

ALMA Mater Studiorum  
Universita` degli di Studi Bologna

---

---

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Astrofisica e Cosmologia

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Proprietà strutturali degli aloni  
in simulazioni cosmologiche

Elaborato Finale

Candidato:

Katia Bonella

Relatore:

Chiar.mo Prof.:

Lauro Moscardini

Co-relatore:

Carlo Giocoli

---

---

Sessione III  
Anno Accademico 2012/2013

*Alle mie forze mareali:  
Andrea, Chiara, Franco  
e i Green Day!*



# Indice

<b>1</b>	<b>Scenario cosmologico</b>	<b>1</b>
1.1	Universi piatti . . . . .	6
1.2	Universi curvi . . . . .	6
1.3	Universi con costante cosmologica . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Formazione delle strutture</b>	<b>11</b>
2.1	Crescita delle perturbazioni . . . . .	12
2.2	Teoria lineare . . . . .	14
2.3	Teoria non lineare . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Simulazioni numeriche</b>	<b>24</b>
3.1	Metodo PP . . . . .	25
3.2	Metodo PM . . . . .	26
3.3	Algoritmo TREE . . . . .	26
3.4	Condizioni iniziali . . . . .	26
3.5	Il codice GADGET-2 . . . . .	28
3.6	Identificazione delle strutture . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Osservazioni dagli ammassi di galassie</b>	<b>33</b>
4.1	Osservazioni nell'ottico . . . . .	34
4.2	Osservazioni X . . . . .	35
4.3	Osservazioni in banda radio . . . . .	37
4.4	Osservazioni nel millimetrico: effetto SZ . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Proprietà degli aloni simulati</b>	<b>40</b>
5.1	Profili di densità . . . . .	40
5.2	Dispersione di velocità . . . . .	51
5.3	Momento angolare . . . . .	56

# Introduzione

Gli ammassi di galassie sono i sistemi virializzati più massicci che oggi possiamo osservare nell'Universo.

Grazie alle loro particolari caratteristiche sono di fondamentale importanza per gli studi cosmologici, sia perché permettono lo studio della formazione delle strutture su grande scala, sia perché forniscono limiti ai parametri cosmologici fondamentali.

La comprensione di queste strutture è tutt'ora in corso e certamente sarà foriera di sorprendenti novità nei prossimi anni.

Allo stato attuale può essere utile una visione d'insieme del problema.

Nel primo capitolo si introducono gli aspetti che, da un punto di vista teorico, hanno portato alla costruzione di un modello che possa descrivere in modo adeguato come le strutture si sono formate.

Nel secondo capitolo si analizza lo stesso problema ma con un occhio di riguardo a come i modelli possono descrivere la crescita di passo in passo, e immediatamente diventa evidente che la complessità raggiunge un livello tale da poter essere affrontata solo attraverso simulazioni numeriche che vengono, in linea generale, presentate nel capitolo terzo.

Nel capitolo quarto si introduce da dove si possono ottenere effettivamente i dati osservativi relativi agli ammassi, le cui proprietà principali vengono agevolmente analizzate dai modelli numerici.

Nel quinto e ultimo capitolo si presenta uno stato dell'arte delle relazioni scoperte dalle simulazioni, soffermandosi principalmente sui diversi profili di densità, velocità e momento angolare che sono stati proposti fino ad oggi.

# Capitolo 1

## Scenario Cosmologico

Uno degli attuali obiettivi della cosmologia è comprendere come le strutture dell'Universo si sono formate e come si sono evolute nel tempo.

Per raggiungere questo obiettivo sono stati proposti diversi modelli teorici. Attualmente, il modello cosmologico più accreditato ha alla base l'Universo che viene descritto dal modello del *Big Bang*, che prevede una condizione iniziale estremamente calda e densa dalla quale l'Universo iniziò ad espandersi, accompagnato dal modello dell'*inflazione*, che sostiene ci sia stata un'espansione accelerata nelle prime fasi di evoluzione dell'Universo. In generale, per creare un modello è bene adottare alcune ipotesi che semplifichino il problema. L'assunzione di partenza del modello del Big Bang è il *Principio Cosmologico*, con cui si intende l'omogeneità e l'isotropia dell'Universo su scale maggiori a qualche centinaio di Megaparsec<sup>1</sup>, ovvero la densità è assunta uguale in ogni punto e non è prevista la presenza di direzioni privilegiate. Caratteristiche che, invece, non si osservano su scale inferiori, sulle quali la materia si aggrega gravitazionalmente in galassie e ammassi di galassie, alternate da regioni a bassissima densità. La prova che anche l'Universo primordiale era isotropo può essere dedotta dalla osservazione della CMB (*Cosmic Microwave Background*), termine con il quale ci si riferisce al fondo cosmico di microonde, il bagno termico di fotoni provenienti da tutte le direzioni che oggi misuriamo e che, secondo il modello del Big Bang, proviene da una superficie sferica, detta *superficie di ultimo scattering*, che rappresenta l'insieme dei punti nello spazio in cui si ritiene sia avvenuto l'evento di disaccoppiamento tra materia e radiazione. Dalle mappe della sua temperatura, infatti, si misura una deviazione dalla temperatura media di  $2.7255\text{ K}$  dell'ordine di una parte su centomila. Tali deviazioni vengono spiegate come

---

<sup>1</sup>Tutte le survey di galassie confermano l'isotropia su scale  $\gtrsim 150\text{ Mpc}$ .

l'impronta delle fluttuazioni di densità dell'Universo primordiale, amplificate dalla gravità.

Il modello del Big Bang assume anche che la forza dominante su grande scala sia quella gravitazionale, descritta dalla Relatività Generale, che afferma che la geometria dello spazio-tempo è determinata dal suo contenuto energetico.

A questo punto è necessario definire una metrica adeguata.

La metrica generale dello spazio-tempo è:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{00} dt^2 - 2g_{0i} dt dx^i - g_{ij} dx^i dx^j, \quad (1.1)$$

ove,  $g_{\alpha\beta}$  è il tensore metrico;  $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$  sono le coordinate spazio-temporali;  $i, j = 1, 2, 3$  identificano quelle spaziali.

La metrica più semplice compatibile con l'accelerazione dell'Universo e l'assunzione del Principio Cosmologico è la *metrica di Robertson-Walker*, descritta dall'elemento di linea:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (1.2)$$

ove  $r, \theta$  e  $\phi$  sono le coordinate sferiche comoventi<sup>2</sup>;  $t$  è il tempo cosmico;  $a(t)$  è il *fattore di scala*, che contiene la dipendenza temporale della parte spaziale;  $K$  è il *parametro di curvatura*; la curvatura dell'Universo è determinata dal campo gravitazionale generato dalla materia presente in esso. La curvatura spaziale è costante ed è determinata dal valore della costante  $K$ ; poiché uno spostamento arbitrario dell'elemento di linea non incide sul segno di  $K$ , si adotta la seguente convenzione:

- $K = 1$  rappresenta una geometria sferica a curvatura positiva,
- $K = 0$  rappresenta uno spazio piatto di Minkowski,
- $K = -1$  rappresenta una geometria iperbolica a curvatura negativa.

Per sapere come il fattore di scala varia con il tempo si risolve la seguente *equazione di campo di Einstein*:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R - \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \quad (1.3)$$

---

<sup>2</sup>Nei modelli cosmologici si utilizzano due tipi di coordinate: le *coordinate fisiche*, in cui il sistema di coordinate rimane fisso mentre lo spazio si espande attorno ad esso, e le *coordinate comoventi*, che sono un sistema che si espande con l'Universo. La trasformazione è data da  $x(t) = a(t)\eta$  ove  $x(t)$  indica la distanza fisica dipendente dal tempo, mentre,  $\eta$  la distanza comovente, che ne è indipendente, e  $a(t)$  è il fattore di scala.

ove,  $R$  è il *tensore di Ricci*;  $g$  è il *tensore metrico* e  $T$  il *tensore energia-impulso*;  $\Lambda g_{ij}$  in origine era stato introdotto per avere un modello statico di Universo, successivamente, con la scoperta dell'espansione, è stato eliminato, per poi essere riaggiunto con un nuovo ruolo, ovvero rappresentare il contributo della energia oscura.

L'equazione è stata risolta da Friedmann assumendo sia il principio cosmologico, quindi utilizzando per  $g_{ij}$  la metrica di Robertson-Walker, sia che il contenuto energetico che riempie l'Universo possa essere rappresentato da un fluido perfetto, in modo da avere un tensore energia-impulso della forma:  $T_{ij} = -Pg_{ij} + (P + \rho c^2)u_i u_j$  ove,  $P$  è la pressione;  $\rho$  la densità media e  $u_i$  è il quadrivettore velocità. In questo modo sono state ottenute le *equazioni di Friedmann*:

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) \quad (1.4)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (1.5)$$

legate tra loro dalla condizione di *espansione adiabatica*:

$$\frac{d}{dt}(a^3 \rho c^2) - P \frac{da^3}{dt} = 0. \quad (1.6)$$

La risoluzione di questo sistema di equazioni necessita di una equazione di stato, la cui forma più generale è:

$$P = w\rho c^2, \quad (1.7)$$

ove,  $w$ , essendo legata alla velocità del suono del mezzo<sup>3</sup>, dipende dalla specifica componente dell'Universo; quindi, si avrà  $P \ll \rho c^2$  se si considera la materia, in quanto ha velocità termiche molto inferiori a  $c^2$ ; invece, i fotoni e le particelle relativistiche avranno  $P_R = \frac{1}{3}\rho_R c^2$ ; infine, l'equazione di stato per l'energia oscura si ricava ottenendo preliminarmente  $T_{ij}$  dall'equazione di campo nel vuoto:

$$\Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \quad \Rightarrow \quad T_{ij} = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{ij} \quad (1.8)$$

poichè:  $T_{ij} = -Pg_{ij} + (P + \rho c^2)u_i u_j$

$$P_\Lambda = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}. \quad (1.9)$$

---

<sup>3</sup>Nel caso della materia oscura si parla di dispersione di velocità.



In conclusione si ha:  $w = 0$  nel caso della materia;  $w = \frac{1}{3}$  per la radiazione;  $w = -1$  per la costante cosmologica.

Dalle equazioni (1.6) e (1.7) si giunge all'espressione generale di  $\rho$  in funzione di  $a(t)$  e  $w$ :

$$\rho_w \propto a^{-3(1+w)} \quad (1.10)$$

Ora, escludendo per il momento la componente  $\Lambda$ , si può riformulare la seconda equazione di Friedmann (1.5) introducendo la *costante di Hubble*  $H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ , che si indica con  $H_0$  nel caso sia calcolata oggi :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2}; \quad (1.11)$$

a  $t = t_0$  (oggi) si ha:

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 - \frac{Kc^2}{a_0^2} \quad (1.12)$$

quindi:

$$-K = \frac{a_0^2}{c^2} \left[ H_0^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \right] \quad (1.13)$$

da cui si può definire la *densità critica*, cioè la densità media che consente all'Universo di essere piatto ( $K = 0$ ):

$$\rho_{0,cr} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 2.775 \times 10^{11} h^2 M_\odot / Mpc^3; \quad (1.14)$$

e si può definire il *parametro di densità*  $\Omega_0 \equiv \frac{\rho_0}{\rho_{0,cr}}$ .

Poiché le tre geometrie possibili dipendono dal contenuto di materia nell'Universo, si hanno le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} K = 0 & \rightarrow & \rho_0 = \rho_{0,cr} & \rightarrow & \Omega_0 = 1 & \text{geometria piatta} \\ K = 1 & \rightarrow & \rho_0 > \rho_{0,cr} & \rightarrow & \Omega_0 > 1 & \text{geometria sferica} \\ K = -1 & \rightarrow & \rho_0 < \rho_{0,cr} & \rightarrow & \Omega_0 < 1 & \text{geometria iperbolica} \end{cases} \quad (1.15)$$

Da qui deriva la necessità di ottenere una misura precisa<sup>4</sup> di  $\Omega_0$ .

L'andamento della densità di ogni componente è dato dalla (1.11) sostituendo l'opportuno valore di  $w$ :

---

<sup>4</sup>I dati relativi al CMB hanno stabilito che ha un valore vicinissimo a 1.

$$\begin{cases} w = 0 & \rightarrow & \rho_M \propto a^{-3} \\ w = 1/3 & \rightarrow & \rho_R \propto a^{-4} ; \\ w = -1 & \rightarrow & \rho_\Lambda \propto a^0 \end{cases} \quad (1.16)$$

si nota subito che, avendo dipendenze diverse, l'evoluzione dell'Universo sarà divisa in ere, caratterizzate ognuna dalla dominanza di una componente rispetto alle altre.

Si può ricavare l'equazione della dinamica dell'Universo combinando la seconda equazione di Friedmann (1.5) con la (1.11):

$$H(t)^2 = H_0^2 \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 \left[ \left( 1 - \sum_i \Omega_{0,w_i} \right) + \sum \Omega_{0,w_i} \left( \frac{a_0}{a} \right)^{1+3w_i} \right], \quad (1.17)$$

ove  $1 - \sum_i \Omega_{0,w_i}$  è detto *parametro di densità della curvatura*: infatti, la differenza tra i due termini fornisce la curvatura dell'Universo. Questi due termini, dipendentemente dal tempo, si troveranno a dominare l'uno sull'altro, in particolare, riscrivendo l'equazione in funzione del redshift:

$$H^2(z) = H_0^2 (1+z)^2 \left[ 1 - \Omega_{0,tot} + \Omega_{0,m}(1+z) + \Omega_{0,r}(1+z)^2 + \Omega_{0,\Lambda}(1+z)^{-2} \right] \quad (1.18)$$

si trova il valore del redshift  $z_* \approx \frac{1}{\Omega_0}$  tale che per ogni  $z$  maggiore la curvatura si può trascurare. Ora, dalle osservazioni si ricava che  $\Omega_0$  non può essere minore di 0.1, pertanto la curvatura diventa determinante solo a bassi  $z$ .

Al fine di commentare l'espansione<sup>5</sup> dell'Universo si studia il segno di  $\ddot{a}$  dalla prima equazione di Friedmann (1.4):

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho (1+3w)a, \quad (1.19)$$

dalla quale risulta immediatamente che il segno dipende esclusivamente dal contenuto della parentesi:

---

<sup>5</sup>Il fatto che  $\dot{a} > 0$ , quindi l'Universo è in espansione lo si osserva dal redshift, definito da:  $z = \frac{\lambda_o \lambda_e}{\lambda_e}$  ove,  $\lambda_o$  è la lunghezza d'onda osservata mentre  $\lambda_e$  è quella all'emissione. Poiché la velocità della luce è finita, è possibile legare il valore del redshift alla distanza della sorgente e al tempo impiegato dalla radiazione per raggiungere l'osservatore. Questi valori dipendono dal modello cosmologico adottato. La sua definizione si ottiene dalla metrica di Robertson-Walker:  $z \equiv \frac{a_0}{a(t)} - 1$ . Poiché si osserva  $\lambda_o > \lambda_e$ , cioè uno spostamento verso il rosso, da cui il nome, ne consegue che  $a_0 > a(t)$ , valori per cui si ha un Universo in espansione con il tempo.

- se  $1 + 3w < 0$  allora  $\ddot{a} > 0$ , l'espansione è accelerata, si verifica nel caso in cui a dominare sia  $\Lambda$ ;
- se  $1 + 3w > 0$  allora  $\ddot{a} < 0$ , l'espansione è decelerata, se dominano la radiazione o la materia.

Se  $w > -\frac{1}{3}$  si conclude che  $a$  è una funzione del tempo monotona crescente in  $t$  con la concavità rivolta verso il basso, dunque, percorrendo il tempo a ritroso si giunge a  $t \equiv 0$  in cui  $a = 0$ , che corrisponde al momento del Big Bang predetto da tutti i modelli di Friedmann con  $w > -\frac{1}{3}$ .

## 1.1 Universi piatti

Una soluzione analitica della (1.17), detta *Universo di Einstein-de Sitter* (EdS), è stata ricavata considerando un Universo piatto, quindi  $\Omega_0 = 1$ . In questo modo il termine di curvatura sparisce:

$$\left(\frac{\dot{a}_0}{a}\right)^2 = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w} \quad (1.20)$$

e l'integrazione conduce a:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}} = \begin{cases} t^{2/3} & \text{materia} \\ t^{1/2} & \text{radiazione} \end{cases}; \quad (1.21)$$

se ne conclude che quando la radiazione domina, nonostante abbia una pressione di radiazione maggiore, l'espansione è più lenta, infatti, dalla prima equazione di Friedmann risulta che maggiore è  $P$ , minore è  $\ddot{a}$ .

Se si introduce il *parametro di decelerazione*:

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \quad (1.22)$$

si nota che in un Universo EdS è dato da:

$$q = \frac{4\pi G}{3H^2}\rho_M = \frac{1}{2}\Omega_M \quad (1.23)$$

ovvero, non si può avere un Universo accelerato,  $q < 0$ .

## 1.2 Universi curvi

Esaminando l'equazione (1.19) interrogandosi su cosa accade per  $z < z_*$  si distinguono vari casi:

- se l'Universo è aperto,  $\Omega_{0,w} < 1$  si ha:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 \approx H_0^2(1 - \Omega_{0,w}), \quad (1.24)$$

che è costante nel tempo.

L'integrazione fornisce:

$$a = a_0 H_0 \sqrt{1 - \Omega_{0,w}} t, \quad (1.25)$$

dunque l'espansione è libera e lineare con il campo.

L'Universo non è accelerato né decelerato in quanto  $\dot{a}$  è costante e  $\ddot{a} = 0$ .

- Se l'Universo è chiuso,  $\Omega_{0,w} > 1$ , si ha la curvatura negativa e l'esistenza di un valore di  $a$  per il quale  $\dot{a} = 0$ , in cui l'Universo raggiunge il massimo di espansione e il minimo di densità, successivamente, ha inizio la contrazione che prosegue fino a quando non viene raggiunto nuovamente il punto singolare in cui si annulla  $a$  (*Big Crunch*); poiché l'equazione è quadratica, esistono una soluzione crescente e una decrescente, quindi la contrazione avviene in modo uguale ed opposto all'espansione.

Dall'evoluzione temporale del parametro di densità consegue che la geometria non può cambiare indipendentemente dalla componente considerata. Infatti, se lo si riscrive considerando la definizione di densità critica si ha:

$$\Omega_w^{-1}(z) - 1 = \frac{\Omega_{0,w}^{-1} - 1}{(1+z)^{1+3w}} \quad (1.26)$$

- se  $\Omega_0 > 1 \Rightarrow \Omega(z)^{-1} - 1 < 0 \Rightarrow \Omega(z) > 1$  sempre;
- se  $\Omega_0 = 1 \Rightarrow \Omega(z)^{-1} - 1 = 0 \Rightarrow \Omega(z) = 1$  sempre;
- se  $\Omega_0 < 1 \Rightarrow \Omega(z)^{-1} - 1 > 0 \Rightarrow \Omega(z) < 1$  sempre;

### 1.3 Universi con costante cosmologica

Analizzando le equazioni di Friedmann considerando il contributo di  $\Lambda$  e tralasciando la densità della radiazione, in quanto dominante solo nelle prime fasi della vita dell'Universo, si ottiene:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} a \rho_M + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (1.27)$$

$$\dot{a}^2 + Kc^2 = -\frac{4\pi G}{3} \left( \tilde{\rho} + \frac{3\tilde{P}}{c^2} \right) a = \left[ \frac{8\pi G}{3} \rho_M + \frac{\Lambda c^2}{3} \right] a^2 \quad (1.28)$$

ove,  $\tilde{\rho} = \rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$  e  $\tilde{P} = P - \frac{\Lambda c^2}{3} a$ .

Osservando la prima si conclude che esistono valori di  $\Lambda$  per i quali  $\ddot{a} > 0$  e dalla seconda il fatto che la velocità di espansione è aumentata da  $\frac{\Lambda c^2}{3} a^2$ .

Ora, analogamente al procedimento che ha portato all'equazione (1.13) si giunge a osservare l'influenza di  $\Lambda$  sulla curvatura dell'Universo:

$$H_0^2(1 - \Omega_{0,M} - \Omega_{0,\Lambda}) = -\frac{Kc^2}{a_0^2} \quad (1.29)$$

ove,  $\Omega_{0,\Lambda} \equiv \frac{\rho_{0,\Lambda}}{\rho_{0,cr}}$  stabilisce anch'esso la curvatura, quindi la condizione  $K = 0$  ora corrisponde a  $\Omega_{0,M} + \Omega_{0,\Lambda} = 1$ ;

il parametro di decelerazione<sup>6</sup> viene ridefinito come segue:

$$q = \frac{4\pi G}{3H^2} \rho_M - \frac{\Lambda c^2}{3H^2} = \frac{1}{2} \Omega_M - \Omega_\Lambda \quad (1.30)$$

dal quale si deduce che la costante cosmologica è necessaria per descrivere un Universo in espansione accelerata, che si ha imponendo  $\Omega_\Lambda > \frac{1}{2} \Omega_M$ .

**Il contributo energetico** Grazie alle osservazioni della CMB (tramite la sonda WMAP, il programma BOOMERanG, la missione Planck) si è ottenuto un valore della densità totale vicino all'unità:

$$\Omega_{0,TOT} = \Omega_{0,R} + \Omega_{0,M} + \Omega_{0,\Lambda} = 1.02 \pm 0.02 \quad (1.31)$$

e dalla misura della temperatura della CMB si è ricavato, come già accennato, un valore di  $\Omega_{0,R} \approx 10^{-5}$ ; da effetti dinamici o di lensing gravitaizionale si stima  $\Omega_{0,M} \approx 0.3$ , ove  $M$  indica materia barionica e oscura insieme; dai picchi acustici della CMB si ha il contributo della materia barionica  $\Omega_{0,b} \approx 0.04$ ; da tutto ciò per sottrazione dalla (1.31), oppure dal parametro di decelerazione, si conclude che  $\Omega_{0,\Lambda} \approx 0.7$ . Di conseguenza l'Universo è piatto. Da poco ha attraversato una fase di transizione tra l'epoca dominata dalla materia e

---

<sup>6</sup>Si è fissato il valore del parametro di decelerazione attuale,  $q_0$ , a  $-0.6$  grazie all'osservazione delle SNIa. Infatti, queste ultime sono considerate candele standard, poiché è possibile attribuire loro la medesima magnitudine assoluta,  $M$ , al momento dell'esplosione. Pertanto, noto il redshift,  $z$ , e misurata la magnitudine apparente,  $m$ , attraverso la seguente equazione del modulo di distanza si ricava  $q_0$ :  $m - M = 25 + 5 \log(cz) - 5 \log H_0 + 1.086z(1 - q_0)$

quella dominata dall'energia oscura. In particolare, analizzando l'andamento di  $a(t)$  e utilizzando l'equazione (1.30) segue:

$$q(z) = \frac{\Omega_M(z_{flesso})}{2} - \Omega_\Lambda(z_{flesso}) \quad (1.32)$$

si ricava il punto di flesso  $z_{flesso} \approx 0.8$  (ritenuto sorprendentemente troppo vicino a  $z = 0$ ) che porta  $a(t)$  ad avere un'espansione accelerata  $\ddot{a} > 0$ . Ci si riferisce a questo fatto singolare che la densità di energia del vuoto sembra aver iniziato a dominare rispetto alla densità di materia pressapoco nell'epoca attuale, con il termine *Problema della coincidenza*.

**Tempo** Semplificando l'Universo ad un sistema adiabatico in espansione, si può descrivere la sua storia come quella di un raffreddamento, caratterizzato da fasi specifiche che si andranno ora a presentare focalizzandosi sulla relazione tra radiazione e materia. Queste ultime nel caso siano in equilibrio termico si dice che siano accoppiate, in caso contrario disaccoppiate. La condizione di equilibrio si verifica se il tempo scala delle collisioni delle particelle,  $t_{coll} = \frac{m_p}{c\sigma\rho_M}$  (ove,  $\sigma$  indica la sezione d'urto) è minore del tempo tipico dell'espansione dell'Universo,  $t_H = \frac{1}{H}$ .

- Il *tempo di disaccoppiamento*,  $z_{dec}$ , in cui si verifica  $t_{coll} = t_H$ , fa da spartiacque tra l'equilibrio termico che si verifica per  $z$  maggiori, e l'epoca in cui radiazione e materia sono disaccoppiate. Il suo valore si deduce dalla condizione di adiabacità, da cui si ricava i seguenti andamenti temporali:

$$\begin{cases} T_R \propto a^{-1} \\ T_{M,b} \propto a^{-2} \end{cases} \quad (1.33)$$

e utilizzando, ad esempio, le equazioni di EdS, si ottiene  $z_{dec} \approx 10^3$ . Da questo momento i fotoni, iniziano a viaggiare, senza che la loro traiettoria sia continuamente deviata dall'interazione con la materia dando origine al primo segnale che possiamo ricevere, la CMB.

- Il *tempo dell'equivalenza*,  $z_{eq} \approx 5 \times 10^3$ , che segna la transizione tra l'era dominata dalla radiazione e quella della materia (oscura e barionica), si ricava uguagliando la densità di materia con la densità della radiazione.
- Il *tempo di ricombinazione*,  $z_{rec} \approx 1500$ , è l'età dell'Universo alla quale il plasma primordiale si raffredda ad una temperatura,  $T \approx 4-5 \times 10^3 K$ , tale da permettere l'esistenza di stati atomici legati; successivamente, l'Universo diventa neutro.

Si è introdotta questa successione di eventi per la sua utilità nella comprensione della formazione delle strutture che si presenta nella sezione successiva.

## Capitolo 2

# Formazione delle strutture

L'Universo che osserviamo oggi presenta una struttura a filamenti di materia a bassa densità che, collegando tra loro zone ad alta densità ricche di stelle e galassie, traccia i bordi di regioni di spazio sostanzialmente vuoto. All'intersezione dei filamenti ci sono gli *ammassi di galassie*, strutture in equilibrio dinamico, o prossime all'equilibrio, con masse tipicamente dell'ordine di  $10^{14} - 10^{15} M_{\odot}$  e diametri di alcuni  $Mpc^1$ . Lo studio di questi sistemi complessi, che ospitano diverse centinaia di galassie, consente di ottenere informazioni sull'evoluzione e la struttura dell'Universo, come sarà maggiormente evidente in seguito. Ora, nel contesto del modello gerarchico<sup>2</sup> di formazione delle strutture, le scale ad essi corrispondenti,  $R \sim 10h^{-1}Mpc$ , collassano per ultime e, poiché sono sufficientemente grandi da non consentire alla materia barionica di uscire, si può tralasciare la fisica barionica essendo poco influente nell'evoluzione delle strutture; dunque, l'evoluzione è determinata principalmente dalla gravità, pertanto se ne può dare una buona descrizione attraverso la teoria della crescita delle perturbazioni primordiali che si introduce nel prossimo paragrafo.

---

<sup>1</sup>Il Megaparsec è una misura di distanza in cosmologia ed è pari a  $3.086 \times 10^{10} m \simeq 3.2616 \times 10^6$  anni luce.

<sup>2</sup>Lo scenario detto *bottom-up*, o gerarchico, prevede che la crescita delle perturbazioni della CDM inizi prima del disaccoppiamento tra materia e radiazione, così, al momento del disaccoppiamento il gas barionico, cade molto velocemente nelle buche di potenziale già create dalla CDM. A questo punto, il gas, di natura collisionale, converte l'energia cinetica della 'caduta' in energia termica e si riscalda raggiungendo la temperatura viriale; successivamente, perdite di tipo radiativo causano il raffreddamento della componente barionica, la sua condensazione e la conseguente formazione di nubi molecolari, quindi di stelle. In altre parole, gli aloni di CDM si formano prima a scale piccole e poi, per aggregazione gravitazionale, a scale via via crescenti, consentendo ad un ammasso di galassie di formarsi attraverso il collasso di molte galassie, contenute in aloni di materia oscura formatesi in precedenza.



## 2.1 Crescita delle perturbazioni

Per studiare l'evoluzione delle strutture è necessario individuare dei parametri che, evolvendo nel tempo, siano in grado di descriverla. A tale scopo introduciamo il *campo di fluttuazioni di densità*:

$$\delta(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x}) - \rho_b}{\rho_b} \quad (2.1)$$

(ove,  $\rho(\vec{x})$  è la densità dell'Universo in un punto  $x$  e  $b$  indica la parte imperturbata) che, per reinterpretare statisticamente il *Principio Cosmologico*, verrà assunto stocasticamente omogeneo ed isotropo, vale a dire, che in ogni punto il valore del campo di densità è casualmente determinato a partire da una distribuzione di probabilità, e che la probabilità congiunta su un numero  $N$  di punti del campo è invariante per traslazioni e rotazioni.

Ovviamente, le osservazioni consentono la conoscenza di una sola realizzazione di  $\delta(\vec{x})$ , da qui la necessità di introdurre l'ipotesi *ergodica* che assicura che le medie di un campo stocastico, considerate sull'insieme statistico, sono equivalenti alle medie spaziali di ogni sua realizzazione.

Ovvero, se si considerano zone di Universo sufficientemente distanti tra loro, queste si evolveranno indipendentemente le une dalle altre. Queste ipotesi semplificatrici vanno complessivamente sotto il nome di *ipotesi di Fair Sample*.

Per determinare la distribuzione statistica del campo occorre misurarne i momenti. Poiché la media, momento centrale del primo ordine, è ovviamente nulla, il primo momento significativo risulta essere la varianza; quindi, assumendo una distribuzione Gaussiana la varianza è l'unico momento che contiene l'informazione sul campo. Ora, suddividendo l'Universo in  $N$  volumi, la *varianza del contrasto di densità* si misura calcolando la varianza in ogni volume e mediando su tutti i volumi si ha:

$$\sigma^2 \equiv \frac{1}{V_\infty} \int \langle \delta^2(x) \rangle d^3x, \quad (2.2)$$

ove  $\langle \dots \rangle$  indica le medie spaziali;

nello spazio di Fourier la relazione precedente diventa:

$$\sigma^2 \equiv \frac{1}{(2\pi)^3 V_\infty} \int \langle \delta^2(k) \rangle d^3k, \quad (2.3)$$

ove  $k = 2\pi x$ ,

ed è comparsa la quantità definita *spettro di potenza*:  $P(k) = \langle \delta^2(k) \rangle$  che misura il contributo di una singola scala  $k$  ad una generica fluttuazione nello spazio reale  $\delta(x)$ .

La statistica a cui si fa riferimento, per caratterizzare queste disomogeneità, ricorre alla *funzione di correlazione a due punti*, in quanto è il corrispettivo di  $P(k)$  nello spazio reale, e descrive l'eccesso di una fluttuazione rispetto ad una distribuzione uniforme:

$$\xi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int P(k) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k. \quad (2.4)$$

La forma dello spettro primordiale delle fluttuazioni durante la fase inflazionaria dipende dal modello adottato ma, solitamente, non si discosta molto dalla legge di potenza proposta da Harrison-Zel'dovich (Harrison 1970, Zel'dovich 1972):  $P(k) \propto k^n$ , ove  $n$  è detto indice spettrale. Queste fluttuazioni in origine sono gaussiane, poi durante l'evoluzione la loro forma cambia, in particolare, dopo la ricombinazione, la forma dello spettro adottata deve garantire che le fluttuazioni siano simili su tutte le scale, in modo da evitare che ci sia una scala preferenziale e riprodurre l'omogeneità osservata su larga scala.

Al fine di collegare questi concetti alle osservazioni, occorre considerare che per misurare il campo di densità è necessario introdurre una serie di ipotesi e approssimazioni. Ad esempio, in presenza di una distribuzione discreta di oggetti usata per tracciare il campo di densità, occorre mediare il loro numero, e dunque la loro massa,  $M \propto R$ , su un volume minimo; mediano all'interno di una finestra  $\tilde{W}_R(k)$ , scelta opportunamente, si può avere un *campo di densità filtrato*, in modo da trascurare tutte le informazioni inferiori al raggio  $R$ ; si definisce dunque la *varianza in massa* come la convoluzione dello spettro di potenza per la finestra definita in precedenza:

$$\sigma_M^2 \equiv \frac{1}{(2\pi)^3 V_\infty} \int \langle \delta^2(k) \rangle \tilde{W}(k) d^3k \quad (2.5)$$

Lo spettro di potenza può essere osservato anche a partire dalle anisotropie nella temperatura osservata nella CMB, che vengono spiegate come l'impronta delle fluttuazioni di densità dell'Universo primordiale, amplificate dalla gravità. In particolare, si suddividono in anisotropie primarie, generate prima della ricombinazione, e anisotropie secondarie, generate in seguito alla ricombinazione.

A questo punto, a seconda del valore di  $\delta(x)$ , bisogna presentare due tipi di trattazioni: la teoria lineare e la teoria non lineare.

## 2.2 Teoria lineare

Fino a valori di  $\delta(x) < 1$  è applicabile la teoria lineare<sup>3</sup> che permette di ottenere soluzioni analitiche al problema della crescita delle perturbazioni.

Precisamente, linearizzando al primo ordine le equazioni della fluidodinamica opportunamente modificate in modo da considerare un Universo in espansione e scegliendo soluzioni sottoforma di onde piane, si ottiene la *relazione di dispersione*:

$$\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k + \delta_k [k^2 v_s^2 - 4\pi G \rho_b] = 0 \quad (2.6)$$

ove  $v_s^2$  è la velocità del suono,  $\rho_b$  è la densità di background dell'Universo all'epoca presa in esame, e  $k$  è il numero d'onda. La relazione ha validità solo per scale minori del *raggio dell'orizzonte*<sup>4</sup>, oltre, le perturbazioni, essendo dominate dalla gravità, hanno un andamento uguale per tutte le componenti e regolato da quella dominante.

La scala che separa i regimi in cui domina la dispersione da quelli in cui domina la gravità è dato da:

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\pi c_s^2}{G\rho}}, \quad (2.7)$$

nota come *scala di Jeans*; per scale inferiori la fluttuazione si propaga alla velocità del suono fino alla scala della dissipazione, ove ogni fluttuazione viene cancellata. La dipendenza da  $v_s$  e  $\rho_b$ , quindi dal tipo di componente oltre che funzione della cosmologia, implica che il valore di  $\lambda_J$  vari nel tempo.

<sup>3</sup>La teoria lineare segue la trattazione dell'instabilità gravitazionale presentata da Jeans che, brevemente, dall'assunzione di una distribuzione quasi uniforme di un fluido in cui esistono delle piccole variazioni della densità media della materia su tutte le scale, si focalizza su una zona, sferica, di sovradensità, la cui massa sarà proporzionale alla densità per il raggio al cubo:  $M \propto \rho R^3$ . Si suppone che le particelle abbiano una velocità tipica e si procede con lo stabilire un bilancio, tra il processo di collasso dovuto alla gravità e il processo opposto di diffusione dovuto al moto delle particelle, dal quale si ricava un limite inferiore al raggio della regione sovradensa, detto *scala di Jeans*. Per raggi maggiori la gravità domina sulla diffusione, viceversa per raggi inferiori accade l'opposto.

<sup>4</sup>Il raggio dell'orizzonte è il raggio della regione connessa causalmente con l'osservatore (quindi non è possibile l'equilibrio termico tra due regioni non connesse causalmente):  $R_{hor} = a(t) \int_0^{a(t)} \frac{c da'}{a(t)\dot{a}(t)}$ . Utilizzando la seconda equazione di Friedmann quando il termine di curvatura è trascurabile e considerando un Universo EdS si ha:  $R_{hor} = \frac{3(1+\omega)}{1+3\omega} ct =$

$$\begin{cases} 3ct & \text{materia} \\ 2ct & \text{radiazione} \end{cases}$$

In conclusione, una fluttuazione di densità ad una data scala  $k$  ha un'evoluzione temporale dipendente dal tipo di componente, dal momento in cui entra nell'orizzonte, e dal momento in cui incontra la scala di Jeans.

Si esaminino, dunque, l'evoluzione nei vari casi.

Su scale maggiori del raggio dell'orizzonte l'evoluzione è puramente gravitazionale, ovvero tutte le fluttuazioni crescono sempre, finché la scala corrispondente ad una fluttuazione non entra nell'orizzonte; in seguito, la crescita sarà influenzata dal termine di pressione; il modello EdS descrive tutto ciò affermando che, per redshift maggiori dell'equivalenza, le fluttuazioni di tutte le componenti sono proporzionali al quadrato del fattore di scala:  $\delta_{DM} \propto \delta_b \propto \delta_R \propto a^2$ , mentre, per redshift minori si ha:  $\delta_R \propto \delta_b \propto \delta_{DM} \propto a$ .

All'interno dell'orizzonte, le fluttuazioni della radiazione, avendo una elevata velocità, hanno scala di Jeans maggiore alla scala dell'orizzonte, pertanto si propagano senza mai collassare. La materia oscura subisce, prima dell'epoca dell'equivalenza, l'*effetto Meszaros*: a causa della pressione di radiazione le fluttuazioni crescono fino a quando entrando nell'orizzonte, poi, risultano congelate, per crescere infine proporzionalmente al fattore di scala fino all'equivalenza. Ovviamente, le fluttuazioni di materia oscura che entrano nell'orizzonte dopo l'equivalenza sono destinate a crescere sempre. I barioni, invece, risultano accoppiati fino alla ricombinazione, alla quale segue una fase oscillatoria, per collassare infine nelle buche di potenziale che sono già state formate dalla materia oscura, con un andamento  $\delta_B = \delta_{DM}(1 - \frac{a_{dec}}{a})$ .

## 2.3 Teoria non lineare

Quando, in una data regione, l'ampiezza delle fluttuazioni si avvicina all'unità, gli effetti non lineari acquistano importanza, la regione si separa dalla espansione generale dell'Universo e, collassando, forma un alone virializzato.

Non è possibile descrivere questa transizione analiticamente, così si è proposto, ad esempio, il modello del collasso sferico, utilizzato negli ultimi 30 anni, per il quale la forma delle protostrutture è sferica, e quindi i tempi del collasso dipendono soltanto dalla densità interna della fluttuazione, e non dal campo gravitazionale circostante.

In particolare, vengono distinte tre fasi: nella prima la sovradensità si espande in sintonia con l'evoluzione dell'Universo di background, successivamente, raggiungendo il massimo dell'espansione a  $t_m$ , l'attrazione gravitazionale, causata dall'eccesso di materia, diventa dominante e, infine, si ha il collasso che verrà bloccato a  $t = 2t_m$  dalla pressione interna della materia, durante la fase della virializzazione, detta così perchè la struttura che si forma si virializza in un tempo tipico di  $3t_m$ .

Ne consegue che il modello, sebbene semplicistico, contribuisce a comprendere la crescita non lineare, in cui i tempi dipendono, oltre che dalla scala della perturbazione, dalla cosmologia, attraverso la densità di materia e quella totale. Il vantaggio di questo modello è il fatto di essere consistente con quanto osservato nelle simulazioni numeriche. Tuttavia, i progressi numerici dell'ultimo decennio hanno suggerito che le capacità predittive del modello migliorano se si considera un modello di collasso ellissoidale (Baldi, 2012; Sheth, Mo e Tormen 2001), in cui l'effetto mareale<sup>5</sup> esercitato da parte delle protostrutture circostanti deforma i protoaloni stessi, modificando il tempo di collasso a seconda del valore di due nuovi parametri che, insieme alla densità, descrivono la non sfericità: prolatezza ed ellitticità. Siccome il campo mareale è più efficace nel deformare protostrutture piccole rispetto a quelle grandi, impedendone il collasso, i protoaloni di massa minore, per vincere le forze mareali, devono essere più densi rispetto a quelli di massa maggiore. Questo modifica la forma della funzione di massa degli aloni collassati e determina notevoli differenze nella storia stessa della loro formazione.

La *funzione di massa* (Press W.H., Schechter P. 1974), ovvero la frazione di massa che soddisfa la condizione di collasso ad una determinata scala, entra in gioco nel tentativo di descrivere il regime non lineare e consente di seguire in maniera statistica la distribuzione degli aloni.

In particolare, si ricava, considerando un campo di densità gaussiano di fluttuazioni sferiche, utilizzando i risultati del modello sferico, e definendo dapprima il *contrasto di densità critico di soglia*,  $\delta_{0c}(t)$ , come la densità che avrebbe raggiunto una perturbazione per collassare e formare un alone virializzato se si fosse continuato ad utilizzare i risultati del regime lineare. In questo modo, un alone virializzato al tempo  $t$  si identifica con una regione con *contrasto di densità*  $\delta_0 > \delta_{0c}(t)$ . Per la materia oscura fredda, il contrasto medio di densità decresce all'aumentare della scala e il valore critico è una funzione decrescente con il tempo. A questo punto, operativamente, si procede scegliendo un punto del campo di densità lineare (estrapolato al tempo fissato  $t = t_0$ ) e si media il contrasto di densità. Si ottiene così:  $\delta(M) = \left\langle \frac{\Delta\rho}{\rho} \right\rangle_M$ , ove,  $M$  è la massa contenuta nella sfera entro cui si media. Per ogni tempo  $t$  si assume che la massa dell'alone virializzato ospitante la particella data sia pari alla massa della sfera più massiva al cui interno si sia

---

<sup>5</sup>Le forze mareali sono un effetto secondario della forza di gravità. Si osservano nel caso di un oggetto molto grande che viene influenzato gravitazionalmente da un altro. Può accadere che la forza gravitazionale vari considerevolmente da una parte all'altra dell'oggetto. Questo tende a distorcerne la forma, senza cambiarne il volume. Se l'oggetto fosse inizialmente una sfera, le forze di marea tenderanno a distorcerlo in un ellissoide, con l'asse maggiore allineato verso il corpo che produce la forza di gravità.

verificata la relazione  $\delta_0 > \delta_{0c}(t)$ . Questo per evitare che l'alone identificato sia contenuto in aloni più grandi. Dallo studio di  $\delta(M)$  si ricavano sia la funzione di massa che il tasso di merging.

Alternativamente, per descrivere i processi non lineari si può considerare l'*approssimazione di Zel'dovich* (Zel'dovich 1970), proposta originariamente nello scenario di HDM viene tutt'ora utilizzata perché riproduce in modo semplice i piccoli spostamenti in zone a basse sovradensità. Per questo motivo viene spesso usata nelle simulazioni per fissare le condizioni iniziali. Adottando un metodo lagrangiano<sup>6</sup> impone che al primo ordine, ovvero per spostamenti piccoli, il vettore spostamento  $\vec{S}$  sia fattorizzabile in un termine che dipende unicamente dal tempo e uno che dipende solo da  $\vec{q}$ . In particolare, l'accelerazione iniziale viene imposta essere proporzionale al gradiente nel punto, che si muoverà di moto rettilineo uniforme con variabile temporale  $D(t)$ . Il limite di questo approccio, oltre al valere solo per piccoli spostamenti, è che gli elementi di fluido sono sensibili alla gravità solamente all'inizio, pertanto due elementi che si incontrano si attraversano; ci si riferisce a questo fenomeno con il termine *shell crossing* e quando avviene questa approssimazione cessa la sua validità.

**Formazione aloni** La formazione degli aloni di materia oscura è scandita da due fasi.

Nella prima si ha una crescita repentina della massa dell'alone, indice di un *major merger*, cioè due aloni, di massa confrontabile, coalescono. Tale periodo viene definito *violento*. Nella seconda fase c'è il *rilassamento*, in cui molte strutture più piccole fanno merging e il sistema si porta verso un equilibrio viriale. Questo periodo viene detto *calmo*.

Una struttura che precipita in un alone ha sostanzialmente tre possibilità: o sopravvive fino al tempo attuale, oppure, a causa delle interazioni mareali, si dissolve fino a diventare parte dell'alone principale, altrimenti, ma si pensa raramente, può fare merging con un'altra sottostruttura.

---

<sup>6</sup>Per descrivere la materia barionica in modo più aderente alla realtà è necessario, considerare tutti i processi in cui è coinvolta. La fluidodinamica permette di descriverli complessivamente, siano essi termodinamici, radiativi, chimici...

In generale, esistono due metodi per affrontare il problema da un punto di vista idrodinamico in modo che forniscano algoritmi implementabili: nei metodi lagrangiani si suddivide il fluido e si osserva al variare del tempo. Le proprietà fisiche del fluido (velocità, pressione, energia interna...) vengono associate ad ogni sotto elemento del fluido; nei metodi euleriani, invece, si costruisce una griglia, fissa o adattiva, e nelle varie parti, considerate come punti fissi, si valutano le caratteristiche fisiche. Gli svantaggi risiedono proprio nella spaziatura limitata della griglia. Si ha però il vantaggio di descrivere gli shock agevolmente.

Di seguito si considerano i differenti comportamenti peculiari di DM e gas.

Si definisca con  $f$  la frazione di materia che rimane nell'alone principale rispetto alla massa totale della sottostruttura. Allora la frazione di DM rimane elevata per più tempo nelle sottostrutture piccole rispetto alla componente gasosa (Tormen, Moscardini, Yoshida (2004)), cioè gli oggetti di dimensioni galattiche mantengono una significativa frazione della loro massa iniziale per molto tempo, mentre il gas viene perso quasi subito a causa dello stripping dovuto al gas presente nell'ammasso. Andando a masse maggiori, lo stripping mareale e la frizione dinamica diventano sempre più efficaci nel rimuovere la DM dalle sottostrutture e, nello stesso tempo, la buca di potenziale più profonda di queste strutture permette di trattenere una maggiore quantità di gas per più tempo. Quindi, la separazione tra la componente di DM e di gas avviene molto presto per gli oggetti piccoli e sempre più tardi al crescere della massa. Infatti, prima della separazione la maggior parte del potenziale gravitazionale è dovuta alla DM e il gas è in equilibrio in tale buca di potenziale; dopo la separazione la buca di potenziale del gas è approssimativamente 9 volte meno profonda, pari al rapporto tra la massa totale di DM e gas, tuttavia, l'energia interna del gas rimane inalterata, cioè circa 9 volte maggiore del nuovo potenziale. In conclusione solo le sottostrutture molto grandi riescono a trattenere una considerevole quantità di gas per molto tempo.

**Formazione gerarchica degli aloni di materia oscura** Le proprietà globali dell'alone di DM, ovvero il raggio viriale e la massa contenuta in esso, sono comunemente relazionate, come già accennato, attraverso il *modello del collasso sferico*, ad ogni altro dei parametri del background cosmico .

In particolare, il modello afferma che la densità media della materia racchiusa dal raggio del viriale può essere più alta della densità media cosmica  $\bar{\rho}$  della sovradensità del viriale  $\Delta_{vir}$ , cioè:

$$\frac{3M}{4\pi R_{vir}^3} = \Delta_{vir}\bar{\rho}, \quad (2.8)$$

ricordando che  $\Delta_{vir}$  dipende dal redshift e dalla cosmologia. La densità media della materia cosmica, in termini di parametro di densità della materia all'epoca attuale,  $\Omega_{m0}$ , o della densità della materia come funzione del redshift  $\Omega_m(z)$ , è data da:

$$\bar{\rho}(z) = \frac{3H_0^2}{8\pi G}\Omega_{m0}(1+z)^3 = \frac{3H^2(z)}{8\pi G}\Omega_m(z). \quad (2.9)$$

Per un universo Einstein-De Sitter, con una densità critica di materia e senza la costante cosmologica, si trova analiticamente  $\Delta_{vir} = 18\pi^2 \approx 178$ . Per il *modello cosmologico standard*  $\Delta_v$ , relativa alla densità cosmica media, è più alta e varia con il redshift. Abitualmente,  $\Delta_v$  è data, invece, relativa alla densità cosmica critica, perciò ridotta di un fattore  $\Omega_m(z)$ .

Il collasso dinamico fissa la sovradensità del viriale che, insieme alla densità media della materia cosmica, collega il raggio del viriale alla massa. La concentrazione, che a sua volta pare essere definita dal redshift di formazione, fissa a sua volta il raggio scala, dato che la densità del profilo è definita.

Nel caso di CDM, lo spettro di potenza  $P(k)$  delle fluttuazioni di densità iniziali, dal quale gli aloni in definitiva si formano, ha una caratteristica pendenza che è totalmente determinata da poche condizioni cosmologiche. Per piccoli  $k$  aumenta come una legge di potenza in  $k$ :  $P(k) \propto k^n$  con  $n \lesssim 1$ ; per  $k$  molto grandi decresce asintoticamente come  $P(k) \propto k^{-4}$ . L'indice della legge di potenza  $n$  è fissato dall'inflazione; se il periodo di espansione accelerata corrispondente all'inflazione si fosse protratto eternamente lo spettro di potenza sarebbe stato determinato con una precisione indipendente dalla scala,  $n = 1$ ; ma poiché l'inflazione deve essere finita dopo un tempo finito,  $n$  deve essere più piccolo. La missione WMAP ne ha dato una conferma trovando un valore di  $n$ , leggermente ma significativamente, più piccolo dell'unità, ovvero  $n = 0.968 \pm 0.012$  (Komatsu et al. 2011). Il valore  $n - 4$  è anche esso interamente definito dall'inibizione della crescita delle fluttuazioni di DM dentro l'orizzonte che avviene durante l'epoca dominata dalla radiazione. Così il massimo dello spettro di potenza viene fissato dalla dimensione dell'orizzonte all'epoca dell'equivalenza materia-radiazione, che è invece definita dal parametro di densità della materia cosmica.

E' essenziale notare che le fluttuazioni dello spettro di potenza della DM non hanno parametri liberi, eccetto la loro normalizzazione globale, che tradizionalmente, viene fissata dal parametro  $\sigma_8$ , definito dalla varianza calcolata sulla scala  $R = 8h^{-1}Mpc$ :

$$\sigma_R^2 = \int_0^\infty \frac{k^2}{2\pi^2} P(k) \left| \hat{W}_R(k) \right|^2, \quad (2.10)$$

ove,  $\hat{W}_R(k)$  è la funzione finestra della trasformata di Fourier che è stata introdotta per smussare le fluttuazioni alle scale più piccole di  $R$ . Fissare a questa specifica lunghezza scala di  $8h^{-1}Mpc$  ha delle ragioni storiche: la prima misura effettuata per cataloghi di galassie locali mostrava  $\sigma_8 = 1$ .

La potenza nelle fluttuazioni della DM, essendo proporzionale al volume nel  $k$ -spazio,  $k^3$ , moltiplicato per  $P(k)$ , presenta un andamento che asin-



oticamente tende a  $k^{n-1}$  per valori grandi di  $k$ , poichè  $n \lesssim 1$  la potenza continua a irripidirsi fino ad appiattirsi per  $k$  molto grandi. Ciò significa che alle potenze maggiori corrispondono le fluttuazioni più piccole, dato che sorgono dallo scenario bottom-up, e si formano prima, cioè alle scale più piccole c'è la formazione delle strutture formate da CDM.

Si può dunque prevedere che al tempo cosmico presente si formi una massa massima, dipendente dalla normalizzazione del parametro  $\sigma_8$ .

La statistica delle strutture cosmologiche è caratterizzata dall'assunzione che esse formano un iniziale campo random gaussiano con una bassa ampiezza. Durante la fase lineare della crescita delle strutture questa ampiezza aumenta proporzionalmente al fattore di crescita lineare,  $D_+(a)$ , senza alcuna interazione tra i differenti modi di Fourier del campo di densità. Seguendo il modello del collasso sferico, si ha la previsione che un collasso non lineare si concluda quando il contrasto della densità lineare ha raggiunto il valore critico

$$\delta_c = \frac{3}{5} \left( \frac{3\pi}{2} \right)^{2/3} \approx 1.686; \quad (2.11)$$

quest'ultimo è stato ricavato in un universo Einstein-De Sitter, ma non si riscontrano sostanziali differenze in altri modelli di Universo.

L'abbondanza di oggetti cosmologici di una certa massa può essere derivata utilizzando la teoria di Press-Schechter:

$$N(M, a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{\rho}_0 \delta_c}{\sigma_R D_+(a)} \frac{d \ln \sigma_R}{dM} \exp \left( -\frac{\delta_c^2}{2\sigma_R^2 D_+^2(a)} \right) \frac{dM}{M} \quad (2.12)$$

ove  $\bar{\rho}_0$  è la densità media cosmica di oggi.  $R$  e  $M$  sono legate dalla richiesta che una sfera di raggio  $R$  riempita di materia con la densità media della materia cosmica deve contenere la massa  $M$ :

$$\frac{4\pi}{3} R^3 \bar{\rho} = M. \quad (2.13)$$

E' importante notare che il cut off esponenziale della funzione di massa alla massa scala è definito da:

$$D_+(a)\sigma_R \approx \delta_c. \quad (2.14)$$

Questo quantifica l'affermazione precedente che gli oggetti più massivi vengono formati per ultimi.

Una tipica scala per la massa non lineare è comunemente definita combinando le equazioni (1.43) e (1.47) e definendo una funzione finestra.

Per esempio una funzione top-hat come segue  $\hat{W}_R(k) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\sin(kR)}{kR}$  inserita nella (1.43) fa ottenere la varianza  $\sigma_R^2$  alla scala  $R$ .

Al diminuire di  $R$ , un numero maggiore di strutture vengono smussate, e  $\sigma_R$  decresce.

Una volta trovata la scala dove  $\sigma_R = \delta_c$  e convertita alla massa attraverso la (45), quest'ultima viene detta massa non lineare,  $M_*$ .

Su piccola scala si ha:

$$M_* \propto D_+(t)^{6/(3+n)}, \quad (2.15)$$

che nel caso di un Universo EdS si esplicita rispetto al tempo nel modo seguente:

$$M_* \propto t^{4/(3+n)} \propto (1+z)^{-6/(3+n)} \quad (2.16)$$

e dalla quale si ricavano altre leggi scala:

1. sul tempo di formazione della struttura:

$$t_* \propto M_*^{(3+n)/4} \propto (1+z)^{-3/2} \quad (2.17)$$

2. sulla densità:

$$\rho_* \propto (1+z)^3 \quad (2.18)$$

3. sulle dimensioni:

$$R_* \propto \left(\frac{M_*}{\rho_*}\right)^{1/3} \propto M_*^{1/3} (1+z)^{-1} \quad (2.19)$$

4. sulla dispersione di velocità:

$$\langle v^2 \rangle \propto kT_{vir} \propto \frac{GM_*}{R_*} \propto (1+z)M_*^{2/3} \quad (2.20)$$

Dalla prima relazione, poiché secondo il clustering gerarchico  $t_*$  cresce al diminuire di  $M_*$ , si deduce che l'indice spettrale deve essere maggiore di -3; il limite superiore di -1 deriva, invece, dall'ultima relazione, infatti poiché l'energia di legame è proporzionale alla dispersione di velocità, essa deve aumentare con la massa affinché l'evolvere della struttura non dipenda dal collasso dei suoi progenitori.

Le relazioni possono essere estese alla temperatura e alla luminosità partendo dai dati X.

Nel caso di un Universo EdS un gas in equilibrio termodinamico con il potenziale dell'ammasso avrà:

$$T_X^* \propto \langle v^2 \rangle \propto M_*^{2/3}(1+z) \quad (2.21)$$

e una luminosità da bremstrahlung:

$$L_X^* \propto T_x^2(1+z)^{3/2}. \quad (2.22)$$

Tuttavia, esistono discrepanze tra ciò che la teoria predice e le osservazioni, in particolare, le temperature dell'emmissione X osservata forniscono una pendenza meno ripida:  $T \propto L^{1/3}$ . Questa discrepanza si è parzialmente risolta introducendo fenomeni di preriscaldamento del gas attraverso Supernovae o AGN avvenuti prima o durante il collasso (Tozzi & Norman 2001; Cavaliere et al. 2000).

**Livello aspettato di sottostrutture** Le simulazioni numeriche ad alta risoluzione, assumendo CDM, prevedono che ci debbano essere delle sottostrutture negli aloni e il loro numero diminuisce con la massa dell'alone ospitante; nel caso si fissi quest'ultima, diminuisce con la concentrazione dell'alone ospitante e con il redshift della sua formazione.

Se si considera anche il contributo dei barioni alla DM, si trova che il gas diffuso caldo è efficacemente rimosso (stripping) dai subaloni nel momento della loro entrata nell'alone ospitante, diminuendo così la funzione di massa rispetto a quella che si ha considerando solo la DM. Tuttavia, si può avere una mitigazione dell'effetto dello stripping se viene considerato il raffreddamento radiativo dei barioni, che consente loro di condensarsi al centro dei subaloni fino a formare i core stellari. Varie simulazioni, che includono i barioni, convergono nell'affermare che l'1% dei sub aloni entro il raggio del viriale dei loro aloni ospitanti preserva un atmosfera di gas caldo gravitazionalmente legata.

Boylan-Kolchin et al. (2009) hanno proposto una formula per fittare la funzione dell'abbondanza dei subaloni:

$$N(\mu) = \left(\frac{\mu}{0.01}\right)^{-0.94} \exp\left[-\left(\frac{\mu}{0.1}\right)^{1.2}\right], \quad (2.23)$$

ove  $\mu = \left(\frac{M_{sub}}{M_{200}}\right)$  è il rapporto tra le masse dei subaloni e la massa viriale del loro alone ospitante.

Con la quale si evince che la frazione di massa nei subaloni,  $\mu N(> \mu)$ , decresce dolcemente fino a  $\mu \approx 0.01$  per poi avere un andamento decisamente più ripido. Il picco della frazione in massa diminuisce da circa 0.1% per gli aloni di dimensioni galattiche a 1% per quelli di ammassi.

Dalle osservazioni dei raggi gamma deriva un limite superiore alle masse delle sottostrutture (Yuan et al. 2010). Il ragionamento alla base considera

di aspettarsi delle sottostrutture più dense dell'ambiente circostante, le quali emettano una frazione rilevante di segnale gamma. Poichè esso non viene rilevato si pone un limite all'agglomerarsi della materia negli ammassi; assumendo poi una funzione di massa per queste sottostrutture, poichè la funzione diminuisce proporzionalmente alla diminuzione della massa, questo limite superiore si traduce in un limite inferiore alla massa delle sottostrutture.

Certamente, la predizione dell'emissione gamma richiede un'accurata conoscenza del numero delle strutture e della loro densità centrale, che ad oggi è solamente estrapolata dalle simulazioni per masse al di sotto del loro limite di risoluzione.

# Capitolo 3

## Simulazioni numeriche

L'Universo che osserviamo oggi presenta una struttura a filamenti di materia a bassa densità che, collegando tra loro zone ad alta densità ricche di stelle e galassie, traccia i bordi di bolle di spazio sostanzialmente vuoto. All'intersezione dei filamenti ci sono gli *ammassi di galassie*, strutture in equilibrio dinamico, o prossime all'equilibrio, con masse tipicamente dell'ordine di  $10^{14} - 10^{15} M_{\odot}$  e diametri di alcuni *Mpc*. Lo studio di questi sistemi complessi, che ospitano diverse centinaia di galassie, consente di ottenere informazioni sull'evoluzione e la struttura dell'Universo. Infatti, per cercare conferme sulla bontà di un modello si possono seguire due strade: o ci si concentra su oggetti molto lontani, oppure si possono ricavare utili informazioni dalla dinamica di questi sistemi locali. Sorge però, immediatamente, il problema di descrivere un sistema così complesso nello *spazio delle fasi*<sup>1</sup>. Infatti, sarebbe necessario conoscere 6 parametri (posizione e velocità), ma potendo osservare solo una distribuzione proiettata sulla volta celeste, della posizione possiamo conoscere solo due componenti, e per quanto concerne le velocità si ha solo un'informazione monodimensionale, data dal redshift osservato.

Faustamente vengono in soccorso le simulazioni numeriche, in quanto permettono una comprensione totale dello spazio delle fasi.

Il passo successivo consiste nel confrontare i diversi spazi delle fasi, che le simulazioni forniscono, con i dati reali per scegliere quello che li descrive meglio. Oltretutto le simulazioni sono inevitabili in quanto un approccio analitico è utilizzabile solo per un massimo di 2 corpi, già con 3 corpi si è costretti a ricorrere a soluzioni numeriche per studiare l'evoluzione del moto dei corpi soggetti all'influsso della reciproca attrazione gravitazionale. Grazie alle simulazioni, inoltre, si può analizzare l'Universo sia su scale dei *Mpc*,

---

<sup>1</sup>Nello spazio delle fasi vengono rappresentate le posizioni e le velocità delle componenti. In questo modo, tramite una curva, si può rappresentare l'evoluzione del sistema dinamico preso in esame.

studiandone così la struttura globale, sia su scale galattiche dell'ordine di alcuni Kpc. In ogni caso, è necessario fornire delle condizioni iniziali da cui i parametri scelti per la descrizione partano, la simulazione seguirà poi la loro evoluzione nel tempo. Ovviamente, variando i parametri si otterranno realizzazioni diverse dell'Universo, pertanto lo scopo sarà individuare quelli che descrivono meglio le osservazioni. Per motivi computazionali le simulazioni approssimano l'Universo ad un cubo, si procederà a suddividerlo ulteriormente se si vogliono analizzare scale minori. Su scale dei Gpc l'Universo viene generalmente considerato omogeneo.

Successivamente, si inseriscono le particelle, in numero idoneo alla potenza di calcolo che si ha a disposizione. In genere, il numero delle particelle sarà proporzionale alla risoluzione in massa della simulazione.

Si presentano di seguito i metodi utilizzati per le simulazioni a N-corpi.

### 3.1 Metodo PP

Storicamente, è stato il primo metodo implementato per la trattazione del problema a N-corpi.

Viene chiamato *Particle-Particle* (PP) e calcola le forze agenti su ogni particella dovuta a tutte le altre particelle.

In pratica, la forza che agisce sulla  $i$ -esima particella dovuta alla  $j$ -esima viene espressa come:

$$\vec{F}_{ij} = \frac{Gm_i m_j (\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{\left(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^2 + \epsilon^2\right)^{3/2}}, \quad (3.1)$$

ove  $G$  è la costante di gravitazione universale,  $m_i$  e  $m_j$  sono le masse delle particelle considerate,  $\vec{x}_i$  e  $\vec{x}_j$  le rispettive posizioni, mentre  $\epsilon$  viene chiamato *parametro di softening* e rappresenta la risoluzione spaziale della dinamica delle particelle, e garantisce un valore finito per la forza anche nel caso di due particelle sovrapposte.

Dopo aver calcolato le forze agenti su ciascuna particella, si ricava l'accelerazione e si calcola lo spostamento entro un intervallo di tempo, che fornisce la risoluzione temporale della simulazione.

Questo metodo è molto preciso e ciò ha una ricaduta negativa in termini di costo computazionale: infatti, il numero di operazioni da compiere ad ogni passo temporale scala come  $\frac{N(N-1)}{2}$ .

## 3.2 Metodo PM

Il metodo *Particle-Mesh* (PM) costruisce una griglia su cui per calcolare il potenziale gravitazionale a grande scala risolve l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}, t) = 4\pi G a^2 [\rho(\vec{x}, t) - \bar{\rho}(t)], \quad (3.2)$$

ove  $\phi$  è il potenziale gravitazionale mentre  $\bar{\rho}(t)$  è la densità di background.

Imponendo condizioni al contorno periodiche tale equazione ha una risoluzione nello spazio di Fourier; questo riduce il tempo di calcolo portando il costo computazionale ad un valore proporzionale a  $N \log N$  con  $N$  numero di particelle.

Il problema principale che si riscontra usando questo approccio è di ottenere una risoluzione limitata a causa dell'uso di una griglia; per aumentare la risoluzione o si considera un metodo ibrido, implementando anche un algoritmo PP per considerare le interazioni a corto raggio, oppure, si costruiscono griglie *adattive*, ovvero, più fitte nelle zone ad alta densità, dove è richiesta una risoluzione maggiore, e, viceversa, più larghe nelle zone sottodense.

## 3.3 Algoritmo TREE

Questo algoritmo suddivide lo spazio in cubi più piccoli ricorsivamente, infatti, ad ogni passo verifica se il cubo contiene delle particelle, e in caso positivo viene suddiviso nuovamente, finchè si otterranno i cubi più piccoli che potranno contenere solo una o nessuna particella, se ne contengono una vengono detti *foglie*. Procedendo a ritroso i cubi intermedi verranno detti *rami* e la struttura più grande *tronco*: ecco il perchè del nome TREE (albero). La massa totale e il centro di massa sono le proprietà principali di ogni cubo.

Operativamente il metodo procede considerando una particella e calcolando il rapporto  $\frac{l}{D}$ , ove  $l$  è la larghezza della cella e  $D$  la distanza della particella da un nodo (ramo, foglia...): la cella sarà considerata unica se il rapporto è minore di un parametro che solitamente si pone uguale ad uno, nel caso il rapporto fosse maggiore si analizzano iterativamente i sottocubi finchè non si raggiunge una foglia.

Il costo computazionale scala con  $N \log N$ .

## 3.4 Condizioni iniziali

Questi metodi ad ogni passo temporale modificano la configurazione del sistema. Ovviamente il processo ha inizio da condizioni che devono essere spec-

ificate. Tale scelta deve essere ben ponderata perchè, a causa della causalità degli algoritmi gli errori che si commettono nella definizione delle condizioni iniziali, possono propagarsi notevolmente fino a una rappresentazione dell'Universo totalmente errata, nonostante da un punto di vista prettamente formale l'evoluzione sia avvenuta correttamente. Come abbiamo visto, si vorrebbe un algoritmo che parta da una condizione di omogeneità ed isotropia, con piccole sovradensità che, sotto opportune condizioni aumentano, creando agglomerati di materia. Quindi si impone che il campo di fluttuazioni di densità iniziale sia random gaussiano, completamente descrivibile dallo spettro di potenza con un indice spettrale che non sia costante in tutto l'intervallo di lunghezze d'onda, ma si assume, solitamente, che abbia degli andamenti asintotici determinati dal modello cosmologico.

Per avere le condizioni iniziali che descrivano un tale spettro di potenza primordiale, si considerano i punti su una griglia regolare e si impone loro di avere un piccolo spostamento in modo che le fluttuazioni abbiano lo spettro desiderato. Operativamente, si considerano due numeri sull'intervallo  $(0, 1]$ , generati in modo random,  $\phi$  e  $A$ , per ogni punto del  $k$ -spazio, ove  $k$  è il numero d'onda dell'indice spettrale. Si possono così definire i coefficienti di Fourier del contrasto di densità:

$$\hat{\delta}_k = \sqrt{-2P(k) \ln(A)} e^{i2\pi\phi} \quad (3.3)$$

e, se  $\vec{q}$  indica le coordinate delle particelle nello spazio reale, si calcola il potenziale:

$$\phi(\vec{q}) = \sum_k \frac{\hat{\delta}_k}{k^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{k}}. \quad (3.4)$$

Ora, si assegna posizione e velocità iniziale di ogni particella, e si impone loro uno spostamento dato dall'approssimazione di Zel'dovich

$$\vec{x} = \vec{q} - D_+(z) \vec{\nabla} \phi(\vec{q}) \quad (3.5)$$

$$\vec{v} = \dot{D}_+(z) \vec{\nabla} \phi(\vec{q}) \quad (3.6)$$

ove,  $D_+(z)$  è il fattore lineare di crescita delle perturbazioni al redshift  $z$ .

Grazie alle tecniche N-body ed idrodinamiche si fa iniziare l'esecuzione della simulazione.

**Risimulazioni** Per evitare che i tempi di esecuzione aumentino inutilmente per elaborare accuratamente zone a bassa densità che non presentano



strutture si ricorre alla tecnica delle risimulazioni. Prima si procede ad ottenere una simulazione a bassissima risoluzione che permette di individuare le zone lagrangiane dove si formano le strutture più grandi. Successivamente solo in queste zone si aumenterà la risoluzione, elaborandole con simulazioni a se stanti. Per comprendere anche le interazioni mareali con le zone circostanti che sono state escluse, si aggiungono alla zona lagrangiana di partenza zone circostanti, mantenute ad una bassa risoluzione, che non verranno poi studiate ma servono solo per tenere conto di questo effetto; le loro particelle vengono dette contaminanti e sarà necessario scartarle prima di effettuare analisi scientifiche. In conclusione, si ottengono tante simulazioni che sono risimulazioni delle zone di interesse.

### 3.5 Il codice GADGET-2

Tra gli ultimi codici proposti è interessante soffermarsi sul codice GALaxies with Dark matter and Gas intEract, sia perché è stato reso pubblico (Springel et al. 2001, Springel 2005) sia perché ancora ampiamente utilizzato.

Descrive sia la materia non-collisionale (DM, stelle) sia quella collisionale.

Per risolvere i problemi a N-corpi è stato scelto un algoritmo di tipo TREE mentre per quelli idrodinamici si è implementato un SPH.

Il passo temporale è stato scelto variabile in modo che possa essere piccolo per regioni ad alta densità, così che sia possibile aggiornare più volte le posizioni delle particelle.

Il volume è stato diviso in domini, ai quali è stato assegnato un processore ciascuno che elabora le particelle del dominio. Ovviamente ogni processore resta in comunicazione con gli altri processori per scambiare le informazioni sulle particelle che interagiscono tra domini vicini. Lo spazio è stato suddiviso tramite una curva di Peano-Hilbert, che permette di mappare lo spazio tridimensionale in uno spazio unidimensionale, e, visto che si tratta di un processo ricorsivo, consente di riempire lo spazio con densità arbitrariamente alta.

Ora, è vero che l'obiettivo primario di una simulazione è quello di fornire una rappresentazione il più aderente possibile con la realtà, ma è altrettanto fondamentale comprendere come si è giunti al risultato, quindi è necessario durante la simulazione salvare lo stato di tutte le componenti, ottenendo così delle istantanee che in gergo vengono dette *snapshot*. In questo modo si verifica la bontà della simulazione non solo nell'Universo vicino ma anche ad alti redshift.

### 3.6 Identificazione delle strutture

Il risultato che si ottiene dall'esecuzione di una simulazione è quindi un insieme di particelle a cui sono associate proprietà quali posizione, velocità ed eventualmente temperatura, metallicità. . . Ma queste informazioni sarebbero del tutto inutilizzabili senza un adeguato metodo per riconoscere le strutture che hanno composto l'evoluzione temporale. Questo compito è affidato da procedure specializzate. Di seguito si descrivono quelle più utilizzate: FoF e Subfind.

*Friends-of-friends* (Fof), si basa su considerazioni di tipo geometrico, stabilisce l'appartenenza di una particella ad un gruppo Fof se dista dalle altre particelle di una quantità detta *linking length*.

Per esempio, nel caso di una simulazione che preveda sia la materia oscura che la componente barionica, solitamente questa prima scrematura può venire effettuata sulle particelle di CDM mentre le particelle barioniche sono attaccate al gruppo più vicino. Successivamente, tramite l'algoritmo SUBFIND vengono identificate le strutture legate gravitazionalmente ad ogni alone Fof. Per fare questo SUBFIND considera le sottostrutture come fluttuazioni del campo di densità del gruppo. Prima individua il valore massimo del campo di densità, poi cerca i massimi locali e i corrispondenti minimi locali, tracciando le isodensità che caratterizzeranno le sottostrutture.

Se si vogliono però solo le particelle legate gravitazionalmente bisogna eliminare quelle con un'energia superiore a quella del massimo del potenziale gravitazionale. Come output viene fornito un vettore con gli indici che identificano le particelle che appartengono ad ogni sottostruttura. Infine SUBFIND calcola posizione, velocità, massa, momento angolare, centro di massa,  $R_{200}$  (raggio che racchiude una densità più grande di 200 volte la densità critica, quindi una stima della distanza entro cui possiamo considerare sia valida l'approssimazione del viriale).

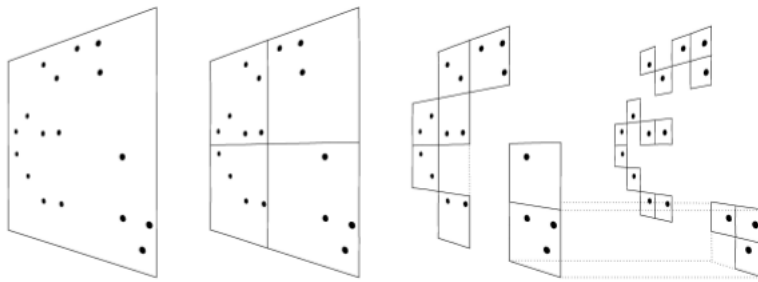


Figura 3.1: Schema bidimensionale della logica con cui opera l'algoritmo TREE. L'immagine a sinistra è il tronco, quelle in mezzo sono i rami di due diverse grandezze, a destra ci sono le foglie, dove ogni cella contiene solo una particella. (Immagine da Springel et al. 2001)

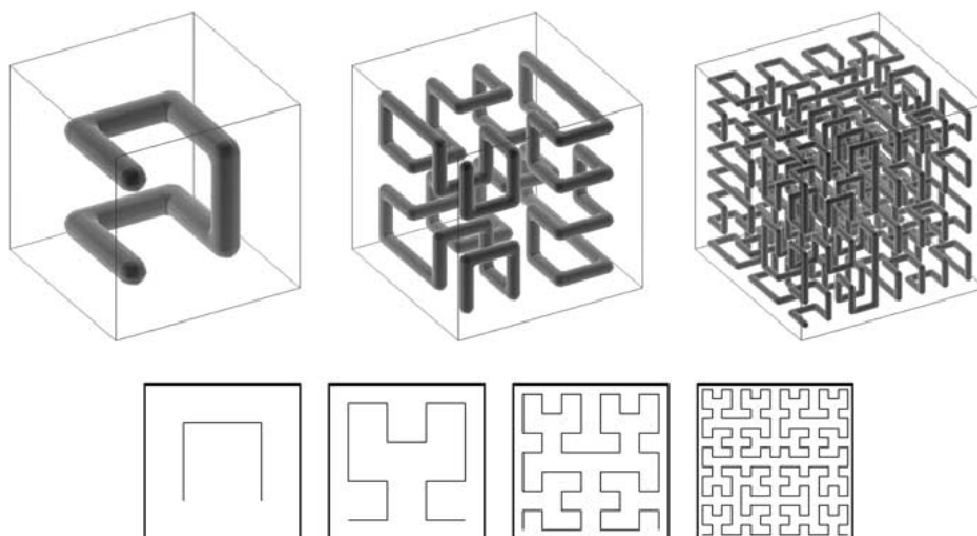


Figura 3.2: Curva di Peano nel caso 3D (sopra) e nel caso 2D (sotto). Figura tratta da Springel 2005. Una curva di Peano è una curva parametrizzata da una funzione continua dall'intervallo  $[0, 1]$  ad un quadrato. Apparentemente il concetto è controintuitivo avendo la curva una sola dimensione, mentre il quadrato ne ha due. Eppure, partendo da un segmento di lunghezza unitaria

e applicandogli nove trasformazioni affini della forma 
$$\begin{cases} X = ax + by + e \\ Y = cx + dy + f \end{cases} \quad (5)$$

di esse sono delle omotetie di rapporto  $\frac{1}{3}$  composte con opportune traslazioni, mentre le restanti 4 si ottengono componendo una omotetia di rapporto  $\frac{1}{3}$  con una rotazione secondo un angolo di  $90^\circ$  e un'opportuna traslazione) in modo iterativo si riempie tutto il quadrato. Hilbert studiò una curva simile, dalla quale si ottiene sempre un quadrato di lato unitario ma procedendo con il seguente processo iterativo: si consideri un quadrato di lato unitario e lo si divida in 4 quadrati uguali; si prenda il centro di ognuno di essi e lo si congiunga con il centro di due quadrati adiacenti con una linea spezzata di tre segmenti. Ciascuno dei 3 segmenti rettilinei della poligonale è metà della misura del lato del quadrato di partenza. La poligonale sarà dunque lunga  $\frac{3}{2}$ . Al secondo passo si divida ognuno dei 4 quadrati in 4 quadrati uguali e così via ripetendo lo stesso procedimento.

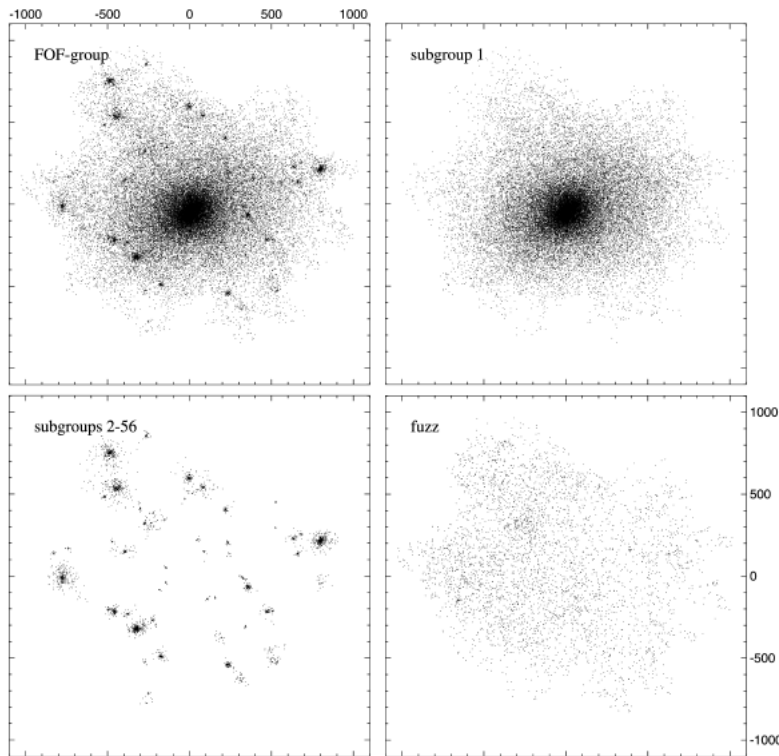


Figura 3.3: Esempio di identificazione di sottostrutture effettuato con SUBFIND. In alto a sinistra viene rappresentato un intero gruppo Fof. In alto a destra si mostra l'alone principale. In basso a sinistra ci sono le sottostrutture. In basso a destra le particelle slegate. Da Springel et al. (2001)

# Capitolo 4

## Osservazioni dagli ammassi di galassie

Le tre principali componenti che costituiscono la massa di un ammasso di galassie, tipicamente dell'ordine di  $10^{15}M_{\odot}$ , sono: le galassie, che contribuiscono per  $\sim 10^{13}M_{\odot}$ , il gas (*IntraCluster Medium*, ICM)  $\sim 10^{14}M_{\odot}$  e la materia oscura, che risulta, dunque, essere la componente dominante.

Nella visione standard del modello la materia oscura è non barionica e non collisionale, ovvero, il moto di una sua particella è dovuto al campo medio generato da tutte le altre particelle; le galassie vengono considerate, mediamente, un sistema non collisionale, in effetti, è probabile una loro interazione soltanto nel centro dell'ammasso; le particelle di gas, al contrario, sono di natura collisionale.

Dal punto di vista degli studi cosmologici gli ammassi costituiscono un campione che per diversi motivi può risultare ideale.

Innanzitutto, le loro velocità peculiari essendo piccole garantiscono che l'ambiente non è variato molto da quello in cui si sono formati, infatti, le proprietà dinamiche sono determinate dalla gravità degli ammassi e in prima approssimazione diversi processi fisici come l'idrodinamica o la formazione stellare, possono essere ignorati. Di conseguenza, l'evoluzione degli ammassi è determinata principalmente dal potenziale e dalla massa.

Poi, essendo strutture giovani, si può presupporre che le condizioni iniziali siano ancora distinguibili e questo può essere fonte di informazioni che permettano di distinguere i vari modelli cosmologici, che, invece, a redshift elevati, tendono ad essere tutti simili al modello di Einstein-de Sitter. Infatti, permettono di stimare i parametri cosmologici quali il parametro di densità e l'ampiezza dello spettro di perturbazioni.

Inoltre, sono un ottimo tracciante della struttura a grande scala, che si può dedurre osservandone un numero non molto grande.

Infine, fungono da lenti gravitazionali per le galassie di background, e questa proprietà consente di studiare la loro distribuzione di materia in modo più diretto rispetto ad altre tecniche.

Ovviamente, è necessario avere dati osservativi su un'ampia selezione di ammassi a varie epoche e in diverse bande spettrali.

Le informazioni possono provenire dall'ICM che, essendo completamente ionizzato e ad alta temperatura,  $T \approx 10^7 \div 10^8 K$ , risulta una brillante sorgente di raggi X per emissione di free-free, tipicamente le luminosità degli ammassi sono dell'ordine di  $L_X \approx 10^{44 \div 45} \text{erg/s}$ . Alternativamente, le radio galassie possono essere traccianti di ambienti ad alta densità. Oppure, sfruttando l'effetto Sunyaev-Zel'dovich (SZ) si traggono informazioni a redshift maggiori.

## 4.1 Osservazioni nell'ottico

Identificare un ammasso come una sovra-densità di galassie nella banda ottica può generare degli errori a causa del problema della *proiezione*. Risulta quindi fondamentale adottare un metodo per la creazione di cataloghi di ammassi di galassie basato sulla definizione di quali proprietà spettroscopiche o fotometriche debbano avere tali oggetti, per ottenere una distribuzione spaziale delle galassie il più aderente alla realtà, e limitando le possibili contaminazioni di *background* e *foreground*.

Successivamente, per determinare la bontà di un catalogo se ne stima la *purezza*, che stima la probabilità di avere false identificazioni, e la *completezza*, che misura quanti ammassi sono stati identificati correttamente.

Partendo da una survey fotometrica per identificare gli ammassi si possono utilizzare diversi algoritmi.

Abell (Abell 1957) propose il metodo più semplice basandosi sulle magnitudini, tutt'ora è il solo metodo adottabile nel caso di survey in un singola banda. in pratica, a partire da una sovra-densità di conteggi definisce una magnitudine limite entro la quale contare il numero di galassie associate ad una struttura, detto *abbondanza*.

Bower (Bower et al. 1992) ha proposto un metodo basandosi sul colore, quindi è sono necessarie osservazioni multi-banda, e le relazioni colore magnitudine con cui selezionare le galassie ellittiche che, generalmente, si trovano nel centro dell'ammasso. Successivamente, è necessario costruire una survey spettroscopica con cui determinare il redshift fotometrico e la dispersione di velocità negli ammassi. Attualmente per effettuare questa misura servono i dati di almeno 15-20 galassie per ogni ammasso. Inoltre ottenere stime del redshift sufficientemente precise è ancora difficile e in questo consiste il

limite principale di queste tecniche. Mentre sfruttare la relazione colore-magnitudine per la decontaminazione ha diversi vantaggi, per esempio, la sua universalità permette l'identificazione di ammassi irregolari, non completamente rilassati e con sottostrutture. Proprio nel lavoro citato di Bower confrontando la *red sequence* di Coma, noto ammasso rilassato, e Virgo, al contrario, irregolare e ricco di galassie a spirali, si conclude che in entrambi la popolazione di galassie *early type* è molto simile.

Da un punto di vista strumentale occorrono telescopi di grande diametro, specialmente se il redshift è elevato e uno spettrografo multi-oggetto a grande campo.

## 4.2 Osservazioni X

Grazie alle proprietà dell'ICM, che di seguito verranno presentate, si ottengono mappe più precise rispetto all'ottico.

Per quanto riguarda i meccanismi di emissione, storicamente, vennero proposti due modelli per la natura di questo plasma ionizzato.

Il primo prevedeva, erroneamente, che fosse un gas analogo a quello responsabile dell'emissione radio, con una distribuzione di energia degli elettroni a legge di potenza, non termico, relativistico, dovuto al processo Compton-inverso.

Il secondo, invece, correttamente, prevedeva un plasma termico, caldo  $T \approx 10^8 K$ , ove il continuo dello spettro X era dovuto a Bremsstrahlung termico.

**Compton-inverso** Poiché molti ammassi emettono sia nella banda X che nella banda radio, inizialmente, si era proposto uno scenario in cui la causa delle due emissioni fosse comune e individuabile negli elettroni che emettono in radio per sincrotrone. Per spiegare l'energia elevata dei raggi X si pensò che l'acquistassero dall'interazione con i fotoni di background della radiazione di fondo. Seguendo questa impostazione si conclude che le due luminosità,  $L_X$  in banda X dovuta a Compton inverso e  $L_R$  in banda radio dovuta a sincrotrone, hanno la medesima forma spettrale e il loro rapporto è proporzionale al rapporto tra la densità d'energia del background,  $U_{bg}$ , e la densità del campo magnetico,  $U_B$ :

$$\frac{L_X}{L_r} \propto \frac{U_{bg}}{U_B} \quad (4.1)$$

In questo scenario, però, sorgono diverse incongruenze: gli elettroni che emettono in X dovrebbero emettere in radio a frequenze così basse da non



essere rilevabili da Terra; lo spettro X previsto a legge di potenza non è rispecchiato dalle osservazioni; infine, le due emissioni dovrebbero provenire dalla medesima regione e, invece, la radiazione X è diffusa, mentre quella radio proviene da galassie individuali.

**Bremsstrahlung termico** Questo modello (come già anticipato è quello corretto) prevede che l'emissione X provenga dall'ICM, che deve avere temperature dell'ordine di  $10^8 K$  e densità di circa  $10^{-3} cm^{-3}$ , tramite bremsstrahlung termico, o free-free.

L'emissività di un gas termico che emette attraverso questo meccanismo è:

$$\epsilon^{ff} \propto n_e n_i T^{1/2} e^{-\frac{h\nu}{kT_g}} \quad (4.2)$$

ove,  $n_e$  e  $n_i$  sono rispettivamente il numero di elettroni e di ioni;  $h$  è la costante di Plank;  $k$  la costante di Boltzmann e  $\nu$  è la frequenza di emissione.

Lo spettro X viene ben spiegato da questo modello, infatti, supponendo che l'ICM sia in equilibrio con le galassie esso avrà, in prima approssimazione, una temperatura legata alla dispersione di velocità delle galassie nell'ammasso  $\sigma_r$  data da:

$$\frac{kT_g}{\mu m_p} \approx \sigma_r^2 \quad (4.3)$$

ove,  $\mu$  è il peso molecolare medio e  $m_p$  è la massa del protone; e sostituendo i valori tipici per la dispersione di velocità si ottengono delle temperature che sono in accordo con quelle richieste per spiegare lo spettro X.

Inoltre, nel caso l'ammasso abbia una temperatura costante, l'equazione prevede che l'emissione decresca rapidamente alle alte frequenze, come osservato.

Infine, questo modello spiega perfettamente le caratteristiche righe degli ioni del ferro ( $Fe^{+24}$  e  $Fe^{+25}$ ) e del nichel che hanno energie fotoniche tra 6.5 e 7 keV.

**Proprietà X degli ammassi** Lo studio in X degli ammassi è da preferire rispetto all'ottico per diversi motivi.

Innanzitutto l'emissività X è proporzionale al quadrato della densità locale del gas, invece, quella ottica può vantare di una dipendenza soltanto lineare, conseguentemente gli ammassi in X risultano più concentrati e meno affetti dalla contaminazione di oggetti di background.

Poi, la luminosità in X correla con la massa totale dell'ammasso collassato in modo migliore, ciò sarà di fondamentale importanza per gli approcci

analitici che si basano sull'approssimazione di Press-Schechter e le simulazioni a N-corpi che verranno presentate in dettaglio in seguito.

Infine, assumendo l'equilibrio idrostatico si può ottenere una relazione tra la temperatura in X e la massa dell'ammasso migliore di quella basata sulla luminosità, tuttavia, bisognerà prestare attenzione alla dinamica degli ammassi e ai gradienti di temperatura forieri di incertezze.

### 4.3 Osservazioni in banda radio

L'emissione radio è generata da plasmii le cui particelle sono ultrarelativistiche che emettono tramite il meccanismo di sincrotrone.

Si ricorda, per completezza, che il sincrotrone è dovuto all'interazione tra elettroni relativistici con i campi magnetici.

In particolare, quando una particella si trova all'interno del campo magnetico  $\vec{B}$  il suo moto è elicoidale attorno alle linee di campo con una frequenza  $\omega$  direttamente proporzionale a  $\vec{B}$ .

Il flusso continuo generato da questo moto risulta essere direttamente proporzionale alla densità del campo magnetico e lo spettro di emissione ha la seguente legge di potenza:

$$I_\nu \propto \nu^{-\alpha_r} \quad (4.4)$$

ove,  $\alpha_r$  è l'indice spettrale, solitamente le galassie hanno valori stimati intorno a 0.7-0.8 (Cooray et al. 1998).

La zoologia delle emissioni radio è abbastanza varia e in base alla morfologia le sorgenti si trovano in ambienti diversi e epoche diverse, in generale, sono dei buoni traccianti per ammassi e gruppi di galassie.

In particolare, le Faranoff-Ridley I (FRI), caratterizzate da hot spot (eccessi di brillantezza) vicino al centro, tipicamente si trovano in ambienti densi e sono associate a galassie ellittiche ad ogni redshift.

Le Faranoff-Ridley II (FRII), che presentano radio volumi molto estesi, invece, a redshift bassi non si trovano in ammassi (Zirbel 1996).

Da un punto di vista osservativo, per costruire un campione di ammassi selezionati nel radio e nell'ottico, si inizia costruendo un catalogo di galassie radio estratte da survey estese, poi si procede all'identificazione ottica, a questo punto si selezionano gli oggetti che hanno due caratteristiche: una distanza radio-ottica inferiore ad un valore in secondi d'arco, solitamente intorno a 7, per eliminare le galassie deboli, e con una magnitudine limite opportuna che dipenderà dal redshift che si vuole osservare.

Si procede, quindi, a ricercare un eccesso di densità superficiale nel numero delle galassie attorno all'oggetto radio del catalogo, ovvero, operativamente si contano le galassie divise in celle e si filtra con una funzione, generalmente una gaussiana.

Gli ammassi saranno quelli per cui il picco di densità e la radiogalassia è minore del *raggio di Abell*:  $R_A = \frac{1.7'}{z}$ .

La tecnica appena descritta si è rivelata efficace a redshift intermedi:  $0.13 < z < 0.3$  (Zanichelli et al. 2011).

## 4.4 Osservazioni nel millimetrico: effetto SZ

L'effetto Sunyaev-Zel'dovich (SZ) è dovuto alle interazioni degli elettroni liberi negli ammassi con i fotoni della CMB, che generano le anisotropie secondarie di quest'ultima. Si distingue in due fenomeni: uno termico e uno cinematico.

L'effetto termico, dovuto allo scattering Compton inverso, causa uno spostamento dello spettro tale da apparire come maggiormente alzato se osservato a frequenze alte.

L'effetto cinematico, è dovuto alla velocità peculiare dell'ICM che causa uno spostamento Doppler della CMB, le particelle di quest'ultima, urtando con quelle dell'ICM si diffondono. In particolare si assiste ad una variazione di brillantezza, o temperatura, che aumenta nel caso in cui l'ammasso è in avvicinamento:

$$\frac{\Delta B}{B_{CMB}} \propto \tau \frac{v_{pec}}{c} \quad (4.5)$$

ove  $B$  indica la brillantezza e  $\tau$  la profondità ottica.

Questo effetto, dipendendo solo dalla profondità ottica ricavabile da osservazioni X, permette la costruzione di un campo delle velocità delle strutture.

I due effetti si compenetrano perchè la massima distorsione dell'effetto cinematico corrisponde a quella minima del termico, possono essere separati solo attraverso misure precise sulle lunghezze del millimetrico.

L'effetto SZ fornisce altresì la stima di parametri cosmologici.

Ad esempio, la costante di Hubble si ottiene dall'ampiezza della distorsione Compton unitamente alla brillantezza e temperatura in X, in particolare si ha:

$$\Delta T_X \propto n_e d_A \theta_{cl} \quad (4.6)$$

$$S_X \propto \frac{n_e^2 (d_A \theta_{cl})^3}{d_L^2} \quad (4.7)$$

ove,  $n_e$  è la densità elettronica;  $\theta_{cl}$  è la dimensione angolare dell'ammasso e  $d_L$  e  $d_A$  sono rispettivamente la distanza di luminosità e la distanza angolare. A redshift piccoli si ha:

$$\frac{d_L^2}{d_A} \propto \frac{\Delta T_X^2 \theta_{cl}}{S_X} \quad (4.8)$$

di conseguenza,

$$H_0 \propto \frac{S_X z}{\Delta T_X^2 \theta_{cl}} \quad (4.9)$$

Una volta che è noto  $H_0$  da misure su ammassi vicini, si possono fare considerazioni su ammassi più lontani, assumendo però l'isotermicità e la sfericità dell'ammasso, che non sempre corrispondono alla realtà.

# Capitolo 5

## Proprietà degli aloni simulati

### 5.1 Profili di densità

Gli ammassi di galassie sono, come detto, i sistemi virializzati più grandi che osserviamo nell'Universo, la cui massa è composta prevalentemente, circa l'80%, da DM; poichè questa componente non è direttamente osservabile le simulazioni forniscono il *trait d'union* tra osservazioni e modelli teorici, in quanto permettono di comprendere in che modo dagli osservabili si possono trarre informazioni sulla distribuzione di tutta la materia. Per esempio, la densità numerica normalizzata alla densità entro il raggio del viriale dà una prima stima della differenza che intercorre tra la distribuzione della DM e quella delle sottostrutture, al cui centro si ritiene ci siano le galassie, cioè gli osservabili.

In particolare, la struttura della parte interna (*core*) degli ammassi di galassie, fornisce un laboratorio ideale per verificare le proprietà delle ancora ipotetiche particelle di materia oscura. Tipicamente, si osserva che, a piccole distanze dal centro della distribuzione, le strutture si appiattiscono rispetto alla DM. La ragione della formazione di un tale profilo non è ancora chiara, e per comprenderla, proprio le simulazioni, vengono in soccorso in quanto, per esempio, ricercano profili di densità dal carattere universale, ovvero che presentino un andamento abbastanza piatto, con un raggio scala che gradualmente si irripidisce ulteriormente nelle parti esterne; si vedrà in seguito che si approssima una pendenza logaritmica di  $\approx -3$  vicino al raggio viriale, sebbene i sistemi autogravitanti, per cui vale il teorema del viriale, non abbiano un equilibrio stabile per via della loro capacità termica negativa. Questo si può vedere facilmente considerando che il teorema del viriale, in una versione scalare, richiede una relazione tra l'energia cinetica totale  $E_{kin}$  e l'energia potenziale  $E_{pot}$  come segue:

$$2E_{kin} = -E_{pot}; \quad (5.1)$$

L'energia totale è data da:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = -E_{kin} \quad (5.2)$$

I sistemi autogravitanti possono perdere energia in diversi modi: ad esempio, le particelle possono slegarsi e sfuggire dal sistema a causa dell'incontro con un terzo corpo, o il gas barionico, mescolato con la DM, può irradiare energia e contrarre adiabaticamente la DM. Se un sistema autogravitante perde energia, non importa quanto, l'energia totale del sistema diminuirà; poichè è negativa per un sistema legato, il valore assoluto diminuisce e per il teorema del viriale diminuisce pure l'energia cinetica. Il raffreddamento del sistema per la perdita di un qualsiasi tipo di energia conduce quindi al riscaldamento del sistema per la contrazione, che definisce una capacità termica negativa. Questo implica che il sistema autogravitante non può ricercare uno stato di equilibrio stabile, ovvero dove un opportuno potenziale termodinamico può raggiungere un minimo. Ciò nonostante, le simulazioni numeriche della perdita dissipativa della DM sotto l'influenza esclusiva della gravità mostrano unanimemente che sistemi gravitazionalmente legati formati in un ampio intervallo di massa, detti *aloni* di DM, hanno vissuto a lungo. Abbastanza indipendentemente dalle differenti condizioni iniziali presentano un profilo di densità radiale universale  $\rho(r)$  caratterizzato da due raggi. Quello esterno, detto *raggio del viriale*  $R_{vir}$ , racchiude una zona nella quale si suppone che l'equilibrio del viriale sia raggiunto. Entro un raggio più interno del precedente, detto *raggio scala*  $r_s$ , qualitativamente il profilo di densità presenta una forma ripida e piatta dal centro dell'alone al raggio scala. Le simulazioni sono d'accordo con la doppia pendenza logaritmica:

$$\alpha = \frac{d \ln \rho}{d \ln r} \quad (5.3)$$

che raggiunge asintoticamente il valore  $-3$  vicino al raggio del viriale, mentre, tipicamente le pendenze interne misurate negli aloni simulati hanno valori compresi tra  $-1$  e  $-1.5$ .

Introducendo il raggio adimensionale  $x \equiv \frac{r}{r_s}$ , i profili di densità hanno la forma:

$$\rho(x) = \frac{\rho_s}{x^\alpha (1+x)^{3-\alpha}} \quad (5.4)$$

che interpola molto bene gli aloni di DM simulati numericamente, se si assumono per  $\alpha$  pendenze comprese tra  $-1$  e  $-1.5$ .

Per comprendere i processi fisici che portano ad avere dei profili universali sono stati proposti due approcci.

Il primo si basa sulla formazione degli aloni partendo dagli aloni più piccoli, e l'importanza dei processi di merging e i tassi coinvolti. Se  $n$  è la pendenza dello spettro di potenza della DM, vicino alle scale corrispondenti alla massa dell'alone considerato, il profilo di densità di questo alone può essere una legge di potenza con pendenza  $\frac{-3(3+n)}{5+n}$ . Un valore  $n \approx -2$  è appropriato per aloni di ammassi, mentre vicino ai core si raggiunge una pendenza vicino a  $-1$ . Poiché un profilo universale è trovato per aloni con masse che si distribuiscono in diversi ordini di magnitudine, gli aloni di galassie che hanno  $n$  vicino a  $-3$  devono avere core più piatti degli aloni degli ammassi, cosa che va contro le altre richieste che si basano sulle simulazioni. Per di più i merger degli aloni sono frequenti nello scenario bottom up, le simulazioni intraprese con uno scenario top down caratterizzato dalla HDM producono aloni con lo stesso profilo universale ma con una relazione inversa concentrazione- massa. Allora i merger non sono essenziali alla formazione del profilo universale

Alternativamente, ci si può basare sul modello del secondary infall che essenzialmente si basa sul fatto che quella che viene detta azione radiale è un'invariante adiabatico.

Generalmente per un sistema meccanico con una funzione Hamiltoniana che vari lentamente comparata al tempo orbitale, la quantità

$$I = \oint \vec{p} d\vec{q} \quad (5.5)$$

è invariante nell'approssimazione adiabatica, ove  $\vec{q}$  e  $\vec{p}$  sono i vettori delle coordinate generalizzate e i loro momenti coniugati

Particelle di massa  $m$  sulle orbite circolari del potenziale a simmetria sferica con massa  $M(r)$  per esempio hanno velocità circolari

$$v_c(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \quad (5.6)$$

per queste orbite, la quantità:

$$I = 2\pi m \sqrt{GM(r)r} \quad (5.7)$$

è invariante mentre il potenziale varia adiabaticamente.

Per la materia che sta orbitando in buche di potenziale più profonde già esistenti che lentamente aumentano la loro profondità accrescendo materia dall'ambiente circostante, la radice quadrata del raggio per la massa è una quantità invariante per trasformazioni adiabatiche. Poiché questa assunzione approssima i profili di densità al profilo universale, la distribuzione dovuta

alle condizioni iniziali e ai momenti angolari è grande. Inoltre, i tempi orbitali sono dell'ordine:

$$\tau_{orbit} \approx \frac{r}{v_c(r)} \approx \frac{r^{3/2}}{\sqrt{GM(r)}}, \quad (5.8)$$

mentre i tempi scala delle variazioni nel potenziale possono essere veloci come il tempo scala detto di *free-fall*

$$\tau_{ff} \approx \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \quad (5.9)$$

che è dello stesso ordine del tempo orbitale.

Questo contribuisce a dissolvere i dubbi sulla correttezza dell'assunzione adiabatica, almeno quando i merger rapidi variano il potenziale su tempi scala brevi, comparabili al tempo scala di free-fall.

Gill et al (2004) hanno studiato i parametri orbitali delle sottostrutture evidenziando un trend di circolarizzazione delle orbite nel tempo, che è stato spiegato come imputabile alla crescita secolare di massa dell'alone principale. In risposta a tale variazione, la velocità e l'orbita potrebbero cambiare. Sono necessarie ulteriori verifiche, tuttavia gli autori presentano la relazione che lega la dispersione di velocità delle sottostrutture alla massa entro il raggio del viriale:  $\sigma \sim M_{vir}^{1/3}$ , come ci si aspetta dal teorema del viriale.

Per descrivere la distribuzione della materia sono stati forniti diversi profili, di seguito verranno presentati i più salienti.

**SIS** Il profilo singolare isoterma (*Singular Isothermal Sphere*) è la descrizione più semplice della distribuzione della materia nei sistemi astronomici. E' stato derivato assumendo che la materia si comporti come un gas ideale, in equilibrio sia termico che idrostatico, confinato da un potenziale gravitazionale a simmetria sferica. Un profilo che soddisfi queste condizioni è dato da:

$$\rho(r) = \frac{\sigma_V^2}{2\pi G r^2}, \quad (5.10)$$

ove,  $\sigma_V^2$  indica la velocità di dispersione del gas e  $r$  è la distanza dal centro. Nonostante la singolarità presente a raggi nulli, ai quali corrisponderebbe una densità infinita<sup>1</sup>, viene utilizzato di frequente per la semplicità

---

<sup>1</sup>Per superare la singolarità è stato proposto il modello *Softened Isothermal Sphere*, che la smussa introducendo nel potenziale un raggio del core.



della sua forma. Ad esempio vengono ben rappresentate: le curve di rotazione delle galassie a spirale, la dinamica stellare nelle galassie ellittiche, gli aloni a raggi X delle galassie ellittiche. Gunn & Gott (1972) nel loro modello di “Secondary Infall” trovano che il collasso gravitazionale può portare alla formazione di sistemi virializzati con profili di densità quasi isotermi. Questo risultato, ulteriormente confermato da Filmore & Golderich (1984) e da Bertschinger (1985), fornisce un significato cosmologico alla piatezza delle curve di rotazione osservata per i dischi galattici. Nello stesso periodo Hoffman & Shaham (1985) e Hoffman (1988) estesero questi risultati evidenziando che c’era una dipendenza anche dal valore del parametro di densità e dallo spettro di potenza primordiale. In particolare studiando spettri scale-free,  $P(k) \propto k^n$  ( $-3 < n < 1$ ), risultò che i profili di densità si irripidiscono all’aumentare di  $n$  e al diminuire del parametro di densità. Queste conclusioni trovarono conferma anche da simulazioni a N-corpi (Frenk et al. 1985, Efstathiou et al. 1988).

Da quanto detto appare evidente l’importanza di avere un fit adatto per la distribuzione di densità. I lavori numerici ad alta risoluzione non mostrano evidenze dell’effettiva esistenza di una regione centrale dove la densità è approssimativamente costante, così si è cercato di superare il modello isoterma con altri modelli, di seguito esposti.

**NFW** Utilizzando le simulazioni a N-corpi Navarro, Frenk e White (Navarro, Frenk e White, 1995) proposero un profilo di densità per descrivere gli aloni di materia oscura in un ampio intervallo di masse,  $10^{12-15} M_{\odot}$ .

In particolare, assumendo la cosmologia standard CDM, hanno studiato aloni di DM che sono stati scelti intenzionalmente in uno stato di equilibrio, isolandoli da una simulazione a N-corpi a bassa risoluzione e, successivamente, risimulati con una risoluzione migliore, utilizzando un codice dato dalla combinazione di un metodo a N-corpi con un SPH. Gli effetti del raffreddamento radiativo del gas sono stati considerati trascurabili.

Non è chiaro quanto il loro risultato sia stato influenzato dal loro criterio di selezione, ma l’aspetto fondamentale è che questo modello è compatibile con tutti i modelli cosmologici, cioè è statisticamente universale. In particolare, hanno trovato che la caratteristica sovradsensibilità di un alone, o equivalentemente la sua concentrazione, correla strettamente con la massa dell’alone nel quale viene riflessa la dipendenza della massa dell’epoca della formazione dell’alone. I profili degli aloni sono approssimativamente isotermi,  $\propto r^{-2}$ , soprattutto vicino al centro e su un largo intervallo di raggi, ma risultano significativamente più ripidi vicino al raggio virale. La sua funzione ha la

forma seguente, che corrisponde alla (52) con  $\alpha = -1$  :

$$\rho(r) = \frac{\delta_c \rho_c}{\left(\frac{\rho}{r_s}\right) \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2}, \quad (5.11)$$

ove,  $\rho_c = \frac{3H^2(z)}{8\pi G}$  è la densità critica dell'Universo al redshift  $z$  dell'alone.  $H(z)$  è il parametro di Hubble al medesimo redshift.  $G$  è la costante gravitazionale.  $r_s \equiv \frac{r_{200}}{c}$  detto *raggio di scala*, è il raggio caratteristico al quale il profilo di densità è in accordo con il profilo isoterma.

La *sovradensità caratteristica dell'alone* è data da:  $\delta_c = \frac{200}{3} \frac{c^3}{\ln(1+c) - \frac{c}{(1+c)}}$ .  $c$  è un valore adimensionale, detto *concentrazione*, dato da  $c = \frac{R_{vir}}{r_s}$ , che è stato verificato essere in stretta relazione con la massa al tempo di formazione degli aloni,  $c \propto M^{-0.1}$ , la relazione diventa più ripida con il redshift.

Generalmente, prima gli aloni si formano, maggiore sarà il parametro di concentrazione. Il perchè di questo andamento viene tipicamente attribuito alla densità cosmica di background che è maggiore al tempo di formazione dell'alone, ovvero, gli aloni di piccola masa collassano prima, quando l'Universo è più denso, e la densità centrale in qualche modo riflette l'alta densità di background (Eke, Navarro & Steinmetz 2002).

**Moore** Moore (Moore et al. 1998, 1999) ha suggerito profili con una pendenza centrale più ripida,  $\alpha \approx -1.4$ . Grazie a studi numerici ad alta risoluzione, in particolare quattro simulazioni riguardavano aloni con massa tipica di una galassia e l'ultima si riferiva ad un ammasso, si sono ricavate le pendenze che diminuivano 'dolcemente' con il raggio scala internamente in modo da dipendere dalla massa dell'alone. Tuttavia, Klyping et al. (2001) hanno verificato che anche per gli aloni per i quali il fit di Moore risulta migliore, al di fuori di un centesimo del raggio del viriale NFW è perfettamente adeguato.

**Jing & Suto** Jing & Suto (2000) concentrandosi nelle regioni interne degli aloni con a disposizione delle simulazioni con una risoluzione maggiore di quelle utilizzate da NFW (il numero finale di particelle entro il raggio del viriale è dell'ordine di  $0.5 \div 1 \times 10^6$ , mentre per NFW era compreso tra 5000 e 10000) hanno analizzato se la pendenza centrale dipendesse anche dalla massa, concludendo che effettivamente la forma del profilo di densità dipende dalla massa e ciò si collega anche all'età; in particolare, dei dodici aloni considerati, i quattro più vecchi con massa tipica galattica erano fittati meglio dal profilo di Moore, mentre quelli più giovani, con massa tipica di un ammasso di galassie, erano meglio rappresentati da NFW.

**Einasto** Einasto (Einasto and Haud 1989) ha proposto, alternativamente, un profilo:

$$\rho(x) = \rho_s \exp \left[ -2n \left( x^{1/n} - 1 \right) \right] \quad (5.12)$$

che fitta molto bene il profilo di densità degli aloni simulati di DM se si assume  $n = 5$ . In particolare, la pendenza  $\alpha = -2x^{1/n}$  decresce con continuità verso il centro dove raggiunge zero. Se si confronta il profilo generalizzato proposto da NFW e quello di Einasto, si nota una differenza nella densità centrale, ovvero il primo forma una cuspidè che non è presente nel secondo.

Sono stati proposti diversi meccanismi in grado di smussare la cuspidè centrale, tra i quali si ricordano:

El-Zant et al. (2001) che suggerisce che il core può essere eliminato dalla frizione dinamica di un'iniziale distribuzione di gas; oppure, è stata investigata la presenza di una barra di instabilità nel centro (Weinberg & Katz 2002; Sellwood 2003); infine la cuspidè centrale può essere evitata supponendo un rigonfiamento degli aloni per processi di feedback da parte della componente barionica (Dekel et al. 2003).

Fino ad ora ci si è riferito soltanto a simulazioni di sola DM. Ci si domanda ora cosa varia introducendo la componente barionica. In Rasia, Tormen, Moscardini (2004) si testa la bontà del profilo di NFW con l'introduzione del gas (si utilizzano simulazioni ad alta risoluzione, idrodinamiche e non-radiative).

Considerando anche la presenza di gas caldo, sebbene non dominante gravitazionalmente, si possono avere effetti sulla struttura della DM. Gli autori ricavano un profilo della densità di materia oscura combinando il profilo di densità dello spazio delle fasi:  $\bar{f}(x) \propto r^{-1.875}$ <sup>2</sup>, ove  $r$  è qui e di seguito inteso normalizzato al raggio del viriale, con il profilo di dispersione della velocità radiale,  $\tilde{\sigma}_r(x) \equiv \frac{\sigma_r(x)}{\sigma_v} = \sigma_{r_0} r^{0.3} (r + r_s)^{-0.48}$ , con raggio scala  $r_s = 10^{-1.16}$  e normalizzazione dell'ampiezza  $\sigma_{r_0} = 0.67$ , ottenendo:

$$\tilde{\rho}(x) \equiv \frac{\rho(x)}{\rho_b} = \frac{\rho_0}{r(r + r_s)^{1.5}} \quad (5.13)$$

---

<sup>2</sup>Taylor & Navarro (2001) hanno osserato che nelle simulazioni a N-corpi degli aloni di DM di masse tipicamente galattiche il profilo radiale della funzione di distribuzione grezza:  $\bar{f}(x) \equiv \rho(x)/\sigma_r^3(x)$ , ove  $\rho(x)$  è la densità differenziale di DM,  $\sigma_r(x)$  è la dispersione di velocità radiale, entrambe alla distanza  $x \equiv r/R_{viriale}$  dal centro dell'ammasso, è ben fittato da una legge di potenza.

ove,  $\rho_b$  è la densità media di background dell'Universo; il fattore di normalizzazione è dato da  $\rho_0 = \frac{(1-f_b)\delta_c}{6 \left[ \frac{1+2r_s}{(1+r_s)^{1/2}} - 2r_s^{1/2} \right]}$  ove  $f_b = 0.097$  è la frazione media dei barioni considerati.

Il confronto si può osservare in figura 5.1.

Come si vede il profilo NFW sovrastima di oltre il 15% a  $x \approx 0.1$ , ma questo risultato non deve sorprendere, infatti, la relazione NFW fu proposta in origine per modellare strutture isolate e rilassate in simulazioni di sola materia oscura, mentre gli autori hanno usato ammassi che non godono di queste proprietà, quindi si potrebbe concludere che la componente di gas caldo giochi un ruolo determinante nel modificare il profilo di DM.

Infatti, successivamente, graficando il profilo di densità radiale della DM di un sottoinsieme di sistemi considerati isolati<sup>3</sup> hanno trovato un maggior accordo con il profilo NFW, come si può vedere in figura 5.2.

Gli autori hanno concluso che poichè ora il profilo di NFW è in accordo migliore con i dati, la discrepanza precedente era effettivamente dovuta all'aver incluso oggetti non isolati.

Il profilo di NFW è anche stato utilizzato in Biviano e Poggianti (2009) per interpolare i dati del profilo di densità numerica della galassie, ma tale relazione non è da intendersi come descrizione del profilo di densità di tutta la materia. Infatti, si evidenzia come il profilo di densità numerica e quello di massa non sono caratterizzati dalla medesima relazione NFW, ovvero non si lavora nell'ipotesi che la materia luminosa sia il tracciate del profilo di densità della materia totale.

Nei casi in cui i profili si discostavano troppo da un andamento NFW, gli autori utilizzavano un modello con core:

$$N \propto \left[ 1 + \left( \frac{r}{R_c} \right)^2 \right]^{-\alpha} \quad (5.14)$$

caratterizzato da due parametri, il raggio del core  $R_c$  e la pendenza  $\alpha$ , detto  $\beta - model$  (Cavaliere & Fusco-Femiano 1978).

**Profili 2D** Bartelman (Bartelman 1996) ha utilizzato il profilo di NFW per descrivere con successo gli archi radiali osservati in due ammassi di galassie, nonostante questi richiedano un profilo non singolare. Partendo

---

<sup>3</sup>Gli autori definiscono isolati quegli ammassi per i quali, se inseriti all'interno di una sfera pari a due volte il raggio del viriale, non esistono ammassi vicini di massa superiore ad un centesimo della loro massa viriale.

dal profilo di densità di NFW ha dedotto che la densità superficiale di massa abbia la seguente forma:

$$\Sigma(x) = \frac{2\rho_s r_s}{x^2 - 1} \begin{cases} 1 - \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} \arctan \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} & (x > 1) \\ 1 - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} & (x < 1) \\ 0 & (x = 1) \end{cases} \quad (5.15)$$

ove  $x$  è in unità del raggio di scala  $r_s$ ; e ha concluso che il profilo necessariamente produce una curva critica radiale per qualsiasi combinazione dei due parametri  $\rho_s$  e  $r_s$ ; in particolare, per gli ammassi che producono contemporaneamente sia archi tangenziali che radiali, entrambi i parametri del profilo possono essere dedotti se si possono misurare la distanza degli archi dal centro dell'ammasso e il loro redshift.

Recentemente (Elíasdóttir & Möller 2007) è stato proposto un interessante confronto tra il profilo di NFW e il profilo di Sérsic sempre per descrivere i profili a due dimensioni, fondamentali per l'analisi delle proprietà, ad esempio, di strong lensing.

Il profilo di Sérsic è generalmente utilizzato per descrivere i profili di luminosità 2D delle galassie ellittiche, ed era già stato proposto come alternativa a NFW in tre dimensioni (Navarro et al. 2004), tuttavia è in grado anche di descrivere la densità superficiale degli aloni di DM delle simulazioni, in particolare nelle regioni più interne, dove gli effetti della cinematica sono maggiormente accentuati.

Si ricorda che il profilo di densità superficiale secondo Sérsic è dato da:

$$\ln \left( \frac{\Sigma_{ser}}{\Sigma_e} \right) = -b_n \left[ \left( \frac{R}{R_e} \right)^{1/n} - 1 \right] \quad (5.16)$$

ove  $\Sigma_{ser}$  è la densità 2D;  $R$  è il raggio 2D;  $n$  è l'indice di Sérsic;  $b_n$  è una costante scelta in modo che il raggio  $R_e$  contenga metà della massa proiettata;  $\Sigma_e$  è la densità a  $R_e$ ;  $b_n$  si trova risolvendo l'equazione  $\Gamma(2n, b_n) = \frac{\Gamma(2n)}{2}$  che può essere approssimata da  $b_n \approx 2n - \frac{1}{3} + \frac{4}{405n} + \frac{46}{25515n^2}$ . Con  $n = 4$  si ha il profilo di de Vaucouleurs, nel caso di galassie nane si ha un valore di  $n$  vicino a 3, mentre per aloni di dimensioni tipiche a quelle degli ammassi il valore scende a 2.

**Distruzione mareale** Il meccanismo di distruzione mareale può venire invocato per spiegare gli andamenti differenti che intercorrono nel profilo radiale della densità numerica normalizzata alla densità numerica entro il raggio del viriale, tra la DM e le sottostrutture. Infatti, tale meccanismo

risulta maggiormente efficace nelle zone interne, e questo porta una differenza rispetto alla distribuzione di background.

Il profilo delle sottostrutture risulta essere ben modellato da un profilo isoterma mentre, la distribuzione della densità numerica della DM è invece ben fittata da NFW.

Il meccanismo di distruzione mareale presenta numerose conferme nelle simulazioni.

Ad esempio, Diemand (Diemand et al. 2004) analizzando la dispersione di velocità per sei ammassi simulati ha notato come fino a  $0.4 r_{vir}$  le sottostrutture abbiano una dispersione tridimensionale maggiore delle particelle di DM di background. Ora, definendo un *parametro di bias*,  $b = \frac{\sigma_{sub}}{\sigma_{DM}}$ , si possono valutare le differenze tra il comportamento della DM e delle sottostrutture, e Diemand stima  $b = 1.25 \pm 0.08$  entro  $0.4 r_{vir}$  mentre entro il raggio del viriale si ha  $b = 1.11 \pm 0.04$ . Si noti che il bias è indipendente dalla massa delle sottostrutture, infatti, si trovano parametri di bias quasi uguali anche selezionando sottostrutture in un particolare intervallo di massa.

Focalizzandosi, invece, sulla distribuzione di velocità, la DM ha un profilo maxwelliano, mentre le sottostrutture presentano un eccesso alle alte velocità. Ciò si spiega con il fatto che le sottostrutture lente, restando per un tempo maggiore nelle zone interne dell'alone, subiscono per un tempo più lungo l'azione mareale e vengono distrutte. Da cui il minor numero di sottostrutture a bassa velocità. In particolare, nelle zone interne, si osserva una maggior dispersione di velocità delle sottostrutture rispetto alla DM: gli aloni più veloci restano meno nelle zone interne e di conseguenza sono meno soggetti alla distruzione mareale. Tale distruzione avviene sempre mediante lo stripping di materia principalmente nelle zone esterne della sottostruttura. Infatti da Ghigna et al. (1998) è stata presentata una correlazione tra la dimensione delle sottostrutture e la loro posizione, ovvero le dimensioni crescono andando verso il centro dell'ammasso. Il fenomeno risulta maggiormente evidente oggi rispetto ad un redshift elevato perchè le sottostrutture risiedevano nelle parti esterne dell'alone dove le forze mareali sono meno intense. Nagai e Kratsov (2005) hanno cercato di calcolare la perdita di massa dovuta allo stripping mareale, sottolineando un chiaro trend di perdita di massa ai piccoli raggi. Ora, se si definisce l'epoca di accrescimento come il momento in cui la distanza di una sottostruttura dal progenitore più massivo dell'ammasso diventa per la prima volta minore di 1.5 volte il raggio viriale a quell'epoca, si può osservare che gli aloni entro  $0.3 r_{vir}$  hanno perso oltre il 70% della loro massa dell'accrescimento. A distanze maggiori di metà raggio viriale gli aloni in media perdono meno del 40% della loro massa e la perdita di massa è unita da una diminuzione nella velocità massima.

In conclusione, si fa presente che il tasso di distruzione non sembra essere

correlato con la massa o l'età di formazione. Emerge, invece, che le sottostrutture distrutte risiedono preferibilmente in orbite circolari, mentre, quelle che sopravvivono hanno eccentricità maggiori. Poiché in entrambi i casi i pericentri sono molto simili, l'orbita più circolare delle sottostrutture distrutte implica che queste ultime restino per un tempo maggiore nelle regioni interne dove la distruzione mareale è maggiore.

In Gao et al. (2004) si osserva che le galassie sono un tracciate della distribuzione di materia migliore delle sottostrutture, infatti, sebbene le galassie si formino nelle buche di potenziale delle sottostrutture di DM, bisogna tenere conto del fatto che lo stripping mareale, presentato nel paragrafo successivo, agisce sulle parti esterne di una sottostruttura, e in tali zone viene portata via la DM, mentre la galassia, che risiede nella parte centrale, è maggiormente legata, e risente meno di questi effetti.

**Evidenze di equilibrio dinamico negli ammassi** Gli studi osservativi presentati fino ad ora assumevano l'equilibrio delle strutture osservate al fine di usare l'equazione di Jeans. Per poter essere sicuri che effettivamente gli ammassi siano strutture virializzate è necessario utilizzare anche altri metodi. Nel caso si ottenga un profilo di massa che ha lo stesso comportamento di quello visto negli studi illustrati fino ad ora, è plausibile considerare gli ammassi come strutture virializzate.

Oltre agli studi basati sulle osservazioni in banda ottica della dinamica tracciata dalle galassie è possibile, ad esempio, studiare la dinamica interna degli ammassi tracciata dall'ICM tramite osservazioni in banda X, perché le temperature tipiche di questo gas sono comprese nell'intervallo  $10^7 - 10^8 K$ , quindi il gas risulta completamente ionizzato da emettere in banda X tramite bremsstrahlung, associato allo scattering degli elettroni liberi sugli ioni (Sarazin 1986). Supponendo che il gas sia in equilibrio, dall'equazione dell'equilibrio idrostatico e dall'equazione di stato del gas si ottiene l'analoga dell'equazione di Jeans per un gas, ove il termine cinetico è dato dalla temperatura. Considerando la relazione  $L_X \sim \rho^2 T^{-1/2}$  che lega la luminosità alla temperatura e alla densità e utilizzando un profilo di tipo  $\beta - model isothermo$ <sup>4</sup> è possibile ricavare la temperatura ed infine il profilo di massa.

---

<sup>4</sup>Per descrivere i profili di brillantezza superficiale degli ammassi più massivi è stato proposto un metodo idrostatico isothermo, che è stato poi esteso, per analogia, ai sistemi più piccoli. Alla base c'è l'assunzione dell'equilibrio idrostatico e isothermo sia per le galassie sia per la componente di gas caldo. Questa pare essere una buona approssimazione per gli ammassi con una morfologia regolare nelle emissioni X. Seguendo l'approssimazione analitica proposta da King per la sfera isoterma, si può esprimere la brillantezza superficiale dell'emissione X come:

## 5.2 Dispersione di velocità

I profili di dispersione di velocità della DM sono importanti non solo per comprendere la velocità degli aloni di DM ma anche per stimare la massa totale dell'ammasso attraverso l'equazione di Jeans.

Utilizzando simulazioni ad alta risoluzione basate su due codici differenti Hoefft (Hoefft et al. 2003) ha determinato i profili di densità radiale per tutti gli oggetti considerati a redshift  $z = 0$  concludendo che sia aloni di dimensioni galattiche sia aloni di ammassi possono essere fittati da un profilo NFW nel quale viene lasciato libero il parametro  $n$  della pendenza interna.

Considerando un alone sferico rilassato di particelle non collisionali, questo è completamente descritto dai profili radiali della densità  $\rho(r)$  e la dispersione radiale della velocità è data da:

$$\sigma_r^2 = \overline{(v_r - \bar{v}_r)^2} \quad (5.17)$$

ove  $\bar{v}_r$  è la velocità radiale media in una shell sferica con raggio medio  $r$ , e l'anisotropia della dispersione è data da:

$$\beta = 1 - \frac{\sigma_t^2}{\sigma_r^2} \quad (5.18)$$

ove  $\sigma_t^2$  indica la dispersione di velocità tangenziale.

Il potenziale può essere ricavato da:

$$\Phi = G \int_0^r \frac{M(r)}{r^2} dr \quad (5.19)$$

ove  $G$  indica la costante gravitazionale.

I profili radiali sono connessi all'equazione di Jeans (Binney & Tremaine 1987) dalla seguente relazione:

$$\frac{d(\rho\sigma_r^2)}{dr} + \frac{2\rho}{r}\beta\sigma_r^2 = -\rho\frac{d\phi}{dr} \quad (5.20)$$

$$S(R) = S_0 \left(1 + \left(\frac{R}{r_c}\right)^2\right)^{-3\beta+0.5}$$

ove,  $R$  è il raggio proiettato,  $r_c$  il raggio del core della distribuzione di gas,  $\beta \equiv \frac{\mu m_P \sigma^2}{k T_{gas}}$  è il rapporto tra la densità energetica nelle galassie e quella nel gas,  $\mu$  è il peso molecolare medio,  $m_P$  è la massa del protone,  $T_{gas}$  è la temperatura del mezzo intergalattico. Per temperature tipiche degli ammassi, l'emissività in X è fortemente dipendente dalla temperatura. Così per convertire la brillantezza superficiale osservata in un profilo di densità per il gas, a quest'ultimo è richiesto di avere un profilo abbastanza simile a quello isoterma. Questo modello è noto in letteratura come *beta model*.



che descrive un alone nel quale le particelle si muovono lungo traiettorie non collisionali in un potenziale sferico autoconsistente, generato dalla distribuzione delle particelle.

I risultati delle simulazioni confermano che gli aloni soddisfano l'equazione di Jeans almeno fino al raggio del viriale (Thomas et al. 1998). Da questo si conclude che gli aloni sono sistemi rilassati, che le particelle si muovono lungo orbite determinate da un potenziale medio e che alle piccole scale le interazioni tra particelle sono trascurabili, cioè rare.

La velocità radiale può essere definita o con la seguente relazione:

$$v_c^2 = \frac{GM(r)}{r} = r\Phi' \quad (5.21)$$

oppure usando l'equazione di Jeans:

$$v_c^2 = -\frac{r(\rho\sigma_r^2)'}{\rho} - 2\beta\sigma_r^2. \quad (5.22)$$

Calcolandola in entrambi i modo Hoefft ha concluso che le velocità circolari trascurano qualsiasi contributo dell'anisotropia ( $\beta = 0$ ).

La differenza tra velocità circolare a dato raggio sono piccole e quindi gli aloni possono essere descritti dall'equazione di Jeans assumendo una velocità di dispersione isotropa.

**Velocità di dispersione come funzione del potenziale** Un alone a simmetria sferica con dispersione di velocità isotropa può essere descritto usando tre funzioni radiali: la densità, il potenziale e la velocità di dispersione. Questi profili sono connessi all'equazione di Jeans e all'equazione di Poisson. Così è sufficiente avere una relazione tra  $\sigma$ ,  $\rho$  o  $\Phi$  affinché le altre due siano determinate.

Un semplice modo per ottenere i profili è assumere che la velocità di dispersione è costante con il raggio del viriale. Comunque, i risultati numerici indicano che la velocità di dispersione ha un massimo ad un raggio che verrà denominato  $r_{\sigma,max}$ , e sulla base di questi, seguendo un approccio euristico si può ricavare una relazione tra la dispersione di velocità e il potenziale ad un dato raggio. Infatti, si può approssimare la dispersione come funzione del potenziale, quest'ultimo decresce in modo monotono con il raggio, conseguentemente, deve esistere una corrispondenza biunivoca tra il raggio e il potenziale, la seguente relazione verrà indicata con VDPR:

$$\sigma_r^2 = a \left( \frac{\Phi}{\Phi_{out}} \right)^k (\Phi_{out} - \Phi) \quad (5.23)$$

ove,  $a, k$ , sono parametri liberi e  $\Phi_{out}$  è il potenziale massimo raggiunto a grandi raggi.

Poiché una costante può essere sempre aggiunta al potenziale si usa solitamente la normalizzazione:  $\Phi(0) = 0$ .

Dai minimi-quadrati gli autori hanno stimato per i parametri adimensionali:  $a = 0.29 \pm 0.04$  e  $k = 0.41 \pm 0.03$ , dove gli errori sono le deviazioni standard. I piccoli scatter che si riscontrano di questi parametri tra un alone e l'altro può indicare che i sistemi sono rilassati. Conseguentemente la VDPR può essere considerata come un'equazione di stato poiché la velocità di dispersione è data come funzione del potenziale locale, indipendente dal raggio. D'altra parte, poiché l'equazione considera le proprietà globali, date dalla differenza tra il potenziale locale centrale e quello esterno, significa che le interazioni tra le particelle sono piccole e non vi è un significativo scambio di energia. Di conseguenza, la dispersione di velocità radiale deve dipendere dalle proprietà globali.

**Profili asintotici** Nella VDPR si ha il fattore  $\left(\frac{\Phi}{\Phi_{out}}\right)^k$  che risulta dominante al centro dell'alone mentre  $(\Phi_{out} - \Phi)$  nelle regioni esterne.

Consideriamo il comportamento asintotico dei profili a piccoli raggi,  $r \ll r_s$  e a grandi raggi,  $r \gg r_s$ .

Nelle regioni esterne la dispersione, come detto, può essere approssimata da  $\sigma_r^2 |_{r \gg r_s} = a(\Phi_{out} - \Phi(r))$ .

L'equazione di Jeans permette di mettere in relazione il fattore  $a$  alla pendenza del profilo di densità.

Assumendo una distribuzione isotropa, sostituendo la dispersione radiale all'equazione di Jeans con il potenziale, integrandola si ottiene:

$$\rho(\Phi) |_{r \gg r_s} = c(\Phi_{out} - \Phi)^\gamma \quad (5.24)$$

ove  $\gamma = \frac{1-a}{a}$ .

Poiché sia  $(\Phi_{out} - \Phi)$  che la densità  $\rho$  decrescono in modo monotono l'esponente deve essere positivo.

Quindi, il fattore  $a$  deve essere in un intervallo compreso tra 0 e 1.

Anzi, si può ottenere un ulteriore limite di  $a$  considerando che una soluzione dell'equazione di Lane-Emden (Binney & Tremaine 1987) è una legge di potenza relativa al potenziale:

$$(\Phi_{out} - \Phi) \propto r^{-m} \quad (5.25)$$

ove  $m = \frac{2}{\gamma-1}$ .

Ne consegue, considerando l'equazione (5.96) che per ottenere una soluzione per un alone di massa finita, la pendenza della densità di profilo deve essere sufficientemente ripida,  $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ .

Si noti che per una pendenza asintotica del profilo di NFW risulta  $a = \frac{1}{4}$ .

Le simulazioni mostrano che le anisotropie della velocità di dispersione aumentano con il raggio fino a  $\beta \approx 0.3$  al raggio del viriale. Questa anisotropia influisce l'intervallo di  $a$ , infatti, integrando l'equazione di Jeans assumendo  $\beta$  costante si ottiene:

$$\rho(\Phi) |_{r \gg r_s} = c^*(\Phi_\infty - \Phi)^\gamma r^{-2\beta} \quad (5.26)$$

e inserendo quest'ultima equazione in Poisson si trovano le leggi di potenza soluzioni per il potenziale e la densità dalle quale si ricava che  $\frac{1}{4-2\beta} < a < \frac{1}{2}$ .

La pendenza del profilo centrale è ancora dibattuta a causa della mancanza di un'adeguata risoluzione.

Hoeft pertanto assume che la dispersione di velocità radiale a raggi piccoli è data da una legge di potenza rispetto al potenziale come segue:

$$\sigma_r^2 |_{r \ll r_s} = a \Phi^k \Phi_{out}^{1-k} \quad (5.27)$$

e, analogamente a prima, inserendo quest'ultima nell'equazione di Jeans e integrando si ottiene:

$$\rho(\Phi) |_{r \ll r_s} = \rho_0 \left( \frac{\Phi}{\Phi_{out}} \right)^{-k} \exp \left( - \frac{\left( \frac{\Phi}{\Phi_{out}} \right)^{1-k}}{a(1-k)} \right) \quad (5.28)$$

ove  $\rho_0$  è una costante indipendente dalla scala.

Per  $k > 1$  l'assunzione di una legge di potenza rispetto a  $r$  e  $\Phi$  risulta avere una singolarità come un profilo esponenziale, per cui risulta una massa infinita ad un raggio finito. Per evitare questo  $0 < k < 1$ , in questo modo si semplifica e si ha:

$$\rho(\Phi) |_{r \ll r_s} = \rho_0 \left( \frac{\Phi}{\Phi_{out}} \right)^{-k} \quad (5.29)$$

e inserendo  $\Phi \propto r^m$  nell'equazione di Poisson si possono determinare le costanti libere:

$$\Phi(r) |_{r \ll r_s} = \Phi_{out} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{2}{1+k}} \quad (5.30)$$

$$\rho(r) |_{r \ll r_s} = \rho_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-\frac{2k}{1+k}} \quad (5.31)$$

con:

$$r_0^2 = \frac{1}{2\pi G} \frac{3+k}{(1+k)^2} \frac{\Phi_{out}}{\rho_0} \quad (5.32)$$

I parametri liberi per le pendenze asintotiche centrali sono  $\Phi_{out}$  e  $\rho_0$ .

In conclusione, usando la VDPR, è possibile calcolare i profili di un dato alone se definito dai due parametri liberi.

In particolare, i profili sono ottenuti dall'integrazione dell'insieme delle ordinarie equazioni differenziali usando il metodo Runge-Kutta:

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi\rho(r)r^2 \quad (5.33)$$

$$c = G \frac{M}{r^2} \quad (5.34)$$

$$\frac{d\sigma_r^2}{dr} = a \frac{d\Phi}{dr} \left( \frac{\Phi}{\Phi_{out}} \right)^k \left\{ k \frac{\Phi_{out}}{\Phi} - k - 1 \right\} \quad (5.35)$$

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{\rho}{\sigma_r^2} \left\{ \frac{d\sigma_r^2}{dr} + \frac{d\sigma_r^2}{dr} + \frac{2\beta\sigma_r^2}{r} \right\} \quad (5.36)$$

I profili asintotici sono poi utilizzati per imprimere le condizioni iniziali.

Si è comparato, successivamente, i profili ottenuti in questo modo con quelli derivanti dalle simulazioni, osservando che il parametro  $\Phi_{out}$  deriva dall'approssimazione di VDPR,  $r_0$  viene scelto come secondo parametro libero, perché è strettamente collegato all'asse radiale, e può essere facilmente adattato dall'approssimazione della posizione del massimo nel profilo di dispersione  $\sigma_r^2(r)$ , inoltre, la velocità di dispersione si può assumere isotropa,  $\beta = 0$ . Dopo queste considerazioni il profilo di densità risultante approssima bene le simulazioni, le deviazioni avvengono solo nelle parti esterne dell'alone perché lì l'anisotropia ha una presenza considerevole.

L'anisotropia può essere ragionevolmente approssimata con  $\beta = \frac{\beta_0 \Phi}{\Phi_{out}}$  con  $\beta_0 \approx 0.27$ . Dopo l'integrazione questo porta ad avere un maggior accordo coi dati.

In definitiva, introducendo la VDPR si ha il vantaggio di poter restringere le pendenze asintotiche delle parti centrali sia del profilo di dispersione di velocità che del profilo di densità.

### 5.3 Momento angolare

L'origine della distribuzione di massa e del momento angolare nelle galassie a disco è ancora un problema aperto,

Il modello che costituisce l'archetipo è stato proposto da Eggen, Lynden-Bell e Sandage (1962) e suggerisce che il disco galattico si forma a seguito di un vasto e prolungato collasso gravitazionale. Mestel (1963) aggiunse l'assunzione che lo specifico momento angolare di ogni elemento di massa,  $j$ , venisse conservato durante il collasso e dimostrò che il profilo di massa finale della nube di disco può essere collegato alla iniziale distribuzione del momento angolare e della massa di gas. L'importante è che la massa cumulativa con un momento angolare specifico minore di un dato  $j$ ,  $M(< j)$ , venga preservata durante il collasso. Successivamente si è compreso che i profili di densità esponenziali osservati delle galassie a disco in moti circolari sono consistenti con la distribuzione del momento angolare di una ipotetica sfera uniforme in rotazione (Crampin & Hoyle 1964):

$$M(< j) = M_{tot} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{j}{j_{max}} \right)^{3/2} \right] \quad (5.37)$$

ove,  $j_{max} = \omega R^2$  con  $\omega$  velocità angolare,  $R$  raggio della sfera,  $M_{tot}$  la massa della sfera.

Considerando anche il contributo dell'alone di materia oscura si aggiunge l'assunzione che quest'ultima e il gas siano inizialmente distribuiti in modo tale che la distribuzione di  $j$  nel disco è pari a quella dell'alone.

In questo modo il raggio scala del disco,  $r_d$ , viene collegato al momento angolare dell'alone precedente al collasso,  $r_d \propto \lambda$  ove,  $\lambda \equiv \frac{J|E|^{1/2}}{GM^{5/2}}$  è un parametro adimensionale detto *spin* nel quale  $J$ ,  $E$ ,  $M$  sono rispettivamente il momento angolare totale, l'energia e la massa del sistema e  $G$  è la costante gravitazionale.

Si presume che il momento angolare sia stato acquisito dalla materia oscura, e dal gas, attraverso interazioni mareali con gli oggetti vicini.

Appena furono disponibili le prime simulazioni ad N-corpi si cercò di predire la struttura del momento angolare, in particolare, trovando valori medi di  $\lambda \sim 0.05$  e confermando anche che il momento angolare che gli aloni possiedono prima del collasso cresce linearmente con il tempo come previsto dalla teoria (White 1984).

In generale diversi studi sono in accordo con il fatto che le proprietà delle galassie osservate dipendano quasi esclusivamente dal parametro di spin dell'alone che ospita la galassia.

Grazie a simulazioni ad alta risoluzione si possono misurare i profili di  $j$  di un insieme di aloni stimando anche lo scatter intrinseco in queste distribuzioni, con l'obiettivo di apprendere maggiormente sull'origine delle galassie, dei profili di brillantezza superficiale e le proprietà del bulge.

Bullock (Bullock et al. 2001) utilizzando una simulazione ART<sup>5</sup> segue le traiettorie di  $256^3$  particelle in una cubo di lato comovente  $60h^{-1}Mpc$  partendo da  $z = 40$  ad oggi; seleziona solo gli aloni con massa compresa tra  $10^{12}h^{-1}M_{\odot}$  e  $10^{14}h^{-1}M_{\odot}$ .

Al primo step misura il parametro di spin globale di ogni alone.

Il momento angolare di un alone di  $N$  particelle è dato da:

$$\bar{J} = m_i \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \times \bar{v}_i \quad (5.38)$$

ove,  $\bar{r}_i$  e  $\bar{v}_i$  sono rispettivamente la posizione e la velocità dell' $i$ -esima particella rispetto al centro di massa dell'alone.

All'inizio dato il parametro di spin  $\lambda$ , il valore del momento angolare globale specifico  $\frac{J}{M}$  può essere determinato considerando l'energia che compare nella definizione di spin, tuttavia possono sorgere delle incertezze per via della dipendenza dall'ambiente, per questo si preferisce ridefinire il parametro di spin come segue:

$$\lambda' \equiv \frac{J}{\sqrt{2}MVR} \quad (5.39)$$

dato dal momento angolare  $J$  dentro una sfera di raggio  $R$ , massa  $M$  e velocità circolare dell'alone a dato  $R$  pari a  $V^2 = \frac{GM}{R}$ .

Il valore di questo parametro di spin ridotto è molto simile al valore originale in aloni ben descritti da una distribuzione NFW, in particolare si è trovata la relazione  $\lambda' \simeq \lambda f(c_v)^{-1/2}$  ove  $f(c_v) \simeq \frac{2}{3} + \left(\frac{c_v}{21.5}\right)^{0.7}$  che per valori tipici di concentrazione,  $c_v \sim 10$ , tende all'unità (Mo et al. 1998).

Dopo aver calcolato il momento angolare totale di ogni alone, si suddivide la sfera in diverse celle e si ricalcola il momento angolare specifico in ogni cella,  $j$ , proiettato lungo la direzione di  $z$  prescelta.

Si procede alla costruzione dei profili  $M(< j)$  di ogni alone considerando la massa cumulativa in ogni cella con momento angolare minore di  $j$ , e poichè quest'ultimo si riferisce ad una componente proiettata può assumere anche valori negativi, quando accade si rimuove la cella totalmente, nonostante

---

<sup>5</sup>Un algoritmo che permette una buona risoluzione per la forza e la massa in gioco è stato presentato da Kravtsov (Kravtsov et al. 1997) viene detto ART (Adaptive Refinement Tree) e implementa successivi raffinamenti della griglia spaziale a diversi time steps in ambienti ad alta densità.

gli autori abbiano riscontrato limitazioni nella risoluzione di massa hanno proposto un profilo del momento angolare specifico degli aloni dipendente da due parametri:

$$M(< j) = M_V \frac{\mu j}{j_0 + j} \quad (5.40)$$

ove, la coppia di parametri  $\mu > 1$  e  $j_0$  definisce totalmente la distribuzione del momento angolare dell'alone.

Il profilo ha un massimo  $j_{max} = \frac{j_0}{\mu-1}$  che ha una legge di potenza per  $j \lesssim j_0$  mentre risulta più piatta per  $j \gtrsim j_0$ .

La quantità  $\mu$ , invece, per valori molto maggiori dell'unità fa sì che  $M(< j)$  sia una legge di potenza mentre per valori vicini all'unità il cambio di pendenza della legge di potenza è più accentuato.

Il parametro di spin globale è in relazione con questi due parametri come segue:

$$j_0 b(\mu) = \sqrt{2} V_v R_v \lambda' \quad (5.41)$$

ove,  $b(\mu) \equiv \int_0^1 \frac{m}{\mu-m} dm = -\mu \ln(1 - \mu^{-1}) - 1$ .

Ora, risulta interessante sapere come il momento angolare si distribuisce spazialmente nell'alone.

Gli autori trovano che la maggior parte degli aloni i vettori dei momenti angolari sono ben allineati attraverso il loro volume, tuttavia, almeno il 10% mostra un disallineamento che può essere interessante investigare in modo più approfondito, ad esempio, si nota che un valore basso di  $\mu$  indica che la direzione di  $J$  gioca un ruolo importante nel determinare la forma del profilo di  $M(< j)$ .

In generale si evidenzia che la distribuzione spaziale del momento angolare tende ad avere una simmetria cilindrica piuttosto che sferica, e per spiegarne l'origine sono stati proposti due modelli che non si escludono a vicenda, anzi potrebbero coesistere.

Il primo si basa applicando la versione della teoria lineare sulle interazioni mareali proposta da Porciani (Porciani & Dekel, 2000) alla storia di accrescimento in massa spiegata da Press-schechter.

Il secondo, invece, si basa su un processo non lineare del trasferimento del momento angolare dei satelliti che orbitano attorno all'alone.

Ognuno di questi processi sembra ben riprodurre i profili di  $j$  osservati negli aloni simulati e questo può essere pensato come un punto di partenza per una futura comprensione migliore dell'origine della struttura del momento angolare.

In conclusione, si accenna alle implicazioni che il profilo universale  $M(< j)$  prima proposto può avere nel contesto del modello che funge da archetipo nella formazione dei dischi galattici, ovvero, quello che prevede un accrescimento barionico adiabatico supportato dalla rotazione del disco che conserva il momento angolare in ogni elemento di massa.

Si è trovato che i profili di densità superficiale, che variano come una funzione dipendente sia da  $\mu$  che da  $\lambda'$ , in particolare, si discostano notevolmente dalla forma di un disco esponenziale per valori grandi di  $\mu$ .

Ovvero, i profili superficiali risultano più concentrati a piccoli raggi.

Poiché i profili di luminosità osservati dei dischi sono strettamente esponenziali si comprende che la formazione dei dischi è più complessa di come è stata fino ad ora semplificata, per esempio, una deviazione generale dall'esponenziale a piccoli raggi può essere compresa inserendo un meccanismo di trasporto viscoso (Lin & Pringle 1987).



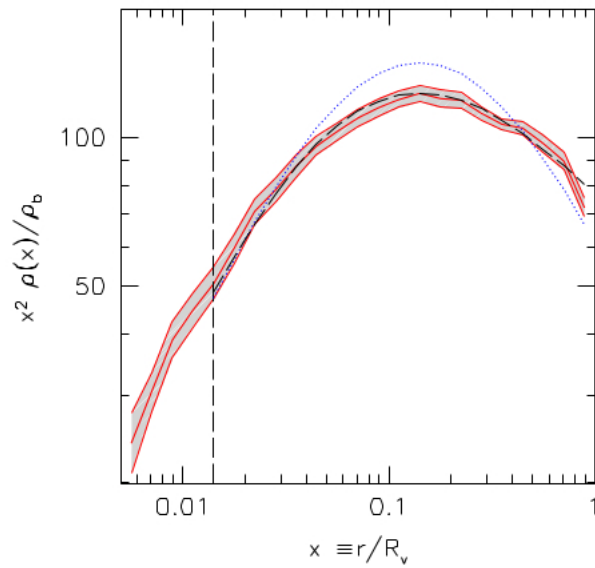


Figura 5.1: La linea continua con gli errori nella zona ombreggiata rappresenta i dati della simulazione, la linea tratteggiata rappresenta il fit proposto da Rasia et al., la linea punteggiata è il profilo NFW. [Immagine da Rasia et al. 2004 pag. 6]

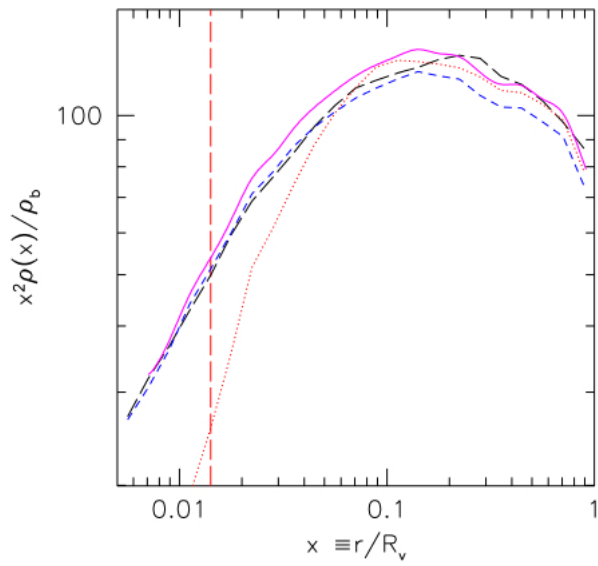


Figura 5.2: Profili di densità radiale della DM per un sottoinsieme di 5 ammassi isolati. La linea continua rappresenta la media. La linea tratteggiata è il profilo di Rasia et al. La linea punteggiata è NFW. [Immagine da Rasia et al. 2004 pag. 14]

# Bibliografia

Edward R. Harrison, 1970  
Yakov Borisovich Zel'dovich, 1972  
Zel'dovich, 1970  
Abell, 1957  
Bower et al. 1992  
Cooray et al. 1998  
Zirbel, 1996  
Gunn, Gott, 1972  
Filmore, Golderich, 1984  
Bertschinger, 1985  
Hoffmann, Shaham, 1985  
Hoffman, 1998  
Frenk et al. 1985  
Efstathiou et al. 1988  
Moore et al. 1998  
Einasto, Haud, 1989  
Cavaliere, Fusco-Femiano, 1978  
Bartelman, 1996  
Ghigna et al. 1998  
Sarazin, 1986  
Binney, Tremaine, 1987  
Thomas et al. 1998  
Bell, Sandage, 1962  
Mestel, 1963  
Crampin, Hoyle 1964  
White, 1984  
Mo et al. 1998  
Kravtsov et al 1997  
Lyn, Pringle 1987  
Rasia et al. 2004  
Porciani, Deckel, 2000

## BIBLIOGRAFIA

---

Bullock et al. 2001  
Hoeft et al. 2003  
Gao et al. 2004  
Nagai, Kratsov, 2005  
Diemand et al. 2004  
Navarro et al. 2004  
Eliasdottir, Moller, 2007  
Biviano, Poggianti, 2009  
Weinberg, Kratz, 2002  
El-Zant et al 2001  
Jing, Suto, 2000  
Zanichelli et al. 2011  
Bond e Myers, 1996  
Sheth, Mo e Tormen 2001  
Press W.H., Schechter P., 1974  
Springel, Yoshida e White, 2001  
Springel, 2005  
Baldi, 2012  
Navarro, Frenk e White, 1995