristiche della maggior parte dei predicati italiani è di fatto impossibile, o quantomeno eternamente lungo.
D'altronde, sia il predicato 'è identico a' che le descrizioni, hanno un uso estremamente generale in tutte le discipline e la loro applicabilità è la più vasta possibile nei nostri discorsi e, quindi, è legittimo voler approfondire questi due concetti.
Per quanto riguardo l'identità (linguaggio L_5, vedi cap. 5), basti pensare al fatto che ogni oggetto è identico a se stesso; invece, i descrittori (linguaggio L_6, vedi cap. 6) che vengono considerati sono le descrizioni 'definite' e pongono notevoli problemi tecnici legati alla semantica dell'identità, come si può vedere dai semplici esempi alla fine del capitolo. Detto ciò, sono pienamente d'accordo con [1]: "[...]*con queste osservazioni non credo di aver esaurito la discussione* [...]" ma si è dato un motivo valido per spingersi sempre un gradino sopra rispetto a dove si era arrivati, per migliorare il proprio metodo di ragionamento e approfondire gli strumenti artificiali introdotti.

Indice

Capitolo 1

Il linguaggio L_1

1.1 Introduzione

L'analisi logica può essere concepita come un processo da attuarsi a livelli crescenti di profondità e descrescenti di generalità. Al livello più elementare (e generale) si trascura la maggior parte della struttura di una proposizione e l'unico elemento strutturale considerato è il modo in cui si ottiene la proposizione combinando proposizioni più semplici.
Alcuni dei metodi di combinazione (o connettivi) - in particolar modo quelli che costituiscono funzioni di verità - saranno oggetto di studio in questo capitolo.
Si seguirà l'esposizione di [1].

1.2 Connettivi e funzioni di verità

Combinando delle proposizioni (A,B, ecc.) mediante connettivi si ottengono nuove proposizioni che sono chiamate *complesse.* Le proposizioni che non sono complesse vengono chiamate *semplici* o *atomiche* (a, b, ecc.).
Alcuni dei connettivi rappresentano della funzioni di verità, oppure vengono chiamati *vero-funzionali*: questi connettivi saranno il nostro oggetto di studio attuale, cioè si è cercato di associare a ciascun connettivo una tavola di verità, grazie alle quali è possibile giustificare la validità di una grande quantità di proposizioni.

1.2.1 Negazione

Questo connettivo è diverso da quelli che si introdurranno successivamente, potrebbe anche non essere considerato un connettivo in quanto non connette più proposizioni ma ne modifica una.
Si tratta appunto della *negazione* (simbolo $\neg$ e si legge '**non**') e, per ciò che ho appena detto, la sua tavola di verità sarà diversa. Ci saranno solo due possibilità:

A	$\neg A$
V	F
F	V

Tabella 1.1: Tavola di verità della negazione

La negazione, inoltre, gode di un fatto molto importante che prende il nome di *legge della doppia negazione* che ci dice quanto segue:

$$A \equiv \neg\neg A$$

1.2.2 Congiunzione

La *congiunzione* (simbolo $\wedge$ e si legge '**e**') è un connettivo logico attraverso il quale, date due proposizioni A e B, è possibile formare una nuova proposizione $A \wedge B$ che è vera (V) solo quando A e B sono entrambe vere, ed è falsa (F) in tutti gli altri casi (o mondi) possibili.

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabella 1.2: Tavola di veritá della congiunzione

1.2.3 Disgiunzione

La *disgiunzione* (simbolo $\vee$ e si legge '**o**') è un altro connettivo logico attraverso il quale, date due proposizioni A e B, è possibile formare una nuova proposizione $A \vee B$ che è vera solo quando almeno una tra A e B è vera ed è falsa quando sono entrambe false.

A	B	A$\vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabella 1.3: Tavola di verità della disgiunzione

Ecco le principali proprietà che seguono la congiunzione e la disgiunzione:

	Congiunzione
Idempotenza:	$A \wedge A \equiv A$
Commutativa:	$A \wedge B \equiv B \wedge A$
Associativa:	$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
Distributiva:	$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
Legge di assorbimento:	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$
Legge di De Morgan:	$\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$

Tabella 1.4: Proprietà congiunzione

	Disgiunzione
Idempotenza:	$A \vee A \equiv A$
Commutativa:	$A \vee B \equiv B \vee A$
Associativa:	$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
Distributiva:	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
Legge di assorbimento:	$A \vee (A \wedge B) \equiv A$
Legge di De Morgan:	$\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$

Tabella 1.5: Proprietà disgiunzione

1.2.4 Implicazione

Con l'*implicazione* (simbolo $\supset$ oppure $\Rightarrow$ e si legge '**se... allora**'), date due proposizioni A e B, è possibile formare una nuova proposizione $A \Rightarrow B$ che è vera solo quando si verifica la seguente condizione: se è vero A allora è vero anche B. In particolare A implica B è vera se A è falsa qualunque sia il valore di verità di B.

A	B	A$\Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabella 1.6: Tavola di verità dell'implicazione

1.2.5 Coimplicazione

Se accade che valgano contemporaneamente $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$, allora possiamo esprimere questo fatto con un nuovo connettivo che chiameremo *coimplicazione* (in simboli $A \Leftrightarrow B$ e si legge '**... se e solo se...**').

A	B	A$\Leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabella 1.7: Tavola di verità della coimplicazione

1.3 Vocabolario L_1

Si stanno delineando le basi di un nuovo linguaggio artificiale che permetterà di costruire proposizioni e argomentazioni senza alcuna traccia di ambiguità: infatti, ogni connettivo sarà usato sempre allo stesso modo, con le stesse condizioni di verità.
Lo scopo principale del linguaggio L_1 delle funzioni di verità è quello di rappresentare la struttura delle proposizioni della lingua italiana, in quanto tali proposizioni sono il risultato della composizione di proposizioni più semplici mediante connettivi vero-funzionali.
Per rappresentare le proposizioni atomiche si usano le lettere *p,q,r*, ecc., chiamate *lettere proposizionali*, con eventualmente degli indici (p_3 ad esempio) o degli apici (p' ad esempio); per rappresentare i connettivi, invece, si usano i cinque simboli $(\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg)$ definiti precedentemente.
In quanto linguaggio artificiale, è necessario anche definire quando una data successione di simboli rappresenta o meno una proposizione. Le proposizioni di L_1 sono tutte e sole le successioni di simboli ottenute partendo dalle lettere proposizionali e,ripetendo un numero qualsiasi di volte l'applicazione dei connettivi. In termini più precisi,

Definizione 1.1 (Proposizione di L_1).
(a) Le lettere *a, b,* ecc. sono proposizioni di L_1.
(b) Se A è una proposizione di L_1, allora $\neg A$ è una proposizione di L_1.
(c) Se A e B sono proposizioni di L_1, allora $A \wedge B, A \vee B, A \Rightarrow B$ e $A \Leftrightarrow B$ sono proposizioni di L_1.
(d) Nient'altro è una proposizione di L_1.

Per concludere, si definisce la nozione di argomentazione che ci tornerà utile nei prossimi capitoli.

Definizione 1.2 (Argomentazione di L_1).
Un'**argomentazione** di L_1 è una successione di proposizioni di L_1 tali che:
(a) l'ultimo elemento della successione è la conclusione;
(b) tutti gli altri elementi sono le premesse;
(c) premesse e conclusioni sono precedute da un numero o una lettera progressiva;
(d) la conclusione è preceduta dal simbolo '$\therefore$'

1.4 Un esempio

Consideriamo la seguente argomentazione:

$$(1)(p \vee q) \wedge (q \vee r)$$

$$\therefore (2) p \vee (q \wedge r).$$

Essa è *valida* se non esiste un mondo possibile in cui la premessa (1) è vera e la conclusione (2) è falsa. Esiste solo un numero finito di gruppi di mondi possibili. Nel nostro caso sono esattamente 8.
In generale, **data un argomentazione che contiene n lettere proposizionali diverse, i gruppi di mondi pertinenti saranno esattamente** 2^n.
Cominciamo dunque con il tabulare tutti i gruppi pertinenti di mondi possibili:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Ora concentriamoci sulla prima premessa: prima si applica il connettivo $\vee$ a p e q, poi il connettivo $\vee$ a p e r, dopodichè il connettivo $\wedge$ ai due risultati parziali ottenuti. Costruiamo quindi una tavola di verità per (1):

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	(1)
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F
F	F	F	F	F	F

Ora estendiamo il nostro esame alla conclusione:

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	(1)	$q \wedge r$	(2)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

A questo punto ci chiediamo in quanti mondi possibili la premessa (1) è vera: la risposta è nei mondi rappresentati dalla prima, seconda, terza, quarta e quinta riga di questa tavola di verità. Infine ci chiediamo se la conclusione (2) è vera in tutti questi mondi: la risposta è che è vera in tutti i precedenti mondi.

Capitolo 2

La derivazione

2.1 Oltre le tavole di verità?

Sebbene il metodo delle tavole di verità sia estremamente efficace, in quanto ci permette di verificare la validità di una qualsiasi argomentazione di L_1 attraverso un numero finito di passi in maniera meccanica, ci sono alcune ragioni che ci spingono a cercare un altro modo di procedere.
In primis, costruire una tavola di verità, è un procedimento lungo più di quanto si possa immaginare: infatti, nell'introdurre i cinque connettivi, abbiamo considerato tavole di verità con al massimo 2 lettere proposizionali, ma se queste fossero state già 5 ci saremmo trovati di fronte ad una tavola di 32 righe.
In secondo luogo, analizzare un argomentazione attraverso una tavola di verità non è un procedimento molto naturale. Consideriamo infatti la seguente proposizione:

(1) Se x è uguale a i, il suo quadrato è -1.
(2) Ma x è uguale a i e appartiene a C.
(3) Allora -1 è il quadrato di i in campo complesso.

Nulla ci vieta di ragionare in questo modo:

- Assumiamo le premesse (1) e (2) vere.
- Ma (2) è una congiunzione, quindi entrambi i suoi congiunti saranno veri.
- Dal momento che (1) è un'implicazione, possiamo assumere che, se l'antecedente è vero, anche il conseguente è vero.

- Concludiamo con (3).

È palese come questo metodo sia innanzitutto convincente, ma soprattutto meno lungo e noioso di una tavola di verità. Andiamo, quindi, ad analizzare questo metodo più da vicino, che consiste nell'assumere la verità delle premesse e dimostrare che, se esse sono vere allora la conclusione deve essere vera.

2.2 Definizione e un po' di storia

La derivazione, o deduzione naturale, è, nel campo della logica matematica, un sistema deduttivo che si propone come un metodo per dimostrare che un' affermazione è conseguenza di certe ipotesi. A differenza dei sistemi assiomatici è un sistema senza assiomi e con una serie di regole di inferenza il cui numero dipende dai connettivi che definiamo come primitivi.

Jan Lukasiewicz fu il primo durante una serie di seminari in Polonia nel 1926 a parlare della necessità per i matematici di costruire dimostrazioni usando una teoria diversa da quella assiomatica tipica dei sistemi usati fino ad allora da Hilbert, Frege e Russell e il primo tentativo di teorizzare un sistema di deduzione 'naturale' del suo allievo Stanislaw Jaśkowski nel 1934. Jaśkowski propose due diversi metodi di rappresentazione della deduzione naturale:

- il primo è un metodo grafico basato sulla costruzioni di rettangoli attorno a parti di prove e su di esso si basano le dimostrazioni fatte usando quelli che oggi si chiamano diagrammi di Fitch;
- il secondo metodo consiste nell'aggiungere una notazione numerica a sinistra delle formule nella dimostrazione (su questo sono basati il metodo di Suppes e la variante di Lemmon chiamata sistema L).

La deduzione naturale nella sua formulazione moderna ad albero viene proposta, indipendentemente da Jaśkowski, nel 1935 da Gerhard Gentzen ed è lui il primo a introdurre il termine deduzione naturale:

"Ich wollte zunächst einmal einen Formalismus aufstellen, der dem wirklichen Schließen möglichst nahe kommt. So ergab sich ein 'Kalkül des natürlichen Schließen'"
(Per prima cosa ho voluto costruire un formalismo che si avvicini il più possibile al ragionamento reale. Così nacque il 'calcolo della deduzione naturale'.)

Nel 1965 Prawitz darà una sintesi completa dei calcoli di deduzione naturale, e trasporterà gran parte del lavoro di Gentzen con i calcoli dei sequenti in deduzione naturale.

2.3 Regole di inferenza per i connettivi

In logica, una regola di inferenza è uno schema formale che si applica nell'eseguire un'inferenza. In altre parole, è una regola che permette di passare da un numero finito di proposizioni assunte come premesse a una proposizione che funge da conclusione.

Una regola di inferenza si dice **corretta** o **valida** se la conclusione è conseguenza logica delle (ossia, segue necessariamente dalle) premesse: se sono vere tutte le premesse allora è necessariamente vera la conclusione (o equivalentemente, non è possibile che le premesse siano tutte vere e la conclusione falsa). Ciò significa che, lette dall'alto verso il basso (dalle premesse alla conclusione), le regole di inferenza corrette preservano la verità. Una regola di inferenza non corretta si dice **scorretta** o **invalida**.

Per ogni connettivo avremo una determinata regola per la sua introduzione e una per la sua eliminazione.

2.3.1 Congiunzione

Introduzione: se in una derivazione abbiamo sia A sia B, non importa in che ordine, allora possiamo dedurre $A \wedge B$. La regola è:

$$\frac{A, B}{A \wedge B}$$

Eliminazione: da una congiunzione è sempre possibile dedurre entrambi i congiunti. Le regole sono:

$$\frac{A \wedge B}{A}$$

e

$$\frac{A \wedge B}{B}$$

2.3.2 Disgiunzione

Introduzione: una disgiunzione è vera se uno dei suoi disgiunti è vero. La regola è (analogamente per B):

A

A∨ B

Eliminazione: da una disgiunzione non è ovviamente possibile ottenere alcuno dei disgiunti, quindi si seguirà un altro tipo di ragionamento. Ogniqualvolta in una derivazione compare una disgiunzione $A \vee B$ e si nega una delle due, allora si può sempre dedurre l'altra. Le regole sono:

$$\frac{A \vee B, \neg A}{B}$$

e

$$\frac{A \vee B, \neg B}{A}$$

2.3.3 Implicazione

Introduzione: ovviamente non è possibile dedurre $A \Rightarrow B$ dal suo antecedente, perché se A è vera, $A \Rightarrow B$ potrebbe essere falsa (se B fosse falsa). Anche in questo caso quindi si seguirà un ragionamento diverso: supponiamo di avere una derivazione con premesse A_1,..., A_n, e supponiamo di voler dedurre $B \Rightarrow C$. Consideriamo un'altra derivazione, B, con uguali premesse A_1,..., A_n: se in questa derivazione riusciamo a dedurre C, allora potremo scrivere $B \Rightarrow C$ nella derivazione principale.

Eliminazione: è nota anche con il nome classico di *modus ponens* e dice che data A e $A \Rightarrow B$ è possibile derivare B. La regola è:

$$\frac{A, A \Rightarrow B}{B}$$

2.3.4 Coimplicazione

Per dimostrare la coimplicazione occorre dimostrare che ciascuno dei suoi elementi segue dall'altro, e quando si abbia una coimplicazione è possibile dedurre ciascuno degli elementi dall'altro. Le regole sono:

Introduzione: se, date due derivazioni, A e B, riusciamo a dedurre B da A e A da B, allora sarà lecito scrivere $A \Leftrightarrow B$.

Eliminazione:

$$\frac{A, A \Leftrightarrow B}{B}$$

e

$$\frac{B, A \Leftrightarrow B}{A}$$

2.3.5 Negazione

Introduzione: si procederà per assurdo. Se dall'ipotesi A segue una contraddizione, allora è possibile negare A. Nel nostro caso, se in una derivazione subordinata con premessa aggiuntiva A compaiono due proposizioni della forma B e $\neg B$, possiamo dedurre $\neg A$.

Eliminazione: da $\neg\neg A$ è possibile dedurre A. La regola è:

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

2.3.6 Ripetizione

Abbiamo introdotto tutte le regole più importanti, quelle che si utilizzano maggiormente. Esiste però un ulteriore regola che potrà risultarci utile in determinate occasioni: la regola di ripetizione. La regola è:

$$\frac{A}{A}$$

2.4 Un esempio

Riprendiamo in esame l'argomentazione che avevamo considerato in 1.4:

$$(1)(p \vee q) \wedge (q \vee r)$$
$$\therefore (2) p \vee (q \wedge r)$$

Scriviamo ora la derivazione della nostra argomentazione:

1. $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
2. $p \vee q$ (*Eliminazione* $\wedge$, 1)
3. (a) p
   (b) $p \vee (q \wedge r)$ (*Introduzione* $\vee$, 3a)
4. (a) q
   (b) $p \vee r$ (*Eliminazione* $\wedge$, 1)
   (c) i. p
       ii. $p \vee (q \wedge r)$ (*Introduzione* $\vee$, 4c(i))
   (d) i. r
       ii. $q \wedge r$ (*Introduzione* $\wedge$, 4a, 4d(i))
       iii. $p \vee (q \wedge r)$ (*Introduzione* $\vee$, 4d(ii))
   (e) $p \vee (q \wedge r)$ (*Eliminazione* $\vee$, 4b, 4c(i)-4c(ii), 4d(i)-4d(iii))
5. $p \vee (q \wedge r)$ (*Eliminazione* $\vee$, 2, 3a-3b, 4a-4e)

Si può vedere che, attraverso il metodo della derivazione, la validità della stessa argomentazione trattata nel capitolo precedente è stata dimostrata attraverso SOLO tredici passi invece che costruendo lunghissime tavole di verità.

Osservazione 1.
Prima di concludere il capitolo, c'è un'ultima osservazione che possiamo fare riguardo a questo metodo: noi possiamo usare la derivazione per stabilire la verità e la falsità logica di proposizioni di L_1, rispettivamente chiamate *tautologie* e *contraddizioni* e lo strumento che utilizzeremo a questo scopo sono le derivazioni senza premesse, chiamate anche *categoriche*.

Osservazione 2.
Questo metodo non ci permette in alcun modo di stabilire la non-validità delle argomentazioni non valide o la non-tautologicità delle non-tautologie.

Capitolo 3

Logica modale

3.1 Logica primaria

Consideriamo queste due proposizioni:

(1) x è un numero positivo.
(2) x è una lettera.

È facile verificare che (1) sarà vera solo per determinati valori di x mentre (2) è vera sempre (supponendo la conoscenza dell'alfabeto latino per intero). Quindi siamo davanti ad una situazione in cui la (1) sarà vera *in modo contingente* e (2) sarà *necessariamente* vera.
Dal momento che questi due termini possono essere considerati dei *connettivi* e hanno a che fare con il modo in cui la proposizione è vera, è lecito chiamarli *connettivi modali* o *modalità*, così come lo sono 'è possibile che', 'è necessario che', ecc..
Se, poi la necessità o la possibilità è intesa in senso logico, allora i connettivi sopracitati sono detti *modalità logiche*, le quali possono essere analizzate con il linguaggio introdotto nel primo capitolo: una proposizione A è logicamente **necessaria** se e solo se essa è vera in tutti i mondi possibili; analogamente A è logicamente **possibile** se è vera in almeno un mondo possibile e **impossibile** se falsa in tutti i mondi possibili.
Per essere più precisi, si introduce un nuovo linguaggio artificiale L_2, i cui simboli sono esattamente gli stessi di L_1, con l'aggiunta dei simboli $\diamond$ e $\triangleright$, rispettivamente con il significato di 'è possibile che' e 'è necessario che'. Di conseguenza, si darà una nuova definizione di proposizione, molto simile a quella data per le proposizioni di L_1.

Definizione 3.1 (Proposizione di L_2)**.**
(a) Le lettere proposizionali sono proposizioni di L_2.
(b) Se A è una proposizione di L_2, allora $\neg A, \diamond A, \Box A$ sono proposizioni di L_2.
(c) Se A e B sono proposizioni di L_2, allora $A \wedge B, A \vee B, A \Rightarrow B, A \Leftrightarrow B$ sono proposizioni di L_2.
(d) Nient'altro è una proposizione di L_2;

E si daranno le condizioni di verità per i nuovi connettivi in un mondo possibile:

(a) $\diamond$A è vera se e solo se A è vera in almeno un mondo possibile.
(b) $\Box$A è vera se e solo se A è vera in tutti i mondi possibili.

Dal momento che esistono infiniti mondi possibili, non ha senso enumerarli tutti e questo ci indica come, una volta abbandonato il livello elementare di L_1, le tavole di verità perdano molta della loro efficacia.

3.2 Logica secondaria

Una volta introdotto il linguaggio L_2, si deve affrontare il problema di valutare le argomentazioni in L_2 e stabilire la verità o la falsità logica delle proposizioni di L_2.
Il problema è che L_2 va incontro ad una seria difficoltà, e per ovviarla, la maggior parte dei logici contemporanei, preferisce complicare le regole introdotte precedentemente: dal momento che le condizioni introdotte nel paragrafo precedente sono le più naturali, la logica che ne risulta prenderà il nome di *primaria*; invece quella che risulta dall'introduzione di questa complicazione prenderà il nome di *secondaria*.
Per cercare di capire questa complicazione e la logica modale secondaria, è bene vedere la logica come quell'elemento che non si occupa della validità delle singole argomentazioni ma della validità di schemi di argomentazioni, all'interno dei quali vale la seguente regola:

Definizione 3.2.
Se A è logicamente vera e $p_1, ..., p_n$ sono tutte lettere proposizionali che occorrono in A, e B risulta da A sostituendo rispettivamente $B_1, ..., B_n$ a $p_1, ..., p_n$, allora anche B è logicamente vera (analogamente per le argomentazioni).

In altre parole, B è un esempio di A e quindi se A è uno schema di proposizioni sarà lecito chiedere che se A è logicamente vera allora anche tutti i

suoi esempi devono essere logicamente veri.
Detto ciò, si intuisce quale sarà la direzione da seguire per 'complicare' le condizioni di verità naturali: una proposizione (o una formula) sarà logicamente vera solo se tutti i suoi esempi per sostituzione sono logicamente veri, e analogamente per le argomentazioni. Ma, dal momento che questo non vale (attualmente) per tutte le formule logicamente vere, le nuove condizioni di verità dovranno essere più restrittive di quelle attuali, cioè dovranno permettere la verità logica di un numero minore di formule: l'unico modo è , data una proposizione p vera in qualche mondo possibile, quello di trascurare tutti i mondi possibili in cui p è vera.
Nella logica modale secondaria non si considerano tutti i mondi possibili insieme, ma solo una parte di essi che prende il nome di **struttura**: essa può comprendere uno, due, dieci o magari tutti i mondi possibili in questione così come può non contenere nessuno dei mondi possibili in cui p è vera. Di conseguenza, le condizioni di verità verrano date per ogni elemento w di una struttura W: le condizioni per i connettivi non modali sono sempre le stesse, mentre quelle dei connettivi modali saranno diverse.

(a) $\diamond$A è vera in un elemento w di una struttura W se e solo se A è vera in almeno un elemento di W.
(b) $\Box$A è vera in un elemento w di una struttura W se e solo se A è vera in tutti gli elementi di W.

Così come saranno diverse anche le definizioni delle varie nozioni logiche:

(a) Una proposizione di L_2 è logicamente vera se è vera in tutti gli elementi di tutte le strutture e logicamente falsa se è falsa in tutti gli elementi di tutte le strutture.
(b) Un'argomentazione di L_2 è valida se non esiste alcun elemento di alcuna struttura in cui le premesse siano vere e la sua conclusione falsa.

3.3 Regole di inferenza dei connettivi modali

È giunto il momento di affrontare il problema della valutazione di argomentazioni e proposizioni in L_2 e per fare ciò si adatterà il metodo delle derivazioni al nuovo linguaggio.
Rimangono valide le regole introdotte nel capitolo precedente, alle quali si aggiungeranno quelle dei connettivi modali.

3.3.1 Introduzione e eliminazione di □

La regola di eliminazione è piuttosto ovvia: dato un qualsiasi elemento w di una qualsiasi struttura W, se □A è vera allora A è vera in tutti gli elementi di W e *a fortiori* in w. La regola è:

$$\frac{\Box A}{A}$$

La regola di introduzione, invece, consente di dedurre □A se è possibile dedurre A in una derivazione subordinata priva di premesse aggiuntive, nella quale è lecito usare solo premesse *modalizzate*. Ci torna utile la seguente definizione:

Definizione 3.3. Una proposizione A è **modalizzata** se tutte le lettere proposizionali occorrenti in A occorrono nell'ambito di un connettivo modale.

La regola (grezza) sarà:

$$\frac{A}{\Box A}$$

3.3.2 Introduzione e eliminazione di ◇

In questo caso la regola di introduzione è molto semplice: se A è vera in un elemento w di una struttura W, ◇A è senz'altro vera in w. La regola è:

$$\frac{A}{\Diamond A}$$

Per quanto riguarda, invece, la regola di eliminazione, si deve dimostrare che la conclusione di una determinata argomentazione è vera in un elemento w di una struttura W(in cui si assume che le premesse dell'argomentazione siano

vere).
La verità di $\diamond A$ ci dice che A è vera in qualche elemento *w'* di W, quindi, partendo da questo fatto, si deve dimostrare la verità di *w'* di una proposizione modalizzata B in modo tale da poter asserire la verità di B in *w*. La regola (grezza) sarà:

$$\frac{\diamond A}{D}$$

con D modalizzata e assumendo la verità di $\diamond A$.

Osservazione 3.
Si può evitare questo problema semplicemente considerando che $\diamond$ può essere vista come $\neg\Box\neg$.

Capitolo 4

Il linguaggio L_3

4.1 Premesse

Se io considero la seguente argomentazione

(1) Tutti i numeri naturali sono positivi.
(2) Sia x=4, 4∈N.
(3) 4 è un numero positivo.

non esistono dubbi sull'affermare che è valida. Analizzandola, però, con il linguaggio L_1, non saremmo in grado di verificarne la validità: infatti, nessuna delle tre proposizioni contiene connettivi e non è il risultato dell'applicazione di connettivi a proposizioni più semplici.
Per continuare la nostra analisi, quindi, ci sarà bisogno di un metodo più adeguato, di andare oltre ciò che era stato costruito fino ad ora, cioè di costruire un nuovo linguaggio artificiale.
Ciò che non funziona è il fatto che in L_1 una proposizione, quando è atomica, non ha alcuna struttura e diventa una singola lettera. Dunque si deve studiare la struttura delle proposizioni italiane atomiche: a tal proposito, c'è uno strumento molto antico, lo schema soggetto-predicato.
Secondo il suddetto schema, in ogni proposizione esiste 'qualcosa di cui la proposizione parla', il *soggetto* del nostro discorso, e 'qualcosa che la proposizione dice del suo oggetto', il *predicato*, uniti dalla *copula*: nel nostro caso, '4' è il soggetto, 'un numero positivo' è il predicato ed 'è' è la copula.
È facile verificare che questo metodo, sebbene sia estremamente adeguato quando è applicato a proposizioni in cui una proprietà è applicata a un oggetto, comporti notevoli limitazioni quando si utilizza per proposizioni in cui compaiono più oggetti: infatti, in questi casi, lo schema ci costringe a sce-

gliere un oggetto e privilegiarlo sugli altri.
La variazione che si applica è la seguente: si stabilisce che ogni proposizione atomica parli di uno o più oggetti e quindi ci potranno essere uno o più soggetti.

Definizione 4.1 (Termine singolare)**.**
Un'espressione che si riferisce a un oggetto singolo è detta in logica un *termine singolare*. In italiano esistono molti tipi di termini singolari, ad esempio:

Nomi propri: 'Daniele', 'Francesco', ecc.

Pronomi dimostrativi: 'questi', 'quelli', ecc.

Espressioni che cominciano con un aggettivo dimostrativo: 'quei fogli', ecc.

Pronomi personali singolari: 'io', 'tu', ecc.

Descrizioni definite: 'il mio libro', ecc.

Ogni proposizione atomica contiente un numero di soggetti: tutti i termini singolari che troviamo in essa che, se eliminati, lascerebbero solo il predicato. Però, ci sono dei termini singolari che sono inclusi in altri termini singolari.

Definizione 4.2 (Termine massimale)**.** Sia a un termine singolare in una proposizione B, diremo che a è un termine **massimale** se non è incluso in alcun altro termine singolare presente in B.

Saranno proprio questi termini che verranno presi in esame dal nuovo linguaggio artificiale, il linguaggio L_3.

4.2 Vocabolario L_3

Il nuovo linguaggio artificiale L_3 contiene lettere maiuscole P,Q,R, ecc. (i predicati) e lettere minuscole *p,q,r*, ecc. (i termini). Come nel linguaggio L_1, anche in questo caso predicati e termini potranno avere infiniti indici o apici. è necessario, ora, dare una nuova definizione di proposizione in L_3:

Definizione 4.3 (Proposizione in L_3)**.**
Se P è un predicato con n posti e $a_1, ..., a_n$ sono termini singolari (non necessariamente distinti), allora P$a_1, ..., a_n$ è una proposizione di L_3.

Sicuramente questa non può rappresentare la definizione per intero: infatti , oltre ai predicati, i termini e ai connettivi (di cui abbiamo parlato nel primo capitolo), questo linguaggio contiene altri due elementi fondamentali per la nostra analisi.
Consideriamo infatti la seguenti proposizioni:

(1)Qualunque oggetto x si scelga, x è positivo.
(2)Esiste almeno un oggetto x tale che x è positivo.

Esse sarebbero esprimibili in L_3 se contenesse, insieme ai termini singolari, anche le *variabili*, che possiamo rappresentare con *x,y,x'*,ecc.. Ma non basta: è necessario infatti introdurre anche altri due simboli: $\forall$, detto *quantificatore universale*, che in italiano ha il significato di 'per ogni'; $\exists$, detto *quantificatore esistenziale* che in italiano ha il significato di 'per qualche' o 'esiste almeno un'.
In questo modo si ha il quadro completo del linguaggio L_3 e quindi è possibile tradurre la nostra argomentazione iniziale nel modo seguente:

(1)$\forall x(Px \Rightarrow Qx)$
P: ... è un numero naturale
Q: ... è positivo.

Inoltre è possibile dare una più estesa definizione di proposizione in L_3 che comprende anche le Px:

Definizione 4.4 (Espressione ben formata di L_3)**.**
(1) Se P è un predicato a n posti e ciascuno di $t_1, ..., t_n$ è un termine o una variabile, allora Pt_1...Pt_n è un'espressione di L_3.
(2) Se A è un'espressione di L_3, allora $\neg A$ è un espressione di L_3. (3) Se A e B sono espressioni di L_3, allora $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$ e $(A \Leftrightarrow B)$ sono espressioni di L_3.

(4) Se A è un'espressione di L_3, allora $\forall xA$ e $\exists xA$ sono espressioni di L_3.
(5) Nient'altro è un'espressione di L_3.

A questo punto bisogna isolare quelle che hanno senso compiuto, cioè le proposizioni. Un'espressione è una proposizione se non contiene nessuna variabile quindi si deve capire quando un'espressione con delle variabili è una proposizione.
In generale, quando le variabili contenute in un'espressione sono tutte vincolate da quantificatori, l'espressione non presenta ambiguità e quindi può essere considerata una proposizione.

Definizione 4.5 (Occorrenze libere e vincolate)**.**
Un'occorrenza di una variabile x in un'espressione A di L_3 è **vincolata** se è contenuta in una parte di A della forma $\forall xB$ o $\exists xB$. (Se x ha un'occorrenza vincolata in A, diremo anche che x **occorre vincolata** in A).
Un'occorrenza di una variabile x in un'espressione A di L_3 è **libera** se non è vincolata. (Se x ha un'occorrenza libera in A, diremo anche che x **occorre libera** in A).

In questo modo, è possibile dare una nuova definizione di proposizione in L_3.

Definizione 4.6 (Proposizione di L_3)**.**
Un'espressione A di L_3 è una **proposizione** se nessuna variabile occorre libera in A. (Le proposizioni sono anche dette espressioni **chiuse** di L_3 e le espressioni di L_3 che non sono proposizioni sono anche dette **aperte**).

Osservazione 4.
Prima di concludere il paragrafo, c'è una piccola osservazione da fare: il linguaggio L_3 è artificiale, deve la sua esistenza ad una definizione, perciò le proposizioni che si prendono in considerazione per semplificare la definizione di L_3 possono essere anche proposizioni che nell'italiano parlato nessuno si sognerebbe mai di usare, come 'per ogni x, 4 è un numero positivo'. Però si può comunque fare una distinzione:

Definizione 4.7 (Quantificazione).
Ogni espressione della forma $\forall xA$ o $\exists xA$ è detta **quantificazione**: in particolare, le prime saranno chiamate **quantificazioni universali** e le seconde **quantificazioni esistenziali**.
Se la variabile x non occorre libera in A, le quantificazioni sopracitate sono dette **vuote**: $\forall xA$ equivale allora ad A, ecc..

4.3 Modelli e assegnazioni

Prima di concentrarsi sulle regole di inferenza dei quantificatori appena introdotti, è bene occuparsi delle condizioni di verità delle proposizioni di L_3. In L_1 il valore di verità di una proposizione complessa A in un dato mondo possibile era determinato in modo univoco dai valori di verità delle lettere proposizionali occorrenti in A e, quindi, un mondo possibile poteva essere identificato tramite un'*assegnazione* di valori di verità alle lettere proposizionali.
In L_3 si può pensare che il valore di verità di Pa in un mondo w dipenda da ciò cui P e a si riferiscono in w: cioè, se l'oggetto designato da a ha la proprietà designata da P allora Pa è vera, altrimenti è falsa. Si può ragionare in maniera analoga quando si estende questo concetto ai quantificatori, cioè pensare che il valore di verità di $\forall xPx$ in w dipenda dagli oggetti presenti in w: se essi hanno tutti la proprietà designata da P allora $\forall xPx$ è vera, altrimenti è falsa.
Quindi, se nella logica delle proposizioni un mondo possibile può essere identificato con un'assegnazione di valori di verità alle lettere proposizionali, allora nella logica dei termini esso può essere identificato con un *modello*, definito in questo modo:

Definizione 4.8 (Modello)**.**
Un **modello M** è una struttura costituita da un insieme non vuoto D (detto *dominio*) e da un'*interpretazione* dei termini e dei predicati di L_3 in D, ossia una specificazione dell'elemento di D designato da ogni termine e della proprietà degli elementi di D designata da ogni predicato.
Usando uno schema concettuale di derivazione matematica, l'interpretazione associata a un modello è spesso caratterizzata come una *funzione* f e, quindi, l'interpretazione del termine a è indicata con *f(a)* e l'interpretazione del predicato P è f(P).

Osservazione 5.
D'ora in poi si abbrevierà la dicitura 'dato un modello M con dominio D e interpretazione f' con 'dato un modello M=$\langle D, f\rangle$'.

A questo punto sarà facile valutare proposizioni come:

$$Pa \vee Qb$$

che sarà vera solo se *f(a)* ha la proprietà f(P) oppure *f(b)* ha la proprietà f(Q) oppure se si verificano entrambe le cose. Il problema sorge infatti quando compaiono dei quantificatori: il valore di verità della proposizione appena

analizzata dipende dai valori di verità delle proposizioni componenti, ma una proposizione come $\forall xPx$ non ha proposizioni componenti!!
In primo luogo si prende in esame Px: essa non ha un valore di verità definito perché x non si riferisce ad un oggetto definito, ma se si assegna a x un oggetto definito, avremo un valore di verità per Px e, quindi, in generale, l'*assegnazione* di un oggetto definito *ad ogni* variabile comporterebbe un valore di verità *per tutte* le espressioni di L_3.
Ora si può passare a $\forall xPx$: essa è vera se e solo se Px è vera per qualsiasi assegnazione di un oggetto (di M) a x. Allo stesso modo, $\exists xPx$ è vera in M se e solo se Px è vera per almeno un'assegnazione di un oggeto (di M) a x.
In generale, sia $\forall xA$ un'espressione di L_3 in cui occorrono le variabili $y_1, ..., y_n$ libere e supponiamo di voler assegnare oggetti definiti (di M) a $y_1, ..., y_n$, allora l'espressione sarà vera in M per questa assegnazione se A è vera qualunque oggetto di M si assegni a x e purché si mantengano costanti gli oggetti assegnati a $y_1, ..., y_n$ (analogamente per l'espressione $\exists xA$).
Detto ciò, si può precedere nel modo seguente: ad ogni modello M=$\langle D, f\rangle$ si associa un insieme di *assegnazioni v, v'*, ecc. che assegnano ad ogni variabile un elemento di D; si indica il valore assegnato a x dall'assegnazione v con *v(x)*; si indica con $v =_x$ *v'* il fatto che v e *v'* coincidano su tutte le variabili tranne eventualmente x ed, infine, si introduce la notazione $W^v_M(t)$, da intendersi equivalente a *f(t)* se t è un termine, indipendente da v, ed equivalente a *v(t)* se t è una variabile.

Definizione 4.9 (Valore di verità V di un'espressione A data da un'assegnazione v)**.**

- $V^v_M(Pt)$=V se $W^v_M(t)$ ha la proprietà f(P) e altrimenti $V^v_M(Pt)$=F.
- $V^v_M(Pt_1...t_n)$=V se $W^v_M(t_1)$,..., $W^v_M(t_n)$ stanno nella relazione f(P) e altrimenti $V^v_M(Pt_1...t_n)$=F.
- $V^v_M(\neg A)$=V se $V^v_M(A)$=F e altrimenti $V^v_M(\neg A)$=F.
- $V^v_M(A \wedge B)$=V se $V^v_M(A)$=V e $V^v_M(B)$=V e altrimenti $V^v_M(A \wedge B)$=F.
- $V^v_M(A \vee B)$=F se $V^v_M(A)$=F e $V^v_M(B)$=F e altrimenti $V^v_M(A \vee B)$=V.
- $V^v_M(A \Rightarrow B)$=F se $V^v_M(A)$=V e $V^v_M(B)$=F e altrimenti $V^v_M(A \Rightarrow B)$=V.
- $V^v_M(A \Leftrightarrow B)$=V se $V^v_M(A)$=$V^v_M(B)$ e altrimenti $V^v_M(A \Leftrightarrow B)$=F.
- $V^v_M(\forall xA)$=V se $V^{v'}_M(A)$=V per ogni *v'* tale che *v'* $=_x$ v e altrimenti $V^v_M(\forall xA)$=F.

- $V_M^v(\exists xA)$=V se $V_M^{v'}(A)$=V per qualche v' tale che $v' =_x v$ e altrimenti $V_M^v(\exists xA)$=F.

Inoltre è possibile dimostrare che, se due assegnazioni v e v' (per un modello M) coincidono su tutte le variabili che occorrono libere in un'espressione A, allora $V_M^v(A)$=$V_M^{v'}(A)$. Infatti, in una proposizione A nessuna variabile occorre libera e, quindi, data due assegnazioni qualsiasi v e v' (per M), è sicuramente vero che v e v' coincidono sulle variabili libere in A; di conseguenza, per ogni proposizione A e per ogni coppia di assegnazione v e v', $V_M^v(A)$=$V_M^{v'}(A)$.
In parole povere, una proposizione A *o* è vera modulo tutte le assegnazioni per un modello M *o* è falsa modulo tutte le assegnazioni per M. Quindi, il valore di verità di una proposizione A in un modello M è V se $V_M^v(A)$=V per ogni assegnazione v per M e altrimenti $V_M(A)$=F.

Prima di concludere il paragrafo , alcune piccole osservazioni: una **proposizione** di L_3 è logicamente vera se è solo se è vera in tutti i modelli, e logicamente falsa se e solo se è falsa in tutti i modelli; un'**argomentazione** di L_3 è valida se e solo se non esiste un modello in cui le premesse sono vere e la conclusione è falsa.

4.4 Regole di inferenza per i quantificatori

Così come per i connettivi, anche in questo caso avremo una regola di introduzione e una regola di eliminazione per ciascun quantificatore.

4.4.1 Universale

Eliminazione. L'idea di base è la seguente: data x variabile e A una formula, allora da $\forall xA$ possiamo dedurre che A è soddisfatta da ogni termine o variabile che specifica x. Ci torna utile dire che,

Definizione 4.10 (Sostituzione)**.** Sia t un termine, o una variabile y e x una variabile, **A[*x*/*t*]** indica la formula che si ottiene da A sostituendo x con t in ogni sua occorrenza libera.

Osservazione 6.
Seguo [2] per discutere alcuni problemi che si pongono per la sostituzione di termini alle variabili libere di una formula.
Sia $s[x/s_1]$ il risultato della sostituzione del termine s_1 a tutte le occorrenze della variabile x in s. Si osserva che l'operazione di sostituzione di un termine

si risolve nell'inserimento di esso nelle posizioni (occorrenze) occupate dalla variabile, se ve ne sono.
Innanzitutto, si definisce la sostituzione $s[x/s_1]$:

- se s è x, $s[x/s_1]$ è s_1;
- se s è una variabile diversa da x o una costante, $s[x/s_1]$ è s.

Dopodichè si definisce A$[x/t_1]$:

- se A è P$(s_1, ..., s_n)$, A$[x/t]$ è P$(s_1[x/t], ..., s_n[x/t])$;
- A è ¬B, A$[x/t]$ è ¬(B$[x/t]$);
- se A è QxB, A$[x/t]$ è A;
- se A è QyB, y diversa da x, A$[x/t]$ è Qy(B$[x/t]$)

(con Q quantificatore). Se si esegue una sostituzione A$[x/t]$ con un termine che è una variabile (quasi-termini, vedi cap. 6) occorre cautela in quanto possono presentarsi incongruenze perché non sempre accade che l'affermazione fatta da A su x venga trasportata per il significato a t.
Considerando l'espressione

$$\exists y Pyx,$$

essa in italiano corrisponde a 'qualche oggetto y sta nella relazione P con x' e sostituendo uniformemente x con y si otterrebbe la proposizione

$$\exists y Pyy,$$

in cui nessuna variabile occorre libera, perché la posizione precedentemente occupata da x viene a essere controllata dal quantificatore, formando così una proposizione invece di un'espressione aperta che vale 'qualche oggetto y sta nella relazione P con se stesso'. Per ovviare a questo problema si darà una definizione modificata di $A[x/y]$ quando t è una variabile y: essa è il risultato ottenuto eseguendo in successione due operazioni. Prima si sostituiscono tutte le eventuali occorrenze vincolate di y in A con occorrenze di una variabile z distinta da y e non occorrente in A; dopodichè si rinomina y con z; infine, si sostituiscono tutte le occorrenze libere di x con occorrenze di y.

Tornando al nostro discorso principale sulle regole di inferenza, si nota che si può assumere che x non ammetta occorrenze vincolate in A, cioè che in A siano assenti ulteriori quantificatori quali $\forall x$ e $\exists x$.

La prima versione, piuttosto grossolana, della regola di eliminazione di $\forall$ darebbe, per t qualunque

$$\frac{\forall xA}{A[x/t]}$$

che però presenta una falla facilmente identificabile che costringe alla rettificazione precedente. Facciamo un altro esempio: se si considera per la formula A l'espressione $\exists y \neg(x = y)$, allora $\forall xA$ diventa $\forall x \exists y \neg(x = y)$. Ma se t=y allora A[x/y] diventa $\exists y \neg(y = y)$ che è evidentemente di significato diverso. Con la rinomina si ottiene $\forall x \exists z \neg(x = z)$ e si ha che A[x/y] è $\exists z \neg(y = z)$ che non presenta problemi. Finché non si considera la sostituzione con variabile, le rinomine sono inutili.

Introduzione. Essa asserisce che:

$$\frac{A}{\forall xA}$$

purché x non occorra libera nelle premesse o comunque nelle ipotesi di livello non successivo a quello in cui compare A.

4.4.2 Esistenziale

Introduzione. Se esiste qualche elemento che rende valida A rispetto a x, allora possiamo dedurre $\exists xA$. La regola è:

$$\frac{A[x/t]}{\exists xA}$$

Eliminazione. Una volta che si è dimostrato $\exists xA$, si può asserire 'sia y un elemento che soddisfa A' e procedere in questo modo. Però bisogna introdurre delle limitazioni per y: essa infatti non deve essere mai occorsa in precedenza oppure y deve essere proprio x. La derivazione seguirà quindi questo andamento: se dopo $\exists xA$ è possibile ottenere una formula B a partire da A[x/t], allora posso affermare B. La regola (grezza) sarà:

$$\frac{\exists xA}{B}$$

4.5 Un esempio

Consideriamo la seguente argomentazione:

$$(1)\forall x(A \Rightarrow B)$$
$$\therefore(2)\forall xA \Rightarrow \forall xB$$

Scriviamo ora la derivazione della nostra argomentazione:

1. $\forall x(A \Rightarrow B)$
2. (a) $\forall xA$
   (b) i. $\forall xA$
       ii. A (*Eliminazione* $\forall$, 2b(i))
   (c) i. $\forall x(A \Rightarrow B)$
       ii. $A \Rightarrow B$ (*Eliminazione* $\forall$, 2c(i))
       iii. B (*Eliminazione* $\Rightarrow$, 2b(ii)-2c(ii))
       iv. $\forall xB$ (*Introduzione* $\forall$ osservando che x non compare libera nella premessa (1) e nell'ipotesi 2b(i))
   (d) $\forall xB$
3. $\forall xA \Rightarrow \forall xB$ (*Introduzione* $\Rightarrow$, 2b(i)-2c(iv))

Mostriamo ora invece che un uso inappropriato di una delle quattro regole di inferenza porta a deduzioni inaccettabili. Supponiamo infatti di voler dimostrare la seguente argomentazione (con x libera in A):

$$(1)\exists xA$$
$$\therefore(2)\forall xA$$

che è evidentemente errata in quanto possiamo sempre affermare che esiste un numero pari ma non certo dedurre che ogni numero è pari.
Scriviamo la nostra argomentazione:

1. $\exists xA$
2. (a) A (con $t = x$)
   (b) $\forall xA$ (*Introduzione* $\forall$, 2a, ma x compariva libera in 2a)
3. $\forall xA$ (*Eliminazione* $\exists$, applicata correttamente ma conseguenza di una derivazione secondaria errata!)

Capitolo 5

Logica dei termini con identità

5.1 Un nuovo linguaggio artificiale

Consideriamo la seguente argomentazione, ponendoci nel campo dei complessi:

(a) i non è il quadrato di se stesso.
(b) -1 è il quadrato di i.
Quindi, (c) -1 non è identico a i.

Intuitivamente si può dire che questa argomentazione è valida però con gli strumenti introdotti fino ad ora non è possibile convalidarla. Se, infatti, viene tradotta in L_3, si ottiene:

(a) $\neg \mathrm{P}aa$
(b) $\mathrm{P}ab$
$\therefore (c) \neg \mathrm{Q}ab$
con
P: ... è il quadrato di...
Q: ... è identico a...
a: i
b: -1

e sicuramente esistono dei modelli $\mathrm{M}=\langle D, f\rangle$ in cui l'interpretazione *f(a)* di a sta nella relazione $f(\mathrm{P})$ ma non con se stesso, e tuttavia sta nella relazione $f(\mathrm{Q})$ con *f(b)*.
Il problema sta nell'uso di una proprietà del predicato, precisamente di 'è identico a': se due oggetti sono identici, allora tutto ciò che è vero dell'u-

no è vero anche dell'altro. La nostra traduzione di 'è identico a' è Q, ma avremmo potuto usare P e tradurre 'è il quadrato di' con Q: in L_3 non c'è alcuna differenza tra i due predicati e, quindi, nel modello M, f(Q) è libero di comportarsi in modo sbagliato e questo spiega la relazione che sussiste tra *f(a)* e *f(b)*, oggetti per cui non valgono le stesse cose.
Quindi, 'è identico a' è una parte fondamentale della nostra argomentazione, che però va perso durante la traduzione. Al fine di rimediare a questa falla nel sistema costruito finora, si introduce la *logica dei termini con identità* (o L_5), cioè il risultato ottenuto aggiungendo alla logica dei termini una specifica analisi del predicato 'è identico a'.
Prima di passare ad analizzare i nuovi meccanismi del linguaggio L_5, è bene aprire una breve parentesi.

5.2 Perché spingerci oltre?

Il problema posto precedentemente può essere affrontato anche in un altro modo: si può pensare che non sia L_3 ad essere inadeguato, bensì siano le nostre argomentazioni a non essere esplicite.
Riprendiamo la nostra argomentazione introdotta all'inizio del precedente paragrafo e scriviamola in modo chiaro:

(a) i non è il quadrato di se stesso.
(b) -1 è il quadrato di i.
(c) Per ogni x,y e z, se x è il quadrato di y e x non è il quadrato di z, allora z non è identico a y.
Quindi, (d) -1 non è identico a i.

In questo modo, L_3 può effettivamente essere usato per constatarne la validità.
Ma allora perché andare oltre?
Semplicemente perché, ragionando in questo modo, si potrebbe evitare qualsiasi approfondimento dell'analisi logica dopo quella a cui si è arrivati nel primo capitolo, cioè ci si potrebbe fermare a L_1.
Se, infatti, si volesse giustificare la validità di un'argomentazione con premesse $A_1, ..., A_n$ e conclusione B e si suppone di non riuscirci mediante una traduzione in L_1, si potrà sempre dire che l'argomentazione è formulata in modo incompleto e che la sua forma più chiara è:

$$
\begin{gathered}
(1)A_1 \\
\vdots \\
(n)A_n \\
(n+1)A_1...A_n \Rightarrow B \\
(n+2)B.
\end{gathered}
$$

Questa traduzione è ovviamente valida e quindi non sussiste il bisogno di andare oltre L_1.
Però deve essere il nostro desiderio di approfondimento a spingerci oltre questa semplice 'via di fuga', se così può essere chiamata, accompagnata e bilanciata da opportune considerazioni pragmatiche: infatti, sarebbe impossibile specificare tutte le caratteristiche di tutti i predicati usati in italiano.
Però il predicato 'è identico a' ha un uso estremamente generale in qualunque disciplina e la sua applicabilità è la più vasta possibile: ogni oggetto, infatti, è identico a se stesso. Con queste affermazioni sicuramente non si è data una risposta esauriente alla domanda che ci siamo posti, però si è trovato un motivo valido per andare avanti e arricchire il nostro strumento artificiale.

5.3 Novità di L_5

Il vocabolario di del nuovo linguaggio artificiale è lo stesso di L_3 con l'aggiunta del simbolo =.

Osservazione 7.
Il simbolo appena introdotto per rappresentare l'identità può essere espresso attraverso il particolare predicato binario "... = ***" binario (cioè con due posti di argomento).
Passando al piano semantico, questo predicato viene interpretato nella comune semantica logica come la *relazione che ogni oggetto* (ogni elemento del dominio) *ha con se stesso e con nessun altro oggetto.*
Quindi, se t e u sono due termini singolari, "$t = u$" è vero, nell'interpretazione considerata, se e solo se l'oggetto denotato da t e l'oggetto denotato da u sono lo stesso oggetto.

Per la definizione delle proposizioni di L_5 si segue lo stesso procedimento visto per le proposizioni di L_3: prima si definiscono le espressioni e poi si caratterizzano le proposizioni come espressioni chiuse.

Definizione 5.1 (Espressione ben formata di L_5)**.**
(1) Se P è un predicato a n posti e ciascuno di $t_1, ..., t_n$ è un termine o una variabile, allora Pt_1...Pt_n è un'espressione di L_5.
(2) Se A è un'espressione di L_5, allora $\neg A$ è un espressione di L_5. (3) Se A e B sono espressioni di L_5, allora $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$ e $(A \Leftrightarrow B)$ sono espressioni di L_5.
(4) Se A è un'espressione di L_5, allora $\forall xA$ e $\exists xA$ sono espressioni di L_5.
(5) $t = t$' è un'espressione di L_5.
(6) Nient'altro è un'espressione di L_5.

Per quanto riguarda le condizioni di verità delle espressioni di L_5, esse sono in gran misura già note: si parte dalla nozione di modello, si associano ad esso le sue assegnazioni, si definisce la verità di un'espressione modulo un'assegnazione e così via.

Definizione 5.2 (Valore di verità V di un'espressione A data un'assegnazione v)**.**
Le condizioni sono quelle già viste nella definizione 4.9:

- $V_M^v(Pt)$=V se $W_M^v(t)$ ha la proprietà f(P) e altrimenti $V_M^v(Pt)$=F.
- $V_M^v(Pt_1...t_n)$=V se $W_M^v(t_1)$,..., $W_M^v(t_n)$ stanno nella relazione f(P) e altrimenti $V_M^v(Pt_1...t_n)$=F.
- $V_M^v(\neg A)$=V se $V_M^v(A)$=F e altrimenti $V_M^v(\neg A)$=F.
- $V_M^v(A \wedge B)$=V se $V_M^v(A)$=V e $V_M^v(B)$=V e altrimenti $V_M^v(A \wedge B)$=F.
- $V_M^v(A \vee B)$=F se $V_M^v(A)$=F e $V_M^v(B)$=F e altrimenti $V_M^v(A \vee B)$=V.
- $V_M^v(A \Rightarrow B)$=F se $V_M^v(A)$=V e $V_M^v(B)$=F e altrimenti $V_M^v(A \Rightarrow B)$=V.
- $V_M^v(A \Leftrightarrow B)$=V se $V_M^v(A)$=$V_M^v(B)$ e altrimenti $V_M^v(A \Leftrightarrow B)$=F.
- $V_M^v(\forall xA)$=V se $V_M^{v'}(A)$=V per ogni v' tale che v' $=_x$ v e altrimenti $V_M^v(\forall xA)$=F. (per $v =_x v$ vedi pag. 34)
- $V_M^v(\exists xA)$=V se $V_M^{v'}(A)$=V per qualche v' tale che v' $=_x$ v e altrimenti $V_M^v(\exists xA)$=F.

La novità consiste in:

$$V_M^v(t = t')=\text{V se } W_M^v(t)=W_M^v(t') \text{ e altrimenti } V_M^v(t = t')=\text{F}.$$

Osservazione 8.
È interessante notare che L_5 ci permette di tradurre tutte le proposizioni traducibili in precedenza e molte altre: infatti, se in L_3 siamo in grado di tradurre

(1) C'è almeno un numero positivo ($\exists xPx$)

non siamo però in grado di tradurre

(2) Ci sono almeno due numeri positivi.

Quindi, se L_3 fosse tutto quello che si ha a disposizioni, l'unica cosa da fare sarebbe tornare a L_1 e tradurre la nostra proposizione con una lettera proposizionale.
Grazie a L_5 le cose cambiano: (2) è equivalente a

(3) Ci sono almeno due numeri positivi *distinti*,

cioè a

(4) Per qualche x, per qualche y, x è un numero positivo e y è un numero positivo e non si dà il caso che x sia identico a y,

che può essere tradotta con

$$(5)\exists x\exists y(Px \land Py \land \neg(x = y))$$

con P: è un numero positivo.

5.4 Regole di inferenza per =

Infine è il momento di estendere al nuovo linguaggio artificiale il metodo delle derivazioni: a tale scopo, ci servirà una regola di introduzione e una di eliminazione per il nuovo simbolo =, da aggiungere ovviamente a tutte le regole già esaminate.
La regola di introduzione è molto semplice: poiché ogni oggetto è identico a se stesso, in ogni punto di una derivazione sarà lecito introdurre una proposizione della forma $a = a$. La regola è:

$$\frac{\vdots}{a = a}$$

Per quanto riguarda la regola di eliminazione, si seguirà questo ragionamento: se a è lo stesso oggetto di b, allora tutto ciò che vale per a vale anche per b (e viceversa). La cosa si può vedere anche dal punto di vista delle proposizioni: se $a = b$ è vera e Pa è vera, allora anche Pb sarà vera.
In generale, da $a = b$ e A, è lecito dedurre il risultato A$[a/b]$ della sostituzione uniforme di a con b. La regola è:

$$\frac{a = b, A}{A[a/b]}$$

5.5 Un esempio

Consideriamo la seguente argomentazione:

$$(1)\exists xPx$$

$$(2)\exists x\neg Px$$

$$\therefore(3)\exists x\exists y\neg(x=y)$$

Scriviamo ora la derivazione della nostra argomentazione:

1. $\exists xPx$
2. $\exists x\neg Px$
3. (a) Pa (da 1)
   (b) i. $\neg Pb$ (da 2)
       ii. $*\ a=b$
           $**\ Pb$ (*Eliminazione* $=$, 3b(ii)$*$)
       iii. $\neg a=b$ (*Introduzione* $\neg$, 3b(ii)$*$-3b(ii)$**$)
       iv. $\exists y\neg(a=y)$ (*Introduzione* $\exists$, 3b(iii))
   (c) $\exists x\exists y\neg(x=y)$ (*Introduzione* $\exists$, 3b(iv))
4. $\exists x\exists y\neg(x=y)$ (*Eliminazione* $\exists$, 1, 3a-3c)

Capitolo 6

Linguaggio delle descrizioni

Si prenda in esame la seguente argomentazione:

(a) 4 e solo 4 è il quadrato di 2.
(b) 4 e solo 4 è il quadrato di -2.
Quindi (c) il quadrato di 2 è identico al quadrato di -2.

La traduzione della nostra argomentazione in L_5 sarà:

(a)$\mathrm{P}ab \wedge \forall x(\mathrm{P}xb \Rightarrow x = a)$
(b)$\mathrm{P}ac \wedge \forall x(\mathrm{P}xc \Rightarrow x = a)$
$\therefore (c)\mathrm{a}_1 = a_2$
P: ... è il quadrato di...
a: 4
b: 2
c: -2
a_1: il quadrato di 2
a_2: il quadrato di -2

e si può notare che esistono modelli in cui (a) e (b) sono vere mentre (c) è falsa.
Quindi, per l'ennesima volta, tutto ciò che si era costruito fino ad ora risulta essere inadeguato!
Intuitivamente, l'argomentazione proposta è banalmente valida: infatti, per (a) un oggetto è identico al quadrato di 2 e tale oggetto è 4, quindi 4 è il quadrato di 2; per (b) un oggetto è identico al quadrato di -2 e tale oggetto è 4, quindi 4 è il quadrato di -2. Ma se due oggetti sono identici ad un terzo, sono identici fra loro: quindi, il quadrato di 2 e il quadrato di -2 sono identici.
Qual è la falla di questa giustificazione?

C'è un inferenza da una proposizione contenente il predicato 'è il quadrato di' a una proposizione atomica in cui 'è il quadrato di' occorre come parte di uno dei termini singolari.
Per risolvere questo problema si utilizzano le **descrizioni definite** (accennate nel capitolo 4): *il quadrato di 2* e *il quadrato di -2* sono, appunto, descrizioni. Data la loro grande applicabilità nella maggior parte dei nostri discorsi, nonostante siano anch'esse dei termini, è necessario studiarle più a fondo e per fare ciò si introdurrà un nuovo linguaggio artificiale.

6.1 Il linguaggio L_6

Il vocabolario di L_6 contiene gli stessi simboli di L_5 più il *descrittore* ι: esso si applica ad espressioni aperte e da a loro un senso compiuto. Quindi, agisce come un quantificatore, con la sola differenza che le espressioni costruite usando quantificatori sono proposizioni mentre le espressioni costruite usando il descrittore sono termini. Lo scopo, ora, è quello di applicare il descrittore a espressioni di complessità arbitraria: nel definire le espressioni di L_5 si era utilizzata una definizione ricorsiva, quindi per definire termini di complessità arbitraria, anch'essi dovranno ricevere una definizione ricorsiva.
Il problema sta nel fatto che non si possono definire prima i termini in quanto le descrizioni sono costruite applicando il descrittore a espressioni e, contemporaneamente, non si possono neanche definire le espressioni in quanto la maggior parte di esse contiene dei termini. Di conseguenza si darà una definizione simultanea di termini e espressioni.
Sorge però un ulteriore problema: si vogliono costruire espressioni come $\exists x\iota yPxy = a)$ e termini come $\iota x(\iota yPxy = a)$, ma queste richiedono entrambe l'utilizzo di $\iota yPxy$ che non è propriamente un termine in quanto contiene la variabile libera x.
Quindi, come si sono estese le proposizioni alle espressioni, così si estenderanno i termini ai *quasi-termini*:

Definizione 6.1 (Quasi-termine)**.** ([1], capitolo 7)
Un **quasi-termine** o è un termine o differisce da un termine solo perché contiene variabili libere.

Si può passare, quindi, alla definizione simultanea di espressioni e quasi-termini:

Definizione 6.2.
(a) *a, b, c,...* sono quasi-termini di L_6 (detti *costanti*).
(b) *x, y, z,...* sono quasi-termini di L_6.

(c) Se P è un predicato a n posti, allora P$t_1...t_n$ è un'espressione di L_6.
(d) $t = t'$ è un'espressione di L_6.
(e) Se A è un'espressione di L_6, allora ¬A è un'espressione di L_6.
(f) Se A e B sono espressioni di L_6, allora $A \wedge B, A \vee B, A \Rightarrow B, A \Leftrightarrow B$ sono espressioni di L_6.
(g) Se A è un'espressione di L_6, allora $\forall xA$ e $\exists xA$ sono espressioni di L_6.
(h) Se A è un'espressione di L_6, allora ιxA è un quasi-termine di L_6.
(i) Nient'altro è un'espressione o un quasi-termine di L_6.

Le nozioni di occorrenza libera e vincolata di una variabile in un'espressione vengono estese in modo naturale a espressioni e a quasi-termini di L_6: in particolare, nessuna variabile occorre libera in una costante a, in quanto nessuna variabile occorre in una costante, e la variabile x è vincolata in ιxA. Di conseguenza, le proposizioni di L_6 sono tutte le espressioni che non contengono variabili libere, e i termini di L_6 sono tutti i quasi-termini che non contengono variabili libere.
Ora, è il momento di concentrarsi sulle condizioni di verità delle proposizioni di L_6: ovviamente, il valore di verità di una proposizione A di L_6in un dato modello M dipende dagli oggetti designati in M dai vari termini occorrenti in A, e alcuni di questi termini possono essere descrizioni. **Sorge però un nuovo problema.**
In generale, una descrizione si riferisce ad un determinato oggetto che gode di una certa proprietà. Tuttavia, ci sono delle proprietà di cui non gode nessun oggetto e delle proprietà di cui gode più di un oggetto. Per risolvere questo problema, si sceglierà per ogni modello un oggetto arbitrario, detto *oggetto prescelto* e si userà questo oggetto come riferimento convenzionale a tutte le descrizioni che non hanno un riferimento naturale.
In termini più precisi, se si chiama ιxA *propria* in un modello M quando esattamente un oggetto ha la proprietà A in M, e *impropria* altrimenti, l'oggetto prescelto di M sarà il riferimento convenzionale di tutte le descrizioni improprie.
Di conseguenza si avrà una nuova definizione di modello:

Definizione 6.3 (Modello)**.**
Un modello è una struttura costituita da un insieme non vuoto D (detto dominio), da un elemento di D (detto oggetto prescelto), e da un'interpretazione delle costanti e dei predicati di L_6.

Osservazione 9.
D'ora in poi si abbrevierà la dicitura 'un modello M con dominio D, oggetto prescelto d e interpretazione f' con 'un modello M=$\langle D, d, f\rangle$'.

Ad ogni modello M=$\langle D, d, f\rangle$ si associerà l'insieme delle sue assegnazioni: il valore di verità di ogni espressione e il riferimento di ogni quasi-termine verrà definito modulo ciascuna di tali assegnazioni.

Definizione 6.4 (Valore di verità V di un'espressione A e riferimento W di un quasi-termine a data un'assegnazione v).
Le condizioni sono quelle già viste nella definizione 4.9:

- $V_M^v(Pt)$=V se $W_M^v(t)$ ha la proprietà f(P) e altrimenti $V_M^v(Pt)$=F.
- $V_M^v(Pt_1...t_n)$=V se $W_M^v(t_1)$,..., $W_M^v(t_n)$ stanno nella relazione f(P) e altrimenti $V_M^v(Pt_1...t_n)$=F.
- $V_M^v(\neg A)$=V se $V_M^v(A)$=F e altrimenti $V_M^v(\neg A)$=F.
- $V_M^v(A \wedge B)$=V se $V_M^v(A)$=V e $V_M^v(B)$=V e altrimenti $V_M^v(A \wedge B)$=F.
- $V_M^v(A \vee B)$=F se $V_M^v(A)$=F e $V_M^v(B)$=F e altrimenti $V_M^v(A \vee B)$=V.
- $V_M^v(A \Rightarrow B)$=F se $V_M^v(A)$=V e $V_M^v(B)$=F e altrimenti $V_M^v(A \Rightarrow B)$=V.
- $V_M^v(A \Leftrightarrow B)$=V se $V_M^v(A)$=$V_M^v(B)$ e altrimenti $V_M^v(A \Leftrightarrow B)$=F.
- $V_M^v(\forall xA)$=V se $V_M^{v'}(A)$=V per ogni v' tale che v' $=_x$ v e altrimenti $V_M^v(\forall xA)$=F. (per $v =_x v$ vedi pag. 34)
- $V_M^v(\exists xA)$=V se $V_M^{v'}(A)$=V per qualche v' tale che v' $=_x$ v e altrimenti $V_M^v(\exists xA)$=F.

La novità consiste in:

- $W_M^v(a)=f(a)$
- $W_M^v(x)=v(x)$
- Se esiste esattamente un'assegnazione v' per M tale che v' $=_x$ v e $V_M^{v'}(A)$=V, allora $W_M^v(\iota xA)$=$W_M^{v'}(\iota xA)$ e altrimenti $W_M^v(\iota xA)$=d.

È possibile dimostrare che se due assegnazioni v e v' per M coincidono su tutte le variabili che occorrono libere in un'espressione A o in un quasi-termine t allora rispettivamente $V_M^v(A)$=$V_M^{v'}(A)$ e $W_M^v{}'(t)$=$W_M^{v'}(t)$. Quindi, una proposizione avrà lo stesso valore di verità e un termine lo stesso riferimento modulo tutte le assegnazioni per M. Per questo motivo si stabilisce che $V_M(A)$=V se $V_M^v(A)$=V per ogni v e altrimenti $V_M(A)$=F.
Si stabilisce che $W_M(t)$ sia l'oggetto d' tale che $W_M^v(t)$=d' per ogni v, se questo accade.

6.2 Derivazione in L_6

Le regole fin qui costruite e dimostrate continuano a valere e si aggiungeranno ad esse una regola di introduzione e una di eliminazione per il nostro descrittore ι. Prima di passare ad enunciare le due regole c'è bisogno di una piccola introduzione.
Quando possiamo affermare la validità di Q($\iota x Px$) in M? In due casi: quando esiste esattamente un oggetto che è P e tale oggetto è anche Q oppure quando non esiste esattamente un oggetto che è P ma l'oggetto prescelto è Q.
La prima possibilità si può esprimere dicendo che la proposizione seguente è vera in M:

$$\exists x((Px \wedge \forall y(Py \Rightarrow y = x)) \wedge Qx).$$

Per quanto riguarda la seconda possibilità, ci serve una descrizione che in qualsiasi modello è impropria e quindi designa l'oggetto prescelto: ciò che fa al caso nostro è $\iota z \neg(z = z)$. Quindi la si può esprimere attraverso la seguente proposizione che è vera in M:

$$\neg\exists x((Px \wedge \forall y(Py \Rightarrow y = x)) \wedge Q(\iota z \neg(z = z)).$$

Ora sostituiamo A a Px e B a Qx: allora, ci si può riferire a Py con $A[x/y]$, a Q($\iota x Px$) con B[$x/\iota x A$] e a Q($\iota z \neg(z = z)$) con B[$x/\iota z \neg(z = z)$]. La regola per l'introduzione del descrittore sarà:

$$\frac{\begin{array}{c}\exists\ x((\mathrm{A} \wedge\ \forall\ y(\mathrm{A}[x/y] \Rightarrow\ y = x)) \wedge \mathrm{B}) \vee \\ \vee\ (\neg\ \exists\ x(\mathrm{A} \wedge\ \forall\ y(\mathrm{A}[x/y] \Rightarrow\ y = x)) \wedge \mathrm{B}[x/\iota\ z\ \neg(z = z)])\end{array}}{\mathrm{B}[x/\iota x \mathrm{A}]}$$

Per quanto riguarda l'eliminazione, basta riflettere sul fatto che la disgiunzione presente nella formula di introduzione permette di inferire B[$x/\iota x$A] e, inversamente, B[$x/\iota x$A] dovrebbe permettere di inferire la disgiunzione in questione: se B[$x/\iota x$A] è vera in M, uno dei due disgiunti deve essere vero in M. La regola di eliminazione del descrittore consisterà proprio nell'inferenza inversa:

$$\frac{B[x/\iota x A]}{\begin{array}{c}\exists\ x((A \wedge\ \forall\ y(A[x/y] \Rightarrow y = x)) \wedge B) \vee \\ \vee\ (\neg\ \exists\ x(A \wedge\ \forall\ y(A[x/y] \Rightarrow y = x)) \wedge B[x/\iota\ z\ \neg(z = z)])\end{array}}$$

Osservazione 10.
Ricordiamo che l'espressione A$[x/y]$ rappresenta un estensione della nozione di sostituzione uniforme introdotta nel capitolo 4(*Osservazione* 6): essa è il risultato della sostituzione uniforme di x con y che richiede eventualmente rinomine.

6.3 Un esempio

Consideriamo la seguente semplicissima argomentazione:

$$(1) a = a$$
$$\therefore (2) \iota x(x = a) = a$$

Scriviamo ora la derivazione della nostra argomentazione:

1. $a = a$
2. (a) $b = a$
   (b) $b = a$ (*Ripetizione*, 2a)
3. $b = a \Rightarrow b = a$ (*Introduzione* $\Rightarrow$, 2b)
4. $\forall y(y = a \Rightarrow y = a)$ (*Introduzione* $\forall$, 3)
5. $a = a \wedge \forall y(y = a \Rightarrow y = a)$ (*Introduzione* $\wedge$, 1,4)
6. $a = a \wedge \forall y(y = a \Rightarrow y = a) \wedge a = a$ (*Introduzione* $\wedge$, 1,5)
7. $\exists x((x = a \wedge \forall y(y = a \Rightarrow y = x) \wedge x = a)$ (*Introduzione* $\exists$, 6)

che si potrebbe fare con l'uguaglianza interpretata come una semplice relazione d'equivalenza sostitutiva (vedi [2]).
Ma è una conseguenza della semantica di =, data nel capitolo 5(vedi *Osservazione* 7), che ci garantisce che l'uguaglianza sia l'identità perfetta.
Con le ultime nozioni introdotte in questo capitolo, è possibile dare al descrittore ι un valore preciso e concludere la nostra derivazione:

8. $\exists x((x = a \wedge \forall y(y = a \Rightarrow y = x) \wedge x = a) \vee (\neg\exists x((x = a \wedge \forall y(y = a \Rightarrow y = x) \wedge \iota z \neg(z = z) = a)$ (*Introduzione* $\vee$, 7)
9. $\iota x(x = a) = a$ (*Introduzione* ι, 8)

Con queste proprietà si possono giustificare argomentazioni come quelle presenti in [1], capitolo 7:

- $\forall x \mathrm{P} x$
  $\therefore \iota x \mathrm{P} x = \iota z \neg(z = z)$
- $\iota\ x(x = a) = b$
  $\therefore a = b$
- $\mathrm{P}(\iota z \neg(z = z)) \Rightarrow \mathrm{P}(\iota x \mathrm{P} x)$

Bibliografia

[1] Bencivenga E., 'Il primo libro di logica', Boringhieri, Torino, 1984.

[2] Lolli G., 'Introduzione alla logica formale', il Mulino, Bologna, 1991

Ringraziamenti

Innanzitutto ringrazio il mio relatore, il professor Piero Plazzi, che mi ha guidato nella stesura di questo lavoro ed è sempre stato disponibile a dirimere i miei dubbi.
Ringrazio i miei genitori che mi hanno sempre spronato a dare il meglio di me in ogni occasione rendendo possibile il raggiungimento di questo traguardo, e mia sorella, a cui voglio tanto bene.
Inoltre ringrazio tutti i miei compagni di corso che mi hanno accompagnato in questa splendida avventura, aiutandomi in più di una occasione, e tutti i miei cari amici che mi hanno sempre fatto sentire il loro sostegno.
Infine, un ringraziamento particolare va alla mia fidanzata che in quest'ultimo periodo mi è stata sempre vicino, nonostante la lontananza geografica.