

**ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA**

---

**FACOLTÀ DI INGEGNERIA**

**CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE**

*DISTART*

**TESI DI LAUREA**

in

Progetto in Zona Sismica LS

**RISPOSTA SISMICA TORSIONALE DI EDIFICI MULTIPIANO  
IRREGOLARI IN PIANTA**

CANDIDATO  
Gabriele Bertolani

RELATORE:  
Chiar.mo Prof.  
Tomaso Trombetti

CORRELATORI  
Dott.Ing. Stefano Silvestri  
Dott.Ing. Giada Gasparini

Anno Accademico 2008/2009

Sessione II



# Indice

INTRODUZIONE.....	I
-------------------	---

## Capitolo 1

### Analisi della risposta torsionale di strutture elastiche monopiano - Il metodo

<b>ALPHA per le strutture Single Storey .....</b>	<b>1</b>
1.1 L'equazione del moto .....	3
1.1.1 <i>Le grandezze che caratterizzano il sistema.....</i>	<i>4</i>
1.1.2 <i>Determinazione dell'equazione mediante il metodo diretto .....</i>	<i>6</i>
1.1.2.1 Forze d'inerzia e matrice delle masse .....	6
1.1.2.2 Forze di richiamo elastico e matrice di rigidità .....	8
1.1.2.3 L'espressione esplicita dell'equazione .....	10
1.2 Considerazioni sul parametro $\gamma$ .....	11
1.2.1 <i>Relazione tra <math>\gamma</math> e <math>\Omega_g</math> .....</i>	<i>12</i>
1.3 Le auto soluzioni del problema .....	14
1.4 Risposta in oscillazioni libere .....	16
1.5 Il parametro ALPHA .....	20
1.5.1 <i>Il parametro ALPHA per oscillazioni libere non smorzate .....</i>	<i>21</i>
1.6 Rapporto tra massima rotazione e massimo spostamento longitudinale in vibrazioni forzate .....	22
1.7 Il metodo ALPHA.....	23

## Capitolo 2

<b>Valori tipici dei parametri <math>e</math> ed <math>\Omega_g</math> in casi reali.....</b>	<b>25</b>
2.1 Struttura di base .....	25
2.2 Elementi resistenti.....	27
2.2.1 Setto Singolo.....	28
2.2.1.1 Setto ad L/2 dal baricentro.....	28
2.2.1.2 Setto ad L/3 dal baricentro.....	34
2.2.1.3 Setto ad L/6 dal baricentro.....	35
2.2.1.3 Setto in corrispondenza del baricentro .....	36
2.2.1.4 Riassunto .....	37
2.2.2 Doppio Setto .....	37
2.2.2.1 Setto ad L/2 dal baricentro.....	39
2.2.2.2 Setto ad L/3 dal baricentro.....	39
2.2.2.3 Setto ad L/6 dal baricentro.....	41
2.2.2.4 Setto in corrispondenza del baricentro .....	42

2.2.2.5 Riassunto .....	43
2.2.3 Vano a C.....	43
2.2.3.1 Vano ad L/2 dal baricentro .....	45
2.2.3.2 Vano ad L/3 dal baricentro .....	46
2.2.3.3 Vano ad L/6 dal baricentro .....	47
2.2.3.4 Vano in corrispondenza del baricentro .....	48
2.2.3.4 Riassunto .....	48
2.2.4 Vano a C con setto .....	49
2.2.4.1 Vano ad L/2 dal baricentro .....	50
2.2.4.2 Vano ad L/3 dal baricentro .....	51
2.2.4.3 Vano ad L/6 dal baricentro .....	52
2.2.4.3 Vano in corrispondenza del baricentro .....	53
2.2.4.4 Riassunto .....	53
2.2.5 Doppio vano a C.....	54
2.2.5.1 Vano ad L/2 dal baricentro .....	55
2.2.5.2 Vano ad L/3 dal baricentro .....	56
2.2.5.3 Vano ad L/6 dal baricentro .....	57
2.2.5.4 Vano in corrispondenza del baricentro .....	58
2.2.5.4 Riassunto .....	58
2.2.6 Vano quadrato .....	59
2.2.6.1 Vano ad $\frac{L}{2} + (s + b)/2$ dal baricentro .....	61
2.2.6.2 Vano ad L/2 dal baricentro .....	62
2.2.6.3 Vano ad L/3 dal baricentro .....	63
2.2.6.4 Vano ad L/6 dal baricentro .....	64
2.2.6.5 Vano in corrispondenza del baricentro .....	65
2.2.6.6 Riassunto .....	65
2.2.7 Vano Quadrato con Setto .....	66
2.2.7.1 Vano ad $\frac{L}{2} + (s + b)/2$ dal baricentro .....	67
2.2.7.2 Vano ad L/2 dal baricentro .....	68
2.2.7.3 Vano ad L/3 dal baricentro .....	69
2.2.7.4 Vano ad L/6 dal baricentro .....	70
2.2.7.5 Vano in corrispondenza del baricentro .....	71
2.2.7.6 Riassunto .....	71
2.2.8 Doppio vano quadrato .....	72
2.2.8.1 Vano ad $\frac{L}{2} + (s + b)/2$ dal baricentro .....	73
2.2.8.2 Vano ad L/2 dal baricentro .....	74
2.2.8.3 Vano ad L/3 dal baricentro .....	75
2.2.8.4 Vano ad L/6 dal baricentro .....	76
2.2.8.5 Vano in corrispondenza del baricentro .....	77
2.2.8.6 Riassunto .....	77
2.3 Analisi di strutture reali.....	78
2.4 Conclusioni .....	82



## Capitolo 3

<b>Strutture Multipiano: Problematiche generali.....</b>	<b>85</b>
3.1 Strutture a due piani .....	86
3.1.1 Forze d'inerzia e matrice delle masse .....	87
3.1.2 Forze di richiamo elastico e matrice di rigidezza.....	88
3.2 Strutture a tre piani.....	98
3.3 Strutture a sei piani .....	99
3.3 Considerazioni finali .....	100

## Capitolo 4

<b>Impostazione delle analisi per le strutture multipiano .....</b>	<b>101</b>
4.1 Il parametro $\psi_{ij}$ .....	102
4.1.1 Introduzione dello smorzamento.....	103
4.1.1.1 Smorzamento alla Rayleigh.....	103
4.2 I parametri strutturali considerati nelle simulazioni.....	105
4.2.1 Le strutture multipiano considerate.....	105
4.3 Input Sismici .....	106
4.4 Impostazione delle singole analisi .....	109

## Capitolo 5

<b>Struttura a due piani .....</b>	<b>111</b>
5.1 Caso 1: Piani identici .....	112
5.1.1 Primo Piano.....	112
5.1.1.1 Caratteristiche del primo piano .....	113
5.1.1.2 Caratteristiche totali .....	114
5.1.1.3 Riassunto.....	115
5.1.2 Secondo Piano .....	115
5.1.2.1 Caratteristiche del secondo piano.....	115
5.1.2.2 Caratteristiche totali .....	117
5.1.2.3 Riassunto.....	118
5.1.3 Riassunto.....	119
5.2 Caso 2: Rigidezza del secondo piano dimezzata.....	120
5.2.1 Primo Piano.....	120
5.2.1.1 Caratteristiche del primo piano .....	120
5.2.1.2 Caratteristiche totali .....	121
5.2.1.3 Rigidezza media .....	122
5.2.1.4 Riassunto.....	123
5.2.2 Secondo Piano .....	124
5.2.2.1 Caratteristiche del secondo piano.....	124
5.2.2.1 Caratteristiche totali .....	125

5.2.1.3	Rigidezza media .....	127
5.2.2.4	Riassunto .....	128
5.2.3	<i>Riassunto</i> .....	129
5.3	Caso 3: Rigidezza del secondo piano raddoppiata .....	130
5.3.1	<i>Primo Piano</i> .....	130
5.3.1.1	Caratteristiche del primo piano.....	130
5.3.1.2	Caratteristiche totali.....	131
5.3.1.3	Rigidezza media .....	132
5.3.1.4	Riassunto .....	133
5.3.2	<i>Secondo piano</i> .....	134
5.3.2.1	Caratteristiche del secondo piano .....	134
5.3.2.2	Caratteristiche totali.....	135
5.3.2.3	Rigidezza media .....	137
5.3.2.4	Riassunto .....	138
5.3.3	<i>Riassunto</i> .....	138
5.4	Caso 4: Massa del secondo piano dimezzata.....	139
5.4.1	<i>Primo Piano</i> .....	139
5.4.1.1	Caratteristiche del primo piano.....	139
5.4.1.2	Caratteristiche totali.....	140
5.4.1.3	Riassunto .....	141
5.4.2	<i>Secondo piano</i> .....	142
5.4.2.1	Caratteristiche del secondo piano .....	142
5.4.2.2	Caratteristiche totali.....	143
5.4.2.3	Riassunto .....	144
5.4.3	<i>Riassunto</i> .....	145
5.5	Caso 5: Massa del secondo piano raddoppiata.....	145
5.5.1	<i>Primo Piano</i> .....	145
5.5.1.1	Caratteristiche del primo piano.....	146
5.5.1.2	Caratteristiche totali.....	147
5.5.1.3	Riassunto .....	148
5.5.2	<i>Secondo piano</i> .....	149
5.5.2.1	Caratteristiche del secondo piano .....	149
5.5.2.2	Caratteristiche totali.....	150
5.5.2.3	Riassunto .....	151
5.5.3	<i>Riassunto</i> .....	152
5.6	Caso 6: Eccentricità del secondo piano raddoppiata.....	152
5.6.1	<i>Primo Piano</i> .....	153
5.6.1.1	Caratteristiche del primo piano.....	153
5.6.1.2	Caratteristiche totali con $e = e_1$ .....	154
5.6.1.3	Caratteristiche totali con $e = e_2$ .....	155
5.6.1.4	Caratteristiche totali con $e = e_{medio}$ .....	156
5.6.1.5	Riassunto .....	157
5.6.2	<i>Secondo piano</i> .....	158
5.6.2.1	Caratteristiche del secondo piano .....	158

5.6.2.2	Caratteristiche del secondo piano con $e = e_1$ .....	159
5.6.2.3	Caratteristiche del secondo piano con $e = e_{medio}$ .....	160
5.6.2.4	Caratteristiche totali con $e = e_1$ .....	161
5.6.2.5	Caratteristiche totali con $e = e_2$ .....	162
5.6.2.6	Caratteristiche totali con $e = e_{medio}$ .....	163
5.6.2.7	Riassunto .....	164
5.6.3	<i>Riassunto</i> .....	165
5.7	Caso 7: Parametro $\Omega_{\vartheta}$ del secondo piano dimezzato .....	165
5.7.1	<i>Primo Piano</i> .....	165
5.7.1.1	Caratteristiche del primo piano .....	166
5.7.1.2	Caratteristiche del primo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta 2}$ .....	167
5.7.1.3	Caratteristiche del primo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta medio}$ .....	168
5.7.1.4	Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta 1}$ .....	169
5.7.1.5	Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta 2}$ .....	170
5.7.1.6	Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta medio}$ .....	171
5.7.1.7	Riassunto .....	172
5.7.2	<i>Secondo piano</i> .....	173
5.7.2.1	Caratteristiche del secondo piano .....	173
5.7.2.2	Caratteristiche del secondo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta 1}$ .....	174
5.7.2.3	Caratteristiche del secondo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta medio}$ .....	175
5.7.2.4	Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta 1}$ .....	176
5.7.2.5	Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta 2}$ .....	177
5.7.2.6	Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta medio}$ .....	178
5.7.2.7	Riassunto .....	179
5.7.3	<i>Riassunto</i> .....	180
5.8	Caso 8: Parametro $\Omega_{\vartheta}$ del secondo piano raddoppiato.....	180
5.8.1	<i>Primo Piano</i> .....	180
5.8.1.1	Caratteristiche del primo piano .....	181
5.8.1.2	Caratteristiche del primo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta 2}$ .....	182
5.8.1.3	Caratteristiche del primo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta medio}$ .....	183
5.8.1.4	Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta 1}$ .....	184
5.8.1.5	Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta 2}$ .....	185
5.8.1.6	Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta medio}$ .....	186
5.8.1.7	Riassunto .....	187
5.8.2	<i>Secondo piano</i> .....	188
5.8.2.1	Caratteristiche del secondo piano .....	188
5.8.2.2	Caratteristiche del secondo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta 1}$ .....	189
5.8.2.3	Caratteristiche del secondo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta medio}$ .....	190
5.8.2.4	Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta 1}$ .....	191
5.8.2.5	Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta 2}$ .....	192
5.8.2.6	Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta medio}$ .....	193
5.8.2.7	Riassunto .....	194
5.8.3	<i>Riassunto</i> .....	195
5.9	Riassunto dei risultati ottenuti.....	195

5.9.1 Piani identici o variazione di massa e rigidezza.....	196
5.9.2 Variazione di eccentricità .....	197
5.9.3 Variazione di $\Omega_{\vartheta}$ .....	197
5.9.3.1 $\Omega_{\vartheta,02} \leq \Omega_{\vartheta,01}$ .....	197
5.9.3.2 $\Omega_{\vartheta,01} \leq \Omega_{\vartheta,02}$ .....	198

## Capitolo 6

<b>Struttura a tre piani.....</b>	<b>199</b>
6.1 Caso 1: Piani identici.....	200
6.1.1 <i>Primo Piano</i> .....	200
6.1.1.1 Caratteristiche del primo piano.....	201
6.1.1.2 Caratteristiche totali.....	202
6.1.1.3 Riassunto .....	203
6.1.2 <i>Secondo Piano</i> .....	203
6.1.2.1 Caratteristiche del secondo piano .....	203
6.1.2.2 Caratteristiche totali.....	204
6.1.2.3 Caratteristiche del secondo e del terzo piano.....	205
6.1.2.4 Riassunto .....	206
6.1.3 <i>Terzo Piano</i> .....	208
6.1.3.1 Caratteristiche del terzo piano .....	208
6.1.3.2 Caratteristiche di rigidezza totali .....	209
6.1.3.3 Caratteristiche di massa totali .....	210
6.1.3.4 Caratteristiche totali.....	211
6.1.3.5 Riassunto .....	212
6.1.4 <i>Riassunto</i> .....	213
6.2 Caso 2: Diminuzione di rigidezza .....	213
6.2.1 <i>Primo Piano</i> .....	214
6.2.1.1 Caratteristiche del primo piano.....	214
6.2.1.2 Caratteristiche totali.....	215
6.2.1.3 Riassunto .....	216
6.2.2 <i>Secondo Piano</i> .....	217
6.2.2.1 Caratteristiche del secondo piano .....	217
6.2.2.2 Caratteristiche di rigidezza del secondo e terzo piano.....	218
6.2.2.3 Caratteristiche di rigidezza medie .....	219
6.2.2.4 Caratteristiche di rigidezza totali.....	220
6.2.2.5 Caratteristiche di massa e rigidezza del secondo e terzo piano .....	221
6.2.2.6 Caratteristiche di massa e del secondo e terzo piano e rigidezza totale.....	222
6.2.2.7 Caratteristiche totali.....	223
6.2.2.8 Riassunto .....	224
6.2.3 <i>Terzo Piano</i> .....	225
6.2.3.1 Caratteristiche del terzo piano .....	226
6.2.3.2 Caratteristiche di rigidezza del secondo e terzo piano.....	227
6.2.3.3 Caratteristiche di rigidezza medie .....	228
6.2.3.4 Caratteristiche di rigidezza totali.....	229

6.2.3.5	Caratteristiche di massa e rigidezza del secondo e terzo piano .....	230
6.2.3.6	Caratteristiche di massa e del secondo e terzo piano e rigidezza totale.....	231
6.2.3.7	Caratteristiche totali .....	232
6.2.3.8	Riassunto .....	233
6.2.3	<i>Riassunto</i> .....	234
6.3	Caso 3: Aumento di rigidezza.....	234
6.3.1	<i>Primo Piano</i> .....	235
6.3.1.1	Caratteristiche del primo piano .....	235
6.3.1.2	Caratteristiche totali .....	236
6.3.1.3	Riassunto .....	237
6.3.2	<i>Secondo piano</i> .....	238
6.3.2.1	Caratteristiche del secondo piano.....	238
6.3.2.2	Caratteristiche di rigidezza del secondo e terzo piano.....	239
6.3.2.3	Caratteristiche di rigidezza totali.....	240
6.3.2.4	Caratteristiche di massa e rigidezza del secondo e terzo piano .....	241
6.3.2.5	Caratteristiche di massa del secondo e terzo piano e rigidezza totale .....	242
6.3.2.6	Caratteristiche totali .....	243
6.3.2.7	Riassunto .....	244
6.3.3	<i>Terzo piano</i> .....	245
6.3.3.1	Caratteristiche del terzo piano .....	245
6.3.3.2	Caratteristiche di rigidezza del secondo e terzo piano.....	246
6.3.3.3	Caratteristiche di rigidezza totali.....	247
6.3.3.4	Caratteristiche di massa e rigidezza del secondo e terzo piano .....	248
6.3.3.5	Caratteristiche di massa e del secondo e terzo piano e rigidezza totale.....	249
6.3.3.6	Caratteristiche totali .....	250
6.3.3.7	Riassunto .....	251
6.3.4	<i>Riassunto</i> .....	252
6.4	Caso 4: Diminuzione di massa.....	252
6.4.1	<i>Primo Piano</i> .....	253
6.4.1.1	Caratteristiche del primo piano .....	253
6.4.1.2	Caratteristiche totali .....	254
6.4.1.3	Riassunto .....	255
6.4.2	<i>Secondo piano</i> .....	256
6.4.2.1	Caratteristiche del secondo piano.....	256
6.4.2.2	Caratteristiche di rigidezza del secondo e terzo piano.....	257
6.4.2.3	Caratteristiche di rigidezza totali.....	258
6.4.2.4	Caratteristiche di massa e rigidezza del secondo e terzo piano .....	259
6.4.2.5	Caratteristiche di massa del secondo e terzo piano e rigidezza totale .....	260
6.4.2.6	Caratteristiche totali .....	261
6.4.2.7	Riassunto .....	262
6.4.3	<i>Terzo piano</i> .....	263
6.4.3.1	Caratteristiche del terzo piano .....	263
6.4.3.2	Caratteristiche di rigidezza del secondo e terzo piano.....	264
6.4.3.3	Caratteristiche di rigidezza totali.....	265
6.4.3.4	Caratteristiche di massa e rigidezza del secondo e terzo piano .....	266

6.4.3.5	Caratteristiche di massa e del secondo e terzo piano e rigidezza totale.....	267
6.4.3.6	Caratteristiche totali.....	268
6.4.3.7	Riassunto .....	269
6.4.4	<i>Riassunto</i> .....	270
6.5	Caso 5: Aumento di massa.....	270
6.5.1	<i>Primo Piano</i> .....	271
6.5.1.1	Caratteristiche del primo piano.....	271
6.5.1.2	Caratteristiche totali.....	272
6.5.1.3	Riassunto .....	273
6.5.2	<i>Secondo piano</i> .....	274
6.5.2.1	Caratteristiche del secondo piano .....	274
6.5.2.2	Caratteristiche di rigidezza del secondo e terzo piano.....	275
6.5.2.3	Caratteristiche di rigidezza totali.....	276
6.5.2.4	Caratteristiche di massa e rigidezza del secondo e terzo piano .....	277
6.5.2.5	Caratteristiche di massa del secondo e terzo piano e rigidezza totale.....	278
6.5.2.6	Caratteristiche totali.....	279
6.5.2.7	Riassunto .....	280
6.5.3	<i>Terzo piano</i> .....	281
6.5.3.1	Caratteristiche del terzo piano .....	281
6.5.3.2	Caratteristiche di rigidezza del secondo e terzo piano.....	282
6.5.3.3	Caratteristiche di rigidezza totali.....	283
6.5.3.4	Caratteristiche di massa e rigidezza del secondo e terzo piano .....	284
6.5.3.5	Caratteristiche di massa e del secondo e terzo piano e rigidezza totale.....	285
6.5.3.6	Caratteristiche totali.....	286
6.5.3.7	Riassunto .....	287
6.5.4	<i>Riassunto</i> .....	288
6.6	Caso 6: Diminuzione del parametro $\Omega_{\vartheta}$ .....	288
6.6.1	<i>Primo Piano</i> .....	289
6.6.1.1	Caratteristiche del primo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$ .....	289
6.6.1.2	Caratteristiche del primo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,2}$ .....	290
6.6.1.3	Caratteristiche del primo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,3}$ .....	291
6.6.1.4	Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$ .....	292
6.6.1.5	Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,2}$ .....	293
6.6.1.6	Caratteristiche del primo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,3}$ .....	294
6.6.1.7	Riassunto .....	295
6.6.2	<i>Secondo piano</i> .....	296
6.6.2.1	Caratteristiche del secondo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$ .....	296
6.6.2.2	Caratteristiche del secondo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,2}$ .....	297
6.6.2.3	Caratteristiche del secondo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,3}$ .....	298
6.6.2.4	Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$ .....	299
6.6.2.5	Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,2}$ .....	300
6.6.2.6	Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,3}$ .....	301
6.6.2.7	Riassunto .....	302
6.6.3	<i>Terzo piano</i> .....	303

6.6.3.1	Caratteristiche del terzo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$	303
6.6.3.2	Caratteristiche del terzo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,2}$	304
6.6.3.3	Caratteristiche del terzo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,3}$	305
6.6.3.4	Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$	306
6.6.3.5	Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,2}$	307
6.6.3.6	Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,3}$	308
6.6.3.7	Riassunto	309
6.6.4	<i>Riassunto</i>	310
6.7	Caso 7: Aumento del parametro $\Omega_{\vartheta}$	310
6.7.1	<i>Primo Piano</i>	311
6.7.1.1	Caratteristiche del primo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$	311
6.7.1.2	Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$	312
6.7.1.3	Riassunto	313
6.7.2	<i>Secondo piano</i>	314
6.7.2.1	Caratteristiche del secondo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$	314
6.7.2.2	Caratteristiche di massa del secondo e terzo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$	315
6.7.2.3	Caratteristiche di massa e rigidezza del secondo e terzo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$	316
6.7.2.4	Caratteristiche di massa totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$	317
6.7.2.5	Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$	318
6.7.2.6	Riassunto	319
6.7.3	<i>Terzo piano</i>	320
6.7.3.1	Caratteristiche del terzo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$	320
6.7.3.2	Caratteristiche di massa totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$	321
6.7.3.3	Caratteristiche di massa del secondo e terzo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$	322
6.7.3.4	Caratteristiche di massa e rigidezza del secondo e terzo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$	323
6.7.3.5	Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$	324
6.7.3.6	Riassunto	325
6.7.4	<i>Riassunto</i>	326
6.8	Riassunto dei risultati ottenuti	326
6.8.1	<i>Piani identici o variazione di massa e rigidezza</i>	327
6.8.2	<i>Variazione di <math>\Omega_{\vartheta}</math></i>	328
6.8.2.1	$\Omega_{\vartheta,03} \leq \Omega_{\vartheta,02} \leq \Omega_{\vartheta,01}$	328
6.8.2.2	$\Omega_{\vartheta,01} \leq \Omega_{\vartheta,02} \leq \Omega_{\vartheta,03}$	329

## Capitolo 7

<b>Struttura a sei piani</b>	<b>331</b>
7.1 Caso 1: Piani identici	332
7.1.1 <i>Primo Piano</i>	332
7.1.1.1 Caratteristiche di massa del primo piano	333
7.1.1.2 Caratteristiche totali	334
7.1.1.3 Riassunto	335

7.1.2	<i>Secondo Piano</i> .....	335
7.1.2.1	Caratteristiche di massa del secondo piano .....	335
7.1.2.2	Caratteristiche totali.....	336
7.1.2.3	Riassunto .....	337
7.1.3	<i>Terzo Piano</i> .....	339
7.1.3.1	Caratteristiche di massa del terzo piano .....	339
7.1.3.2	Caratteristiche totali.....	340
7.1.3.3	Riassunto .....	341
7.1.4	<i>Quarto Piano</i> .....	342
7.1.4.1	Caratteristiche di massa del quarto piano .....	342
7.1.4.2	Caratteristiche totali.....	343
7.1.4.3	Riassunto .....	344
7.1.5	<i>Quinto Piano</i> .....	345
7.1.5.1	Caratteristiche di massa del quinto piano .....	345
7.1.5.2	Caratteristiche totali.....	346
7.1.5.3	Riassunto .....	347
7.1.6	<i>Sesto Piano</i> .....	348
7.1.6.1	Caratteristiche di massa del sesto piano .....	348
7.1.6.2	Caratteristiche totali.....	349
7.1.6.3	Riassunto .....	350
7.1.7	<i>Riassunto</i> .....	351
7.2	Caso 2: Diminuzione di rigidezza .....	352
7.2.1	<i>Primo Piano</i> .....	352
7.2.1.1	Caratteristiche di rigidezza medie .....	352
7.2.1.2	Caratteristiche totali.....	353
7.2.1.3	Riassunto .....	354
7.2.2	<i>Secondo Piano</i> .....	355
7.2.2.1	Caratteristiche di rigidezza medie .....	355
7.2.2.2	Caratteristiche totali.....	356
7.2.2.3	Riassunto .....	357
7.2.3	<i>Terzo Piano</i> .....	358
7.2.3.1	Caratteristiche di rigidezza medie .....	358
7.2.3.2	Caratteristiche totali.....	359
7.2.3.3	Riassunto .....	360
7.2.4	<i>Quarto Piano</i> .....	361
7.2.4.1	Caratteristiche di rigidezza medie .....	361
7.2.4.2	Caratteristiche totali.....	362
7.2.4.3	Riassunto .....	363
7.2.5	<i>Quinto Piano</i> .....	364
7.2.5.1	Caratteristiche di rigidezza medie .....	364
7.2.5.2	Caratteristiche totali.....	365
7.2.5.3	Riassunto .....	366
7.2.6	<i>Sesto Piano</i> .....	367
7.2.6.1	Caratteristiche di rigidezza medie .....	367
7.2.6.2	Caratteristiche totali.....	368



7.1.6.3 Riassunto .....	369
6.2.7 Riassunto.....	370
7.3 Riassunto dei risultati ottenuti.....	371
7.3.1 Piani identici o diminuzione di rigidezza.....	371

## Capitolo 8

<b>Considerazioni conclusive .....</b>	<b>373</b>
8.1 Analisi Condotte .....	373
8.2 Risultati ottenuti.....	374
8.2.1 <i>Struttura con piani identici</i> .....	375
8.2.1.1 Struttura a due piani .....	376
8.2.1.2 Struttura a tre piani .....	377
8.2.1.3 Struttura a sei piani.....	380
8.2.2 <i>Struttura con variazione di rigidezza</i> .....	386
8.2.2.1 Struttura a due piani .....	387
8.2.2.1.1 <i>Struttura con diminuzione di rigidezza al secondo piano</i> .....	387
8.2.2.1.2 <i>Struttura con aumento di rigidezza al secondo piano</i> .....	389
8.2.2.2 Struttura a tre piani .....	391
8.2.2.2.1 <i>Struttura con diminuzione di rigidezza al secondo e terzo piano</i> .....	391
8.2.2.2.2 <i>Struttura con aumento di rigidezza al secondo e terzo piano</i> .....	394
8.2.2.3 Struttura a sei piani.....	397
8.2.3 <i>Struttura con variazione di massa</i> .....	402
8.2.3.1 Struttura a due piani .....	403
8.2.3.1.1 <i>Struttura con diminuzione di massa al secondo piano</i> .....	403
8.2.3.1.2 <i>Struttura con aumento di massa al secondo piano</i> .....	405
8.2.3.2 Struttura a tre piani .....	407
8.2.3.2.1 <i>Struttura con diminuzione di massa al secondo e terzo piano</i> .....	407
8.2.3.2.2 <i>Struttura con aumento di massa al secondo e terzo piano</i> .....	410
8.2.4 <i>Struttura con variazione di eccentricità</i> .....	412
8.2.5 <i>Struttura con variazione di <math>\Omega_{\vartheta}</math></i> .....	414
8.2.5.1 Struttura a due piani .....	415
8.2.5.1.1 <i>Struttura con diminuzione di <math>\Omega_{\vartheta}</math> al secondo piano</i> .....	415
8.2.5.1.2 <i>Struttura con aumento di <math>\Omega_{\vartheta}</math> al secondo piano</i> .....	416
8.2.5.2 Struttura a tre piani .....	418
8.2.5.2.1 <i>Struttura con diminuzione di <math>\Omega_{\vartheta}</math> al secondo e terzo piano</i> .....	418
8.2.5.2.2 <i>Struttura con aumento di <math>\Omega_{\vartheta}</math> al secondo e terzo piano</i> .....	421
8.2.6 <i>Riassunto dei risultati ottenuti</i> .....	424
8.3 Sviluppi futuri .....	427
<b>Bibliografia .....</b>	<b>429</b>

## INTRODUZIONE

Durante un evento sismico, una struttura è sottoposta a delle accelerazioni che generano degli spostamenti della stessa lungo la direzione di sollecitazione del sisma. Nel caso ideale di strutture aventi il baricentro delle masse ( $C_M$ ) coincidente con quello delle rigidezze ( $C_K$ ), tali spostamenti risultano essere soltanto di tipo traslazionale e di facile determinazione.

Tuttavia, strutture di questo tipo sono appunto ideali; nella realtà, infatti, le strutture presentano un baricentro delle masse più o meno distante rispetto al centro delle rigidezze. Tale distanza è detta eccentricità, e causa nelle strutture degli spostamenti aggiuntivi di tipo torsionale, non facilmente calcolabili. L'importanza di questi spostamenti è tale che, nonostante questo argomento sia ancora oggetto di studio, la vigente normativa sulle costruzioni [D.M. LL.PP. 14 gennaio 2008] impone di inserire, in tutte le direzioni, un'eccentricità accidentale corrispondente al 5% della dimensione dell'edificio misurata perpendicolarmente alla direzione di applicazione dell'azione sismica. Tale prescrizione si riduce poi, in ambito elastico lineare, all'indicazione di un semplice coefficiente di amplificazione delle sollecitazioni,  $\delta = 1 + 0.6^x/L_e$ , da valutarsi solo in funzione dei parametri geometrici della struttura.

Per affrontare questo problema, numerosi studi sono stati svolti da diversi istituti e centri di ricerca; in particolare, il DISTART (*Dipartimento di Ingegneria delle Strutture, dei Trasporti, delle Acque, del Rilevamento e del Territorio*) dell'Università di Bologna ha sviluppato un metodo, detto *metodo ALPHA*, con il quale, attraverso una semplice formula, è possibile calcolare gli spostamenti rotazionali in funzione di quelli longitudinali (ossia nella direzione in cui agisce il sisma), attraverso la determinazione di un parametro  $\alpha$ . Tale metodo è stato sviluppato per strutture ad un singolo piano (strutture *single storey*) sia in ambito lineare che non lineare.

Scopo della trattazione è testare la validità di questo metodo anche per strutture a più piani (strutture *multi storey*) in ambito lineare, partendo dal caso più semplice di strutture a due piani, per poi passare a strutture a tre e a sei piani: in particolare, la presente ricerca è volta a determinare, per ogni piano della struttura multi storey, una struttura single storey equivalente che ne rappresenti al meglio il comportamento.

Il primo capitolo consiste in una breve spiegazione del metodo ALPHA; verranno evidenziate le basi del metodo e i parametri che lo governano nel caso di struttura single storey. Attenzione particolare verrà data alla risoluzione diretta delle equazioni del moto; si approfondirà, poi, il caso di oscillatore semplice non smorzato, sia in condizione di vibrazioni libere che in quello di vibrazioni forzate. Viene poi individuato il caso di sistema con eccentricità longitudinale nulla, assunto poi come riferimento per tutte le analisi successive.

Nel secondo capitolo saranno presentate le indagini svolte al fine di determinare gli intervalli entro cui far variare i valori dei parametri, individuati nel primo capitolo, per l'analisi numerica delle strutture multi storey. In questo capitolo saranno studiate le variazioni dei parametri  $e$  ed  $\Omega_\vartheta$  sia per strutture teoriche sia per strutture reali.

Nel terzo capitolo, invece, verranno individuate le problematiche relative alle strutture multi storey, prima fra tutte l'aumento delle variabili dovuto all'aumento dei gradi di libertà della struttura. Saranno presentati i calcoli effettuati al fine di ricavare, in maniera diretta, gli elementi che caratterizzano la matrice di rigidezza per strutture multi storey a due e tre piani. Verranno inoltre individuati i parametri significativi che saranno utilizzati per rappresentare i risultati.

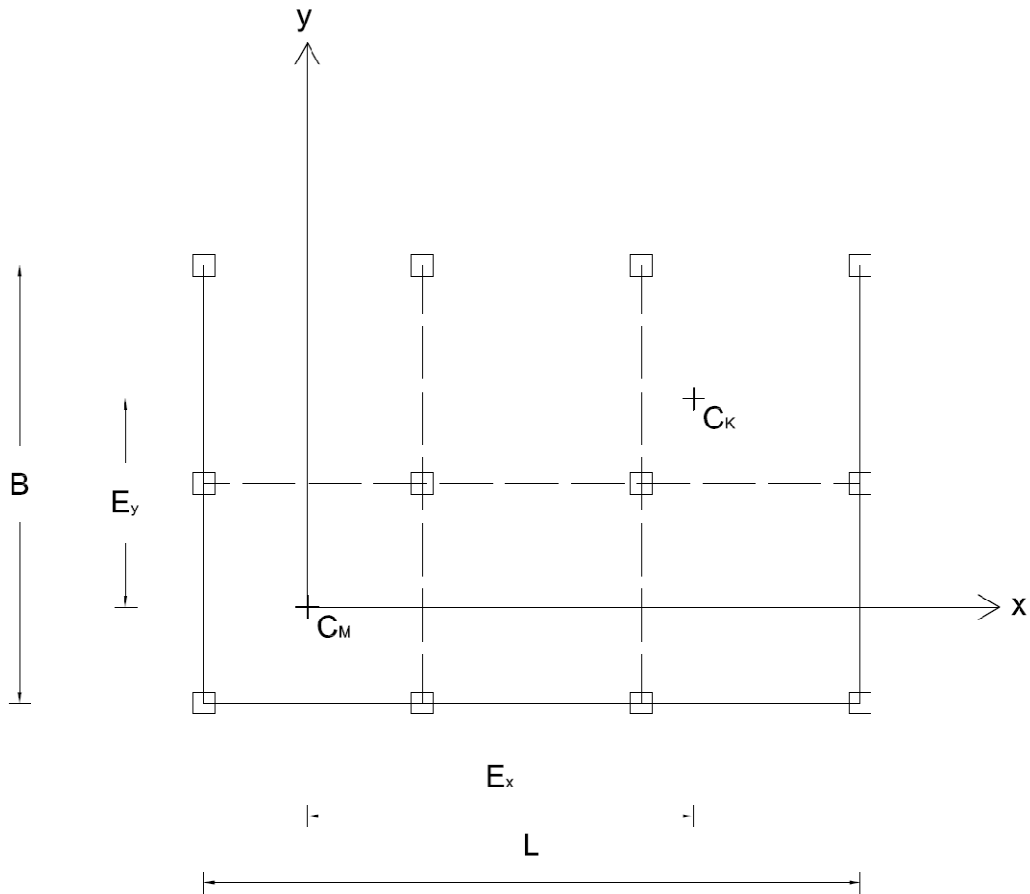
Il quarto capitolo presenterà la procedura con cui si effettueranno le indagini successive, mentre, a partire dal quinto capitolo, saranno descritti i risultati ottenuti per le strutture multi storey; in particolare, il capitolo cinque sarà dedicato alle strutture a due piani, il capitolo sei a quelle a tre piani e il capitolo sette a quelle a sei piani. Per valutare che il single storey considerato rappresenti al meglio il comportamento di ogni singolo piano della struttura multi storey, si è deciso di utilizzare il rapporto tra i coefficienti  $\psi$ ; in particolare si studierà l'andamento del rapporto  $\psi_{ij}/\psi_{ss}$ , dove  $\psi_{ij}$  rappresenta il coefficiente  $\psi$  relativo allo spostamento relativo tra il piano i-esimo e quello j-esimo, mentre  $\psi_{ss}$  indica il coefficiente  $\psi$  del single storey scelto per rappresentare il comportamento del piano j-esimo. Le indagini saranno tutte svolte su un sistema smorzato in regime di oscillazioni forzate, quindi saranno anche introdotti il concetto di smorzamento alla Reyleight e i venti sismi scelti per sollecitare le strutture utilizzate come oggetto di studio.

L'ottavo capitolo avrà lo scopo di riassumere i risultati ottenuti.

# CAPITOLO 1

## Analisi della risposta torsionale di strutture elastiche monopiano - Il metodo ALPHA per le strutture Single Storey

Si consideri la seguente struttura ad un piano (*single storey*), che presenta due campate in direzione  $y$  e tre campate in direzione  $x$ , di dimensione trasversale  $L$  e dimensione longitudinale  $B$ . Si assuma poi che il diaframma sia infinitamente rigido nel suo stesso piano e che gli elementi resistenti laterali (elementi che danno rigidità alla traslazione laterale e longitudinale, come ad esempio i pilastri) siano privi di massa e assialmente indeformabili.

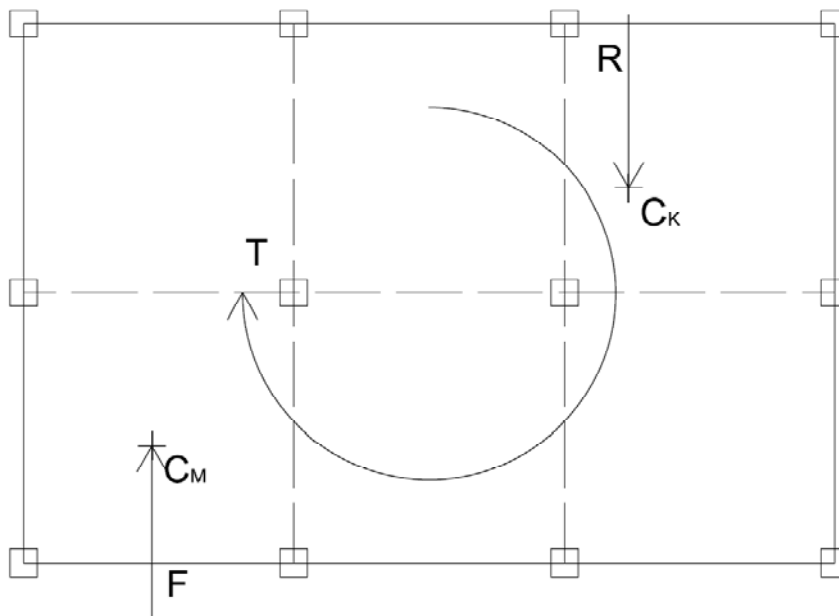


**Fig. 1.1** Modellazione del sistema a tre gradi di libertà. Sistema centrato nel baricentro delle masse

Come mostrato in Fig. 1.1 è possibile individuare un punto in cui si concentra la sola forza d'inerzia, detto *centro o baricentro delle masse* ( $C_M$ ), ed un punto di

applicazione della reazione della struttura, detto *centro o baricentro delle rigidezze* ( $C_K$ ).

In questa trattazione si considereranno sistemi asimmetrici, cioè sistemi caratterizzati dalla non coincidenza tra baricentro delle masse  $C_M$  e baricentro delle rigidezze  $C_K$ , in modo da poter indagare il comportamento torsionale che si sviluppa per effetto dell'azione sismica. Quest'ultima, essendo a tutti gli effetti un'accelerazione, può infatti essere pensata agente direttamente nel baricentro delle masse, mentre la reazione della struttura sarà applicata nel baricentro delle rigidezze. L'eccentricità dovuta alla non coincidenza tra  $C_M$  e  $C_K$  assume quindi il ruolo di braccio della coppia torcente:

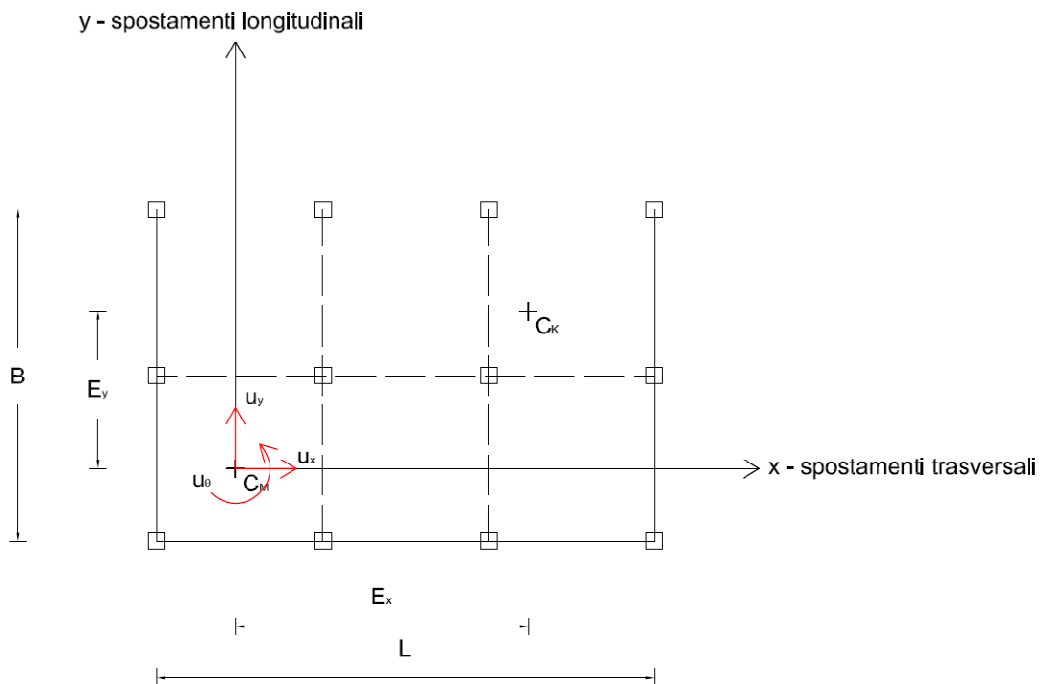


**Fig. 1.2** Azione torcente che si instaura per effetto dell'eccentricità tra baricentro delle masse e baricentro delle rigidezze.

Dopo aver posto l'origine del sistema di riferimento nel baricentro delle masse (Fig. 1.1) è possibile valutare l'eccentricità del baricentro delle rigidezze nei termini di  $E_x$  ed  $E_y$ .

## 1.1 L'equazione del moto

Come già sottolineato, il modello preso in considerazione è un sistema dinamico asimmetrico. Tale sistema è caratterizzato da tre gradi di libertà  $\{u_x, u_y, u_\theta\}$ , dove i movimenti sono definiti in funzione del sistema di riferimento precedentemente stabilito (Fig. 1.3)



**Fig. 1.3** Gradi di libertà del sistema considerato.

Sotto le seguenti ipotesi

- uguale rigidezza del sistema nelle due direzioni  $x$  e  $y$ ;
- risposta rotazionale  $u_\theta$  sotto eccitazione dinamica piccola abbastanza da poter considerare l'approssimazione del primo ordine  $u_\theta \cong \sin(u_\theta) \cong \tan(u_\theta)$ , ovvero un'analisi in ambito elastico-lineare;

l'equazione del moto che governa la risposta dinamica del sistema in esame presenta la seguente forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (1.1)$$

la cui espressione esplicita può essere dedotta per via diretta.

### 1.1.1 Le grandezze che caratterizzano il sistema

Per caratterizzare la (1.1) occorre introdurre alcune grandezze. In particolare, considerando il sistema di riferimento incentrato nel baricentro delle masse si possono definire:

$\mathbf{u}_x(\mathbf{t}), \mathbf{u}_y(\mathbf{t}), \mathbf{u}_\theta(\mathbf{t})$ : movimenti lungo gli assi  $x$  e  $y$  e rotazione intorno all'asse  $z$ , passante per il baricentro delle masse  $C_M$ ;

$m$ : massa totale della struttura (coincidente, per le ipotesi fatte, con la massa del piano infinitamente rigido);

$I_{p,m} = I_{p,m,C_M} = \int_m (x^2 + y^2) dm = m\rho_m^2$ : momento d'inerzia polare delle masse valutato rispetto l'asse  $z$  passante attraverso il baricentro delle masse  $C_M$ ;

$\rho_m = \rho_{m,C_M} = \sqrt{\frac{I_{p,m}}{m}}$ : raggio d'inerzia delle masse valutato rispetto l'asse  $z$  passante attraverso il baricentro delle masse;

$[\mathbf{C}]$ : matrice di smorzamento

$x_i, y_i$ : coordinate dell' $i$ -esimo elemento resistente laterale;

$k_{xi}, k_{yi}$ : rigidezza dell' $i$ -esimo elemento resistente laterale in direzione  $x$  e  $y$ ;

$k = \sum_i k_{xi} = \sum_i k_{yi}$ : rigidezze complessive nelle due direzioni  $x$  e  $y$ ;

$I_{p,k,C_M} = \sum_{i=1}^N (k_{yi} \cdot x_i^2 + k_{xi} \cdot y_i^2)$ : momento d'inerzia polare delle rigidezze valutato rispetto all'asse  $z$  passante per il baricentro delle masse  $C_M$ . Tale grandezza corrisponde anche alla rigidezza alla rotazione (intorno all'asse  $z$ ) dell'insieme degli elementi resistenti della struttura rispetto al baricentro delle masse;

$\rho_{k,C_M} = \sqrt{\frac{I_{p,k,C_M}}{k}}$ : raggio d'inerzia delle rigidezze del sistema valutato rispetto all'asse  $z$  passante per il baricentro delle masse  $C_M$ ;

$E_x = (\sum_{i=1}^N k_{yi} x_i) / k$ ,  $E_y = (\sum_{i=1}^N k_{xi} y_i) / k$ : eccentricità del baricentro delle rigidezze rispetto al baricentro delle masse rispettivamente in direzione  $x$  e  $y$ ;

$D_e = \rho_m \sqrt{12}$ : diagonale equivalente del sistema;

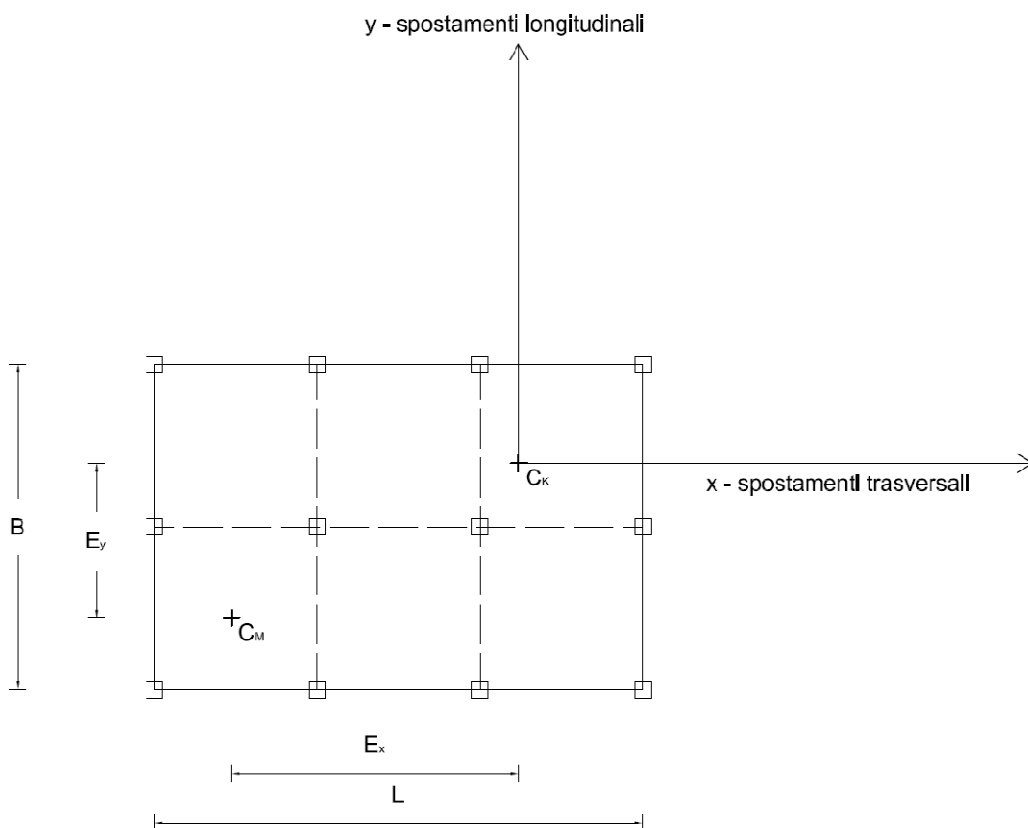
$e_x = \frac{E_x}{D_e}$ ,  $e_y = \frac{E_y}{D_e}$ : eccentricità relative in direzione  $x$  e  $y$ ;

$L, B$ : dimensioni in pianta della struttura;

$\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_\theta$ : forze e coppie applicate.

Tra le grandezze precedentemente elencate non tutte possono essere considerate *proprietà fisiche* del sistema. Una proprietà fisica di un sistema è infatti una sua caratteristica oggettiva che possa essere impiegata per operazioni di confronto. Da questo punto di vista sono delle proprietà fisiche del sistema il momento d'inerzia polare delle masse valutato rispetto all'asse  $z$  incentrato nel baricentro delle masse  $C_M$  e il suo corrispondente raggio d'inerzia, ed è per questo stesso motivo che è possibile indicarli semplicemente come  $I_{p,m}$  e  $\rho_m$  invece che  $I_{p,m,C_M}$  e  $\rho_{m,C_M}$ . Il momento d'inerzia polare delle rigidezze  $I_{p,k,C_M} = \sum_{i=1}^N (k_{yi} \cdot x_i^2 + k_{xi} \cdot y_i^2)$  non è invece una proprietà fisica del sistema perché, considerando due sistemi diversi, tale grandezza non potrebbe essere determinata in modo oggettivo, in quanto dipendente dall'eccentricità.

Questo problema, però, si risolve se si considera il sistema di riferimento incentrato nel baricentro delle rigidezze  $C_K$ , come mostrato in Fig. 1.4:





**Fig. 1.4** Sistema dinamico asimmetrico con sistema di riferimento incentrato nel baricentro delle rigidità.

In questo modo il momento d'inerzia polare delle rigidità diviene una proprietà fisica del sistema, assieme al raggio d'inerzia. Per effetto di tale riferimento è infatti possibile definire alcune nuove grandezze, quali:

$I_{p,k,C_K}$ : momento d'inerzia polare delle masse calcolato rispetto all'asse  $z$  passante nel baricentro delle rigidità;

$\rho_{m,C_K} = \sqrt{\frac{I_{p,m,C_K}}{m}}$ : raggio d'inerzia delle masse calcolato rispetto all'asse  $z$  passante nel baricentro delle rigidità;

$x_{i,C_K}, y_{i,C_K}$ : coordinate dell'  $i$ -esimo elemento resistente laterale rispetto al baricentro delle rigidità;

$I_{p,k} = I_{p,k,C_K} = \sum_{i=1}^N [k_{yi} \cdot (x_{i,C_K})^2 + k_{xi} \cdot (y_{i,C_K})^2]$ : momento d'inerzia polare delle rigidità del sistema calcolato rispetto all'asse  $z$  passante nel baricentro delle rigidità  $C_K$ . Questo corrisponde alla rigidità rotazionale (intorno all'asse  $z$ ) degli elementi resistenti laterali rispetto al baricentro delle rigidità;

$\rho_k = \rho_{k,C_K} = \sqrt{\frac{I_{p,k}}{k}}$ : raggio d'inerzia delle rigidità calcolato rispetto all'asse  $z$ .

## 1.1.2 Determinazione dell'equazione mediante il metodo diretto

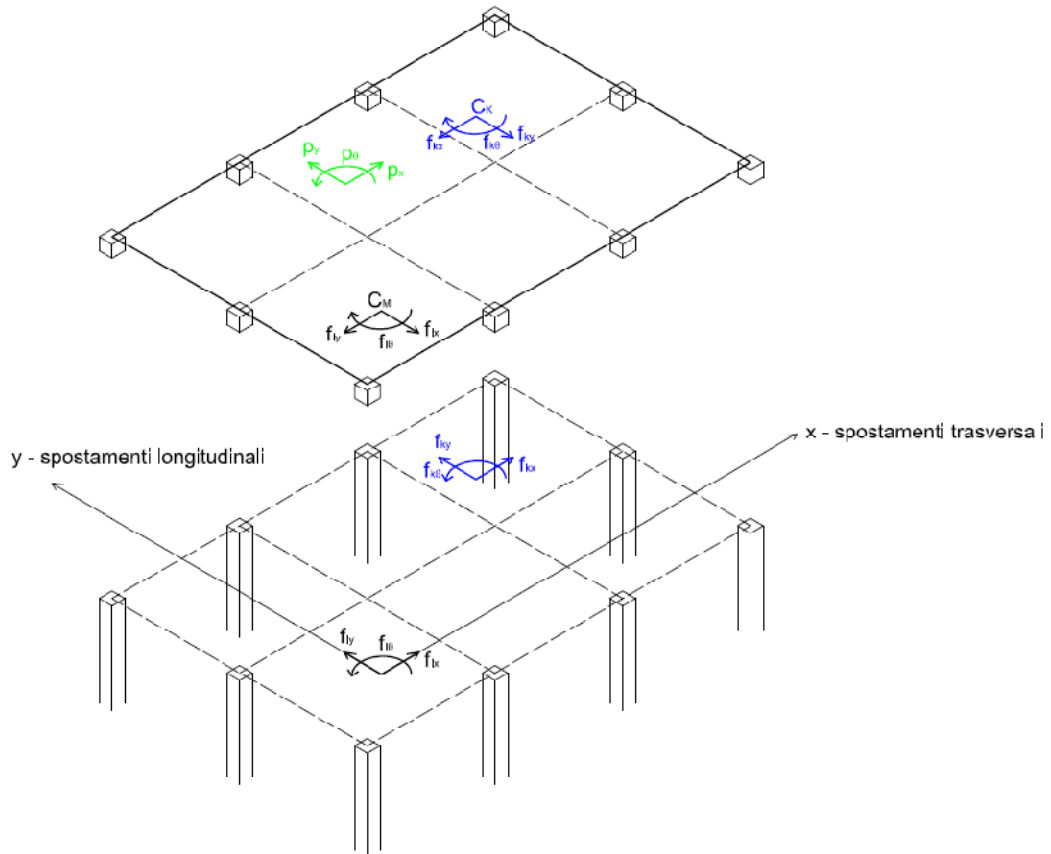
La determinazione dell'equazione che regola la risposta dinamica del sistema di Fig. 1.3 può avvenire mediante il metodo diretto dell'equilibrio. Per fare questo si pensa di "tagliare" la struttura in corrispondenza del piano rigido in modo tale da poter mettere in evidenza le azioni che mutuamente vengono scambiate (Fig. 1.5). In particolare, le forze d'inerzia  $f_{Ix}, f_{Iy}, f_{I\theta}$  possono essere pensate concentrate nel baricentro delle masse  $C_M$ , mentre le forze di richiamo elastico  $f_{kx}, f_{ky}, f_{k\theta}$  nel baricentro delle rigidità  $C_K$ . In questa prima fase della trattazione non si considera lo smorzamento, il quale verrà aggiunto in seguito in modo proporzionale alle masse e alle rigidità (smorzamento alla Rayleigh).

### 1.1.2.1 Forze d'inerzia e matrice delle masse

Le forze d'inerzia associate ad ogni grado di libertà, che si oppongono allo spostamento della struttura, possono essere espresse nella seguente forma

$$f_{Ix} = m\ddot{u}_x, f_{Iy} = m\ddot{u}_y, f_{I\theta} = m\ddot{u}_\theta$$

dove  $\ddot{u}_x, \ddot{u}_y, \ddot{u}_\theta$  rappresentano le componenti di accelerazione rispetto al baricentro delle masse



**Fig. 1.5** Forze di richiamo elastico e forze di inerzia che si oppongono alle forze e alle coppie applicate al piano rigido

In forma matriciale si ha

$$\begin{Bmatrix} f_{Ix} \\ f_{Iy} \\ f_{I\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_{p,m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\theta \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

e, tenendo conto della relazione

$$I_{p,m} = I_{p,m,C_M} = \int_m (x^2 + y^2) dm = m\rho_m^2 \quad (1.3)$$

si ottiene

$$\mathbf{M} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_m^2 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

### 1.1.2.2 Forze di richiamo elastico e matrice di rigidità

Le forze elastiche di richiamo che si destano negli elementi resistenti laterali possono essere generalmente espresse come:

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u}$$

Tale relazione, esprime il legame tra forza e spostamenti, se espressa in termini matriciali assume la seguente forma generale:

$$\begin{Bmatrix} f_{kx} \\ f_{ky} \\ f_{k\vartheta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{x\vartheta} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{y\vartheta} \\ k_{\vartheta x} & k_{\vartheta y} & k_{\vartheta\vartheta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_{\vartheta} \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

dove il generico termine  $k_{ij}$  indica la rigidità in direzione  $i$  per effetto di uno spostamento in direzione  $j$ .

Sfruttando proprio questa definizione sarà possibile ottenere la rigidità dell' $i$ -esimo elemento applicando uno spostamento unitario in direzione  $j$  in modo successivo per ogni grado di libertà (Figg. 1.6;1.7;1.8):

$$u_x = 1; u_y = 0; u_{\vartheta} = 0$$

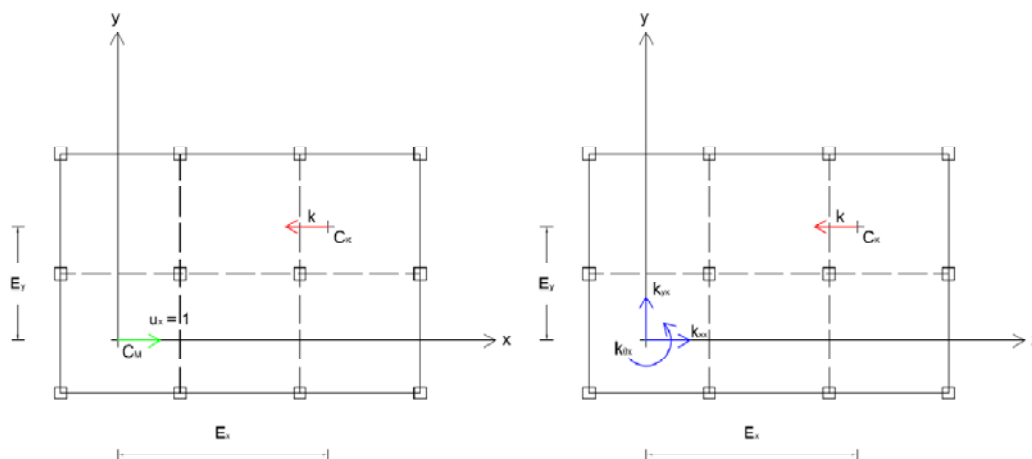
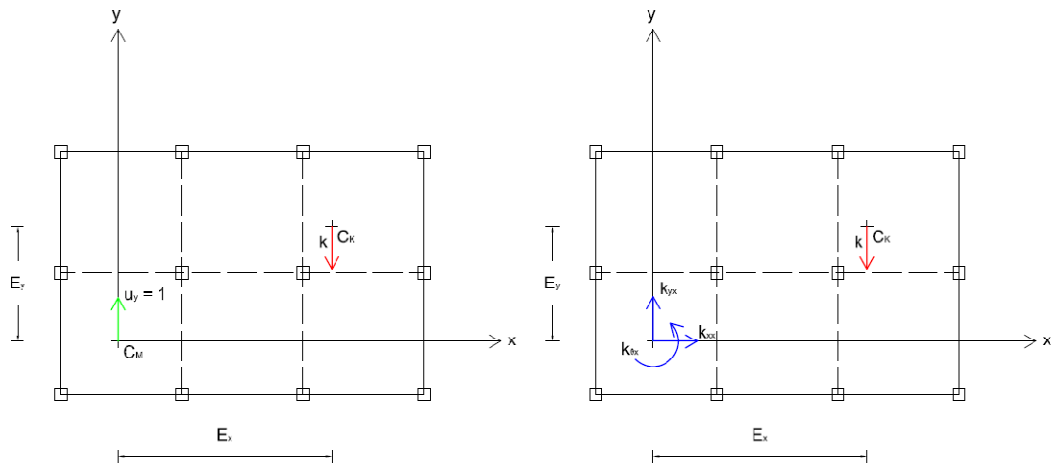


Fig. 1.6 Spostamento unitario in direzione  $x$ .

Per equilibrio:

$$k_{xx} = k; k_{yx} = 0; k_{\theta x} = -kE_y = -k \cdot e_y D_e = -k \cdot e_y \rho_m \sqrt{12} \quad (1.6)$$

$$u_x = 0; u_y = 1; u_\theta = 0$$

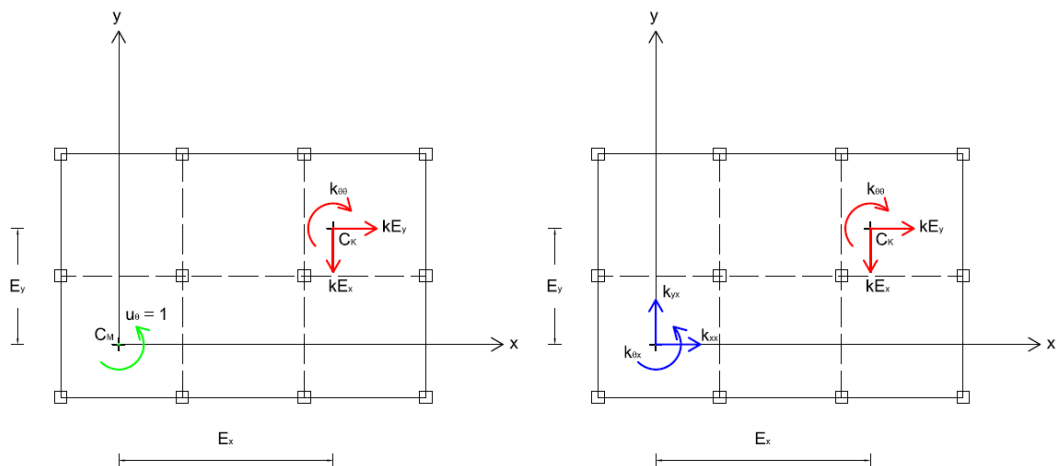


**Fig. 1.7** Spostamento unitario in direzione y.

Per equilibrio:

$$k_{xy} = 0; k_{yy} = k; k_{\theta y} = kE_x = k \cdot e_x D_e = k \cdot e_x \rho_m \sqrt{12} \quad (1.7)$$

$$u_x = 0; u_y = 0; u_\theta = 1$$



**Fig. 1.8** Rotazione unitaria intorno all'asse z.

Per equilibrio:

$$k_{x\theta} = -k \cdot e_y \rho_m \sqrt{12}; k_{y\theta} = k \cdot e_x \rho_m \sqrt{12}; k_{\theta\theta} = k_{\theta\theta} \quad (1.8)$$

Sostituendo le (1.6), (1.7), (1.8) all'interno della (1.5) si ottiene, dopo alcune sostituzioni e tenendo conto della relazione  $k = m\omega_L^2$ :

$$\mathbf{K} = m\omega_L^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_y\rho_m\sqrt{12} \\ 0 & 1 & e_x\rho_m\sqrt{12} \\ -e_y\rho_m\sqrt{12} & e_x\rho_m\sqrt{12} & k_{\vartheta\vartheta}/m\omega_L^2 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

### 1.1.2.3 L'espressione esplicita dell'equazione

Sostituendo le (1.4), (1.9) all'interno della (1.1) si ottiene l'espressione dell'equazione di equilibrio dinamico per il sistema in esame

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m\rho_m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\vartheta \end{bmatrix} + m\omega_L^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_y\rho_m\sqrt{12} \\ 0 & 1 & e_x\rho_m\sqrt{12} \\ -e_y\rho_m\sqrt{12} & e_x\rho_m\sqrt{12} & k_{\vartheta\vartheta}/m\omega_L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_\vartheta \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Il sistema di equazioni (1.10) può essere riscritto come

$$\begin{cases} m\ddot{u}_x + m\omega_L^2 u_x - m\omega_L^2 e_y\rho_m\sqrt{12}u_\vartheta = p_x \\ m\ddot{u}_y + m\omega_L^2 u_y + m\omega_L^2 e_x\rho_m\sqrt{12}u_\vartheta = p_y \\ m\rho_m^2\ddot{u}_\vartheta - m\omega_L^2 e_y\rho_m\sqrt{12}u_\vartheta + m\omega_L^2 e_x\rho_m\sqrt{12}u_\vartheta + k_{\vartheta\vartheta}u_\vartheta = p_\vartheta \end{cases} \quad (1.11)$$

da cui:

$$\begin{cases} m\ddot{u}_x + m\omega_L^2 u_x - m\omega_L^2 e_y\rho_m\sqrt{12}u_\vartheta = p_x \\ m\ddot{u}_y + m\omega_L^2 u_y + m\omega_L^2 e_x\rho_m\sqrt{12}u_\vartheta = p_y \\ m\rho_m\ddot{u}_\vartheta - m\omega_L^2 e_y\sqrt{12}u_\vartheta + m\omega_L^2 e_x\sqrt{12}u_\vartheta + \frac{k_{\vartheta\vartheta}}{\rho_m}u_\vartheta = \frac{p_\vartheta}{\rho_m} \end{cases} \quad (1.12)$$

quindi, in forma matriciale, tenendo conto anche della matrice di smorzamento:

$$m \begin{bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \rho_m\ddot{u}_\vartheta \end{bmatrix} + [C] \begin{bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_\vartheta \end{bmatrix} + m\omega_L^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_y\sqrt{12} \\ 0 & 1 & e_x\sqrt{12} \\ -e_y\sqrt{12} & e_x\sqrt{12} & \gamma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ \rho_m u_\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_\vartheta/\rho_m \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

dove, ovviamente, accelerazioni, velocità, spostamenti e carichi sono funzioni del tempo.

Il termine  $\gamma = \gamma_{C_M} = \sqrt{\frac{k_{\vartheta\vartheta}}{k\rho_m^2}}$  che compare nella (1.13) rappresenta il rapporto tra le

pulsazione dei modi rotazionali e traslazionali disaccoppiati. Infatti, se  $\omega_L = \sqrt{\frac{k}{m}}$

e  $\omega_{\vartheta,C_M} = \sqrt{\frac{k_{\vartheta\vartheta}}{I_{p,m}}}$ , allora si ha che  $\frac{\omega_{\vartheta,C_M}}{\omega_L} = \sqrt{\frac{k_{\vartheta\vartheta}}{I_{p,m}}} \sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{k_{\vartheta\vartheta}}{k\rho_m^2}}$ .

L'assunzione fatta nella determinazione della matrice delle rigidezze, secondo cui  $\sum_{i=1}^N k_{xi} = \sum_{i=1}^N k_{yi} = k$  non fa perdere di generalità la trattazione. Infatti tale ipotesi è ben diversa dal supporre che la rigidezza di tutti gli elementi resistenti sia uguale (o meglio presupporre che ogni pilastro abbia la stessa rigidezza traslazionale  $k_{sing}$ ). In tal caso la stessa rappresentazione di Fig. 1.1 sarebbe errata in quanto la disposizione simmetrica dei pilastri (o dei generici elementi resistenti) comporterebbe il posizionamento del baricentro delle rigidezze nel baricentro geometrico della struttura, ricadendo ovviamente in un caso particolare. Inoltre, per il caso di eccitazione uni assiale e per eccentricità relativa longitudinale nulla, non è importante conoscere le singole rigidezze ma solo la loro somma nelle due direzioni [Trombetti et al., 2008]

## 1.2 Considerazioni sul parametro $\gamma$

All'interno della (1.13) si è introdotta l'espressione del parametro  $\gamma$  inteso come rapporto tra le pulsazioni dei modi rotazionali e traslazionali disaccoppiati

$\gamma = \sqrt{\frac{k_{\vartheta\vartheta}}{k\rho_m^2}}$  scritto con riferimento al sistema di coordinate avente origine nel

baricentro delle masse (Fig. 1.1). In altre parole, il  $\gamma$  che interviene nell'equazione del moto è in realtà un  $\gamma_{C_M}$ , parametro che non è funzione di sole proprietà fisiche del sistema. Infatti si può osservare che  $\gamma$  può essere espresso come rapporto tra il raggio d'inerzia delle rigidezze rispetto al baricentro delle masse ed il raggio d'inerzia della masse rispetto al baricentro delle masse (solo se quest'ultima è una proprietà fisica del sistema):

$$\gamma = \gamma_{C_M} = \frac{\omega_{\vartheta,C_M}}{\omega_L} = \sqrt{\frac{I_{p,k,C_M} m}{I_{p,m} k}} = \frac{\rho_{k,C_M}}{\rho_m} \quad (1.14)$$

Muovendo da questa considerazione è possibile introdurre un nuovo parametro, simile al  $\gamma$  che compare nell'equazione del moto, ma funzione di sole proprietà fisiche del sistema:

$$\Omega_{\vartheta} = \sqrt{\frac{I_{p,k} m}{I_{p,m} k}} = \frac{\rho_k}{\rho_m} \quad (1.15)$$

In questo modo sia il raggio d'inerzia delle rigidezze valutato rispetto a  $C_K$  che il raggio d'inerzia delle masse valutato rispetto a  $C_M$  rappresentano proprietà fisiche del sistema, quindi anche il loro rapporto  $\Omega_{\vartheta}$  sarà una proprietà fisica del sistema.

### 1.2.1 Relazione tra $\gamma$ e $\Omega_{\vartheta}$

Con riferimento alle Figg. 1.1, 1.4 si può osservare come valgano le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x_{i,C_S} = x_i + E_x = x_i + e_x \cdot \rho_m \sqrt{12} \\ y_{i,C_S} = y_i + E_y = y_i + e_y \cdot \rho_m \sqrt{12} \end{cases} \quad (1.16)$$

Evidentemente dalle (1.16) si ottiene:

$$\rho_{m,C_S} = \rho_m \sqrt{1 + 12(e_x^2 + e_y^2)} \quad (1.17)$$

da cui:

$$\gamma_{C_S} = \frac{\rho_{k,C_S}}{\rho_{m,C_S}} = \frac{\rho_k}{\rho_m \sqrt{1 + 12(e_x^2 + e_y^2)}} = \Omega_{\vartheta} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 12(e_x^2 + e_y^2)}} \quad (1.18)$$

Inoltre, ancora dalle (1.16) si ha:

$$\rho_{k,C_M} = \rho_k \sqrt{1 + \frac{\rho_m^2 \cdot 12(e_x^2 + e_y^2)}{\rho_k^2}} = \rho_k \sqrt{1 + \frac{12(e_x^2 + e_y^2)}{\Omega_{\vartheta}^2}} \quad (1.19)$$

A questo punto, poiché:

$$\gamma = \frac{\rho_{k,C_M}}{\rho_m} \quad (1.20)$$

sostituendo nella (1.20) la (1.19) si ha la relazione cercata:

$$\gamma = \sqrt{\Omega_\vartheta^2 + 12(e_x^2 + e_y^2)} = \sqrt{\left(\frac{\rho_k}{\rho_m}\right)^2 + 12(e_x^2 + e_y^2)} \quad (1.21)$$

o, in alternativa:

$$\Omega_\vartheta^2 = \sqrt{\gamma^2 - 12(e_x^2 + e_y^2)} = \sqrt{\left(\frac{\rho_{k,C_M}}{\rho_m}\right)^2 - 12(e_x^2 + e_y^2)} \quad (1.22)$$

Si può da ultimo osservare che  $\gamma, \gamma_{C_S}, \Omega_\vartheta$  coincidono nel caso in cui l'eccentricità sia nulla.

Ottenuta la fondamentale relazione tra  $\gamma$  e  $\Omega_\vartheta$  è possibile dare una riscrittura dell'equazione del moto. In termini di  $\gamma$  si ha, come già visto, l'espressione:

$$m \begin{bmatrix} \ddot{u}_x(t) \\ \ddot{u}_y(t) \\ \rho_m \ddot{u}_\vartheta(t) \end{bmatrix} + [C] \begin{bmatrix} \dot{u}_x(t) \\ \dot{u}_y(t) \\ \dot{u}_\vartheta(t) \end{bmatrix} + m\omega_L^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_y\sqrt{12} \\ 0 & 1 & e_x\sqrt{12} \\ -e_y\sqrt{12} & e_x\sqrt{12} & \gamma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \\ \rho_m u_\vartheta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \\ p_\vartheta(t)/\rho_m \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

mentre in termini di  $\Omega_\vartheta$ :

$$m \begin{bmatrix} \ddot{u}_x(t) \\ \ddot{u}_y(t) \\ \rho_m \ddot{u}_\vartheta(t) \end{bmatrix} + [C] \begin{bmatrix} \dot{u}_x(t) \\ \dot{u}_y(t) \\ \dot{u}_\vartheta(t) \end{bmatrix} + m\omega_L^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_y\sqrt{12} \\ 0 & 1 & e_x\sqrt{12} \\ -e_y\sqrt{12} & e_x\sqrt{12} & \Omega_\vartheta^2 + 12(e_x^2 + e_y^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \\ \rho_m u_\vartheta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \\ p_\vartheta(t)/\rho_m \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

Generalmente strutture caratterizzate da valori di  $\Omega_\vartheta > 1$  possono essere definite strutture *torsio-rigide*, mentre quelle caratterizzate da valori di  $\Omega_\vartheta < 1$  *torsio-flessibili*.



### 1.3 Le auto soluzioni del problema

Lo studio delle vibrazioni libere in assenza di smorzamento della (1.13) si riduce alla risoluzione di un problema agli autovalori. Cercando infatti una soluzione del tipo  $\mathbf{u}(t) = q_n(t)\phi_n$  per l'equazione  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}$  si ottiene che:

$$[-\omega_n^2 \mathbf{M}\phi_n + \mathbf{K}\phi_n]q_n(t) = 0 \quad (1.25)$$

Per evitare la soluzione banale, la condizione da porsi è del tipo:

$$\mathbf{K}\phi_n = \omega_n^2 \mathbf{M}\phi_n \quad (1.26)$$

uguaglianza che conduce alla risoluzione del problema agli autovalori:

$$\det[\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (1.27)$$

La soluzione del problema relativo alla 1.27), che governa le vibrazioni libere non smorzate del sistema, dà le seguenti frequenze naturali, normalizzate rispetto ad  $\omega_L$  ed elevate al quadrato [Trombetti e Conte, 2005]:

$$\Omega_1 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_L}\right)^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \gamma^2 - \sqrt{(\gamma^2 - 1)^2 + 48e^2} \right\} = 1 + \frac{e}{2} \Theta_1 \quad (1.28)$$

$$\Omega_2 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_L}\right)^2 = 1 \quad (1.29)$$

$$\Omega_3 = \left(\frac{\omega_3}{\omega_L}\right)^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \gamma^2 + \sqrt{(\gamma^2 - 1)^2 + 48e^2} \right\} = 1 + \frac{e}{2} \Theta_3 \quad (1.30)$$

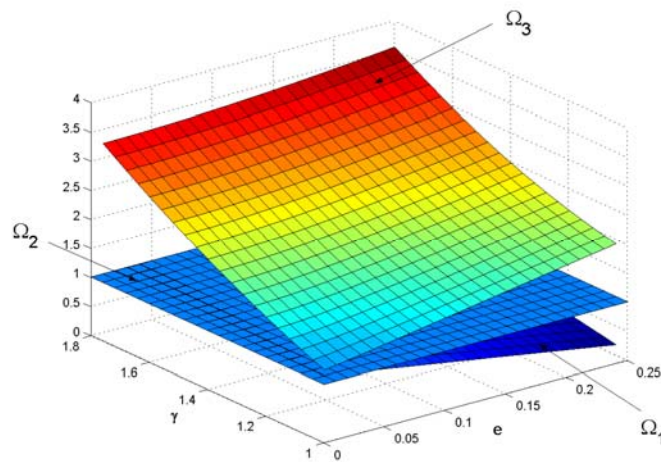
dove:

$$e^2 = e_x^2 + e_y^2 \quad e \quad F = \frac{e}{\gamma^2 - 1}$$

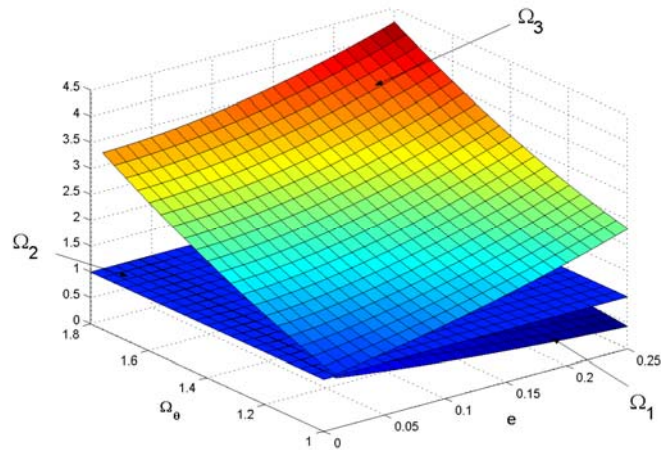
e

$$\theta_1 = \frac{1}{F} \left( 1 - \sqrt{1 + 48F^2} \right) \text{ e } \theta_3 = \frac{1}{F} \left( 1 + \sqrt{1 + 48F^2} \right)$$

Con riferimento alla Fig. 1.9, rappresentante le frequenze normalizzate  $\Omega_1, \Omega_2$  e  $\Omega_3$  come funzioni di  $e$  e  $\gamma$  è possibile osservare che  $\Omega_1$  è generalmente inferiore ad 1, mentre  $\Omega_3$  abbastanza maggiore.



**Fig. 1.9** Frequenze naturali normalizzate in funzione dei parametri “e” e “ $\gamma$ ”.



**Fig. 1.10** Frequenze naturali normalizzate in funzione dei parametri “e” e “ $\Omega_0$ ”.

Gli auto vettori associati agli autovalori del problema per le vibrazioni libere non smorzate sono [Trombetti e Conte, 2005]:

$$\{\phi_1\} = \begin{bmatrix} (e_y\sqrt{12})/(1 - \Omega_1) \\ (e_x\sqrt{12})/(\Omega_1 - 1) \\ 1 \end{bmatrix}, \{\phi_2\} = \begin{bmatrix} e_x/e_y \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \{\phi_3\} = \begin{bmatrix} (e_y\sqrt{12})/(1 - \Omega_3) \\ (e_x\sqrt{12})/(\Omega_3 - 1) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Dall'espressione analitica dei tre modi naturali fornita dalla (1.31) si osserva che nel primo e nel terzo modo le traslazioni sono accoppiate con le rotazioni, mentre la seconda forma modale è puramente traslazionale, nella direzione definita dalla congiungente il baricentro delle masse e quello delle rigidzze.

## 1.4 Risposta in oscillazioni libere

Gli spostamenti longitudinali, trasversali e rotazionali ottenuti come soluzione della (1.23) nel caso particolare in cui il sistema sia non smorzato ( $[\mathbf{C}] = 0$ ) e nel caso in cui l'unica perturbazione, in assenza di forze e coppie applicate (oscillazioni libere,  $\{\mathbf{p}\} = 0$ ), sia rappresentata dalla seguente deformazione iniziale impressa:

$$\begin{bmatrix} u_x(0) \\ u_y(0) \\ \rho_m u_\vartheta(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

dove  $a$  rappresenta lo spostamento iniziale lungo la direzione  $y$  (direzione longitudinale), è stata determinata [Trombetti, 1994; Trombetti e Conte, 2005] mediante analisi modale, possibile in quanto, per ipotesi, si stanno considerando piccoli spostamenti in ambito lineare (per cui è valido il principio di sovrapposizione degli effetti) e la matrice di smorzamento nulla (quindi un sistema di equazioni disaccoppiate grazie all'ortogonalità dei modi di vibrare).

L'equazione trattata è quindi ottenuta dalla (1.13) ponendo pari a zero sia il vettore delle forze e delle coppie applicate, sia la matrice di smorzamento :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$m \begin{bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \rho_m \ddot{u}_\vartheta \end{bmatrix} + m\omega_L^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_y\sqrt{12} \\ 0 & 1 & e_x\sqrt{12} \\ -e_y\sqrt{12} & e_x\sqrt{12} & \gamma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ \rho_m u_\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

Nell'ottica dell'analisi modale si applica quindi un cambiamento di coordinate:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{r=1}^N \phi_r q_r(t) = \mathbf{\Phi} \mathbf{q}(t) \quad (1.34)$$

Mediante la (1.34) il sistema di equazioni accoppiate rappresentato dalla (1.33) può essere trasformato in un sistema di equazioni disaccoppiate in coordinate modali  $q_n(t)$ . Sostituendo quindi la (1.34) nella (1.33) si ha:

$$\sum_{r=1}^N \mathbf{M} \phi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \mathbf{K} \phi_r q_r(t) = 0$$

la quale diviene, premoltiplicando per  $\phi_n^T$ :

$$\sum_{r=1}^N \phi_n^T \mathbf{M} \phi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \phi_n^T \mathbf{K} \phi_r q_r(t) = 0$$

Per l'ortogonalità dei modi di vibrare, rispetto alle masse e rispetto alle rigidzze, ogni termine della sommatoria è nullo, ad eccezione del caso in cui  $r = n$ . Ciò riduce l'equazione precedente a:

$$(\phi_n^T \mathbf{M} \phi_n) \ddot{q}_n(t) + (\phi_n^T \mathbf{K} \phi_n) q_n(t) = 0$$

espressione che può anche essere riscritta come:

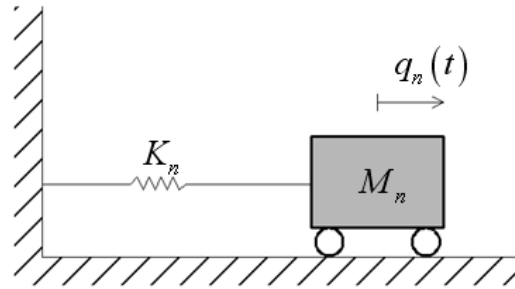
$$M_n \ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = 0 \quad (1.35)$$

dove i termini

$$M_n = \phi_n^T \mathbf{M} \phi_n \quad K_n = \phi_n^T \mathbf{K} \phi_n$$

rappresentano rispettivamente la massa generalizzata per il modo n-esimo (massa modale) e la rigidzza generalizzata per il modo n-esimo (rigidzza modale).

A questo punto il problema di partenza, rappresentato dalla (1.33) è stato ricondotto allo studio di N oscillatori semplici del tipo:



**Fig. 1.11** Generico oscillatore semplice in cui viene “scomposto” il sistema iniziale a più gradi di libertà.

I contributi di ciascun modo in termini di spostamento, calcolati grazie alla generica equazione  $\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = 0$  vengono combinati per ottenere lo spostamento totale:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n(t) = \sum_{n=1}^N \boldsymbol{\phi}_n q_n(t) \quad (1.36)$$

Tornando alla soluzione della (1.33) si ottengono, agendo secondo la procedura appena esposta:

$$u_x(t) = a \frac{e_x e_y}{e^2} \left\{ -\frac{\Theta_3}{\Theta_3 - \Theta_1} \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) - \frac{\Theta_1}{\Theta_1 - \Theta_3} \cos(\omega_3 t) \right\} \quad (1.37)$$

$$u_y(t) = a \frac{e_x^2}{e^2} \left\{ \frac{\Theta_3}{\Theta_3 - \Theta_1} \cos(\omega_1 t) + \frac{e_y^2}{e_x^2} \cos(\omega_2 t) + \frac{\Theta_1}{\Theta_1 - \Theta_3} \cos(\omega_3 t) \right\} \quad (1.38)$$

$$u_\theta(t) = \frac{a}{\sqrt{48} \rho_m} \frac{e_x}{e} \Theta_1 \frac{\Theta_3}{\Theta_3 - \Theta_1} \{ \cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_3 t) \} \quad (1.39)$$

Analizzando le espressioni (1.37), (1.38) e (1.39) è possibile osservare che, per vibrazioni libere di sistemi eccentrici sollecitati da uno spostamento iniziale lungo la direzione longitudinale  $y$ :

- gli spostamenti longitudinali, trasversali e rotazionali dipendono linearmente dalla deformazione iniziale impressa  $a$ ;
- in assenza di eccentricità lungo la direzione longitudinale, il secondo modo di vibrare non viene chiamato in causa nelle vibrazioni libere. Infatti, nel caso in cui  $e_y = 0$  si ha:

$$\begin{aligned}
 u_x(t) &= 0 \\
 u_y(t) &= a \frac{e_x^2}{e^2} \left\{ \frac{\Theta_3}{\Theta_3 - \Theta_1} \cos(\omega_1 t) + \frac{\Theta_1}{\Theta_1 - \Theta_3} \cos(\omega_3 t) \right\} \\
 u_\vartheta(t) &= \frac{a}{\sqrt{48} \rho_m} \Theta_1 \frac{\Theta_3}{\Theta_3 - \Theta_1} \{ \cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_3 t) \}
 \end{aligned}$$

- allo stesso tempo, dall'analisi delle equazioni appena ottenute si può dedurre che il primo modo ed il terzo modo regolano la risposta del sistema solo se questi presenta un'eccentricità non nulla in direzione trasversale, cioè solo se  $e_x \neq 0$ ;
- per non avere un contributo nullo di vibrazione libera in direzione trasversale, la struttura deve presentare un'eccentricità lungo entrambe le direzioni  $x$  e  $y$ ;
- per avere gli stessi massimi spostamenti trasversali e longitudinali nella risposta in vibrazioni libere deve verificarsi che  $e_x = e_y$ ;
- per una data eccentricità trasversale  $e_x$  si può dimostrare che il sistema sviluppa la massimo risposta rotazionale quando l'eccentricità longitudinale è nulla, cioè quando  $e_y = 0$ ;
- gli spostamenti longitudinali, trasversali e la risposta rotazionale sono composti dalla somma di più funzioni trigonometriche di diversa ampiezza e pulsazione. Tale composizione crea delle armoniche a modulazione di ampiezza, come suggerito dalle formule di prostaferesi:

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos \left[ \frac{1}{2}(x + y) \right] \cos \left[ \frac{1}{2}(x - y) \right]$$

Recenti studi [Trombetti e Conte, 2008] hanno dimostrato come sia più utile riscrivere le equazioni (1.37), (1.38), (1.39) nel seguente modo:

$$u_x(t) = a \frac{e_x e_y}{e^2} \{ -A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) - A_3 \cos(\omega_3 t) \} \quad (1.40)$$

$$u_y(t) = a \frac{e_x^2}{e^2} \left\{ A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \frac{e_y^2}{e_x^2} \cos(\omega_2 t) + A_3 \cos(\omega_3 t) \right\} \quad (1.41)$$

$$u_\vartheta(t) = \frac{a}{\rho_m} \frac{e_x}{e} A_4 \{ \cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_3 t) \} \quad (1.42)$$

dove:

$$A_1 = \frac{1 - \Omega_3}{\Omega_1 - \Omega_3} = \frac{\Theta_3}{\Theta_3 - \Theta_1} = \frac{\sqrt{1 + 48F^2} + 1}{2\sqrt{1 + 48F^2}} = 1 - A_3$$

$$A_2 = 1$$

$$A_3 = \frac{\Omega_1 - 1}{\Omega_1 - \Omega_3} = \frac{\Theta_1}{\Theta_1 - \Theta_3} = \frac{\sqrt{1 + 48F^2} - 1}{2\sqrt{1 + 48F^2}} = 1 - A_1$$

$$A_4 = \frac{1}{e\sqrt{12}} \frac{(\Omega_1 - 1)(\Omega_3 - 1)}{(\Omega_3 - \Omega_1)} = \frac{1}{\sqrt{48}} \frac{\Theta_1 \Theta_3}{\Theta_3 - \Theta_1} = \sqrt{\frac{12F^2}{1 + 48F^2}}$$

La risposta al sisma, quindi, si compone di tre contributi, che possono essere considerati separatamente:

- risposta rotazionale  $u_\theta(t)$
- risposta trasversale  $u_x(t)$
- risposta longitudinale  $u_y(t)$

Nella presente trattazione, tuttavia, per quanto detto precedentemente, si considereranno soltanto sistemi in cui l'eccentricità longitudinale nulla ( $e_y = 0$ ), per cui la risposta ad una sollecitazione sismica, agente in direzione  $y$ , sarà la somma dei soli contributi rotazionali ( $u_\theta(t)$ ) e di oscillazione longitudinale ( $u_y(t)$ ).

## 1.5 Il parametro *ALPHA*

Come è stato affermato in conclusione del paragrafo precedente, un sistema caratterizzato da eccentricità longitudinale nulla ( $e_y = 0$ ), perturbato da una sollecitazione sismica in direzione  $y$ , inizia a vibrare per effetto di due componenti di spostamento, una longitudinale ( $u_y(t)$ ) e una rotazionale ( $u_\theta(t)$ ).

L'accoppiamento di queste risposte in oscillazioni libere ha portato alla definizione di un parametro adimensionale, chiamato *ALPHA*, proporzionale al rapporto tra la massima rotazione ed il massimo spostamento longitudinale del baricentro delle masse [Trombetti e Conte, 2005]:

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \rho_m \frac{|u_{\vartheta, \text{free vibration}}|_{\max}}{|u_{yC_M, \text{free vibration}}|_{\max}} \quad (1.43)$$

Il termine a denominatore della (1.43), che descrive il massimo spostamento in direzione longitudinale del baricentro delle masse, da questo punto in poi sarà indicato con  $|u_{yC_M}|_{\max}$ , per poterlo distinguere dagli altri spostamenti longitudinali della struttura

### 1.5.1 Il parametro ALPHA per oscillazioni libere non smorzate

Nel caso di oscillazioni libere non smorzate, è possibile ottenere un'espressione del parametro ALPHA in forma esplicita, partendo proprio dalla sua definizione. Considerando infatti:

$$\begin{aligned} u_{\vartheta}(t) &= a\{A_1 \cos(\omega_1 t) + A_3 \cos(\omega_3 t)\} \\ \rightarrow |u_{yC_M}|_{\max} &= a\{A_1 + A_3\} = a \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} u_{\vartheta}(t) &= \frac{a}{\rho_m} A_4 \{\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_3 t)\} \\ \rightarrow |u_{yC_M}|_{\max} &= \frac{a}{\rho_m} 2A_4 \end{aligned} \quad (1.45)$$

si ottiene:

$$\alpha_u = 2A_4 = \frac{4\sqrt{3}F^2}{\sqrt{1 + 48F^2}} = \frac{4e\sqrt{3}}{\sqrt{(\gamma^2 - 1)^2 + 48e^2}} \quad (1.46)$$

Esprimendo la (1.46) in funzione di sole proprietà fisiche del sistema si ottiene l'espressione:

$$\alpha_u = \frac{4e\sqrt{3}}{\sqrt{(\Omega_{\vartheta}^2 + 12e^2 - 1)^2 + 48e^2}} \quad (1.47)$$

In questo modo la (1.47) esprime la relazione di sole caratteristiche strutturali oggettive del sistema. In particolare, tali parametri risultano essere:



- $e = \frac{E_x}{D_e} = \frac{E}{\rho_m \sqrt{12}}$  eccentricità relativa;
- $\Omega_\vartheta = \frac{\rho_k}{\rho_m}$ ;

Risulta evidente come strutture caratterizzate da un elevato valore del parametro  $\alpha_u$  siano predisposte a sviluppare grandi rotazioni in oscillazioni libere, mentre, al contrario, strutture caratterizzate da valori di  $\alpha_u$  più modesti tenderanno ad avere una risposta dinamica regolata maggiormente dagli spostamenti longitudinali.

## 1.6 Rapporto tra massima rotazione e massimo spostamento longitudinale in vibrazioni forzate

Il parametro ALPHA, determinato nel paragrafo precedente, esprime il rapporto tra il massimo spostamento di rotazione e quello di traslazione longitudinale nel caso di un sistema dinamico in vibrazioni libere.

Tuttavia è necessario determinare il corrispettivo del parametro ALPHA anche per sistemi dinamici in vibrazioni forzate. Si può quindi definire il rapporto tra la massima rotazione e il massimo spostamento longitudinale in vibrazioni forzate come segue:

$$R = \rho_m \frac{|u_\vartheta|_{max}}{|u_{y_{CM}}|_{max}} \quad (1.48)$$

Tuttavia si tratta di un rapporto tra quantità che non sono proprietà fisiche del sistema, poiché dipendono ovviamente dall'entità della forzante. Si rende quindi necessaria l'introduzione di un coefficiente correttivo che permetta di valutare tale rapporto a partire da proprietà fisiche del sistema.

A questo scopo si definisce il seguente rapporto adimensionalizzato:

$$\psi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R}{\alpha_u} \quad (1.49)$$

Grazie a questo coefficiente sarà possibile ottenere il valore del rapporto  $R$  semplicemente a partire da una proprietà fisica del sistema,  $\alpha_u$ , semplicemente invertendo la (1.49):

$$R = \psi \cdot \alpha_u \quad (1.50)$$

Recenti studi [Orci, 2009] hanno dimostrato come il coefficiente correttivo  $\psi$  sia funzione di pochi parametri, in particolare

$$\psi = f(e, \Omega_\vartheta T_L, \xi) \quad (1.51)$$

dove:

- $e = \frac{E}{D_e}$ : eccentricità relativa;
- $\Omega_\vartheta = \frac{\rho_k}{\rho_m}$ ;
- $T_L$ : periodo di vibrazione longitudinale;
- $\xi$ : smorzamento;

Tuttavia, è possibile, con buona approssimazione, semplificare la (1.51) eliminandone la dipendenza dal periodo di vibrazione longitudinale, per cui si ha:

$$\psi = f(e, \Omega_\vartheta, \xi) \quad (1.52)$$

È stata inoltre effettuata [Orci, 2009] una stima numerica dei valori dei parametri  $R$  e  $\psi$ , qui non riportata in quanto non necessaria per la presente trattazione.

## 1.7 Il metodo ALPHA

Grazie ai coefficienti determinati nei paragrafi precedenti, è possibile valutare, a partire dalle caratteristiche fisiche del sistema, la massima rotazione a cui è sottoposta una struttura eccentrica eccitata simicamente. Sostituendo la (1.50) nella (1.48) si ottiene:

$$|u_\vartheta|_{max} = \psi \cdot \frac{\alpha_u}{\rho_m} \cdot |u_{yCM}|_{max} \quad (1.53)$$

dove il termine  $|u_{yCM}|_{max}$  rappresenta lo spostamento longitudinale del baricentro delle masse del sistema eccentrico in esame.

Definendo poi  $|u_{yCM}|_{max-ne}$  come il massimo spostamento longitudinale relativo all'oscillatore semplice equivalente (SDOF), cioè del sistema caratterizzato dalle

stesse caratteristiche dinamiche della generica struttura asimmetrica (stessa massa totale e stesso periodo di vibrazione) ma con eccentricità relativa nulla, è possibile calcolare la seguente quantità:

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|u_{yC_M}|_{max}}{|u_{yC_M}|_{max-ne}} \quad (1.54)$$

Anche in questo caso, la stima numerica del parametro  $\delta$  [Orci, 2009] non sarà riportata perché non necessaria per la presente trattazione.

Con l'introduzione di questo ulteriore coefficiente, si arriva alla formulazione finale del metodo ALPHA:

$$|u_{\vartheta}|_{max} = \psi \cdot \frac{\alpha_u}{\rho_m} \cdot \delta \cdot |u_{yC_M}|_{max-ne} \quad (1.55)$$

Questa espressione rappresenta l'essenza del metodo ALPHA, strumento mediante cui è possibile stimare un parametro di risposta torsionale di un generico sistema eccentrico a partire dalle sue sole caratteristiche strutturali.

Ai fini della presente trattazione è utile esplicitare le dipendenze dei vari coefficienti presenti nell'equazione (1.55):

$$|u_{\vartheta}|_{max} = \psi(e, \Omega_{\vartheta}, \xi) \cdot \frac{\alpha_u(e, \Omega_{\vartheta})}{\rho_m} \cdot \delta \cdot |u_{yC_M}|_{max-ne} \quad (1.56)$$

Dalla (1.56) risulta evidente come il metodo ALPHA dipenda essenzialmente da tre parametri:

- $e = \frac{E}{D_e}$ : eccentricità relativa;
- $\Omega_{\vartheta} = \frac{\rho_k}{\rho_m}$ ;
- $\xi$ : smorzamento;

## CAPITOLO 2

### Valori tipici dei parametri $e$ ed $\Omega_\vartheta$ in casi reali

Nel capitolo precedente si è visto come il metodo ALPHA sia influenzato principalmente da tre parametri

- $e = \frac{E}{D_e}$ : eccentricità relativa;
- $\Omega_\vartheta = \frac{\rho_k}{\rho_m}$ ;
- $\xi$ : smorzamento;

Nel presente capitolo verranno studiati alcuni casi particolari, al fine di determinare in che modo si modifica il valore di questi parametri al variare della tipologia e della posizione, all'interno della pianta dell'edificio, di diversi elementi laterali resistenti.

Tuttavia è opportuno sottolineare come il parametro  $\xi$ , relativo allo smorzamento, per tutti i casi che verranno considerati verrà ritenuto costante e pari a 0,05, ossia lo smorzamento attribuito ad ogni struttura sarà del 5%. I parametri fondamentali, quindi, vengono ulteriormente ridotti a due e risultano essere l'eccentricità relativa  $e$  ed  $\Omega_\vartheta$ .

### 2.1 Struttura di base

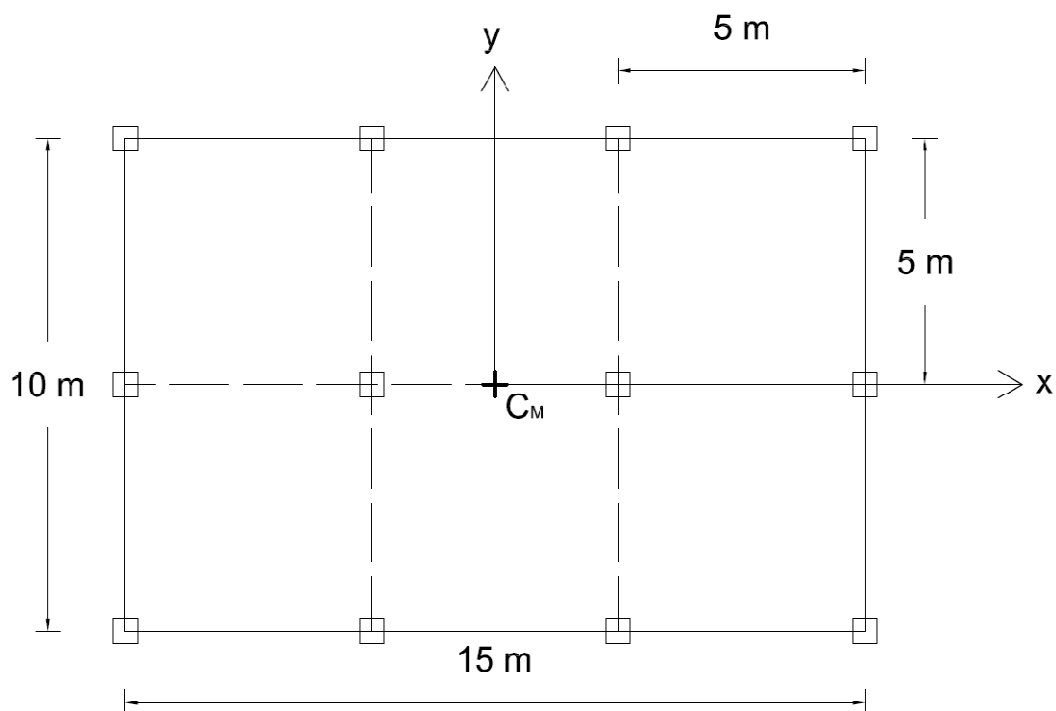
La struttura che rappresenterà l'oggetto di questo studio preliminare (e di tutti gli studi successivi) avrà le seguenti caratteristiche:

- Dimensione Trasversale  $L = 15 \text{ m}$
- Dimensione Longitudinale  $B = 10 \text{ m}$
- Maglia strutturale  $5 \times 5 \text{ m}$
- Pilastrini  $0,5 \times 0,5 \text{ m}$
- Altezza Pilastrini  $H = 5 \text{ m}$
- Carichi permanenti: Soletta di 30 cm di c.a.  $q_p = 7,5 \text{ kN/m}^2$
- Carichi accidentali: Civile Abitazione  $q_a = 2 \text{ kN/m}^2$

Inoltre tutte le analisi si svolgeranno sotto le seguenti ipotesi:

- gli elementi resistenti laterali sono privi di massa (*mass less*) e assialmente indeformabili;
- il solaio è infinitamente rigido nel proprio piano e la distribuzione delle masse è uniforme;
- il sistema di riferimento è incentrato nel baricentro delle masse  $C_M$ ;
- l'analisi è condotta in ambito elastico-lineare;
- la rigidezza del sistema è uguale nelle due direzioni  $x$  e  $y$ ;
- gli elementi resistenti saranno posizionati in modo da avere eccentricità longitudinale nulla ( $e_y = 0$ , sistemi *one-way eccentricity*);

Per effetto delle prime due ipotesi, il baricentro delle masse  $C_M$  si ritrova a coincidere con il baricentro geometrico della struttura (Fig. 2.1).



**Fig. 2.1** Pianta della struttura di riferimento


## 2.2 Elementi resistenti

Come affermato nel paragrafo precedente, si è stabilito di studiare, per il sistema appena descritto, l'andamento dei parametri  $e$  ed  $\Omega_9$  al variare della posizione di diversi elementi resistenti:

- un setto in muratura
- un vano a C
- un vano quadrato

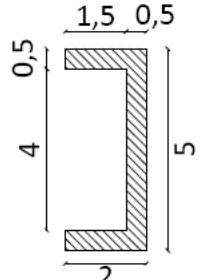
le cui caratteristiche sono descritte in Fig. 2.2

Setto



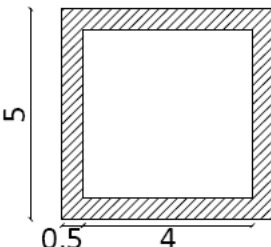
$$J = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,5 \cdot 2^3}{12} = 0,3333 \text{ m}^4$$

Vano a C



$$J = \frac{(BH^3 - bh^3)}{12} = \frac{(2 \cdot 5^3 - 1,5 \cdot 4^3)}{12} = 12,83 \text{ m}^4$$

Vano quadrato



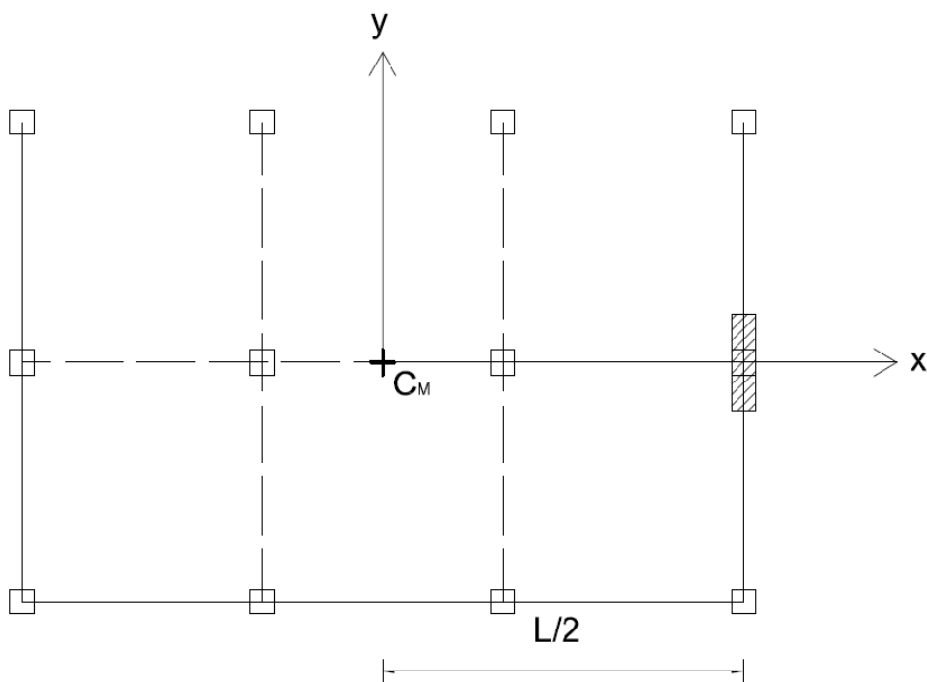
$$J = \frac{B^4 - b^4}{12} = \frac{5^4 - 4^4}{12} = 30,75 \text{ m}^4$$

**Fig. 2.2** Elementi resistenti (quote in metri)

## 2.2.1 Setto Singolo

### 2.2.1.1 Setto ad $L/2$ dal baricentro

Si consideri ora un setto rettangolare, del tipo indicato in Fig. 2.2, il cui baricentro è posizionato ad una distanza dal baricentro pari ad  $L/2$  lungo la direzione  $x$ , come indicato in Fig. 2.3:



**Fig. 2.3** Posizione del setto a distanza  $L/2$  dal baricentro

posizionare il setto in questa posizione permette di mantenere l'eccentricità longitudinale nulla ( $e_y = 0$ ), per cui, per individuare la posizione del baricentro delle rigidezze, sarà sufficiente calcolare:

$$X_{C_K} = \frac{\sum k_i x_i}{\sum k_i} \quad (2.1)$$

In questo caso abbiamo due elementi che contribuiscono a definire la rigidezza del sistema, ossia i pilastri ed il setto. Per il setto è possibile definire la rigidezza come:

$$K_{setto} = \frac{12 \cdot EJ_{setto}}{H^3} \quad (2.2)$$

mentre per i pilastri si ha:

$$K_{TOT\ pilastri} = (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \frac{12 \cdot EJ_{pilastro}}{H^3} \quad (2.3)$$

dove  $n_1$  ed  $n_2$  sono il numero di campate rispettivamente in direzione  $x$  ed in direzione  $y$ . Inserendo le (2.2) e (2.3) nella (2.1) si ottiene:

$$X_{C_K} = \frac{\frac{12 \cdot EJ_{setto}}{H^3} \cdot x_{setto} + \frac{12 \cdot EJ_{pilastro}}{H^3} \sum x_{pilastri}}{\frac{12 \cdot EJ_{setto}}{H^3} + (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \frac{12 \cdot EJ_{pilastro}}{H^3}} \quad (2.4)$$

Se ora si posiziona il sistema di riferimento nel baricentro delle masse  $C_M$ , come indicato in Fig. 2.1, il termine al numeratore relativo alla rigidezza dei singoli pilastri scompare; questo fatto è dovuto alla disposizione simmetrica dei pilastri, che fa sì che i loro contributi si annullino a vicenda.

Supponendo anche lo stesso modulo elastico  $E$  per tutti gli elementi, la (2.4) diventa:

$$X_{C_K} = \frac{12 \cdot J_{setto} \cdot x_{setto}}{12 \cdot J_{setto} + (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot 12 \cdot J_{pilastro}} \quad (2.5)$$

dove:

$$J_{pilastro} = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,5^4}{12} = 0,00528 \text{ m}^4 \quad (2.6)$$

$$J_{setto} = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,5 \cdot 2^3}{12} = 0,3333 \text{ m}^4 \quad (2.7)$$

Sostituendo la (2.6) e la (2.7) nella (2.5), considerando anche che

$$x_{setto} = L/2 = 7,5 \text{ m}$$

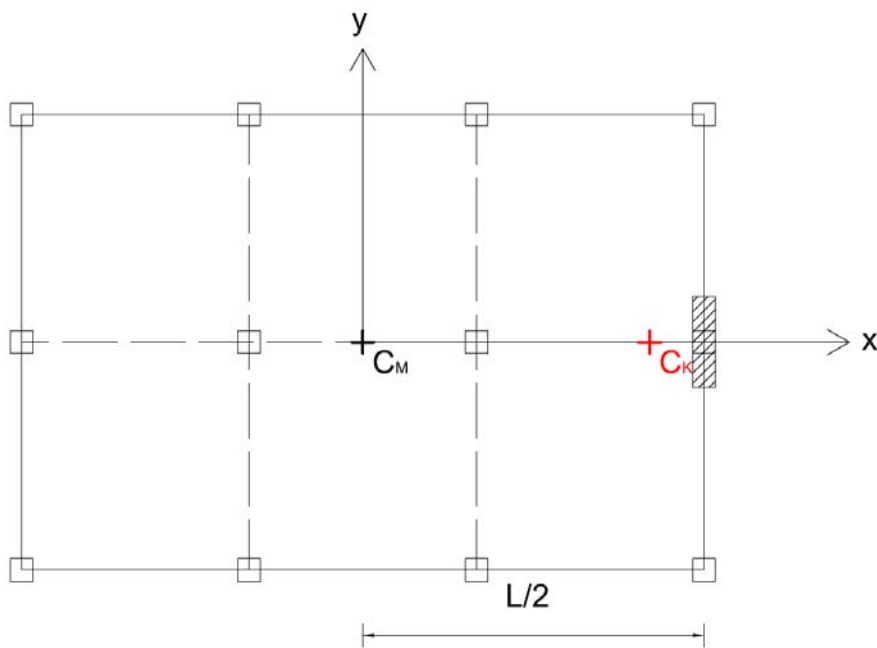


si ottiene:

$$X_{C_K} = \frac{12 \cdot 0,3333 \cdot 7,5}{12 \cdot 0,3333 + (3 + 1)(2 + 1) \cdot 12 \cdot 0,00528} \quad (2.8)$$

quindi:

$$X_{C_K} = E_x = 6,3 \text{ m} \quad (2.9)$$



**Fig. 2.4** Posizione del baricentro delle rigidezze

Per determinare il valore del parametro  $e_x = e$ , però, è necessario determinare il valore della diagonale equivalente  $D_e$ , poiché

$$e_x = \frac{E_x}{D_e} \quad (2.10)$$

Da definizione si ha che

$$D_e = \rho_m \cdot \sqrt{12} \quad (2.11)$$

e

$$\rho_m = \sqrt{\frac{I_m}{m_{tot}}} \quad (2.12)$$

È quindi necessario determinare prima il valore del momento d'inerzia  $I_m$ , calcolato rispetto al baricentro delle masse. Si ha quindi:

$$I_m = q_{TOT} \left[ \frac{LB}{12} (L^2 + B^2) + LB(X_{CM})^2 \right] + q_{TOT} \left[ \frac{bh}{12} (b^2 + h^2) + bh(E_x - X_{CM})^2 \right] \quad (2.13)$$

Sostituendo i valori numerici nella (2.13) si ottiene:

$$I_m = (2 + 7,5) \left\{ \left[ \frac{15 \cdot 10}{12} (15^2 + 10^2) + 15 \cdot 10(0)^2 \right] + \left[ \frac{0,5 \cdot 2}{12} (0,5^2 + 2^2) + 0,5 \cdot 2(7,5 - 0)^2 \right] \right\}$$

da cui si ricava:

$$I_m = 39131,5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \quad (2.14)$$

La massa totale si calcola come:

$$m_{tot} = (q_a + q_p) \cdot (B \cdot L) \quad (2.15)$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$m_{tot} = (2 + 7,5) \cdot (10 \cdot 15) = 1425 \text{ kN} \quad (2.16)$$

Sostituendo la (2.16) e la (2.14) nella (2.12) si ottiene.

$$\rho_m = \sqrt{\frac{39131,5}{1425}} = 5,2 \text{ m} \quad (2.17)$$

Che, sostituita nella (2.11) fornisce il valore di  $D_e$  cercato:

$$D_e = 5,2 \cdot \sqrt{12} = 18,15 \text{ m} \quad (2.18)$$

Sostituendo la (2.18) nella (2.11) si ricava:

$$e_x = \frac{E_x}{D_e} = \frac{6,3}{18,15} \quad (2.19)$$

da cui:

$$e_x = e = 0,35 \quad (2.20)$$

Per determinare il valore di  $\Omega_3$ , invece, è necessario calcolare anche il raggio d'inerzia delle rigidezze  $\rho_k$ , poiché:

$$\Omega_3 = \frac{\rho_k}{\rho_m} \quad (2.21)$$

dove  $\rho_k$  è definito come:

$$\rho_k = \sqrt{\frac{I_{pk,C_K}}{k_{tot}}} \quad (2.22)$$

È quindi necessario calcolare prima il valore del momento d'inerzia delle rigidezze  $I_{pk,C_K}$ , calcolato rispetto al baricentro delle rigidezze. Esso si compone di due contributi, uno dovuto ai pilastri ( $I_{pk,C_K,pil}$ ) e uno dovuto al setto ( $I_{pk,C_K,setto}$ ).

$$I_{pk,C_K,pil} = 2k_{sing} \cdot \left\{ (n_2 + 1) \cdot \left[ \left( \frac{L}{6} + \frac{L}{3} \right)^2 + \left( \frac{L}{6} \right)^2 + 2X_{C_M}^2 \right] + (n_1 + 1) \left( \frac{B}{2} \right)^2 \right\} \quad (2.23)$$

$$I_{pk,C_K,setto} = k_{setto} \cdot (x_{setto} - X_{C_K})^2 \quad (2.24)$$

Sostituendo i numeri all'interno delle (2.23) e (2.24) si ottiene:

$$I_{pk,C_K,pil} = 0,526835 \cdot E/H^3 \text{ kNm}^2 \quad (2.25)$$

$$I_{pk,C_K,setto} = 0,044875 \cdot E/H^3 \text{ kNm}^2 \quad (2.26)$$

da cui si ha:

$$\begin{aligned} I_{pk,C_K} &= (0,526835 + 0,044875) \cdot E/H^3 \\ &= 0,571711 \cdot E/H^3 \text{ kNm}^2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Per quanto riguarda la rigidezza totale, questa si calcola come:

$$k_{tot} = \frac{12 \cdot EJ_{setto}}{H^3} + 12 \frac{12 \cdot EJ_{pilastro}}{H^3} \quad (2.28)$$

Sostituendo i valori numerici nella (2.28) si ricava:

$$\begin{aligned} k_{tot} &= \left(\frac{E}{H^3}\right) \cdot 12 \cdot (0,333333 + 12 \cdot 0,005208) \\ &= 4,75 \cdot E/H^3 \text{ kN} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Inserendo la (2.29) e la (2.27) nella (2.22) si ottiene:

$$\rho_k = \sqrt{\frac{0,571711 \cdot E/H^3}{4,75 \cdot E/H^3}} = 3,9 \text{ m} \quad (2.30)$$

che, sostituita nella (2.21) assieme alla (2.17) permette di ricavare il valore di  $\Omega_g$  per questa tipologia di struttura:

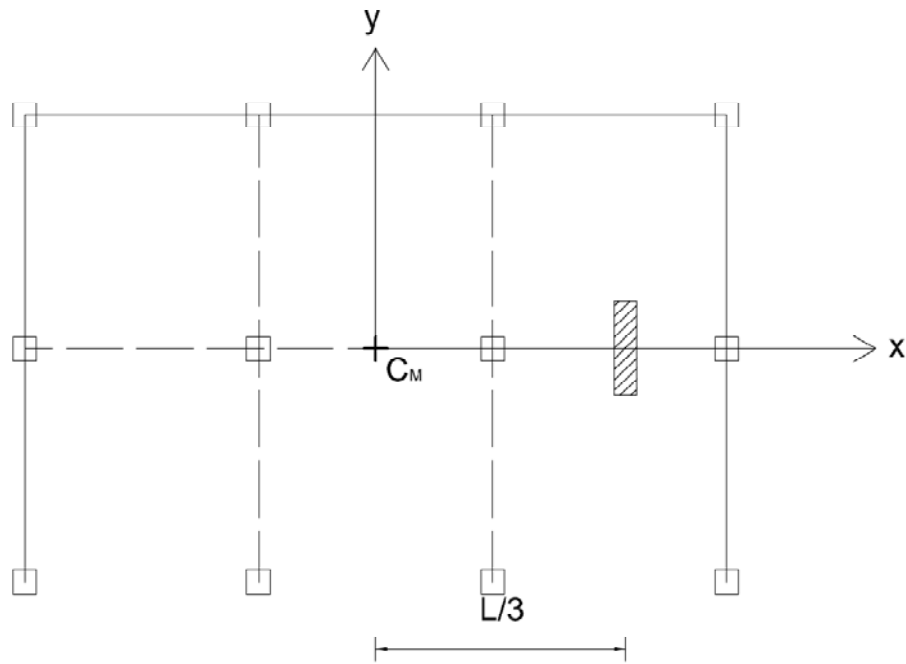
$$\Omega_g = \frac{\rho_k}{\rho_m} = \frac{3,9}{5,2} = 0,74 \quad (2.31)$$

Riassumendo, quindi, un telaio rettangolare con le caratteristiche elencate all'inizio di questo capitolo, nel quale sia inserito un setto rettangolare a 7,5 m dal baricentro, è caratterizzato dai seguenti valori di  $e$  ed  $\Omega_g$ :

- $e = 0,35$
- $\Omega_g = 0,74$

### 2.2.1.2 Setto ad $L/3$ dal baricentro

Come secondo caso di calcolo si è mantenuto lo stesso setto, ma questa volta ad una distanza pari ad  $L/3$  dal baricentro della pianta, che ricordiamo essere coincidente con il baricentro delle masse  $C_M$ , come indicato in Fig. 2.4



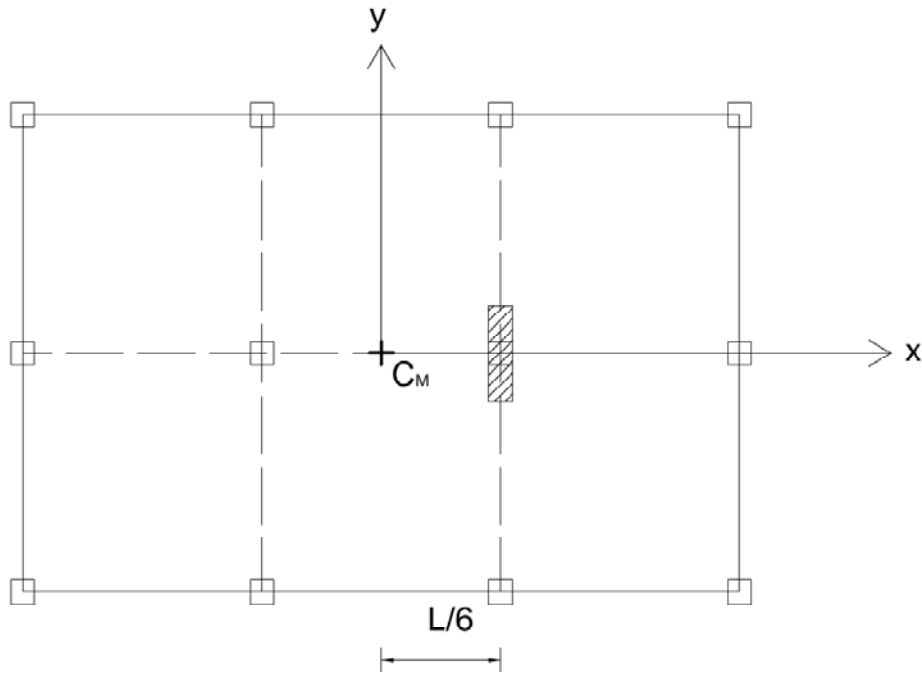
**Fig. 2.5** Posizione del setto a distanza  $L/3$  dal baricentro

Procedendo come per il caso precedente, ma considerando  $x_{setto} = 5 \text{ m}$ , si ottengono i seguenti valori dei parametri  $e$  ed  $\Omega_g$ :

- $e = 0,23$
- $\Omega_g = 0,63$

### 2.2.1.3 Setto ad $L/6$ dal baricentro

Anche per questo caso la posizione del setto è stata avvicinata al baricentro, ora distante solo  $L/6$  dal baricentro del setto.



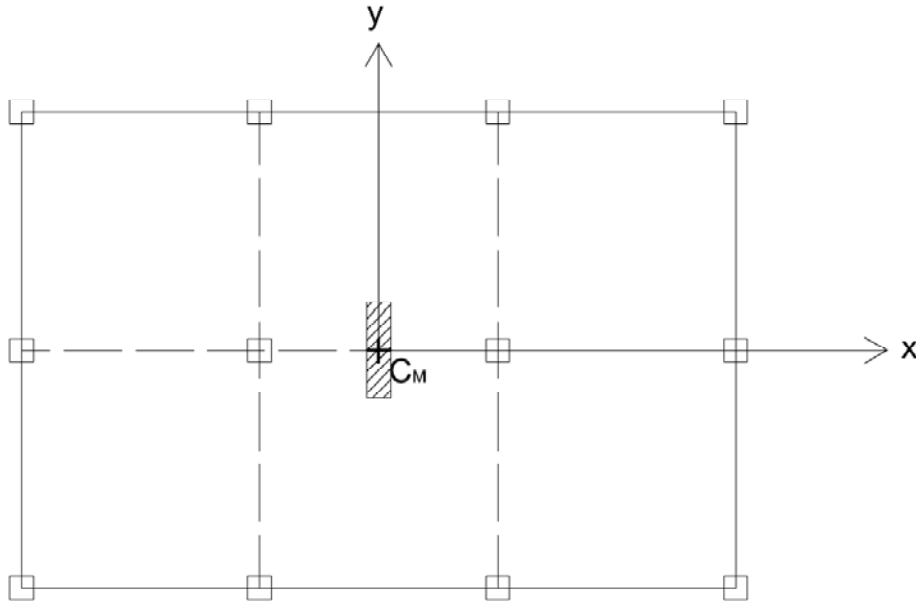
**Fig. 2.5** Posizione del setto a distanza  $L/6$  dal baricentro

Imponendo  $x_{setto} = 2,5 \text{ m}$  si ottengono i seguenti valori di  $e$  ed  $\Omega_g$ :

- $e = 0,12$
- $\Omega_g = 0,553$

### 2.2.1.3 Setto in corrispondenza del baricentro

Come ultimo caso di calcolo si considera il setto posizionato sul baricentro, per cui  $x_{setto} = 0 \text{ m}$ .



**Fig. 2.6** Posizione del setto in corrispondenza del baricentro

Come prevedibile, in questo caso l'eccentricità si annulla, poiché la struttura è nuovamente simmetrica. Procedendo come già indicato, si ottengono i seguenti risultati:

- $e = 0$
- $\Omega_y = 0,525$

### 2.2.1.4 Riassunto

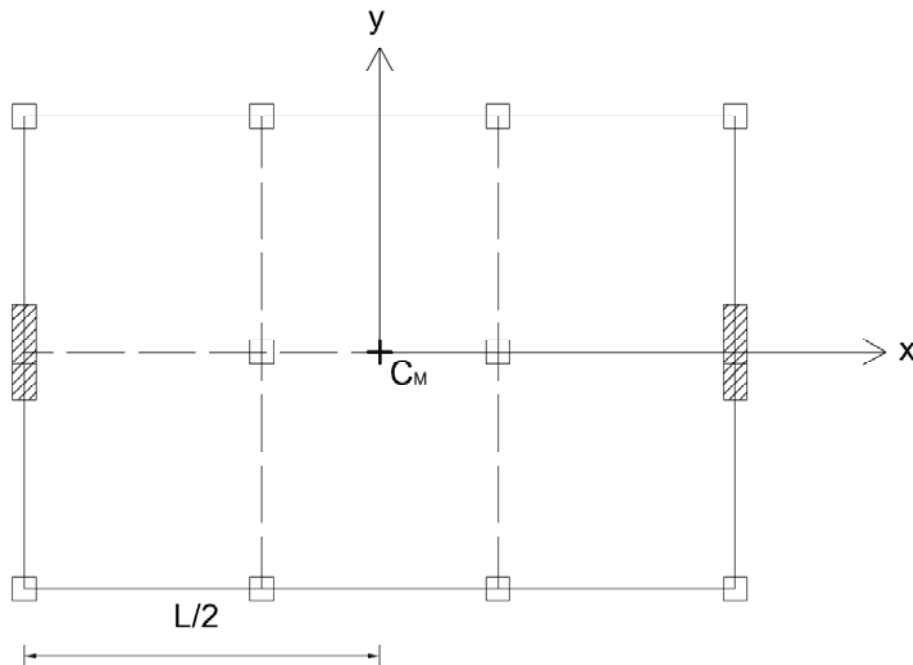
Per una miglior chiarezza e comprensione, si riepilogano i risultati nella seguente tabella:

Distanza da $C_M$	$e$	$\Omega_g$
$L/2$	0,35	0,74
$L/3$	0,23	0,63
$L/6$	0,12	0,553
0	0	0,525

**Tab. 2.1** Valori di  $e$  ed  $\Omega_g$  nel caso di setto singolo

### 2.2.2 Doppio Setto

Il caso successivo prevede l'inserimento di un secondo setto ad una distanza prefissata pari a  $-L/2$  dal baricentro, come mostrato in Fig. 2.7:



**Fig. 2.7** Posizione dei due setti



In questo modo la (2.4) diventa

$$X_{C_K} = \frac{\frac{12 \cdot EJ_{setto}}{H^3} \cdot x_{setto} + \frac{12 \cdot EJ_{setto\ fissato}}{H^3} \cdot x_{setto\ fissato} + \frac{12 \cdot EJ_{pilastro}}{H^3} \sum x_{pilastri}}{\frac{12 \cdot EJ_{setto}}{H^3} + \frac{12 \cdot EJ_{setto\ fissato}}{H^3} + (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \frac{12 \cdot EJ_{pilastro}}{H^3}} \quad (2.32)$$

Supponendo i due setti aventi le stesse caratteristiche è possibile operare delle semplificazioni, per cui:

$$X_{C_K} = \frac{12 \cdot J_{setto} \cdot (x_{setto} + x_{setto\ fissato}) + 12 \cdot EJ_{pilastro} \sum x_{pilastri}}{2 \cdot 12 \cdot J_{setto} + (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot 12 \cdot J_{pilastro}} \quad (2.33)$$

Come per i casi precedenti, anche in questo caso è possibile eliminare a numeratore il termine relativo ai pilastri, data la loro disposizione simmetrica in pianta:

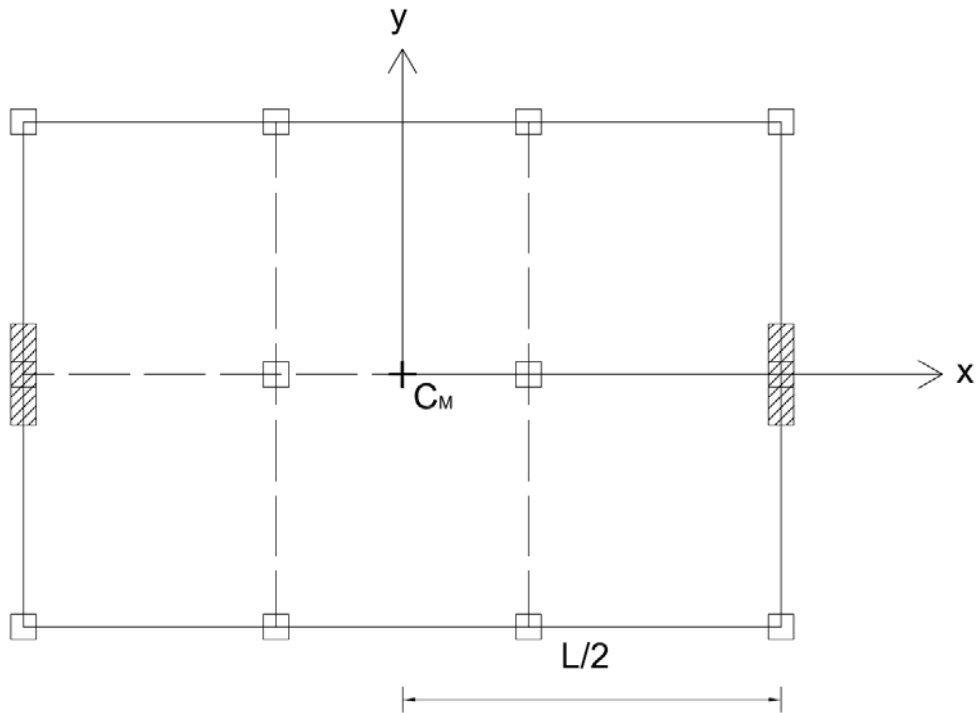
$$X_{C_K} = \frac{12 \cdot J_{setto} \cdot (x_{setto} + x_{setto\ fissato})}{2 \cdot 12 \cdot J_{setto} + (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot 12 \cdot J_{pilastro}} \quad (2.34)$$

La presenza del secondo setto comporta anche una variazione della (2.24), che diventa:

$$I_{pk,C_K,setto} = k_{setto} \cdot \left[ (x_{setto} - X_{C_K})^2 + (x_{setto\ fissato} - X_{C_K})^2 \right] \quad (2.35)$$

Le altre equazioni elencate in precedenza non vengono influenzate dalla presenza del secondo setto.

### 2.2.2.1 Setto ad $L/2$ dal baricentro



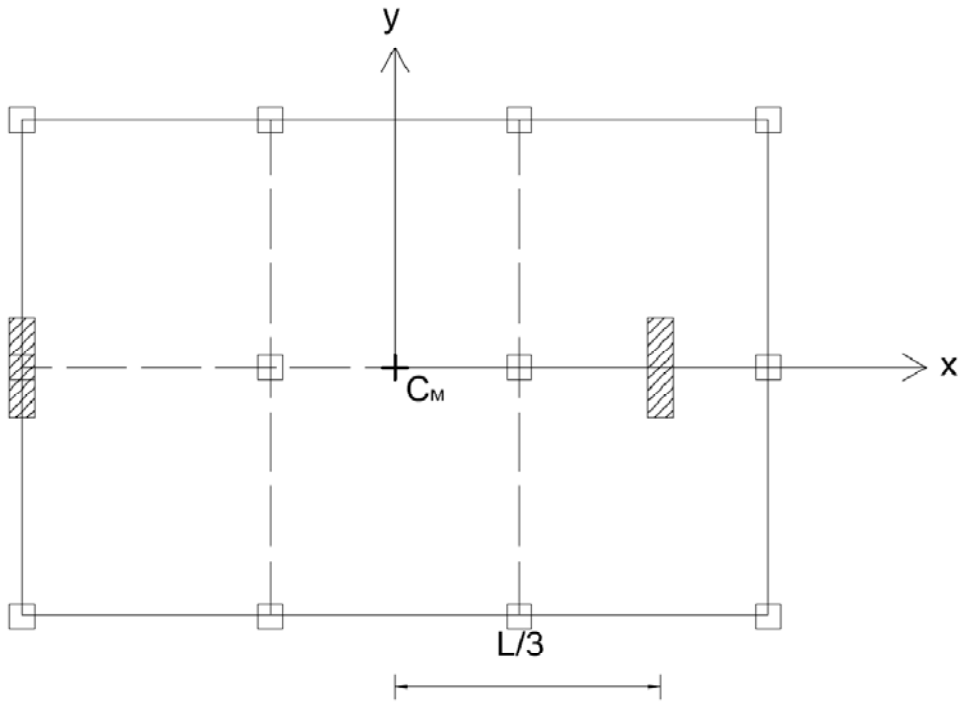
**Fig. 2.8** Posizione dei due setti

Come si può intuire dalla Fig. 2.8, l'eccentricità relativa  $e$  in questo caso sarà pari a zero, data la disposizione simmetrica di tutti gli elementi resistenti. Risolvendo infatti le equazioni indicate nei paragrafi precedenti si ottiene:

- $e = 0$
- $\Omega_9 = 1,378$

### 2.2.2.2 Setto ad $L/3$ dal baricentro

In questo caso, invece, il sistema svilupperà un valore di eccentricità non nullo, poiché, come risulta evidente in Fig. 2.9, spostando il setto la struttura perde la sua simmetria.

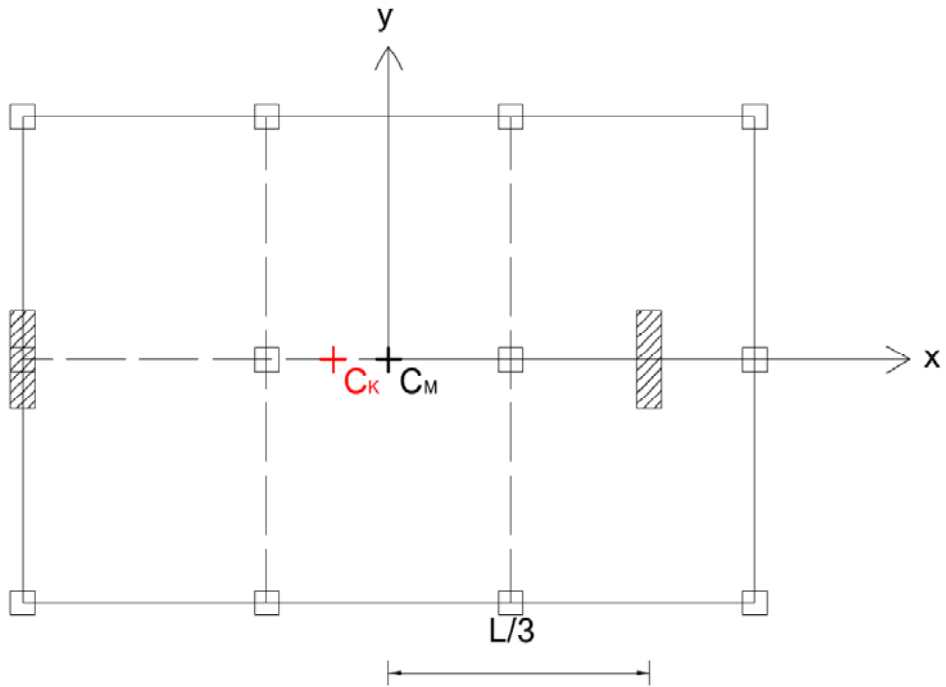


**Fig. 2.9** Posizione dei due setti

In questo caso i parametri  $e$  ed  $\Omega_g$  assumono i seguenti valori:

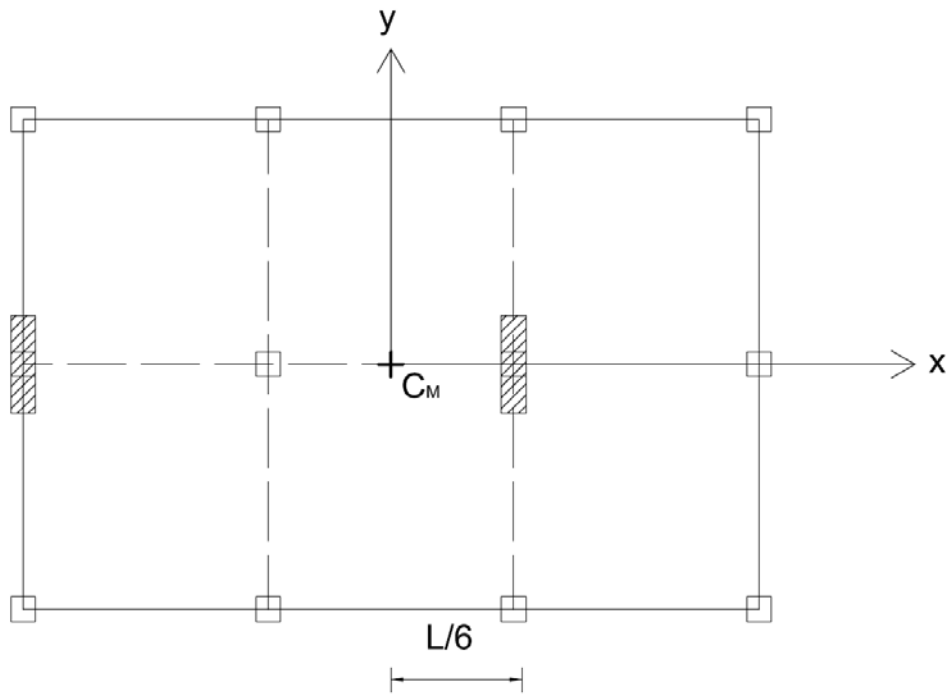
- $e = -0,063$
- $\Omega_g = 1,27$

Il fatto che l'eccentricità relativa abbia un valore negativo sta ad indicare che la posizione del centro delle rigidità  $C_K$  è a sinistra del baricentro, come indicato in Fig. 2.10:



**Fig. 2.10** Posizione del baricentro delle rigidezze  $C_K$

### 2.2.2.3 Setto ad $L/6$ dal baricentro

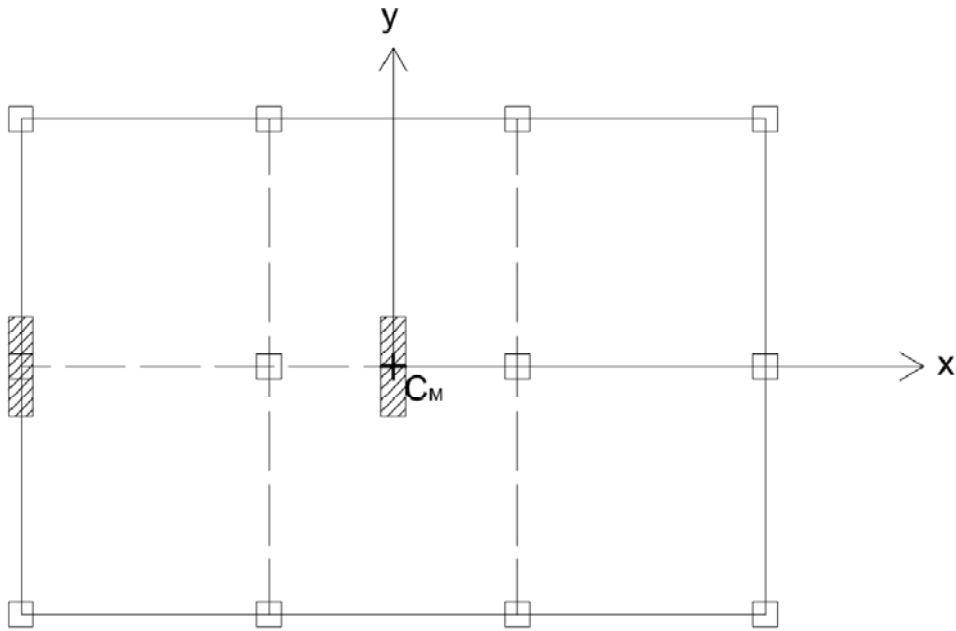


**Fig. 2.11** Posizione dei due setti

In questo caso si ottengono i seguenti parametri:

- $e = -0,127$
- $\Omega_\vartheta = 1,18$

#### 2.2.2.4 Setto in corrispondenza del baricentro



**Fig. 2.12** Posizione dei due setti

A differenza del caso precedente, posizionare il setto nel baricentro genera un valore di eccentricità relativa  $e$  non nullo. Svolgendo i calcoli come indicato in precedenza, infatti, si ottiene:

- $e = -0,18$
- $\Omega_\vartheta = 1,112$

### 2.2.2.5 Riassunto

Per una migliore chiarezza si riportano i risultati ottenuti nella seguente tabella:

Distanza da $C_M$	$e$	$\Omega_g$
$L/2$	0	1,378
$L/3$	-0,063	1,27
$L/6$	-0,127	1,18
0	-0,18	1,112

Tab. 2.2 Valori di  $e$  ed  $\Omega_g$  nel caso di doppio setto

### 2.2.3 Vano a C

Il prossimo caso di studio prevede l'inserimento di un *vano a C*, come indicato in Fig. 2.13:

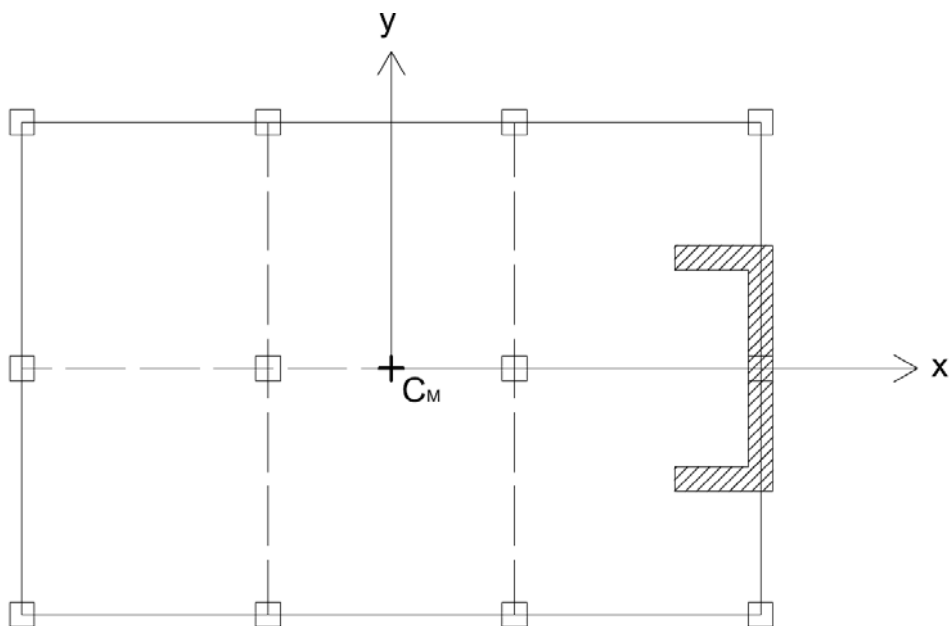
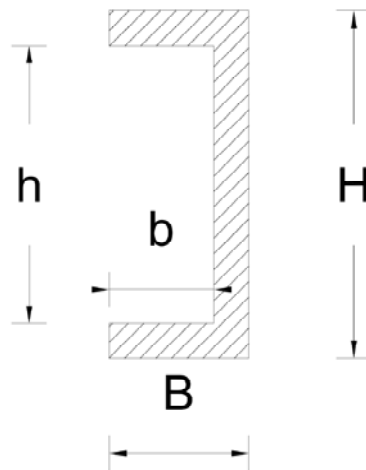


Fig. 2.13 Pianta con vano a C

In questo caso le equazioni (2.1)-(2.31) non cambiano nella forma. Si ha invece una variazione dei termini, in quanto il momento d'inerzia del setto ( $J_{setto}$ ) viene sostituito dal momento d'inerzia  $J_C$  che vale:

$$J_C = \frac{(BH^3 - bh^3)}{12}$$

dove i termini  $H$ ,  $B$ ,  $b$  ed  $h$  sono quelli indicati in Fig. 2.14:



**Fig. 2.13** Vano a C

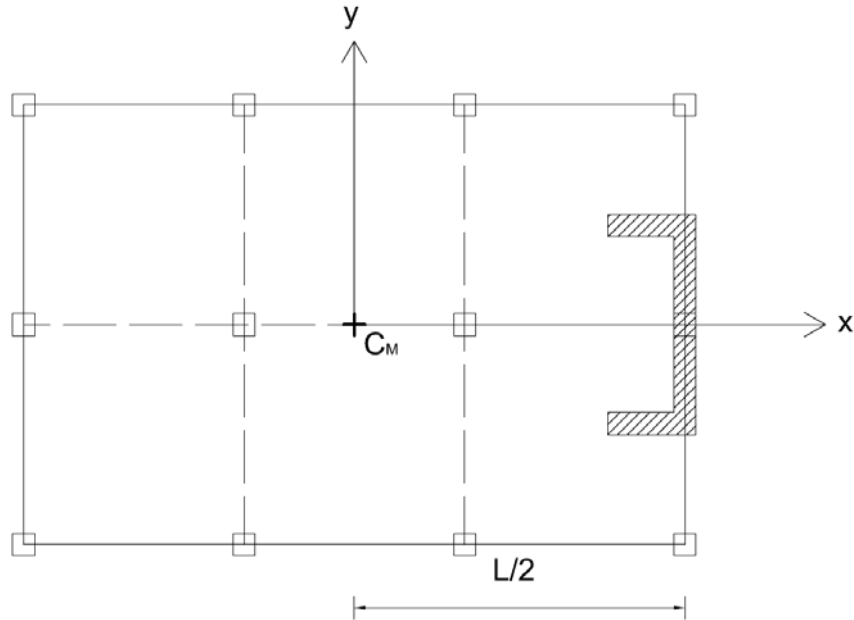
Sostituendo i valori numerici, indicati in Fig. 2.2, si ottiene:

$$J_C = 12,83 \text{ m}^4$$

Una volta determinato il valore di  $J_C$  è possibile calcolare anche il valore della rigidezza del setto  $k_C$ , definita come:

$$k_C = \frac{12 \cdot EJ_C}{H^3} \quad (2.36)$$

### 2.2.3.1 Vano ad $L/2$ dal baricentro



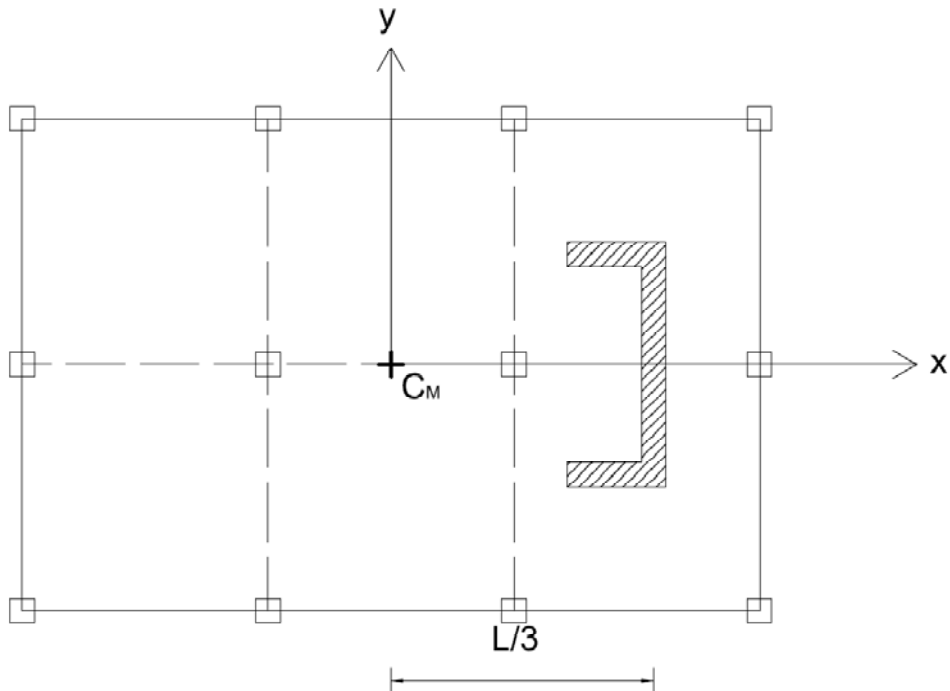
**Fig. 2.14** Pianta con vano a  $C$  a distanza  $L/2$  dal baricentro

In questo caso il procedimento è analogo a quello descritto nel paragrafo 2.2.2.1; sostituendo, come già affermato, il valore di  $J_{setto}$  con quello di  $J_C$  si ottengono i seguenti valori per i parametri cercati:

- $e = 0,447$
- $\Omega_\theta = 0,135$



### 2.2.3.2 Vano ad $L/3$ dal baricentro

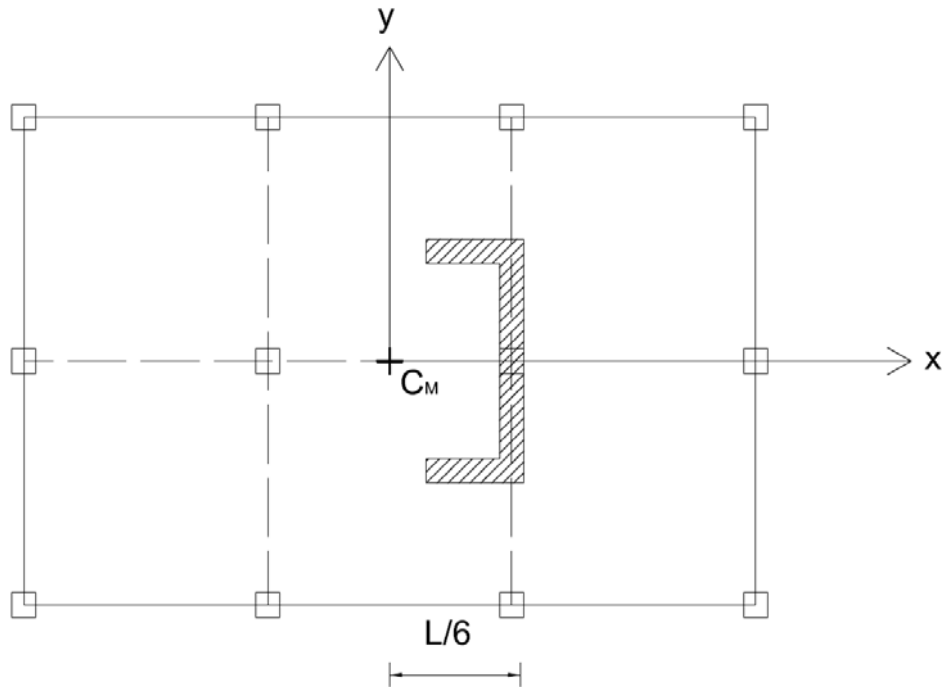


**Fig. 2.15** Pianta con vano a  $C$  a distanza  $L/3$  dal baricentro

Posizionando il vano in questo modo si ottengono i seguenti valori per i parametri  $e$  ed  $\Omega_g$ :

- $e = 0,309$
- $\Omega_g = 0,113$

### 2.2.3.3 Vano ad $L/6$ dal baricentro

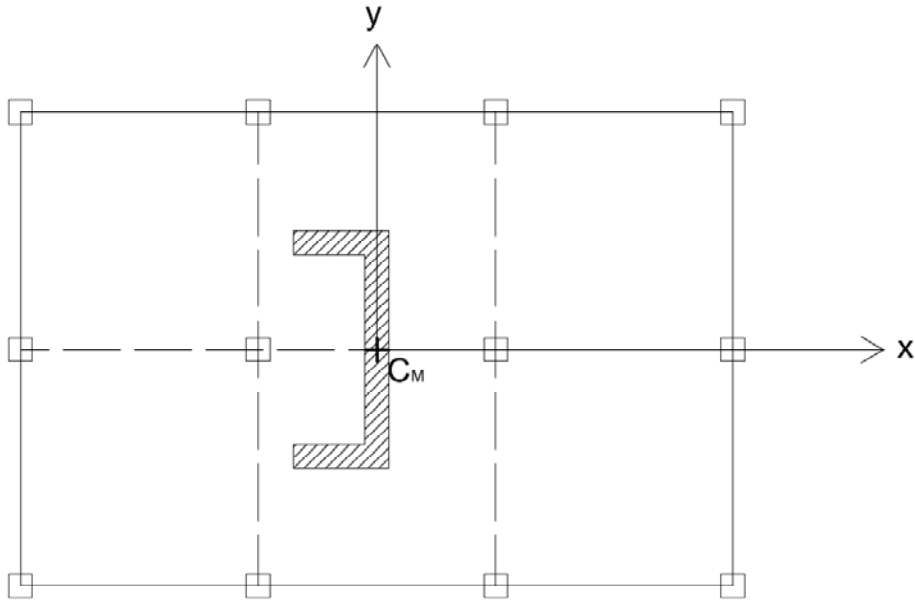


**Fig. 2.15** Pianta con vano a  $C$  a distanza  $L/6$  dal baricentro

In questo caso si ottiene:

- $e = 0,171$
- $\Omega_g = 0,096$

### 2.2.3.4 Vano in corrispondenza del baricentro



**Fig. 2.16** Pianta con vano a C in corrispondenza del baricentro

In questo caso i valori dei parametri sono i seguenti:

- $e = 0,033$
- $\Omega_g = 0,088$

Si noti come, in questo caso, avere il vano in corrispondenza del baricentro NON comporta l'assenza di eccentricità relativa. Questo fatto è dovuto alla forma a C, e quindi non simmetrica, del vano stesso

### 2.2.3.4 Riassunto

Riassumendo, per il caso di vano a C i valori assunti dai parametri  $e$  ed  $\Omega_g$  sono i seguenti:

Distanza da $C_M$	$e$	$\Omega_g$
$L/2$	0,447	0,135
$L/3$	0,309	0,113
$L/6$	0,171	0,096
0	0,033	0,088

**Tab. 2.3** Valori di  $e$  ed  $\Omega_g$  nel caso di vano a C

## 2.2.4 Vano a C con setto

Come per il caso di setto singolo, si aggiunge ora un setto ad una distanza  $-L/2$  dal baricentro, come mostrato in Fig. 2.17:

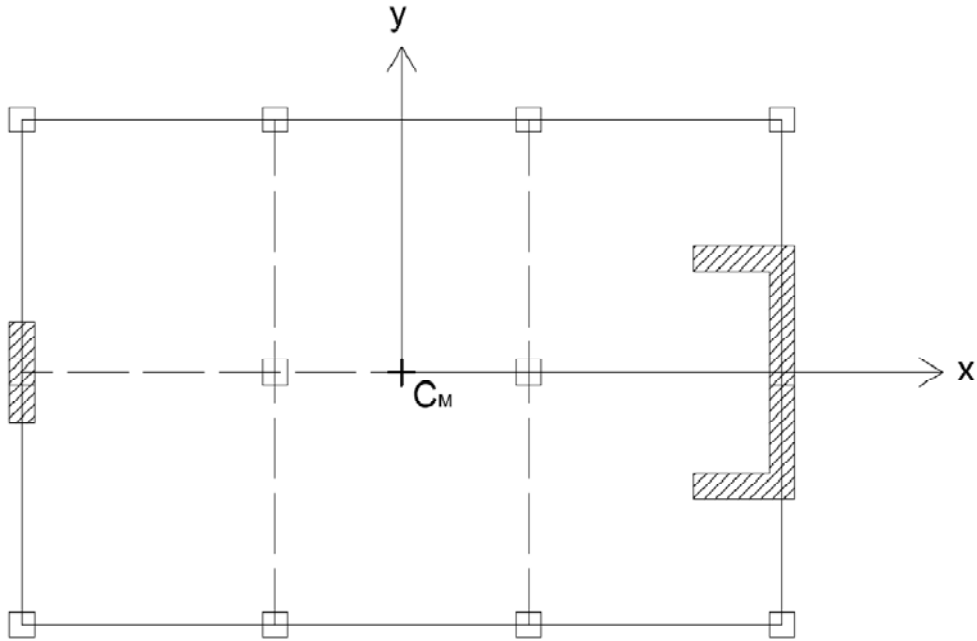


Fig. 2.17 Pianta con vano a C e setto

Prendendo come riferimento il caso di doppio setto, le equazioni (2.32)-(2.35) diventano:

$$X_{C_K} = \frac{\frac{12 \cdot EJ_C}{H^3} \cdot x_C + \frac{12 \cdot EJ_{setto}}{H^3} \cdot x_{setto} + \frac{12 \cdot EJ_{pilastro}}{H^3} \sum x_{pilastri}}{\frac{12 \cdot EJ_C}{H^3} + \frac{12 \cdot EJ_{setto}}{H^3} + (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \frac{12 \cdot EJ_{pilastro}}{H^3}} \quad (2.37)$$

Supponendo per tutti gli elementi resistenti lo stesso modulo elastico E, la (2.36) si semplifica:

$$X_{C_K} = \frac{12 \cdot J_C \cdot x_C + 12 \cdot J_{setto} \cdot x_{setto} + 12 \cdot EJ_{pilastro} \sum x_{pilastri}}{12 \cdot J_{setto} + 12 \cdot J_C + (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot 12 \cdot J_{pilastro}} \quad (2.38)$$

Come per i casi precedenti, anche in questo caso è possibile eliminare a numeratore il termine relativo ai pilastri, data la loro disposizione simmetrica in pianta:

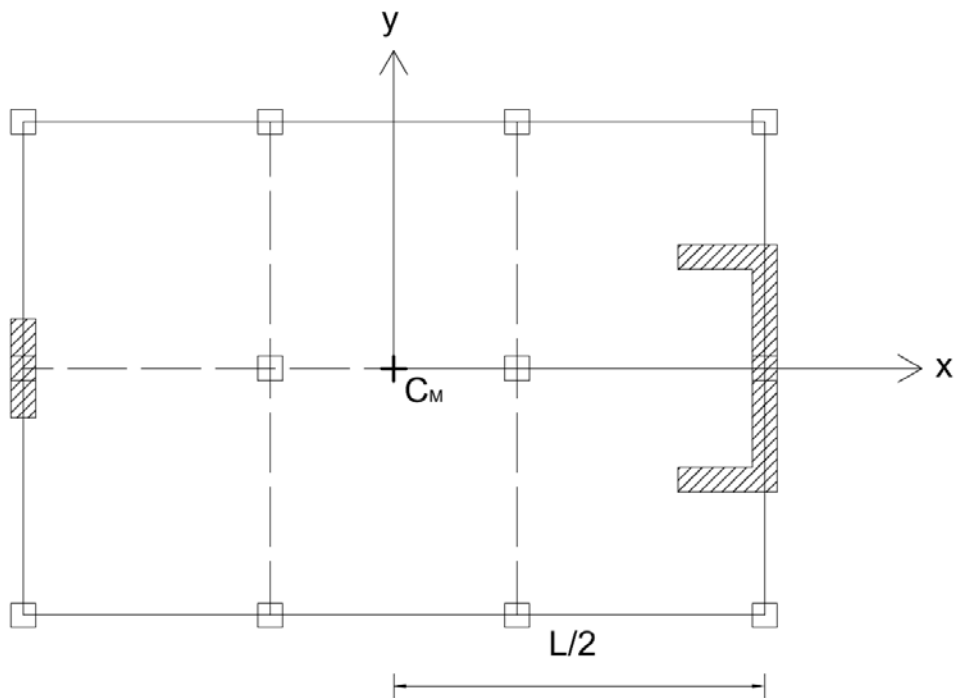
$$X_{C_K} = \frac{12 \cdot J_C \cdot x_C + 12 \cdot J_{setto} \cdot x_{setto}}{12 \cdot J_{setto} + 12 \cdot J_C + (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot 12 \cdot J_{pilastro}} \quad (2.39)$$

La presenza del setto aggiuntivo comporta anche una variazione della (2.24), che diventa:

$$I_{pk,C_K,setto} = k_{setto} \cdot (x_{setto} - X_{C_K})^2 + k_C \cdot (x_C - X_{C_K})^2 \quad (2.40)$$

dove  $k_C$  è definito dalla (2.36).

#### 2.2.4.1 Vano ad $L/2$ dal baricentro

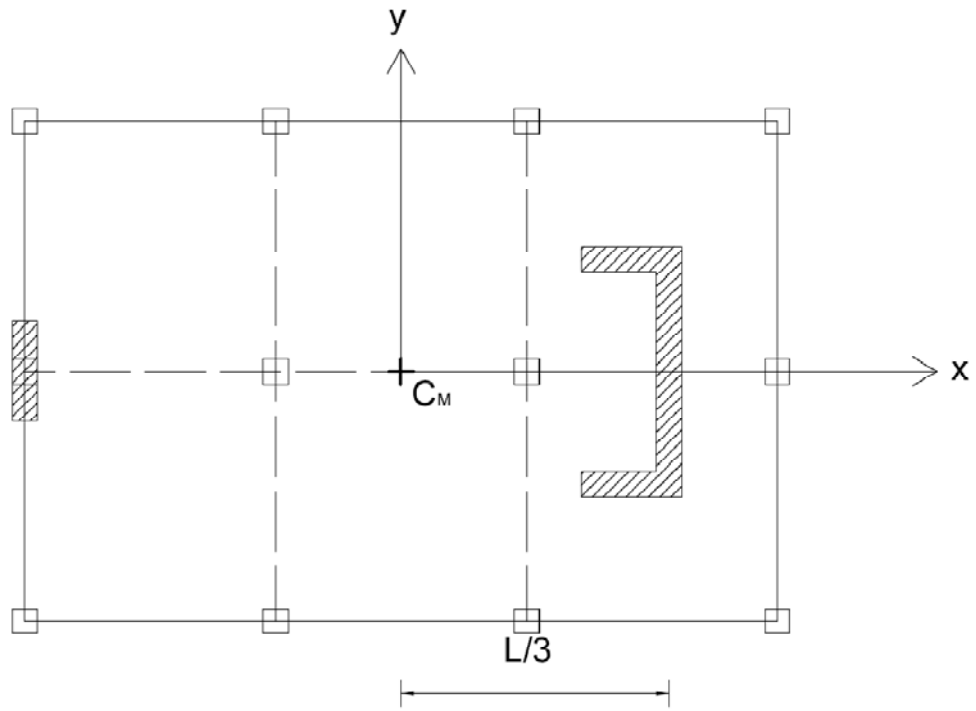


**Fig. 2.18** Pianta con setto e vano a C ad  $L/2$  dal baricentro

In questo caso si ha:

- $e = 0,4$
- $\Omega_3 = 0,262$

### 2.2.4.2 Vano ad $L/3$ dal baricentro

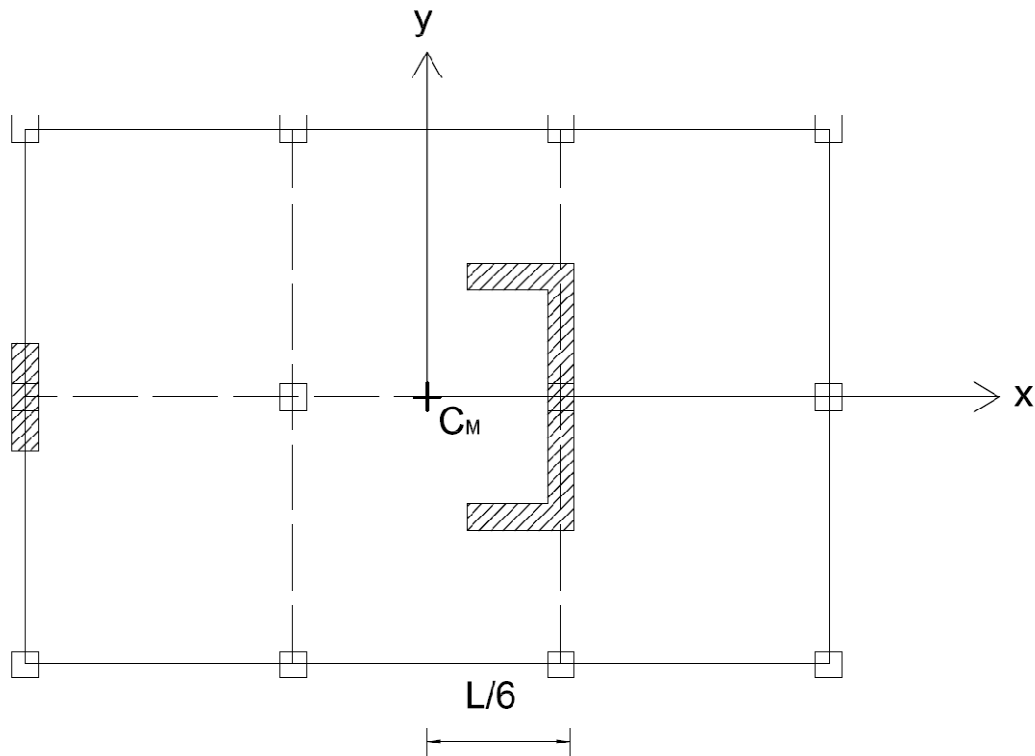


**Fig. 2.19** Pianta con setto e vano a  $C$  ad  $L/3$  dal baricentro

Disponendo il vano in questo modo si ottiene:

- $e = 0,27$
- $\Omega_\theta = 0,249$

### 2.2.4.3 Vano ad $L/6$ dal baricentro

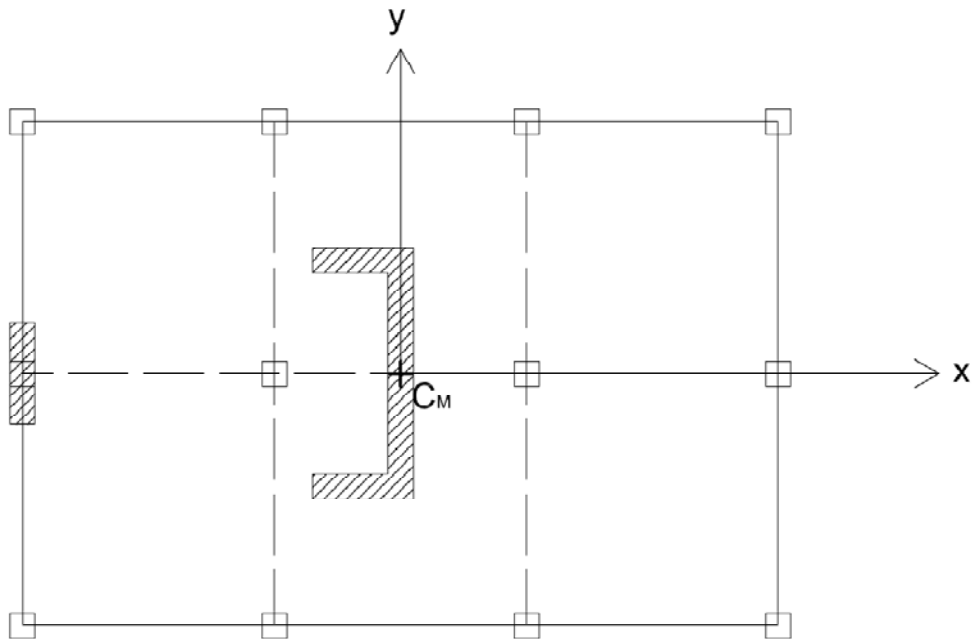


**Fig. 2.20** Pianta con setto e vano a  $C$  ad  $L/6$  dal baricentro

Da questa disposizione si ottengono i seguenti valori:

- $e = 0,15$
- $\Omega_9 = 0,24$

### 2.2.4.3 Vano in corrispondenza del baricentro



**Fig. 2.21** Pianta con setto e vano a C ad  $L/6$  dal baricentro

Posizionando il vano a C in questo modo si ricavano i seguenti valori:

- $e = 0,02$
- $\Omega_g = 0,235$

### 2.2.4.4 Riassunto

Riassumendo, per il caso di setto accoppiato ad un vano a C i valori assunti dai parametri  $e$  ed  $\Omega_g$  sono i seguenti:

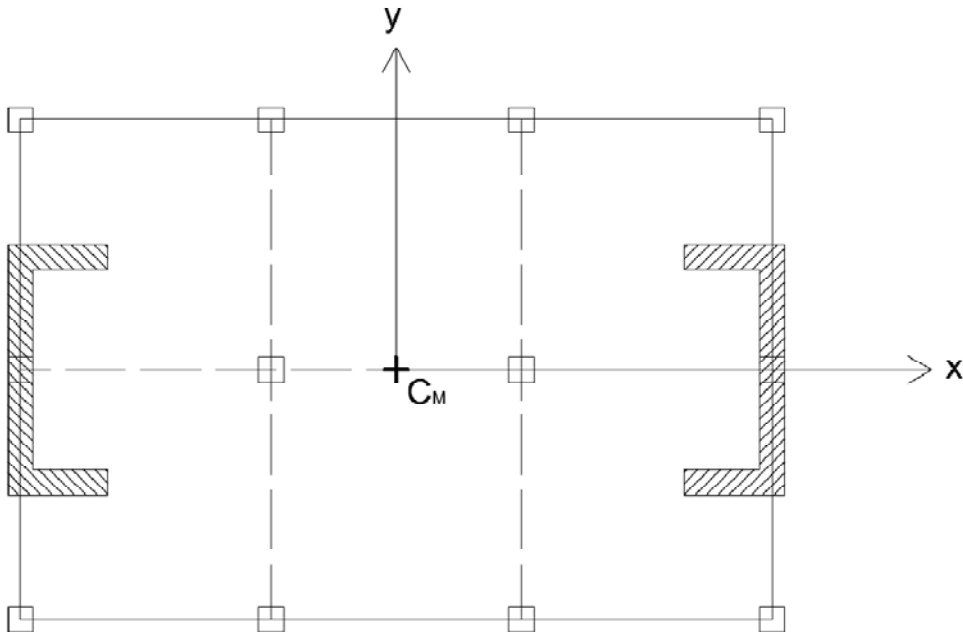
Distanza da $C_M$	$e$	$\Omega_g$
$L/2$	0,4	0,262
$L/3$	0,27	0,249
$L/6$	0,15	0,24
0	0,02	0,235

**Tab. 2.4** Valori di  $e$  ed  $\Omega_g$  nel caso di setto accoppiato ad un vano a C



## 2.2.5 Doppio vano a C

Procedendo con la stessa logica, si aggiunge ora un altro vano a C ad una distanza  $-L/2$  dal baricentro, come mostrato in Fig. 2.22:



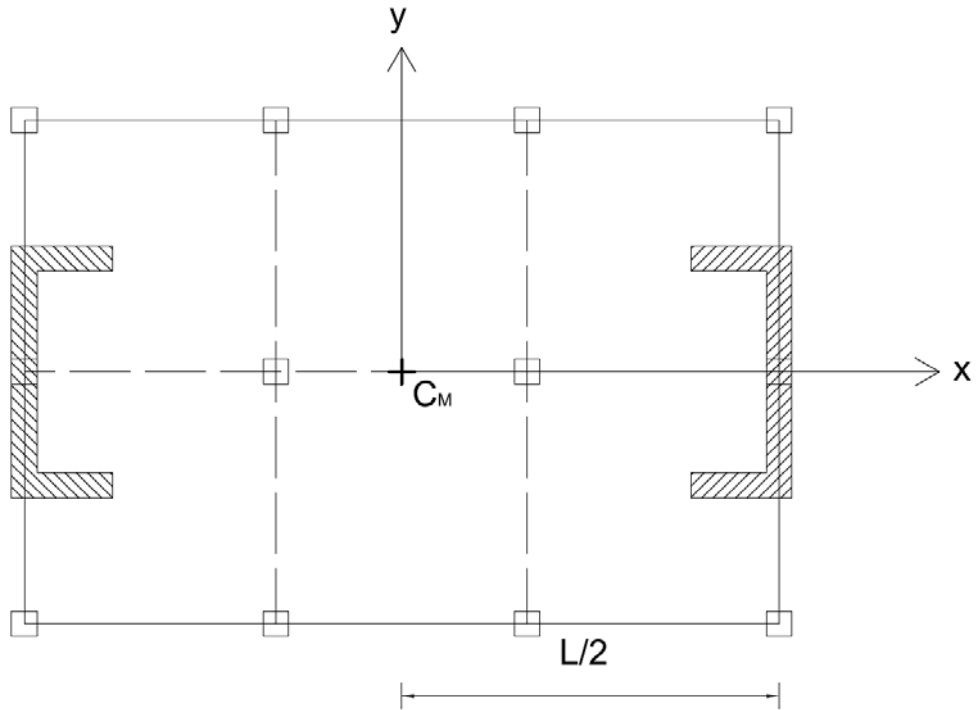
**Fig. 2.22** Pianta con doppio vano a C

In questo caso le equazioni (2.39) e (2.40) si semplificano e diventano

$$X_{C_K} = \frac{12 \cdot J_C \cdot (x_C + x_{C \text{ fisso}})}{2 \cdot 12 \cdot J_C + (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot 12 \cdot J_{\text{pilastro}}} \quad (2.41)$$

$$I_{pk,C_K,setto} = k_C \cdot \left[ (x_{C \text{ fisso}} - X_{C_K})^2 + (x_C - X_{C_K})^2 \right] \quad (2.42)$$

### 2.2.5.1 Vano ad $L/2$ dal baricentro

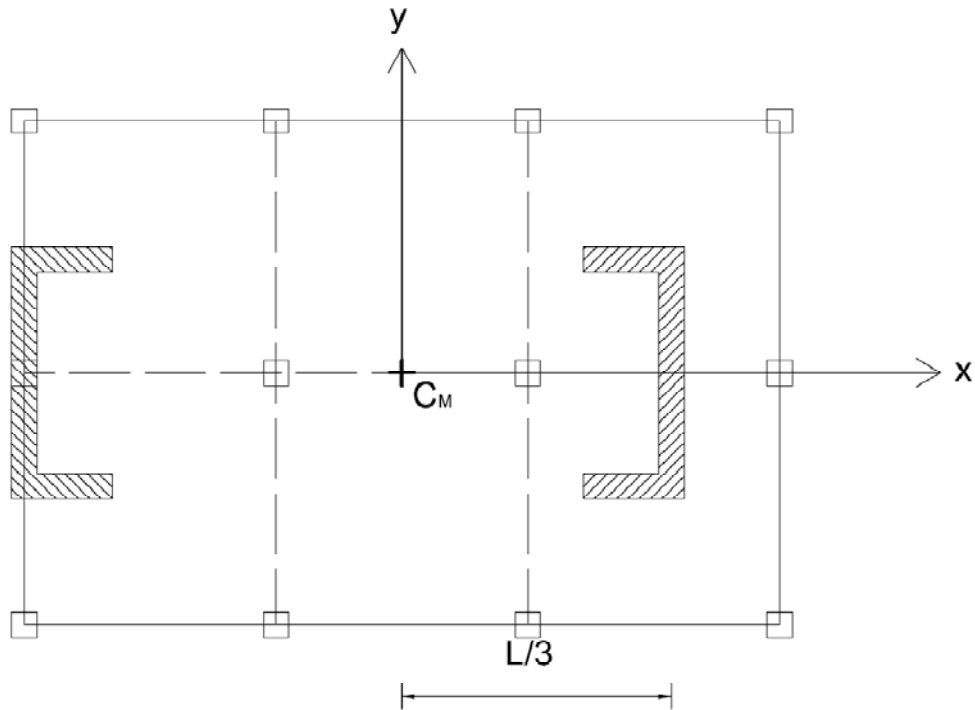


**Fig. 2.23** Pianta con vano a  $C$  ad  $L/2$  dal baricentro

In questo caso la simmetria degli elementi resistenti garantisce l'annullamento dell'eccentricità relativa  $e$ . Infatti:

- $e = 0$
- $\Omega_\theta = 1,394$

### 2.2.5.2 Vano ad $L/3$ dal baricentro

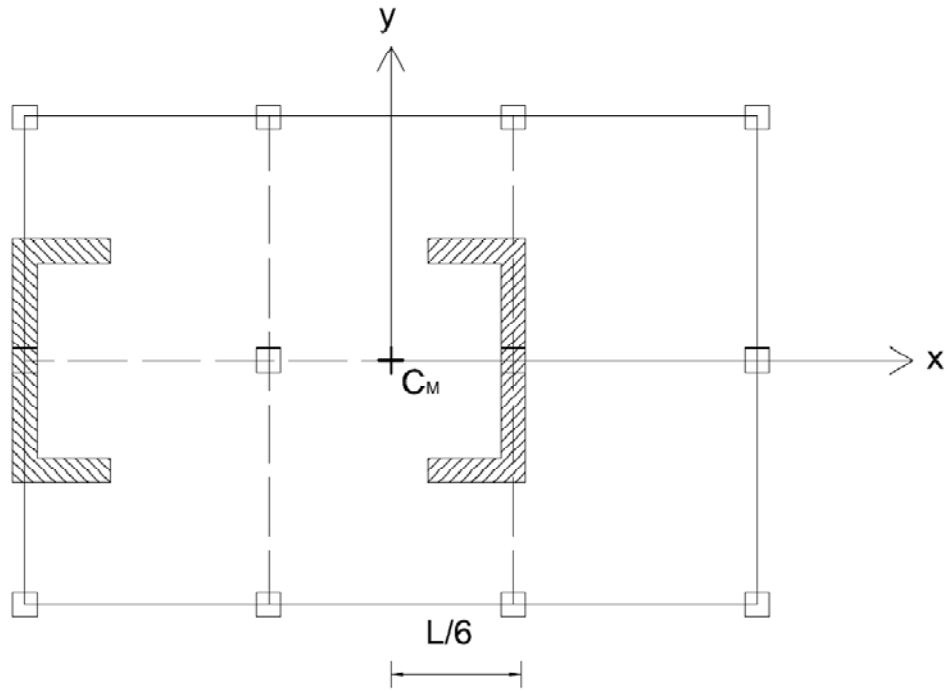


**Fig. 2.24** Pianta con vano a C ad  $L/3$  dal baricentro

Posizionando il vano in questo modo si ottengono i seguenti valori:

- $e = -0,06$
- $\Omega_y = 1,179$

### 2.2.5.3 Vano ad $L/6$ dal baricentro



**Fig. 2.24** Pianta con vano a  $C$  ad  $L/6$  dal baricentro

Con questa disposizione degli elementi resistenti, i valori dei parametri  $e$  ed  $\Omega_g$  sono i seguenti:

- $e = -0,12$
- $\Omega_g = 0,965$

### 2.2.5.4 Vano in corrispondenza del baricentro

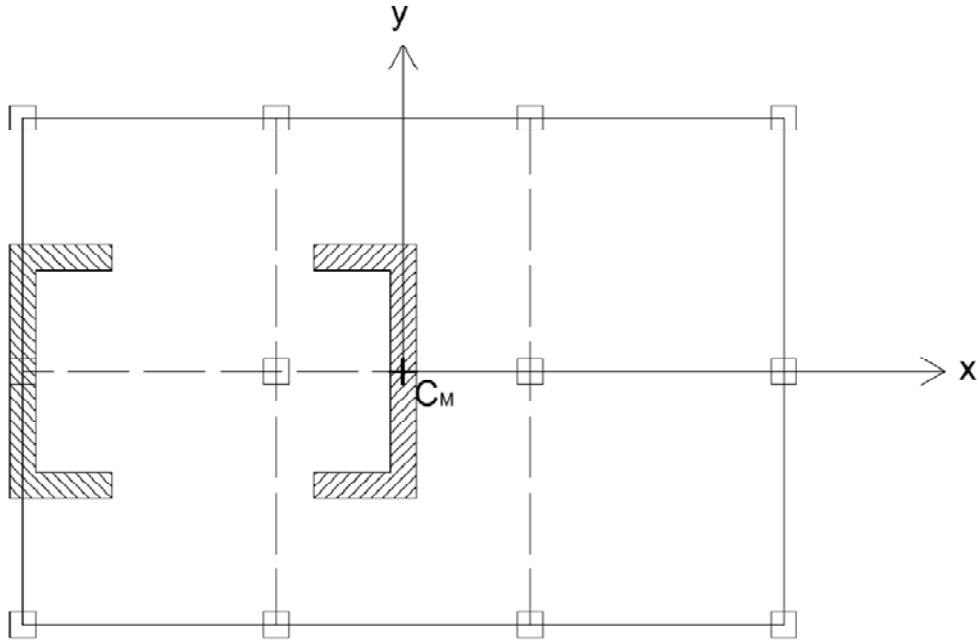


Fig. 2.24 Pianta con vano a C in corrispondenza del baricentro

In questo caso, i parametri  $e$  ed  $\Omega_g$  assumono i seguenti valori:

- $e = -0,19$
- $\Omega_g = 0,751$

### 2.2.5.4 Riassunto

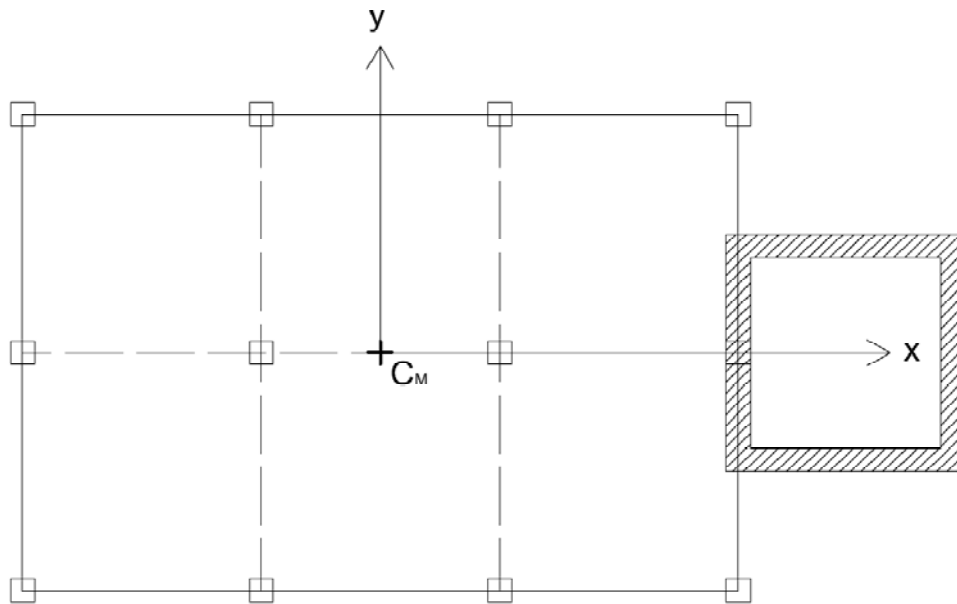
Riassumendo, per il caso di doppio vano a C i valori assunti dai parametri  $e$  ed  $\Omega_g$  sono i seguenti:

Distanza da $C_M$	$e$	$\Omega_g$
$L/2$	0	1,394
$L/3$	-0,06	1,179
$L/6$	-0,12	0,965
0	-0,19	0,751

Tab. 2.5 Valori di  $e$  ed  $\Omega_g$  nel caso di doppio vano a C

## 2.2.6 Vano quadrato

Il prossimo caso di studio prevede l'inserimento, all'interno della struttura, di un singolo vano quadrato, come mostrato in Fig. 2.25:

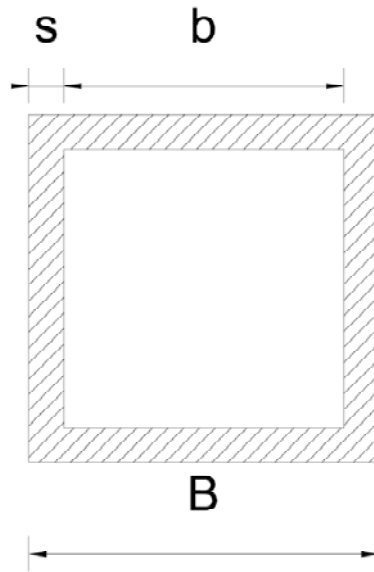


**Fig. 2.25** Pianta con vano quadrato

Come per il vano a C, anche in questo caso le equazioni (2.1)-(2.31) mantengono la stessa forma; tuttavia è necessario sostituire il termine inerziale  $J_{setto}$  con il corrispondente relativo al vano quadrato  $J_Q$ , che, come indicato in Fig. 2.2, vale

$$J_Q = \frac{B^4 - b^4}{12}$$

dove i termini  $B$  e  $b$  sono quelli indicati in Fig. 2.26:



**Fig. 2.26** Vano quadrato

Sostituendo i valori numerici, indicati in Fig. 2.2, si ottiene

$$J_Q = 30,75 \text{ m}^4$$

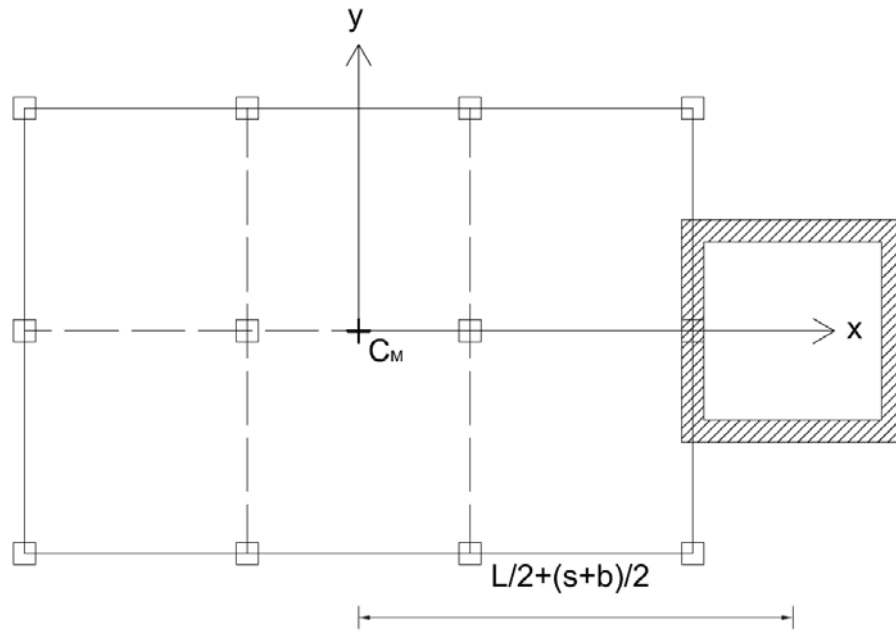
Una volta individuato questo valore, è possibile calcolare la rigidezza del vano quadrato:

$$k_Q = \frac{12 \cdot EJ_Q}{H^3} \quad (2.43)$$

Prima di iniziare la presentazione dei risultati, è necessario precisare che, per cercare di cogliere al meglio i casi reali, si è deciso di aggiungere un caso in più, e cioè quello di vano quadrato esterno alla struttura, come indicato in Fig. 2.25. In questo caso, il baricentro del vano (considerato posizionato nell'incrocio delle due diagonali del quadrato) dista dal baricentro delle masse  $C_M$  di una quantità pari a

$$x_Q = \frac{L}{2} + \frac{(s + b)}{2}$$

**2.2.6.1 Vano ad  $L/2 + (s + b)/2$  dal baricentro**



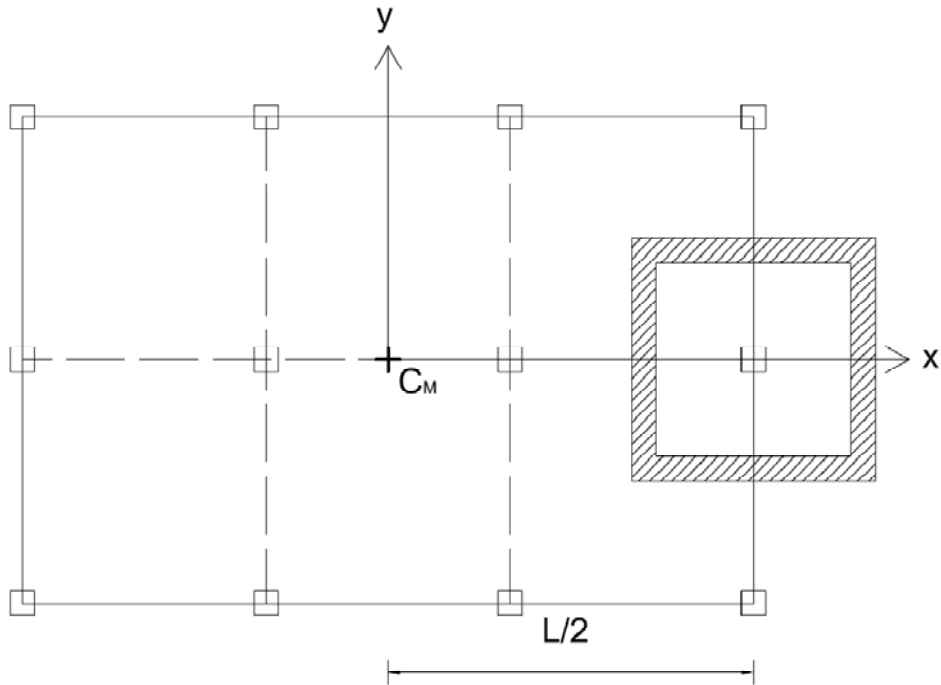
**Fig. 2.27** Pianta con vano quadrato ad  $L/2 + (s + b)/2$  dal baricentro

In questo caso il procedimento è analogo a quello descritto nel paragrafo 2.2.2.1; sostituendo, come già affermato, il valore di  $J_{setto}$  con quello di  $J_Q$  si ottengono i seguenti valori per i parametri cercati:

- $e = 0,51$
- $\Omega_\theta = 0,097$



### 2.2.6.2 Vano ad $L/2$ dal baricentro

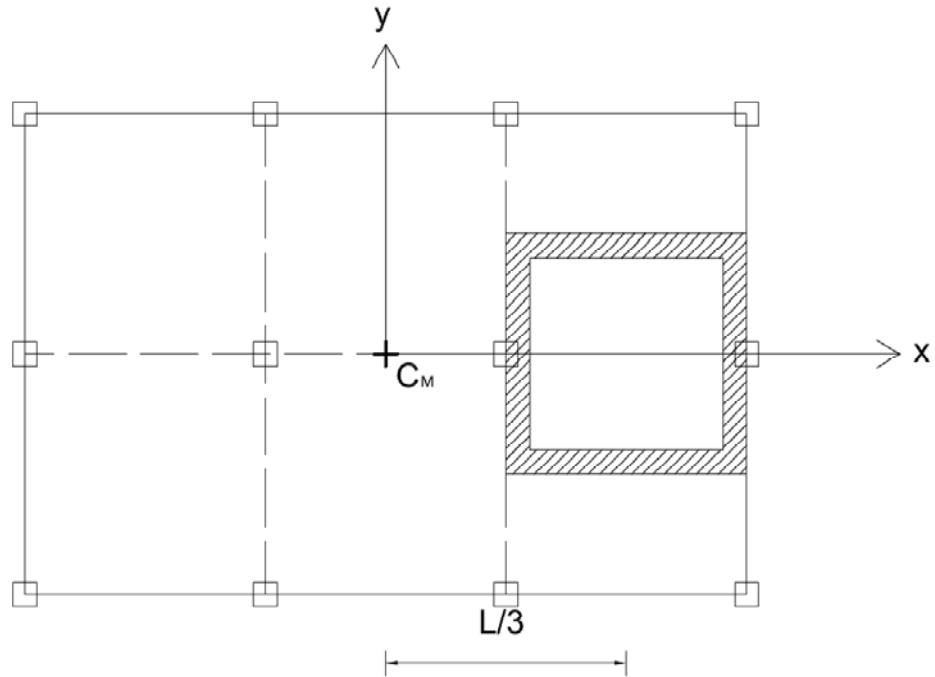


**Fig. 2.28** Pianta con vano quadrato ad  $L/2$  dal baricentro

In questo caso si ottengono i seguenti valori per i parametri  $e$  ed  $\Omega_g$ :

- $e = 0,39$
- $\Omega_g = 0,083$

### 2.2.6.3 Vano ad $L/3$ dal baricentro

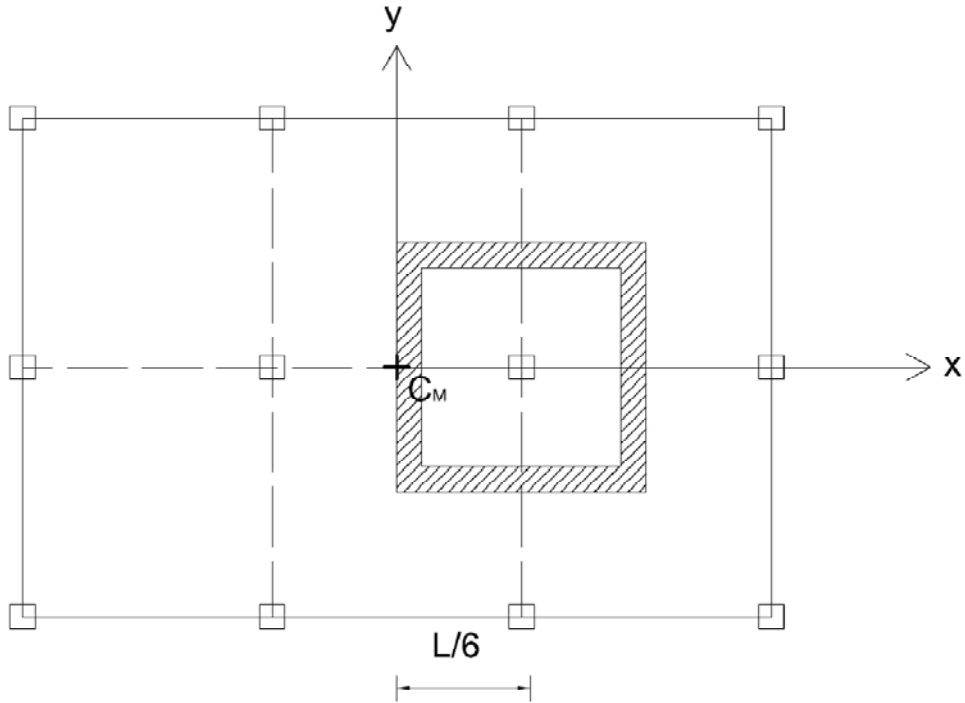


**Fig. 2.29** Pianta con vano quadrato ad  $L/3$  dal baricentro

Posizionando il vano in questo modo si ottengono i seguenti valori per i parametri  $e$  ed  $\Omega_g$ :

- $e = 0,23$
- $\Omega_g = 0,069$

### 2.2.6.4 Vano ad $L/6$ dal baricentro

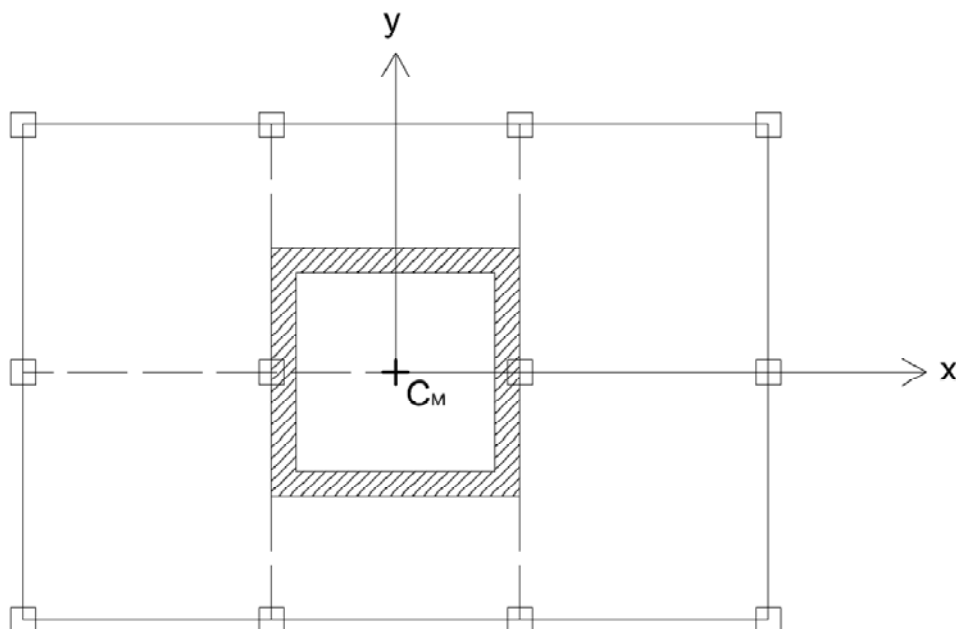


**Fig. 2.30** Pianta con vano quadrato ad  $L/6$  dal baricentro

Posizionando il vano in questo modo si ottengono i parametri  $e$  ed  $\Omega_g$  assumono i seguenti valori:

- $e = 0,13$
- $\Omega_g = 0,06$

### 2.2.6.5 Vano in corrispondenza del baricentro



**Fig. 2.30** Pianta con vano quadrato in corrispondenza del baricentro

Posizionando il vano in questo modo i parametri  $e$  ed  $\Omega_g$  assumono i seguenti valori:

- $e = 0$
- $\Omega_g = 0,056$

In questo caso era prevedibile un valore di eccentricità nullo, data la simmetria della configurazione in pianta degli elementi resistenti.

### 2.2.6.6 Riassunto

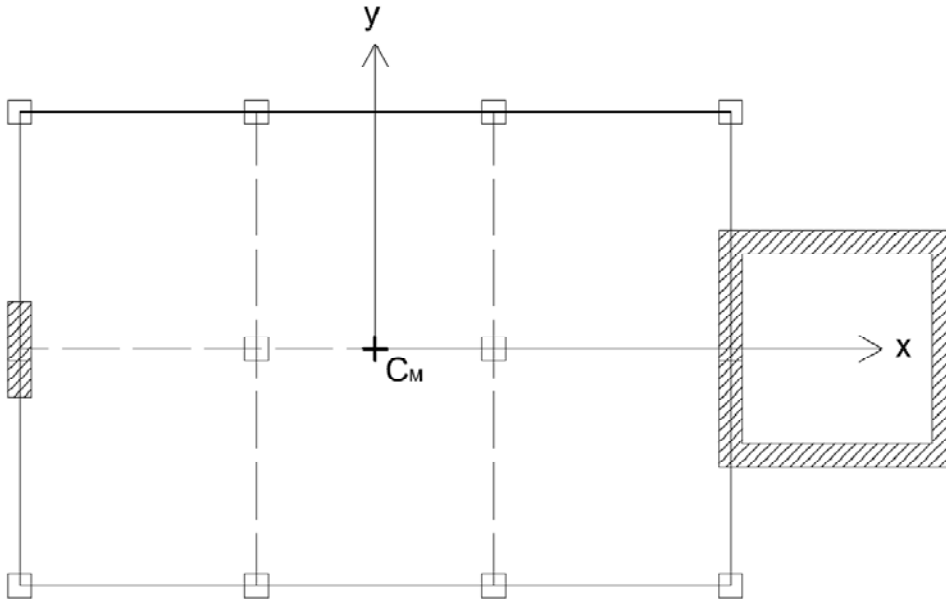
Per una migliore chiarezza, i risultati ottenuti sono riassunti nella seguente tabella:

Distanza da $C_M$	$e$	$\Omega_g$
$L/2+(b+s)/2$	0,51	0,097
$L/2$	0,39	0,083
$L/3$	0,26	0,069
$L/6$	0,13	0,06
0	0	0,056

**Tab. 2.6** Valori di  $e$  ed  $\Omega_g$  nel caso di vano quadrato

### 2.2.7 Vano Quadrato con Setto

Come nei casi precedenti, si è deciso di posizionare un setto ad una distanza di  $-L/2$  dal baricentro, come mostrato in Fig. 2.31:



**Fig. 2.31** Pianta con vano quadrato e setto

In questo caso si devono utilizzare le espressioni (2.37)-(2.40), andando però a sostituire il termine  $J_C$  con il  $J_Q$  definito precedentemente, ottenendo così:

$$X_{C_K} = \frac{\frac{12 \cdot EJ_Q}{H^3} \cdot x_Q + \frac{12 \cdot EJ_{setto}}{H^3} \cdot x_{setto} + \frac{12 \cdot EJ_{pilastro}}{H^3} \sum x_{pilastri}}{\frac{12 \cdot EJ_Q}{H^3} + \frac{12 \cdot EJ_{setto}}{H^3} + (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \frac{12 \cdot EJ_{pilastro}}{H^3}} \quad (2.44)$$

Supponendo per tutti gli elementi resistenti lo stesso modulo elastico E, la (2.36) si semplifica:

$$X_{C_K} = \frac{12 \cdot J_Q \cdot x_Q + 12 \cdot J_{setto} \cdot x_{setto} + 12 \cdot EJ_{pilastro} \sum x_{pilastri}}{12 \cdot J_{setto} + 12 \cdot J_Q + (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot 12 \cdot J_{pilastro}} \quad (2.45)$$

Come per i casi precedenti, anche in questo caso è possibile eliminare a numeratore il termine relativo ai pilastri, data la loro disposizione simmetrica in pianta:

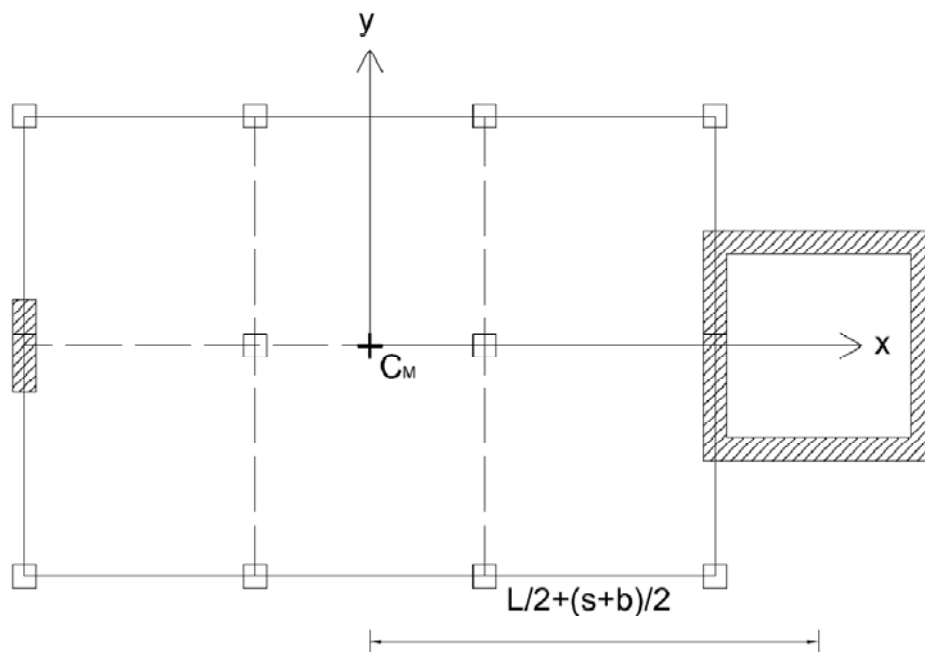
$$X_{C_K} = \frac{12 \cdot J_Q \cdot x_Q + 12 \cdot J_{setto} \cdot x_{setto}}{12 \cdot J_{setto} + 12 \cdot J_Q + (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot 12 \cdot J_{pilastro}} \quad (2.46)$$

La presenza del setto aggiuntivo comporta anche una variazione della (2.24), che diventa:

$$I_{pk,C_K,setto} = k_{setto} \cdot (x_{setto} - X_{C_K})^2 + k_Q \cdot (x_Q - X_{C_K})^2 \quad (2.47)$$

dove  $k_Q$  è definito dalla (2.43).

### 2.2.7.1 Vano ad $L/2 + (s + b)/2$ dal baricentro

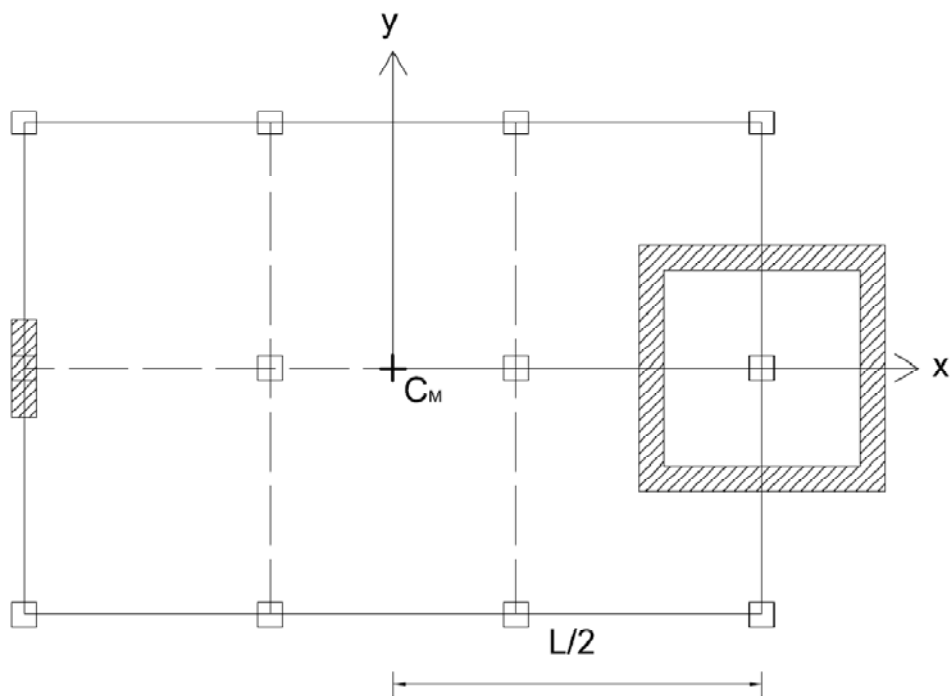


**Fig. 2.32** Pianta con setto e vano quadrato ad  $L/2 + (s + b)/2$  dal baricentro

In questo caso si ottiene:

- $e = 0,5$
- $\Omega_9 = 0,137$

### 2.2.7.2 Vano ad $L/2$ dal baricentro

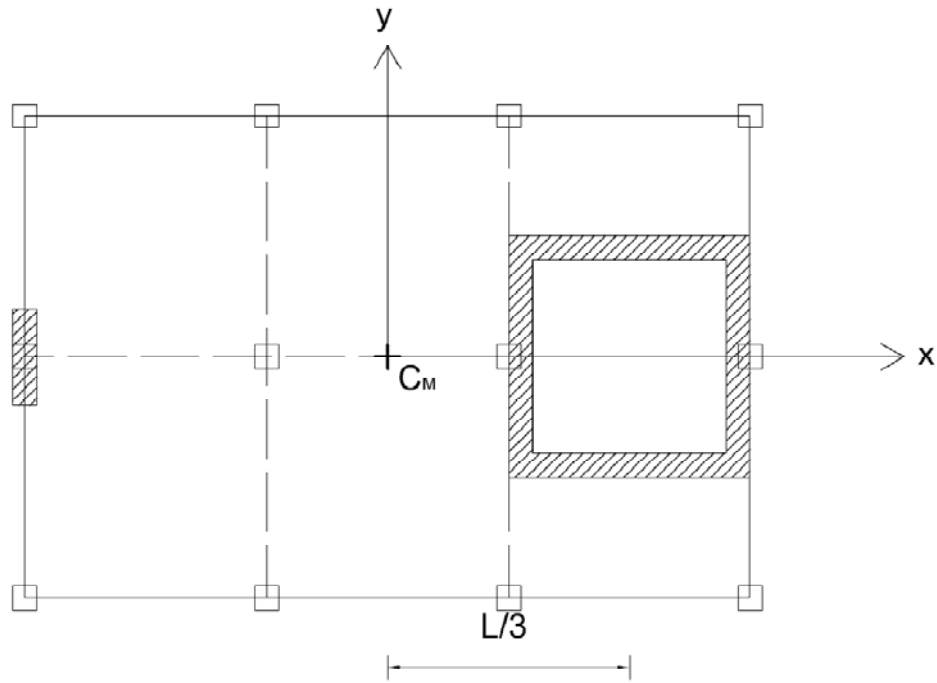


**Fig. 2.33** Pianta con setto e vano quadrato ad  $L/2$  dal baricentro

In questo caso si ottengono i seguenti valori di  $e$  ed  $\Omega_g$ :

- $e = 0,38$
- $\Omega_g = 0,126$

### 2.2.7.3 Vano ad $L/3$ dal baricentro



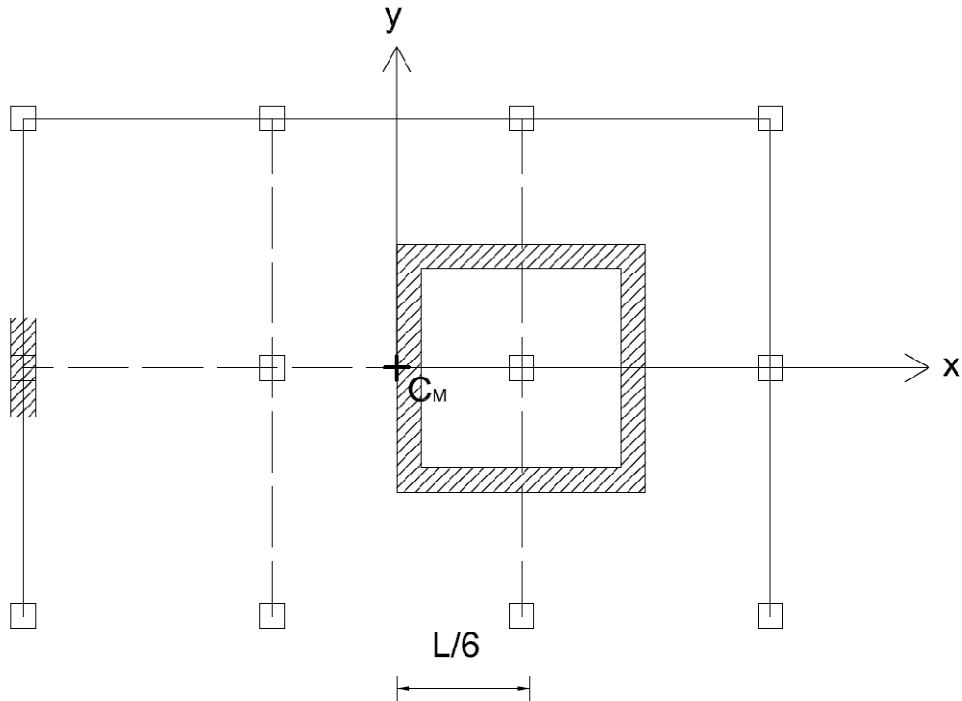
**Fig. 2.34** Pianta con setto e vano quadrato ad  $L/3$  dal baricentro

I parametri  $e$  ed  $\Omega_g$  assumono, in questo caso, i seguenti valori:

- $e = 0,25$
- $\Omega_g = 0,117$



### 2.2.7.4 Vano ad $L/6$ dal baricentro

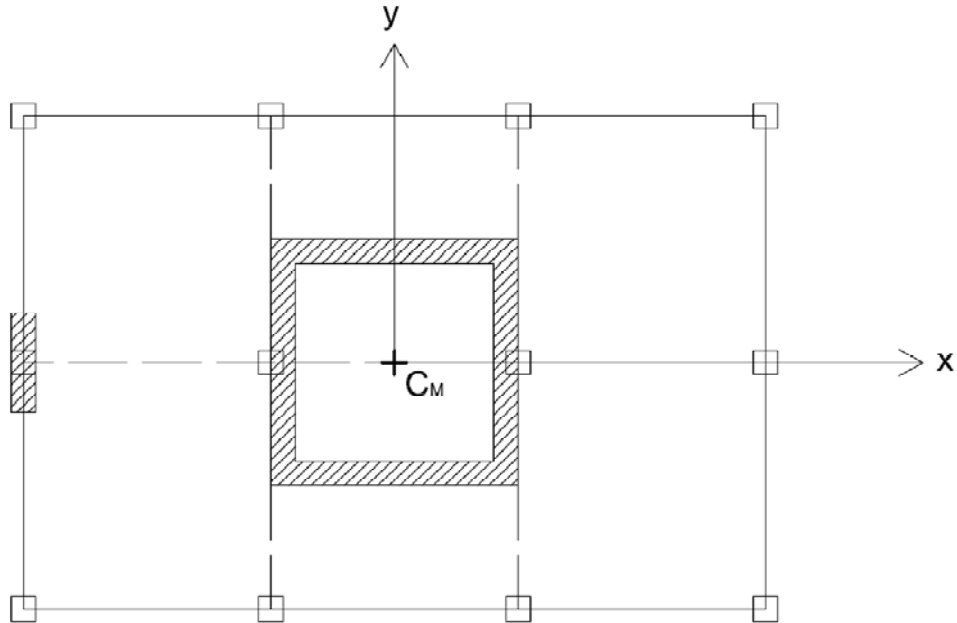


**Fig. 2.34** Pianta con setto e vano quadrato ad  $L/6$  dal baricentro

Posizionando gli elementi resistenti in questo modo si ottengono i seguenti valori dei parametri  $e$  ed  $\Omega_g$ :

- $e = 0,13$
- $\Omega_g = 0,111$

### 2.2.7.5 Vano in corrispondenza del baricentro



**Fig. 2.35** Pianta con setto e vano quadrato in corrispondenza del baricentro

Posizionando gli elementi resistenti in questo modo si ricavano i seguenti parametri  $e$  ed  $\Omega_g$ :

- $e = -0,003$
- $\Omega_g = 0,109$

### 2.2.7.6 Riassunto

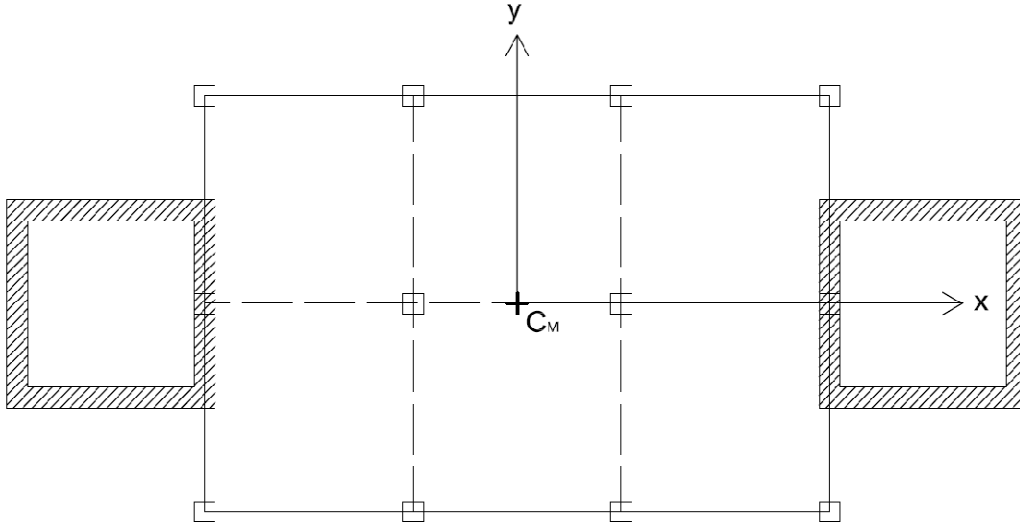
Per una migliore chiarezza, i risultati ottenuti sono riassunti nella seguente tabella:

Distanza da $C_M$	$e$	$\Omega_g$
$L/2+(b+s)/2$	0,51	0,097
$L/2$	0,39	0,083
$L/3$	0,26	0,069
$L/6$	0,13	0,06
0	0	0,056

**Tab. 2.7** Valori di  $e$  ed  $\Omega_g$  nel caso di vano quadrato accoppiato ad un setto

## 2.2.8 Doppio vano quadrato

Come fatto per il setto e per il vano a C, si aggiunge ora un altro vano quadrato ad una distanza  $-L/2$  dal baricentro, come mostrato in Fig. 2.36:



**Fig. 2.36** Pianta con doppio vano quadrato

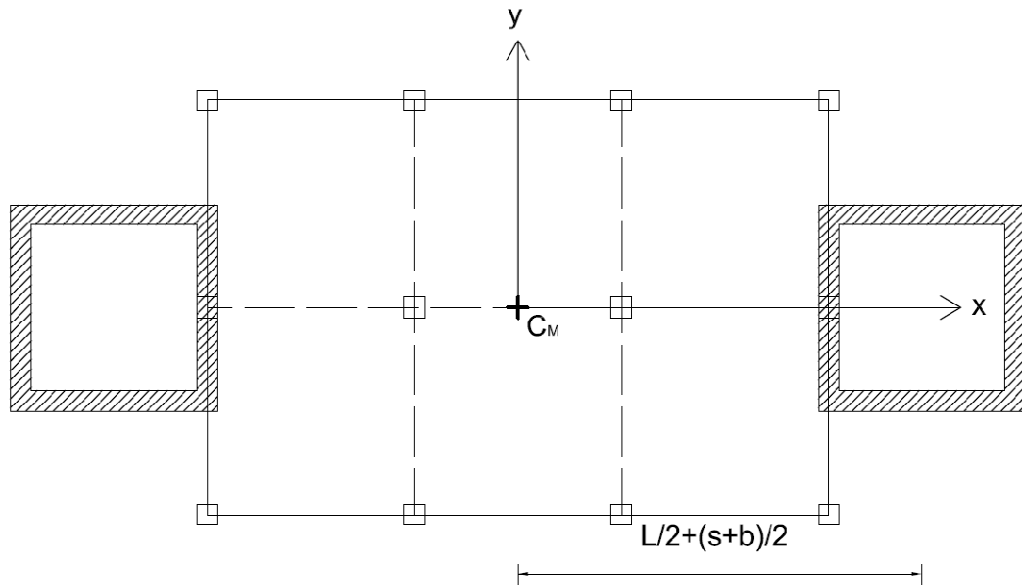
In questo caso le equazioni (2.46) e (2.47) si semplificano e diventano:

$$X_{C_K} = \frac{12 \cdot J_Q \cdot (x_Q + x_{Q \text{ fisso}})}{2 \cdot 12 \cdot J_Q + (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot 12 \cdot J_{pilastro}} \quad (2.48)$$

$$I_{pk,C_K,setto} = k_Q \cdot \left[ (x_{Q \text{ fisso}} - X_{C_K})^2 + (x_Q - X_{C_K})^2 \right] \quad (2.49)$$

dove  $k_Q$  è definito dalla (2.43).

**2.2.8.1 Vano ad  $L/2 + (s + b)/2$  dal baricentro**



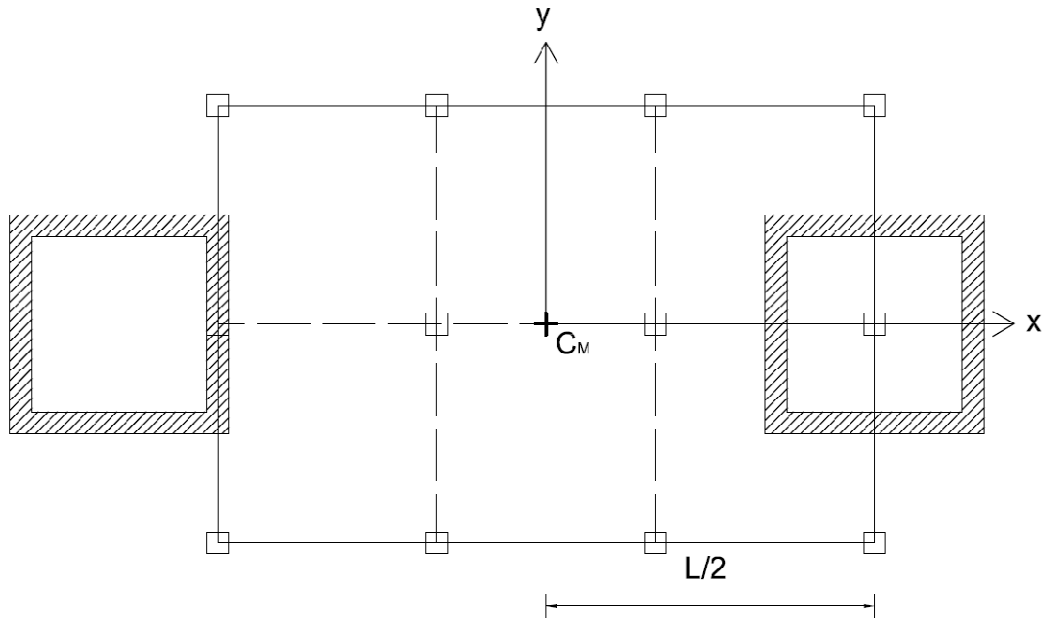
**Fig. 2.37** Pianta con vano quadrato ad  $L/2 + (s + b)/2$  dal baricentro

In questo caso si ottiene:

- $e = 0$
- $\Omega_g = 1,603$

Anche in questo caso, data la simmetria della struttura, era prevedibile l'annullamento dell'eccentricità relativa  $e$ .

**2.2.8.2 Vano ad  $L/2$  dal baricentro**

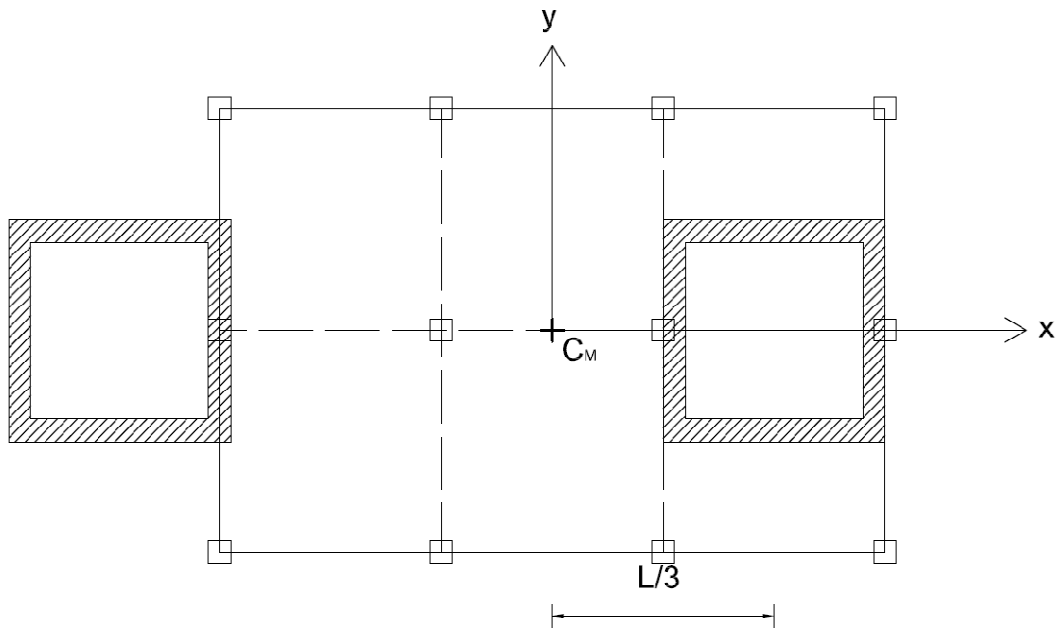


**Fig. 2.38** Pianta con vano quadrato ad  $L/2$  dal baricentro

In questo caso i valori dei parametri  $e$  ed  $\Omega_g$  sono i seguenti:

- $e = -0,05$
- $\Omega_g = 1,418$

### 2.2.8.3 Vano ad $L/3$ dal baricentro

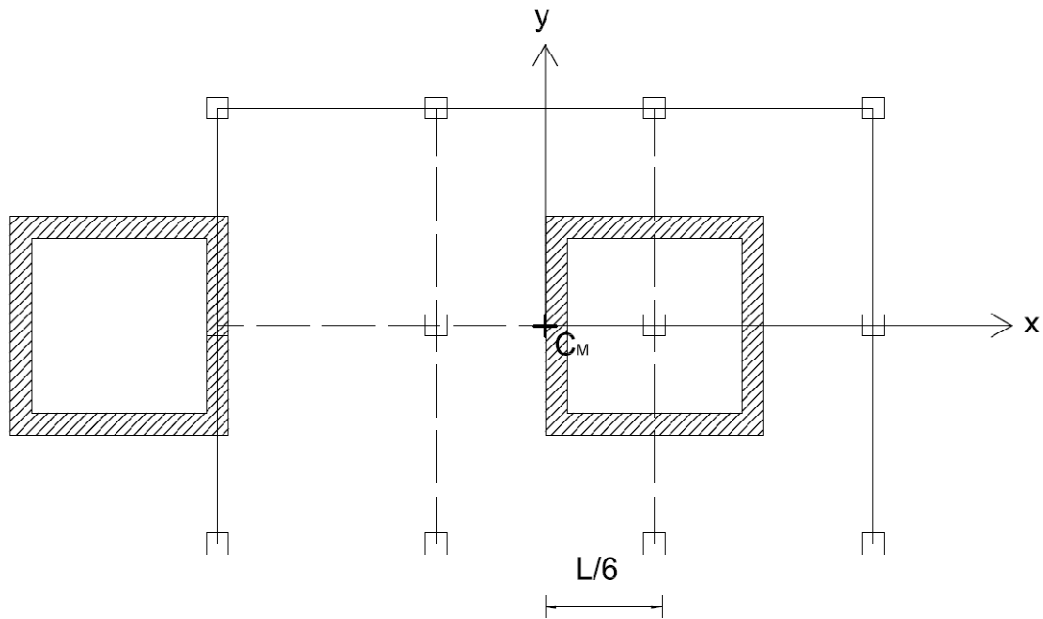


**Fig. 2.39** Pianta con vano quadrato ad  $L/3$  dal baricentro

I valori dei parametri  $e$  ed  $\Omega_g$  ottenuti disponendo in questo modo gli elementi resistenti sono:

- $e = -0,11$
- $\Omega_g = 1,213$

#### 2.2.8.4 Vano ad $L/6$ dal baricentro

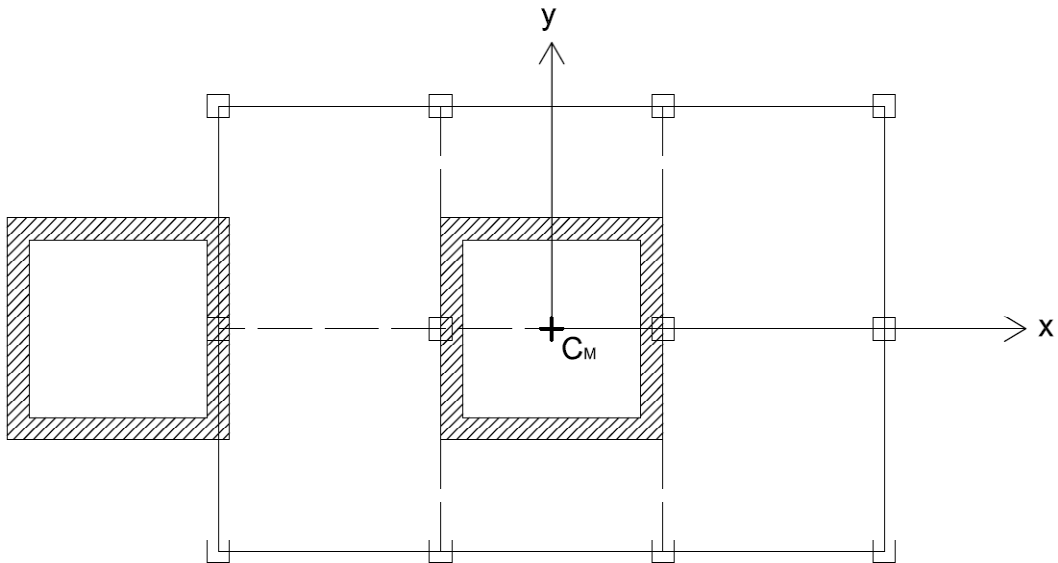


**Fig. 2.40** Pianta con vano quadrato ad  $L/6$  dal baricentro

Posizionando i vani in questa posizione si ottengono i seguenti valori per parametri  $e$  ed  $\Omega_g$ :

- $e = -0,17$
- $\Omega_g = 1,008$

### 2.2.8.5 Vano in corrispondenza del baricentro



**Fig. 2.41** Pianta con vano quadrato in corrispondenza del baricentro

In questo modo si ottengono i seguenti valori per parametri  $e$  ed  $\Omega_g$ :

- $e = -0,23$
- $\Omega_g = 0,802$

### 2.2.8.6 Riassunto

Per una migliore chiarezza, i risultati ottenuti sono riassunti nella seguente tabella:

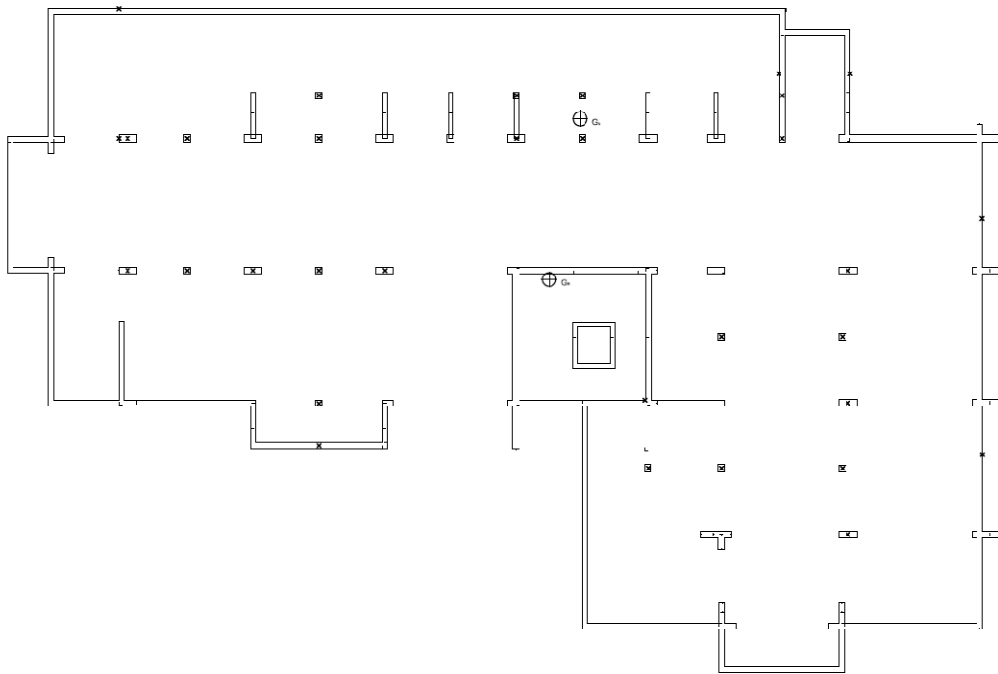
Distanza da $C_M$	$e$	$\Omega_g$
$L/2+(b+s)/2$	0	1,603
$L/2$	-0,05	1,418
$L/3$	-0,11	1,213
$L/6$	-0,17	1,008
0	-0,23	0,802

**Tab. 2.8** Valori di  $e$  ed  $\Omega_g$  nel caso di doppio vano quadrato

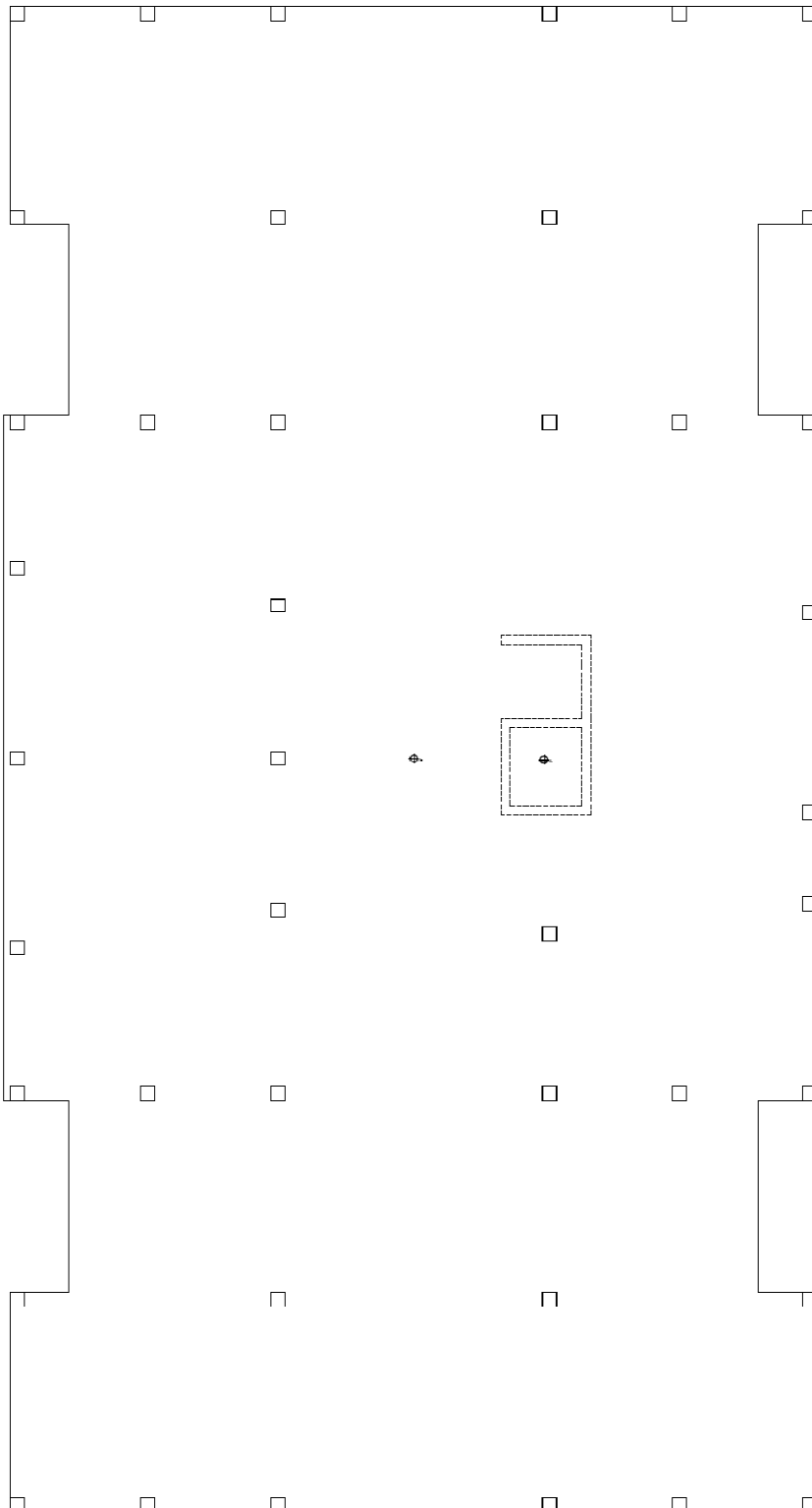


## 2.3 Analisi di strutture reali

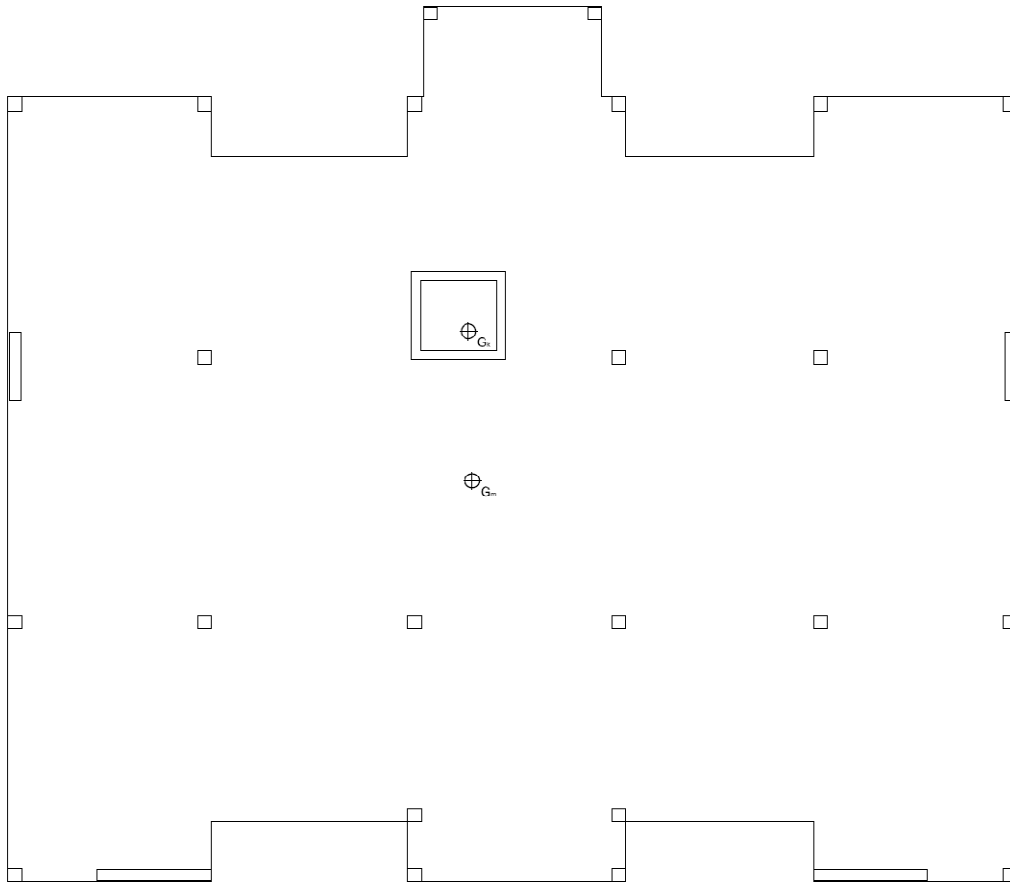
Per una migliore analisi dei parametri  $e$  ed  $\Omega_g$  si è deciso di analizzare il valore di questi ultimi anche per strutture reali, i cui dati sono stati gentilmente forniti dallo studio Ingegneri Riuniti S.p.A di Modena. Le strutture analizzate sono quattro, e sono indicate in Fig. 2.42. Come si può notare, si tratta di strutture a telaio con setti e vani in diverse posizioni.



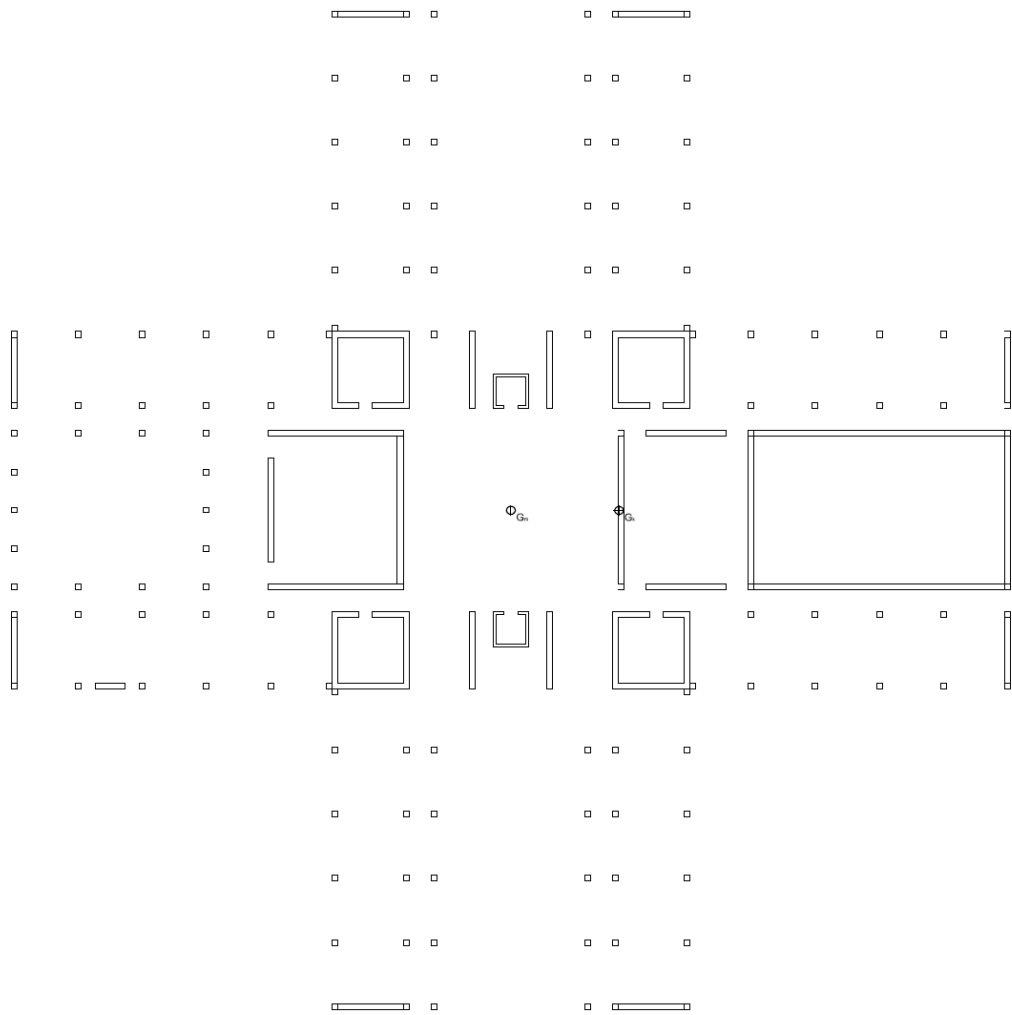
**Fig. 2.42 a** *Pianta della prima struttura reale*



**Fig. 2.42 b** *Pianta della seconda struttura reale*



**Fig. 2.42 c** *Pianta della terza struttura reale*



**Fig. 2.42 d** *Pianta della quarta struttura reale*

Per queste quattro strutture, i valori dei parametri  $e$  ed  $\Omega_g$  sono riassunti nella seguente tabella:

<b>Struttura</b>	<b><math>e</math></b>	<b><math>\Omega_g</math></b>
a	0,14986	0,937974
b	0,076976	0,241636
c	0,250256	1,308284
d	0,094401	0,794271

**Tab. 2.9** *Valori di  $e$  ed  $\Omega_g$  per quattro strutture reali*

## 2.4 Conclusioni

L'analisi della variazione dei parametri  $e$  ed  $\Omega_g$  sia per strutture reali che per casi teorici ha portato ai seguenti risultati:

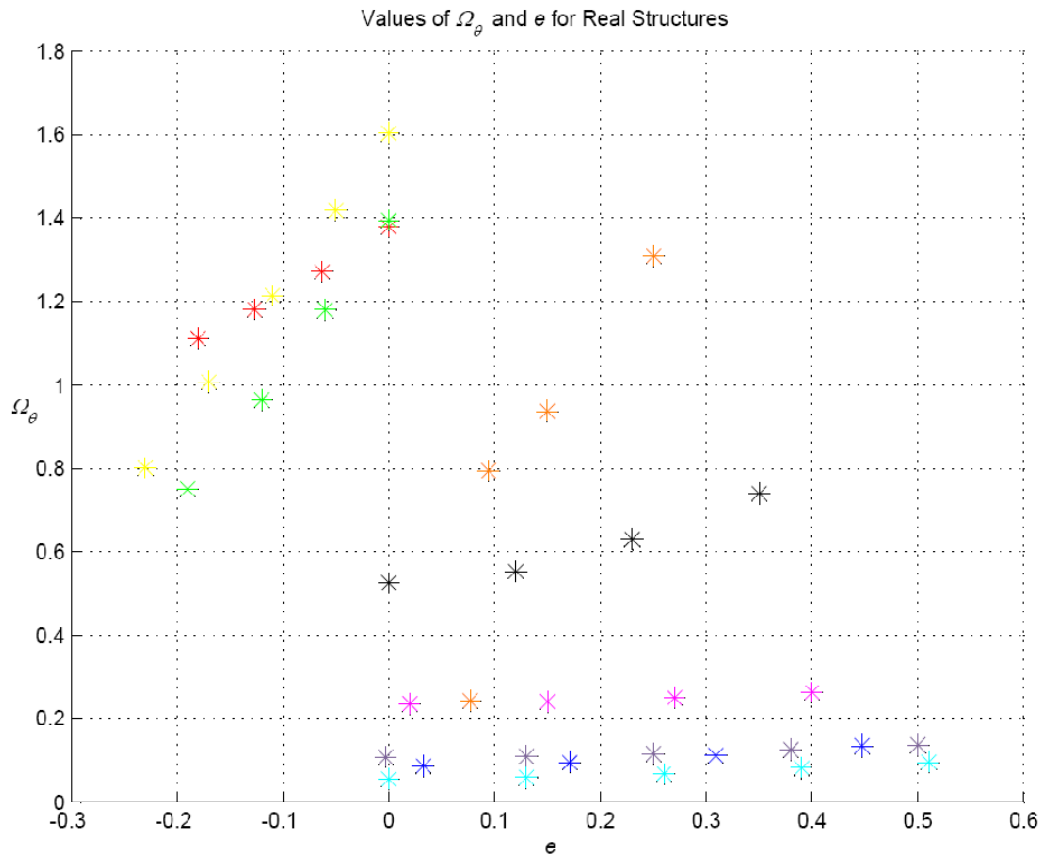
$e$	$\Omega_g$
<b>Caso 1</b>	
0,35	0,74
0,23	0,63
0,12	0,553
0	0,525
<b>Caso 2</b>	
0	1,378
-0,063	1,27
-0,127	1,18
-0,18	1,112
<b>Caso 3</b>	
0,447	0,135
0,309	0,113
0,171	0,096
0,033	0,088
<b>Caso 4</b>	
0,4	0,262
0,27	0,249
0,15	0,24
0,02	0,235
<b>Caso 5</b>	
0	1,394
-0,06	1,179
-0,12	0,965
-0,19	0,751

$e$	$\Omega_g$
<b>Caso 6</b>	
0,51	0,097
0,39	0,083
0,26	0,069
0,13	0,06
0	0,056
<b>Caso 7</b>	
0,5	0,137
0,38	0,126
0,25	0,117
0,13	0,111
-0,003	0,109
<b>Caso 8</b>	
0	1,603
-0,05	1,418
-0,11	1,213
-0,17	1,008
-0,23	0,802
<b>Casi Reali</b>	
0,14986	0,937974
0,076976	0,241636
0,250256	1,308284
0,094401	0,794271

**Tab. 2.10** Riassunto dei valori dei parametri  $e$  ed  $\Omega_g$  ottenuti

Si nota subito come i valori dei diversi parametri variano notevolmente a seconda della disposizione degli elementi resistenti; in più non esiste una legge che lega i valori dell'eccentricità relativa  $e$  a quelli del parametro  $\Omega_g$ , in quanto, ad uno stesso valore di eccentricità, possono corrispondere diversi valori di  $\Omega_g$ .

I risultati presentano quindi una forte variabilità, come si può notare analizzando il grafico in Fig. 2.43:



**Fig. 2.44** Valori delle coppie  $e$ - $\Omega_\theta$  per le strutture esaminate

Tuttavia, ai fini della presente trattazione, è sufficiente individuare i valori massimi e minimi (in valore assoluto) assunti dai due parametri:

- $e_{max} = 0,51$ ;
- $e_{min} = 0$ ;
- $\Omega_{\theta max} = 1,603$ ;
- $\Omega_{\theta min} = 0,056$ ;

In questo modo è possibile individuare il range di variazione di questi due parametri, che verrà utilizzato per tutti i calcoli successivi. In particolare si è deciso di utilizzare i seguenti intervalli:

$$0,05 \leq e \leq 0,5$$

$$0,2 \leq \Omega_g \leq 2$$

La scelta di non considerare il caso di eccentricità nulla è dettata dal fatto che non si ritiene un caso significativo ai fini dell'indagine da effettuare. Si può notare anche che il valore minimo considerato per  $\Omega_g$  non è quello individuato dalle indagini effettuate; questa scelta si ritiene accettabile in quanto il valore minimo ricavato dai casi di studio corrisponde ad una situazione difficilmente riscontrabile nella realtà.

## CAPITOLO 3

### Strutture Multipiano: Problematiche generali

Come affermato nei capitoli precedenti, il metodo ALPHA è stato elaborato per strutture ad un singolo piano (strutture *single storey*); seguendo la procedura descritta nel primo capitolo, si arriva a definire la seguente formula:

$$|u_{\vartheta}|_{max} = \psi \cdot \frac{\alpha_u}{\rho_m} \cdot \delta \cdot |u_{yC_M}|_{max-ne} \quad (3.1)$$

Data la semplicità della (3.1), la presente trattazione non si pone l'obiettivo di trovarne una nuova formulazione per il caso di struttura a più piani (struttura *multi storey*), ma di individuare quella struttura *single storey* che meglio rappresenta il comportamento di ogni singolo piano della struttura *multi storey*.

Per fare questo, tuttavia, è necessario studiare il comportamento delle strutture *multi storey* durante un evento sismico; questo comporta la risoluzione dell'equazione del moto:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (3.2)$$

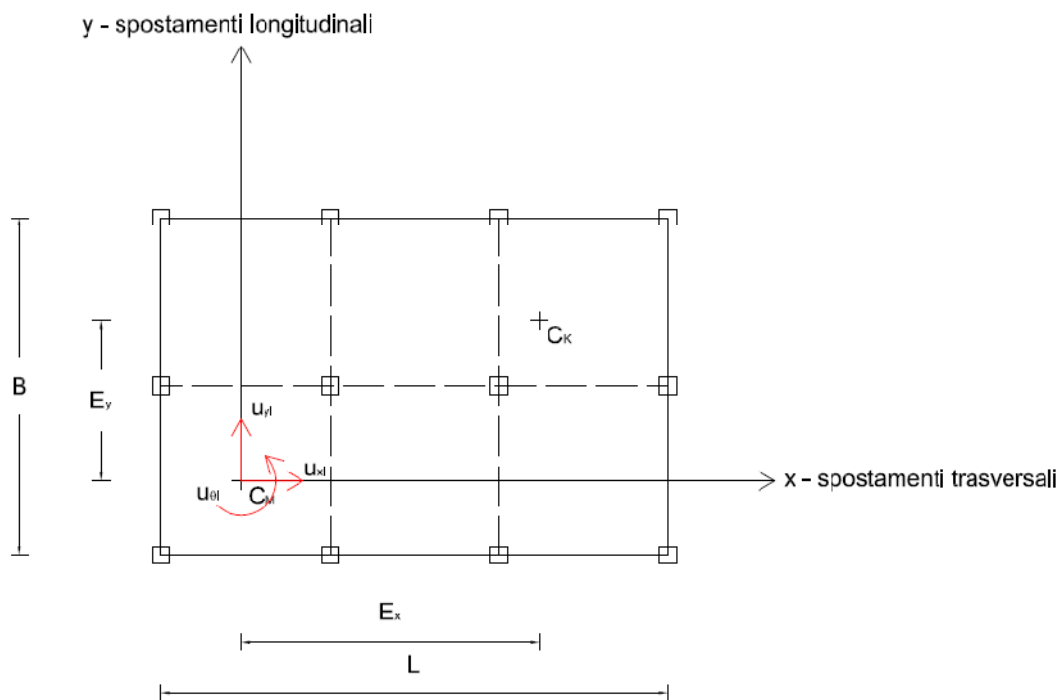
con un numero di variabili maggiore. Infatti, ogni piano della struttura è caratterizzato da tre gradi di libertà  $\{u_x, u_y, u_{\vartheta}\}$ , due traslazionali ( $u_x, u_y$ ) e uno rotazionale ( $u_{\vartheta}$ ), per cui una struttura ad  $n$  piani avrà  $3 \cdot n$  gradi di libertà. Questo si traduce in un aumento del numero degli elementi dei vettori di spostamento ( $\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}$ ) e delle matrici di massa ( $\mathbf{M}$ ), rigidità ( $\mathbf{K}$ ) e smorzamento ( $\mathbf{C}$ ), oltre che del vettore  $\mathbf{p}$  delle sollecitazioni.

Durante tutta la trattazione i gradi di libertà dell' $i$ -esimo piano saranno indicati come  $\{u_{xi}, u_{yi}, u_{\vartheta i}\}$ .



### 3.1 Strutture a due piani

Si consideri ora la stessa struttura utilizzata per lo studio della struttura single storey e si aggiunga un piano. In questo modo si ottiene un sistema dinamico asimmetrico caratterizzato da sei gradi di libertà  $\{u_{x1}, u_{y1}, u_{\theta1}, u_{x2}, u_{y2}, u_{\theta2}\}$ , dove i movimenti sono definiti in funzione del sistema di riferimento adottato anche per la struttura single storey



**Fig. 3.1** Gradi di libertà dell'*i*-esimo piano del sistema considerato

Sotto le stesse ipotesi utilizzate per il caso di struttura single storey

- uguale rigidezza del sistema nelle due direzioni  $x$  e  $y$ ;
- risposta rotazionale  $u_{\theta}$  sotto eccitazione dinamica piccola abbastanza da poter considerare l'approssimazione del primo ordine  $u_{\theta} \cong \sin(u_{\theta}) \cong \tan(u_{\theta})$ , ovvero un'analisi in ambito elastico-lineare;

è possibile dedurre la forma esplicita della (3.2) per via diretta.

### 3.1.1 Forze d'inerzia e matrice delle masse

Le forze d'inerzia associate ad ogni grado di libertà, che si oppongono allo spostamento della struttura, possono essere espresse nella seguente forma

$$\begin{aligned} f_{Ix1} &= m_1 \ddot{u}_{x1}, & f_{Iy1} &= m_1 \ddot{u}_{y1}, & f_{I\theta1} &= m_1 \ddot{u}_{\theta1} \\ f_{Ix2} &= m_2 \ddot{u}_{x2}, & f_{Iy2} &= m_2 \ddot{u}_{y2}, & f_{I\theta2} &= m_2 \ddot{u}_{\theta2} \end{aligned}$$

dove  $\ddot{u}_{xi}, \ddot{u}_{yi}, \ddot{u}_{\theta i}$  rappresentano le componenti di accelerazione rispetto al baricentro delle masse per l'i-esimo piano.

In forma matriciale si ha:

$$\begin{pmatrix} f_{Ix1} \\ f_{Iy1} \\ f_{I\theta1} \\ f_{Ix2} \\ f_{Iy2} \\ f_{I\theta2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{p,m1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p,m2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_{x1} \\ \ddot{u}_{y1} \\ \ddot{u}_{\theta1} \\ \ddot{u}_{x2} \\ \ddot{u}_{y2} \\ \ddot{u}_{\theta2} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

e, tenendo conto della relazione:

$$I_{p,mi} = I_{p,mi,CMi} = \int_{m_i} (x_i^2 + y_i^2) dm = m_i \rho_{mi}^2 \quad (3.4)$$

si ottiene

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \rho_{m1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \rho_{m2}^2 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

### 3.1.2 Forze di richiamo elastico e matrice di rigidezza

Le forze elastiche di richiamo che si destano negli elementi resistenti laterali possono essere generalmente espresse come:

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u}$$

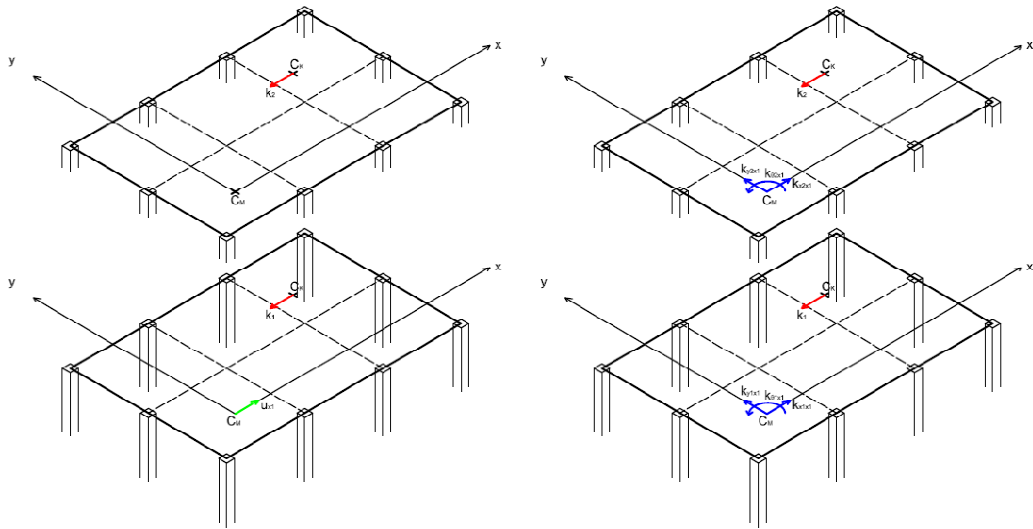
Tale relazione, esprime il legame tra forza e spostamenti, se espressa in termini matriciali assume la seguente forma generale:

$$\begin{Bmatrix} f_{kx1} \\ f_{ky1} \\ f_{k\theta1} \\ f_{kx2} \\ f_{ky2} \\ f_{k\theta2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{x1x1} & k_{x1y1} & k_{x1\theta1} & k_{x1x2} & k_{x1y2} & k_{x1\theta2} \\ k_{y1x1} & k_{y1y1} & k_{y1\theta1} & k_{y1x2} & k_{y1y2} & k_{y1\theta2} \\ k_{\theta1x1} & k_{\theta1y1} & k_{\theta1\theta1} & k_{\theta1x2} & k_{\theta1y2} & k_{\theta2\theta2} \\ k_{x2x1} & k_{x2y1} & k_{x2\theta1} & k_{x2x2} & k_{x2y2} & k_{x2\theta2} \\ k_{y2x1} & k_{y2y1} & k_{y2\theta1} & k_{y2x2} & k_{y2y2} & k_{y2\theta2} \\ k_{\theta2x1} & k_{\theta2y1} & k_{\theta2\theta1} & k_{\theta2x2} & k_{\theta2y2} & k_{\theta2\theta2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{\theta1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{\theta2} \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

dove il generico termine  $k_{ij}$  indica la rigidezza in direzione  $i$  per effetto di uno spostamento in direzione  $j$ .

Applicando questa definizione sarà possibile ottenere la rigidezza dell' $i$ -esimo elemento applicando uno spostamento unitario in direzione  $j$  in modo successivo per ogni grado di libertà:

$$u_{x1} = 1; u_{y1} = 0; u_{\theta1} = 0; u_{x2} = 0; u_{y2} = 0; u_{\theta2} = 0$$

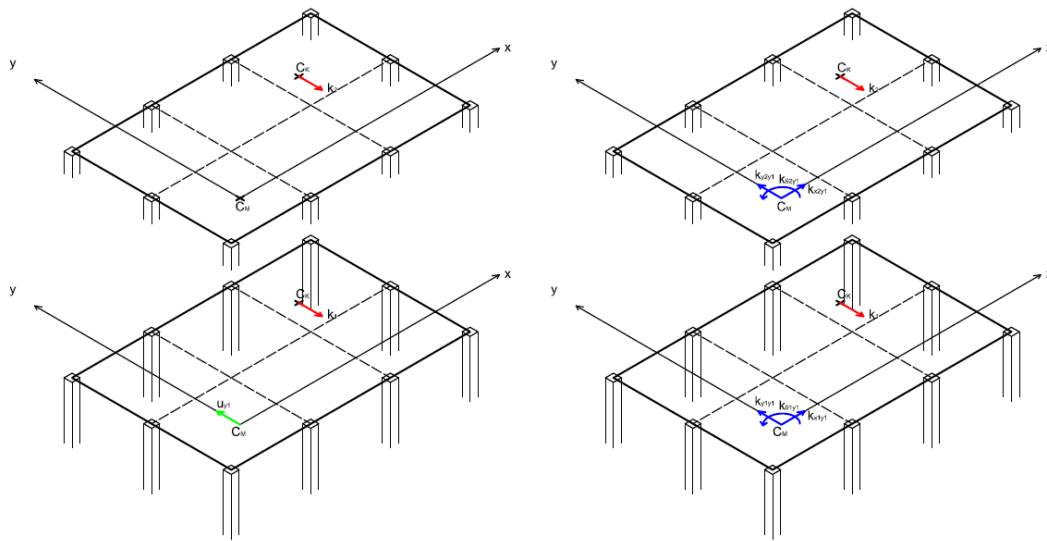


**Fig. 3.2** Spostamento unitario in direzione  $x$  al primo piano

Per equilibrio:

$$\begin{aligned}
 k_{x1x1} &= k_1 + k_2; \\
 k_{y1x1} &= 0; \\
 k_{\theta1x1} &= -(k_1 + k_2)E_{y1} = -(k_1 + k_2) \cdot e_{y1}D_{e1} = -(k_1 + k_2) \cdot e_{y1}\rho_{m1}\sqrt{12} \\
 k_{x2x1} &= -k_2; \\
 k_{y2x1} &= 0; \\
 k_{\theta2x1} &= k_2E_{y2} = k_2 \cdot e_{y2}D_{e2} = k_2 \cdot e_{y2}\rho_{m2}\sqrt{12}
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

$$u_{x1} = 0; u_{y1} = 1; u_{\theta1} = 0; u_{x2} = 0; u_{y2} = 0; u_{\theta2} = 0$$



**Fig. 3.3** Spostamento unitario in direzione  $y$  al primo piano

Applicando l'equilibrio ottengo:

$$\begin{aligned}
 k_{x1y1} &= 0; \\
 k_{y1y1} &= k_1 + k_2; \\
 k_{\vartheta1y1} &= (k_1 + k_2)E_{x1} = (k_1 + k_2) \cdot e_{x1}D_{e1} = (k_1 + k_2) \cdot e_{x1}\rho_{m1}\sqrt{12} \\
 k_{x2y1} &= 0; \\
 k_{y2y1} &= -k_2; \\
 k_{\vartheta2y1} &= -k_2E_{x2} = -k_2 \cdot e_{x2}D_{e2} = -k_2 \cdot e_{x2}\rho_{m2}\sqrt{12} \\
 \mathbf{(3.8)}
 \end{aligned}$$

$$u_{x1} = 0; u_{y1} = 0; u_{\vartheta1} = 1; u_{x2} = 0; u_{y2} = 0; u_{\vartheta2} = 0$$

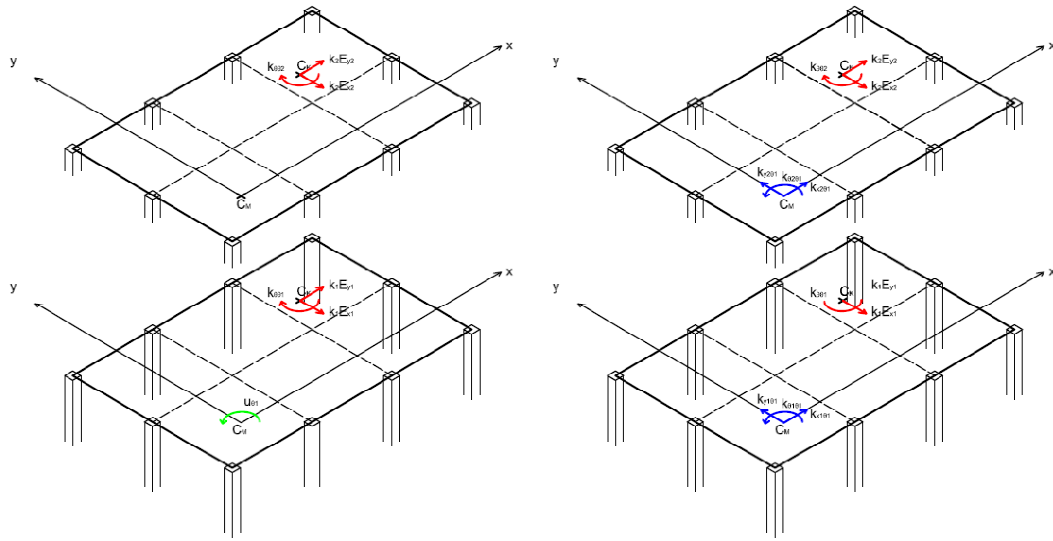
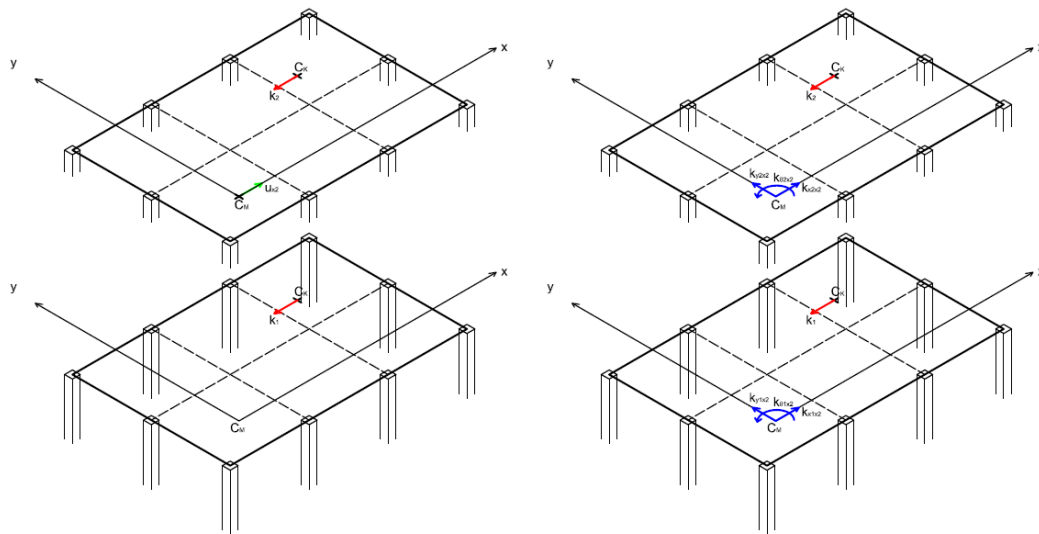


Fig. 3.3 Spostamento unitario di rotazione al primo piano

Applicando l'equilibrio ottengo:

$$\begin{aligned}
 k_{x1\theta1} &= -(k_1 + k_2)E_{y1} = -(k_1 + k_2) \cdot e_{y1}D_{e1} = -(k_1 + k_2) \cdot e_{y1}\rho_{m1}\sqrt{12}; \\
 k_{y1\theta1} &= (k_1 + k_2)E_{x1} = (k_1 + k_2) \cdot e_{x1}D_{e1} = (k_1 + k_2) \cdot e_{x1}\rho_{m1}\sqrt{12}; \\
 k_{\theta1\theta1} &= k_{\theta\theta1} + k_{\theta\theta2} \\
 k_{x2\theta1} &= k_2E_{y2} = k_2 \cdot e_{y2}D_{e2} = k_2 \cdot e_{y2}\rho_{m2}\sqrt{12}; \\
 k_{y2\theta1} &= -k_2E_{x2} = -k_2 \cdot e_{x2}D_{e2} = -k_2 \cdot e_{x2}\rho_{m2}\sqrt{12}; \\
 k_{\theta2\theta1} &= -k_{\theta\theta2}
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

$$u_{x1} = 0; u_{y1} = 0; u_{\theta1} = 0; u_{x2} = 1; u_{y2} = 0; u_{\theta2} = 0$$

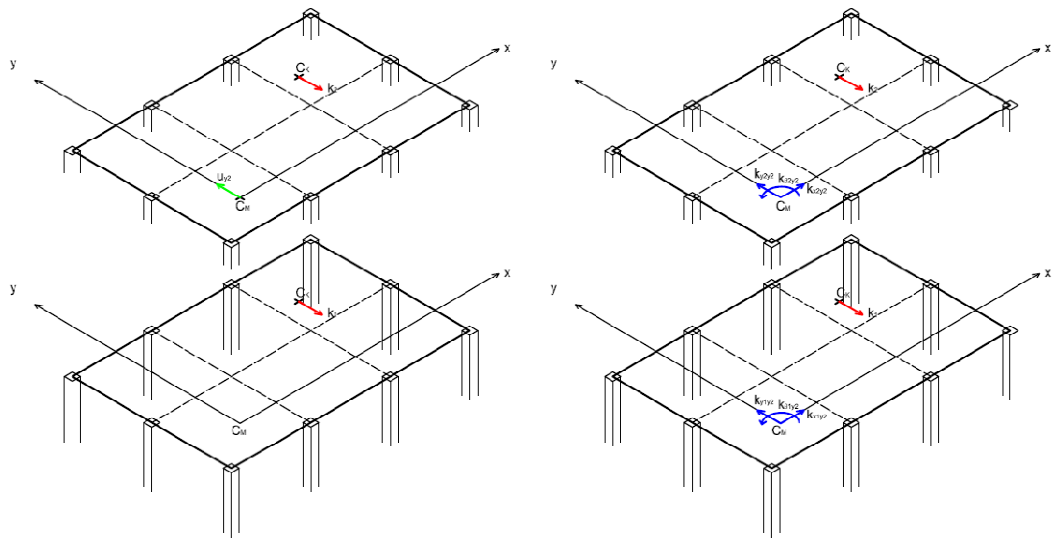


**Fig. 3.4** *Spostamento unitario in direzione x al secondo piano*

Per equilibrio si ottiene:

$$\begin{aligned}
 k_{x1x2} &= -k_2; \\
 k_{y1x2} &= 0; \\
 k_{\theta1x2} &= k_2 E_{y2} = k_2 \cdot e_{y2} D_{e2} = k_2 \cdot e_{y2} \rho_{m2} \sqrt{12} \\
 k_{x2x2} &= k_2; \\
 k_{y2x2} &= 0; \\
 k_{\theta2x2} &= -k_2 E_{y2} = -k_2 \cdot e_{y2} D_{e2} = -k_2 \cdot e_{y2} \rho_{m2} \sqrt{12}
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

$$u_{x1} = 0; u_{y1} = 0; u_{\theta1} = 0; u_{x2} = 0; u_{y2} = 1; u_{\theta2} = 0$$



**Fig. 3.5** *Spostamento unitario in direzione y al secondo piano*

Applicando l'equilibrio si ricava:

$$\begin{aligned}
 k_{x1y2} &= 0; \\
 k_{y1y2} &= -k_2; \\
 k_{\theta 1 y 2} &= -k_2 E_{x2} = -k_2 \cdot e_{x2} D_{e2} = -k_2 \cdot e_{x2} \rho_{m2} \sqrt{12} \\
 k_{x2y2} &= 0; \\
 k_{y2y2} &= k_2; \\
 k_{\theta 2 y 2} &= k_2 E_{x2} = k_2 \cdot e_{x2} D_{e2} = k_2 \cdot e_{x2} \rho_{m2} \sqrt{12}
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

$$u_{x1} = 0; u_{y1} = 0; u_{\theta 1} = 0; u_{x2} = 0; u_{y2} = 0; u_{\theta 2} = 1$$



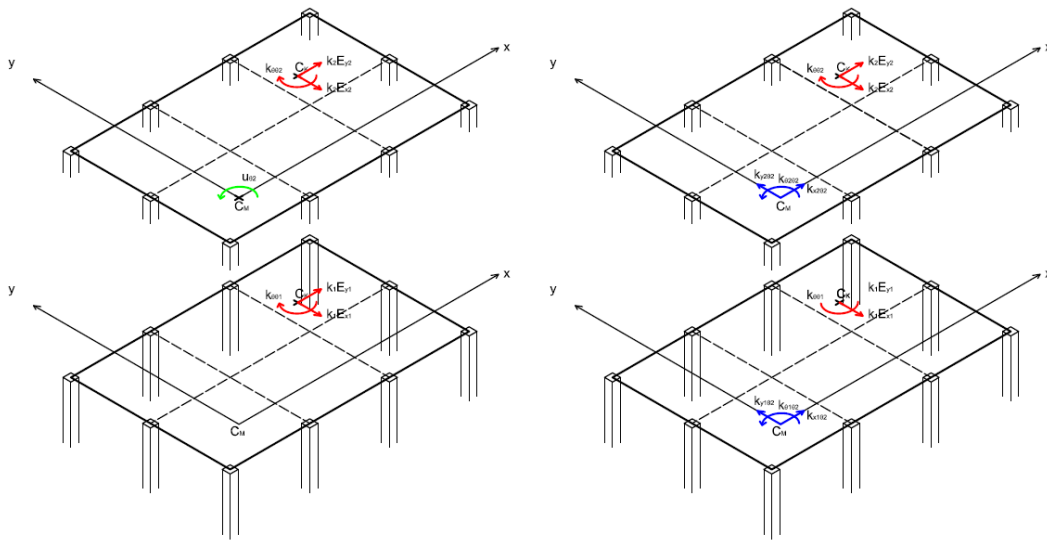


Fig. 3.6 Spostamento unitario di rotazione al secondo piano

Applicando l'equilibrio si ricava:

$$\begin{aligned}
 k_{x1\theta 2} &= k_2 \cdot e_{y2} \rho_{m2} \sqrt{12}; \\
 k_{y1\theta 2} &= -k_2 \cdot e_{x2} \rho_{m2} \sqrt{12}; \\
 k_{\theta 1\theta 2} &= -k_{\theta \theta 2} \\
 k_{x2\theta 2} &= -k_2 \cdot e_{y2} \rho_{m2} \sqrt{12}; \\
 k_{y2\theta 2} &= k_2 \cdot e_{x2} \rho_{m2} \sqrt{12}; \\
 k_{\theta 2\theta 2} &= k_{\theta \theta 2}
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Sostituendo le (3.6)-(3.12) nella (3.6) si ottiene:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
 (k_1 + k_2) & 0 & 0 & -(k_1 + k_2) \cdot e_{y1} \rho_{m1} \sqrt{12} & 0 & k_2 \cdot e_{y2} \rho_{m2} \sqrt{12} \\
 0 & (k_1 + k_2) & 0 & (k_1 + k_2) \cdot e_{x1} \rho_{m1} \sqrt{12} & 0 & -k_2 \cdot e_{x2} \rho_{m2} \sqrt{12} \\
 -(k_1 + k_2) \cdot e_{y1} \rho_{m1} \sqrt{12} & (k_1 + k_2) \cdot e_{x1} \rho_{m1} \sqrt{12} & k_{\theta\theta 1} + k_{\theta\theta 2} & k_2 \cdot e_{y2} \rho_{m2} \sqrt{12} & -k_2 \cdot e_{x2} \rho_{m2} \sqrt{12} & -k_{\theta\theta 2} \\
 -k_2 & 0 & k_2 \cdot e_{y2} \rho_{m2} \sqrt{12} & k_2 & 0 & -k_2 \cdot e_{y2} \rho_{m2} \sqrt{12} \\
 0 & -k_2 & 0 & 0 & k_2 & k_2 \cdot e_{x2} \rho_{m2} \sqrt{12} \\
 k_2 \cdot e_{y2} \rho_{m2} \sqrt{12} & -k_2 \cdot e_{x2} \rho_{m2} \sqrt{12} & -k_{\theta\theta 2} & -k_2 \cdot e_{y2} \rho_{m2} \sqrt{12} & k_2 \cdot e_{x2} \rho_{m2} \sqrt{12} & k_{\theta\theta 2}
 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

La (3.13) può essere riscritta considerando:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \cdot e_{y1} \rho_{m1} \sqrt{12} \\ 0 & k_1 & k_1 \cdot e_{x1} \rho_{m1} \sqrt{12} \\ -k_1 \cdot e_{y1} \rho_{m1} \sqrt{12} & k_1 \cdot e_{x1} \rho_{m1} \sqrt{12} & k_{\theta\theta 1} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} k_2 & 0 & -k_2 \cdot e_{y2} \rho_{m2} \sqrt{12} \\ 0 & k_2 & k_2 \cdot e_{x2} \rho_{m2} \sqrt{12} \\ -k_2 \cdot e_{y2} \rho_{m2} \sqrt{12} & k_2 \cdot e_{x2} \rho_{m2} \sqrt{12} & k_{\theta\theta 2} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

La (3.13) diventa quindi:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & -\mathbf{K}_2 \\ -\mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Ricordando le (1.14)-(1.21) possiamo poi riscrivere la rigidezza rotazionale dell'*i*-esimo piano come:

$$k_{\theta\theta i} = k_i \cdot \rho_i^2 \cdot \gamma_i^2 \quad (3.17)$$

da cui si ricava:

$$k_{\theta\theta i} = k_i \cdot \rho_i^2 \cdot [\Omega_{\theta i}^2 + 12(e_{xi}^2 + e_{yi}^2)] \quad (3.18)$$

dove:

$$\Omega_{\theta i} = \sqrt{\frac{I_{p,ki} m_i}{I_{p,mi} k_i}} = \frac{\rho_{ki}}{\rho_{mi}} \quad (3.19)$$

$$\gamma_i = \gamma_{C_M i} = \frac{\omega_{\theta, C_M i}}{\omega_{L i}} = \sqrt{\frac{I_{p,k, C_M i} m_i}{I_{p,mi} k_i}} = \frac{\rho_{k, C_M i}}{\rho_{mi}} \quad (3.20)$$

Una volta definiti questi parametri, è possibile riscrivere la (1.47), che definisce il valore del parametro  $\alpha$  nel caso di vibrazioni libere non smorzate, anche per l'*i*-esimo piano della struttura multi storey:

$$\alpha_{ui} = \frac{4e_i\sqrt{3}}{\sqrt{(\Omega_{\theta i}^2 + 12e_i^2 - 1)^2 + 48e_i^2}} \quad (3.21)$$

Analogamente è possibile definire il parametro  $R_i$ , che esprime il rapporto tra massima rotazione e massimo spostamento longitudinale in regime di vibrazioni forzate per l' $i$ -esimo piano:

$$R_i = \rho_{mi} \frac{|u_{\theta i}|_{max}}{|u_{yC_{Mi}}|_{max}} \quad (3.22)$$

e il rapporto:

$$\psi_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R_i}{\alpha_{ui}} \quad (3.23)$$

Dalla (1.52) si ricava poi che:

$$\psi_i = f(e_i, \Omega_{\theta i}, \xi_i) \quad (3.24)$$

Considerando quindi  $i = 1, 2$ , si nota subito come il numero di parametri significativi sia raddoppiato rispetto al caso di struttura single storey; considerando infatti  $\xi_1 = \xi_2 = \xi = 0,05$ , i parametri significative sono:

- $e_1$
- $\Omega_{\theta 1}$
- $e_2$
- $\Omega_{\theta 2}$

### 3.2 Strutture a tre piani

Procedendo in maniera analoga a quanto fatto per il caso a due piani, si possono definire anche le matrici di massa e rigidità per una struttura multi storey a tre piani, per la quale i gradi di libertà passano da sei a nove, ossia  $\{u_{x1}, u_{y1}, u_{\theta1}, u_{x2}, u_{y2}, u_{\theta2}, u_{x3}, u_{y3}, u_{\theta3}\}$ , e i movimenti sono definiti in Fig. 3.1. In questo caso, quindi, si ha:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \rho_{m1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \rho_{m2}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 \rho_{m3}^2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

e, dalle (3.14)(3.15):

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} k_3 & 0 & -k_3 \cdot e_{y3} \rho_{m3} \sqrt{12} \\ 0 & k_3 & k_3 \cdot e_{x3} \rho_{m3} \sqrt{12} \\ -k_3 \cdot e_{y3} \rho_{m3} \sqrt{12} & k_3 \cdot e_{x3} \rho_{m3} \sqrt{12} & k_{\theta\theta3} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Come per la (3.16) posso quindi scrivere:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 & -\mathbf{K}_2 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 & -\mathbf{K}_3 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_3 & \mathbf{K}_3 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Dalle (3.17)-(3.24) è possibile definire anche i parametri che governano il problema di struttura multi storey a tre piani:

- $e_1$
- $\Omega_{\theta1}$
- $e_2$
- $\Omega_{\theta2}$
- $e_3$
- $\Omega_{\theta3}$

### 3.3 Strutture a sei piani

Procedendo in maniera analoga a quanto fatto per il caso di struttura a tre piani, si possono definire anche le matrici di massa e rigidezza per una struttura multi storey a sei piani, per la quale i gradi di libertà aumentano fino ad arrivare a diciotto, ossia:

$$\{u_{x1}, u_{y1}, u_{\theta1}, u_{x2}, u_{y2}, u_{\theta2}, u_{x3}, u_{y3}, u_{\theta3}, u_{x4}, u_{y4}, u_{\theta4}, u_{x5}, u_{y5}, u_{\theta5}, u_{x6}, u_{y6}, u_{\theta6}\}$$

Anche in questo caso i movimenti sono definiti in Fig. 3.1. Per quanto riguarda la matrice delle masse si ha, quindi:

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & m_i \rho_{mi}^2 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

da cui si può ricavare la matrice delle masse come:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_6 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Con la stessa logica si può definire anche la matrice delle rigidezze. Indicando infatti:

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} k_i & 0 & -k_i \cdot e_{yi} \rho_{mi} \sqrt{12} \\ 0 & k_3 & k_i \cdot e_{xi} \rho_{mi} \sqrt{12} \\ -k_i \cdot e_{yi} \rho_{mi} \sqrt{12} & k_i \cdot e_{xi} \rho_{mi} \sqrt{12} & k_{\theta\theta i} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Così come per la (3.27) e per la (3.16) si può quindi ottenere una formulazione compatta della matrice di rigidezza per una struttura a sei piani:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 & -\mathbf{K}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 & -\mathbf{K}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_3 & \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4 & -\mathbf{K}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{K}_4 & \mathbf{K}_4 + \mathbf{K}_5 & -\mathbf{K}_5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{K}_5 & \mathbf{K}_5 + \mathbf{K}_6 & -\mathbf{K}_6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{K}_6 & \mathbf{K}_6 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Dalle (3.28)-(3.31) è possibile definire anche i parametri che governano il problema di struttura multi storey a sei piani:

- $e_1$
- $\Omega_{\vartheta 1}$
- $e_2$
- $\Omega_{\vartheta 2}$
- $e_3$
- $\Omega_{\vartheta 3}$
- $e_4$
- $\Omega_{\vartheta 4}$
- $e_5$
- $\Omega_{\vartheta 5}$
- $e_6$
- $\Omega_{\vartheta 6}$

### 3.3 Considerazioni finali

Come facilmente intuibile, il numero di variabili aumenta all'aumentare del numero di piani della struttura multi storey, e questo comporta un contemporaneo aumento della capacità di calcolo, e quindi dei tempi di calcolo. Nel caso di struttura multipiano, poi, non è possibile, salvo casi particolari, operare le semplificazioni fatte per la struttura single storey; scrivendo le equazioni del moto in forma esplicita, infatti, non è possibile individuare elementi comuni (e quindi semplificabili) a tutti i membri.

Per questo si è deciso di cercare un single storey che rappresenti ogni piano della struttura: in questo modo, infatti, è possibile rendere più leggero il processo di calcolo, poiché si passa da un sistema di  $3n$  equazioni in  $3n$  variabili ad  $n$  sistemi di tre equazioni in tre variabili (dove  $n$  corrisponde al numero di piani della struttura multi storey).

## CAPITOLO 4

### Impostazione delle analisi per le strutture multipiano

Come si è visto nel capitolo precedente, passare da una struttura single storey ad una struttura multipiano comporta un aumento dei gradi di libertà e delle variabili da considerare; per ovviare a questo problema si cercherà di determinare, per ogni piano, una struttura single storey che rappresenti al meglio il comportamento del piano considerato. Per farlo è necessario individuare un parametro che possa fungere da indicatore del livello di approssimazione assunto dal single storey equivalente considerato.

Si consideri quindi la formula base del metodo ALPHA:

$$|u_{\vartheta}|_{max} = \psi \cdot \frac{\alpha_u}{\rho_m} \cdot \delta \cdot |u_{yC_M}|_{max-ne} \quad (4.1)$$

si può notare come le variabili che influiscono sulla determinazione della (4.1) sono sostanzialmente tre:

- $\rho_m = \rho_{m,C_M} = \sqrt{\frac{I_{p,m}}{m}}$
- $\psi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R}{\alpha_u}$
- $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|u_{yC_M}|_{max}}{|u_{yC_M}|_{max-ne}}$

Risulta subito evidente come  $\rho_m$  sia una quantità che non cambia nel passaggio dal sistema multi storey a quello single storey, in quanto funzione di proprietà fisiche del sistema che rimangono costanti, per cui non può essere un indicatore attendibile. Si è scelto di non considerare neanche il parametro  $\delta$ , perché, per determinarlo, bisognerebbe ricavare anche gli spostamenti del sistema non eccentrico, appesantendo quindi i calcoli.

Per determinare il livello di approssimazione raggiunto utilizzando una struttura single storey equivalente al piano considerato, si utilizzerà quindi il rapporto tra  $\psi_{ij}$ , ossia lo  $\psi$  relativo allo spostamento tra i piani  $i$  e  $j$  della struttura multi storey, e  $\psi_{SS}$ , cioè lo  $\psi$  della struttura single storey equivalente. Lo scopo è cercare una struttura single storey tale che:



$$R_{\psi} = \frac{\psi_{ij}}{\psi_{ss}} \leq 1,1 \quad (4.2)$$

che equivale a dire che  $\psi_{ij}$  non deve superare  $\psi_{ss}$  per più del 10%.

Tutte le analisi verranno svolte sotto le seguenti ipotesi:

- uguale rigidezza del sistema nelle due direzioni  $x$  e  $y$ ;
- risposta rotazionale  $u_{\theta}$  sotto eccitazione dinamica piccola abbastanza da poter considerare l'approssimazione del primo ordine  $u_{\theta} \cong \sin(u_{\theta}) \cong \tan(u_{\theta})$ , ovvero un'analisi in ambito elastico-lineare;
- gli elementi resistenti laterali sono privi di massa (*mass less*) e assialmente indeformabili;
- il solaio è infinitamente rigido nel proprio piano e la distribuzione delle masse è uniforme;
- il sistema di riferimento è incentrato nel baricentro delle masse  $C_M$ ;
- l'eccentricità longitudinale è nulla ( $e_y = 0$ , sistemi *one-way eccentricity*);
- l'eccitazione sismica è unidirezionale (*uniaxial excitation*)

#### 4.1 Il parametro $\psi_{ij}$

Il coefficiente  $\psi$  è definito dalla (1.49):

$$\psi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R}{\alpha_u} \quad (4.3)$$

Allo stesso modo si può quindi definire  $\psi_{ij}$ :

$$\psi_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R_{ij}}{\alpha_{u,j}} \quad (4.4)$$

dove:

- $R_{ij}$  è il rapporto tra la massima rotazione relativa e il massimo spostamento longitudinale relativo per i piani  $i$  e  $j$  in regime di vibrazioni forzate

$$R_{ij} = \rho_{mj} \frac{|u_{\vartheta j} - u_{\vartheta i}|_{max}}{|u_{y,C_M,j} - u_{y,C_M,i}|_{max}} \quad (4.5)$$

- $\alpha_{u,j}$  è il rapporto tra massima rotazione e massimo spostamento longitudinale in regime di vibrazioni libere non smorzate del piano  $j$

$$\alpha_{u,j} = \frac{4e_j\sqrt{3}}{\sqrt{(\Omega_{\vartheta,j}^2 + 12e_j^2 - 1)^2 + 48e_j^2}} \quad (4.6)$$

Come risulta evidente dalla (4.5), per determinare il coefficiente  $R_{ij}$  è necessario calcolare massima rotazione e massimo spostamento longitudinale in condizioni di sistema smorzato e in regime di vibrazioni forzate. Prima di procedere, quindi, è necessario approfondire il discorso sullo smorzamento applicato al sistema.

#### 4.1.1 Introduzione dello smorzamento

L'analisi della risposta in condizione di assenza di smorzamento rappresenta un caso ideale, che quindi non può trovare riscontro in nessuna struttura reale. Diventa indispensabile, quindi, determinare le soluzioni dell'equazione del moto:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (4.7)$$

tenendo però conto della matrice  $\mathbf{C}$ .

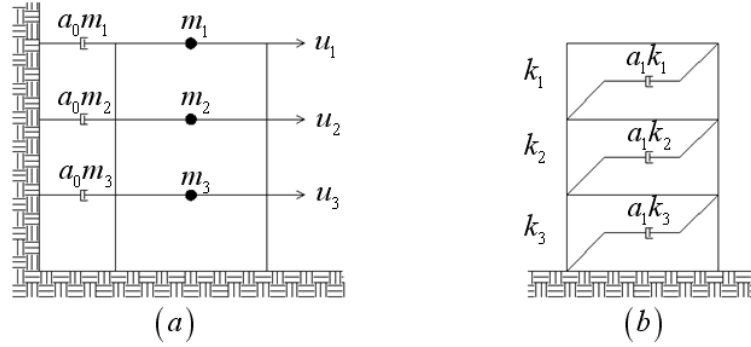
Agendo secondo i criteri dell'analisi modale, però, non è possibile disaccoppiare le equazioni del sistema, fatto che permette di considerarlo come un insieme di oscillatori semplici, perché, in genere, la matrice  $\mathbf{C}$  non è simmetrica, per cui non si può beneficiare dell'ortogonalità dei modi. Una possibile soluzione consiste nell'assumere uno smorzamento alla Rayleigh.

##### 4.1.1.1 Smorzamento alla Rayleigh

Lo smorzamento alla Rayleigh è uno smorzamento proporzionale alle matrici delle masse e delle rigidezze.

$$\mathbf{C} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K} \quad (4.8)$$

con  $a_0$  e  $a_1$  dimensionalmente pari all'inverso del secondo ed al secondo. Questi due contributi sono rappresentati fisicamente dai due sistemi in Fig. 4.1



**Fig. 4.1** (a) smorzamento proporzionale alle masse; (b) smorzamento proporzionale alle rigidità.

Se il rapporto di smorzamento per l'ennesimo modo è dato dalla:

$$\xi_n = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_n} + \frac{a_1}{2} \omega_n \quad (4.9)$$

allora, considerando due rapporti di smorzamento specifici per due generici modi  $i$  e  $j$ , i coefficienti  $a_0$  e  $a_1$  possono essere determinati dal sistema:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\omega_i & \omega_i \\ 1/\omega_j & \omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_i \\ \xi_j \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

Se si assume che entrambi i modi abbiano lo stesso rapporto di smorzamento, i coefficienti assumono la seguente espressione:

$$a_0 = \xi \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad a_1 = \xi \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (4.11)$$

E quindi la matrice di smorzamento si ottiene sostituendo la (4.11) nella (4.8).

## 4.2 I parametri strutturali considerati nelle simulazioni

Studi precedenti [Orci, 2009] hanno dimostrato come la soluzione della (4.7) in condizioni di smorzamento non nullo e oscillazioni forzate sia funzione dei seguenti parametri:

- eccentricità relativa  $e$ ;
- $\Omega_g$ ;
- periodo di vibrazione longitudinale  $T_L$ ;
- rapporto di smorzamento  $\xi$ ;
- diagonale equivalente  $D_e$ ;

Per le analisi successive il rapporto di smorzamento  $\xi$  sarà considerato costante e pari a 0,05 (smorzamento del 5%), così come la diagonale equivalente  $D_e$ , in quanto la struttura oggetto dello studio manterrà costanti le sue caratteristiche geometriche. Anche il periodo di vibrazione longitudinale  $T_L$  verrà mantenuto costante, per cui si arriva ad affermare, come per altro già evidenziato nei capitoli precedenti, che la soluzione della (4.7) dipende da due soli parametri,  $e$  ed  $\Omega_g$ , che, secondo quanto già ricavato nel secondo capitolo, verranno fatti variare nel seguente modo:

- eccentricità relativa  $e$  (0.05, 0.1, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50);
- $\Omega_g$  (0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2);

Per ogni struttura considerata, quindi, ci saranno 100 possibili combinazioni dei parametri  $e$  ed  $\Omega_g$ , per ognuna delle quali sarà calcolato il valore di  $\psi_{ij}$ .

### 4.2.1 Le strutture multipiano considerate

Le caratteristiche di massa, rigidezza laterale, eccentricità e il parametro  $\Omega_g$  dell' $i$ -esimo piano delle strutture multi storey considerate saranno definite in funzione delle caratteristiche del primo piano, attraverso i rapporti:

$$R_e = \frac{e_i}{e_1} \quad R_{\Omega_g} = \frac{\Omega_{gi}}{\Omega_{g1}} \quad R_m = \frac{m_i}{m_1} \quad R_K = \frac{k_{Li}}{k_{L1}} \quad (4.12)$$

Per quel che riguarda il periodo di vibrazione longitudinale  $T_L$ , invece, questo verrà tenuto costante per il primo piano e pari a 0.2.

### 4.3 Input Sismici

Ogni struttura considerata sarà sottoposta a 20 diversi record di accelerazioni sismiche, per ognuna delle quali sarà determinata la soluzione della (4.7).

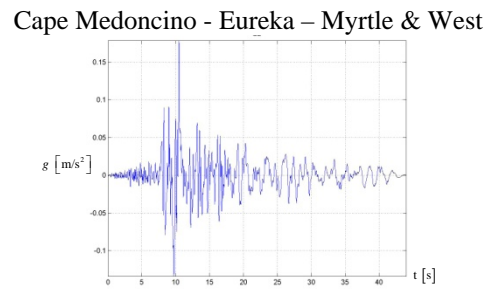
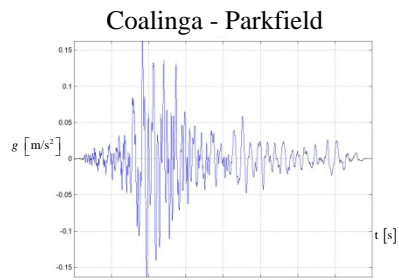
Gli input sismici considerati sono riportati in Tab. 4.1

Sisma	Stazione	Data	Distanza	PGA (g)
			epicentrale	
			km	m/s <sup>2</sup>
Coalinga	Parkfield	05/02/83	47.9	0.164
Cape Medonchino	Eureka – Myrtle & West	04/25/92	53.3	0.178
Kern County	Taft Lincoln School	7/21/52	43.5	0.156
Chi-Chi	Chy047	09/20/99	54.9	0.186
Chalfant Valley	Benton	07/21/86	31.2	0.209
Northridge	Downey	01/17/94	47.5	0.230
Taiwan Smart1 (45)	Smart o02	11/14/86	77.6	0.242
Northridge	San Gabriel – E Grand	1/17/94	44.4	0.256
Superstition Hills	Cal	11/24/87	31.6	0.247
Irpinia Eq	Brienza	11/23/80	46.2	0.217
Loma Prieta	Alameda Nas Hangar 23	10/18/89	90.1	0.268
Whittier Narrows	Inglewood Union Oil	10/01/87	24.3	0.299
Northridge	LA – S Grand	1/17/94	33.8	0.290
Imperial Valley	Delta	10/15/79	33.7	0.351
San Fernando	Castaic Old Ridge Route	02/09/71	25.4	0.324
San Fernando	Lake Hughes	02/09/71	20.1	0.366
Loma Prieta	UCSC	10/18/89	16.51	0.396
Chi-Chi	TCU047	09/20/99	86.4	0.301
Northridge	LA – N Westmoreland	1/17/94	27.3	0.361
Chi-Chi	NST	09/20/99	88.9	0.309

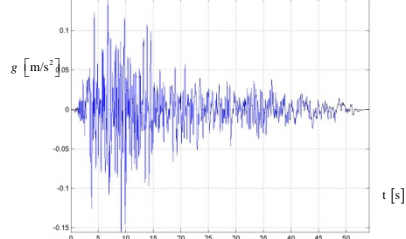
**Tab. 4.1** Input sismici considerati (Peer Strong Motion Database)

Di seguito sono riportati i corrispondenti accelerogrammi:

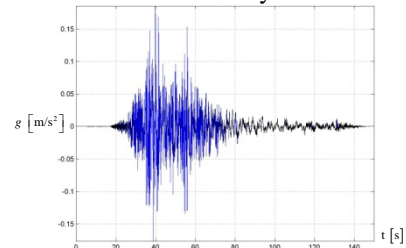
# Impostazione delle analisi per le strutture multipiano



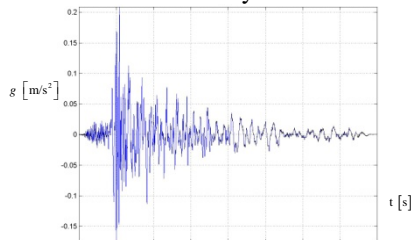
Kern County - Taft Lincoln School



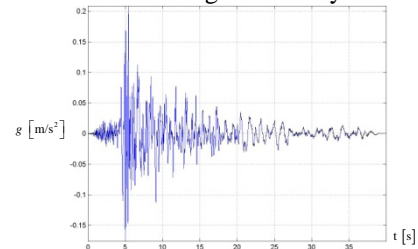
Chi-Chi - Chy047



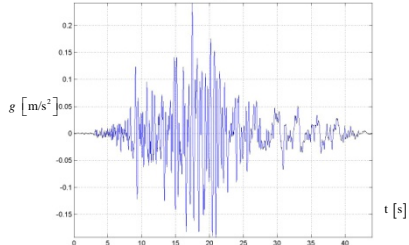
Chalfant Valley - Benton



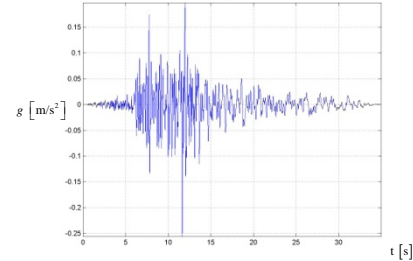
Northridge - Downey



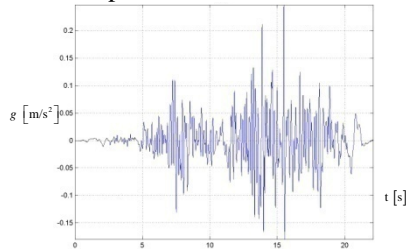
Taiwan Smart1 (45) - Smart o02



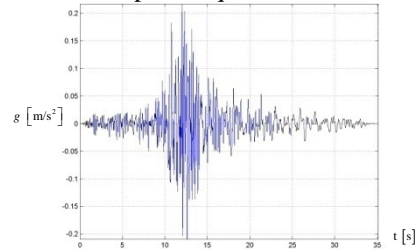
Northridge - San Gabriel - E Grand



Superstition Hills - Cal

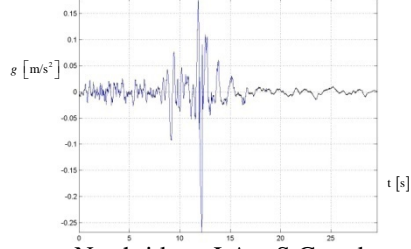


Irpinia Eq - Brienza

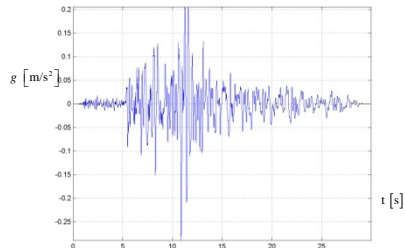


Impostazione delle analisi per le strutture multipiano

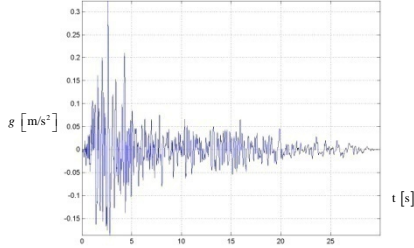
Loma Prieta - Alameda Nas Hangar 23



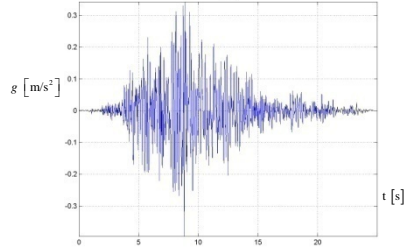
Northridge - LA - S Grand



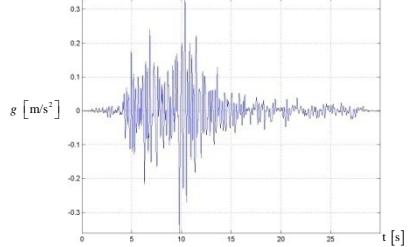
San Fernando - Castaic Old Ridge Route



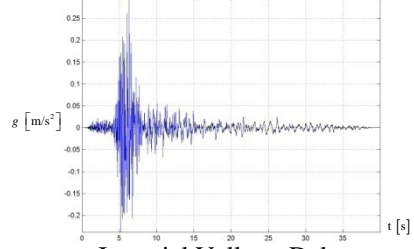
Loma Prieta - UCSC



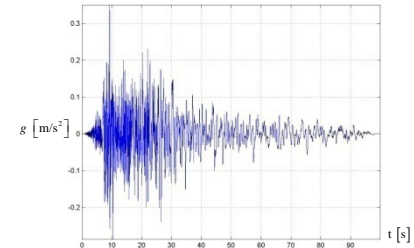
Northridge - LA - N Westmoreland



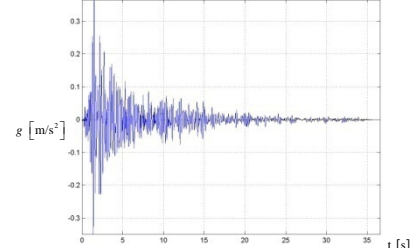
Whittier Narrows - Inglewood Union Oil



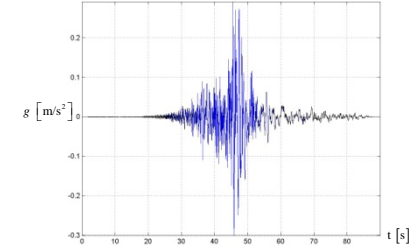
Imperial Valley - Delta



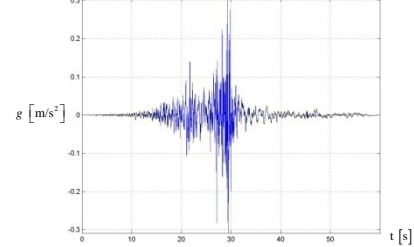
San Fernando - Lake Hughes



Chi-Chi - TCU047



Chi-Chi - NST



#### 4.4 Impostazione delle singole analisi

Per ogni struttura multi storey (da due, da tre e da sei piani), si considereranno diverse tipologie strutturali, ognuna caratterizzata da diversi valori dei rapporti  $R_e$ ,  $R_m$ ,  $R_k$ ,  $R_{\Omega_g}$ . Ogni struttura, al variare di  $e$  ed  $\Omega_g$ , verrà sottoposta ai 20 sismi appena elencati, per ognuno dei quali sarà determinato il valore dei massimi spostamenti longitudinali e rotazionali raggiunti; successivamente si calcolerà il valore medio di tali spostamenti, con cui si andrà a definire, per ogni coppia  $(e, \Omega_g)$ , il parametro  $\psi_{ij}$  corrispondente.

Dopodiché si cercherà, per ogni interpiano, la struttura single storey equivalente che permette di avere:

$$\psi_{ij} \leq \psi_{ss} \quad (4.13)$$

dove  $\psi_{ss}$  è il parametro  $\psi$  relativo alla struttura single storey.

Si riterrà accettabile il single storey che permette di ottenere, al variare dei parametri  $e$  ed  $\Omega_g$ , una differenza tra  $\psi_{ij}$  e  $\psi_{ss}$  non superiore al 10%; questo significa cercare quel valore di  $\psi_{ss}$  tale che:

$$\frac{\psi_{ij}}{\psi_{ss}} \leq 1,1 \quad (4.14)$$

L'andamento di questo rapporto sarà leggibile dai grafici per effetto dei diversi colori utilizzati per rappresentarlo:

- Colore Ciano:  $\frac{\psi_{ij}}{\psi_{ss}} \leq 0,9$ ;
- Colore Verde:  $0,9 < \frac{\psi_{ij}}{\psi_{ss}} \leq 1$ ;
- Colore Giallo:  $1 < \frac{\psi_{ij}}{\psi_{ss}} \leq 1,1$ ;
- Colore Rosso:  $\frac{\psi_{ij}}{\psi_{ss}} \geq 1,1$

In molti casi si considereranno single storey aventi come rigidità la rigidità totale della struttura multi storey; per determinarla si ricorrerà alla formula tipica delle rigidità in serie:



$$\frac{1}{k_{tot}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} \quad (4.15)$$

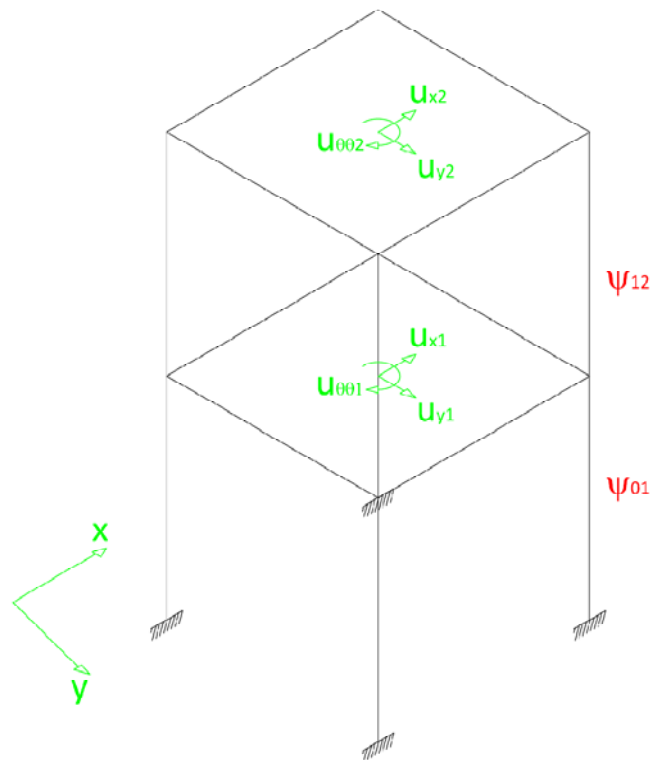
La somma delle masse, invece, sarà una semplice somma aritmetica:

$$m_{tot} = m_1 + m_2 + \dots + m_n \quad (4.16)$$

## CAPITOLO 5

### Struttura a due piani

In questo capitolo verranno presentate le analisi effettuate su una struttura multi storey a due piani, rappresentata in Fig. 5.1.



**Fig. 5.1** *Struttura single storey a due piani.*

I diversi casi di calcolo sono elencati nella tabella 5.1:

Caso	$R_e$	$R_m$	$R_k$	$R_{\Omega_g}$
1	1	1	1	1
2	1	1	0.5	1
3	1	1	2	1
4	1	0.5	1	1
5	1	2	1	1
6	2	1	1	1
7	1	1	1	0.5
8	1	1	1	2

Tab. 5.1 Casi di calcolo per la struttura multi storey a due piani

## 5.1 Caso 1: Piani identici

Il primo caso consiste in una struttura composta da due piani di caratteristiche identiche; si considerano, infatti, i rapporti  $R_e$ ,  $R_m$ ,  $R_k$ ,  $R_{\Omega_g}$  con valore unitario:

$$R_e = R_m = R_k = R_{\Omega_g} = 1 \quad (5.1)$$

### 5.1.1 Primo Piano

Per cercare di rappresentare al meglio le caratteristiche del primo piano della struttura multi storey, verranno considerati due single storey equivalenti: il primo avente le caratteristiche del primo piano, il secondo con rigidezza e massa dell'intera struttura.

5.1.1.1 Caratteristiche del primo piano

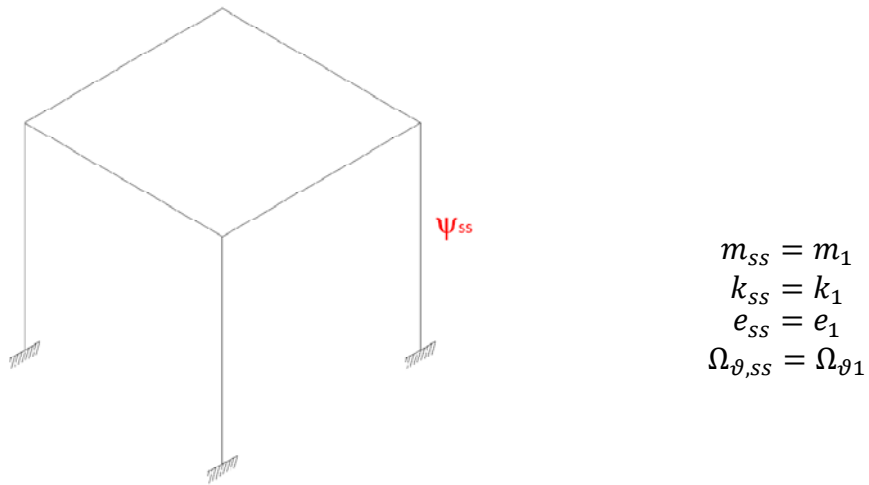


Fig. 5.2 Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

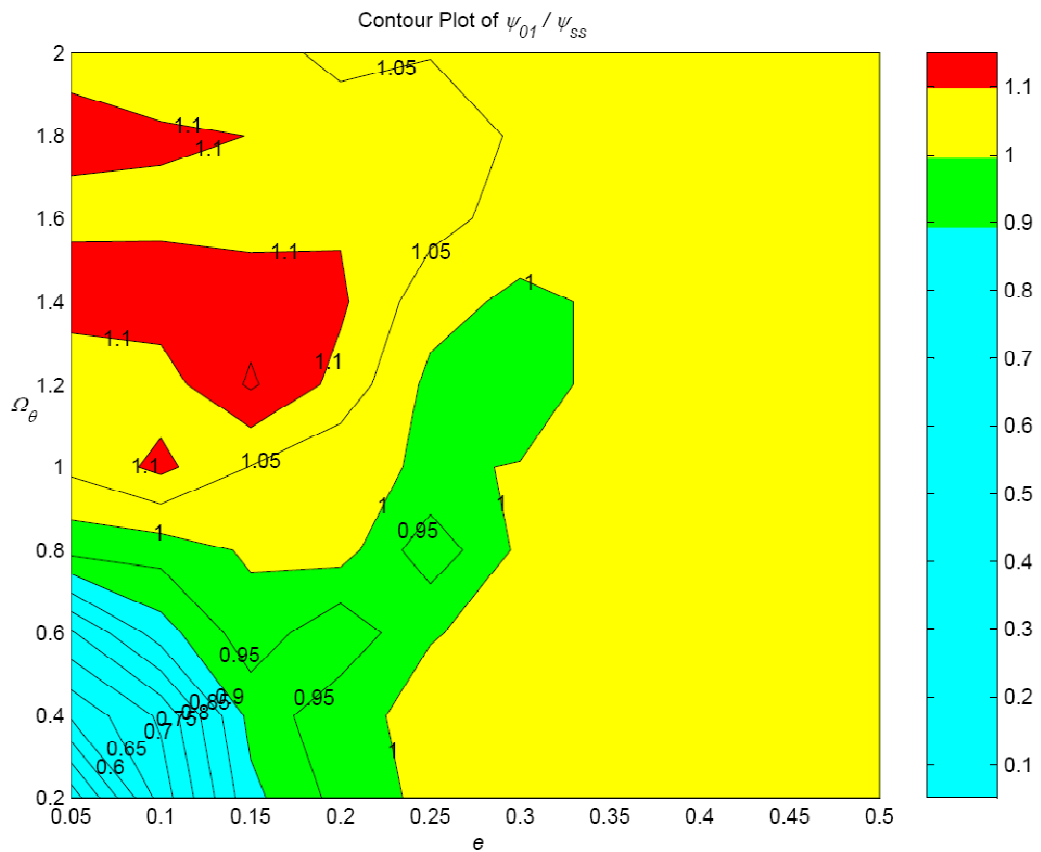
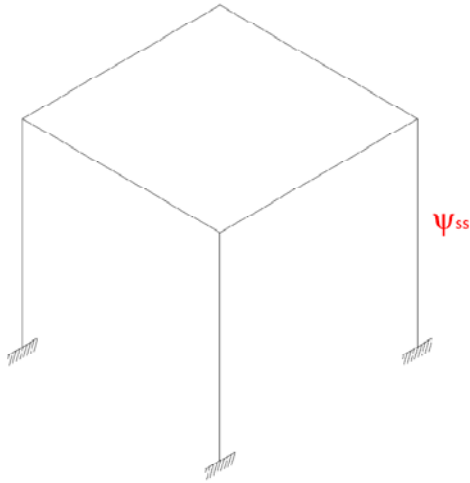


Fig. 5.3 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

5.1.1.2 Caratteristiche totali



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

Fig. 5.4 Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

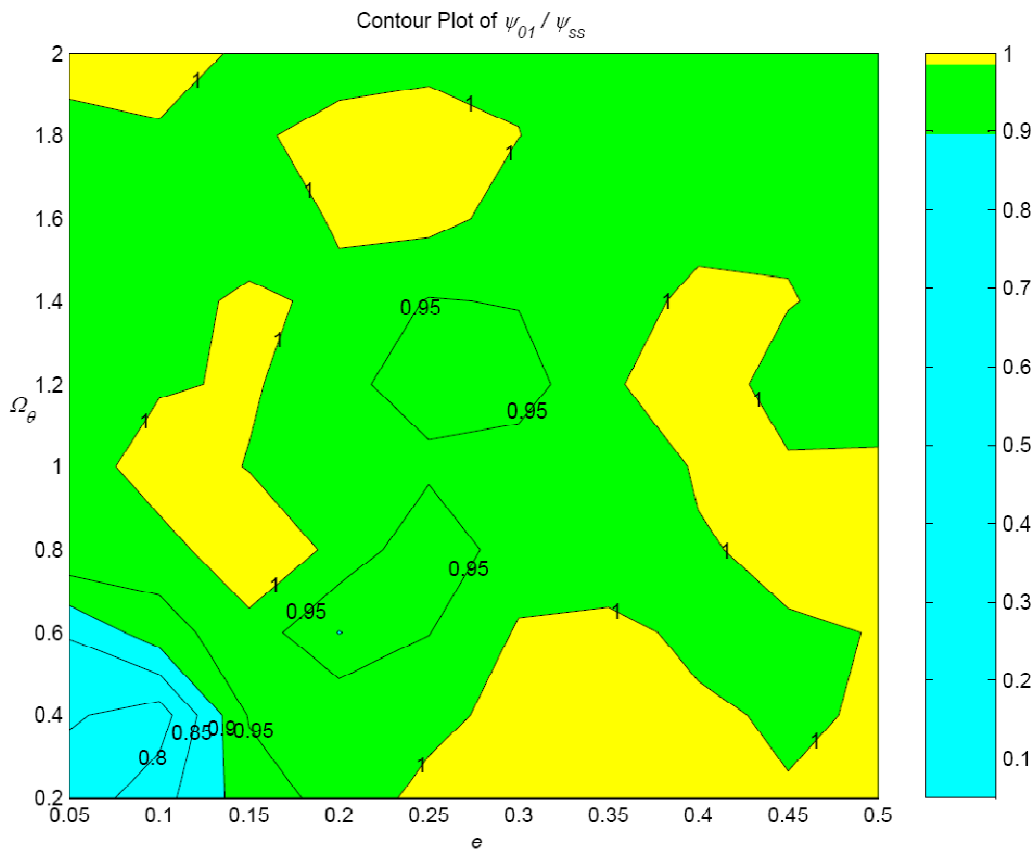


Fig. 5.5 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 5.1.1.3 Riassunto

Dai grafici ottenuti risulta evidente come, per il primo piano, il single storey che meglio coglie il comportamento del primo piano della struttura multi storey sia quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{SS}$  rimane, per buona parte del dominio considerato, inferiore all'unità; inoltre, nelle porzioni di dominio in cui il valore unitario viene superato, la differenza tra i due parametri rimane comunque inferiore al 5%.

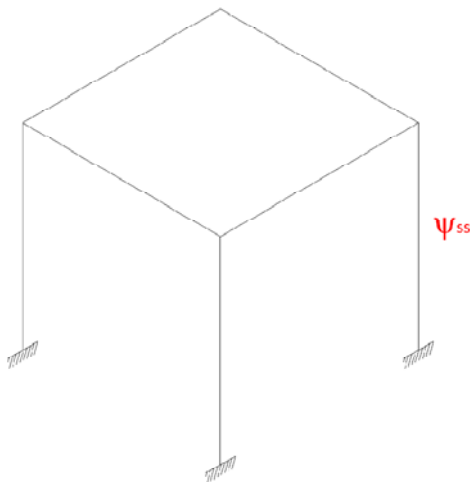
Si può quindi affermare che, in questo caso, il single storey che meglio rappresenta il comportamento del primo piano della struttura multi storey ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned} m_{SS} &= m_1 + m_2 \\ k_{SS} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\ e_{SS} &= e_1 \\ \Omega_{\theta,SS} &= \Omega_{\theta 1} \end{aligned}$$

### 5.1.2 Secondo Piano

Come per il primo piano, anche per il secondo della struttura multi storey verranno considerati due single storey equivalenti: il primo avente le caratteristiche del secondo piano, il secondo con rigidità e massa dell'intera struttura.

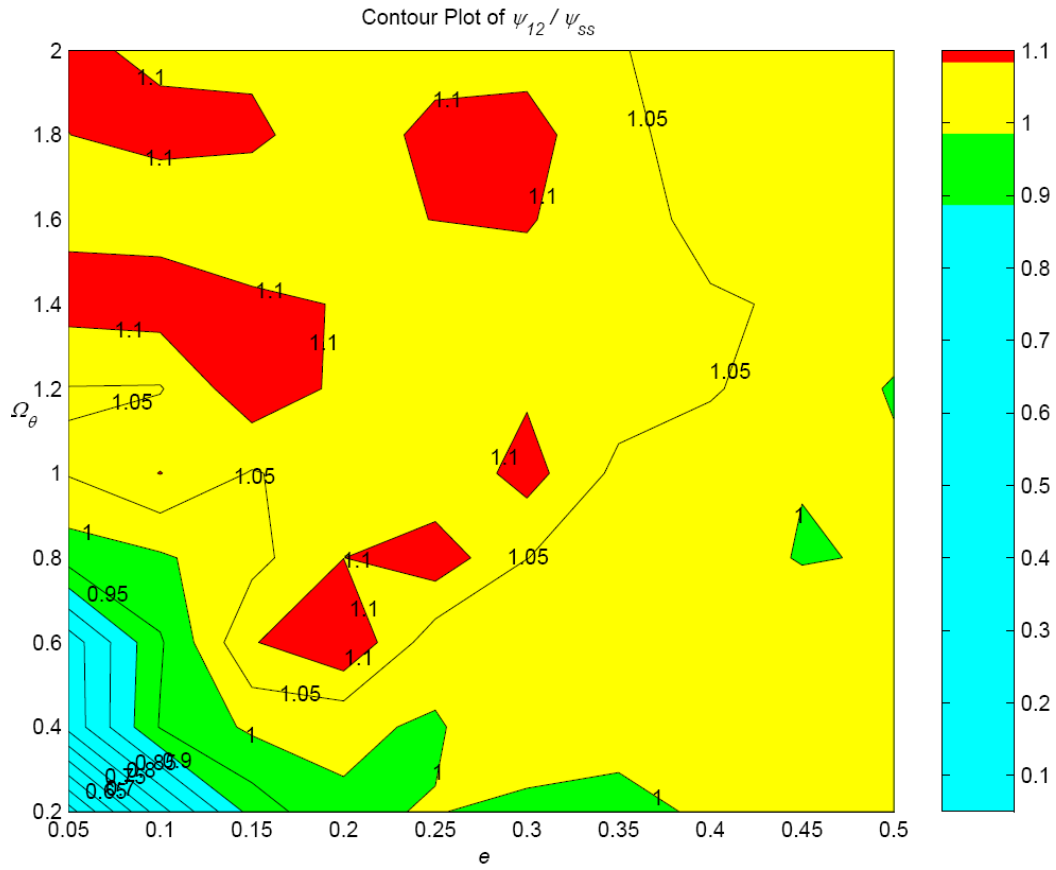
#### 5.1.2.1 Caratteristiche del secondo piano



$$\begin{aligned} m_{SS} &= m_2 \\ k_{SS} &= k_2 \\ e_{SS} &= e_2 \\ \Omega_{\theta,SS} &= \Omega_{\theta 2} \end{aligned}$$

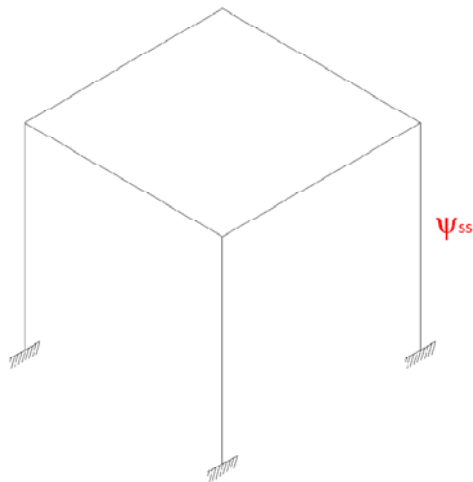
**Fig. 5.6** *Struttura single storey equivalente.*

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:



**Fig. 5.7** *Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .*

5.1.2.2 Caratteristiche totali



$$m_{ss} = m_1 + m_2$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_1$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 1}$$

Fig. 5.8 Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

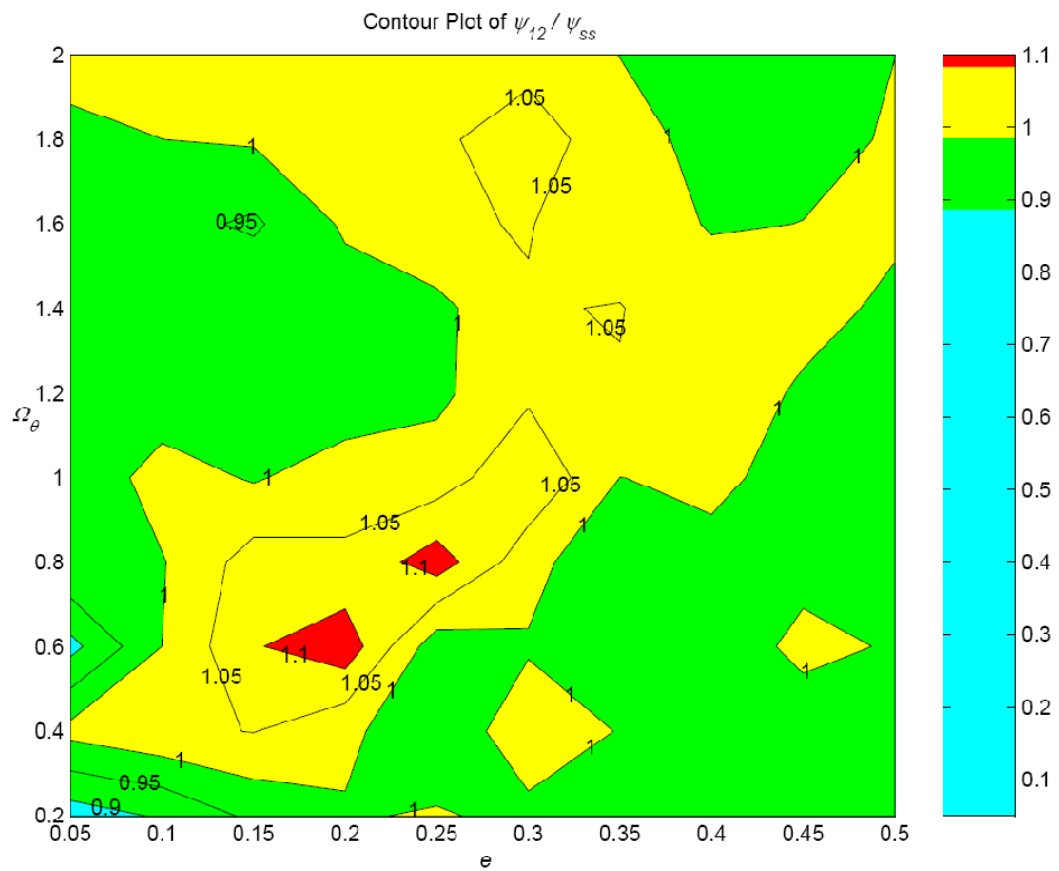
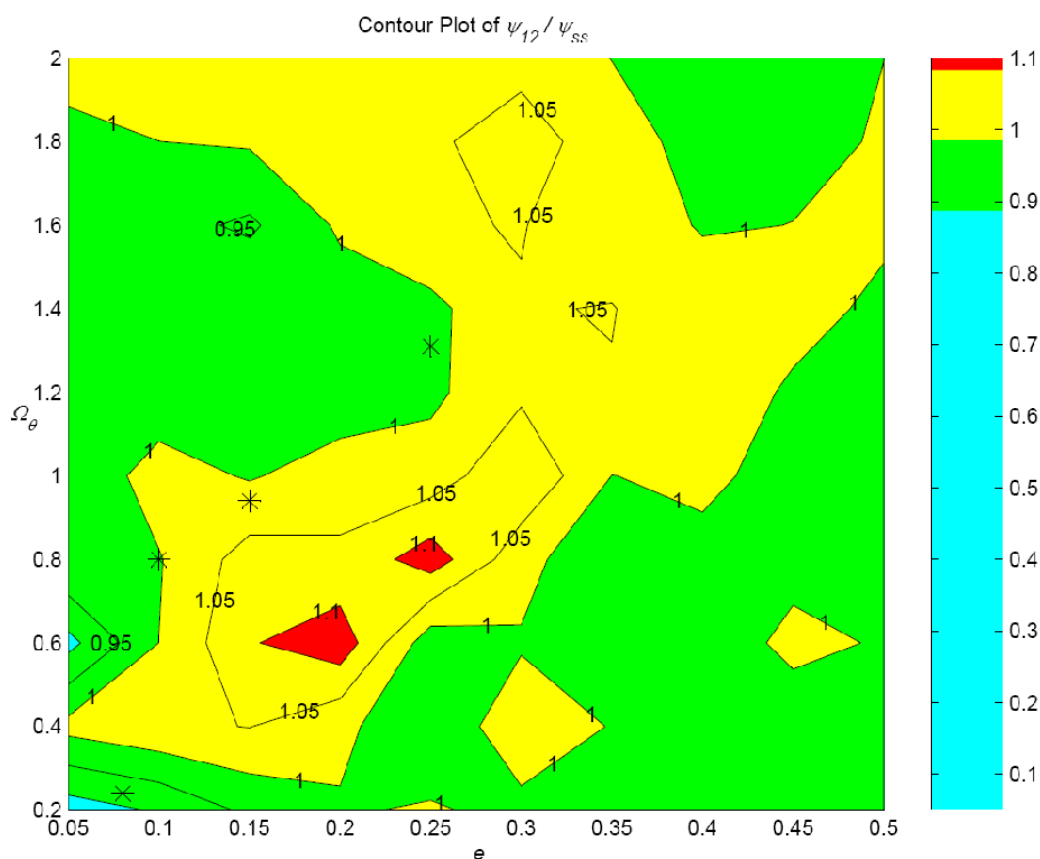


Fig. 5.9 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .



### 5.1.2.3 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre come il single storey che meglio rappresenta il comportamento del secondo piano della struttura multi storey sia, anche in questo caso, quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  rimane inferiore all'unità per una porzione più estesa del dominio. Vi sono tuttavia delle zone, caratterizzate da bassi valori del parametro  $\Omega_g$  e da un'eccentricità relativa  $e$  compresa tra il 20 e il 30%, in cui la differenza tra i due parametri è superiore al 10%; recenti studi [Orci 2009, Dall'Olio 2009], però, hanno dimostrato che le strutture reali raramente presentano questa combinazione dei parametri  $e$  ed  $\Omega_g$ , per cui questo andamento del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  può ritenersi accettabile. A conferma di quanto affermato, si riporta in Fig. 5.10 il grafico del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  presentato in Fig.5.9, in cui sono indicate le coppie  $e$  ed  $\Omega_g$  proprie delle strutture reali analizzate nel capitolo 2.



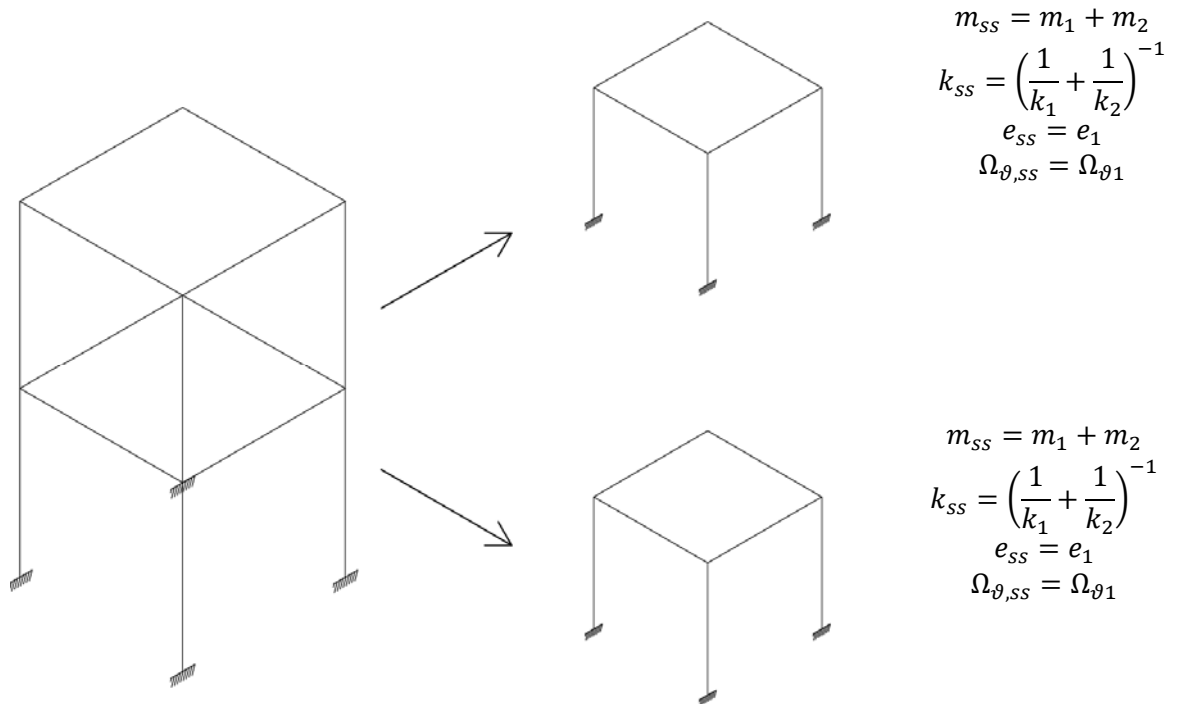
**Fig. 5.10** Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  con evidenziati i valori di  $e$  ed  $\Omega_g$  per strutture reali.

Come si può vedere, le considerazioni fatte sono corrette, per cui, in conclusione, anche per il secondo piano la struttura single storey che meglio approssima il comportamento del secondo piano della struttura multi storey ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

### 5.1.3 Riassunto

Per chiarezza, si riassume graficamente quanto ottenuto:



**Fig. 5.11** Riassunto dei risultati ottenuti.

## 5.2 Caso 2: Rigidezza del secondo piano dimezzata

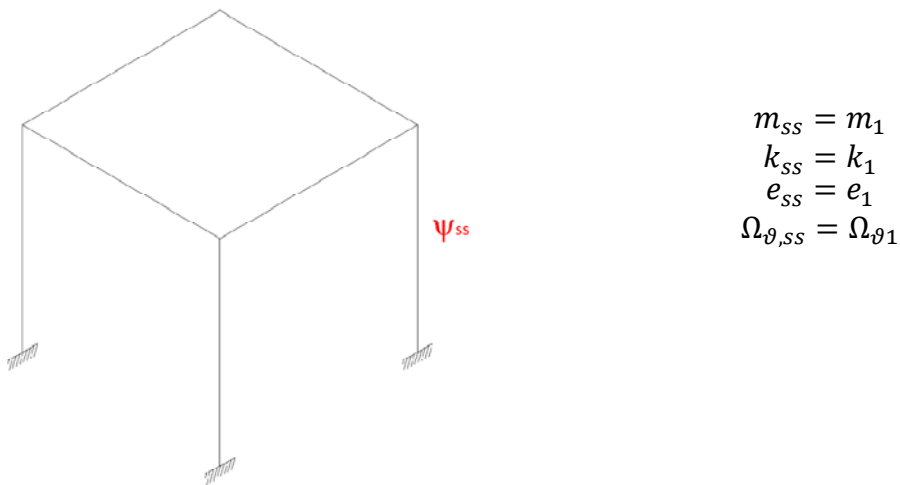
Il secondo caso prevede di modificare la rigidezza del secondo piano; si considerano, infatti, i seguenti valori per i rapporti  $R_e$ ,  $R_m$ ,  $R_k$ ,  $R_{\Omega_\theta}$ :

$$\begin{aligned} R_e = R_m = R_{\Omega_\theta} &= 1 \\ R_k &= 0.5 \end{aligned} \quad (5.2)$$

### 5.2.1 Primo Piano

In questo caso si sono considerati tre single storey equivalenti: il primo avente le caratteristiche del primo piano, il secondo con rigidezza e massa dell'intera struttura, il terzo con caratteristiche di rigidezza medie.

#### 5.2.1.1 Caratteristiche del primo piano



**Fig. 5.12** *Struttura single storey equivalente.*

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:

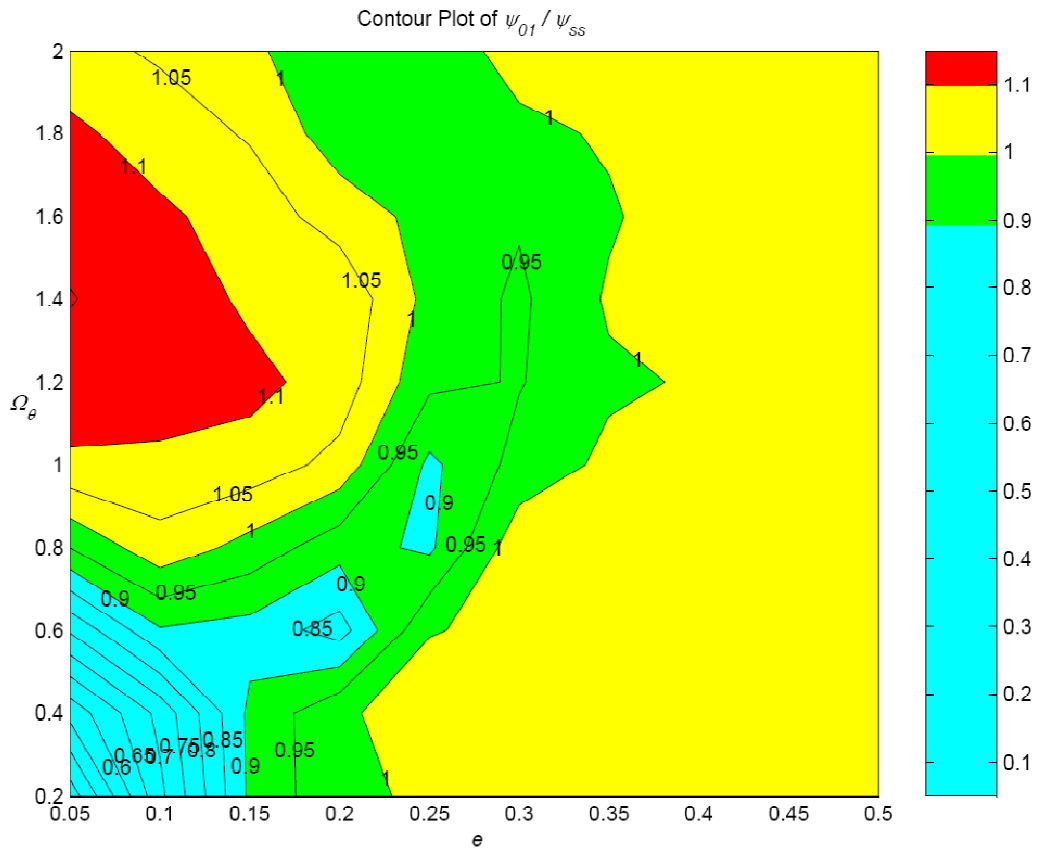
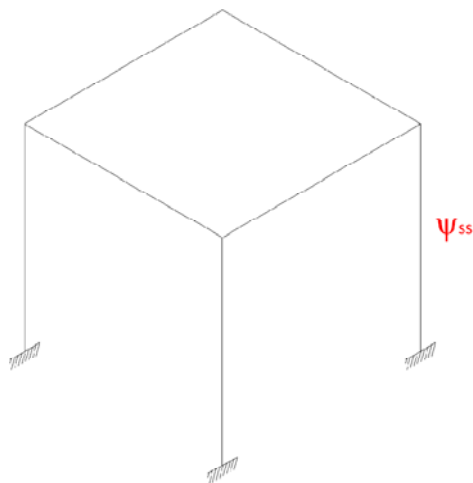


Fig. 5.13 Rapporto  $\psi_{01} / \psi_{ss}$ .

### 5.2.1.2 Caratteristiche totali



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 1}
 \end{aligned}$$

Fig. 5.14 Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:

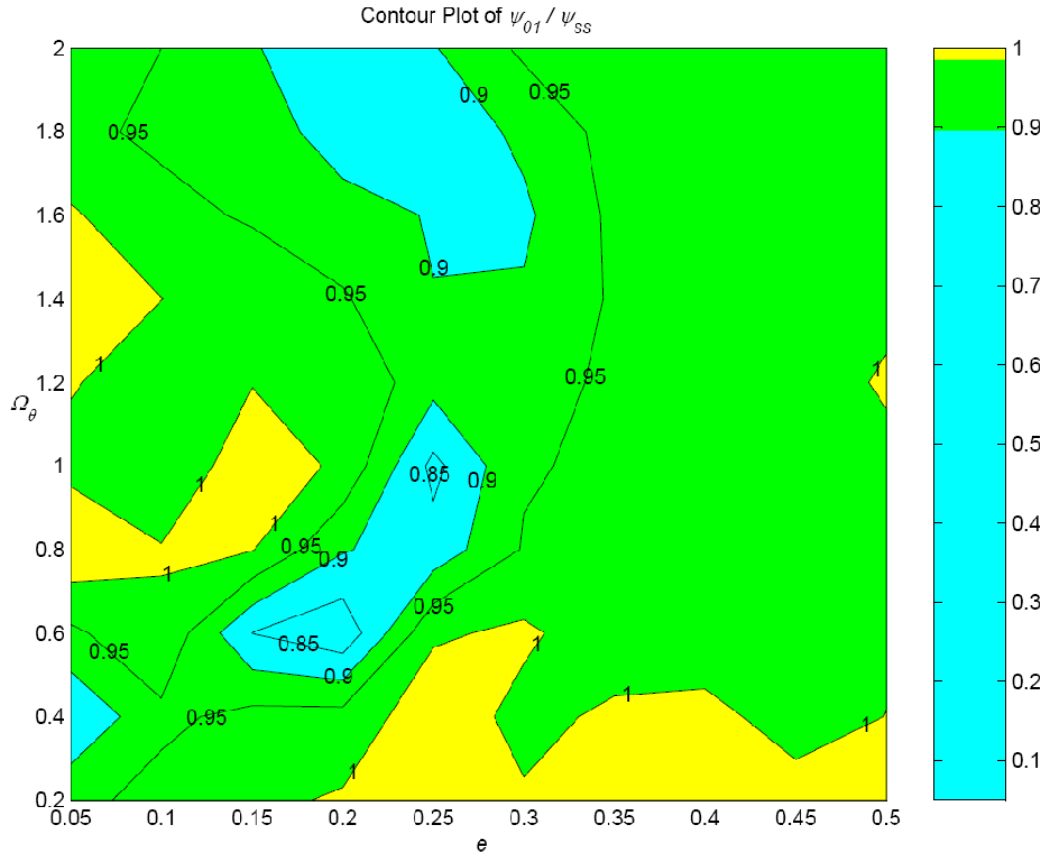
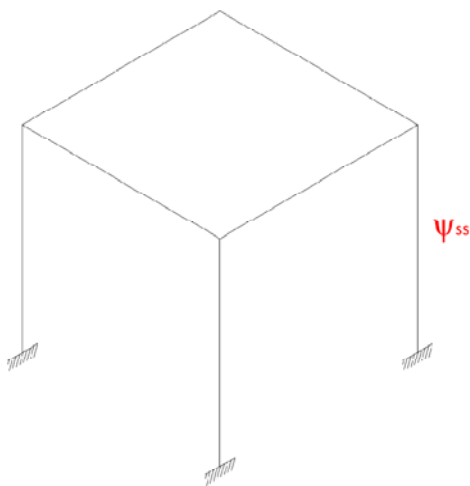


Fig. 5.15 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

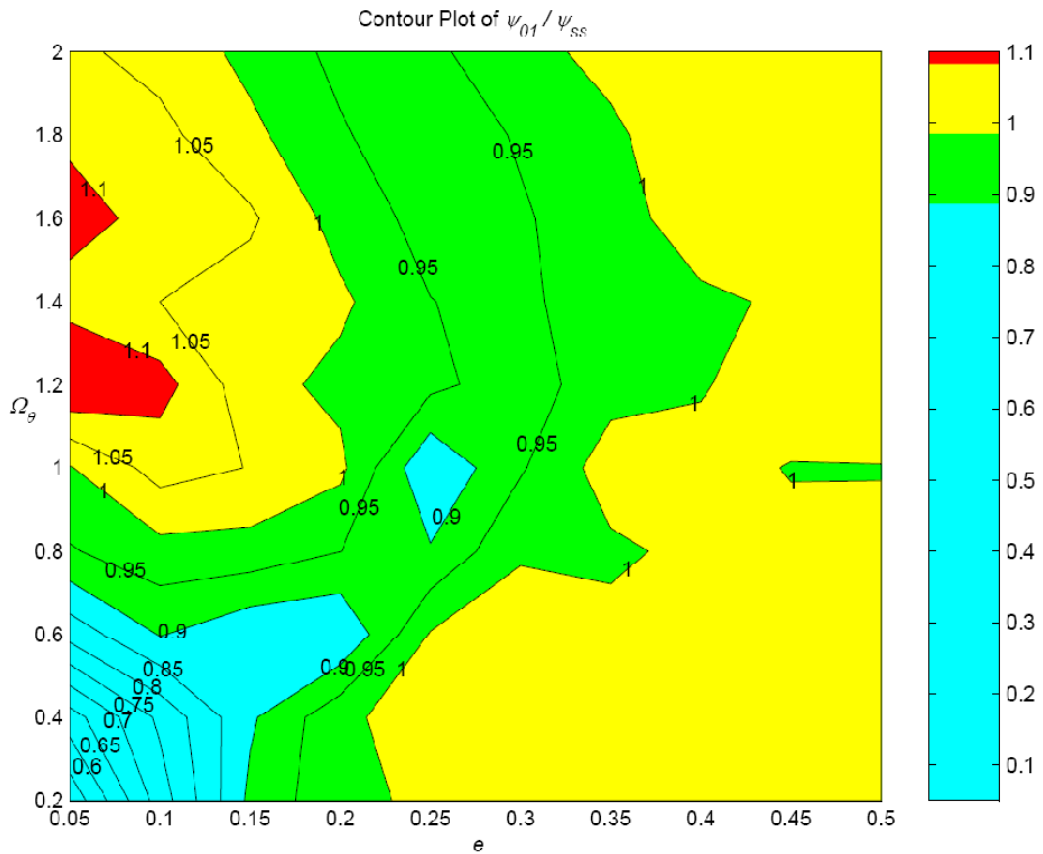
### 5.2.1.3 Rigidezza media



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 \\
 k_{ss} &= \frac{k_1 + k_2}{2} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

Fig. 5.16 Struttura single storey equivalente.

Graficando il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  si ottiene:



**Fig. 5.17** Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

#### 5.2.1.4 Riassunto

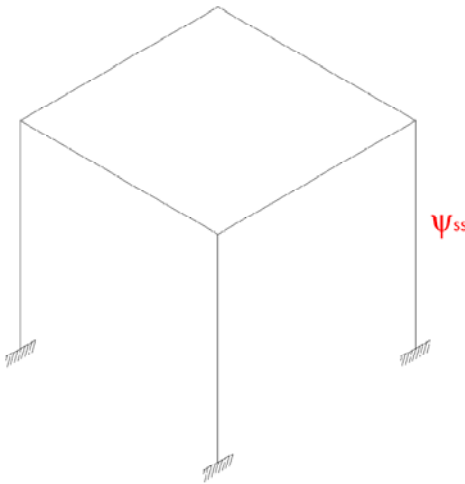
Osservando i grafici ottenuti si può dedurre come il single storey che meglio rappresenta il comportamento del primo piano della struttura multi storey sia, come per il caso precedente, quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  rimane inferiore all'unità per una porzione più estesa del dominio, e le zone in cui si ha un rapporto maggiore di uno presentano una differenza tra  $\psi_{01}$  e  $\psi_{ss}$  inferiore al 5%. Il single storey cercato, quindi, ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

## 5.2.2 Secondo Piano

I casi considerati sono gli stessi del primo piano.

### 5.2.2.1 Caratteristiche del secondo piano



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 \\
 k_{ss} &= k_2 \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

**Fig. 5.18** *Struttura single storey equivalente.*

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:

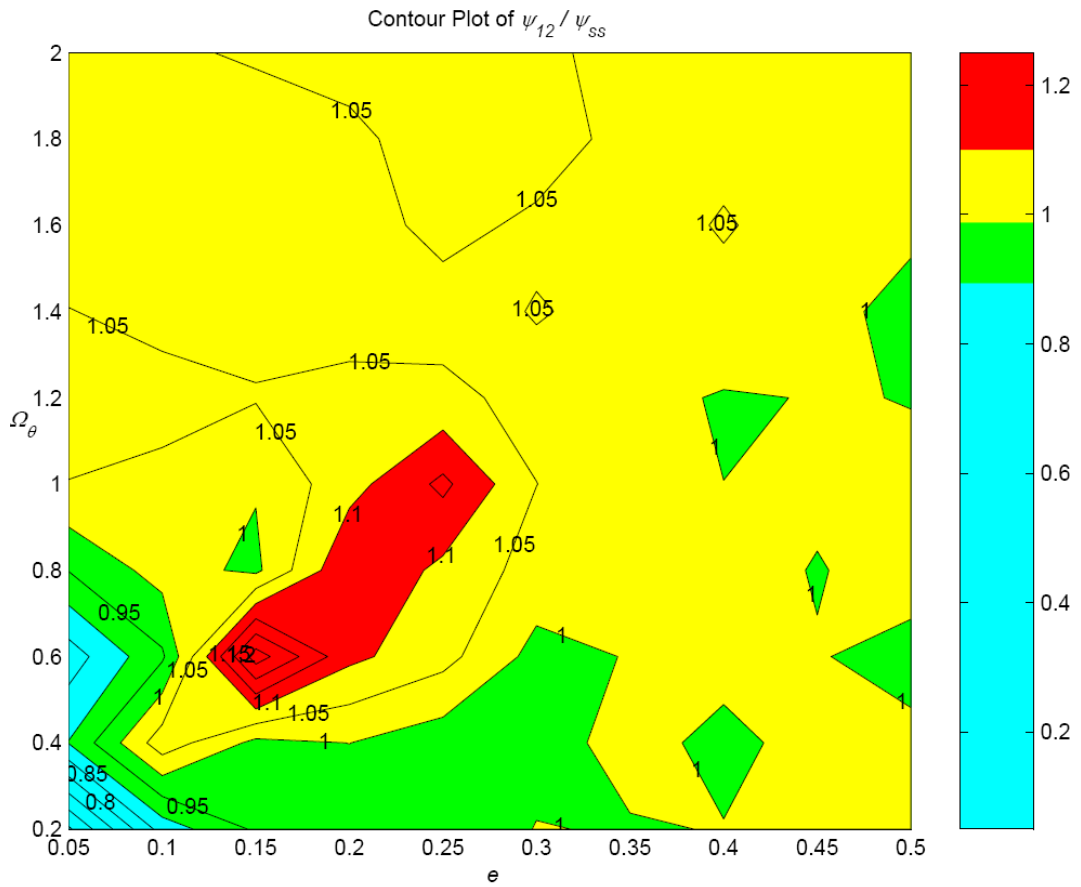
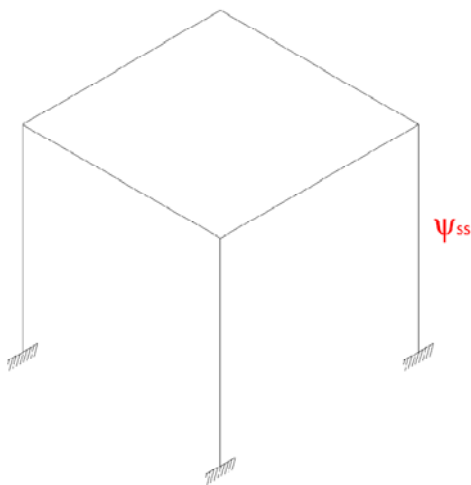


Fig. 5.19 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 5.2.2.1 Caratteristiche totali



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

Fig. 5.20 Struttura single storey equivalente.



Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:

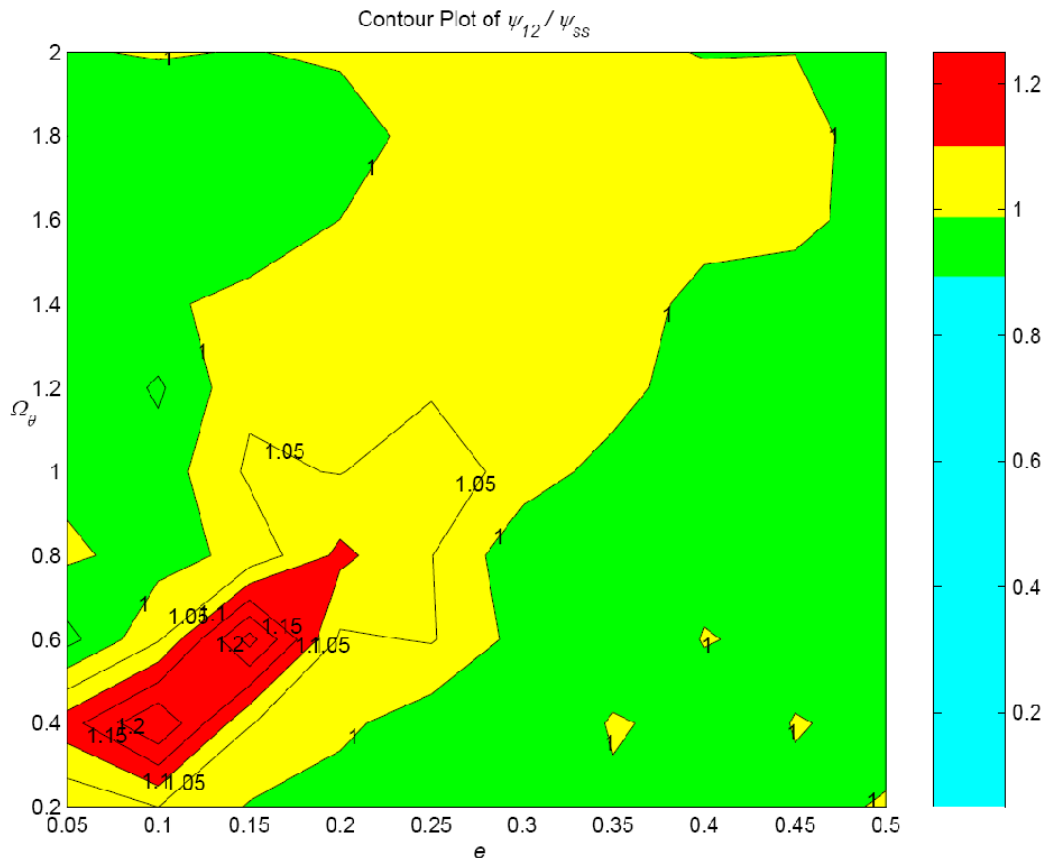
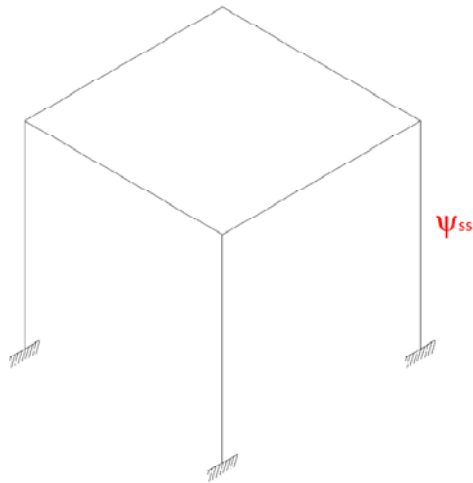


Fig. 5.21 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

5.2.1.3 Rigidezza media



$$m_{ss} = m_2$$

$$k_{ss} = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$e_{ss} = e_1$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 1}$$

Fig. 5.22 Struttura single storey equivalente.

Graficando il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  si ottiene:

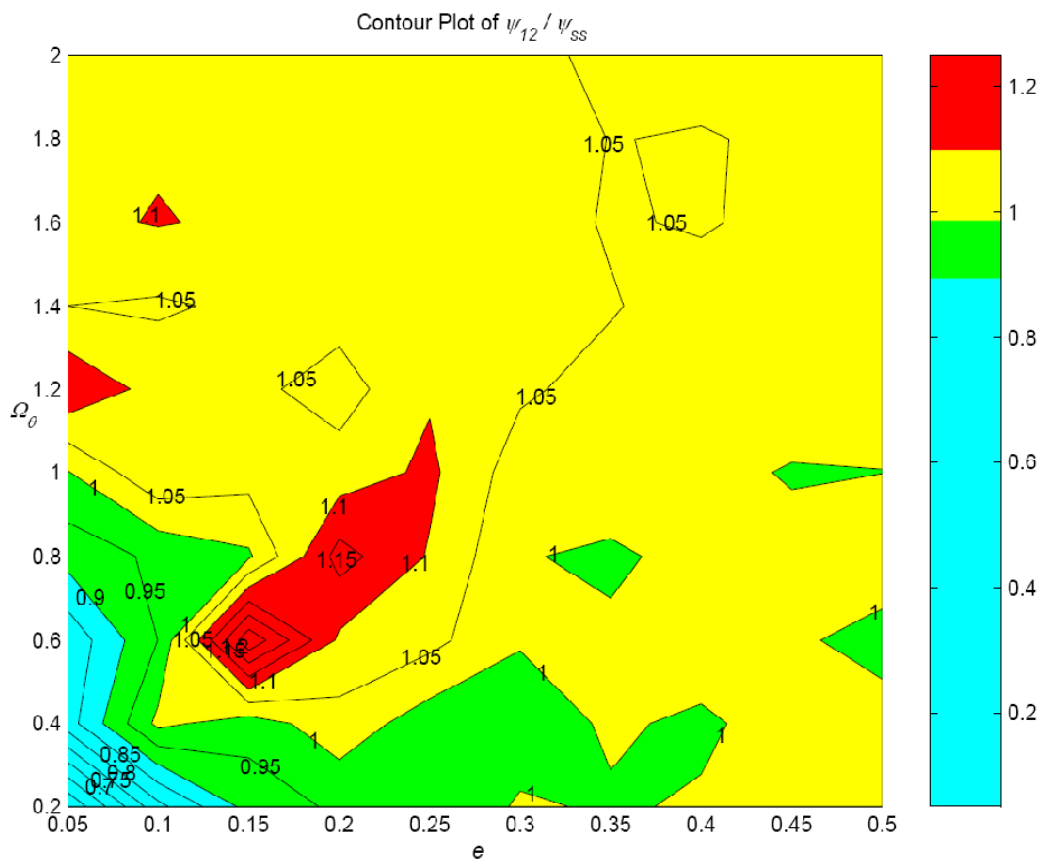
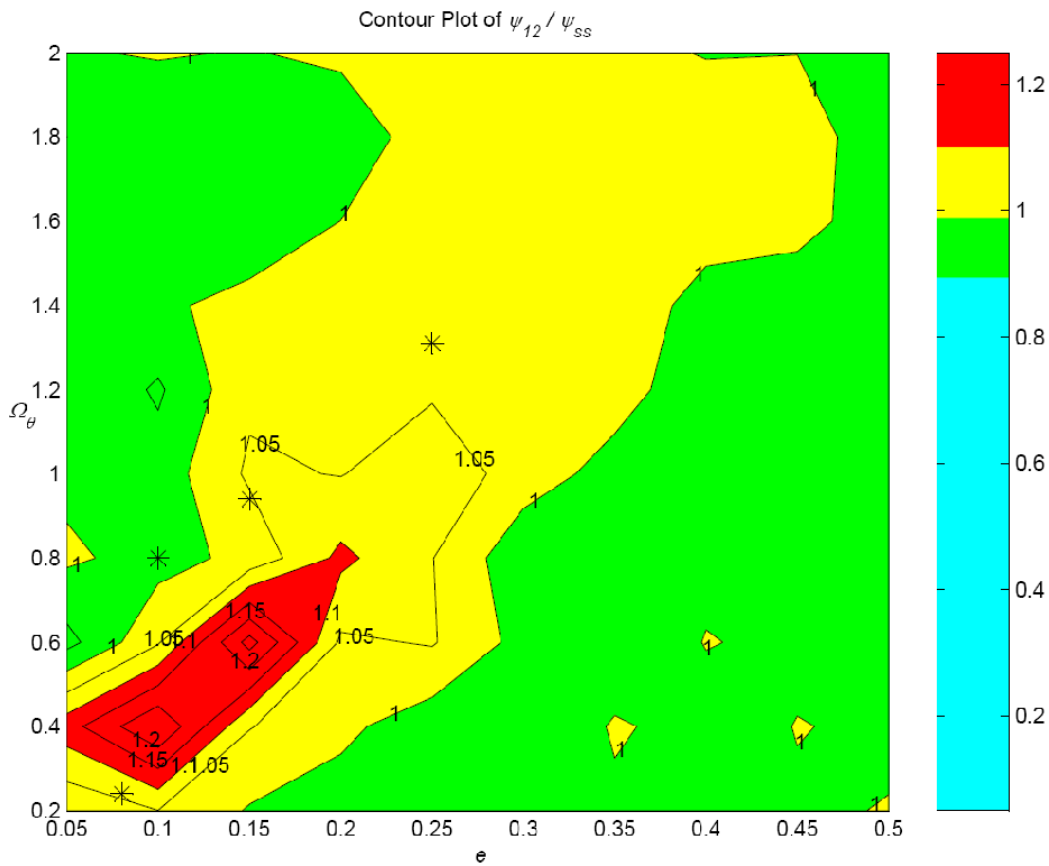


Fig. 5.23 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 5.2.2.4 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti, e ricordando le considerazioni fatte anche per il caso precedente, si può dedurre come il single storey che meglio rappresenta il comportamento del secondo piano della struttura multi storey sia, come per il primo piano, quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{SS}$  rimane pari od inferiore all'unità per una porzione più estesa del dominio, e le zone in cui si ha una differenza tra  $\psi_{12}$  e  $\psi_{SS}$  superiore al 10% non sono rappresentative di strutture reali, come indicato in Fig. 5.24.



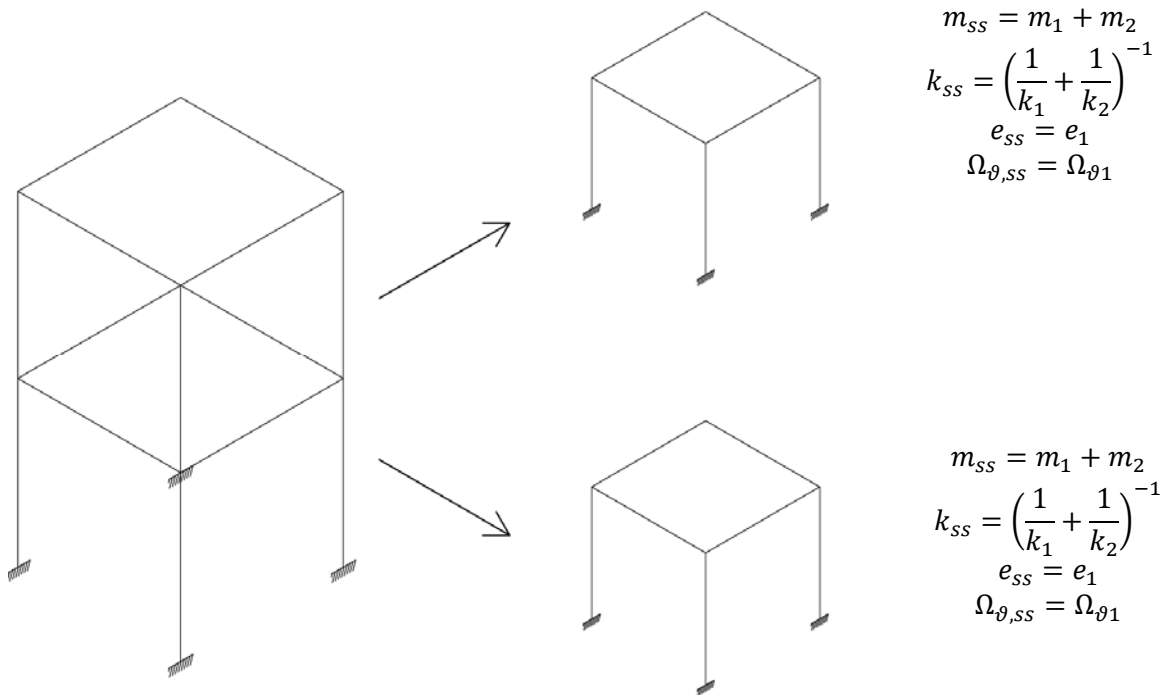
**Fig. 5.24** Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{SS}$  con evidenziati i valori di  $e$  ed  $\Omega_\theta$  per strutture reali.

Il single storey cercato, quindi, ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

### 5.2.3 Riassunto

Per chiarezza, si riassume graficamente quanto ottenuto:



**Fig. 5.25** Riassunto dei risultati ottenuti.

### 5.3 Caso 3: Rigidezza del secondo piano raddoppiata

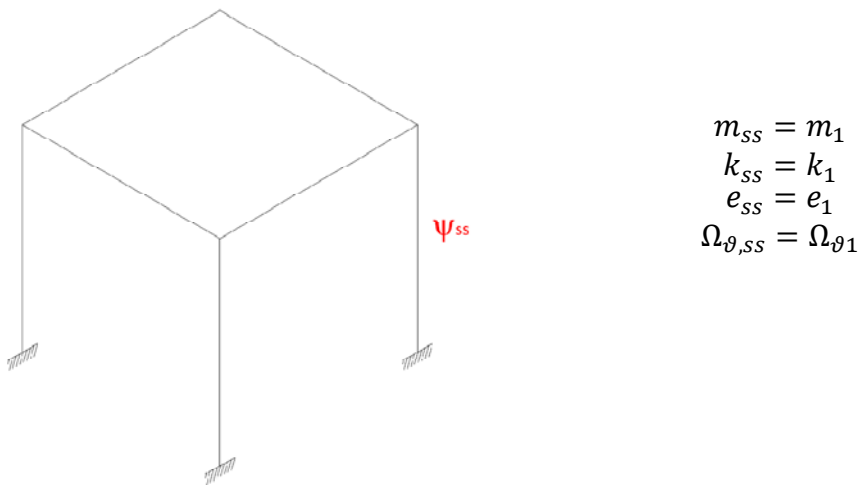
Anche nel terzo caso si è deciso di modificare la rigidezza del secondo piano; si considerano, infatti, i seguenti valori per i rapporti  $R_e, R_m, R_k, R_{\Omega\theta}$ :

$$\begin{aligned} R_e = R_m = R_{\Omega\theta} &= 1 \\ R_k &= 2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

#### 5.3.1 Primo Piano

In questo caso si sono considerati tre single storey equivalenti: il primo avente le caratteristiche del primo piano, il secondo con rigidezza e massa dell'intera struttura, il terzo con caratteristiche di rigidezza medie.

##### 5.3.1.1 Caratteristiche del primo piano



**Fig. 5.26** *Struttura single storey equivalente.*

Il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

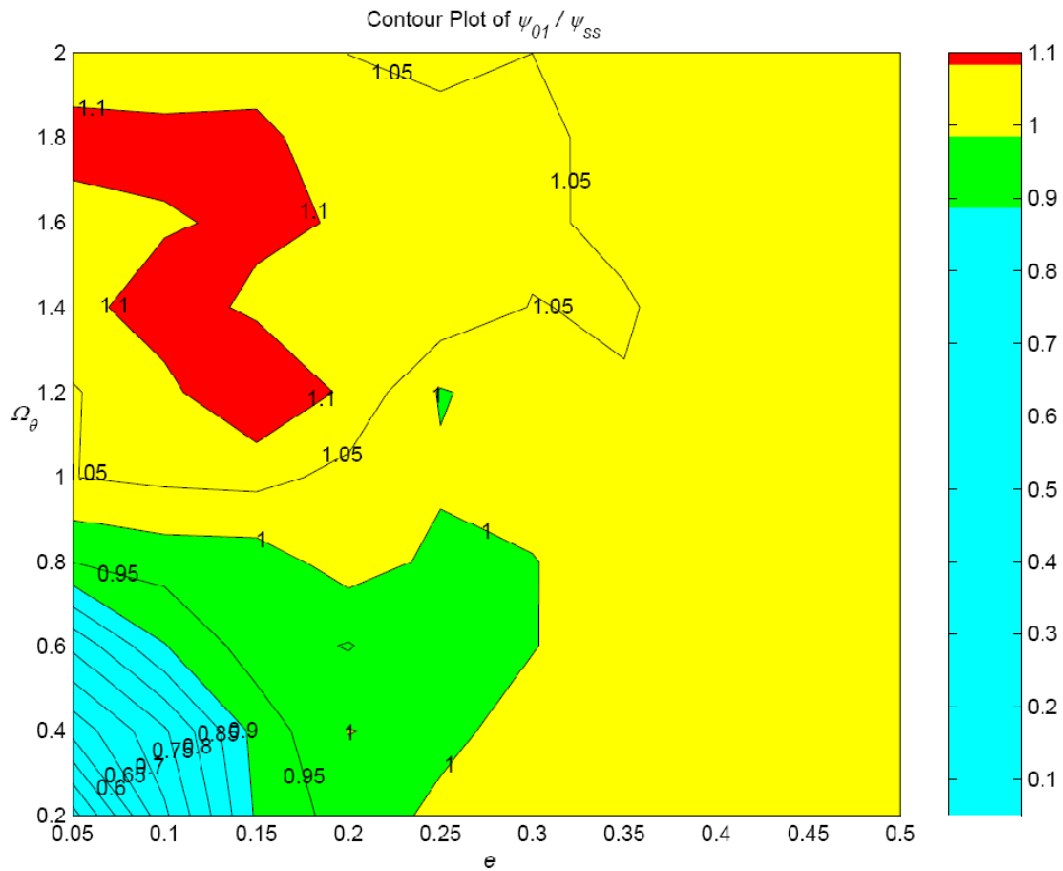
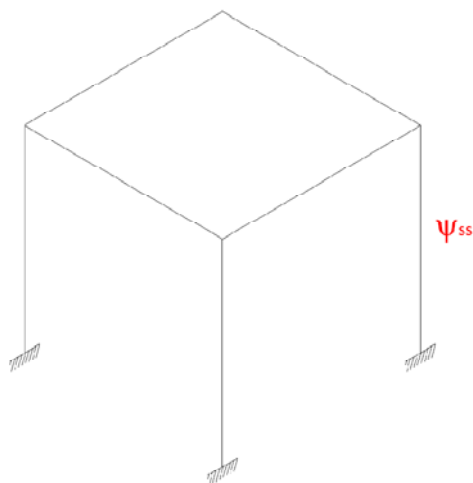


Fig. 5.27 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 5.3.1.2 Caratteristiche totali



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

Fig. 5.28 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  è il seguente:

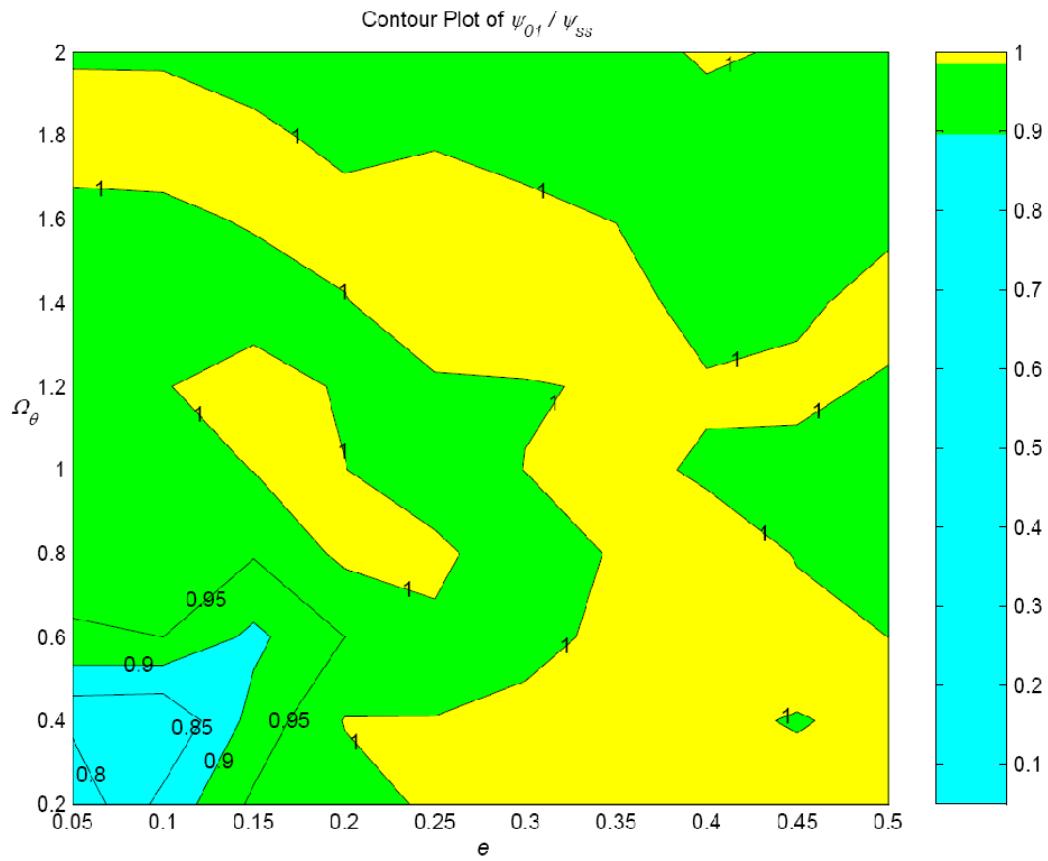
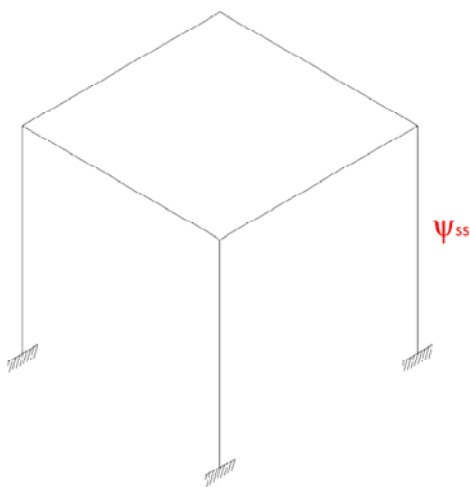


Fig. 5.29 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

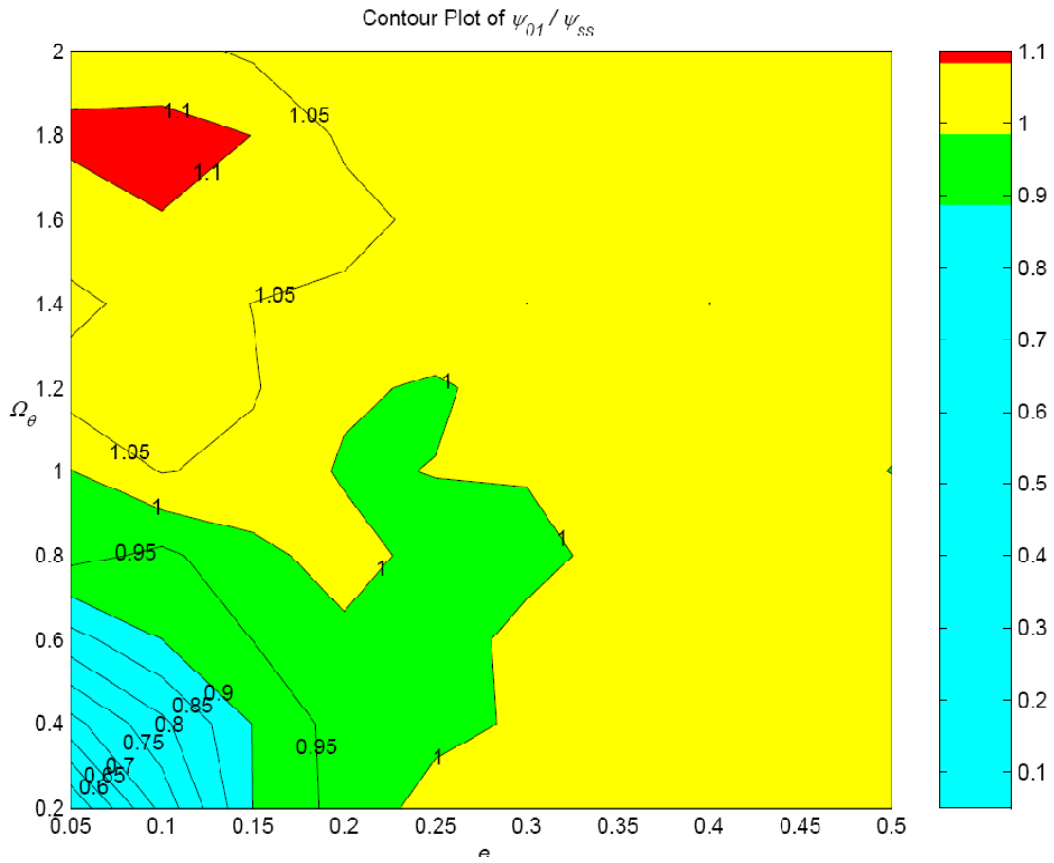
### 5.3.1.3 Rigidezza media



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 \\
 k_{ss} &= \frac{k_1 + k_2}{2} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

Fig. 5.30 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  è il seguente:



**Fig. 5.31** Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 5.3.1.4 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre che, anche in questo caso, il single storey che meglio coglie il comportamento del primo piano della struttura multi storey considerata ha le seguenti caratteristiche:

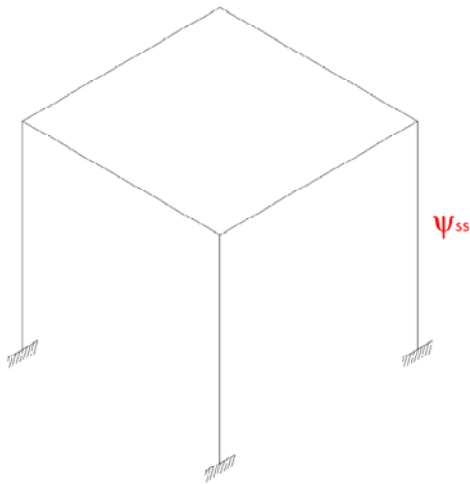
$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$



### 5.3.2 Secondo piano

I casi di calcolo considerati sono analoghi a quelli utilizzati per il primo piano

#### 5.3.2.1 Caratteristiche del secondo piano



$$\begin{aligned} m_{ss} &= m_2 \\ k_{ss} &= k_2 \\ e_{ss} &= e_2 \\ \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 2} \end{aligned}$$

**Fig. 5.32** *Struttura single storey equivalente.*

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

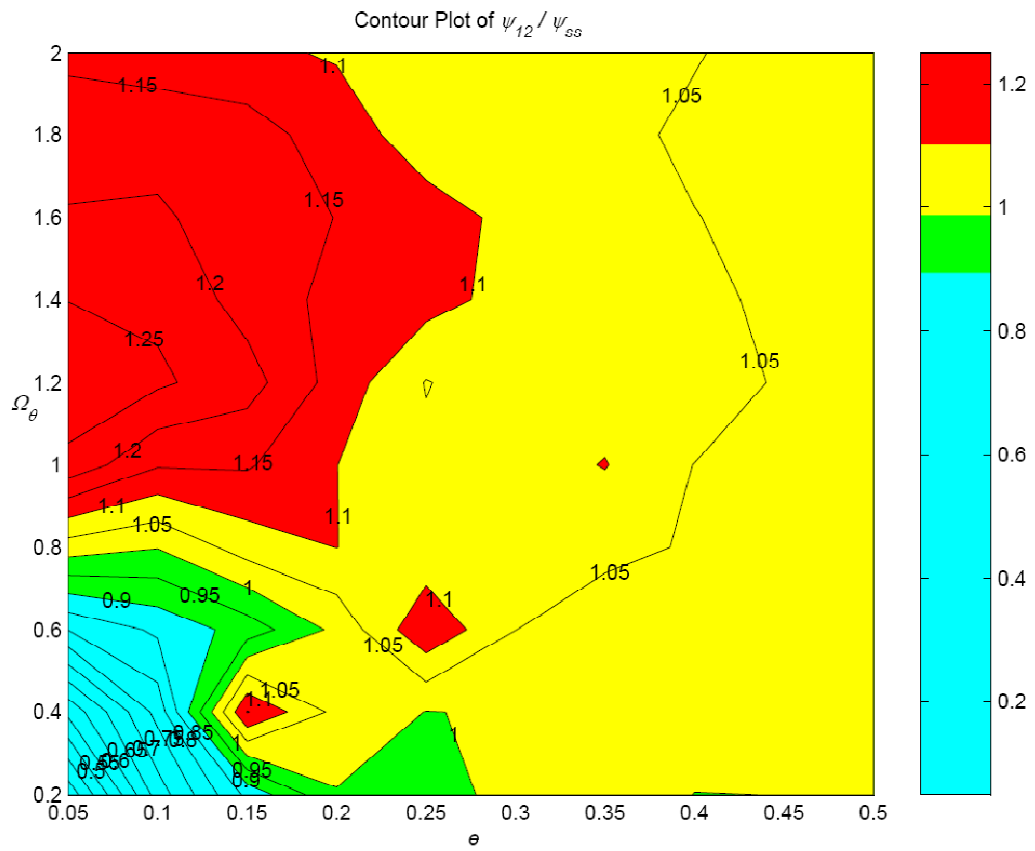
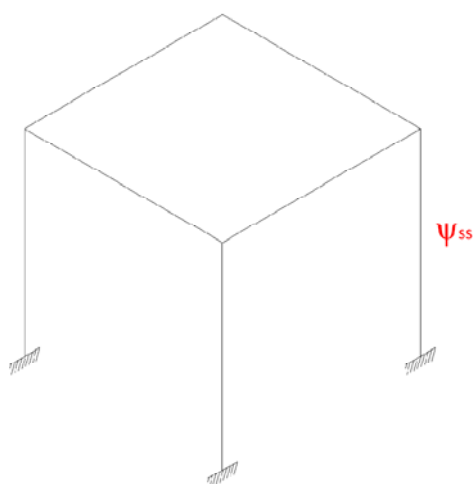


Fig. 5.33 Rapporto  $\psi_{12} / \psi_{ss}$ .

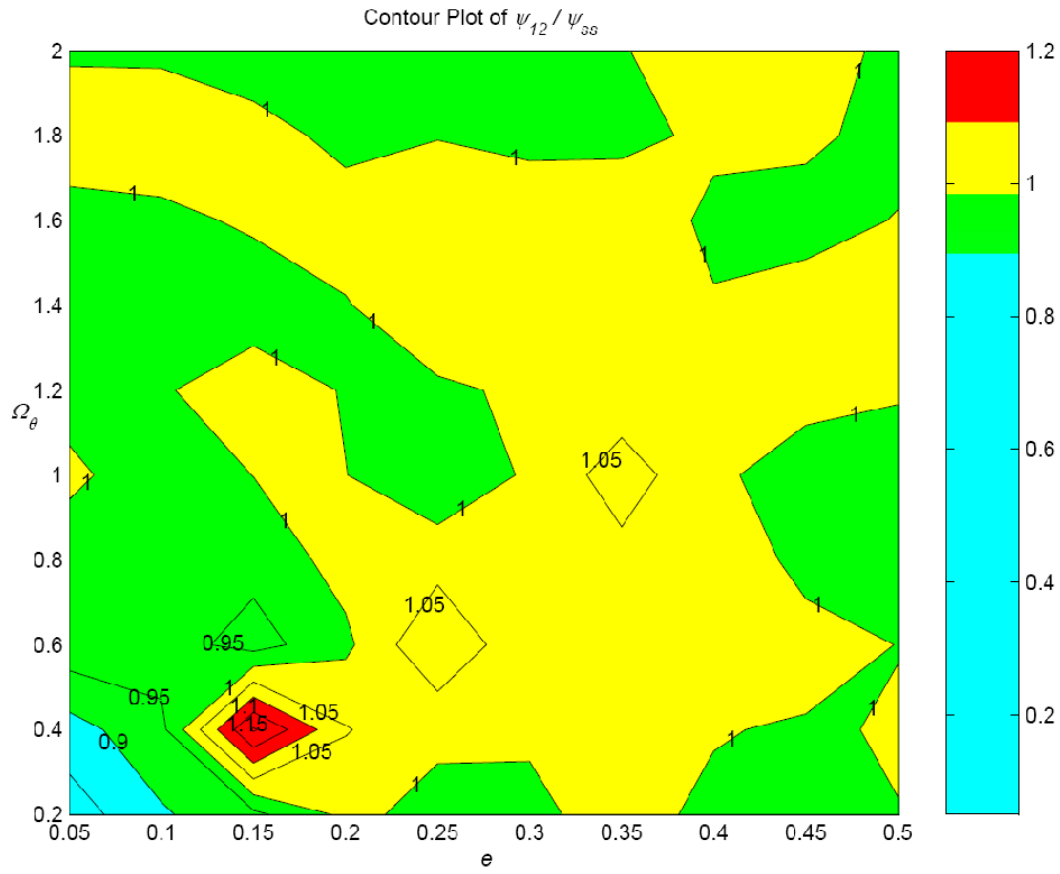
### 5.3.2.2 Caratteristiche totali



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

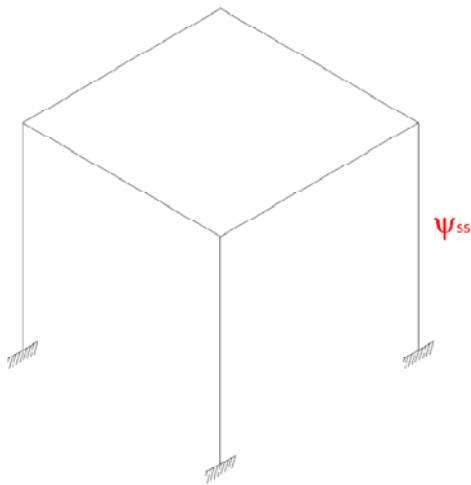
Fig. 5.34 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  è il seguente:



**Fig. 5.35** Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

5.3.2.3 Rigidezza media



$$m_{ss} = m_2$$

$$k_{ss} = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$e_{ss} = e_1$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 1}$$

Fig. 5.36 *Struttura single storey equivalente.*

Il grafico del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  è il seguente:

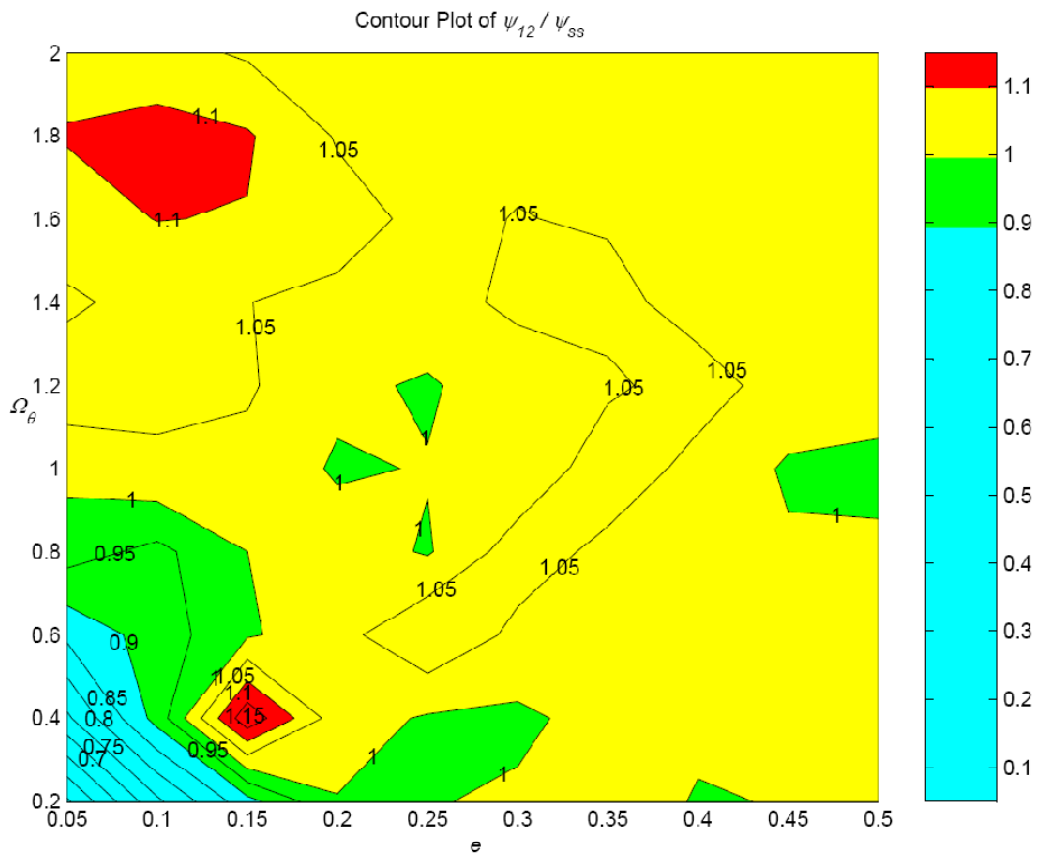


Fig. 5.37 *Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .*

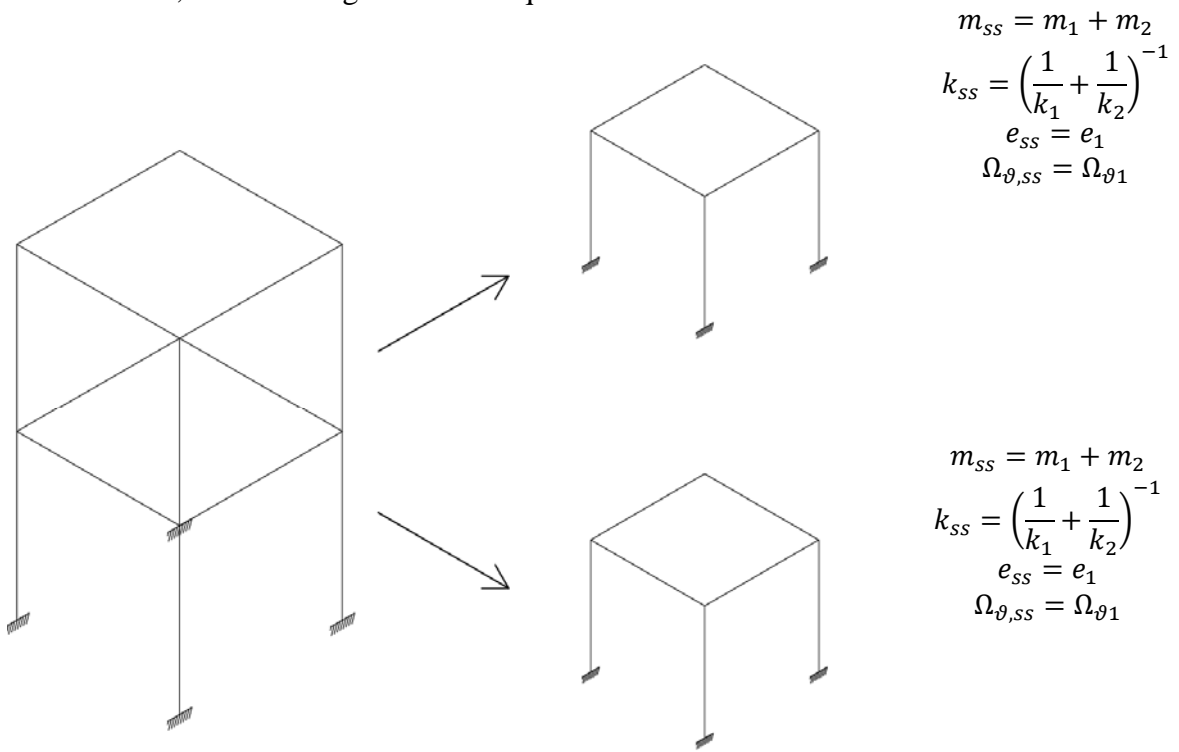
### 5.3.2.4 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre che, anche per il secondo piano, il single storey che meglio ne coglie il comportamento ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

### 5.3.3 Riassunto

Per chiarezza, si riassume graficamente quanto ottenuto:



Riassunto dei risultati ottenuti.

Fig. 5.38

## 5.4 Caso 4: Massa del secondo piano dimezzata

In questo caso si è deciso di variare la massa del secondo piano; si considerano, infatti, i seguenti valori per i rapporti  $R_e$ ,  $R_m$ ,  $R_k$ ,  $R_{\Omega_\theta}$ :

$$\begin{aligned} R_e = R_k = R_{\Omega_\theta} &= 1 \\ R_m &= 0.5 \end{aligned} \quad (5.4)$$

### 5.4.1 Primo Piano

In questo caso si sono considerati due single storey equivalenti: il primo avente le caratteristiche del primo piano, mentre il secondo ha rigidezza e massa pari a quelle dell'intera struttura.

#### 5.4.1.1 Caratteristiche del primo piano

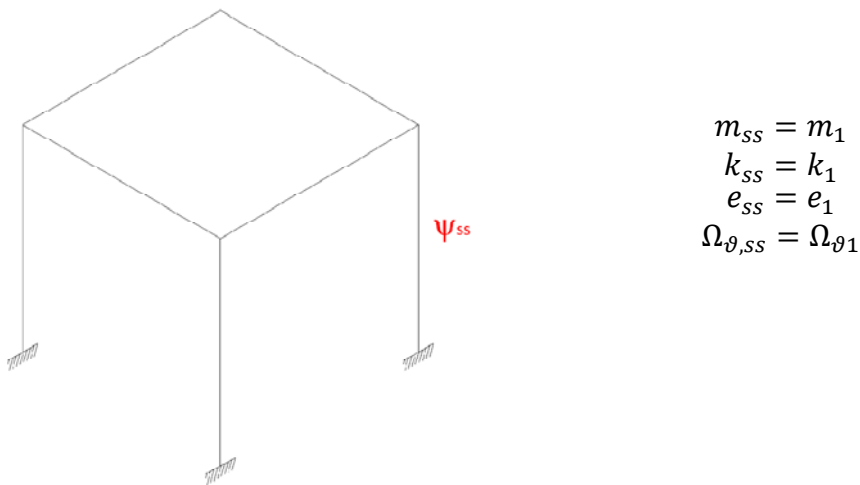


Fig. 5.39 *Struttura single storey equivalente.*

Il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

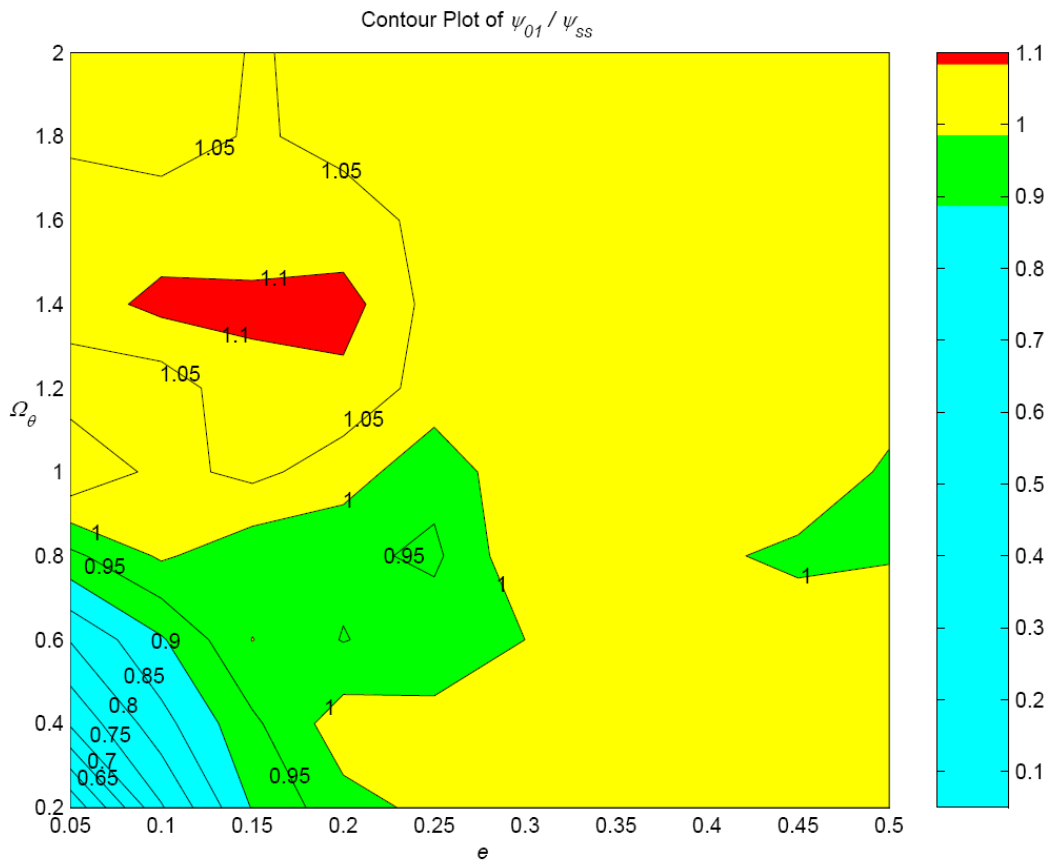
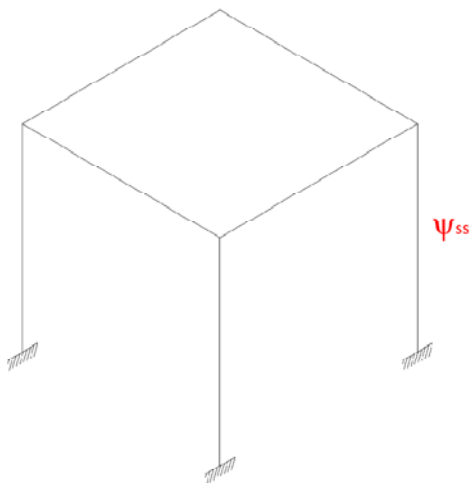


Fig. 5.40 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 5.4.1.2 Caratteristiche totali



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

Fig. 5.41 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  è il seguente:

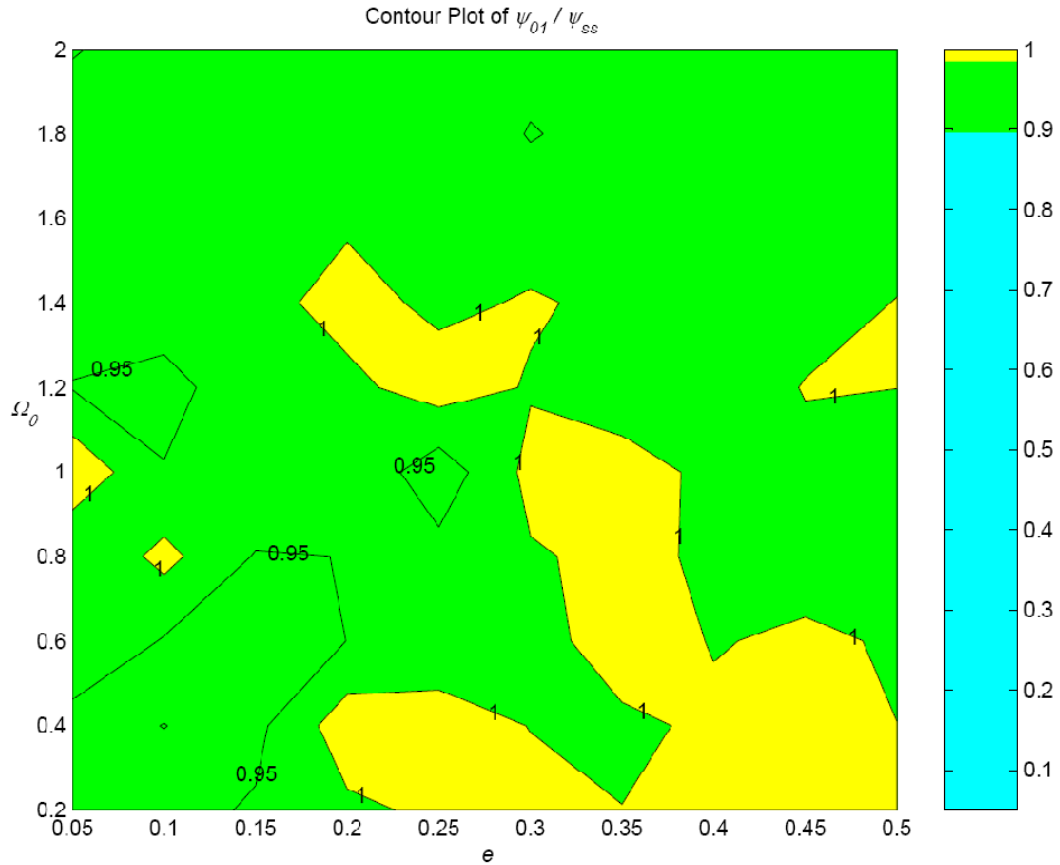


Fig. 5.42 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 5.4.1.3 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti risulta evidente come, anche in questo caso, il single storey che meglio coglie il comportamento del primo piano della struttura multi storey considerata ha le seguenti caratteristiche:

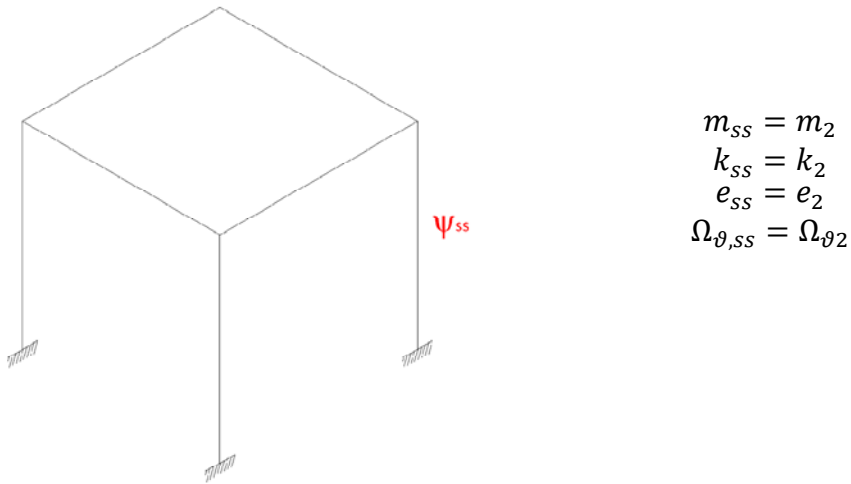
$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 1}
 \end{aligned}$$



## 5.4.2 Secondo piano

I casi di calcolo considerati sono analoghi a quelli utilizzati per il primo piano

### 5.4.2.1 Caratteristiche del secondo piano



**Fig. 5.43** *Struttura single storey equivalente.*

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

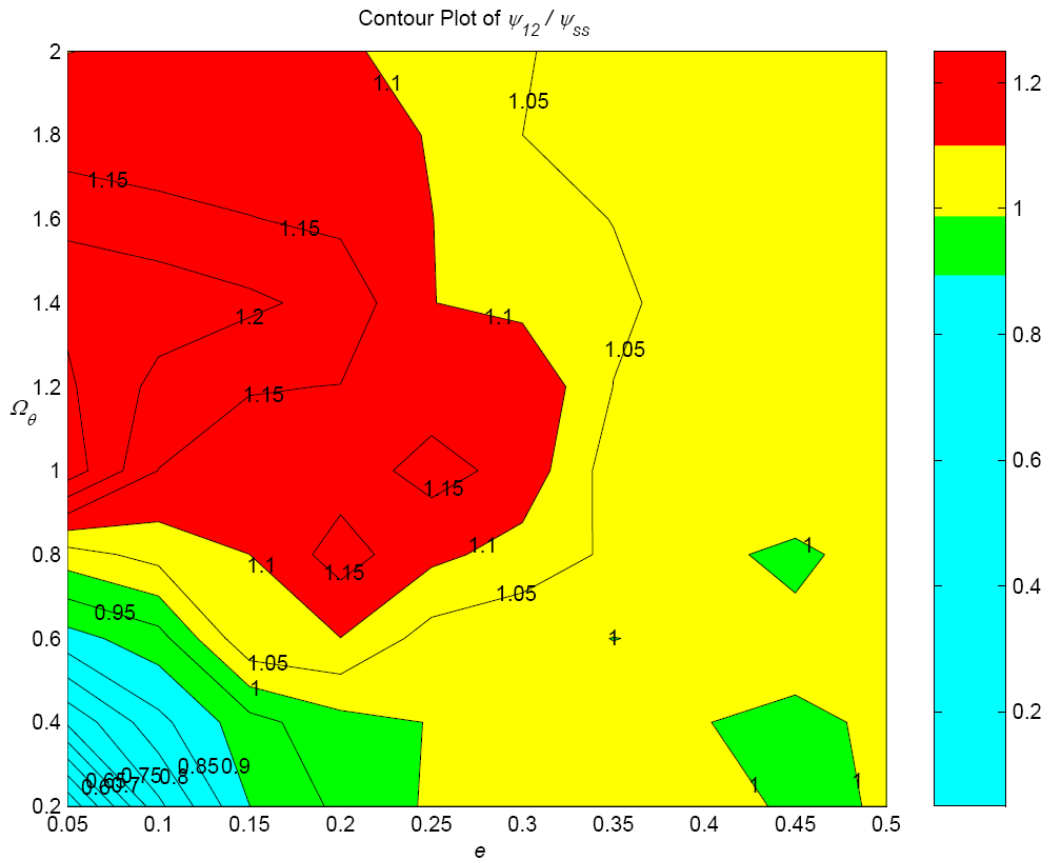
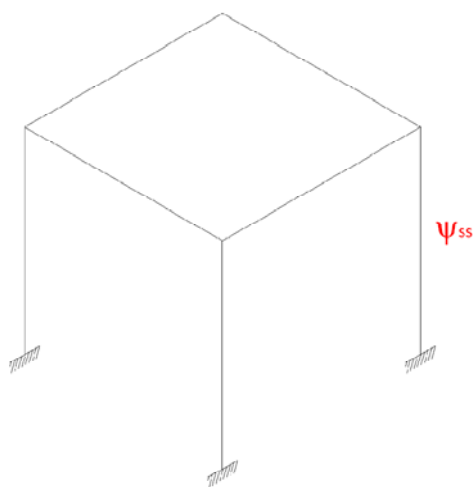


Fig. 5.44 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 5.4.2.2 Caratteristiche totali



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

Fig. 5.45 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  è il seguente:

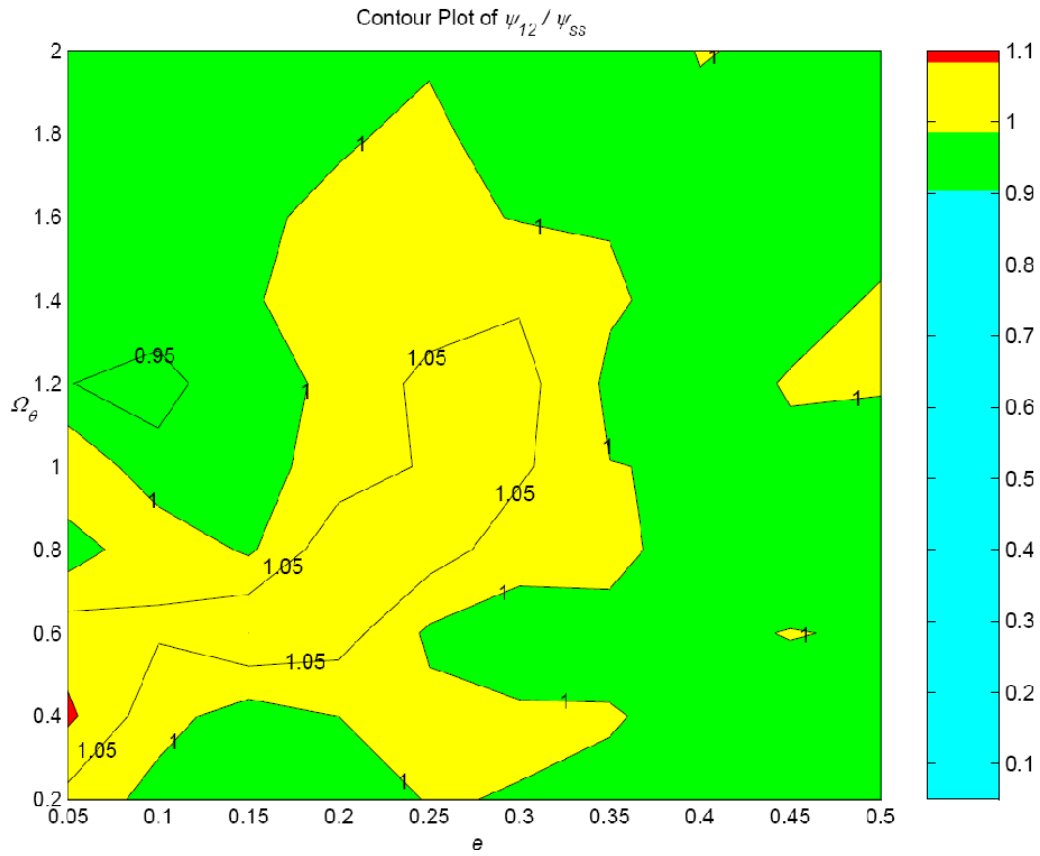


Fig. 5.46 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 5.4.2.3 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre che, anche per il secondo piano, il single storey che meglio ne coglie il comportamento ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

### 5.4.3 Riassunto

Per chiarezza, si riassume graficamente quanto ottenuto:

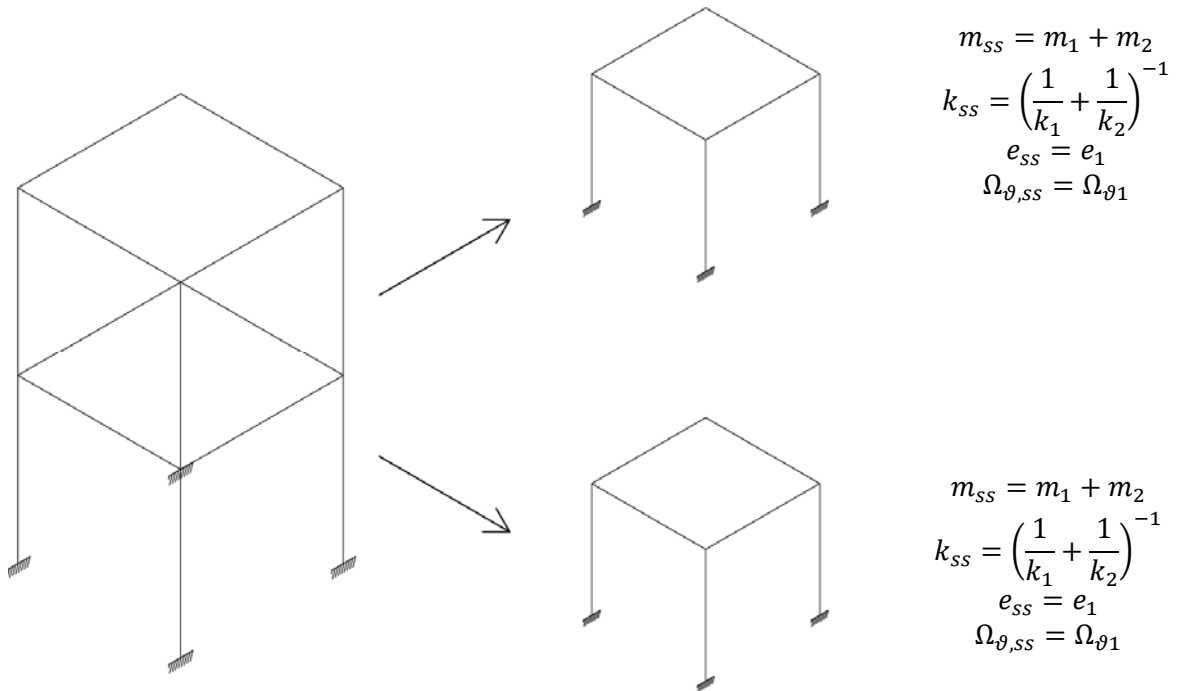


Fig. 5.47 Riassunto dei risultati ottenuti.

## 5.5 Caso 5: Massa del secondo piano raddoppiata

Come nel caso precedente si è deciso di variare la massa del secondo piano; si considerano, infatti, i seguenti valori per i rapporti  $R_e$ ,  $R_m$ ,  $R_k$ ,  $R_{\Omega_\theta}$ :

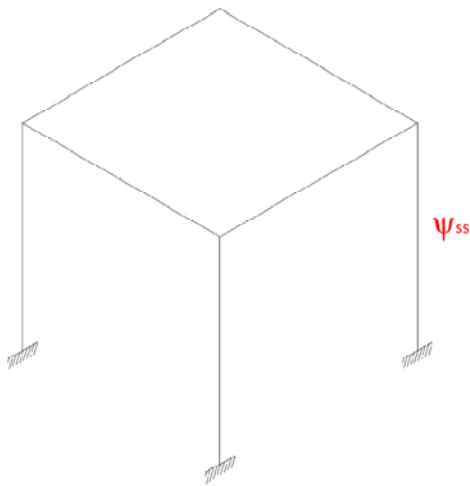
$$\begin{aligned}
 R_e &= R_k = R_{\Omega_\theta} = 1 \\
 R_m &= 2
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

### 5.5.1 Primo Piano

In questo caso, come per la struttura con massa al secondo piano dimezzata, si sono considerati due single storey equivalenti: il primo avente le caratteristiche

del primo piano, mentre il secondo ha rigidezza e massa pari a quelle dell'intera struttura.

### 5.5.1.1 Caratteristiche del primo piano



$$\begin{aligned} m_{ss} &= m_1 \\ k_{ss} &= k_1 \\ e_{ss} &= e_1 \\ \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1} \end{aligned}$$

**Fig. 5.48** *Struttura single storey equivalente.*

Il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

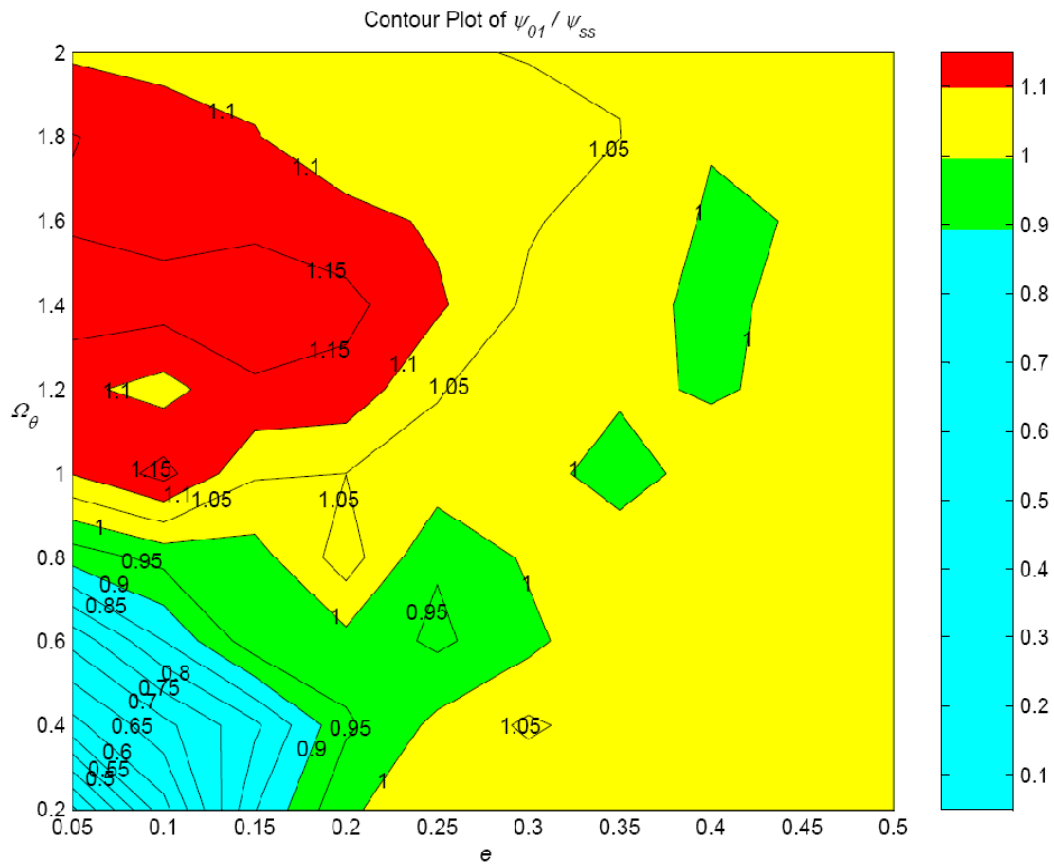
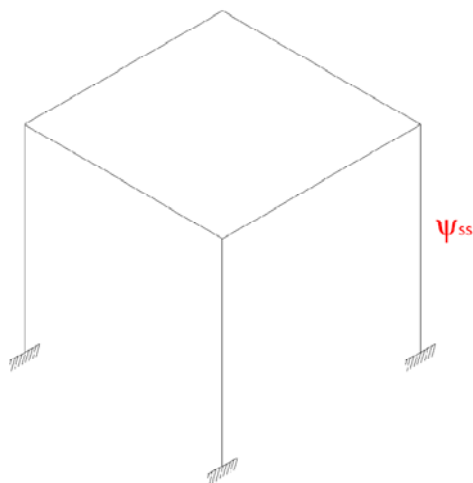


Fig. 5.49 Rapporto  $\psi_{01} / \psi_{ss}$ .

### 5.5.1.2 Caratteristiche totali



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

Fig. 5.41 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  è il seguente:

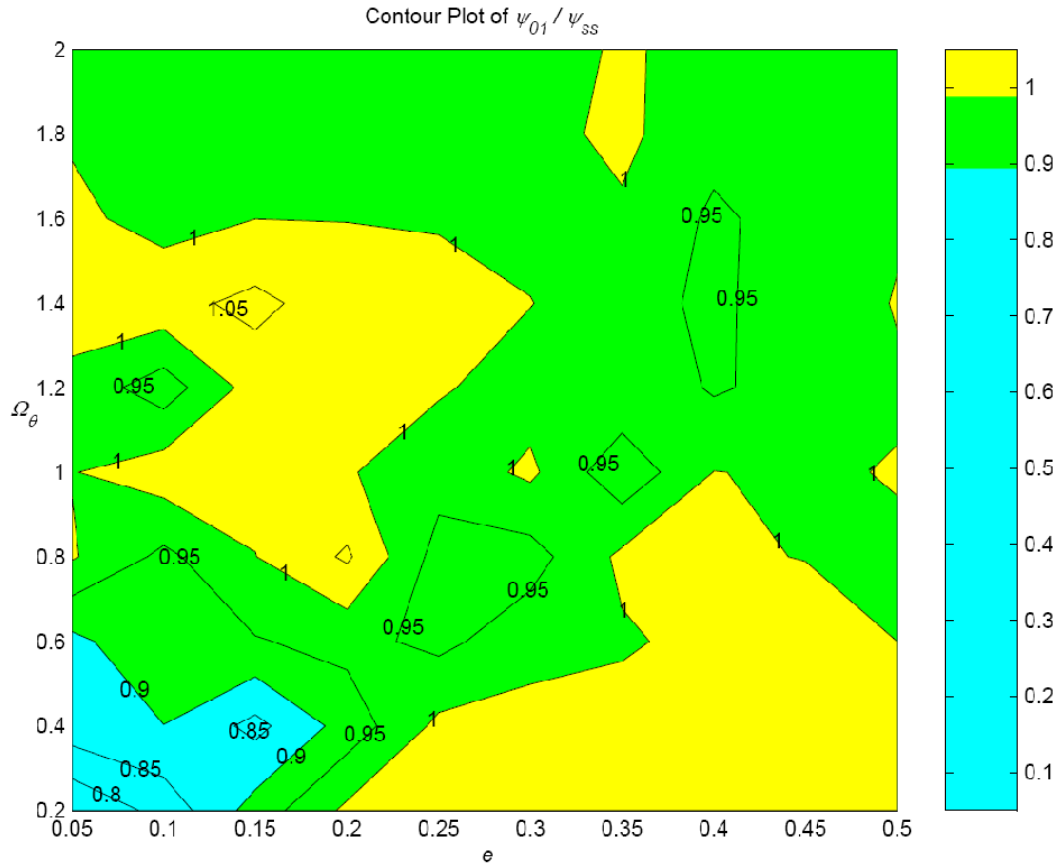


Fig. 5.50 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 5.5.1.3 Riassunto

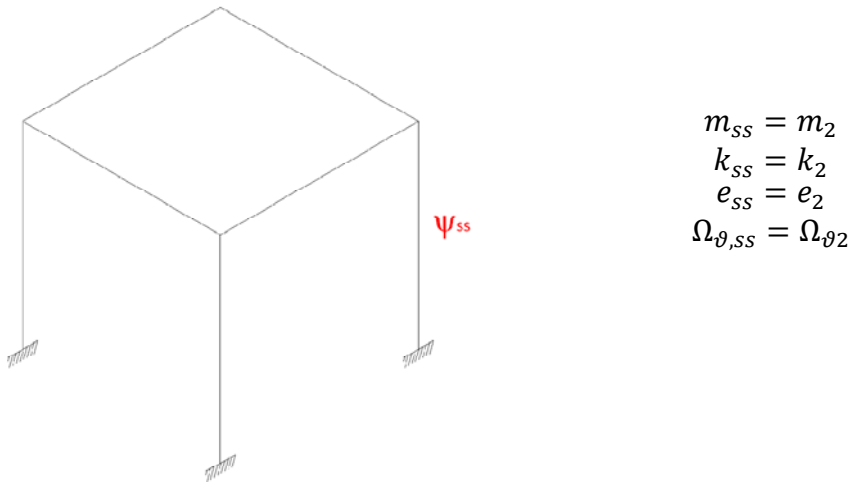
Osservando i grafici ottenuti risulta evidente come, anche in questo caso, il single storey che meglio coglie il comportamento del primo piano della struttura multi storey considerata ha le caratteristiche totali della struttura, ossia:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

## 5.5.2 Secondo piano

I casi di calcolo considerati sono analoghi a quelli utilizzati per il primo piano

### 5.5.2.1 Caratteristiche del secondo piano



**Fig. 5.51** *Struttura single storey equivalente.*

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:



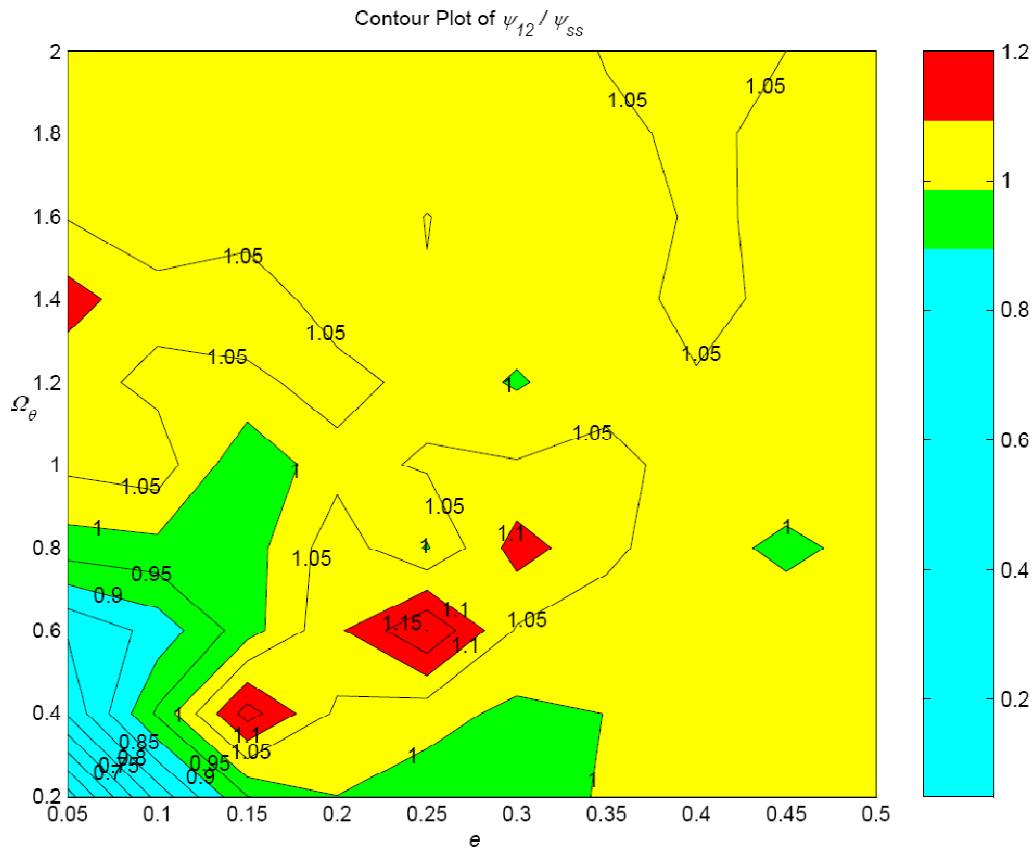
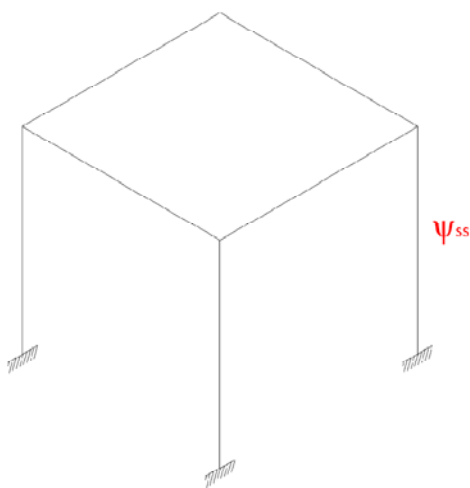


Fig. 5.52 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 5.5.2.2 Caratteristiche totali



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

Fig. 5.53 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  è il seguente:

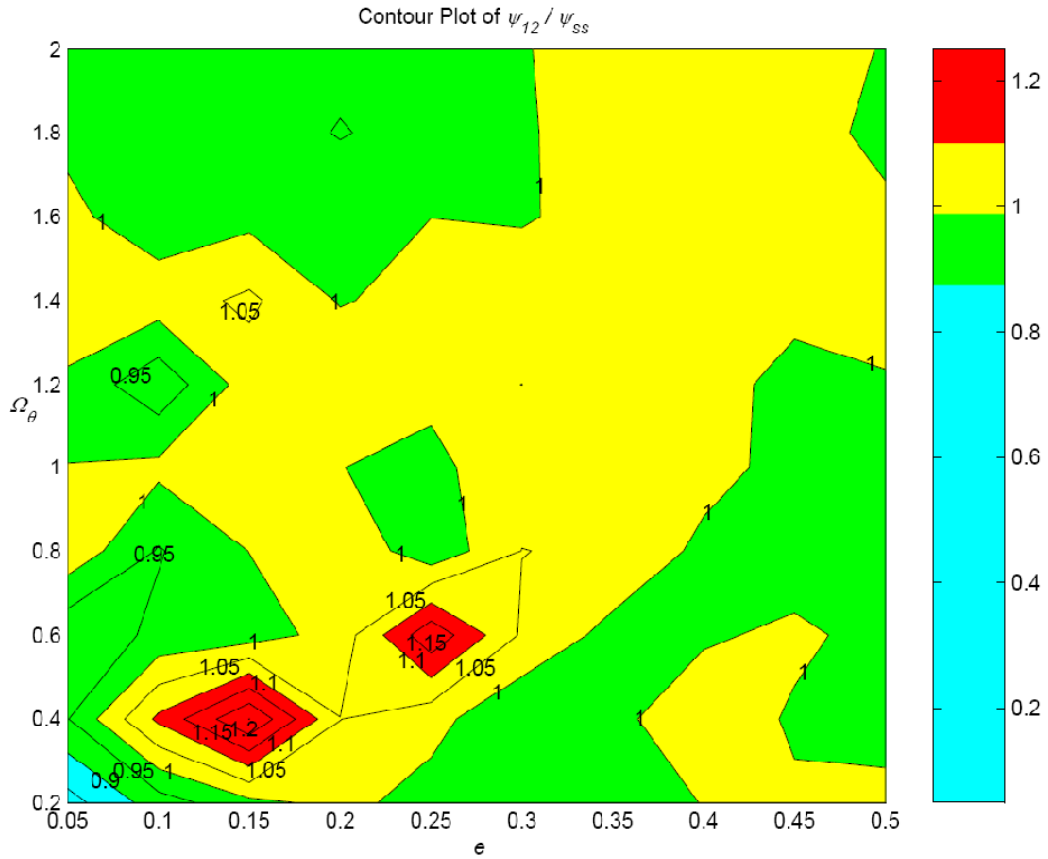


Fig. 5.54 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 5.5.2.3 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre che, anche per il secondo piano, il single storey che meglio ne coglie il comportamento ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 1}
 \end{aligned}$$

### 5.5.3 Riassunto

Per chiarezza, si riassume graficamente quanto ottenuto:

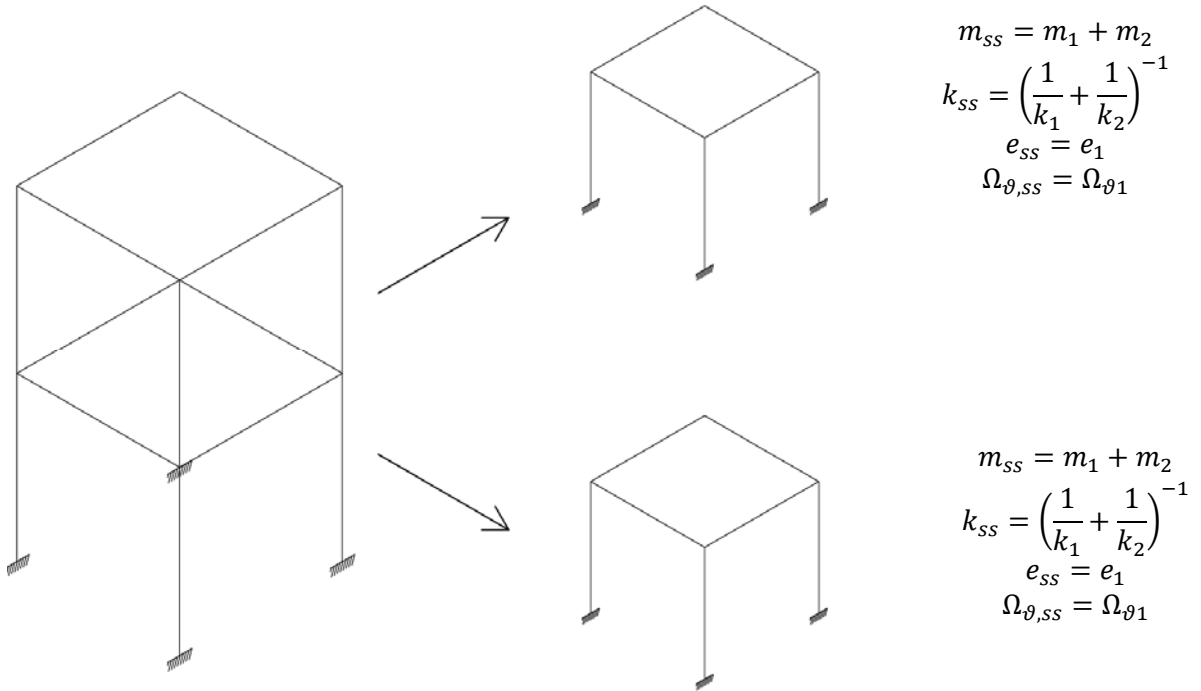


Fig. 5.55 Riassunto dei risultati ottenuti.

### 5.6 Caso 6: Eccentricità del secondo piano raddoppiata

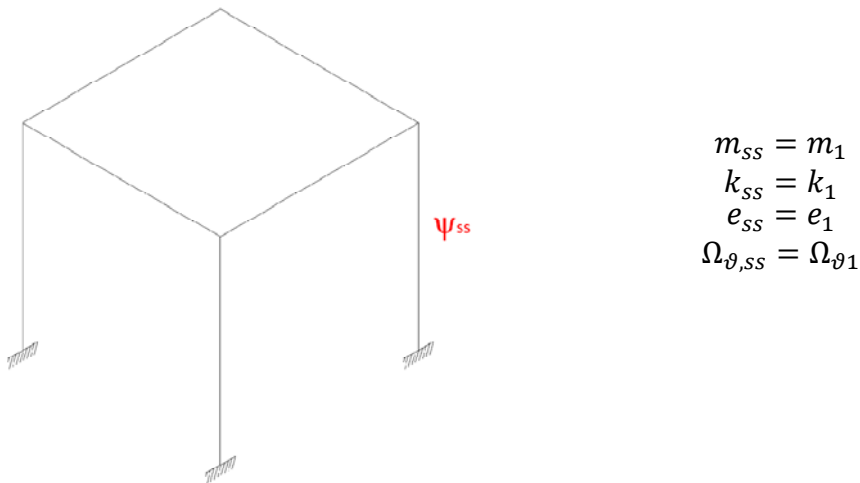
In questo caso a variare è l'eccentricità del secondo piano; si considerano, quindi, i seguenti valori per i rapporti  $R_e$ ,  $R_m$ ,  $R_k$ ,  $R_{\Omega_{\vartheta}}$ :

$$\begin{aligned} R_m = R_k = R_{\Omega_{\vartheta}} &= 1 \\ R_e &= 2 \end{aligned} \tag{5.6}$$

## 5.6.1 Primo Piano

In questo caso si sono considerati diversi single storey equivalenti. Il primo ha, come per gli altri casi, le caratteristiche del primo piano, mentre gli altri hanno rigidezza e massa pari a quelle dell'intera struttura, ma eccentricità variabile: la seconda struttura, infatti, ha eccentricità pari a quella del primo piano, la terza ha il valore di  $e$  tipico del secondo piano, mentre l'ultima presenta un'eccentricità media.

### 5.6.1.1 Caratteristiche del primo piano



**Fig. 5.56** *Struttura single storey equivalente.*

Il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

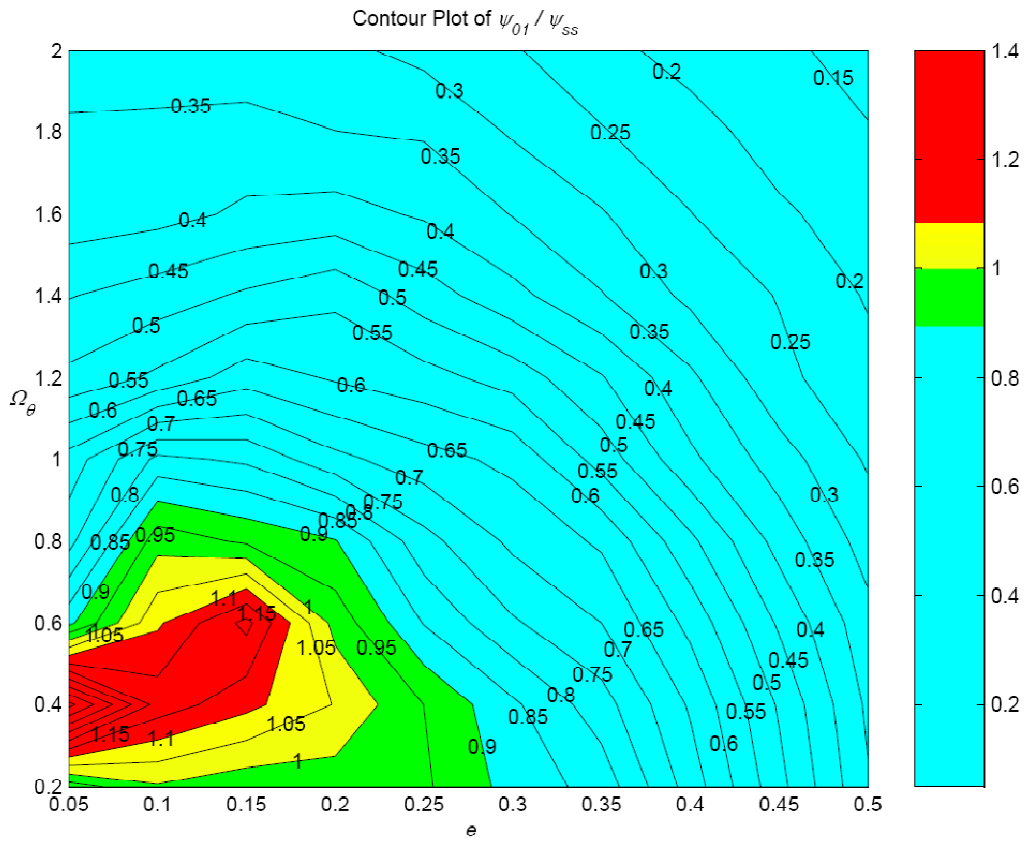
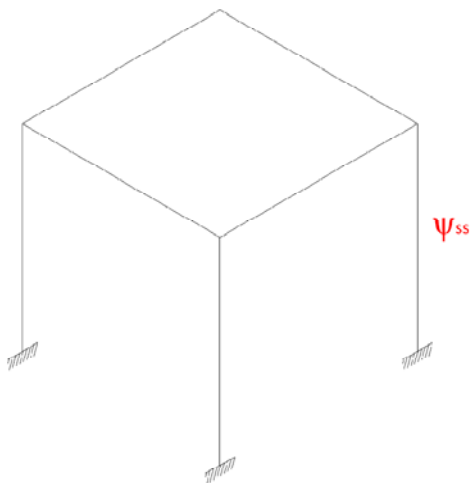


Fig. 5.57 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 5.6.1.2 Caratteristiche totali con $e = e_1$



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

Fig. 5.58 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  è il seguente:

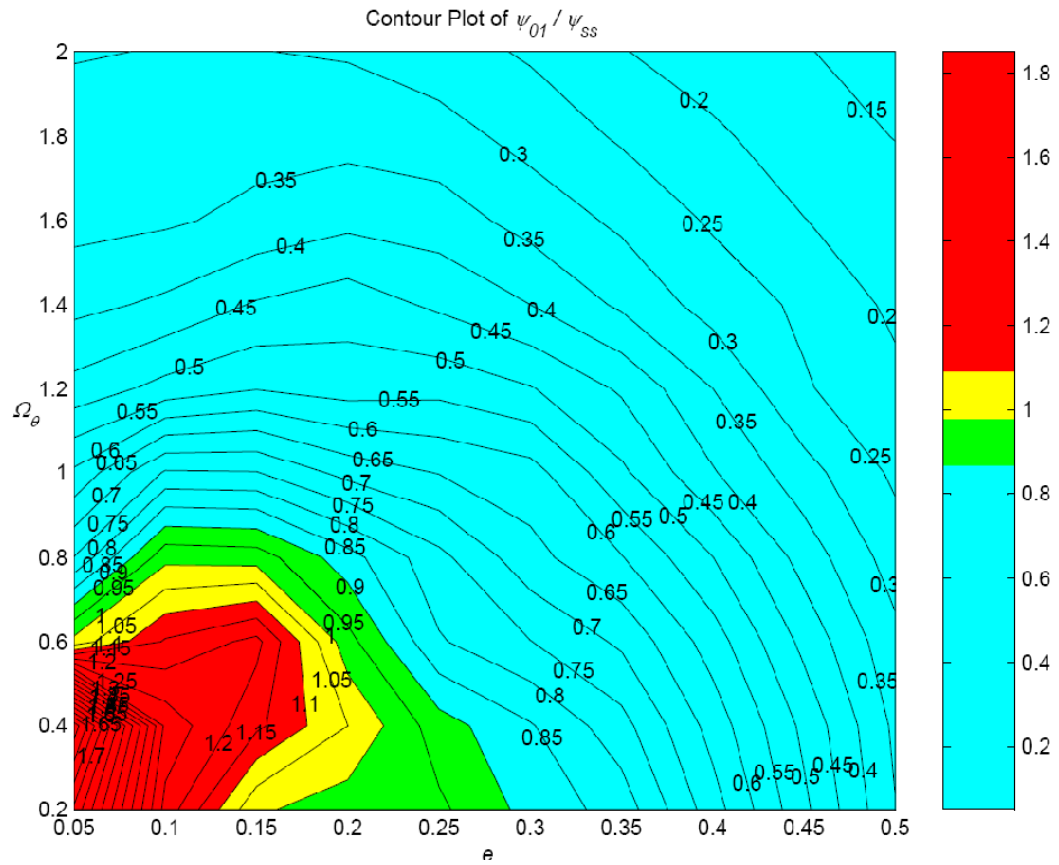
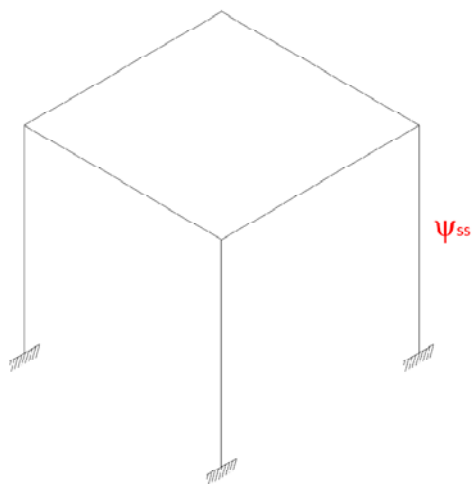


Fig. 5.59 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 5.6.1.3 Caratteristiche totali con $e = e_2$



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 1}
 \end{aligned}$$

Fig. 5.60 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  è il seguente:

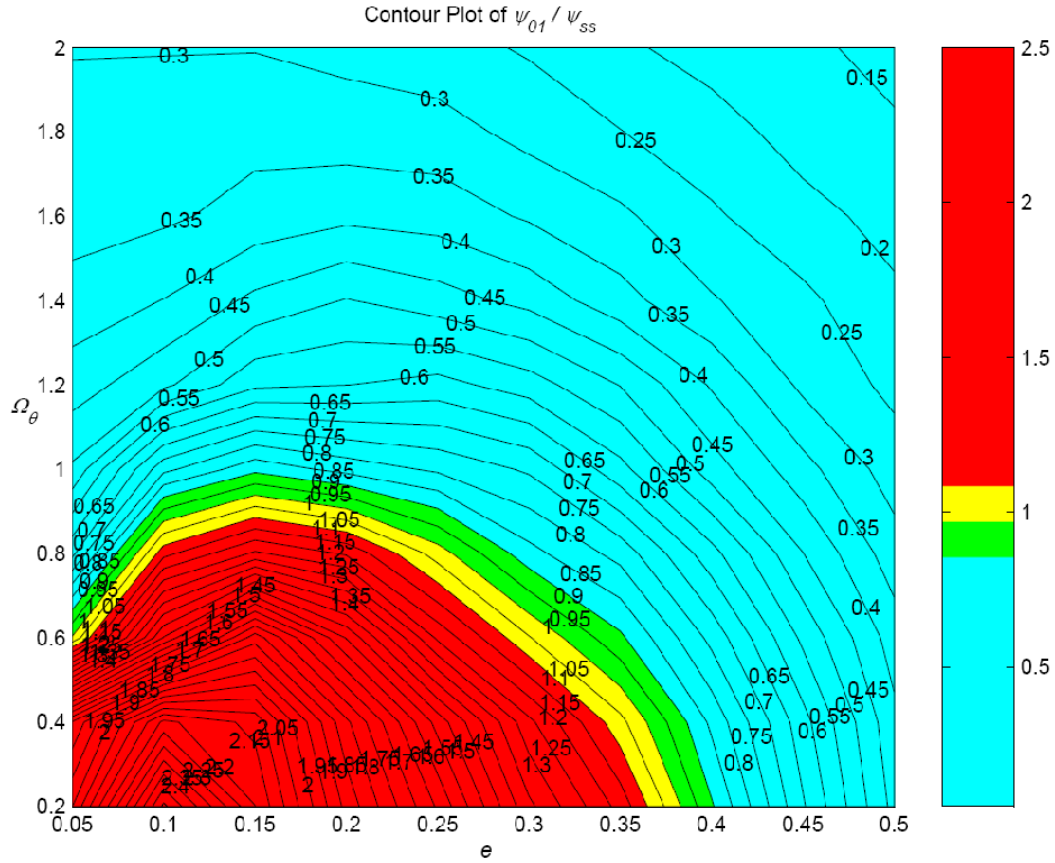
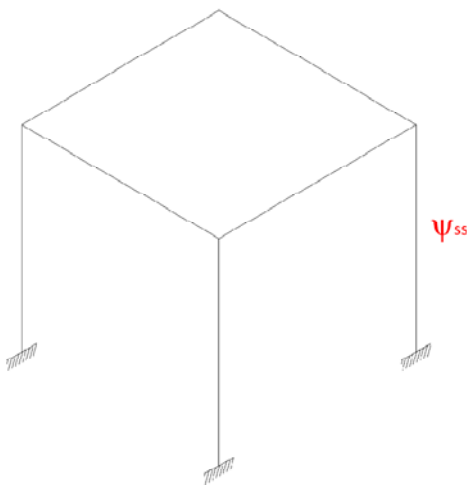


Fig. 5.61 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

#### 5.6.1.4 Caratteristiche totali con $e = e_{medio}$



$$m_{ss} = m_1 + m_2$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = \frac{e_1 + e_2}{2}$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 1}$$

Fig. 5.62 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  è il seguente:

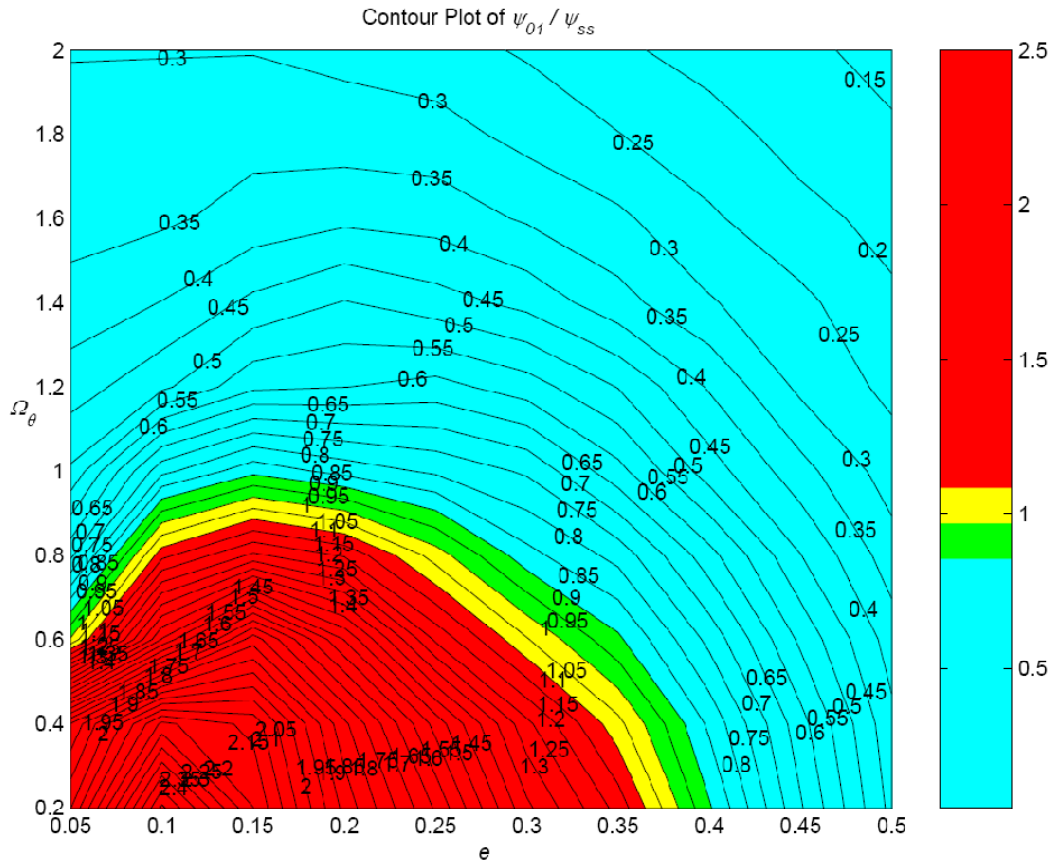


Fig. 5.63 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 5.6.1.5 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti risulta evidente come, diversamente dai casi precedenti, il single storey che meglio coglie il comportamento del primo piano della struttura multi storey considerata ha le caratteristiche di massa, rigidezza ed eccentricità dello stesso, per cui:

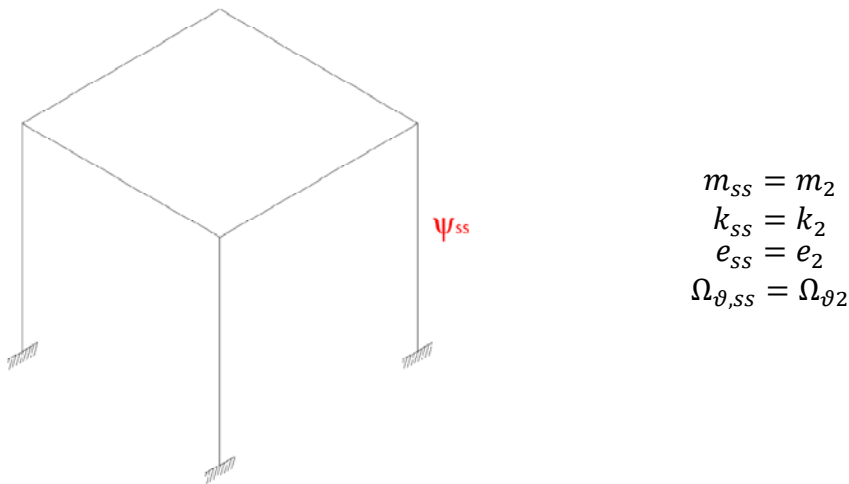
$$\begin{aligned} m_{ss} &= m_1 \\ k_{ss} &= k_1 \\ e_{ss} &= e_1 \\ \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1} \end{aligned}$$



## 5.6.2 Secondo piano

Per il secondo piano si sono considerati due casi base, analoghi a quelli utilizzati nei casi precedenti, ossia single storey di caratteristiche di massa e rigidezza tipiche del secondo piano della struttura multi storey e di caratteristiche proprie dell'intera struttura. Per ognuno di questi due casi, poi, si sono considerati diversi valori di eccentricità, che, come per il primo piano, sono: eccentricità pari a quella del primo piano, del secondo piano ed un valore di eccentricità medio

### 5.6.2.1 Caratteristiche del secondo piano



**Fig. 5.64** *Struttura single storey equivalente.*

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

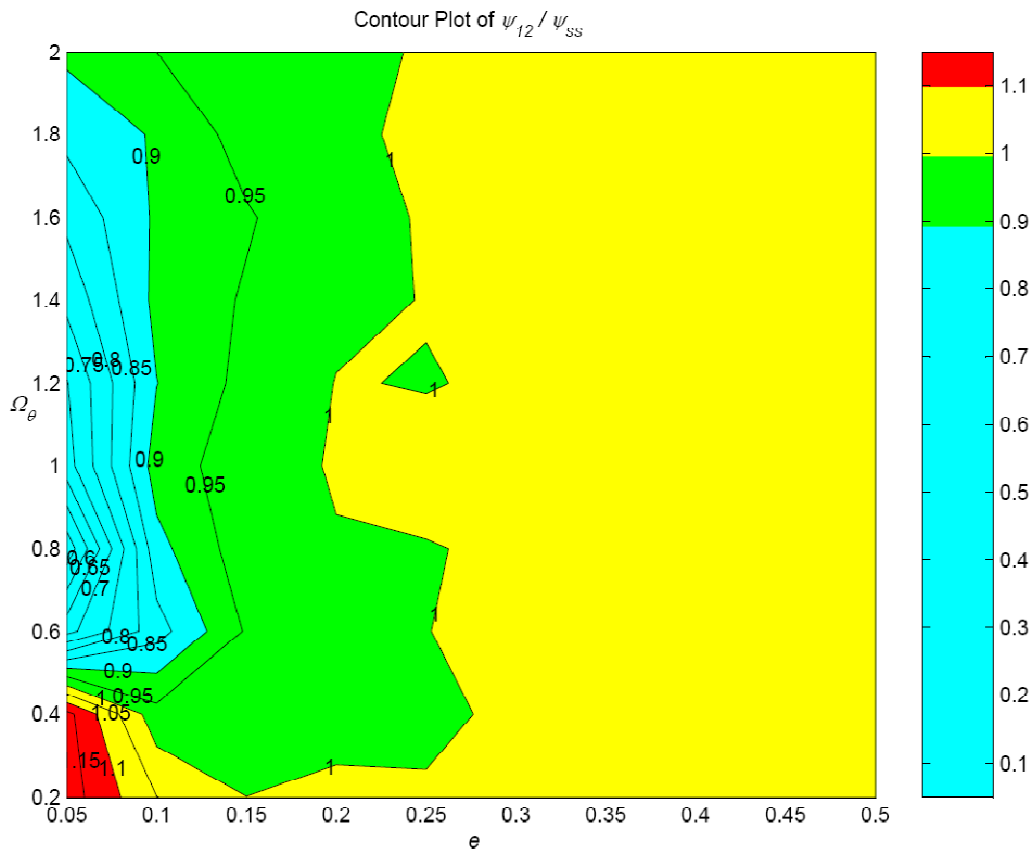


Fig. 5.65 Rapporto  $\psi_{12} / \psi_{ss}$ .

### 5.6.2.2 Caratteristiche del secondo piano con $e = e_1$

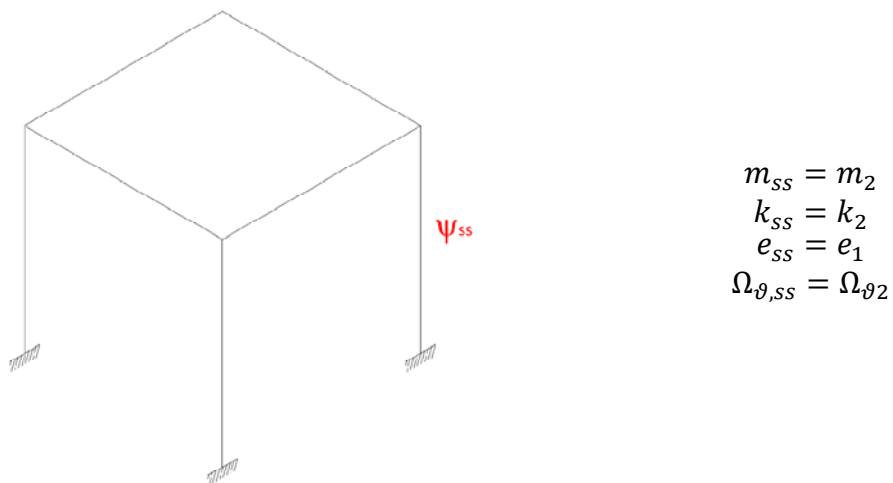


Fig. 5.66 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

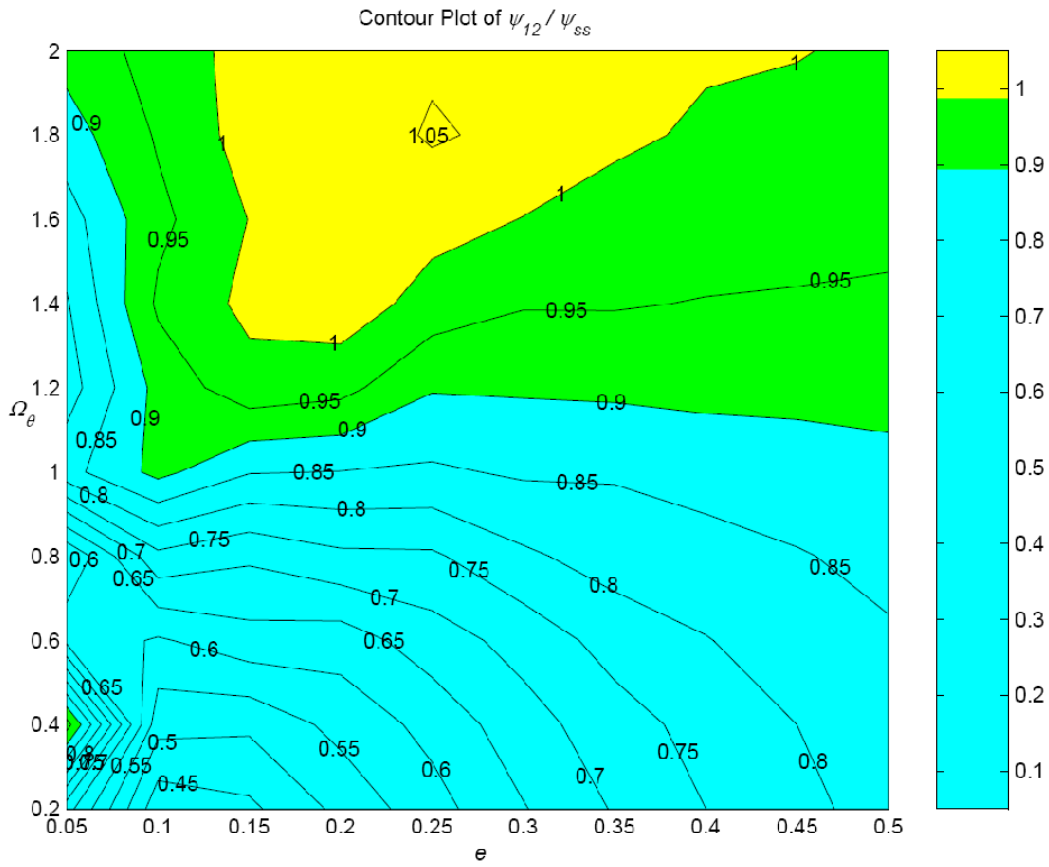
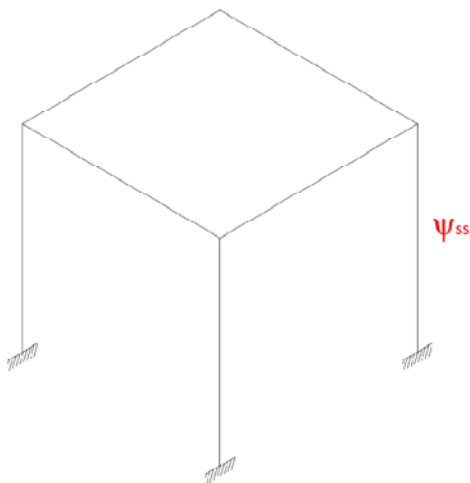


Fig. 5.67 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

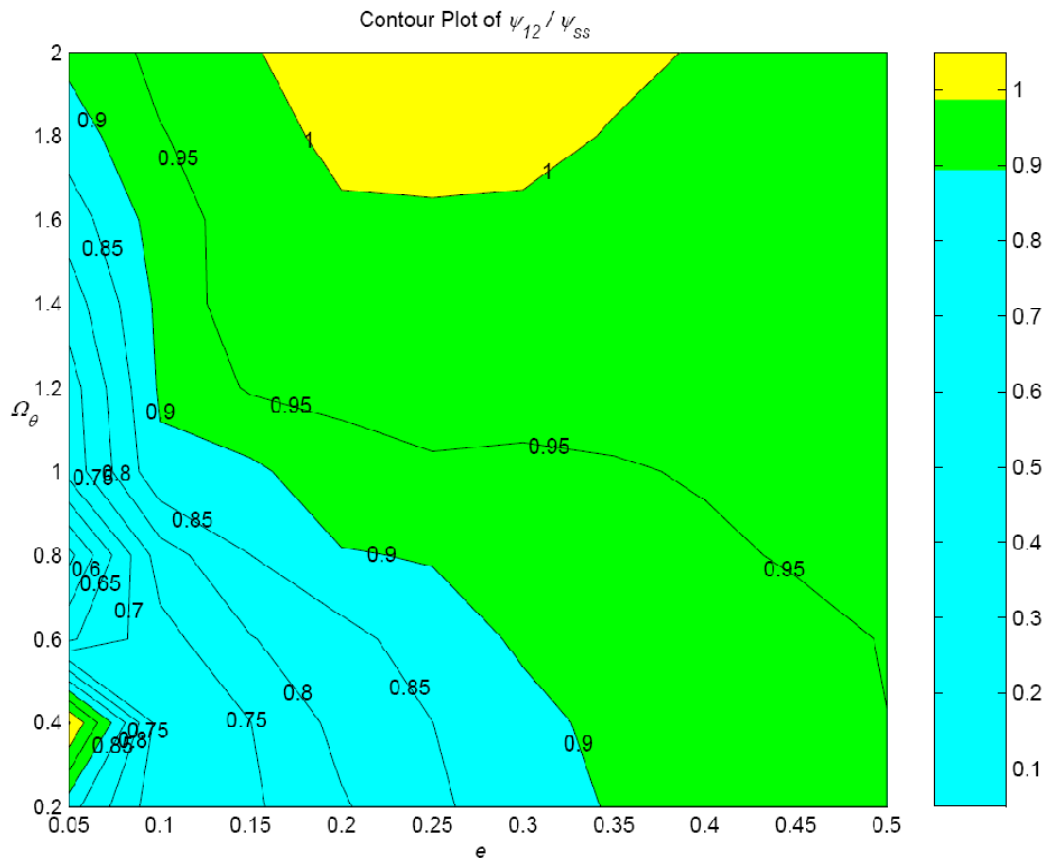
### 5.6.2.3 Caratteristiche del secondo piano con $e = e_{medio}$



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 \\
 k_{ss} &= k_2 \\
 e_{ss} &= \frac{e_1 + e_2}{2} \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

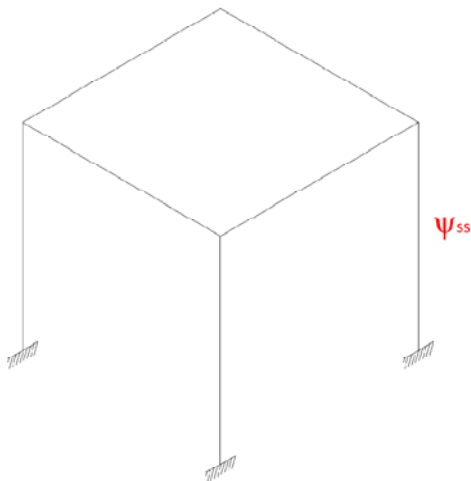
Fig. 5.68 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:



**Fig. 5.69** Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

#### 5.6.2.4 Caratteristiche totali con $e = e_1$



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

**Fig. 5.70** Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  è il seguente:

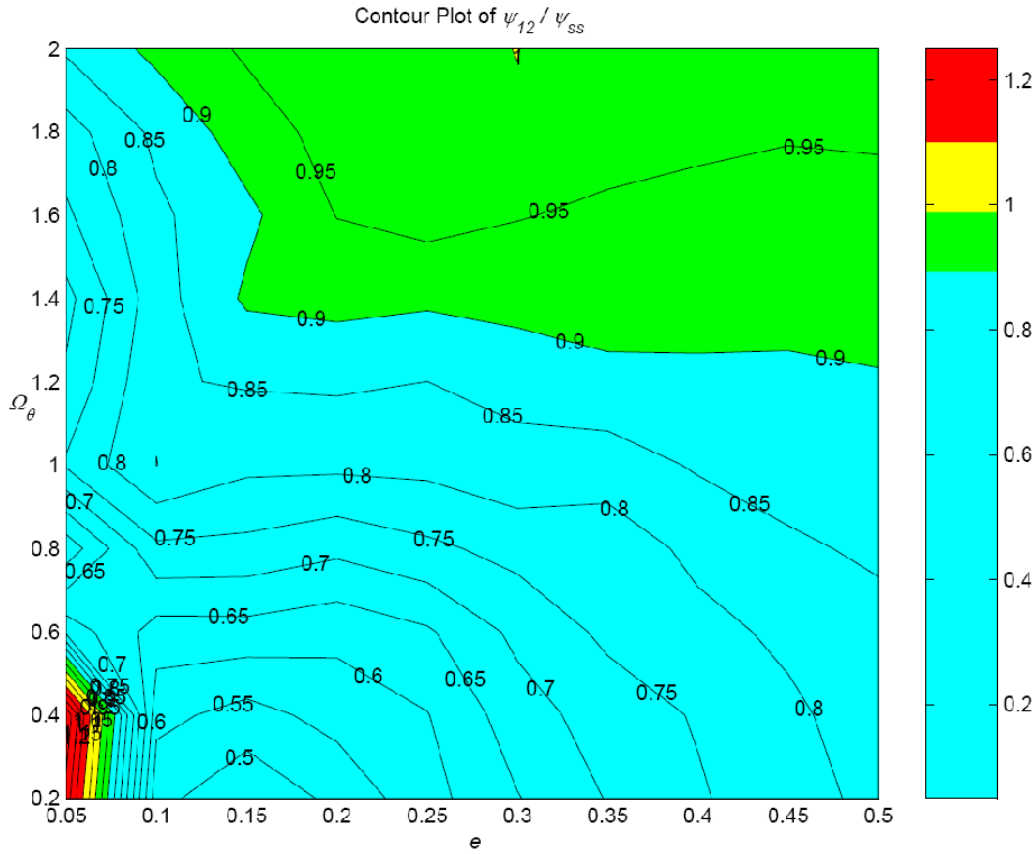
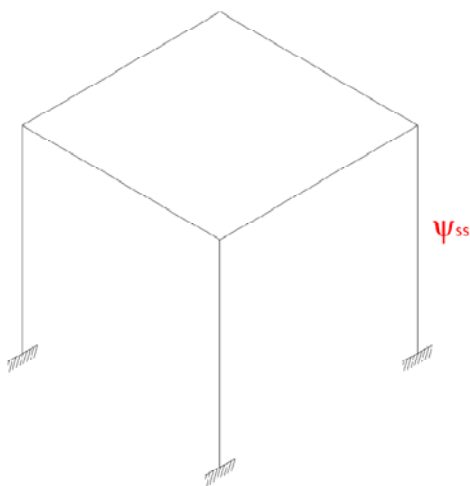


Fig. 5.71 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

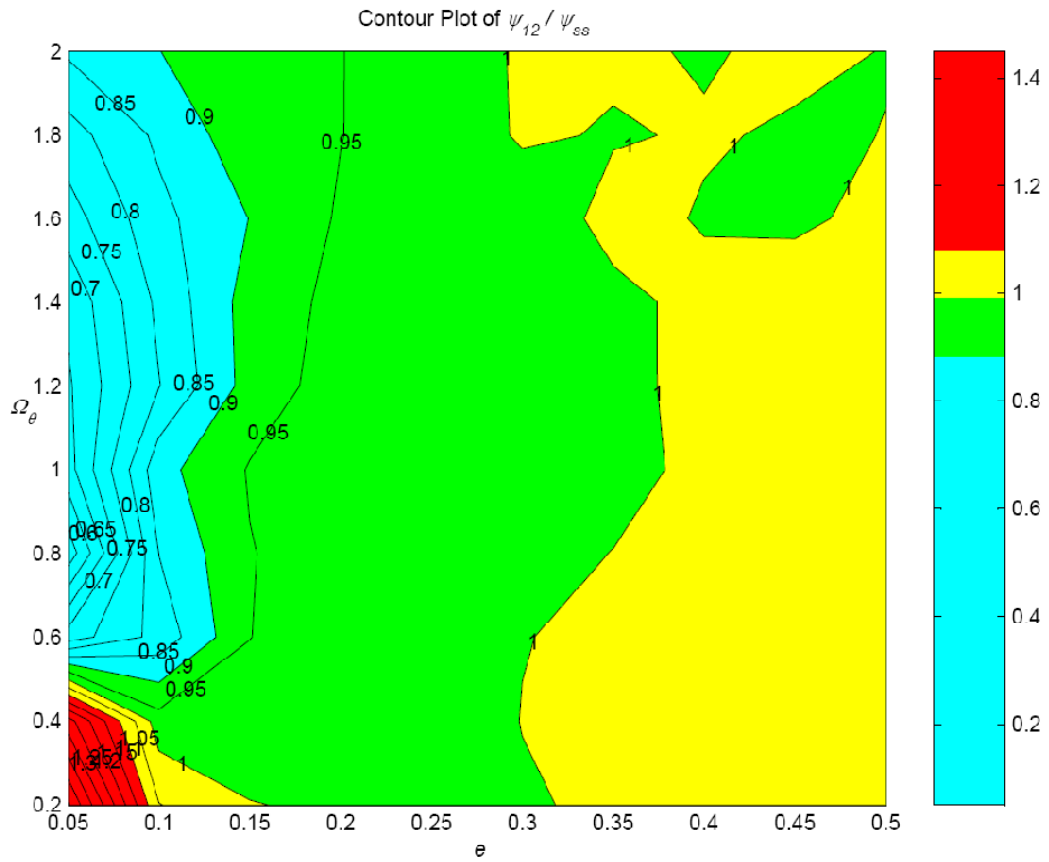
### 5.6.2.5 Caratteristiche totali con $e = e_2$



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

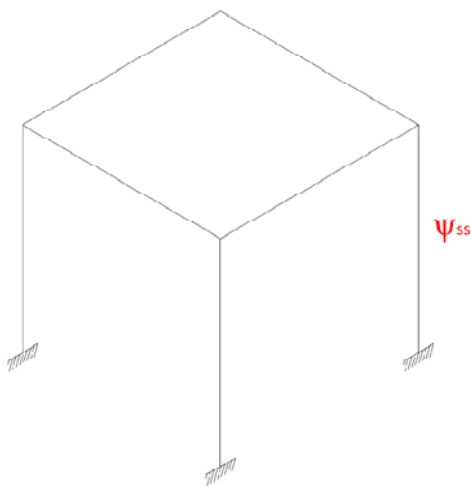
Fig. 5.72 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  è il seguente:



**Fig. 5.73** Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 5.6.2.6 Caratteristiche totali con $e = e_{medio}$



$$m_{ss} = m_1 + m_2$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = \frac{e_1 + e_2}{2}$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 2}$$

**Fig. 5.74** Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  è il seguente:

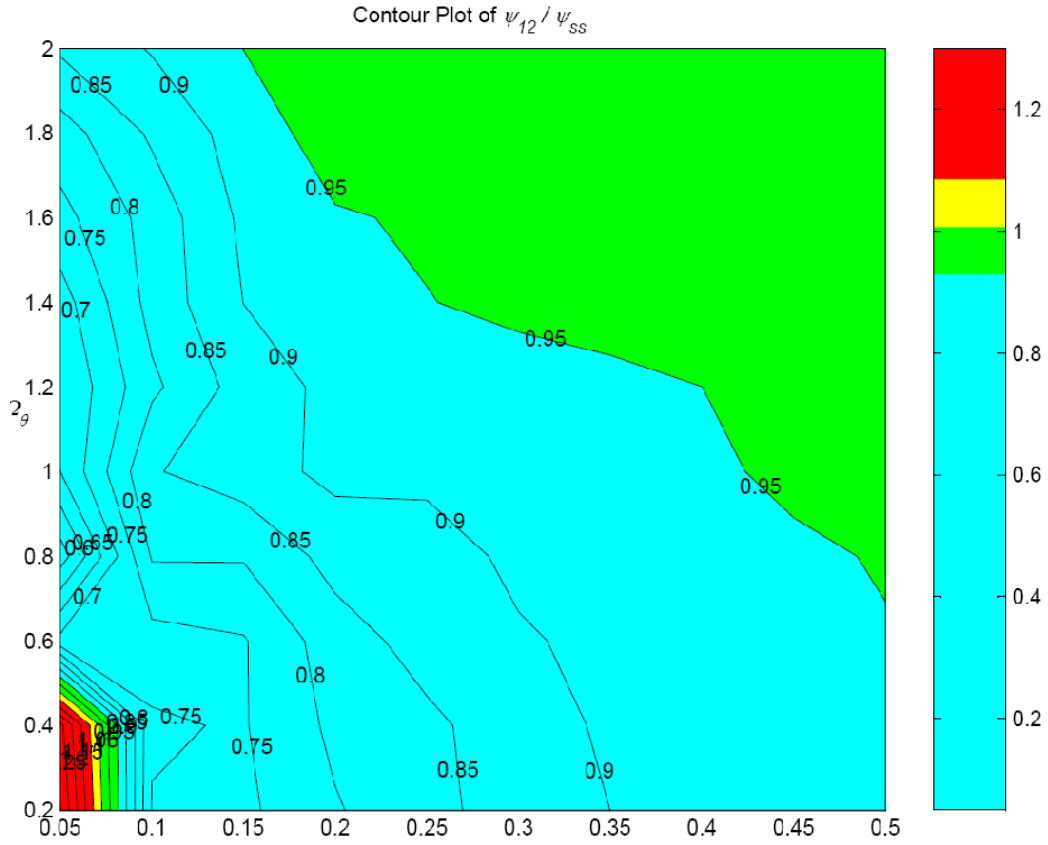


Fig. 5.75 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 5.6.2.7 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre che, anche per il secondo piano, il single storey che meglio ne coglie il comportamento ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 \\
 k_{ss} &= k_2 \\
 e_{ss} &= \frac{e_1 + e_2}{2} \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

### 5.6.3 Riassunto

Per chiarezza, si riassume graficamente quanto ottenuto:

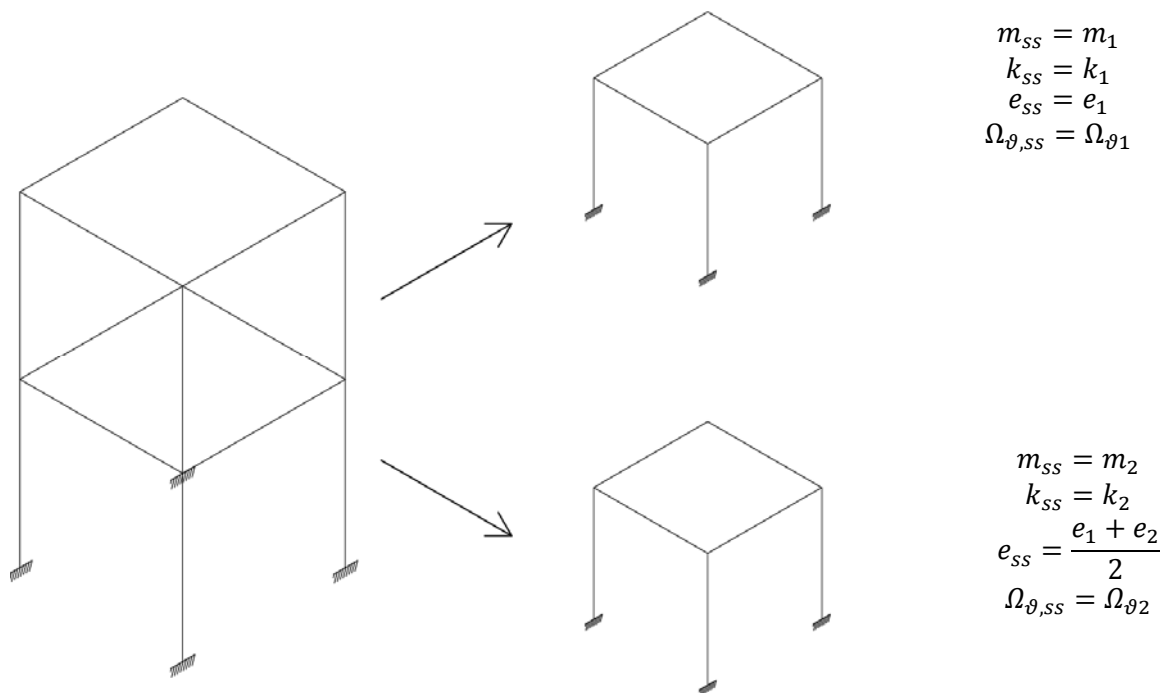


Fig. 5.76 Riassunto dei risultati ottenuti.

## 5.7 Caso 7: Parametro $\Omega_{\theta}$ del secondo piano dimezzato

Queste strutture sono caratterizzate dai seguenti valori per i rapporti  $R_e$ ,  $R_m$ ,  $R_k$ ,  $R_{\Omega_{\theta}}$ :

$$\begin{aligned} R_e = R_k = R_m &= 1 \\ R_{\Omega_{\theta}} &= 0.5 \end{aligned} \tag{5.7}$$

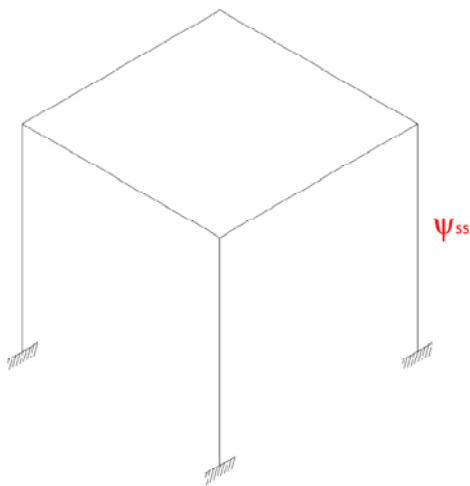
### 5.7.1 Primo Piano

Le strutture analizzate in questo caso sono due: la prima con le caratteristiche del primo piano, mentre la seconda ha rigidezza e massa pari a quelle dell'intera



struttura. Per ogni struttura viene fatto variare il parametro  $\Omega_g$ , assumendo prima il valore del primo piano, poi quello del secondo piano ed infine quello medio.

### 5.7.1.1 Caratteristiche del primo piano



$$\begin{aligned} m_{ss} &= m_1 \\ k_{ss} &= k_1 \\ e_{ss} &= e_1 \\ \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1} \end{aligned}$$

**Fig. 5.77** *Struttura single storey equivalente.*

Il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

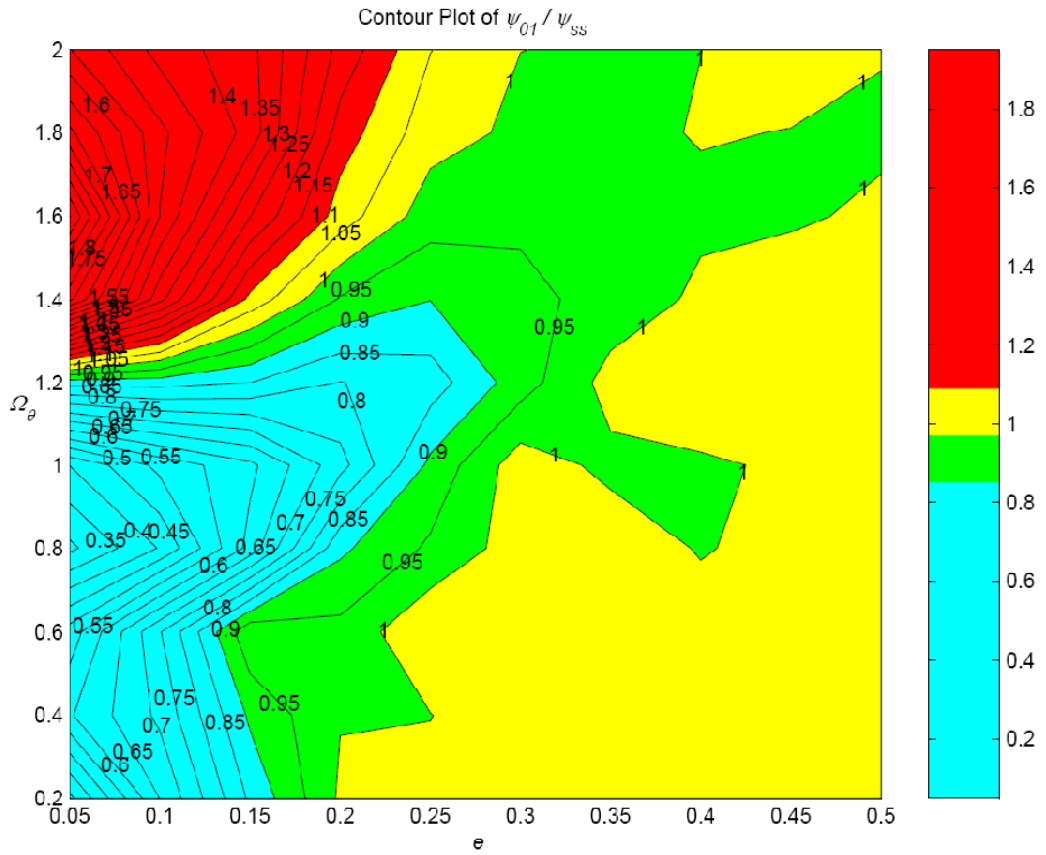


Fig. 5.78 Rapporto  $\psi_{01} / \psi_{ss}$ .

**5.7.1.2 Caratteristiche del primo piano con  $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta 2}$**

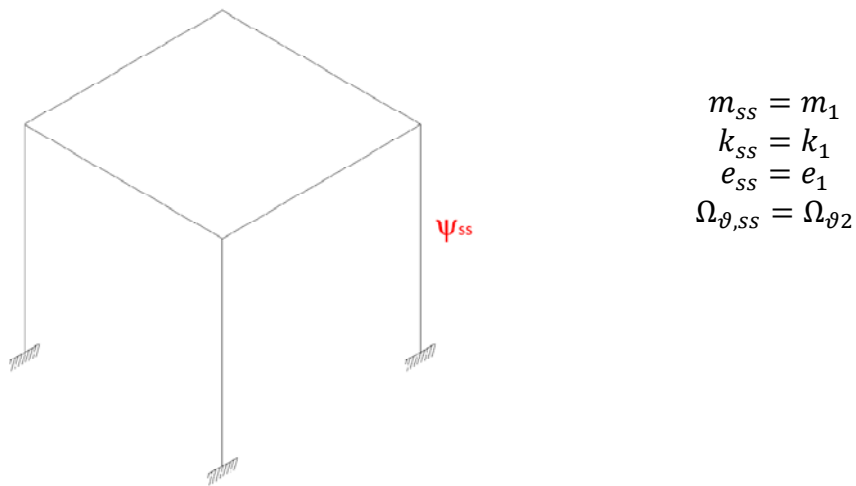


Fig. 5.79 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

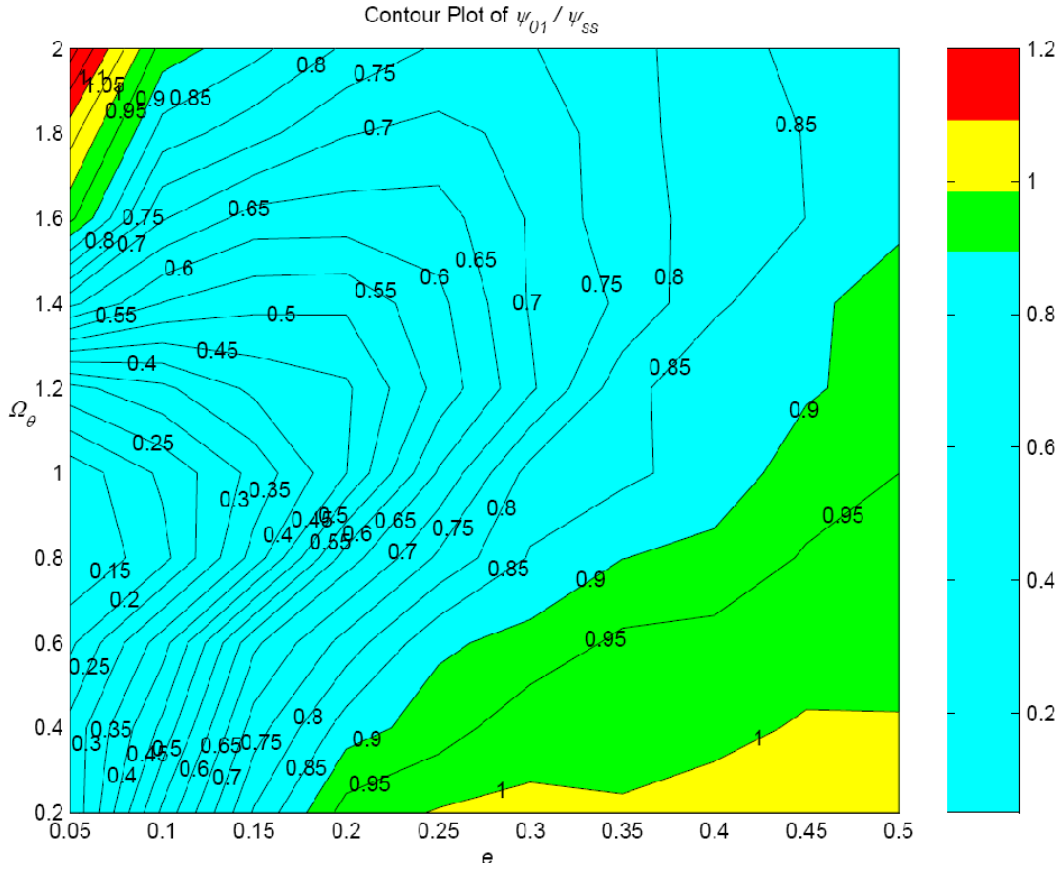
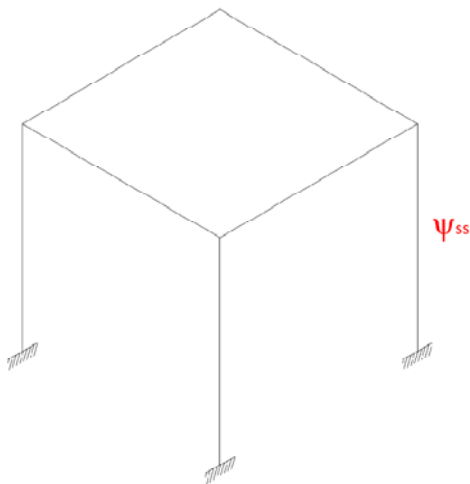


Fig. 5.80 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 5.7.1.3 Caratteristiche del primo piano con $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta\text{medio}}$



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 \\
 k_{ss} &= k_1 \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \frac{\Omega_{\theta 1} + \Omega_{\theta 2}}{2}
 \end{aligned}$$

Fig. 5.81 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

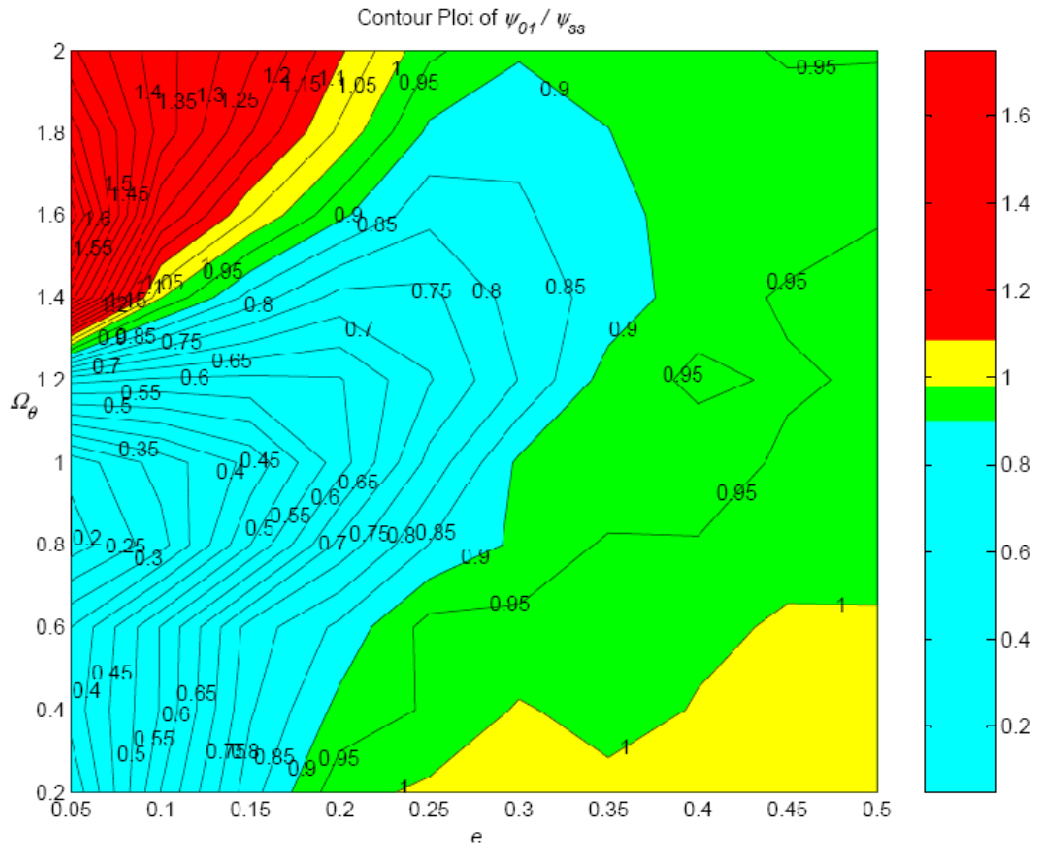
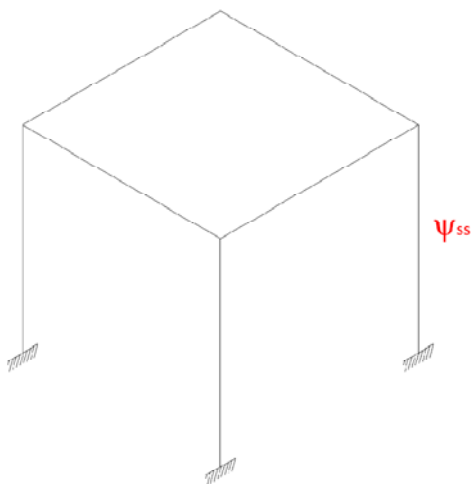


Fig. 5.82 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

#### 5.7.1.4 Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta 1}$



$$m_{ss} = m_1 + m_2$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_1$$

$$\Omega_{\vartheta,ss} = \Omega_{\vartheta 1}$$

Fig. 5.83 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  è il seguente:

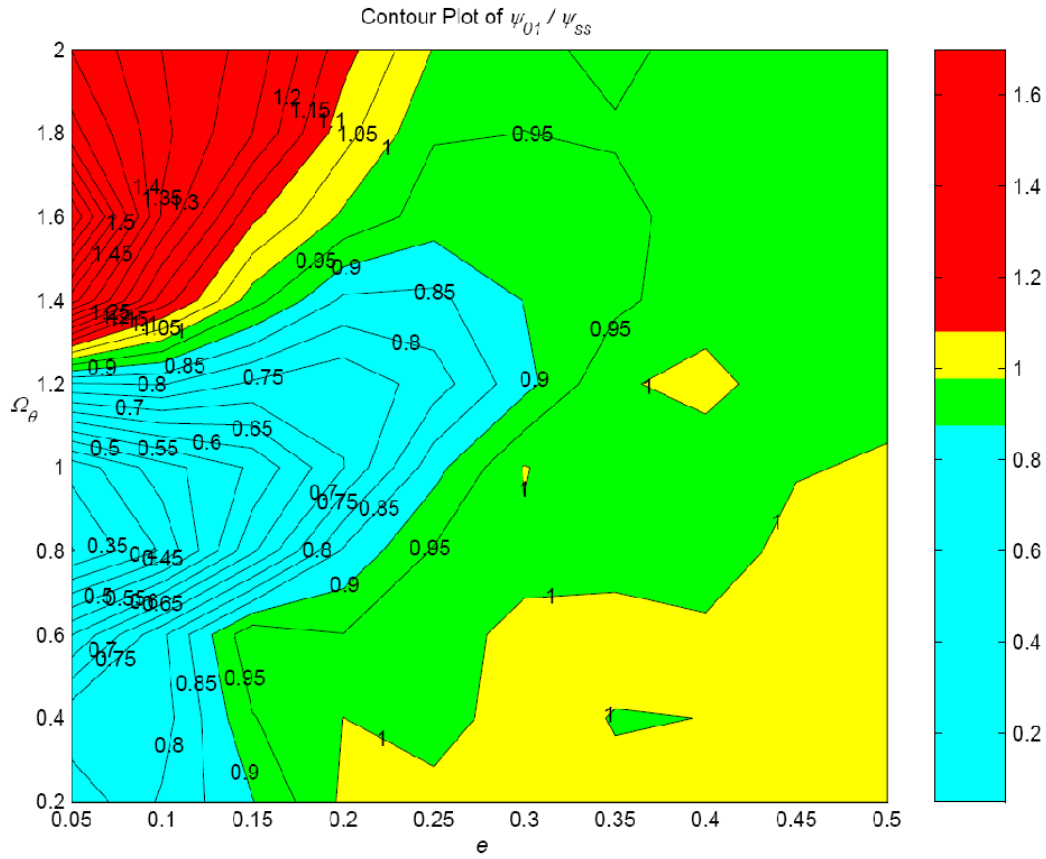
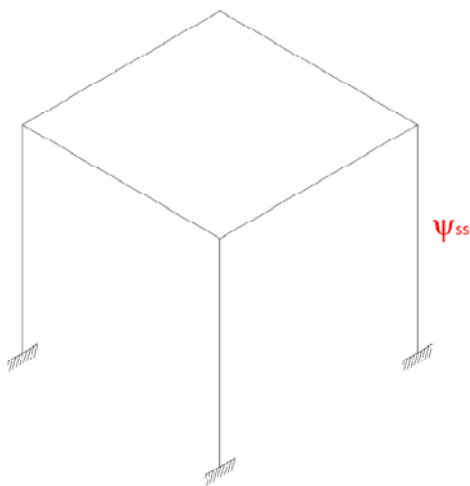


Fig. 5.84 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

**5.7.1.5 Caratteristiche totali con  $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta 2}$**



$$m_{ss} = m_1 + m_2$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_1$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 2}$$

Fig. 5.85 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  è il seguente:

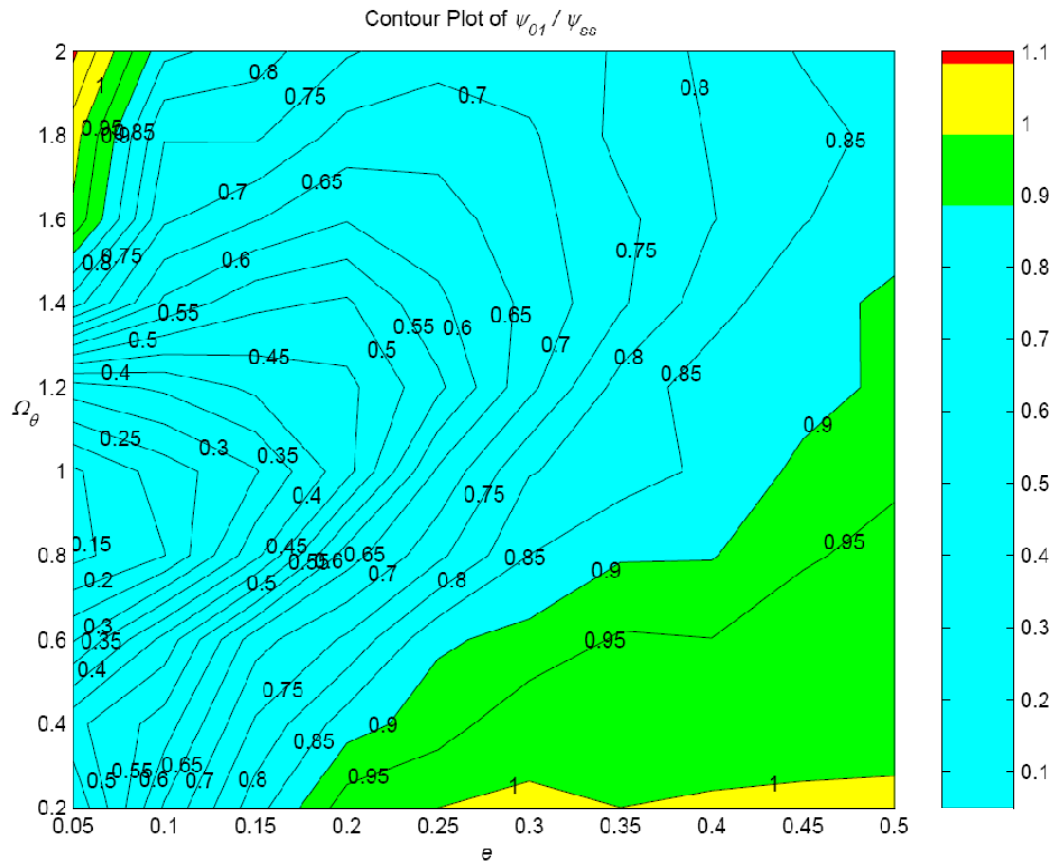
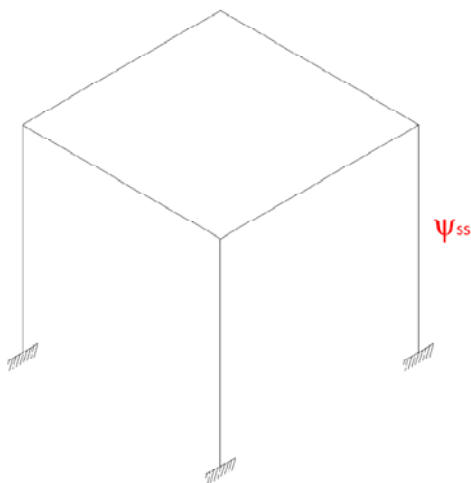


Fig. 5.86 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 5.7.1.6 Caratteristiche totali con $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta\text{medio}}$



$$m_{ss} = m_1 + m_2$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_1$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \frac{\Omega_{\theta 1} + \Omega_{\theta 2}}{2}$$

Fig. 5.87 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  è il seguente:

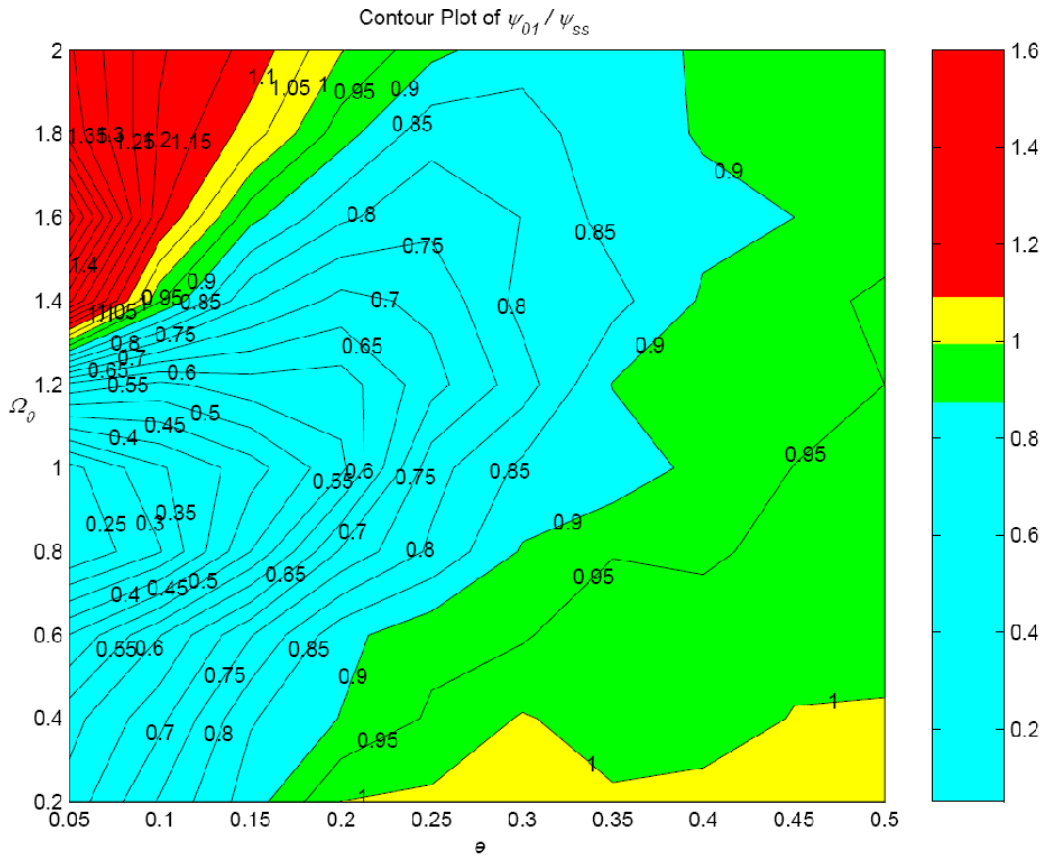


Fig. 5.88 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 5.7.1.7 Riassunto

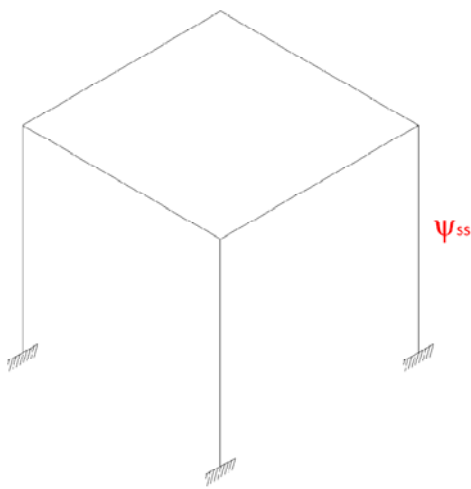
Osservando i grafici ottenuti si può dedurre che il single storey che meglio coglie il comportamento del primo piano della struttura multi storey considerata ha le caratteristiche totali della struttura in termini di rigidità e massa, ma il parametro  $\Omega_\theta$  del secondo piano, ossia:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

## 5.7.2 Secondo piano

In questo caso si sono considerati due casi base, cioè struttura con caratteristiche del secondo piano e struttura con caratteristiche proprie dell'intera struttura multi storey, nei quali il parametro  $\Omega_\vartheta$  assume di volta in volta diversi valori:  $\Omega_\vartheta$  del primo piano,  $\Omega_\vartheta$  del secondo piano ed  $\Omega_\vartheta$  medio.

### 5.7.2.1 Caratteristiche del secondo piano

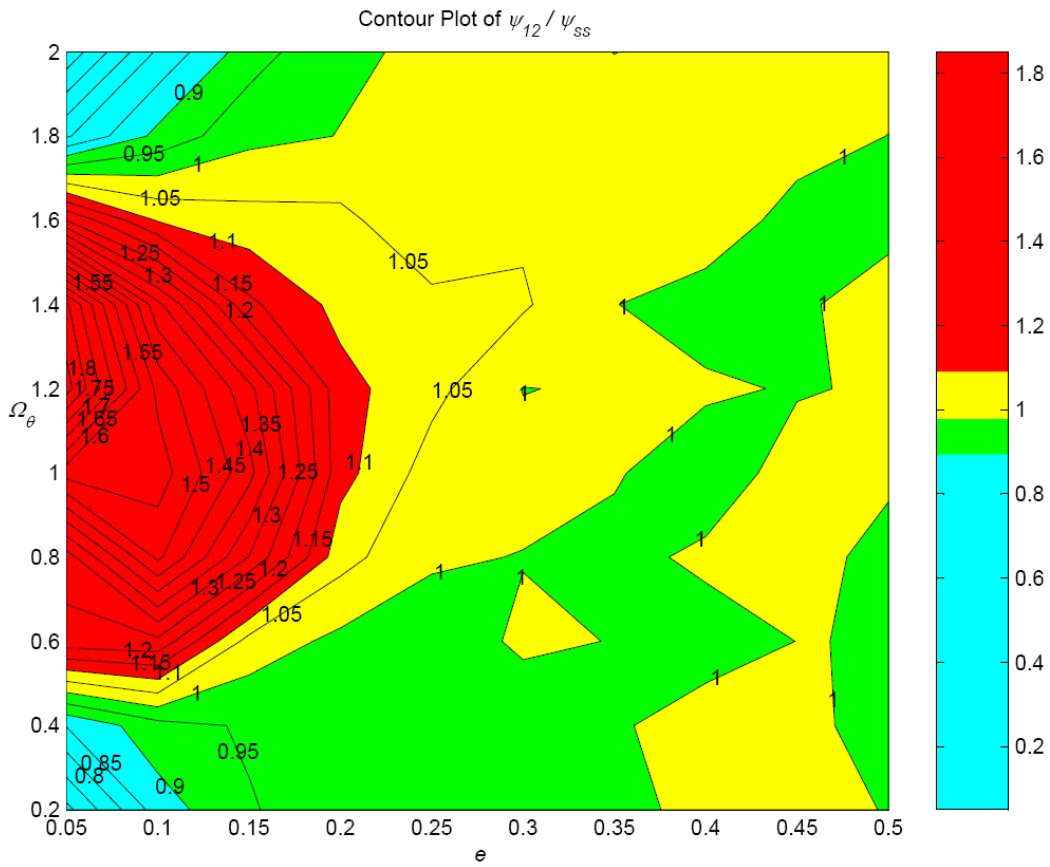


$$\begin{aligned} m_{ss} &= m_2 \\ k_{ss} &= k_2 \\ e_{ss} &= e_2 \\ \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 2} \end{aligned}$$

**Fig. 5.89** *Struttura single storey equivalente.*

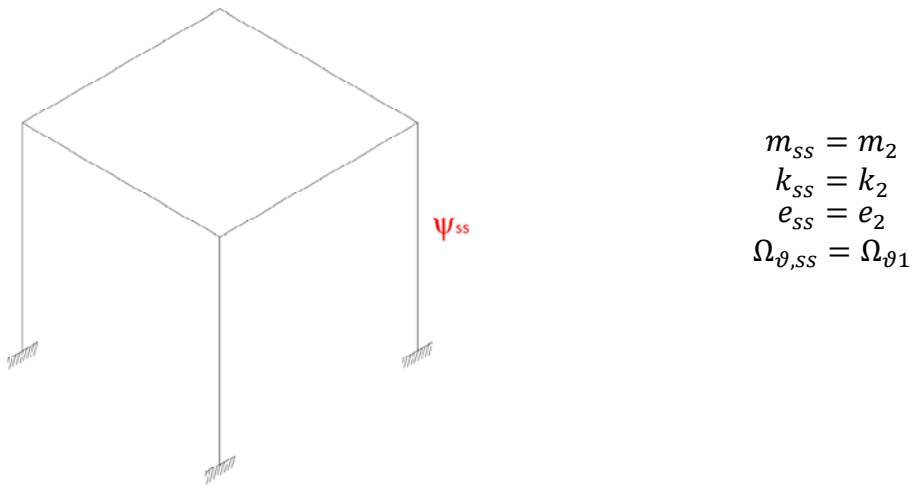
Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:





**Fig. 5.90** Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

**5.7.2.2** Caratteristiche del secondo piano con  $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta 1}$



**Fig. 5.91** Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

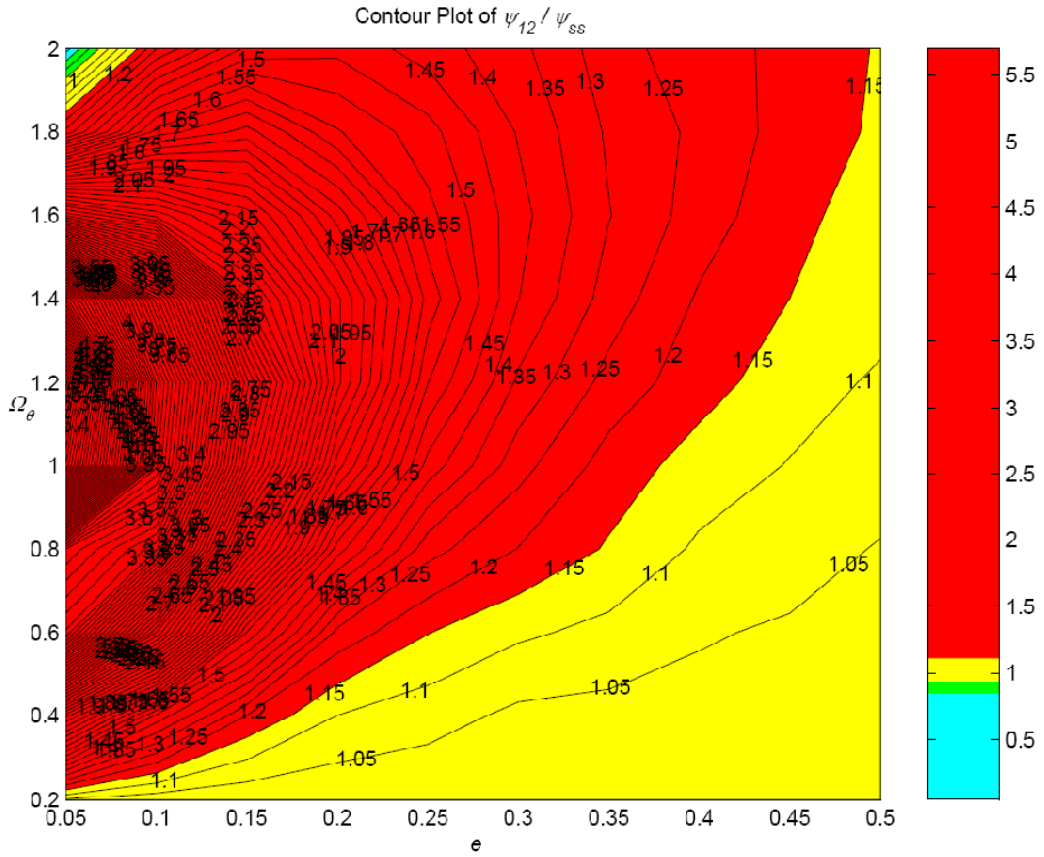
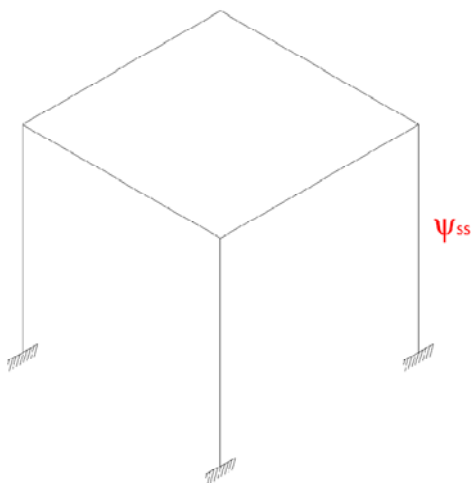


Fig. 5.92 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 5.7.2.3 Caratteristiche del secondo piano con $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta\text{medio}}$



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 \\
 k_{ss} &= k_2 \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \frac{\Omega_{\theta 1} + \Omega_{\theta 2}}{2}
 \end{aligned}$$

Fig. 5.93 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

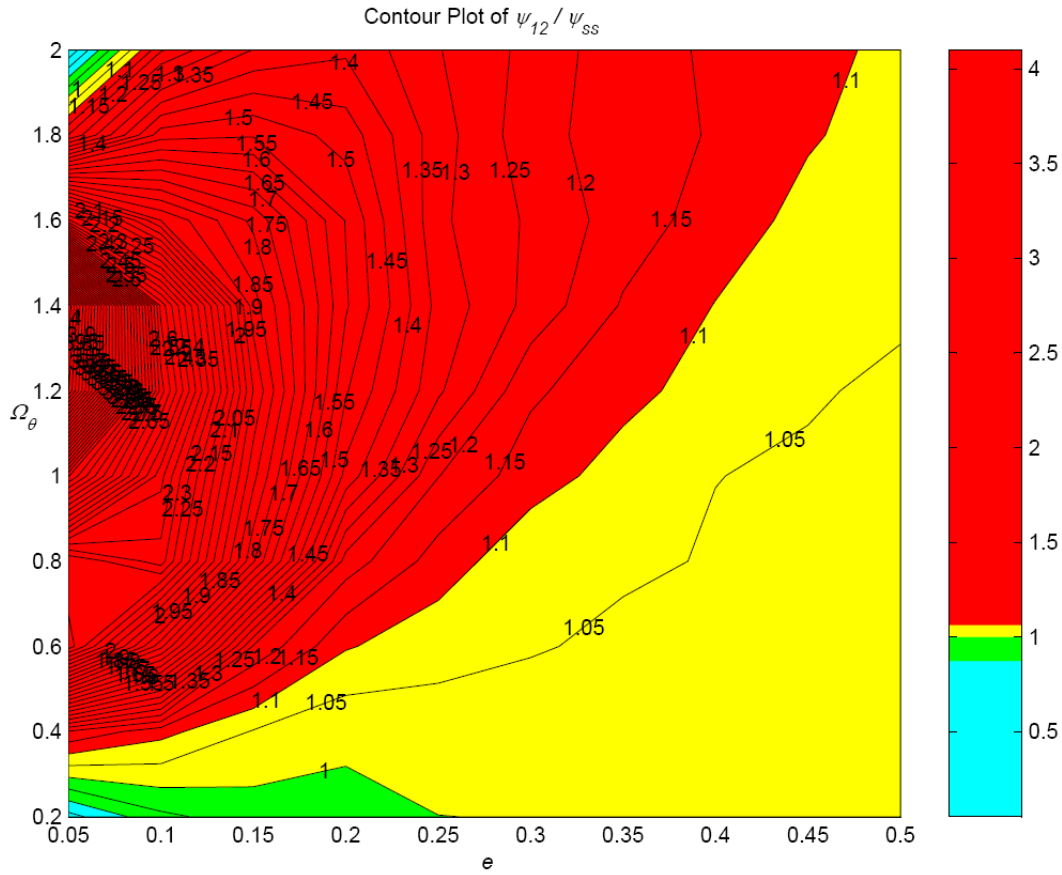
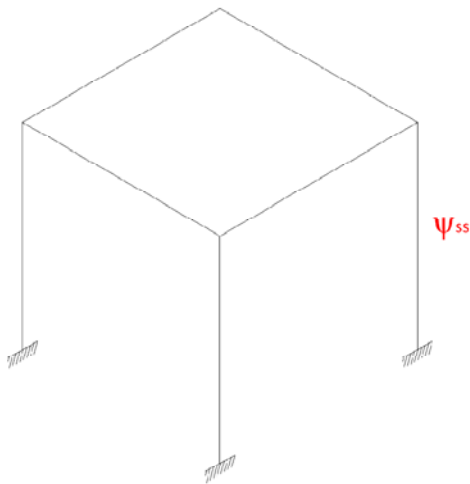


Fig. 5.94 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

#### 5.7.2.4 Caratteristiche totali con $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta 1}$



$$m_{ss} = m_1 + m_2$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 1}$$

Fig. 5.95 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  è il seguente:

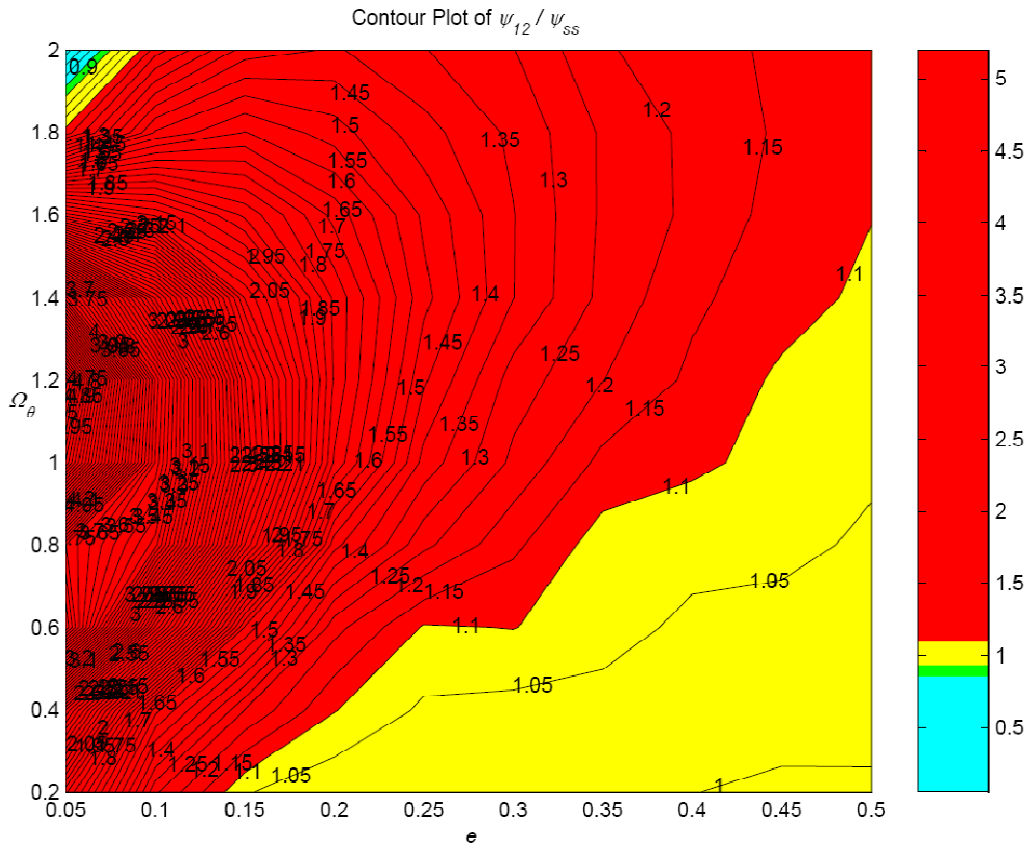
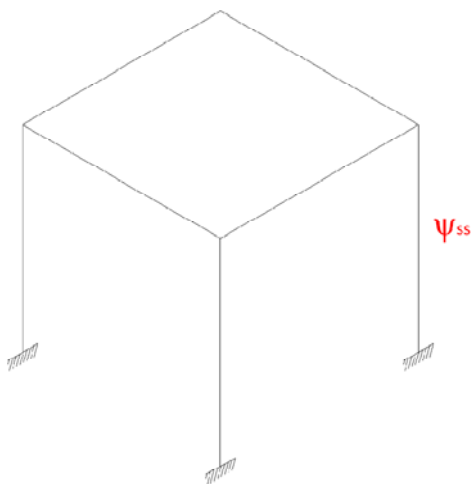


Fig. 5.96 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 5.7.2.5 Caratteristiche totali con $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta 2}$



$$m_{ss} = m_1 + m_2$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 2}$$

Fig. 5.97 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  è il seguente:

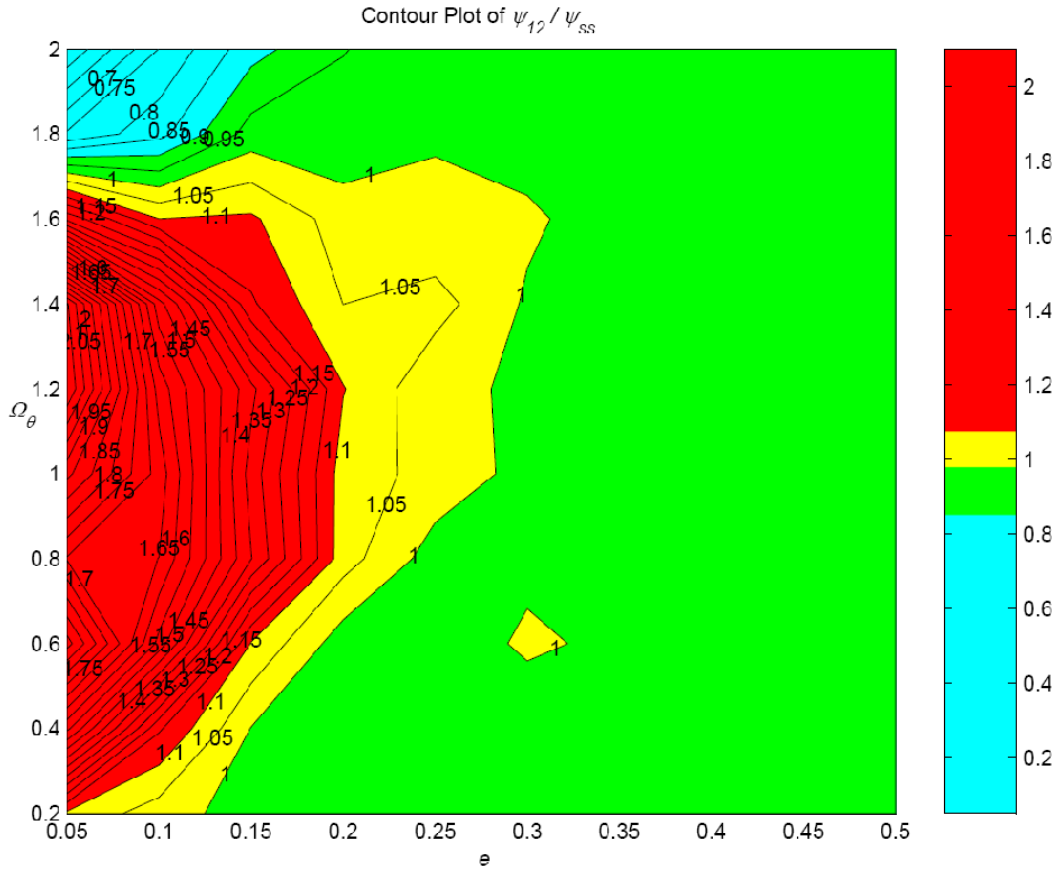
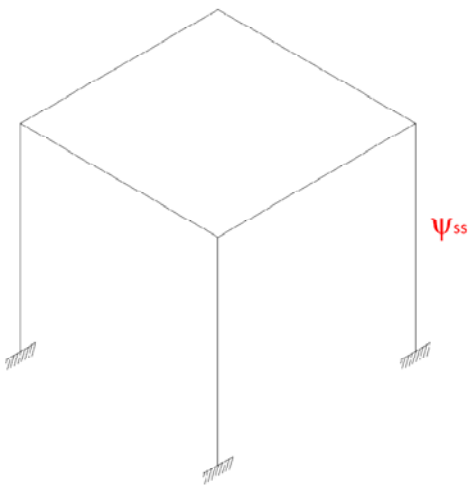


Fig. 5.98 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 5.7.2.6 Caratteristiche totali con $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta\text{medio}}$



$$m_{ss} = m_1 + m_2$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \frac{\Omega_{\theta 1} + \Omega_{\theta 2}}{2}$$

Fig. 5.99 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  è il seguente:

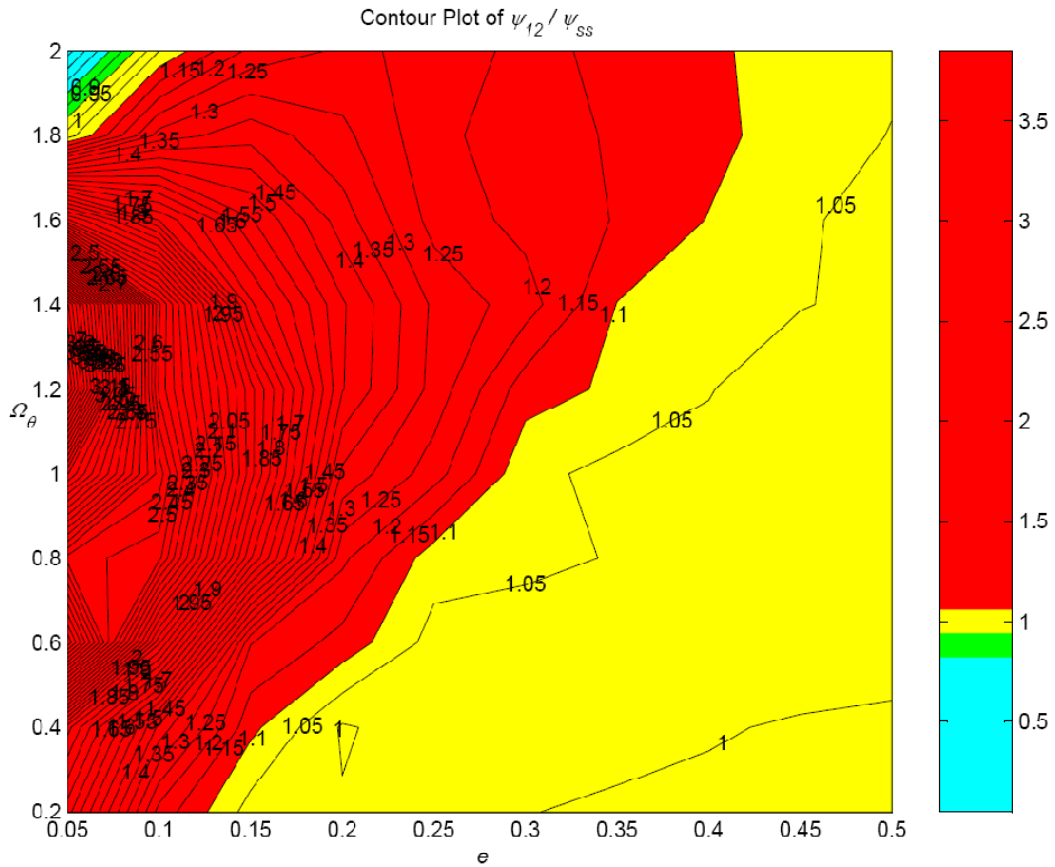


Fig. 5.100 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 5.7.2.7 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre che, per il secondo piano, il single storey che meglio ne coglie il comportamento ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

### 5.7.3 Riassunto

Per chiarezza, si riassume graficamente quanto ottenuto:

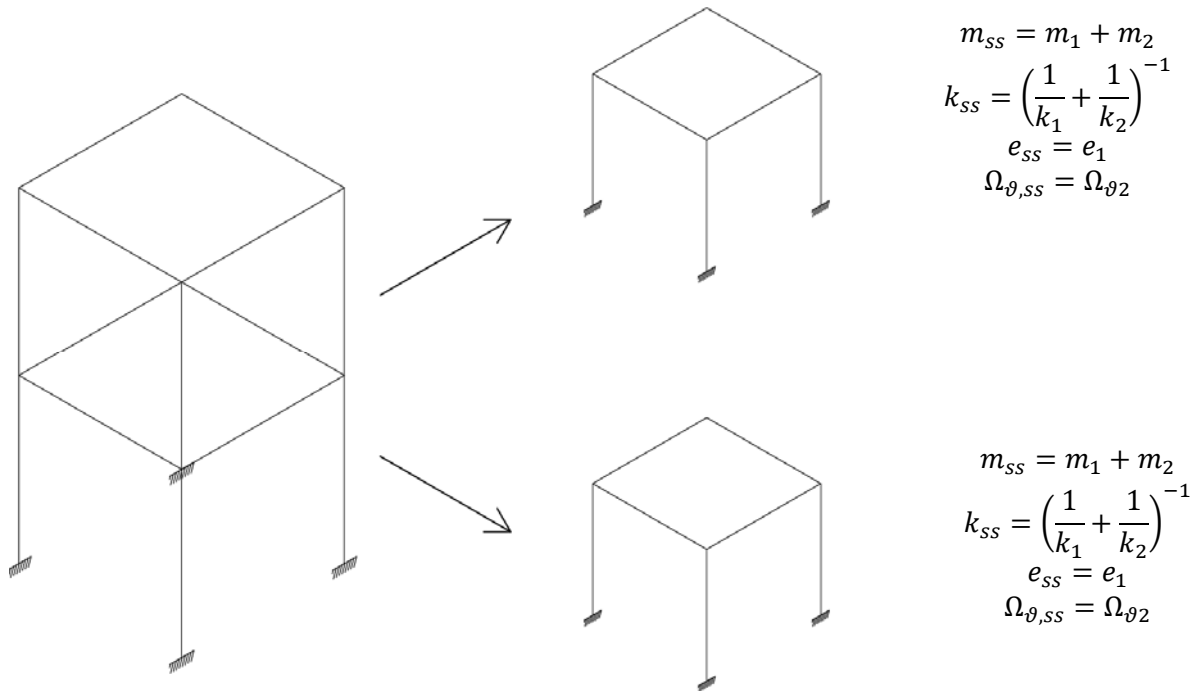


Fig. 5.101 Riassunto dei risultati ottenuti.

## 5.8 Caso 8: Parametro $\Omega_{\vartheta}$ del secondo piano raddoppiato

Queste strutture sono caratterizzate dai seguenti valori per i rapporti  $R_e$ ,  $R_m$ ,  $R_k$ ,  $R_{\Omega_{\vartheta}}$ :

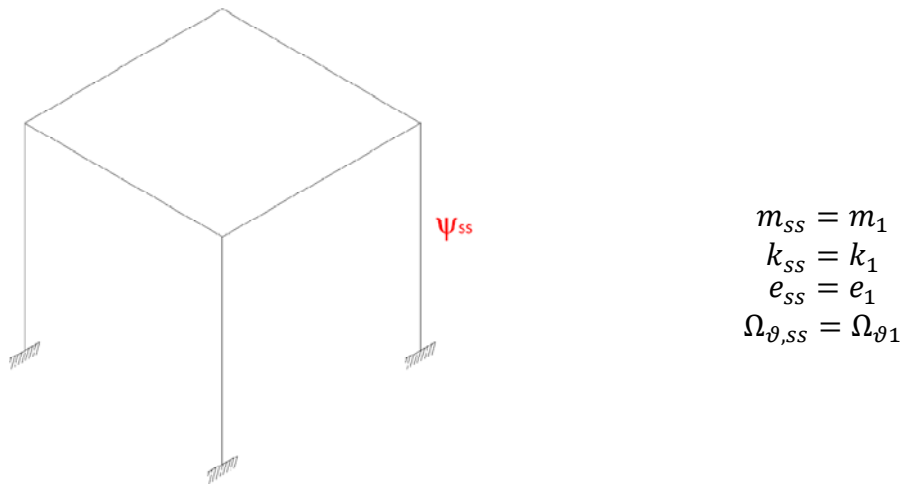
$$\begin{aligned}
 R_e &= R_k = R_m = 1 \\
 R_{\Omega_{\vartheta}} &= 2
 \end{aligned}
 \tag{5.8}$$

### 5.8.1 Primo Piano

Anche in questo caso le strutture analizzate sono due: la prima con le caratteristiche del primo piano, mentre la seconda ha rigidezza e massa pari a quelle dell'intera struttura. Per ogni struttura viene fatto variare il parametro  $\Omega_{\vartheta}$ ,

assumendo prima il valore del primo piano, poi quello del secondo piano ed infine quello medio.

### 5.8.1.1 Caratteristiche del primo piano



**Fig. 5.102** *Struttura single storey equivalente.*

Il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:



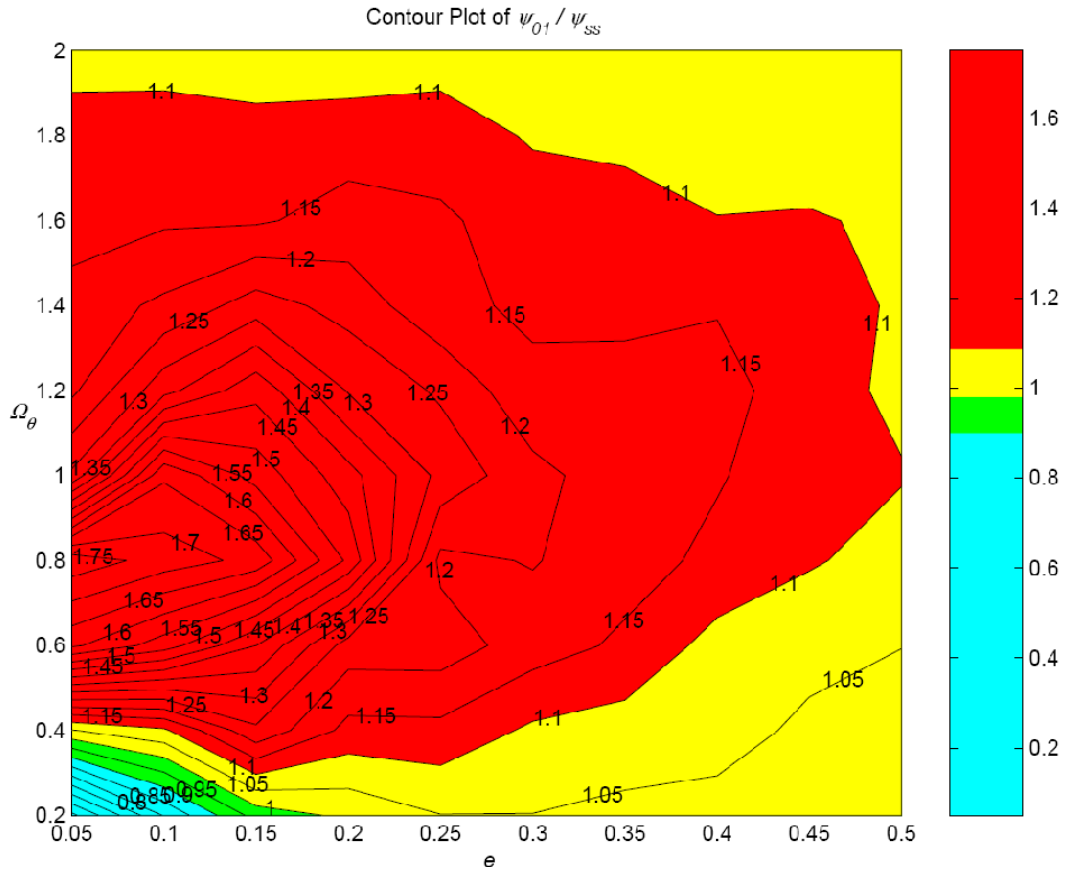
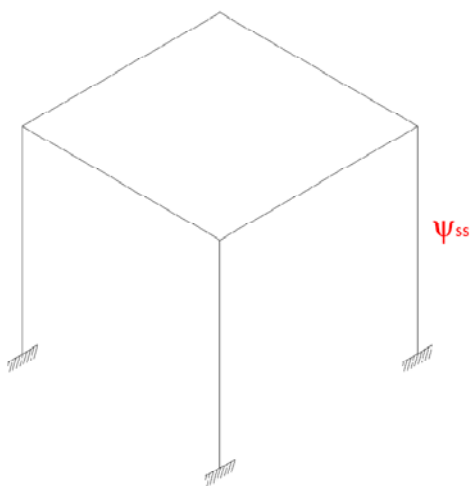


Fig. 5.103 Rapporto  $\psi_{\theta 1} / \psi_{ss}$ .

### 5.8.1.2 Caratteristiche del primo piano con $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta 2}$



$$\begin{aligned} m_{ss} &= m_1 \\ k_{ss} &= k_1 \\ e_{ss} &= e_1 \\ \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2} \end{aligned}$$

Fig. 5.104 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

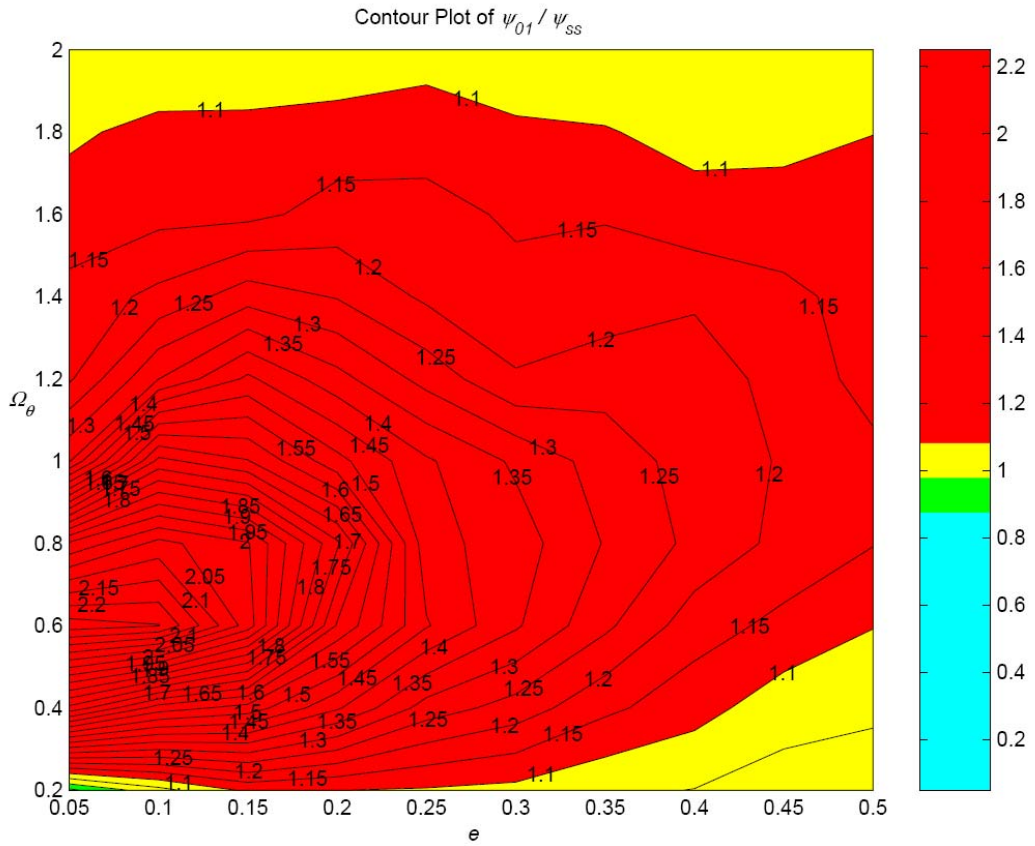
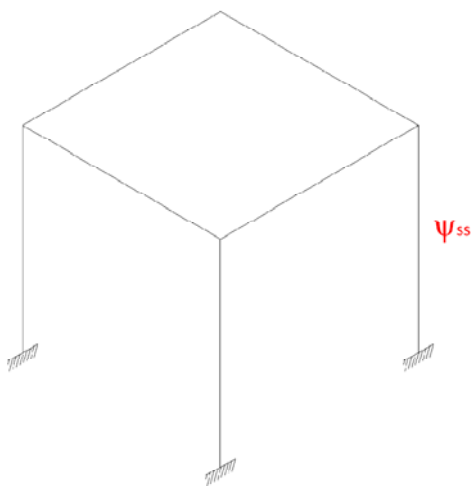


Fig. 5.105 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 5.8.1.3 Caratteristiche del primo piano con $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta\text{medio}}$



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 \\
 k_{ss} &= k_1 \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \frac{\Omega_{\theta 1} + \Omega_{\theta 2}}{2}
 \end{aligned}$$

Fig. 5.106 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

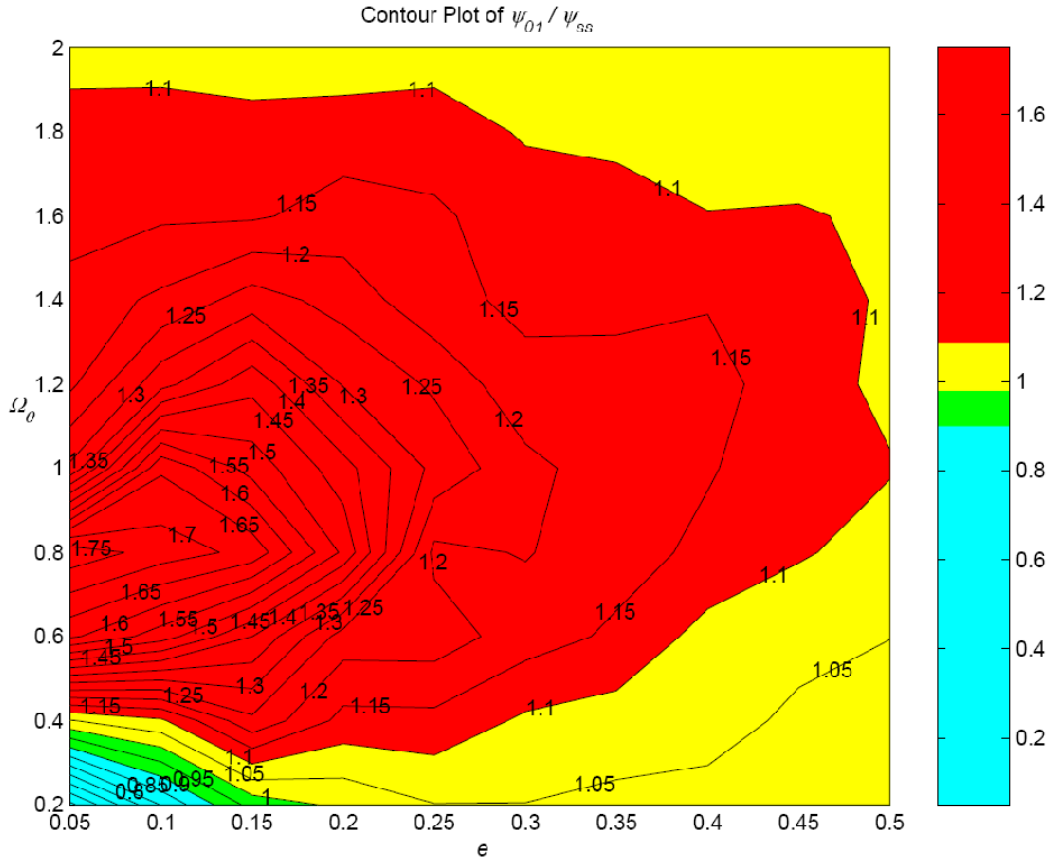
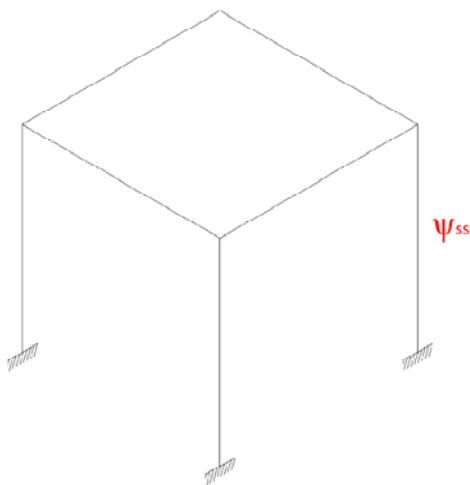


Fig. 5.107 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

#### 5.8.1.4 Caratteristiche totali con $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta 1}$



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

Fig. 5.108 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  è il seguente:

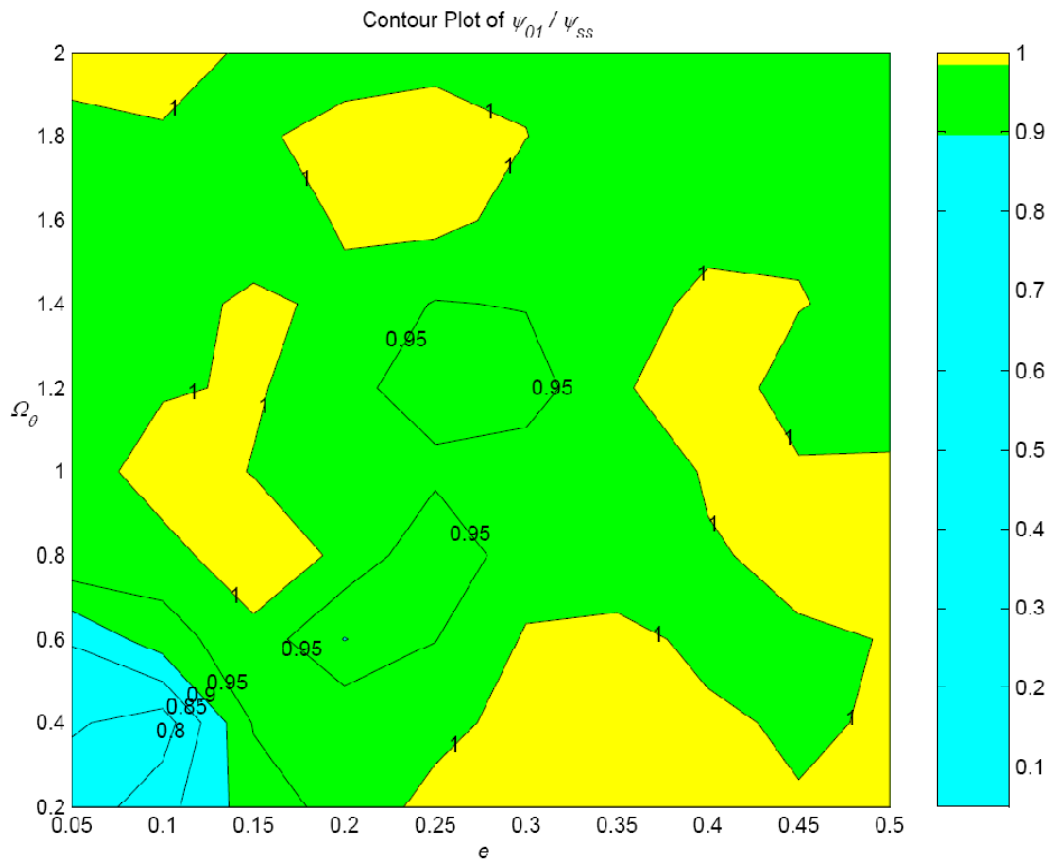
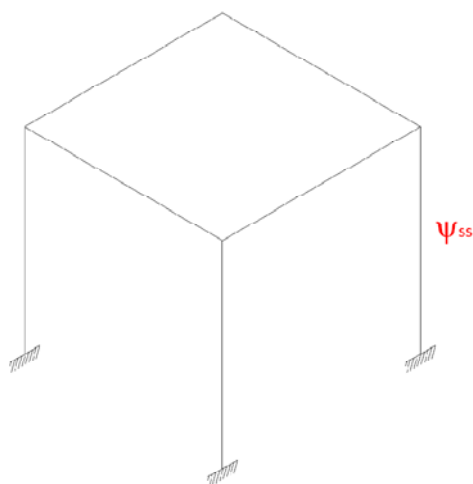


Fig. 5.109 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 5.8.1.5 Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta 2}$



$$m_{ss} = m_1 + m_2$$

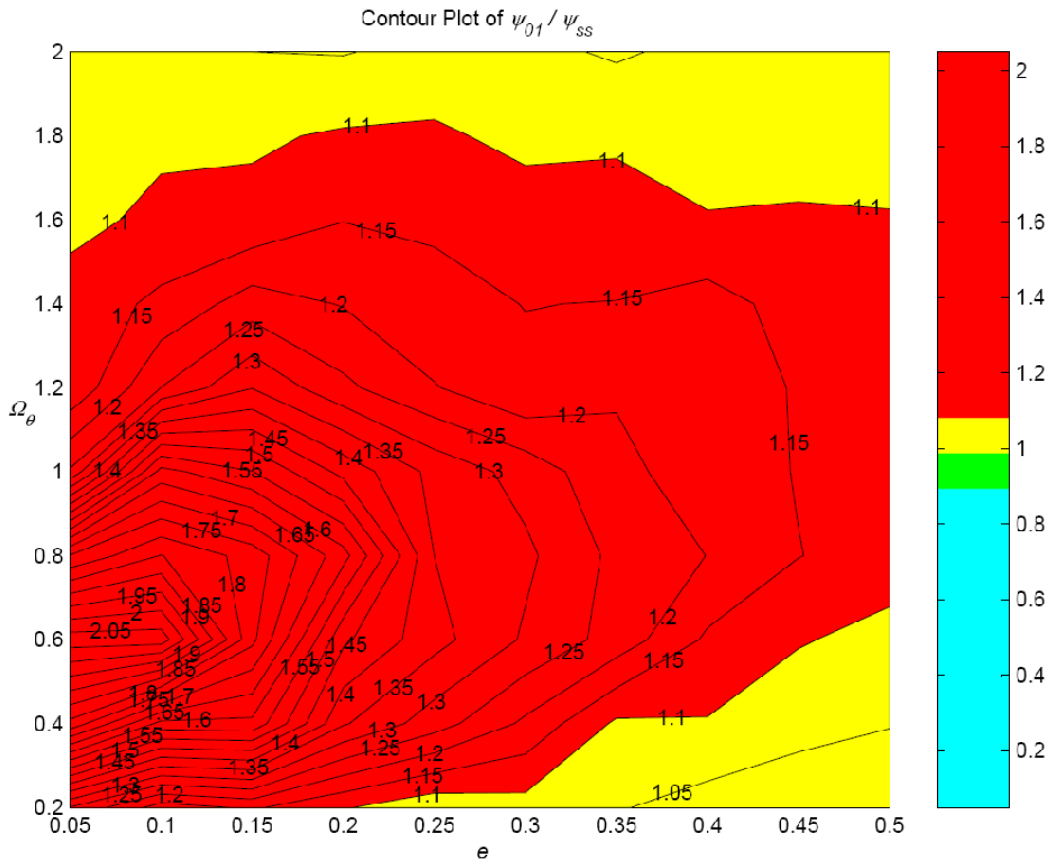
$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_1$$

$$\Omega_{\vartheta,ss} = \Omega_{\vartheta 2}$$

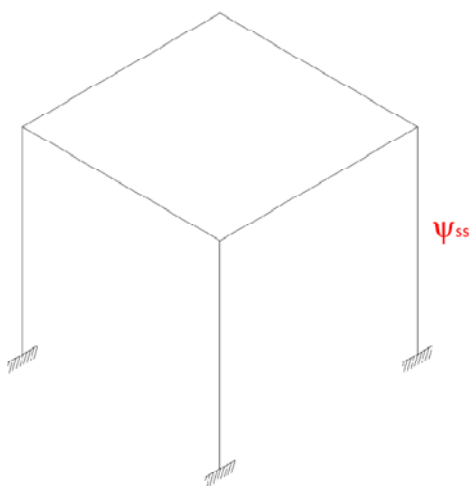
Fig. 5.110 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  è il seguente:



**Fig. 5.111** Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

**5.8.1.6 Caratteristiche totali con  $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta,medio}$**



$$m_{ss} = m_1 + m_2$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_1$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \frac{\Omega_{\theta 1} + \Omega_{\theta 2}}{2}$$

**Fig. 5.112** Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  è il seguente:

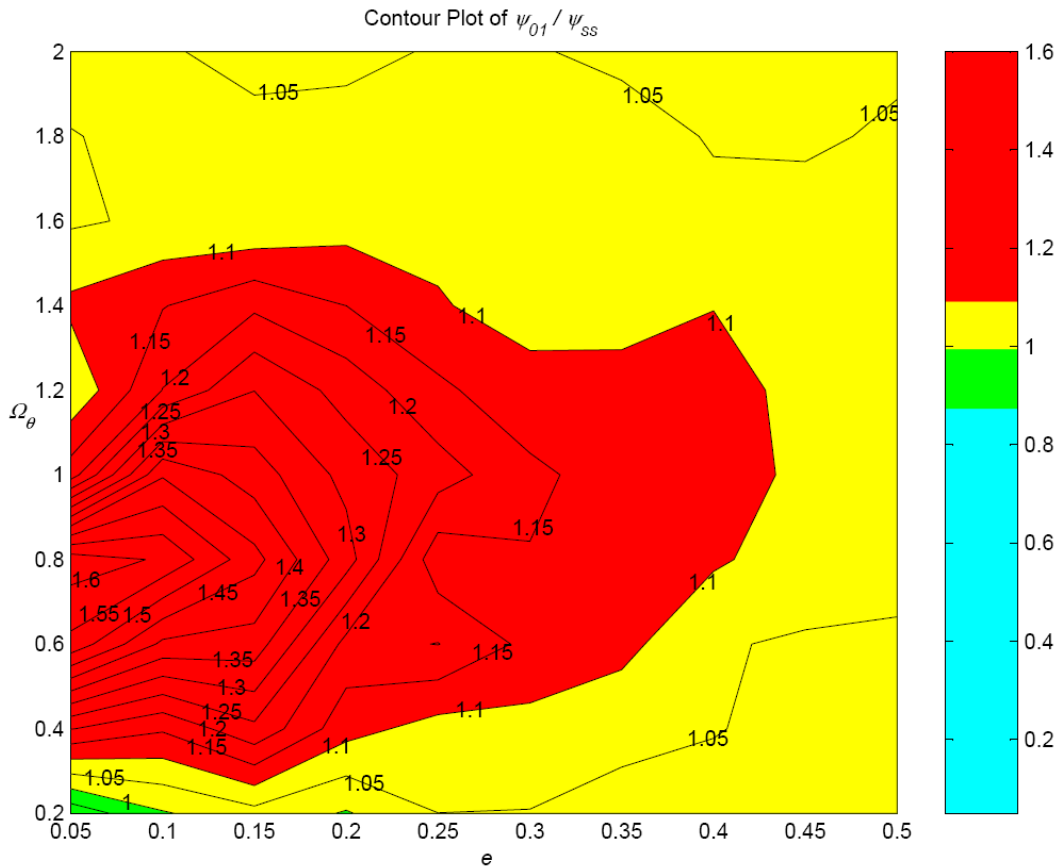


Fig. 5.113 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 5.8.1.7 Riassunto

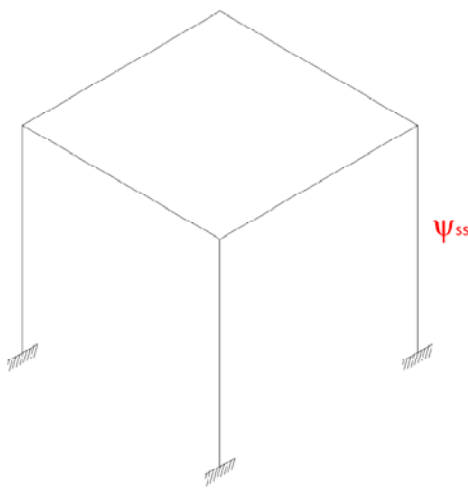
Osservando i grafici ottenuti si può dedurre che il single storey che meglio coglie il comportamento del primo piano della struttura multi storey considerata ha le caratteristiche totali della struttura in termini di rigidezza e massa, ma il parametro  $\Omega_{\theta}$  del primo piano, ossia:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

## 5.8.2 Secondo piano

I casi di calcolo considerati consistono in due casi base, cioè struttura con caratteristiche del secondo piano e struttura con caratteristiche proprie dell'intera struttura multi storey, nei quali il parametro  $\Omega_\theta$  assume di volta in volta diversi valori:  $\Omega_\theta$  del primo piano,  $\Omega_\theta$  del secondo piano ed  $\Omega_\theta$  medio.

### 5.8.2.1 Caratteristiche del secondo piano



$$\begin{aligned} m_{ss} &= m_2 \\ k_{ss} &= k_2 \\ e_{ss} &= e_2 \\ \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2} \end{aligned}$$

**Fig. 5.114** *Struttura single storey equivalente.*

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

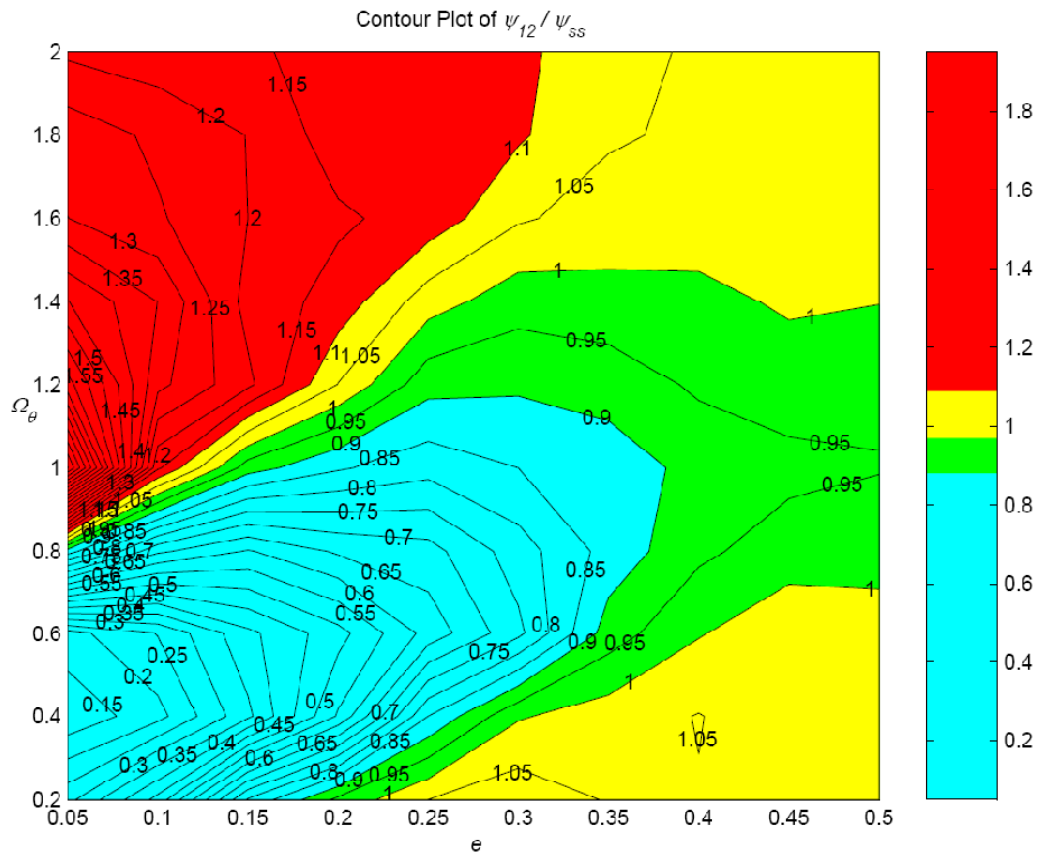


Fig. 5.115 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

5.8.2.2 Caratteristiche del secondo piano con  $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta 1}$

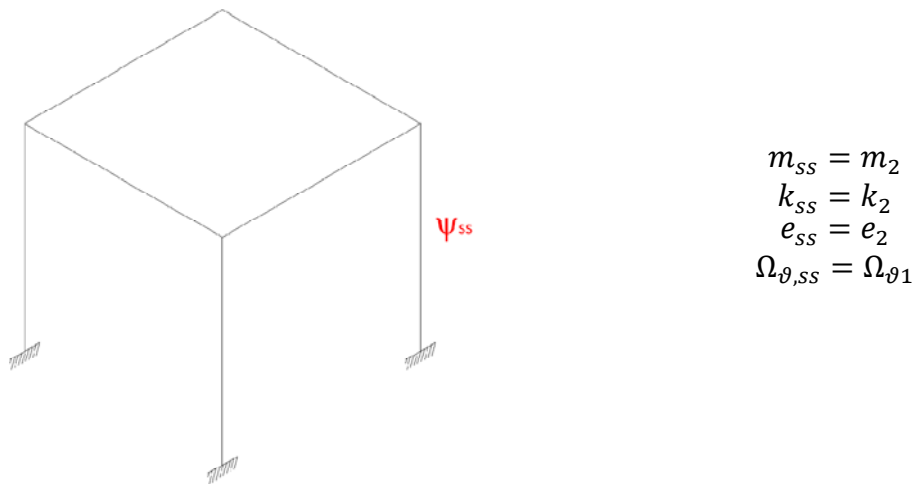


Fig. 5.116 Struttura single storey equivalente.



Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

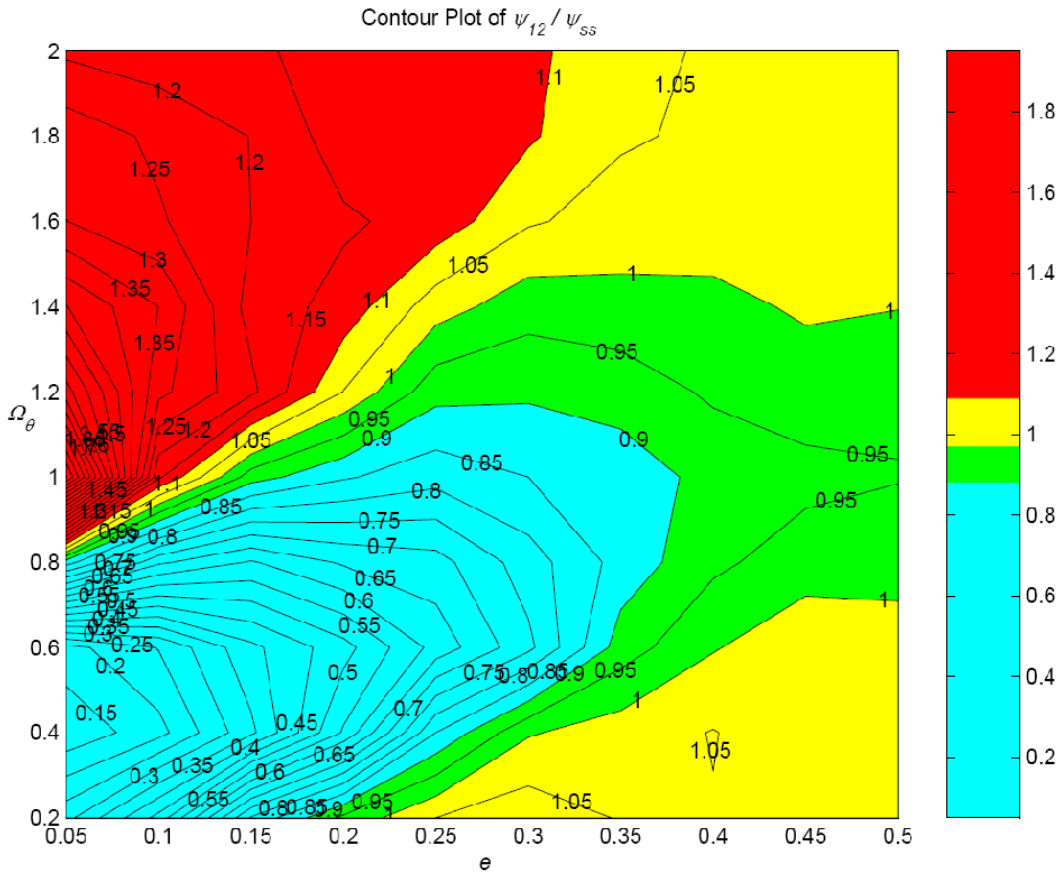
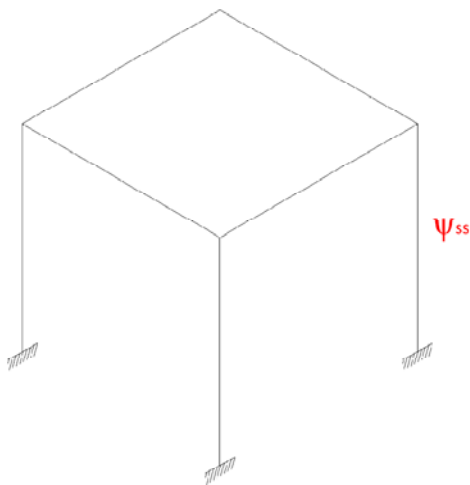


Fig. 5.117 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

**5.8.2.3 Caratteristiche del secondo piano con  $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta\text{medio}}$**



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 \\
 k_{ss} &= k_2 \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \frac{\Omega_{\vartheta 1} + \Omega_{\vartheta 2}}{2}
 \end{aligned}$$

Fig. 5.118 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

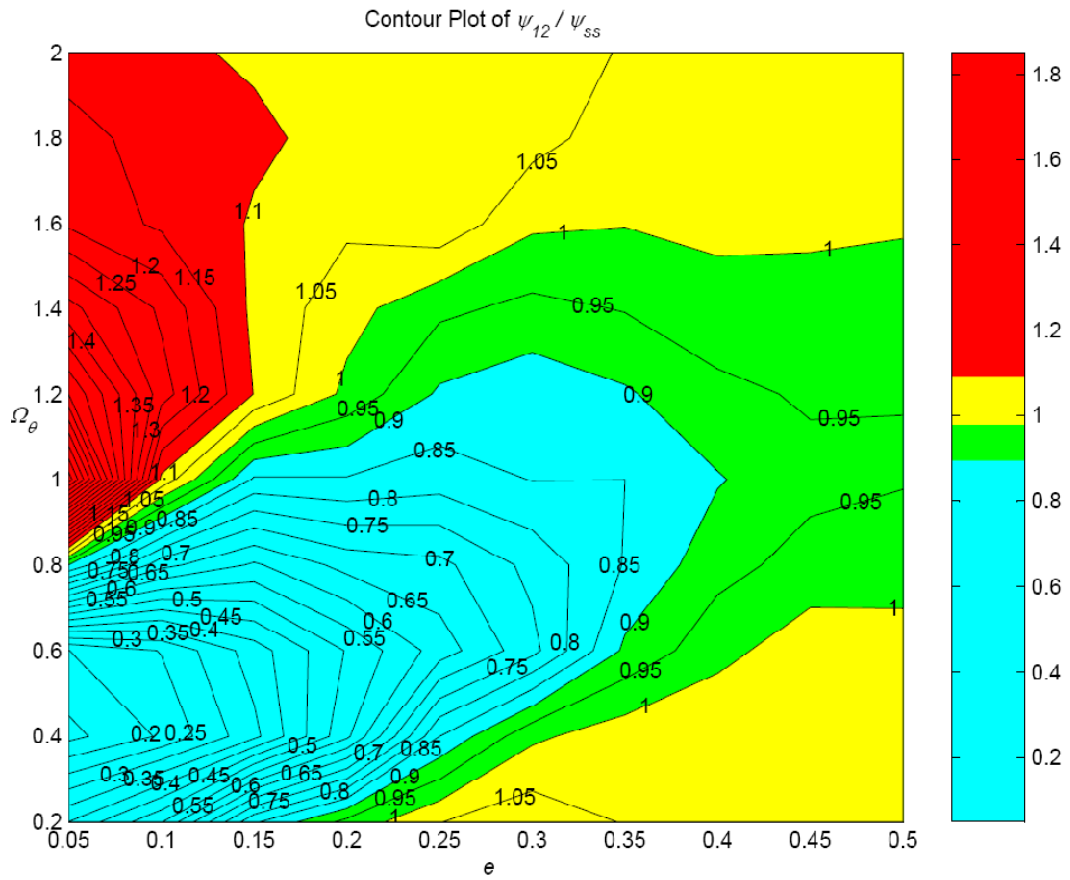
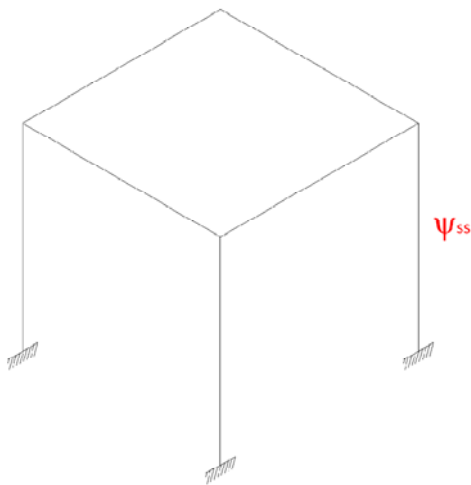


Fig. 5.119 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

#### 5.8.2.4 Caratteristiche totali con $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta 1}$



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

Fig. 5.120 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  è il seguente:

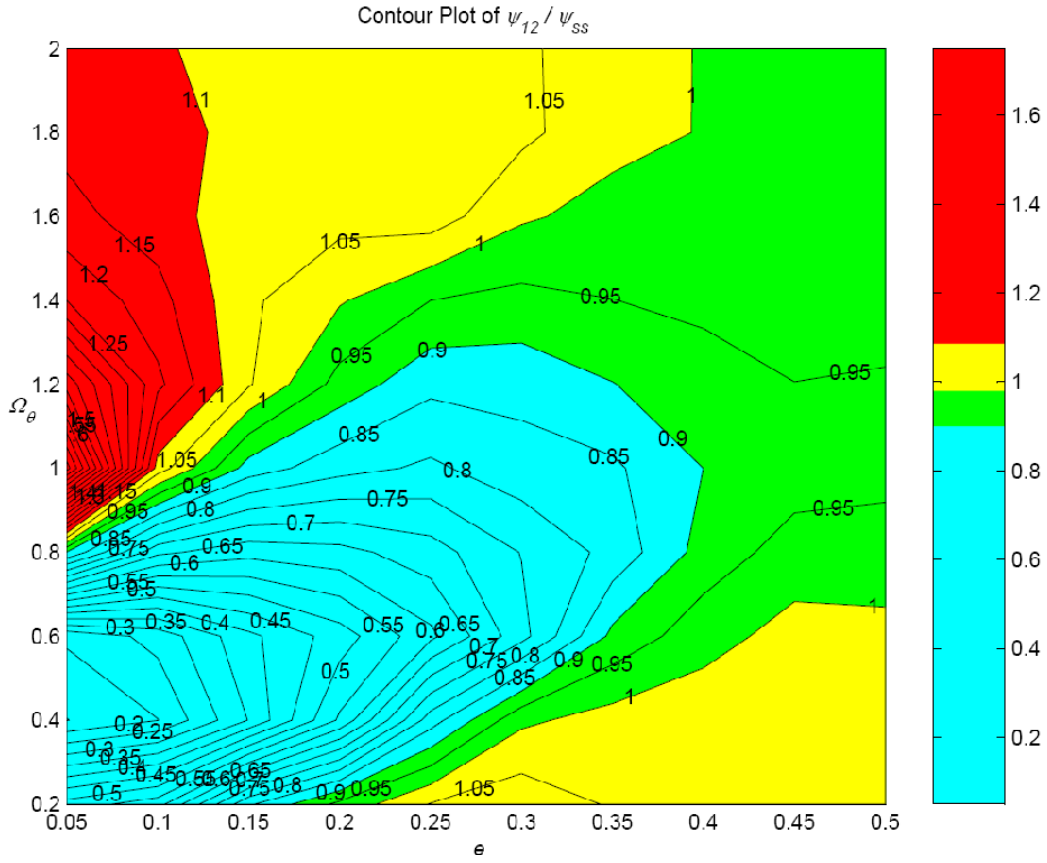
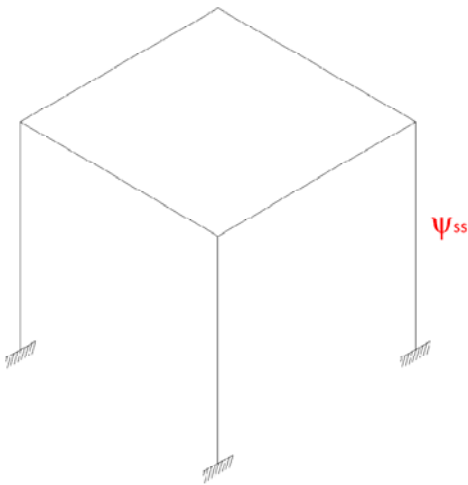


Fig. 5.121 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 5.8.2.5 Caratteristiche totali con $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta 2}$



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

Fig. 5.122 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  è il seguente:

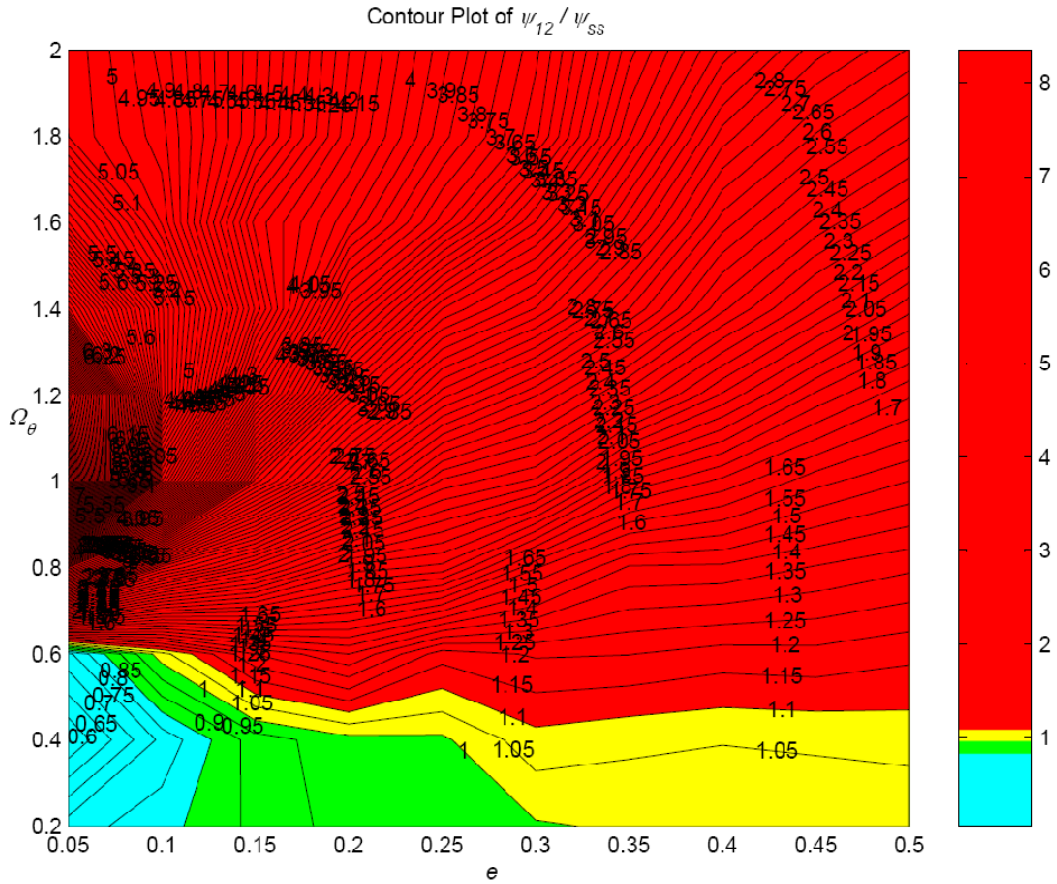
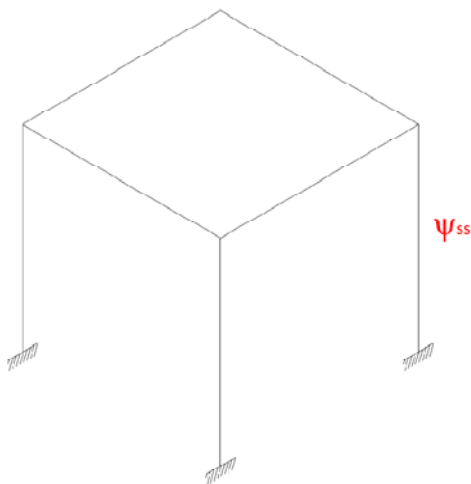


Fig. 5.123 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 5.8.2.6 Caratteristiche totali con $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta \text{ medio}}$



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \frac{\Omega_{\theta 1} + \Omega_{\theta 2}}{2}
 \end{aligned}$$

Fig. 5.124 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  è il seguente:

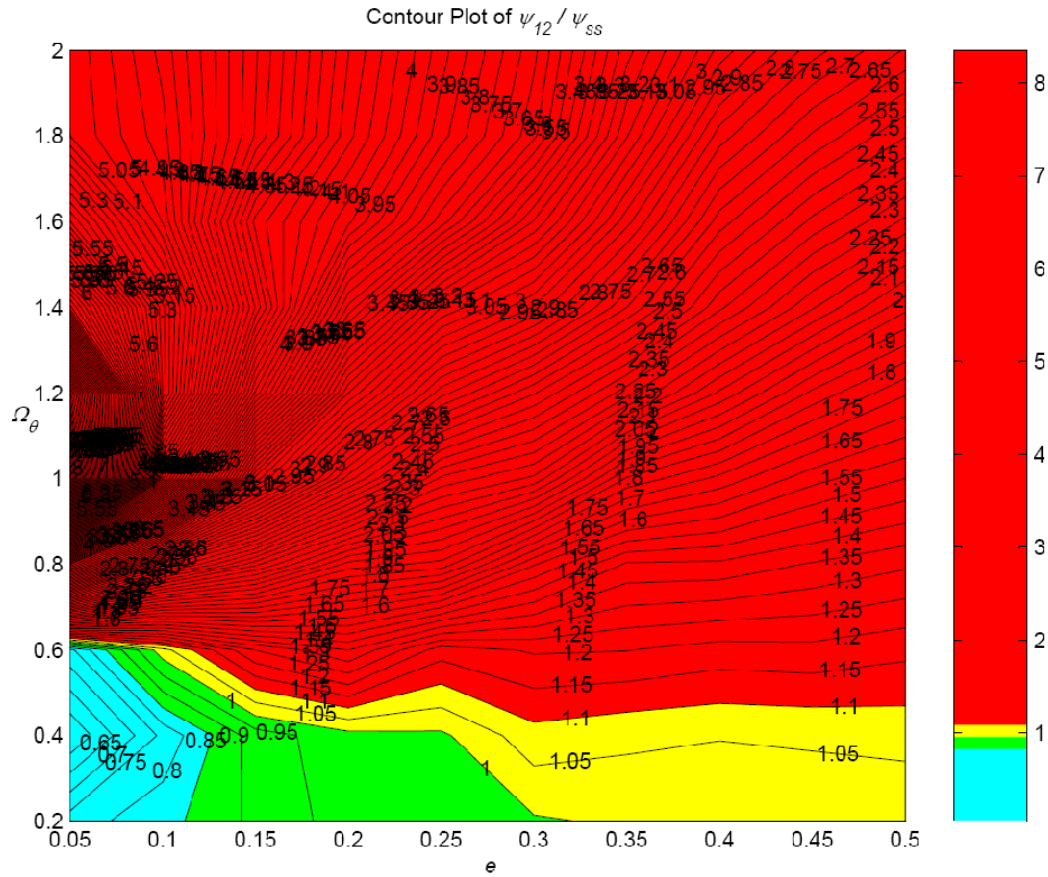


Fig. 5.125 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 5.8.2.7 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre che, per il secondo piano, il single storey che meglio ne coglie il comportamento ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 \\
 k_{ss} &= k_2 \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \frac{\Omega_{\theta 1} + \Omega_{\theta 2}}{2}
 \end{aligned}$$

### 5.8.3 Riassunto

Per chiarezza, si riassume graficamente quanto ottenuto:

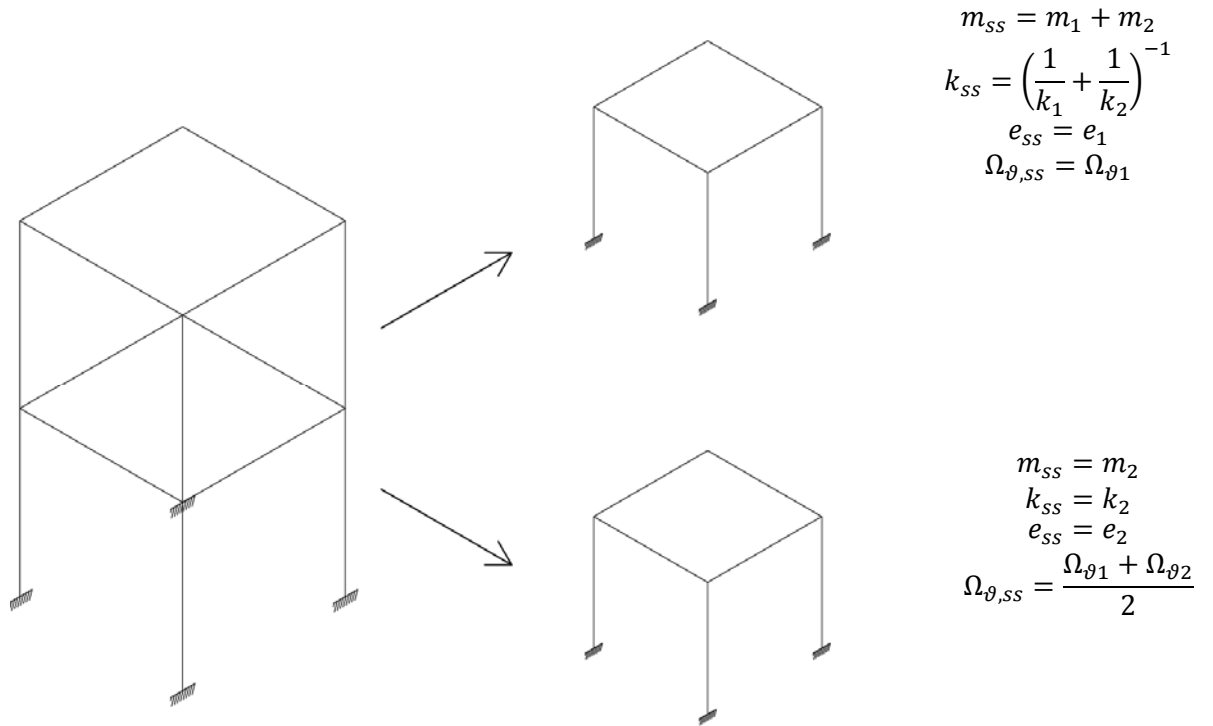


Fig. 5.126 Riassunto dei risultati ottenuti.

### 5.9 Riassunto dei risultati ottenuti

Si riassumono i risultati ottenuti nella tabella 5.2, nella quale sono indicati, per ogni caso di calcolo considerato, i valori di rigidezza, massa, eccentricità e  $\Omega_g$  del single storey che meglio approssima il comportamento dei piani della struttura multi storey.

Caso	Primo Piano				Secondo Piano			
	$k_{ss}$	$m_{ss}$	$e_{ss}$	$\Omega_{\vartheta,ss}$	$k_{ss}$	$m_{ss}$	$e_{ss}$	$\Omega_{\vartheta,ss}$
1	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,02}$
2	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,02}$
3	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,02}$
4	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,02}$
5	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,02}$
6	$k_{01}$	$m_{01}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{02}$	$m_{02}$	$e_{medio}$	$\Omega_{\vartheta,02}$
7	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,02}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,02}$
8	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{02}$	$m_{02}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,medio}$

Tab. 5.2 Risultati dei calcoli effettuati

In questa tabella si individuano:

$$k_{tot} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \quad (5.9)$$

$$m_{tot} = m_1 + m_2 \quad (5.10)$$

$$e_{medio} = \frac{e_1 + e_2}{2} \quad (5.11)$$

$$\Omega_{\vartheta,medio} = \frac{\Omega_{\vartheta,01} + \Omega_{\vartheta,02}}{2} \quad (5.12)$$

### 5.9.1 Piani identici o variazione di massa e rigidezza

Riassumendo, se i due piani della struttura multi storey sono identici, oppure se variano soltanto le caratteristiche di rigidezza e massa, ogni piano della struttura ha un comportamento che può essere rappresentato, con buona approssimazione, da una struttura single storey avente le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned} m_{ss} &= m_1 + m_2 \\ k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\ e_{ss} &= e_1 = e_2 \\ \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 1} = \Omega_{\vartheta 2} \end{aligned}$$

### 5.9.2 Variazione di eccentricità

Nel caso di variazione di eccentricità, invece, il single storey che meglio coglie i comportamenti dei due piani è il seguente:

- Primo Piano

$$\begin{aligned} m_{ss} &= m_1 \\ k_{ss} &= k_1 \\ e_{ss} &= e_1 \\ \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1} \end{aligned}$$

- Secondo Piano

$$\begin{aligned} m_{ss} &= m_2 \\ k_{ss} &= k_2 \\ e_{ss} &= e_{medio} \\ \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2} \end{aligned}$$

### 5.9.3 Variazione di $\Omega_{\theta}$

Nel caso che a variare sia il parametro  $\Omega_{\theta}$ , i single storey per i vari piani sono i seguenti:

#### 5.9.3.1 $\Omega_{\theta,02} \leq \Omega_{\theta,01}$

Per entrambi i piani, il single storey che meglio ne rappresenta il comportamento presenta le seguenti caratteristiche

$$\begin{aligned} m_{ss} &= m_1 + m_2 \\ k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\ e_{ss} &= e_1 = e_2 \\ \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2} \end{aligned}$$



### 5.9.3.2 $\Omega_{\vartheta,01} \leq \Omega_{\vartheta,02}$

In questo caso, il single storey che rappresenta il comportamento dei due piani è differente; in particolare:

- Primo Piano

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 = e_2 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 1}
 \end{aligned}$$

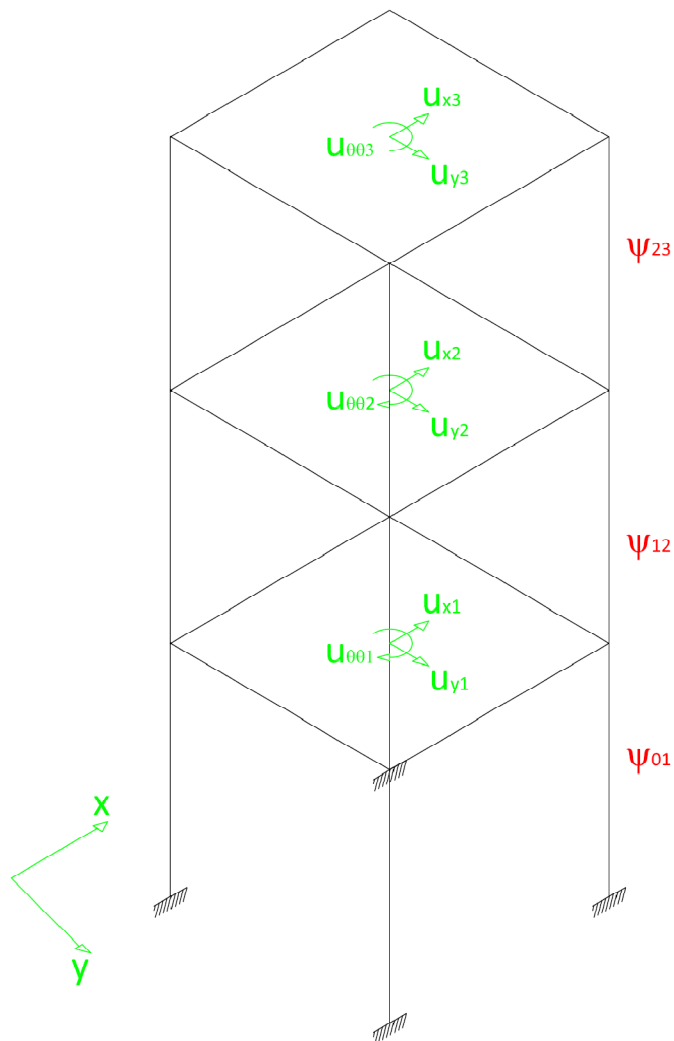
- Secondo Piano

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 \\
 k_{ss} &= k_2 \\
 e_{ss} &= e_2 = e_1 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta medio}
 \end{aligned}$$

## CAPITOLO 6

### Struttura a tre piani

In questo capitolo verranno presentate le analisi effettuate su una struttura multi storey a tre piani, rappresentata in Fig. 6.1.



**Fig. 6.1** *Struttura single storey a tre piani.*

I diversi casi di calcolo sono elencati nella tabella 6.1:

Caso	$R_{e,2}$	$R_{m,2}$	$R_{k,2}$	$R_{\Omega_{\theta},2}$	$R_{e,3}$	$R_{m,3}$	$R_{k,3}$	$R_{\Omega_{\theta},3}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	0.5	1	1	1	0.3	1
3	1	1	2	1	1	1	3	1
4	1	0.5	1	1	1	0.3	1	1
5	1	2	1	1	1	3	1	1
6	1	1	1	0.5	1	1	1	0.3
7	1	1	1	2	1	1	1	3

**Tab. 6.1** Casi di calcolo per la struttura multi storey a tre piani

## 6.1 Caso 1: Piani identici

Il primo caso consiste in una struttura composta da tre piani di caratteristiche identiche; si considerano, infatti, i rapporti  $R_{e,i}$ ,  $R_{m,i}$ ,  $R_{k,i}$ ,  $R_{\Omega_{\theta},i}$  con valore unitario:

$$\begin{aligned} R_{e,2} = R_{m,2} = R_{k,2} = R_{\Omega_{\theta},2} = 1 \\ R_{e,3} = R_{m,3} = R_{k,3} = R_{\Omega_{\theta},3} = 1 \end{aligned} \quad (6.1)$$

### 6.1.1 Primo Piano

Per cercare di rappresentare al meglio le caratteristiche del primo piano della struttura multi storey, verranno considerati due single storey equivalenti: il primo avente le caratteristiche del primo piano, il secondo con rigidezza e massa dell'intera struttura.

6.1.1.1 Caratteristiche del primo piano

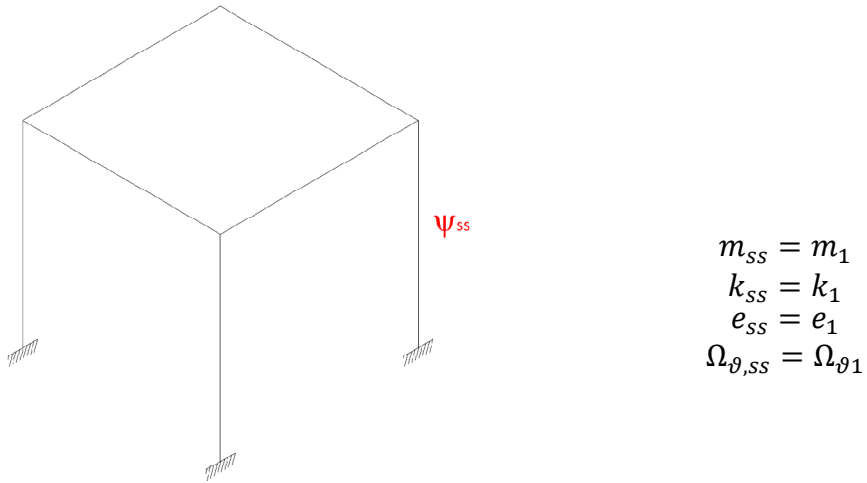


Fig. 6.2 Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

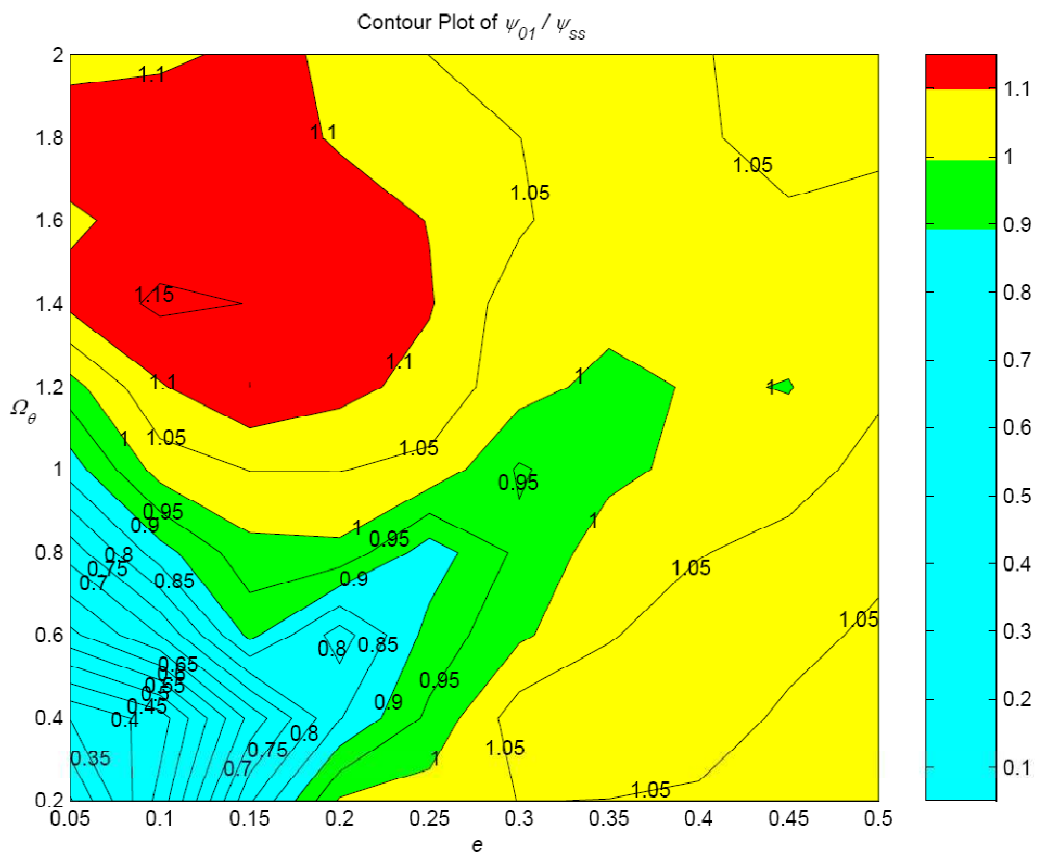
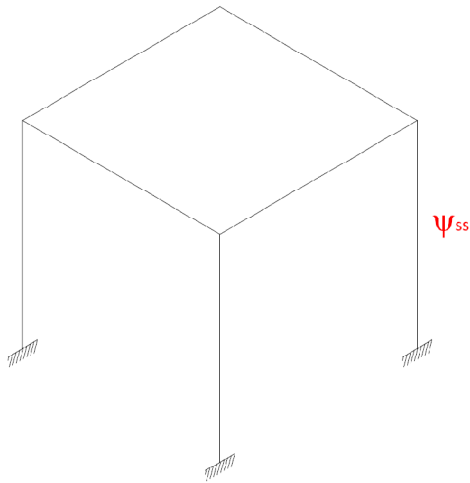


Fig. 6.3 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

6.1.1.2 Caratteristiche totali



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_1$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 1}$$

Fig. 6.4 Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

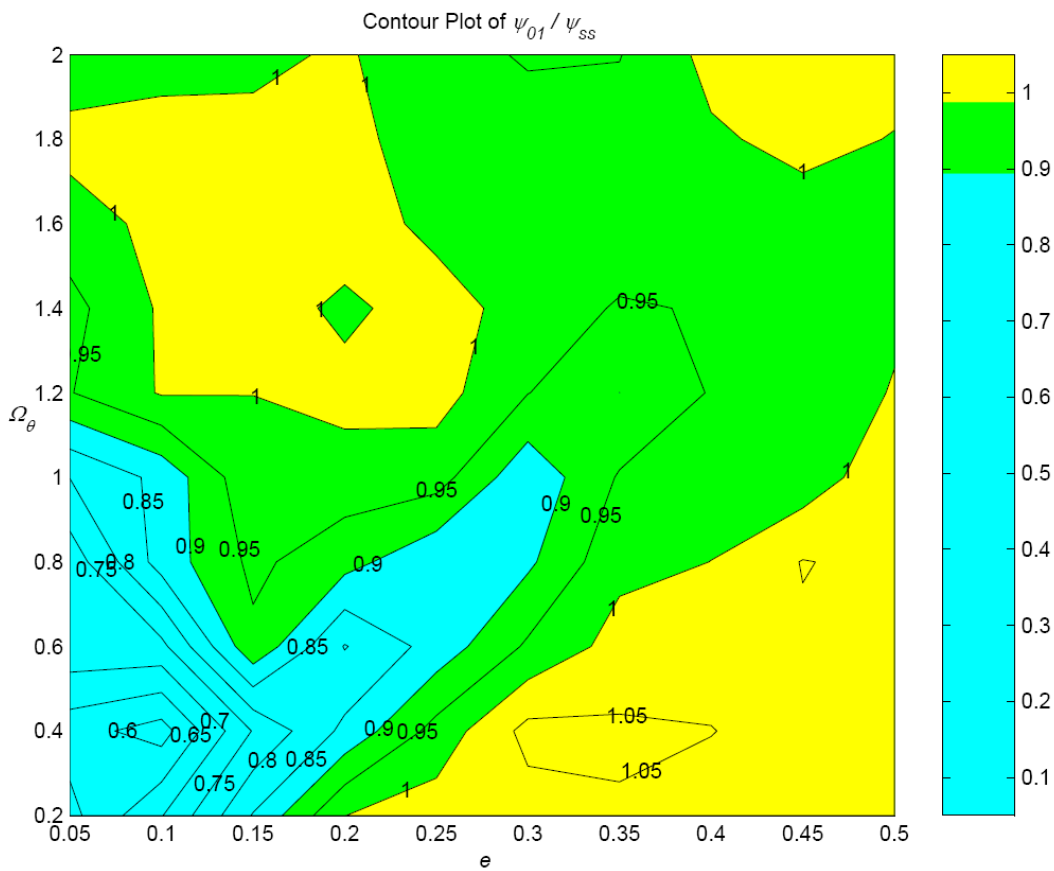


Fig. 6.5 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 6.1.1.3 Riassunto

Dai grafici ottenuti risulta evidente come, per il primo piano, il single storey che meglio ne coglie il comportamento sia quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  rimane, per buona parte del dominio considerato, inferiore all'unità; inoltre, nelle porzioni di dominio in cui il valore unitario viene superato, la differenza tra i due parametri rimane comunque inferiore al 5%.

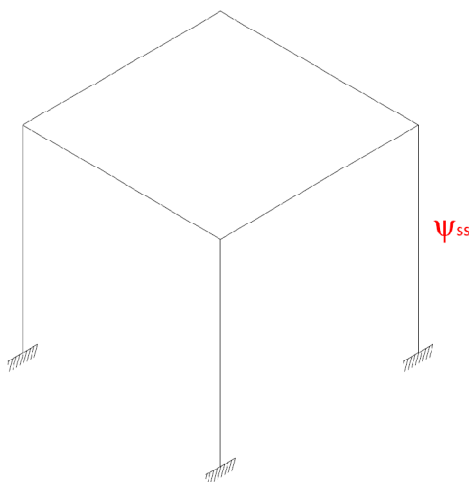
Si può quindi affermare che, in questo caso, il single storey che meglio rappresenta il comportamento del primo piano della struttura multi storey ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned} m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\ k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\ e_{ss} &= e_1 \\ \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1} \end{aligned}$$

### 6.1.2 Secondo Piano

Per il secondo della struttura multi storey verranno considerati tre single storey equivalenti: il primo avente le caratteristiche del secondo piano, il secondo con rigidezza e massa dell'intera struttura e il terzo avente le caratteristiche di massa e rigidezza pari alla somma di quelle relative al secondo e terzo piano.

#### 6.1.2.1 Caratteristiche del secondo piano



$$\begin{aligned} m_{ss} &= m_2 \\ k_{ss} &= k_2 \\ e_{ss} &= e_2 \\ \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2} \end{aligned}$$

**Fig. 5.6** *Struttura single storey equivalente.*

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

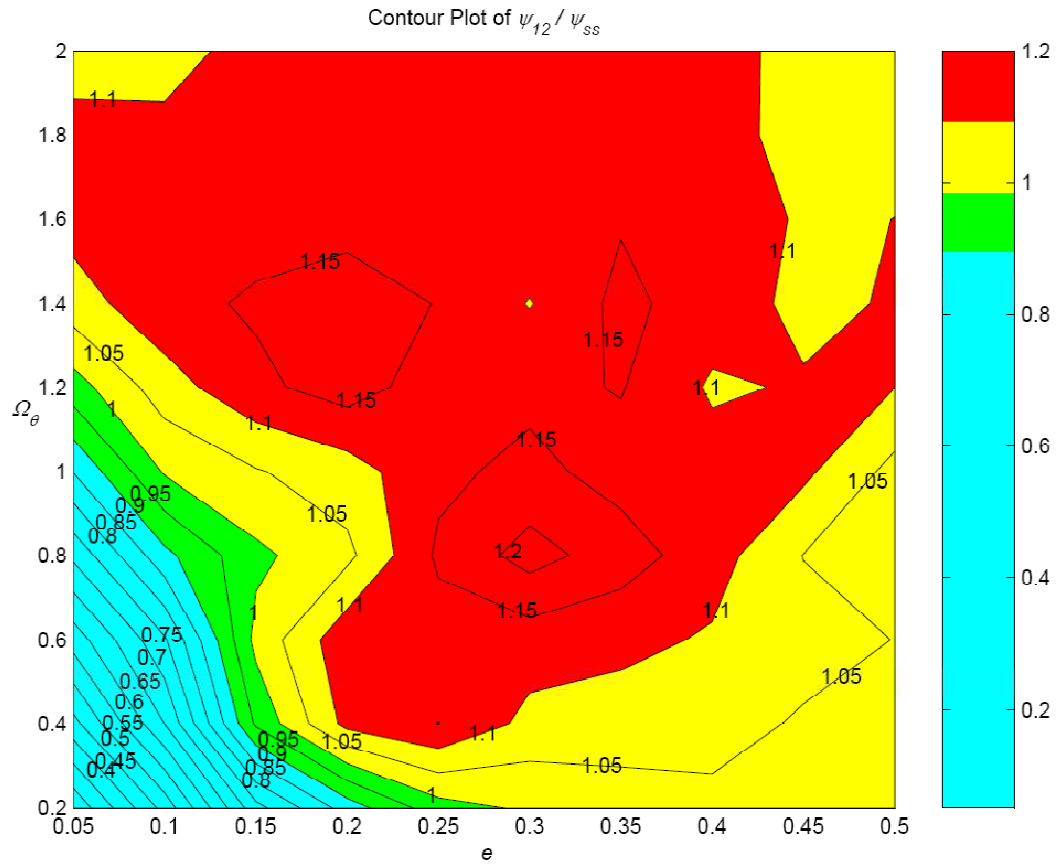
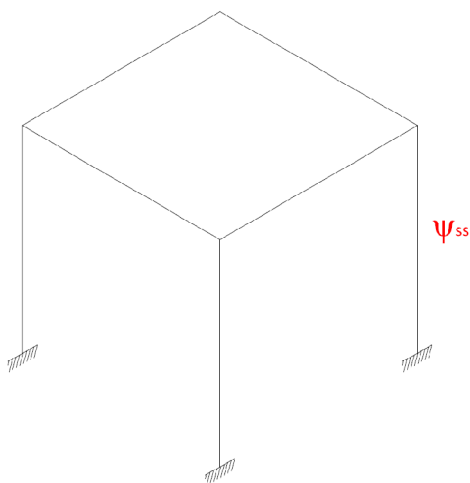


Fig. 6.7 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 6.1.2.2 Caratteristiche totali



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 2}$$

Fig. 6.8 Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

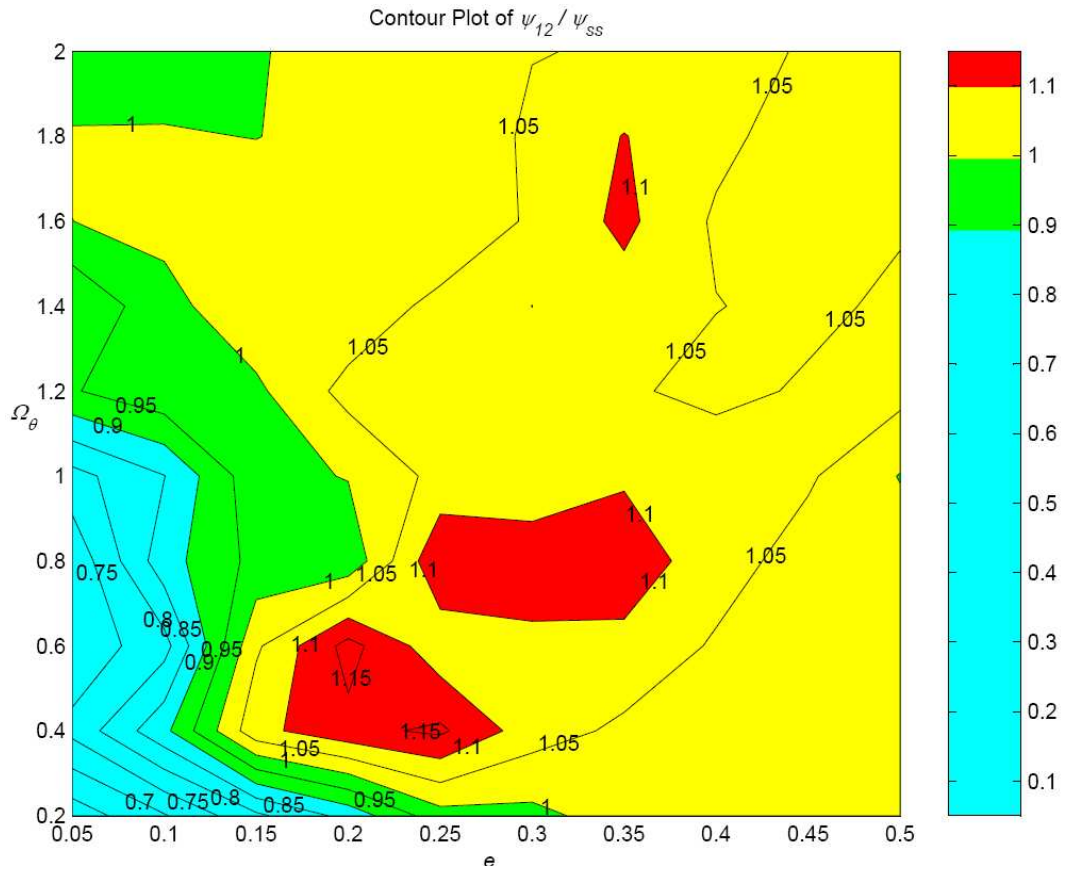
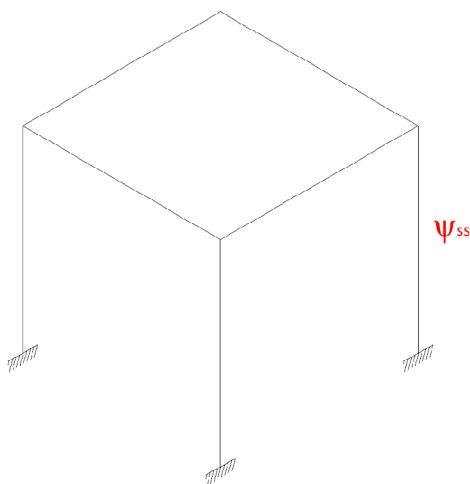


Fig. 6.9 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 6.1.2.3 Caratteristiche del secondo e del terzo piano



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.10 Struttura single storey equivalente.



I risultati in termini del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{SS}$  per questa struttura sono i seguenti:

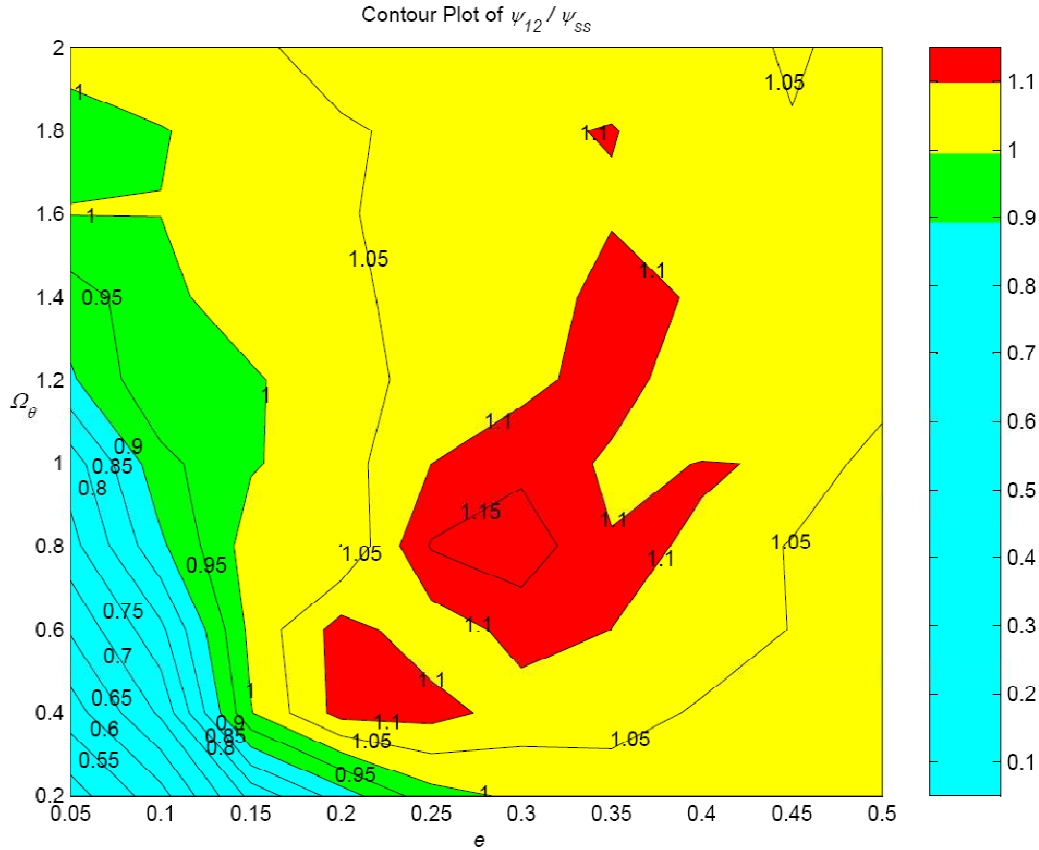
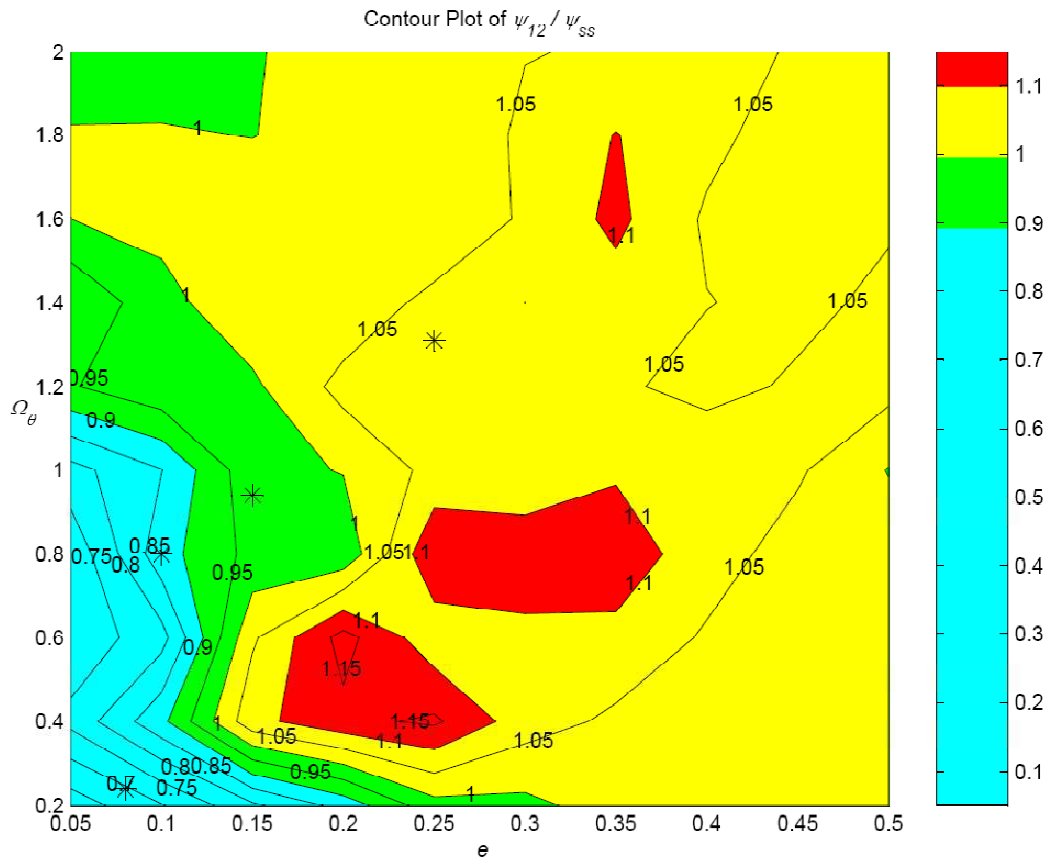


Fig. 6.11 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{SS}$ .

#### 6.1.2.4 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre come il single storey che meglio rappresenta il comportamento del secondo piano della struttura multi storey sia, anche in questo caso, quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{SS}$  rimane inferiore all'unità per una porzione più estesa del dominio. Vi sono tuttavia delle zone in cui la differenza tra i due parametri è superiore al 10%; come però dimostrato in Fig. 6.12, in cui sono indicate le coppie  $e$  ed  $\Omega_\theta$  proprie delle strutture reali analizzate nel capitolo 2, le zone dove si verifica questo superamento non sono tipiche di tali strutture reali. Per questo motivo si ritiene accettabile la rappresentazione scelta.



**Fig. 6.12** Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  con evidenziati i valori di  $e$  ed  $\Omega_{\theta}$  per strutture reali.

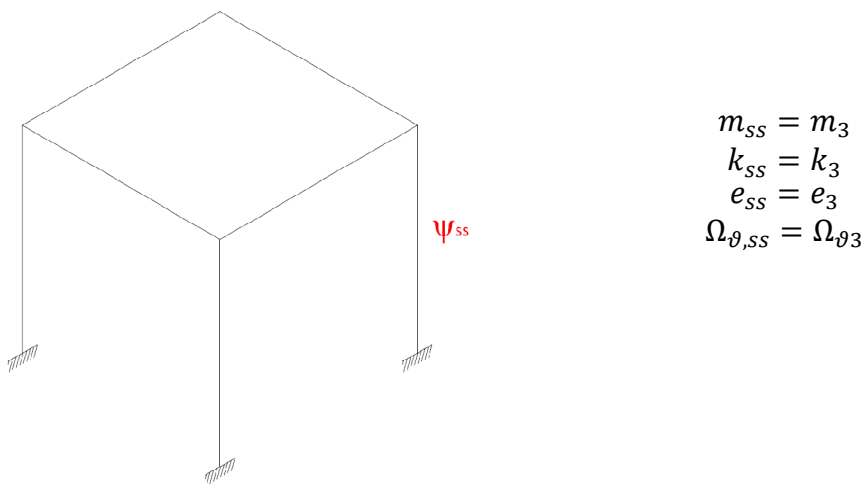
Come si può vedere, le considerazioni fatte sono corrette, per cui, in conclusione, anche per il secondo piano la struttura single storey che meglio approssima il comportamento del secondo piano della struttura multi storey ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

### 6.1.3 Terzo Piano

Per il terzo della struttura multi storey verranno considerati quattro single storey equivalenti: il primo avente le caratteristiche del terzo piano, il secondo con rigidezza dell'intera struttura e massa del terzo piano, il terzo avente le caratteristiche di massa pari a quelle dell'intera struttura e la rigidezza del piano, l'ultima avente le caratteristiche totali dell'intera struttura

#### 6.1.3.1 Caratteristiche del terzo piano



**Fig. 6.13** *Struttura single storey equivalente.*

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

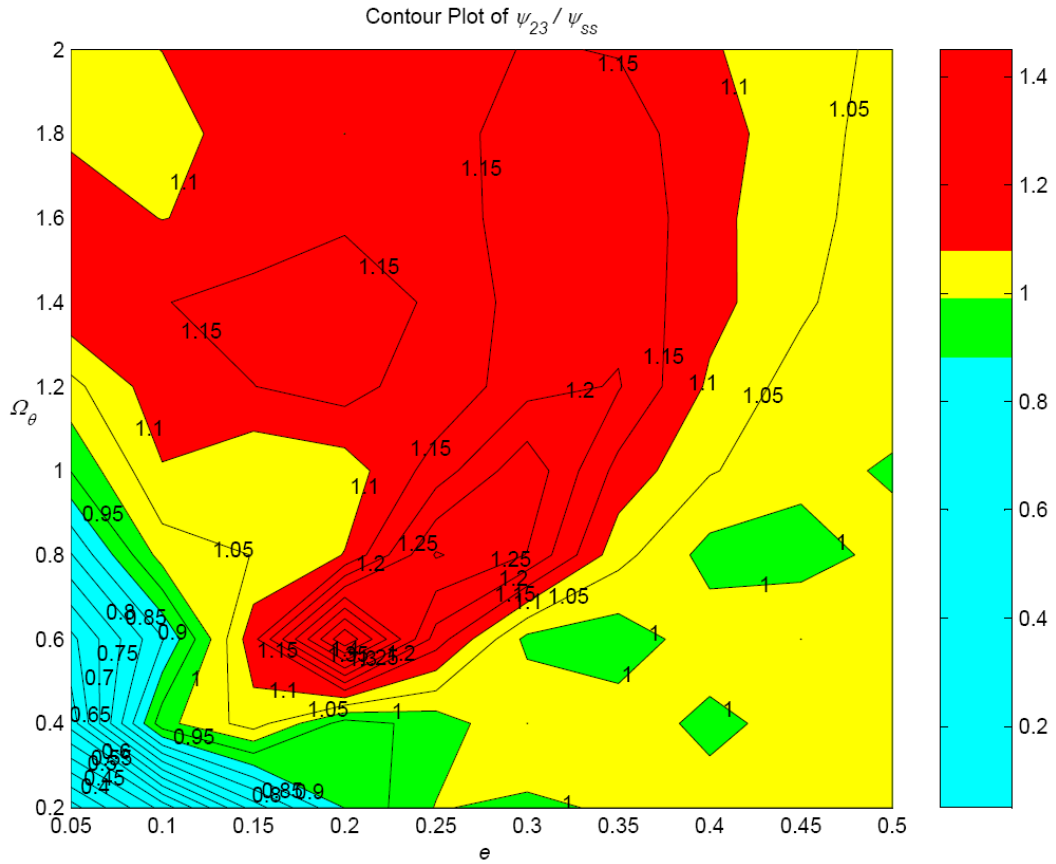
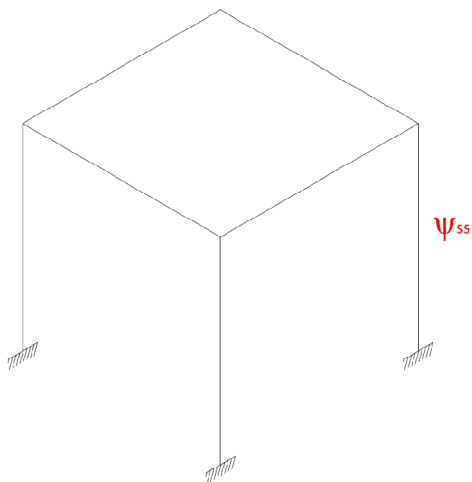


Fig. 6.14 Rapporto  $\psi_{23} / \psi_{ss}$ .

### 6.1.3.2 Caratteristiche di rigidità totali



$$m_{ss} = m_3$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_3$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 3}$$

Fig. 6.15 Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

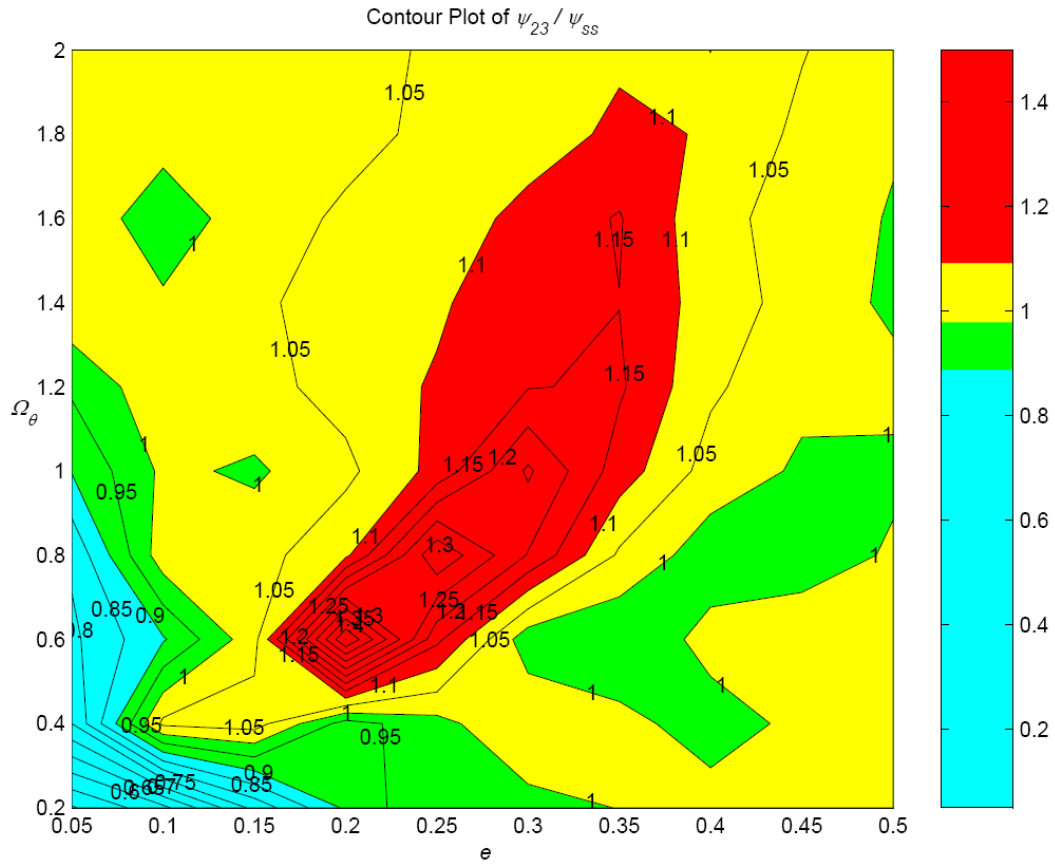
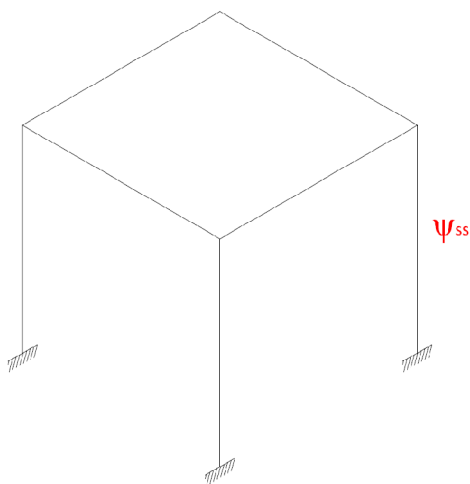


Fig. 6.16 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 6.1.3.3 Caratteristiche di massa totali



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= k_3 \\
 e_{ss} &= e_3 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 3}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.17 Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

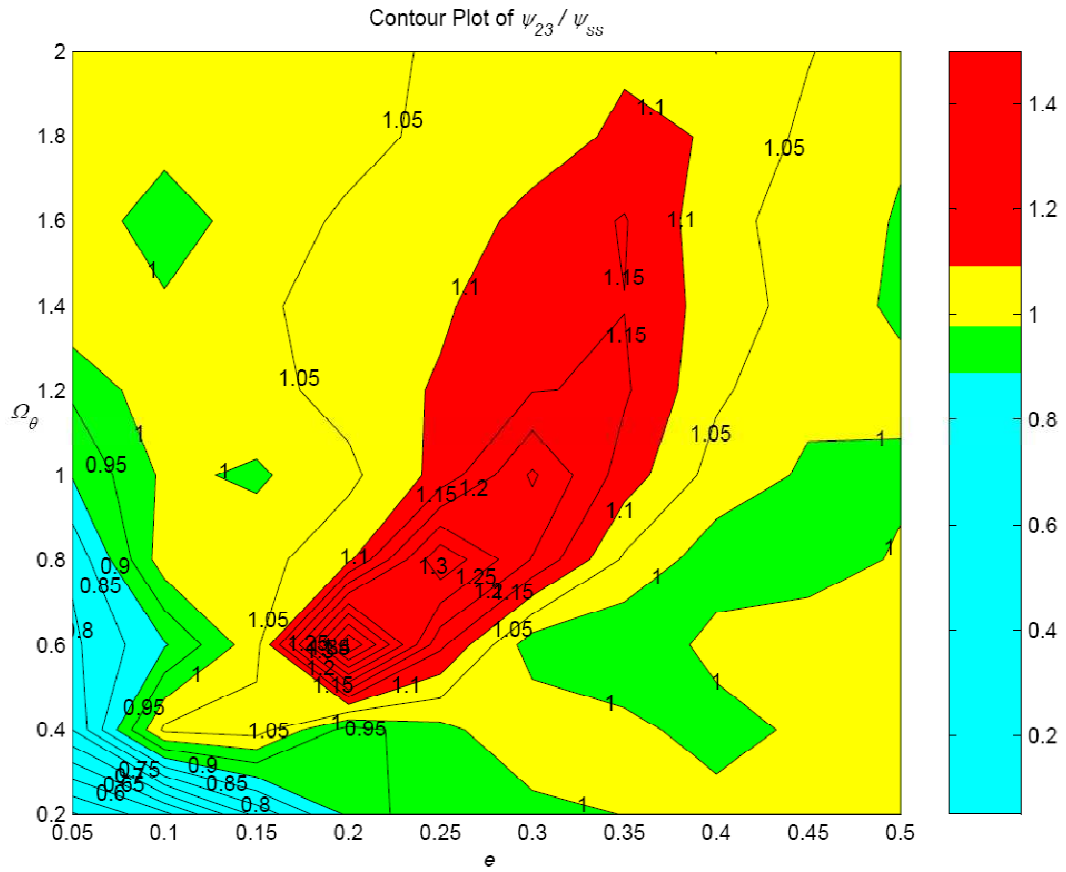
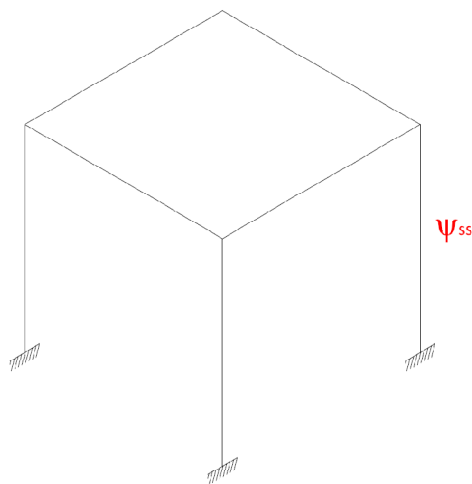


Fig. 6.18 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 6.1.3.4 Caratteristiche totali



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.19 Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

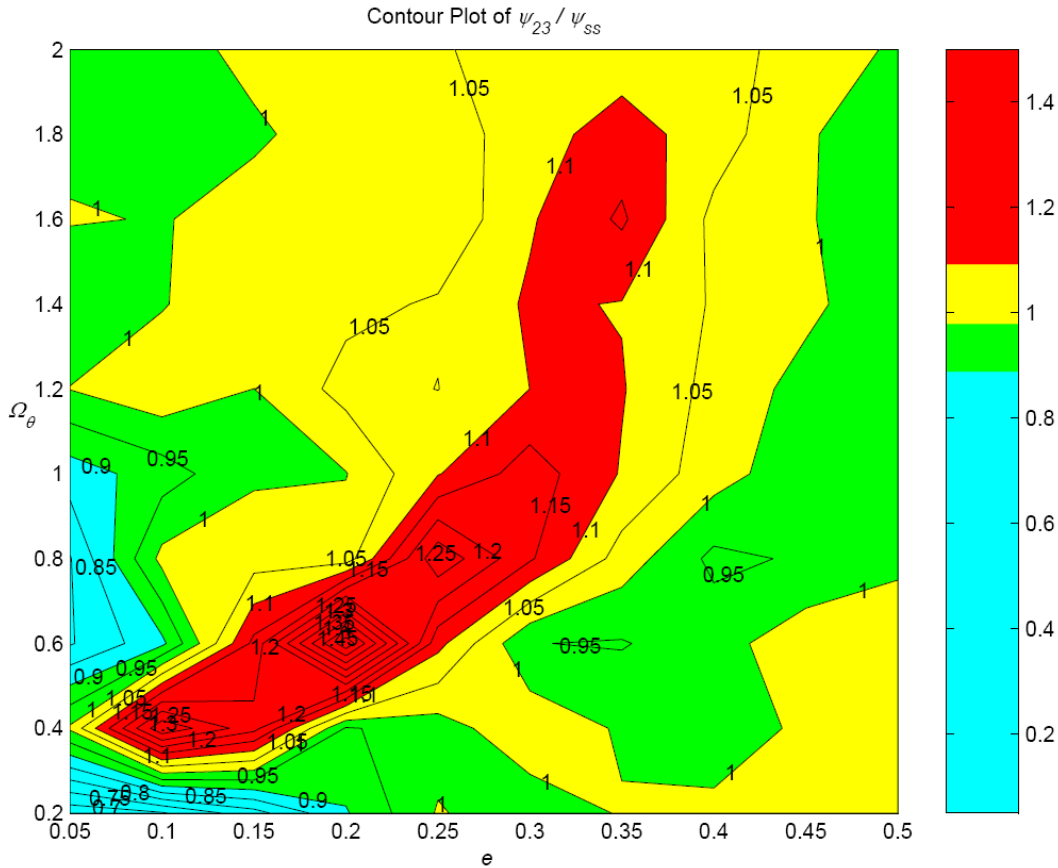


Fig. 6.20 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 6.1.3.5 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre come il single storey che meglio rappresenta il comportamento del terzo piano della struttura multi storey sia, anche in questo caso, quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  rimane inferiore all'unità per una porzione più estesa del dominio. Vi sono tuttavia anche qui delle zone in cui la differenza tra i due parametri è di molto superiore al 10%; tuttavia, le considerazioni fatte per il secondo piano sono valide anche in questo caso, per cui si può ritenere accettabile la scelta di rappresentare il comportamento del terzo piano con un single storey avente le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_3 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 3}
 \end{aligned}$$

### 6.1.4 Riassunto

Per chiarezza, si riassume graficamente quanto ottenuto:

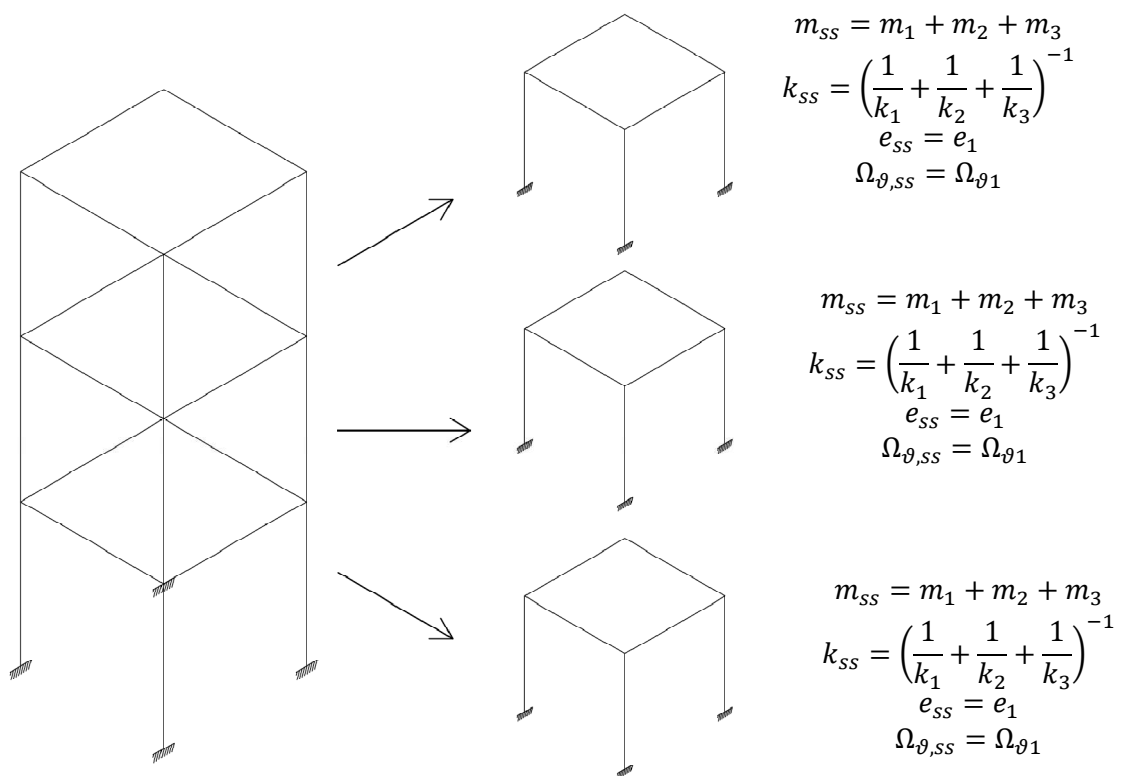


Fig. 6.21 Riassunto dei risultati ottenuti.

### 6.2 Caso 2: Diminuzione di rigidezza

Il secondo caso prevede di diminuire la rigidezza del secondo e del terzo piano; si considerano, infatti, i seguenti valori per i rapporti  $R_{e,i}$ ,  $R_{m,i}$ ,  $R_{k,i}$ ,  $R_{\Omega_{\theta},i}$ :

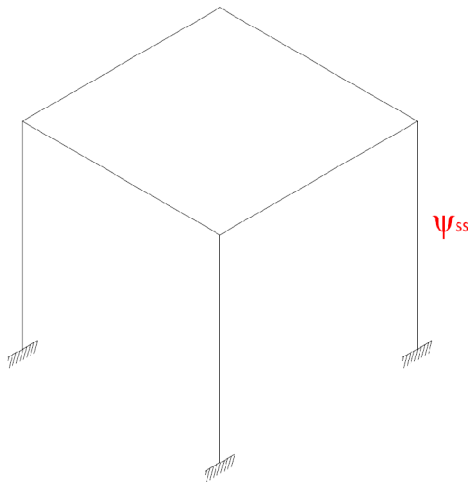


$$\begin{aligned}
 R_{e,2} &= R_{m,2} = R_{\Omega_{\vartheta},2} = 1 \\
 R_{k,2} &= 0.5 \\
 R_{e,3} &= R_{m,3} = R_{\Omega_{\vartheta},3} = 1 \\
 R_{k,3} &= 0.3
 \end{aligned}
 \tag{6.2}$$

## 6.2.1 Primo Piano

In questo caso si sono considerati due single storey equivalenti: il primo avente le caratteristiche del primo piano, il secondo con rigidità e massa dell'intera struttura.

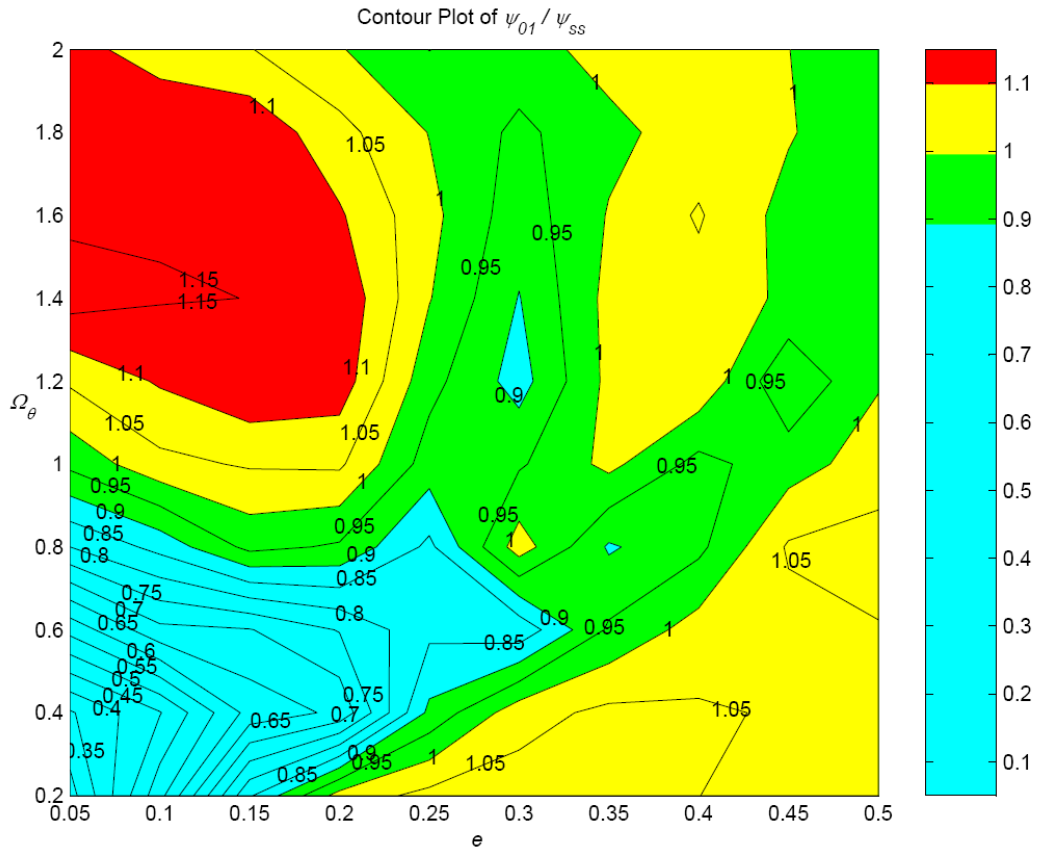
### 6.2.1.1 Caratteristiche del primo piano



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 \\
 k_{ss} &= k_1 \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 1}
 \end{aligned}$$

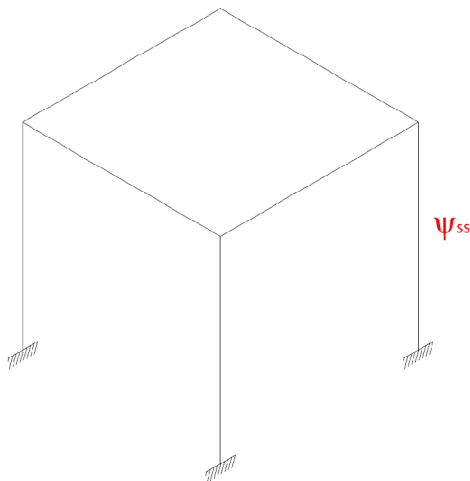
**Fig. 6.22** *Struttura single storey equivalente.*

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:



**Fig. 6.23** Rapporto  $\psi_{01} / \psi_{ss}$ .

### 6.2.1.2 Caratteristiche totali



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 1}
 \end{aligned}$$

**Fig. 6.24** Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:

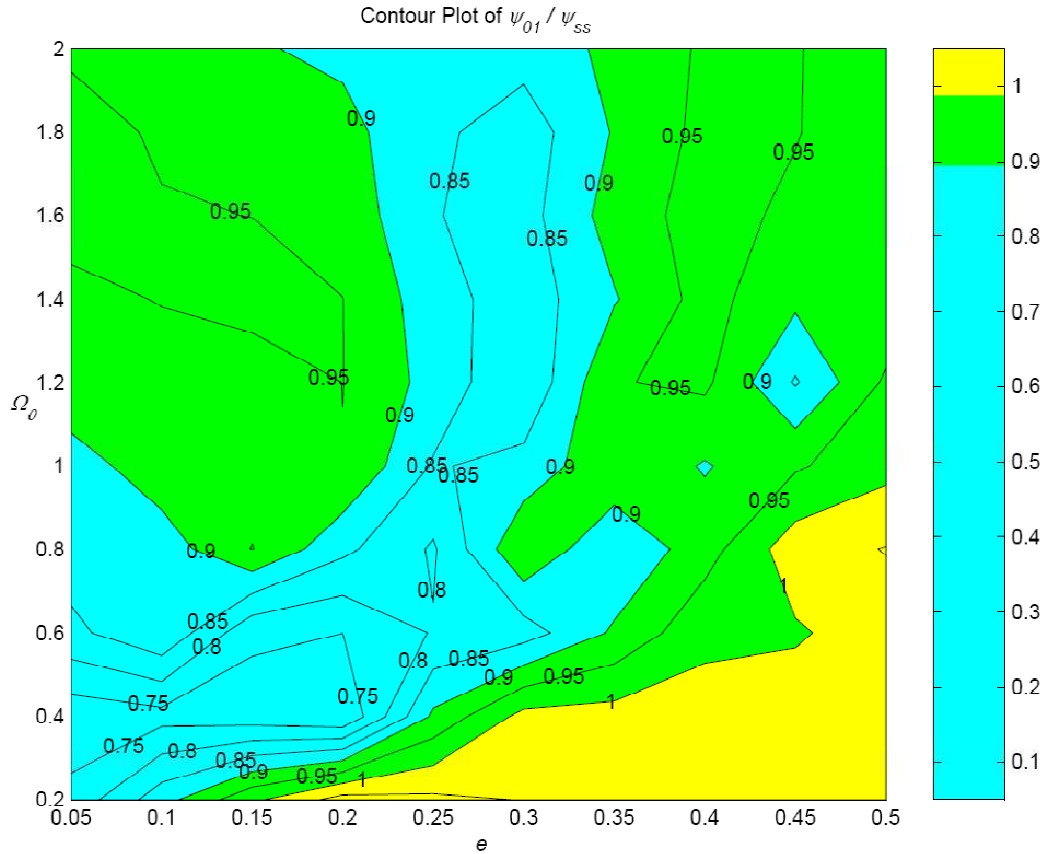


Fig. 6.25 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 6.2.1.3 Riassunto

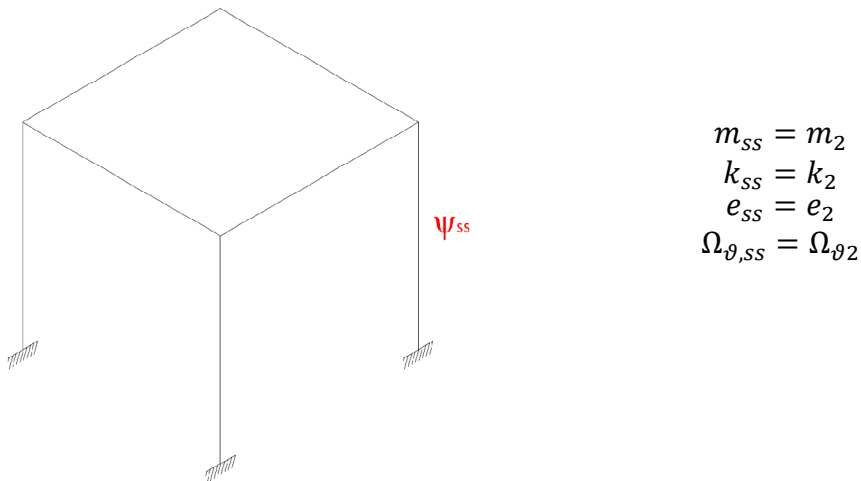
Osservando i grafici ottenuti si può dedurre come il single storey che meglio rappresenta il comportamento del primo piano della struttura multi storey sia, quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  rimane inferiore all'unità per una porzione più estesa del dominio, e le zone in cui si ha un rapporto maggiore di uno presentano una differenza tra  $\psi_{01}$  e  $\psi_{ss}$  inferiore al 5%. Il single storey cercato, quindi, ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 1}
 \end{aligned}$$

## 6.2.2 Secondo Piano

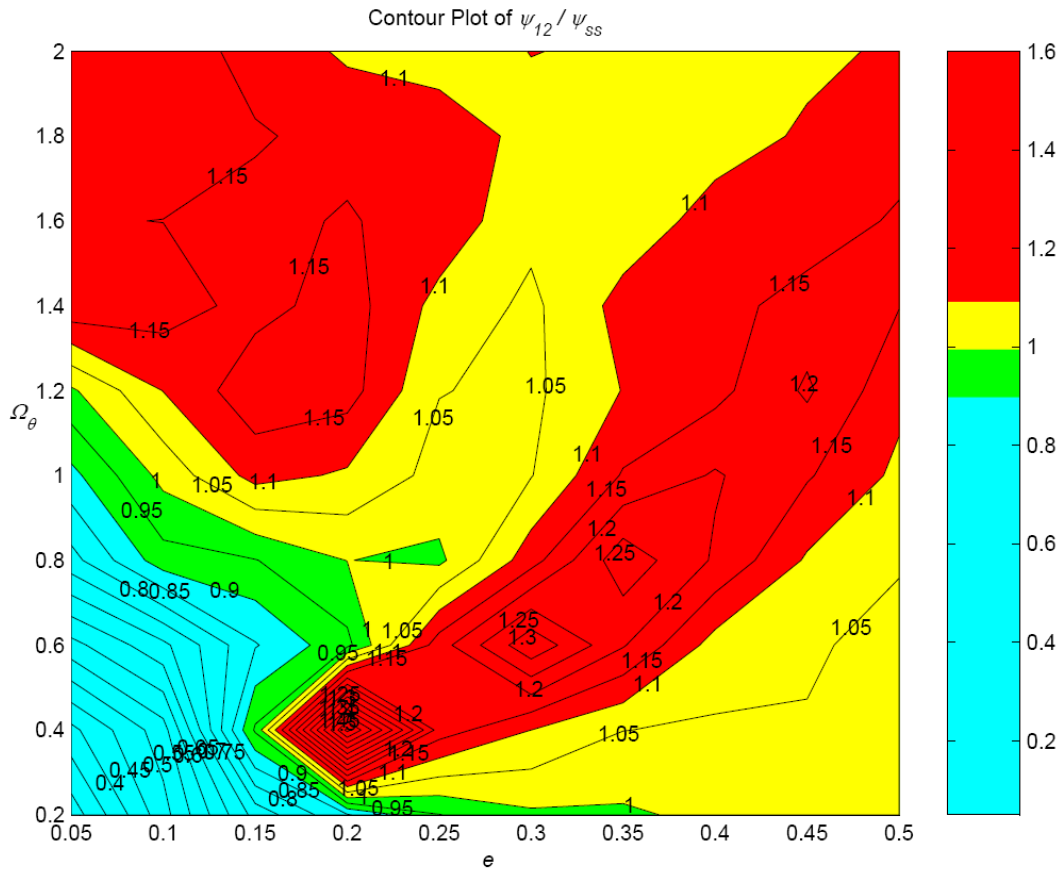
I single storey considerati per tentare di cogliere il comportamento del secondo piano sono sette: il primo avente le caratteristiche del secondo piano, il secondo avente la massa del secondo piano e la rigidezza pari alla somma delle rigidezze del secondo e terzo piano, il terzo caratterizzato dalla massa del secondo piano e da una rigidezza media, il quarto avente la massa del secondo piano e la rigidezza totale, il quinto con massa e rigidezza degli ultimi due piani, il sesto con massa del secondo e terzo piano e rigidezza totale, l'ultimo single storey caratterizzato da massa e rigidezze totali.

### 6.2.2.1 Caratteristiche del secondo piano



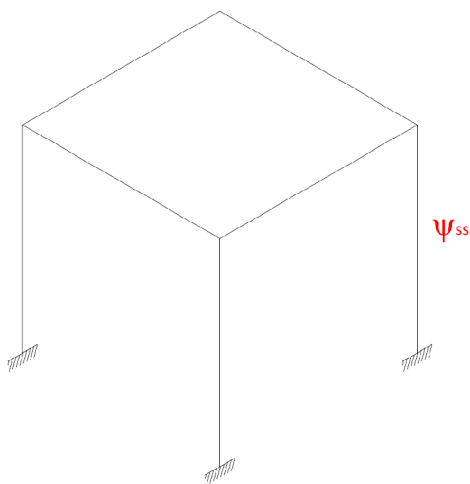
**Fig. 6.26** *Struttura single storey equivalente.*

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:



**Fig. 6.27** Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

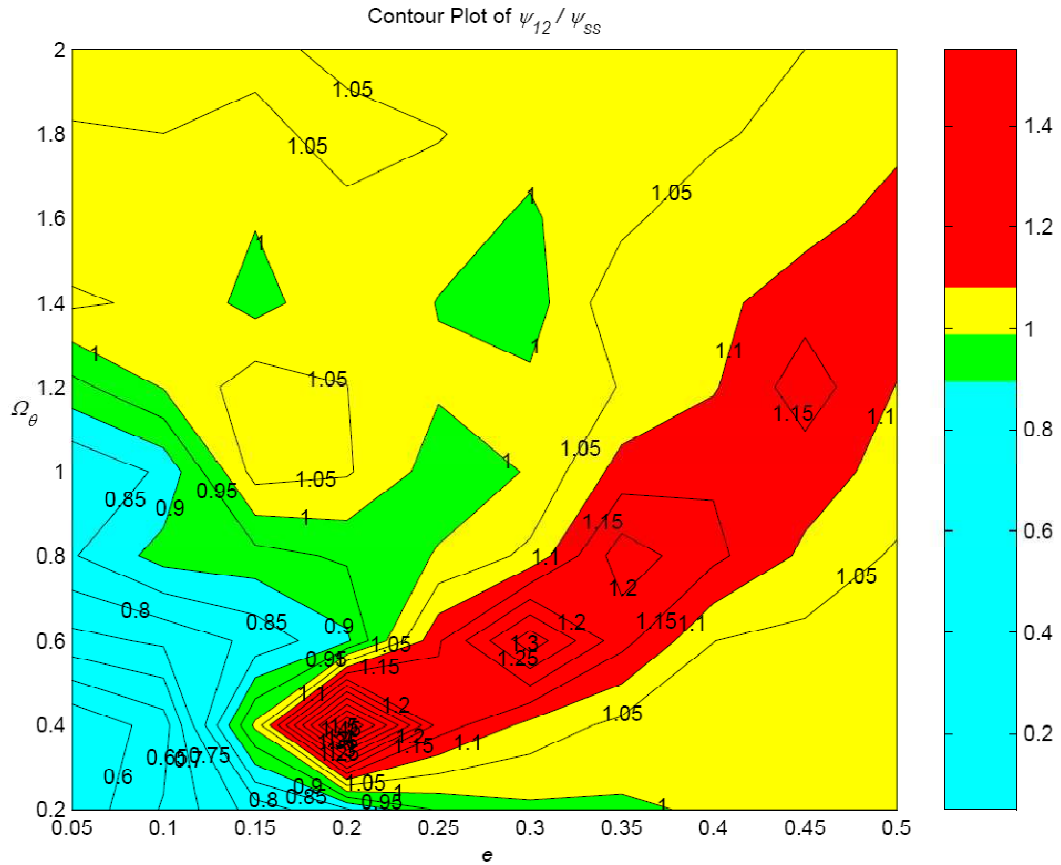
### 6.2.2.2 Caratteristiche di rigidità del secondo e terzo piano



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 2}
 \end{aligned}$$

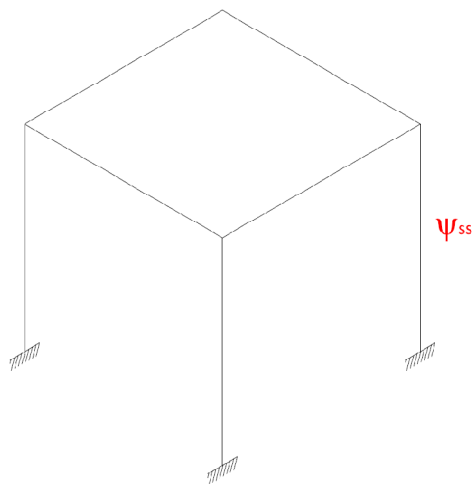
**Fig. 6.28** Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:



**Fig. 6.29** Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 6.2.2.3 Caratteristiche di rigidità medie



$$m_{ss} = m_2$$

$$k_{ss} = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3}$$

$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 2}$$

**Fig. 6.30** Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:

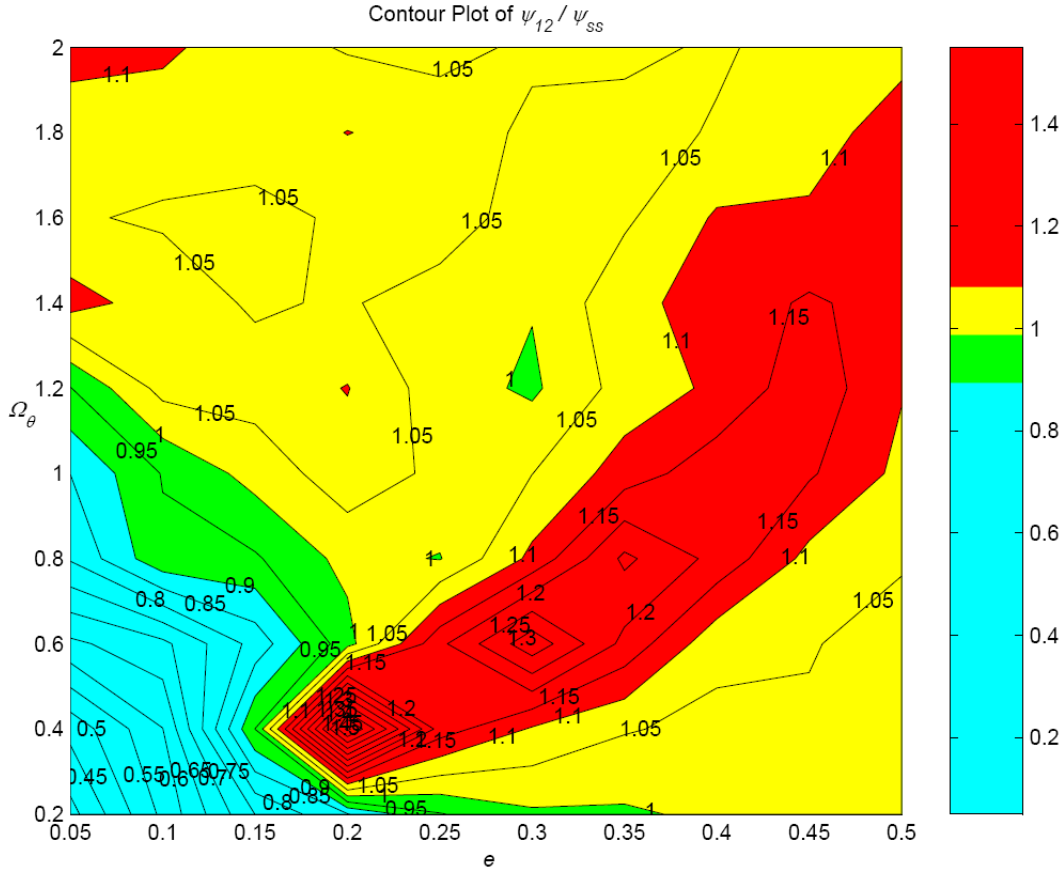
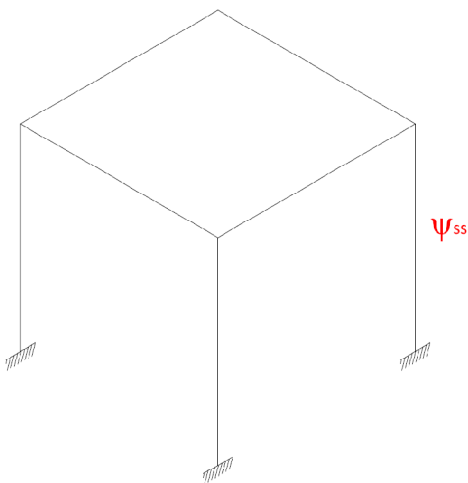


Fig. 6.31 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

#### 6.2.2.4 Caratteristiche di rigidità totali



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.32 Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{SS}$  sono i seguenti:

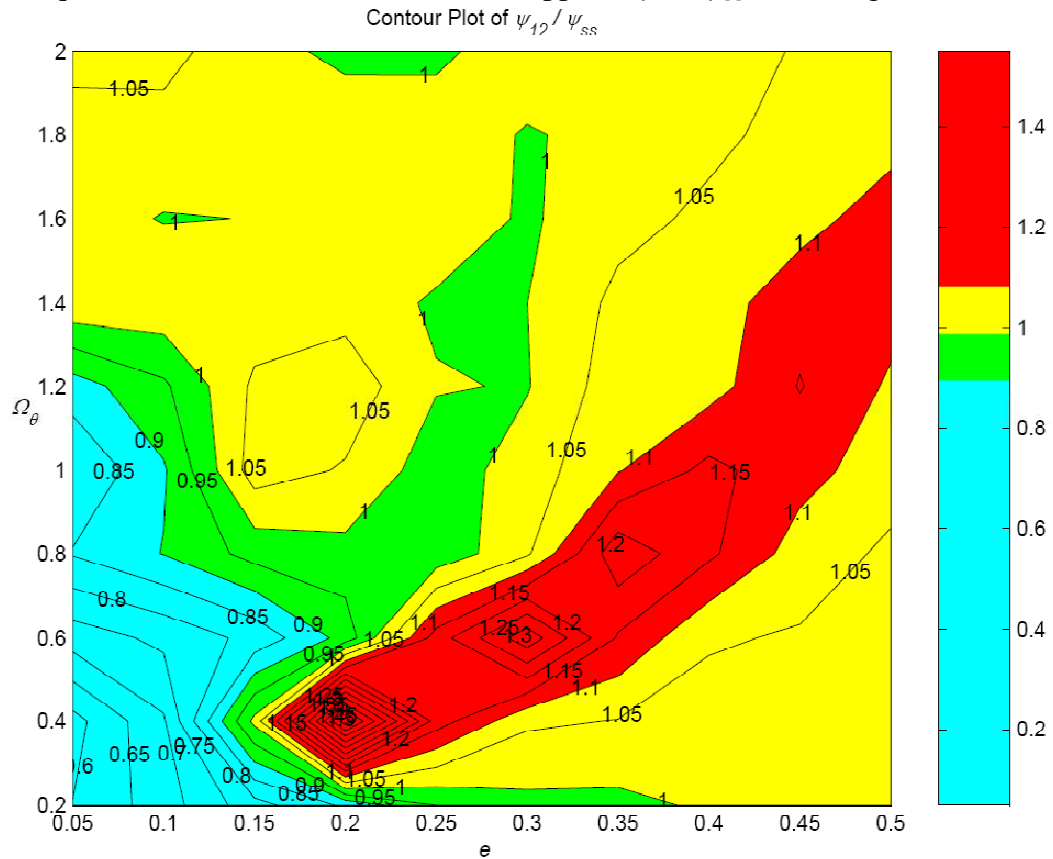
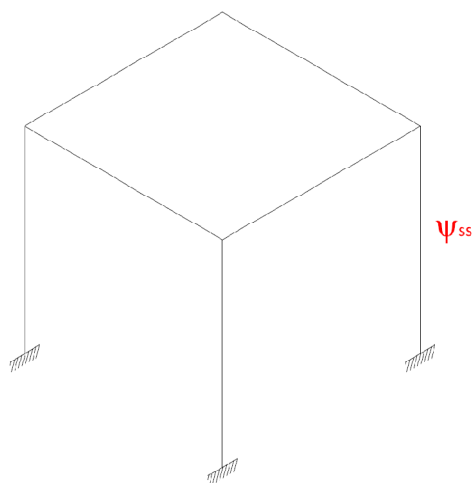


Fig. 6.33 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{SS}$ .

### 6.2.2.5 Caratteristiche di massa e rigidezza del secondo e terzo piano



$$\begin{aligned}
 m_{SS} &= m_2 + m_3 \\
 k_{SS} &= \left( \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{SS} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,SS} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.34 Struttura single storey equivalente.



Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:

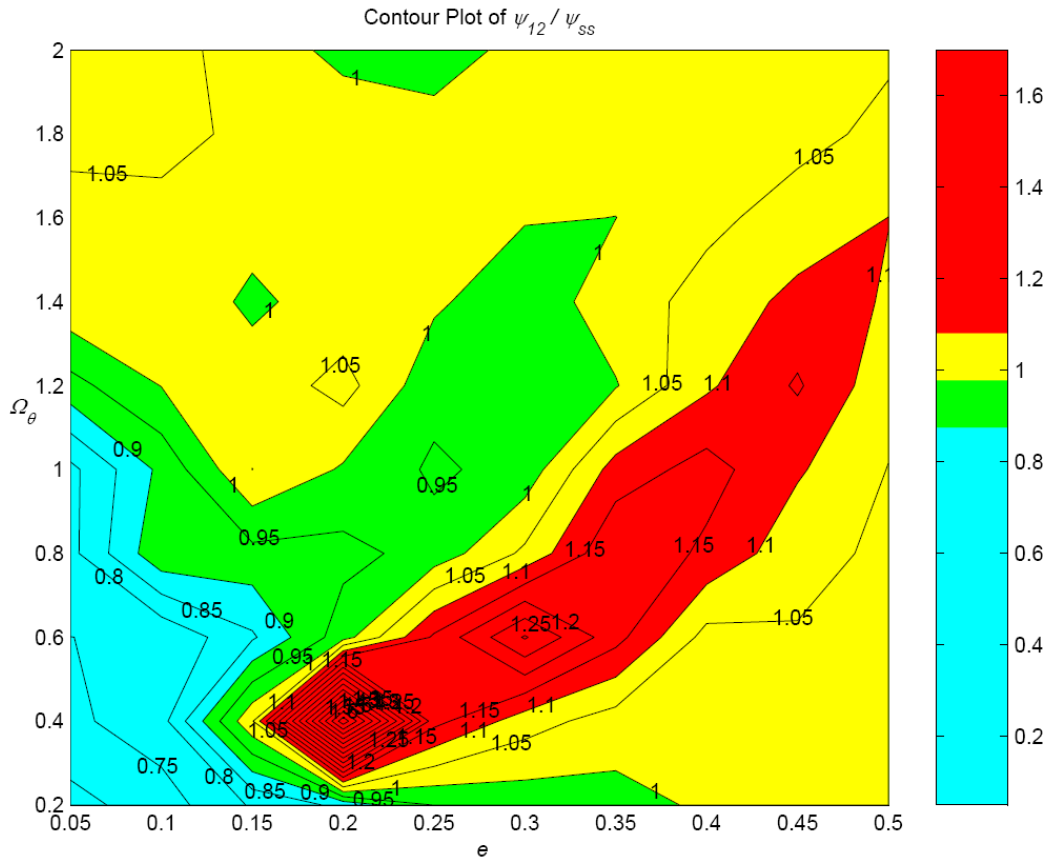
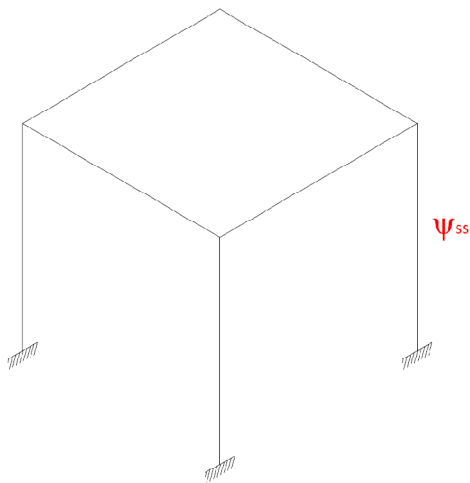


Fig. 6.35 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 6.2.2.6 Caratteristiche di massa e del secondo e terzo piano e rigidezza totale



$$m_{ss} = m_2 + m_3$$

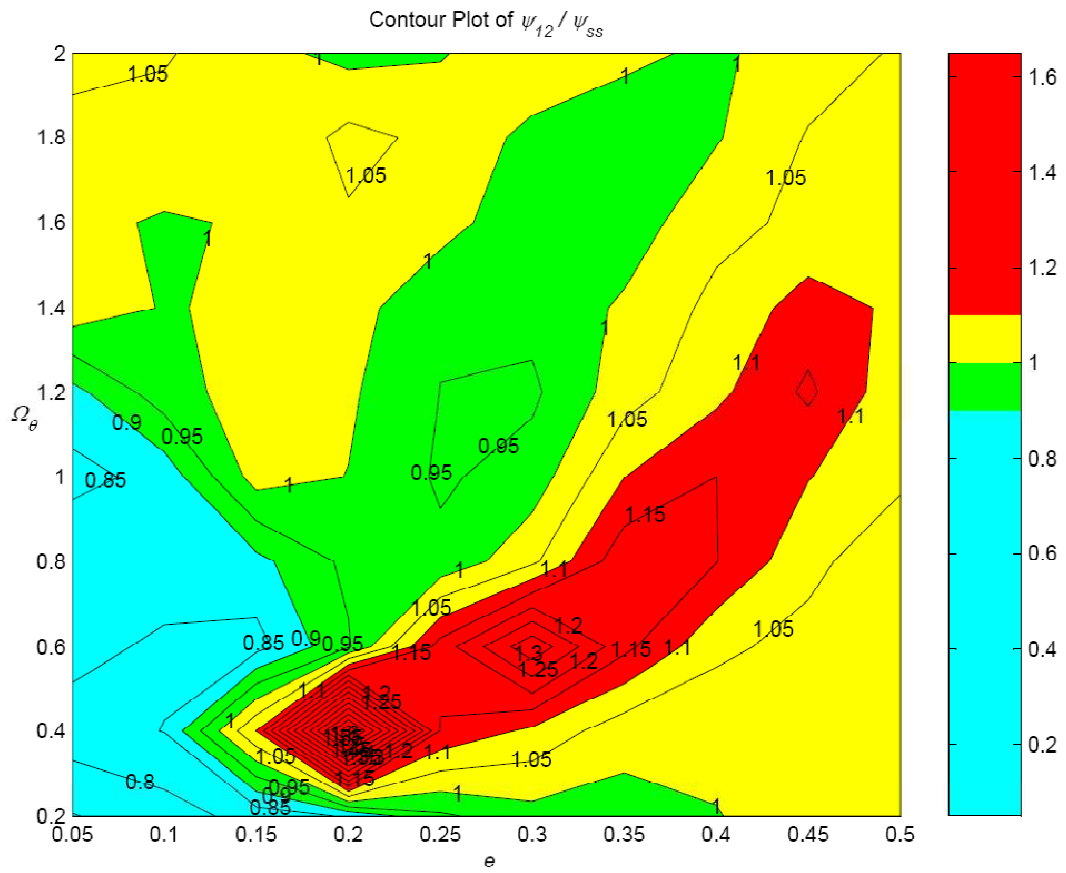
$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 2}$$

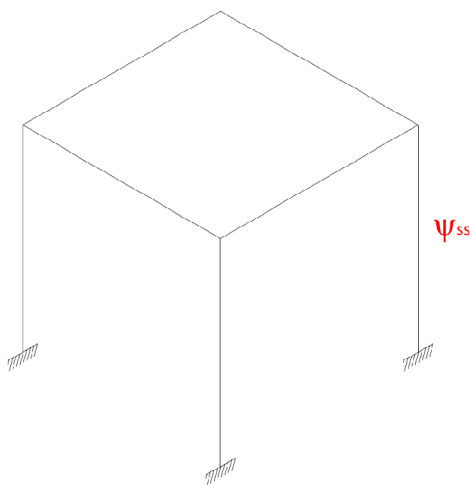
Fig. 6.36 Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{SS}$  sono i seguenti:



**Fig. 6.37** Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{SS}$ .

### 6.2.2.7 Caratteristiche totali



$$m_{SS} = m_1 + m_2 + m_3$$

$$k_{SS} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{SS} = e_2$$

$$\Omega_{\theta,SS} = \Omega_{\theta 2}$$

**Fig. 6.38** Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:

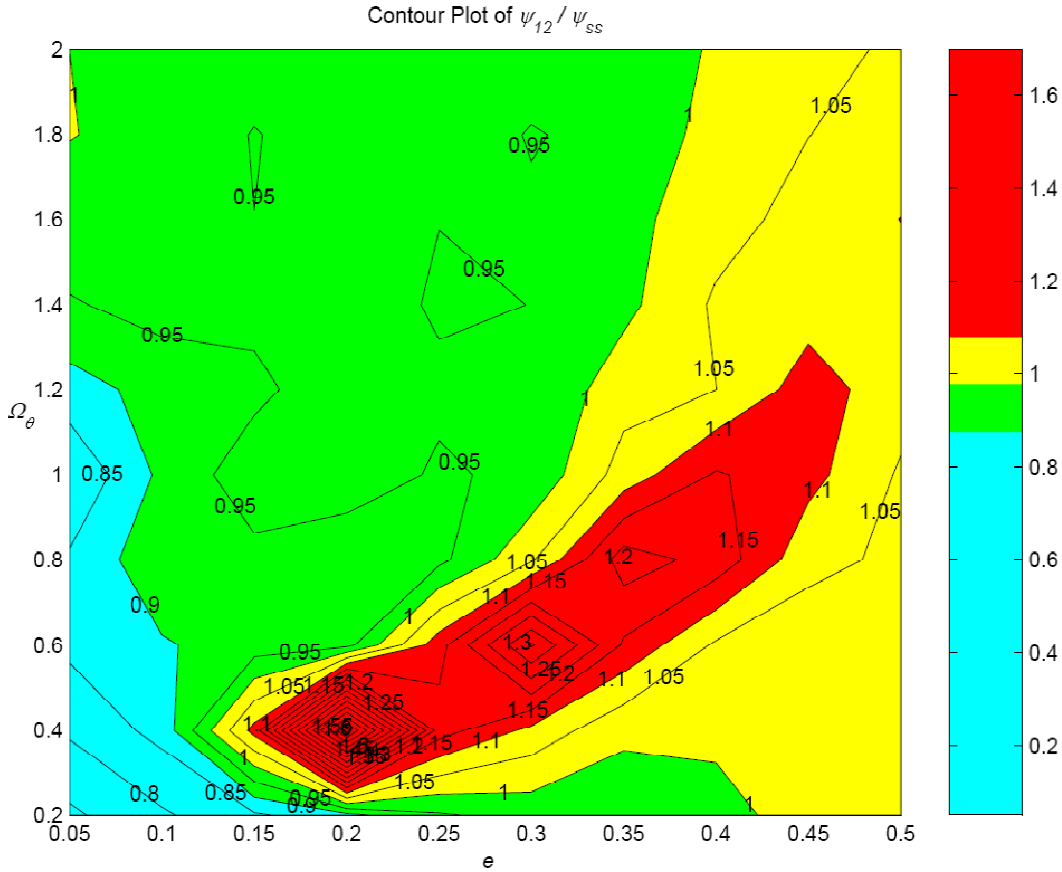
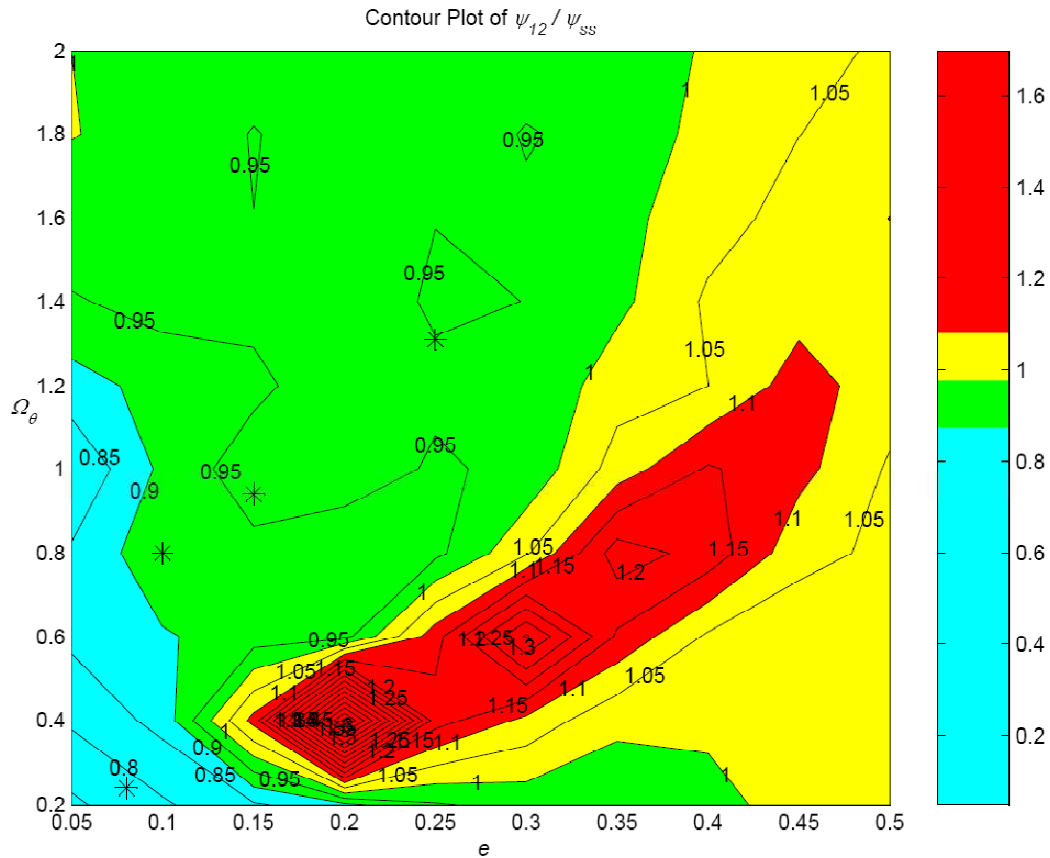


Fig. 6.39 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 6.2.2.8 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti, e ricordando le considerazioni fatte anche per il caso precedente, si può dedurre come il single storey che meglio rappresenta il comportamento del secondo piano della struttura multi storey sia, come per il primo piano, quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  rimane pari od inferiore all'unità per una porzione più estesa del dominio, e le zone in cui si ha una differenza tra  $\psi_{12}$  e  $\psi_{ss}$  superiore al 10% non sono rappresentative di strutture reali, come indicato in Fig. 6.40.



**Fig. 6.40** Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  con evidenziati i valori di  $e$  ed  $\Omega_{\theta}$  per strutture reali.

Il single storey cercato, quindi, ha le seguenti caratteristiche:

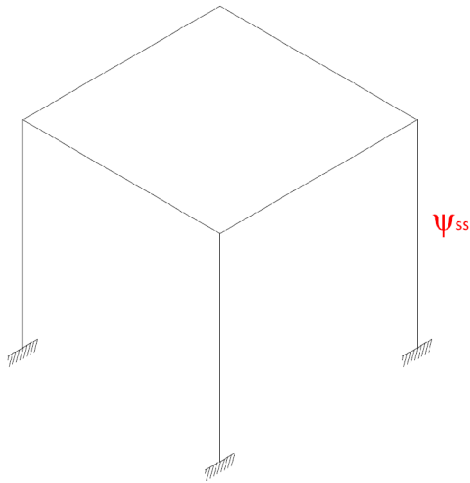
$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

### 6.2.3 Terzo Piano

I single storey considerati per tentare di cogliere il comportamento del terzo piano sono, come per il secondo piano, sette: il primo avente le caratteristiche del terzo piano, il secondo avente la massa del terzo piano e la rigidezza pari alla somma delle rigidezze del secondo e terzo piano, il terzo caratterizzato dalla massa del terzo piano e da una rigidezza media, il quarto avente la massa del terzo piano e la

rigidezza totale, il quinto con massa e rigidezza degli ultimi due piani, il sesto con massa del secondo e terzo piano e rigidezza totale, l'ultimo single storey caratterizzato da massa e rigidezza totali.

### 6.2.3.1 Caratteristiche del terzo piano



$$\begin{aligned} m_{ss} &= m_3 \\ k_{ss} &= k_3 \\ e_{ss} &= e_3 \\ \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 3} \end{aligned}$$

**Fig. 6.41** *Struttura single storey equivalente.*

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:

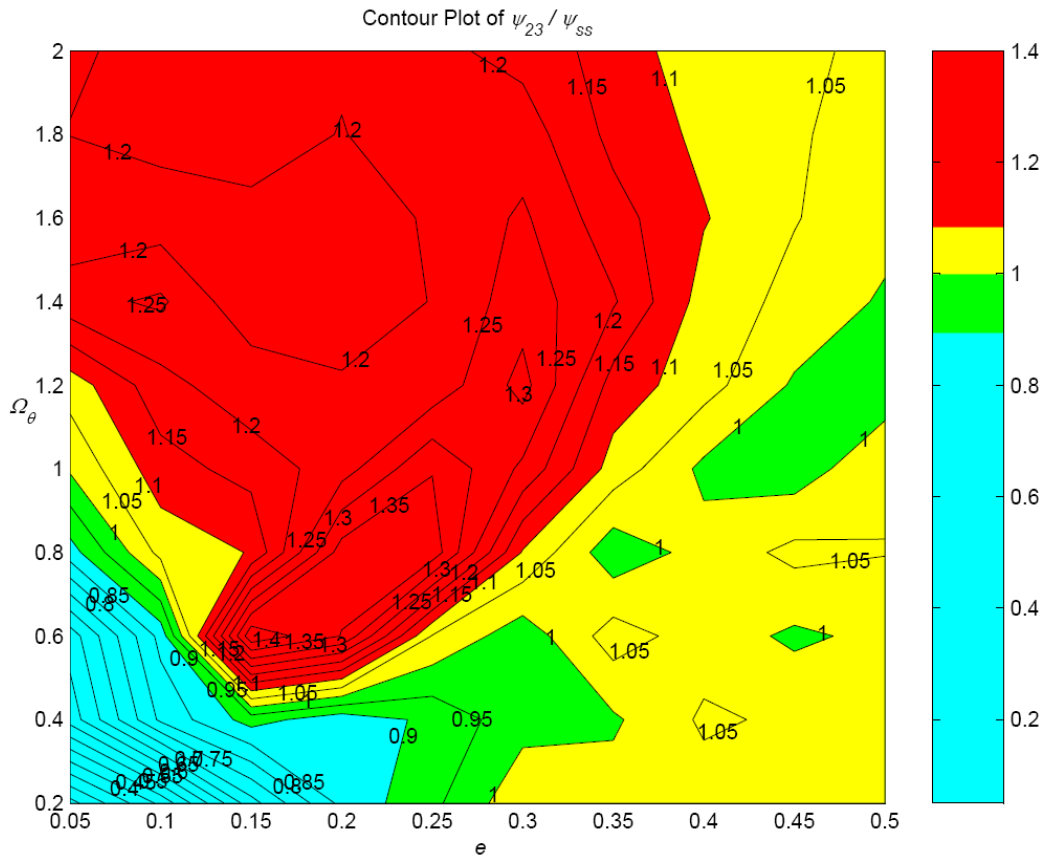


Fig. 6.42 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 6.2.3.2 Caratteristiche di rigidità del secondo e terzo piano

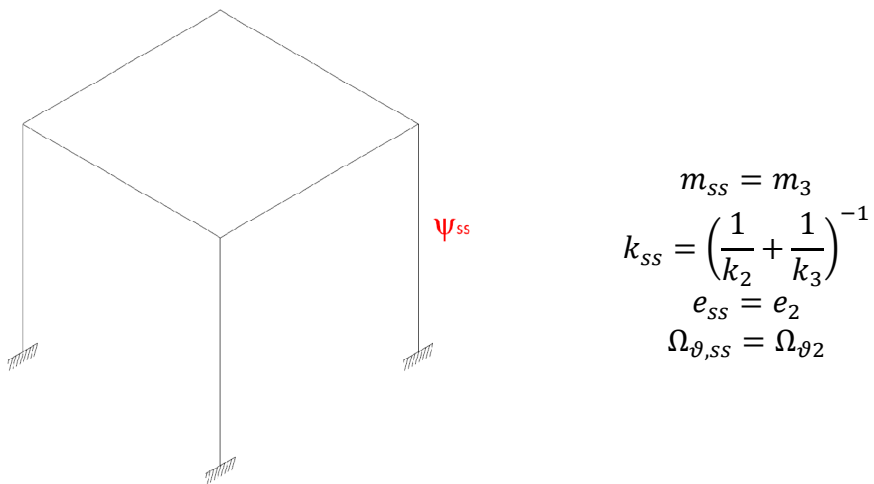


Fig. 6.43 Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:

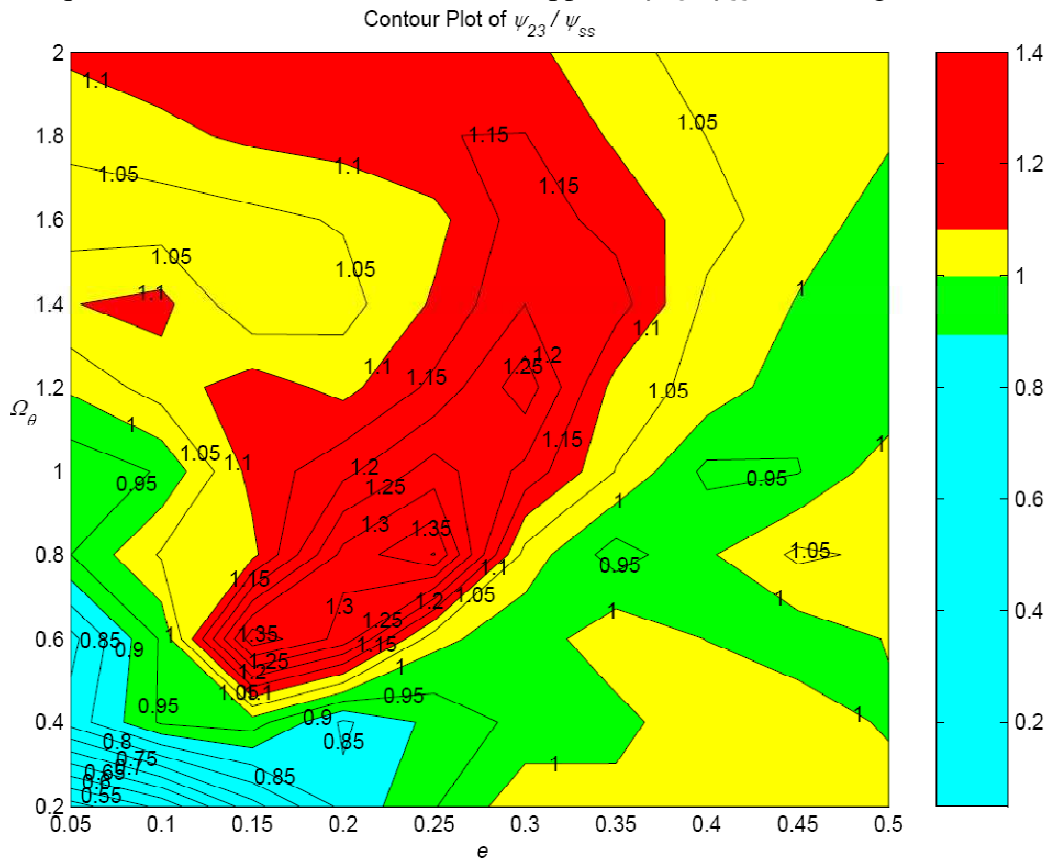
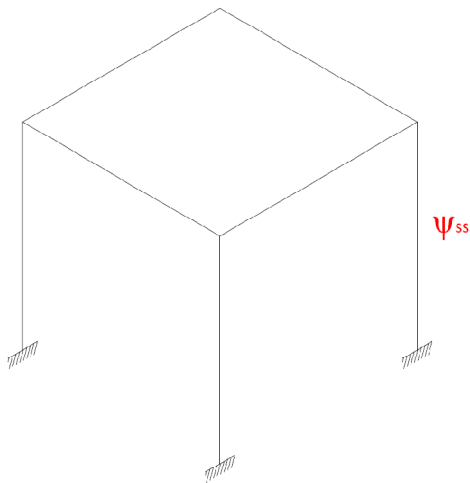


Fig. 6.44 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 6.2.3.3 Caratteristiche di rigidità medie



$$m_{ss} = m_3$$

$$k_{ss} = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3}$$

$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 2}$$

Fig. 6.45 Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:

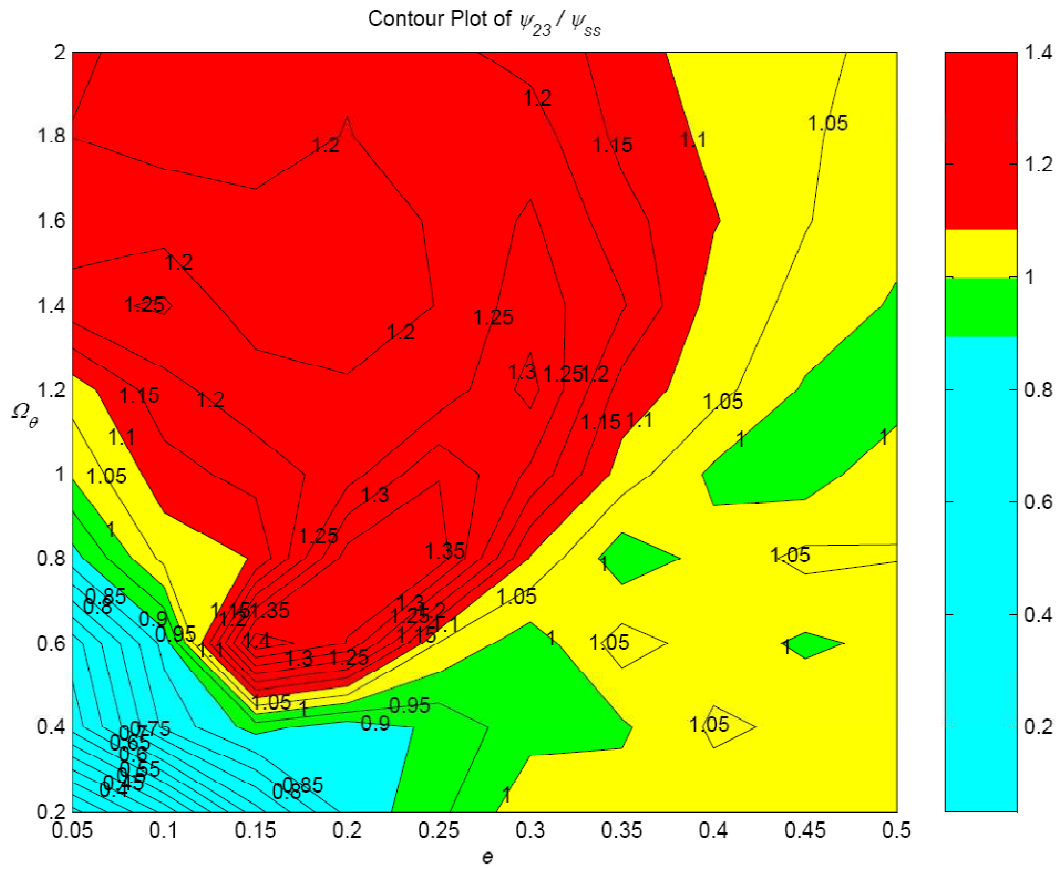
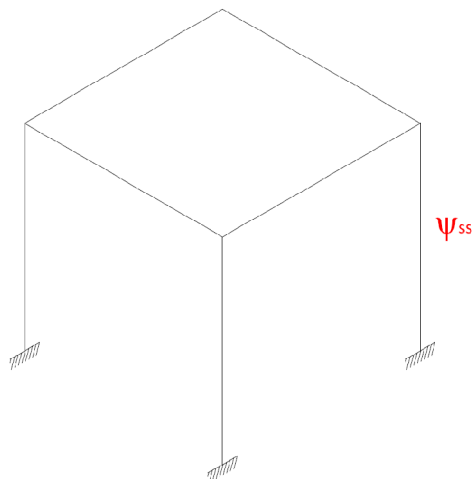


Fig. 6.45 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

#### 6.2.3.4 Caratteristiche di rigidità totali



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.46 Struttura single storey equivalente.



Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:

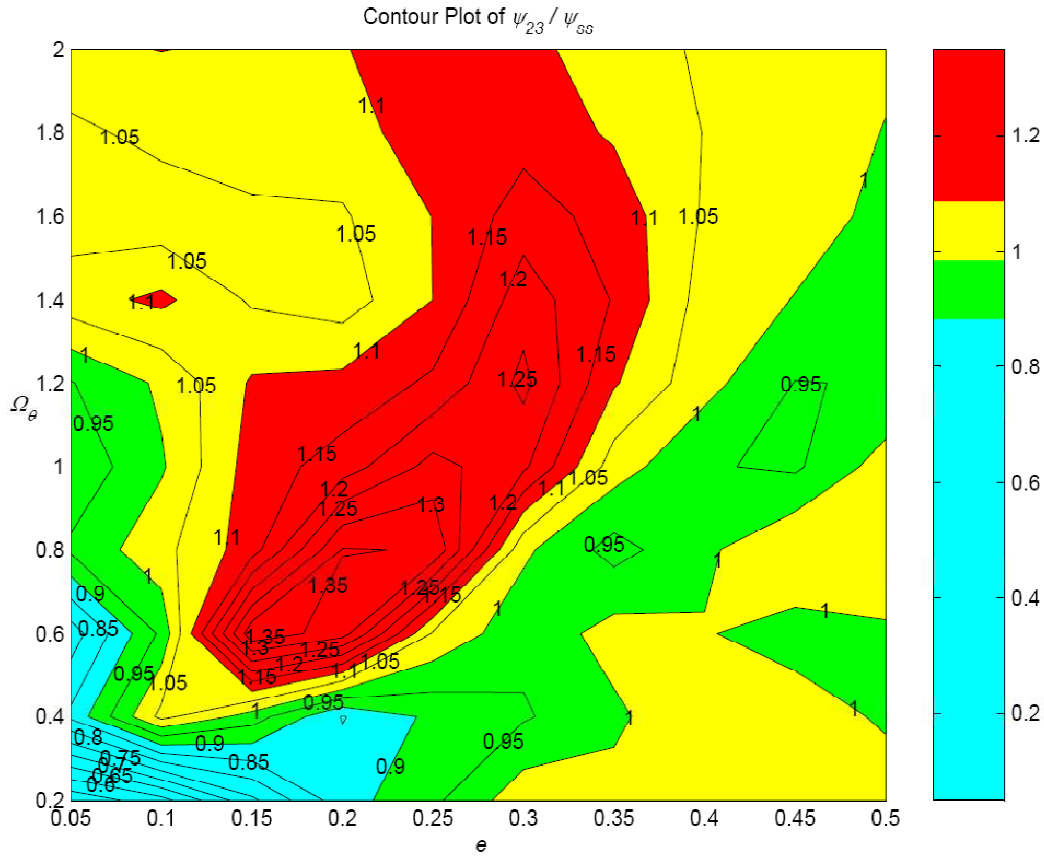
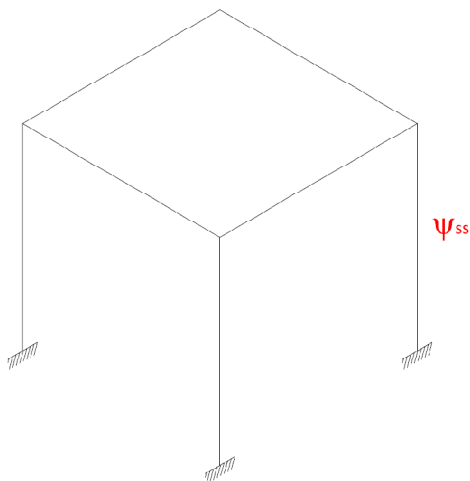


Fig. 6.47 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 6.2.3.5 Caratteristiche di massa e rigidezza del secondo e terzo piano



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.48 Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{SS}$  sono i seguenti:

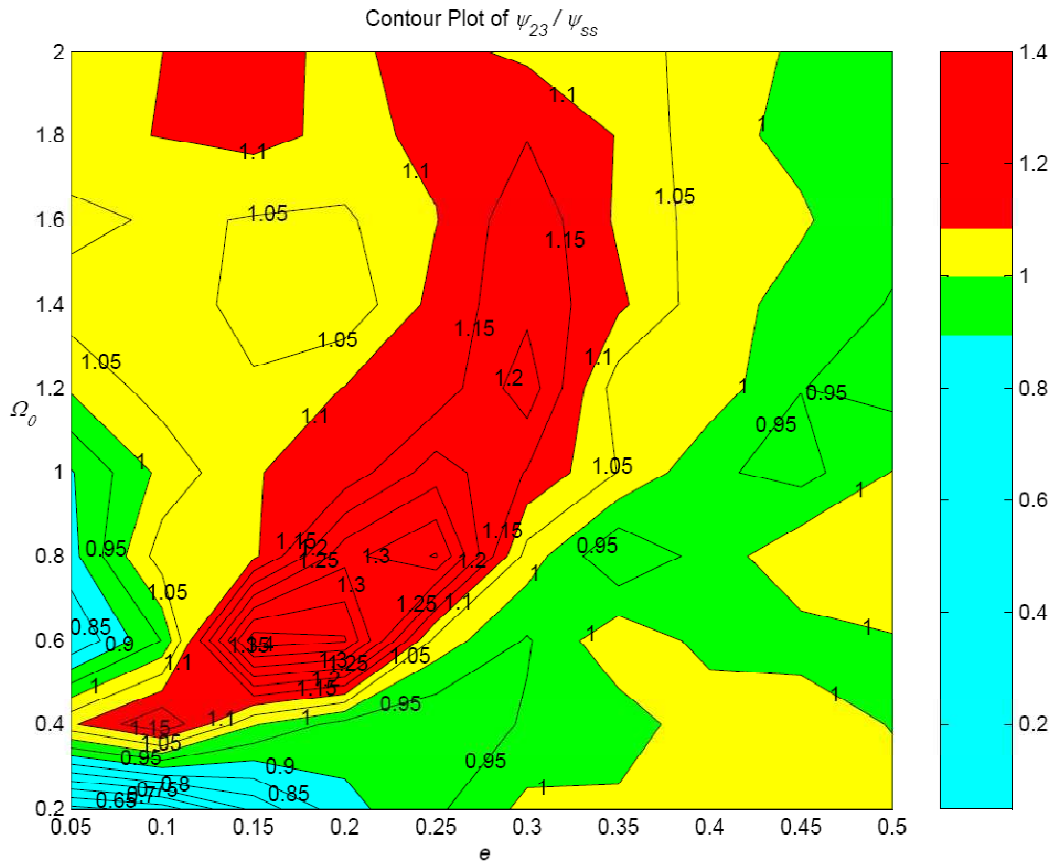
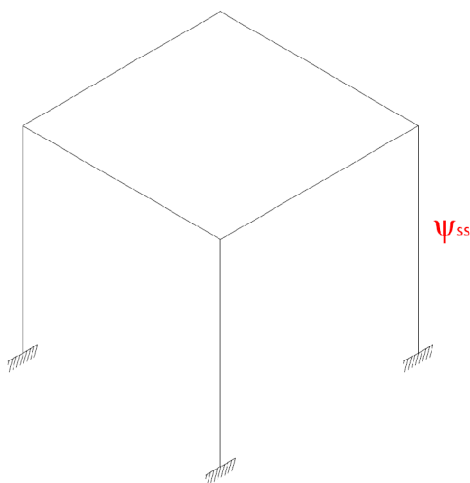


Fig. 6.49 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{SS}$ .

### 6.2.3.6 Caratteristiche di massa e del secondo e terzo piano e rigidità totale



$$\begin{aligned}
 m_{SS} &= m_2 + m_3 \\
 k_{SS} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{SS} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,SS} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.50 Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:

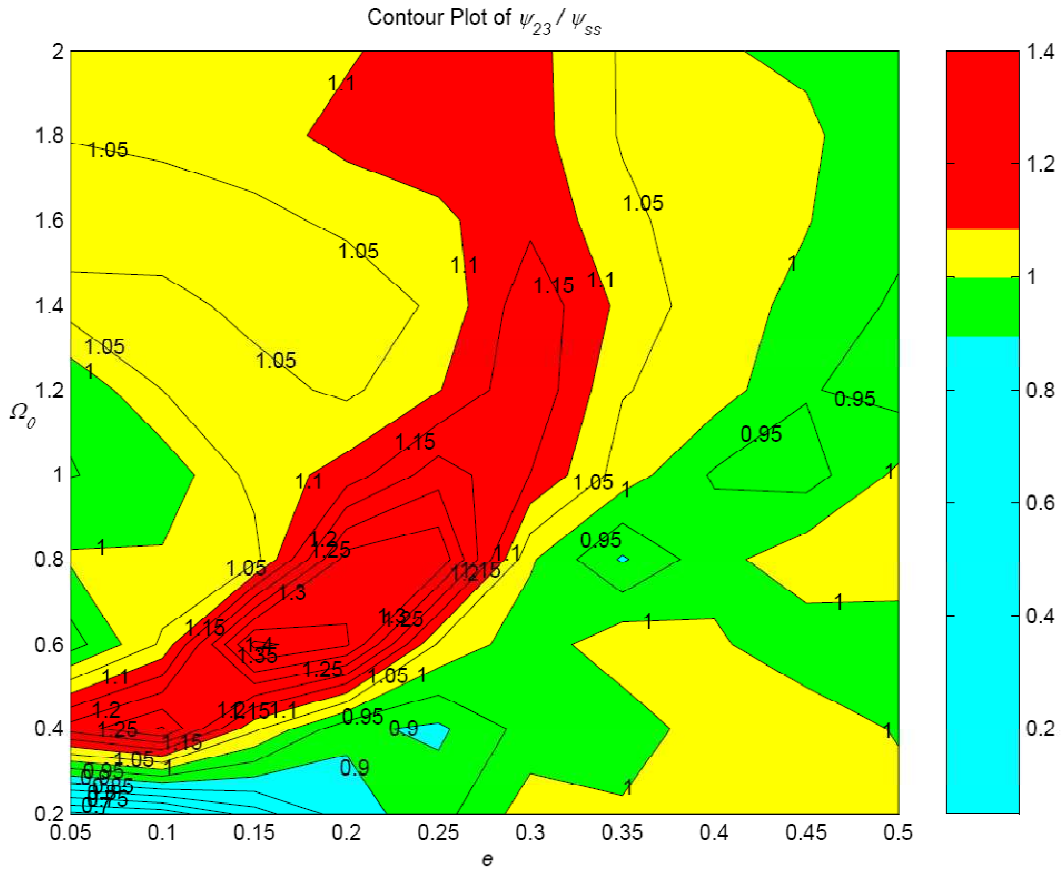
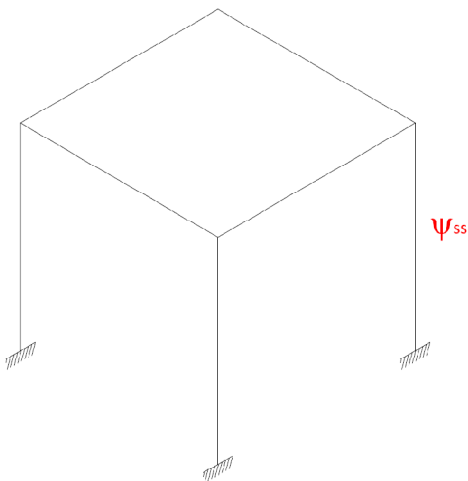


Fig. 6.51 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 6.2.3.7 Caratteristiche totali



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 2}$$

Fig. 6.52 Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{SS}$  sono i seguenti:

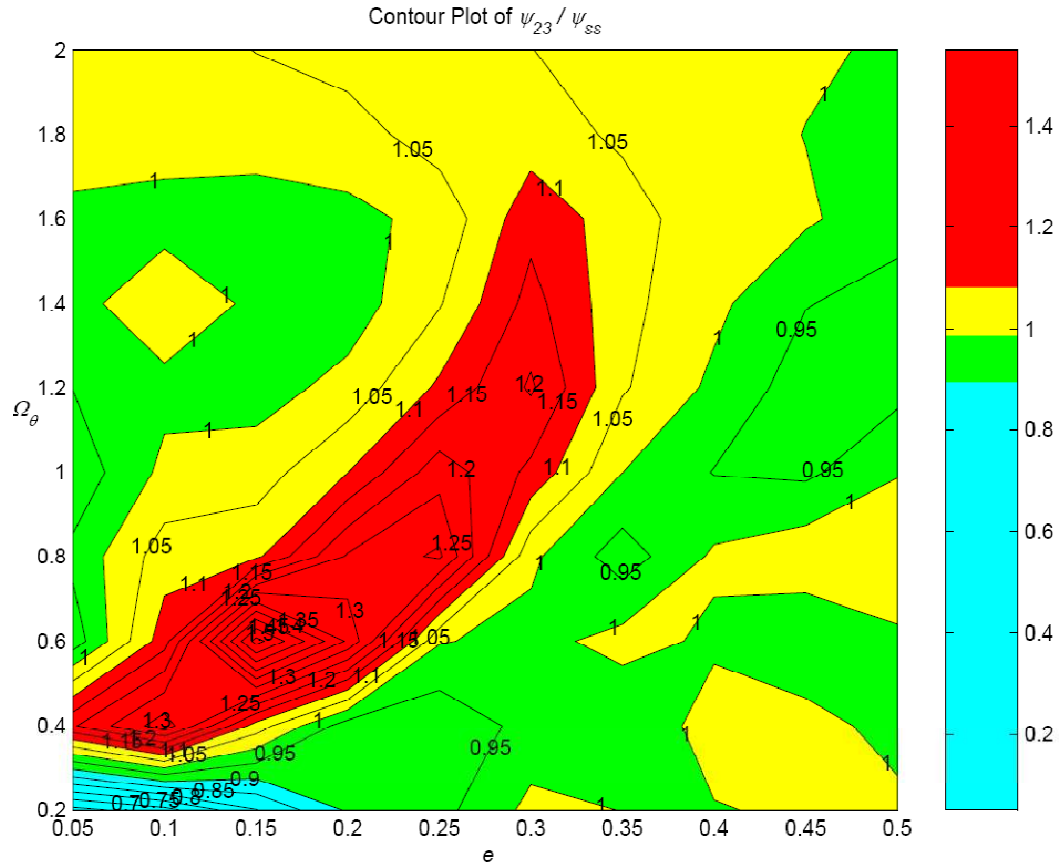


Fig. 6.53 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{SS}$ .

### 6.2.3.8 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre come il single storey che meglio rappresenta il comportamento del terzo piano della struttura multi storey sia, come per il primo e il secondo piano, quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{23}/\psi_{SS}$  rimane pari od inferiore all'unità per una porzione più estesa del dominio.

Il single storey cercato, quindi, ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{SS} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{SS} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{SS} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,SS} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

### 6.2.3 Riassunto

Per chiarezza, si riassume graficamente quanto ottenuto:

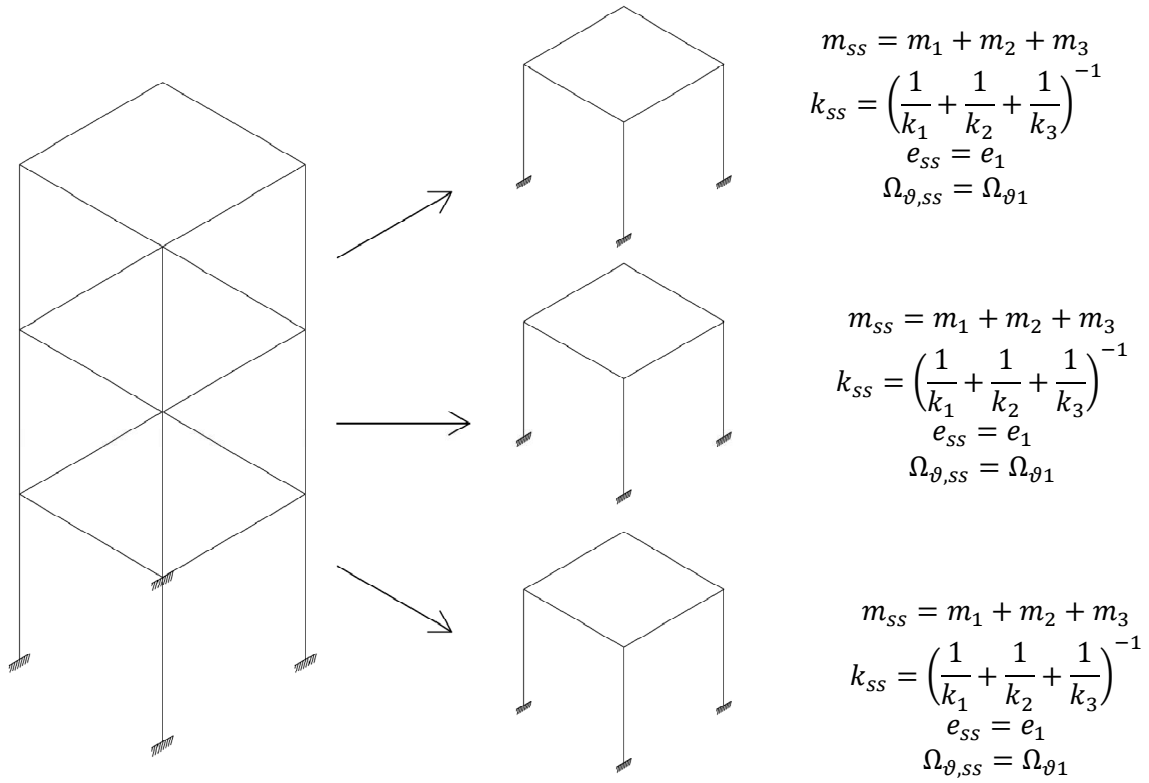


Fig. 6.54 Riassunto dei risultati ottenuti.

### 6.3 Caso 3: Aumento di rigidezza

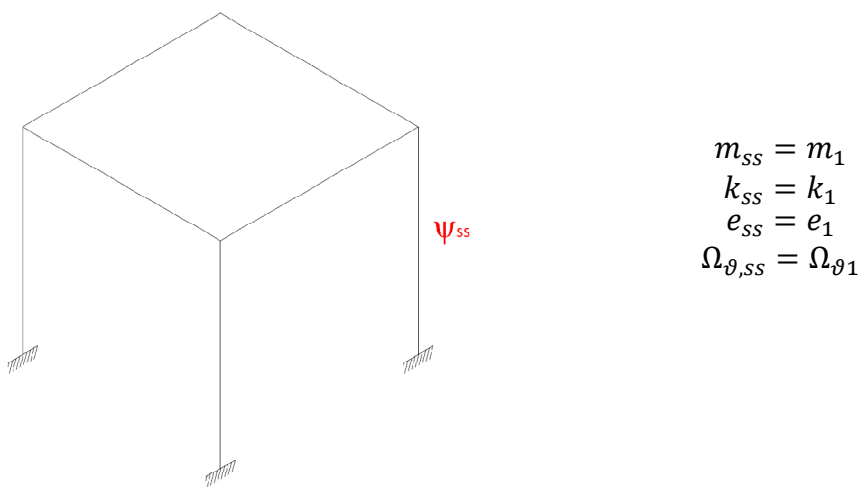
Anche nel terzo caso si è deciso di aumentare la rigidezza del secondo e del terzo piano; si considerano, infatti, i seguenti valori per i rapporti  $R_{e,i}$ ,  $R_{m,i}$ ,  $R_{k,i}$ ,  $R_{\Omega_{\theta,i}}$ :

$$\begin{aligned}
 R_{e,2} &= R_{m,2} = R_{\Omega_{\theta,2}} = 1 \\
 R_{k,2} &= 2 \\
 R_{e,3} &= R_{m,3} = R_{\Omega_{\theta,3}} = 1 \\
 R_{k,3} &= 2
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$

### 6.3.1 Primo Piano

In questo caso si sono considerati due single storey equivalenti: il primo avente le caratteristiche del primo piano, il secondo con rigidità e massa dell'intera struttura.

#### 6.3.1.1 Caratteristiche del primo piano



**Fig. 6.55** *Struttura single storey equivalente.*

Il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{SS}$  ha il seguente andamento:

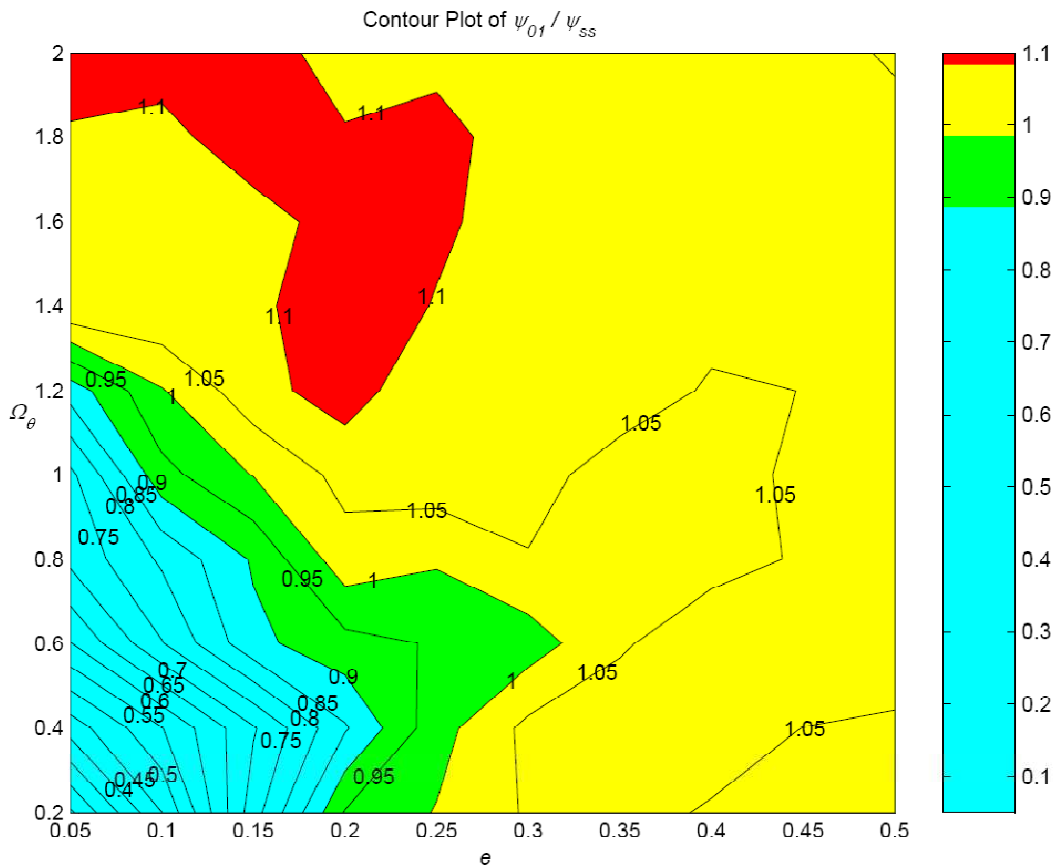
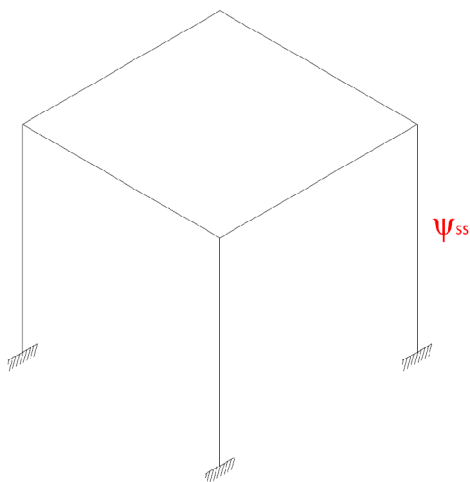


Fig. 6.56 Rapporto  $\psi_{\theta 1} / \psi_{ss}$ .

### 6.3.1.2 Caratteristiche totali



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.57 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  è il seguente:

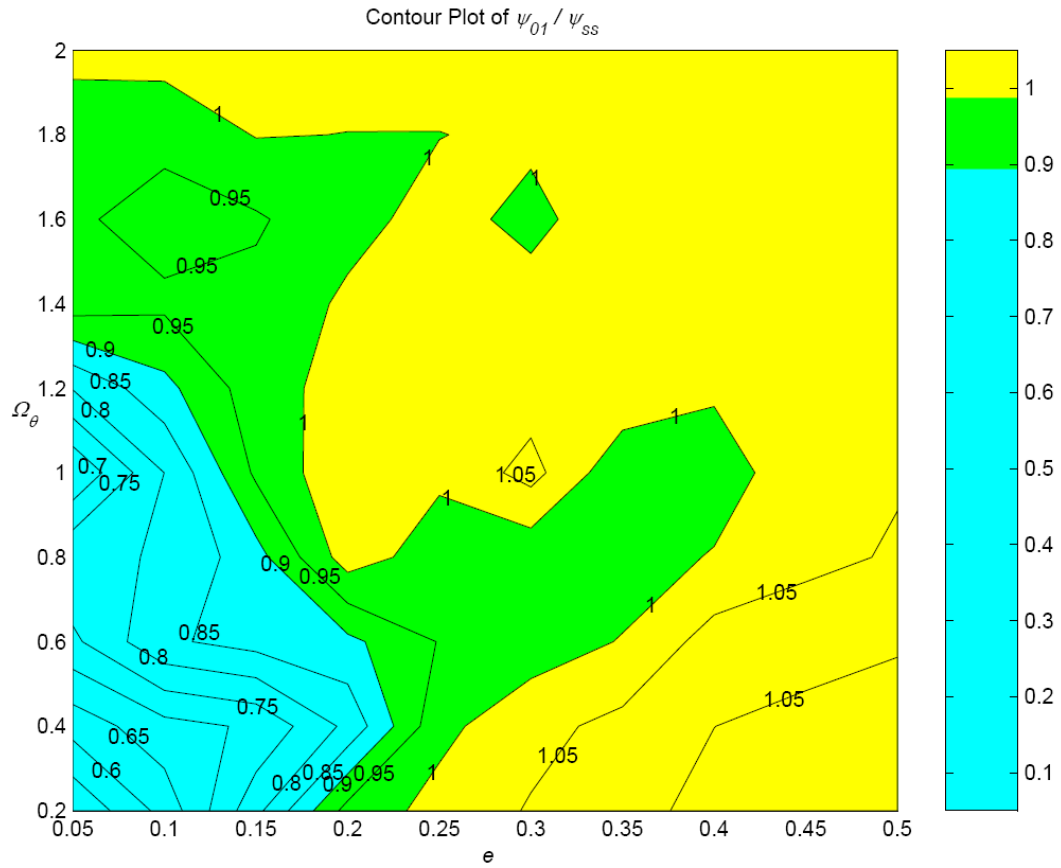


Fig. 6.58 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 6.3.1.3 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre che, anche in questo caso, il single storey che meglio coglie il comportamento del primo piano della struttura multi storey considerata ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$



### 6.3.2 Secondo piano

Per il secondo piano si considerano sei single storey: il primo avente le caratteristiche del secondo piano, il secondo caratterizzato da massa del secondo piano e rigidezza pari alla somma delle rigidezze del secondo e terzo piano, il terzo con massa del secondo piano e rigidezza totale, il quarto con massa e rigidezza del secondo e terzo piano, il quinto con massa del secondo e terzo piano e rigidezza totale, l'ultimo con rigidezza e massa totali.

#### 6.3.2.1 Caratteristiche del secondo piano

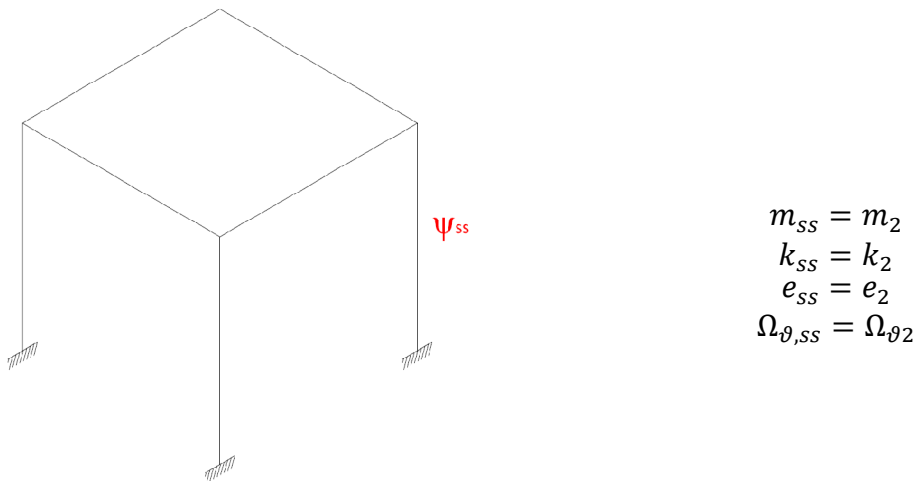
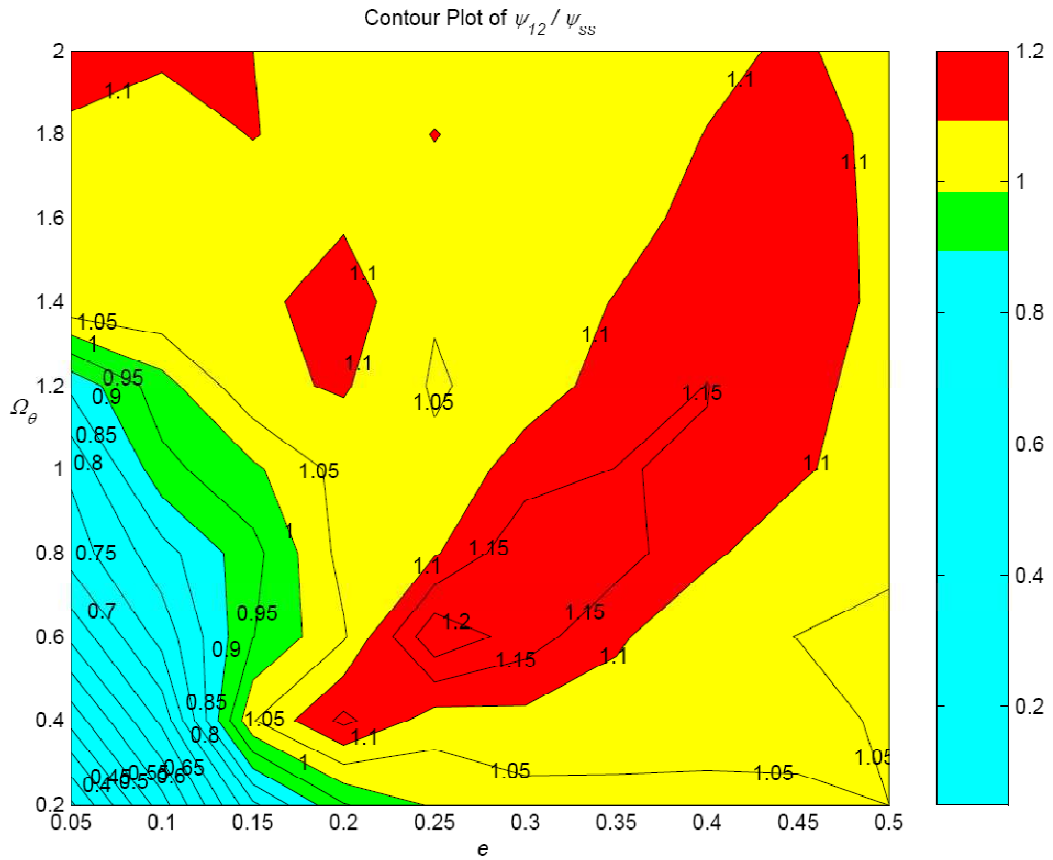


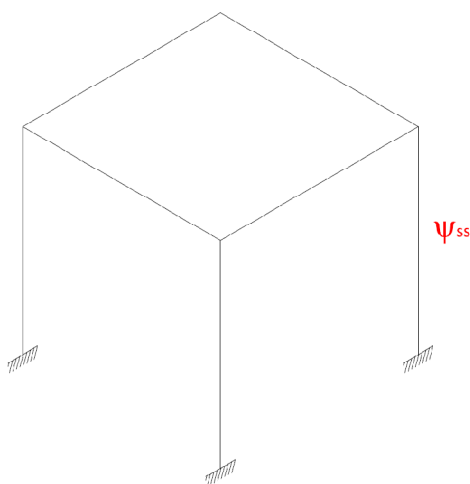
Fig. 6.59 *Struttura single storey equivalente.*

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:



**Fig. 6.60** Rapporto  $\psi_{12} / \psi_{ss}$ .

### 6.3.2.2 Caratteristiche di rigidità del secondo e terzo piano



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 2}
 \end{aligned}$$

**Fig. 6.61** Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

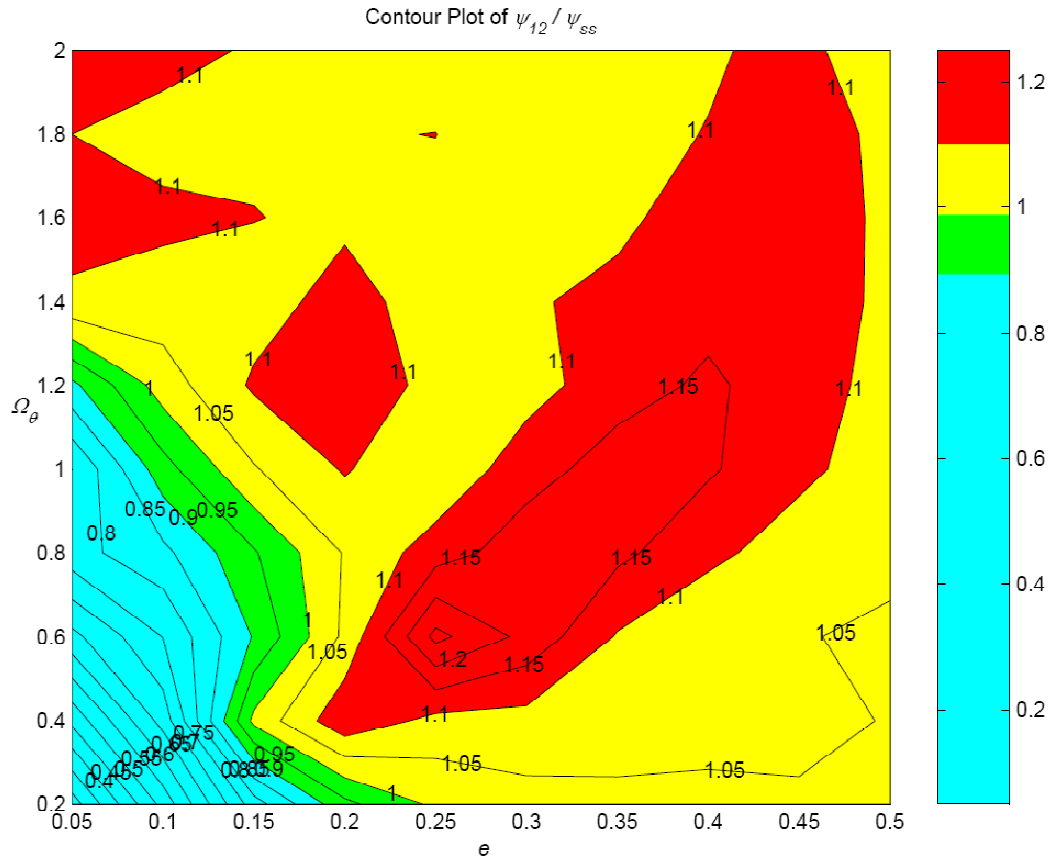
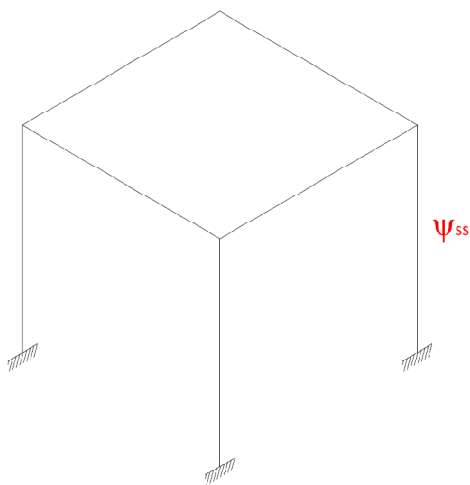


Fig. 6.62 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

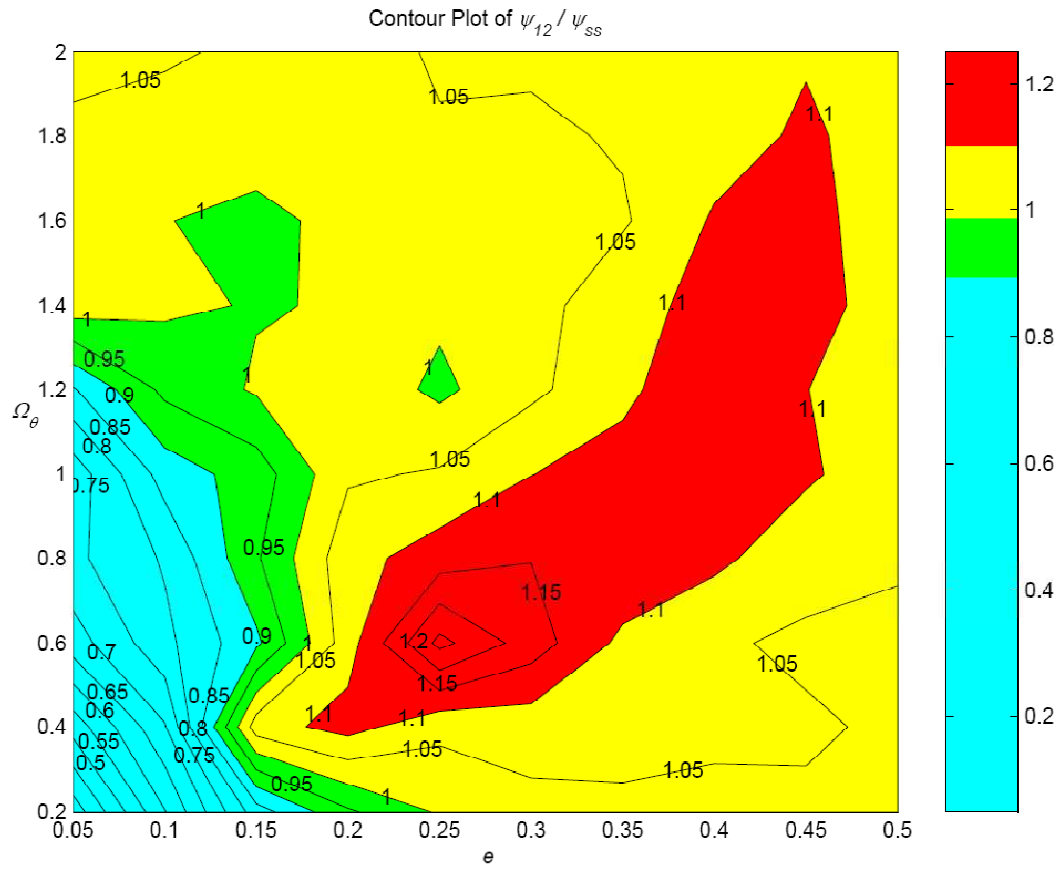
### 6.3.2.3 Caratteristiche di rigidità totali



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

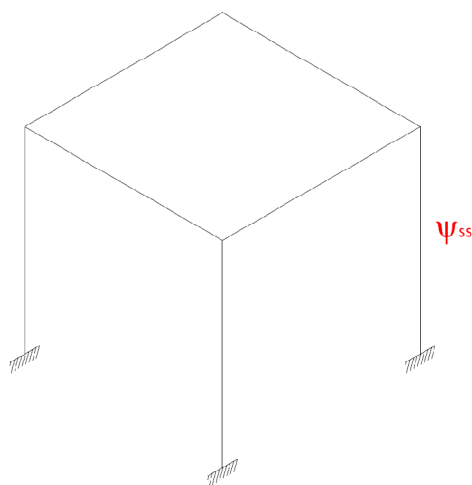
Fig. 6.63 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:



**Fig. 6.64** Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 6.3.2.4 Caratteristiche di massa e rigidezza del secondo e terzo piano



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 2}
 \end{aligned}$$

**Fig. 6.65** Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

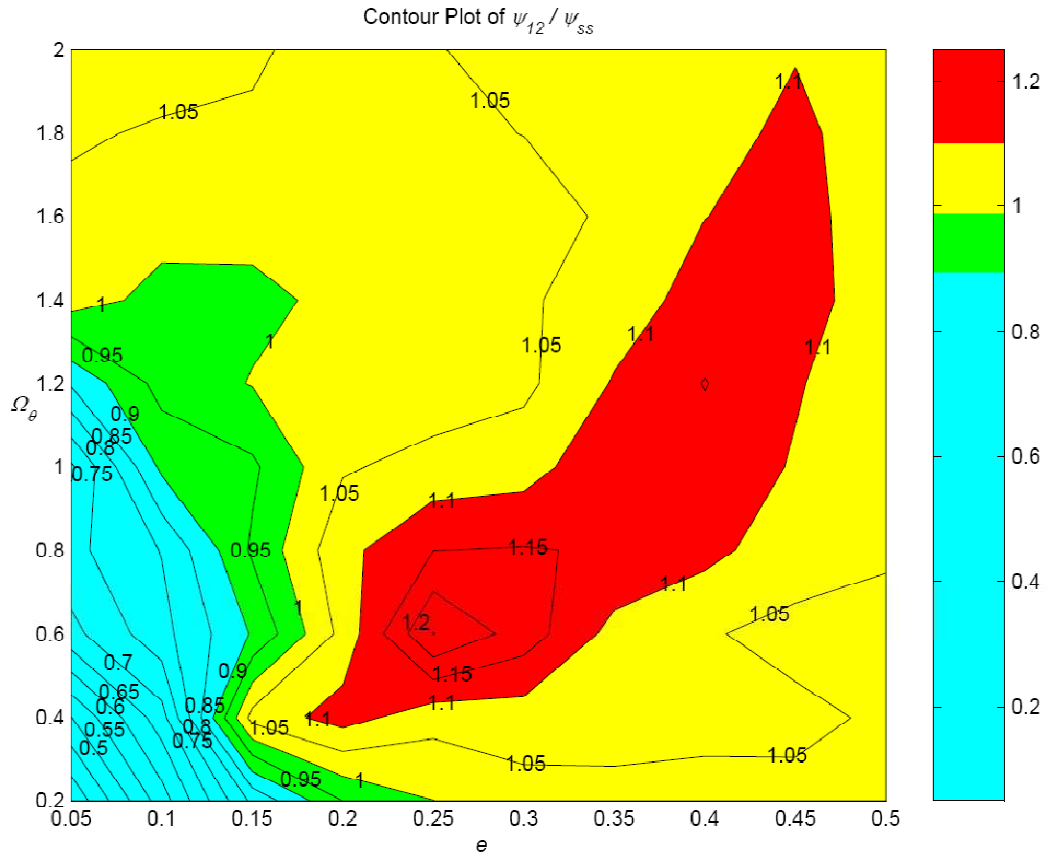
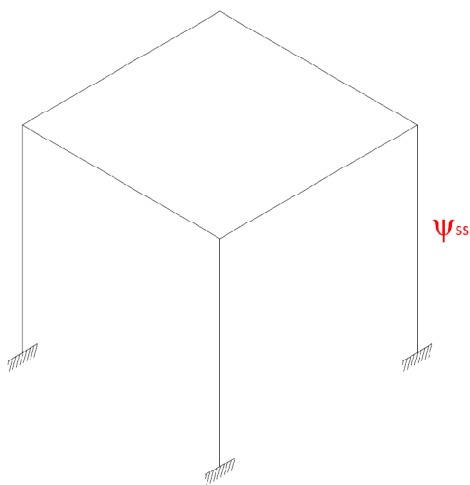


Fig. 6.64 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 6.3.2.5 Caratteristiche di massa del secondo e terzo piano e rigidezza totale



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.65 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

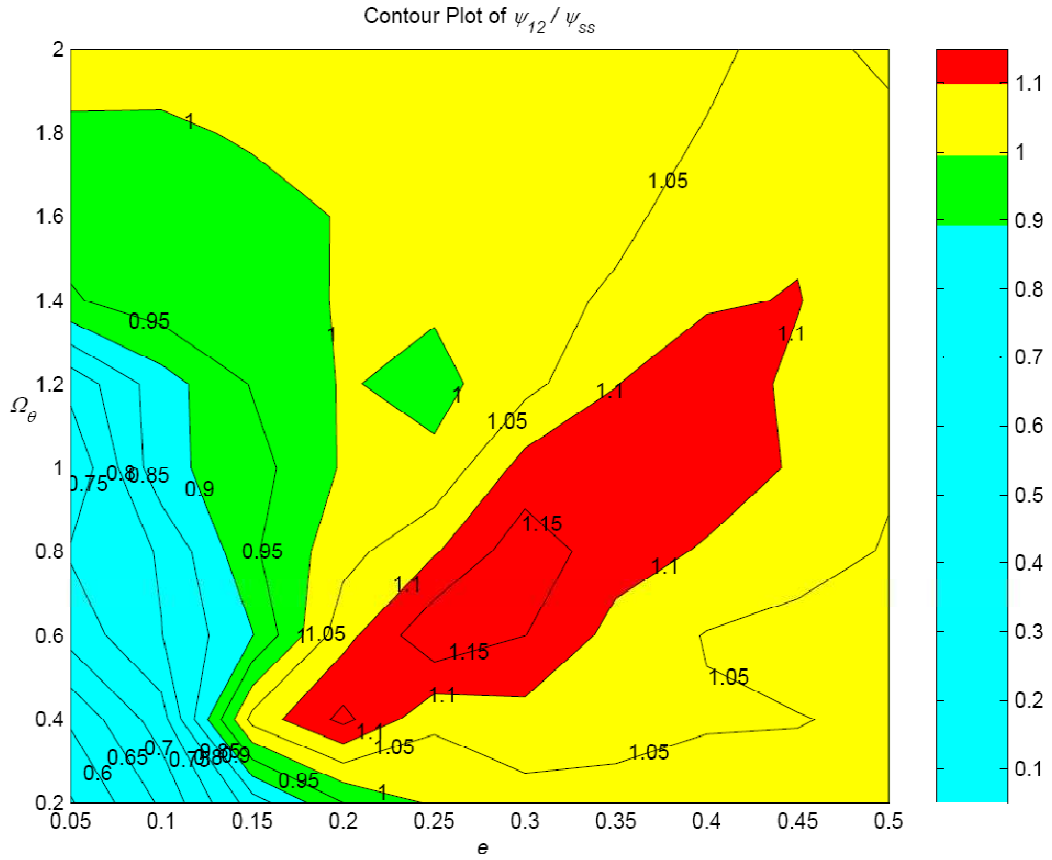
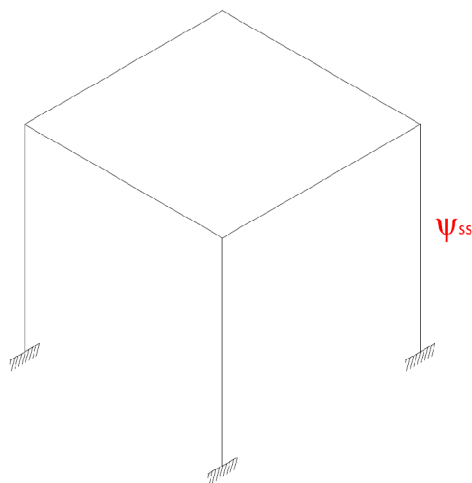


Fig. 6.66 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 6.3.2.6 Caratteristiche totali



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 2}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.67 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  è il seguente:

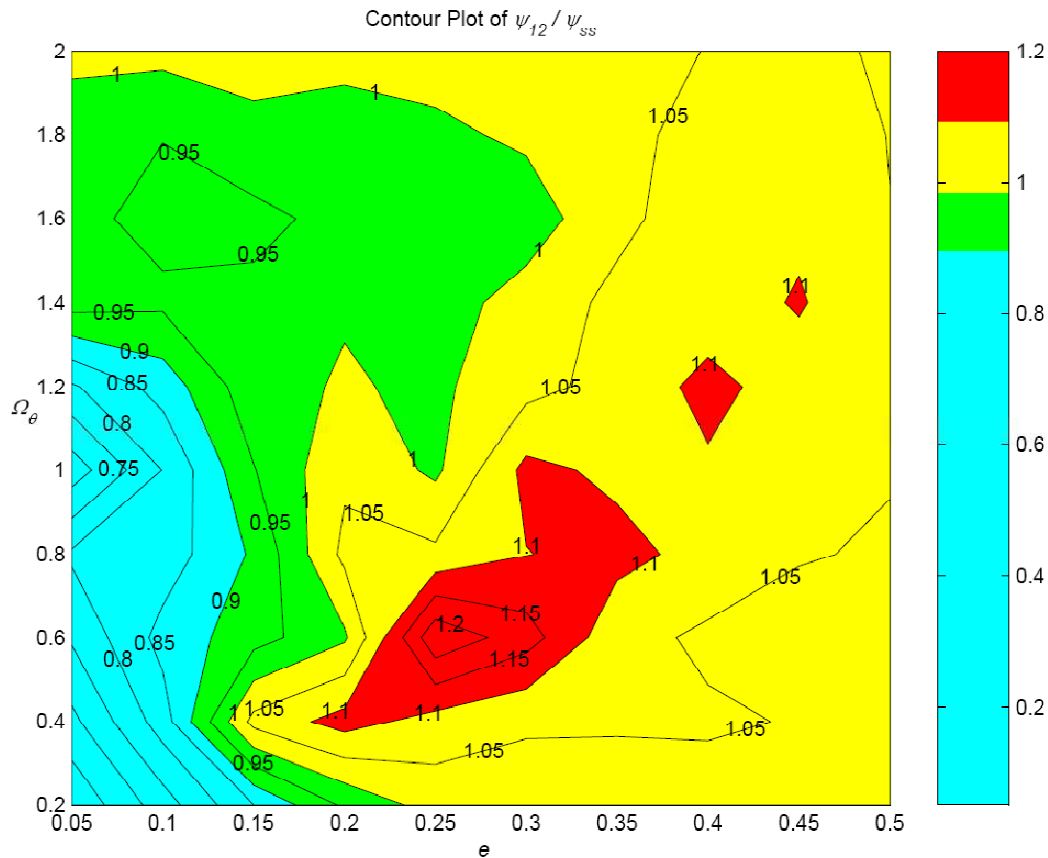


Fig. 6.68 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 6.3.2.7 Riassunto

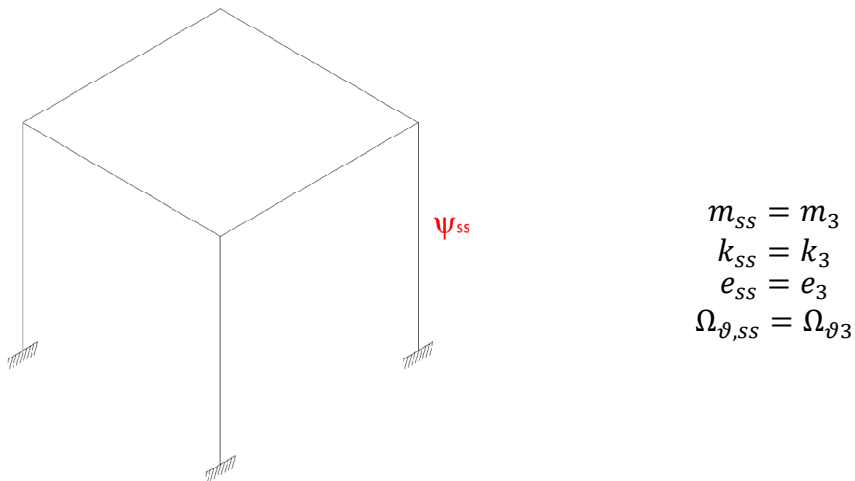
Osservando i grafici ottenuti si può dedurre che, anche per il secondo piano, il single storey che meglio ne coglie il comportamento ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

### 6.3.3 Terzo piano

Come per il secondo piano, per il terzo piano si considerano sei single storey: il primo avente le caratteristiche del terzo piano, il secondo caratterizzato da massa del terzo piano e rigidezza pari alla somma delle rigidezze del secondo e terzo piano, il terzo con massa del terzo e rigidezza totale, il quarto con massa e rigidezza del secondo e terzo piano, il quinto con massa del secondo e terzo piano e rigidezza totale, l'ultimo con rigidezza e massa totali.

#### 6.3.3.1 Caratteristiche del terzo piano



**Fig. 6.69** *Struttura single storey equivalente.*

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{SS}$  sono i seguenti:



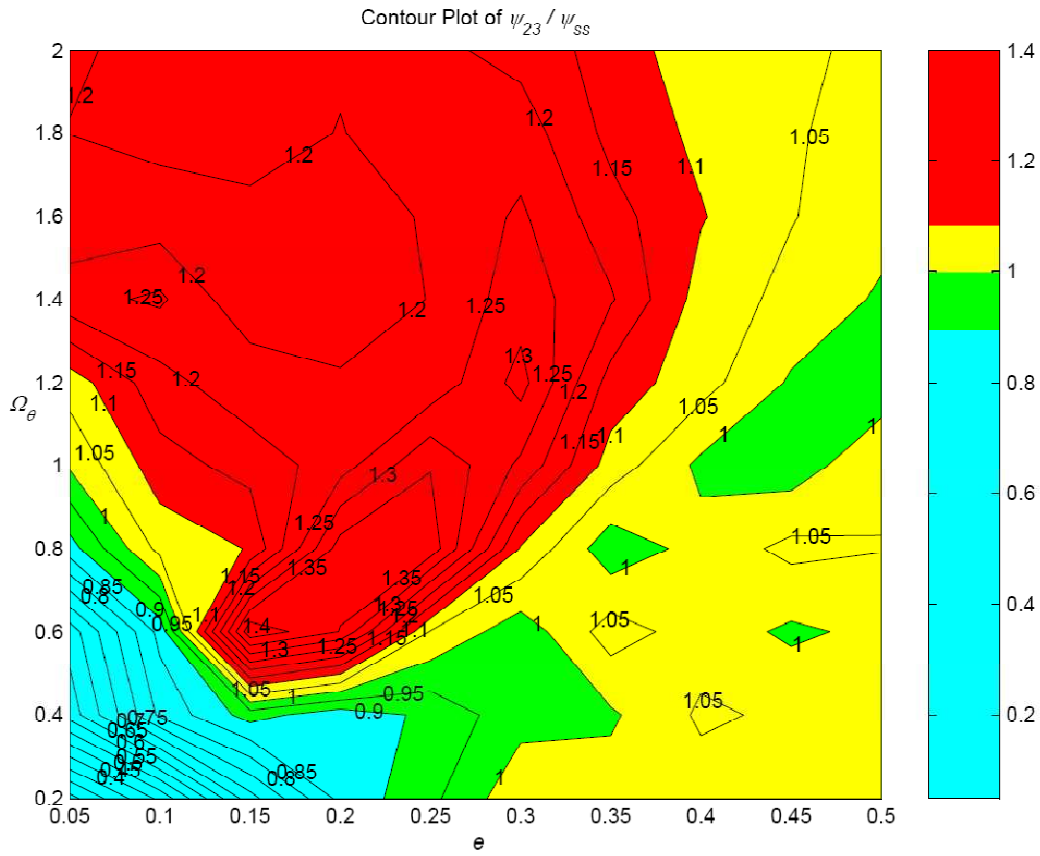
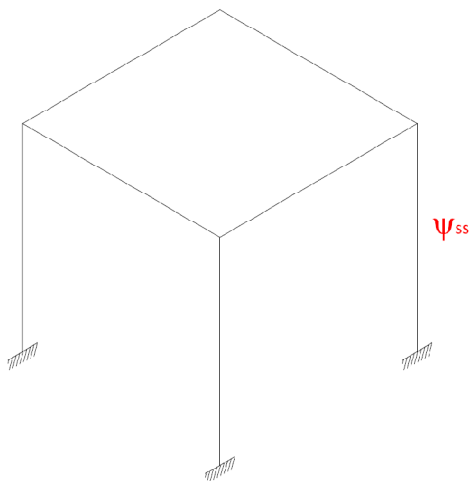


Fig. 6.70 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 6.3.3.2 Caratteristiche di rigidità del secondo e terzo piano



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.71 Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{SS}$  sono i seguenti:

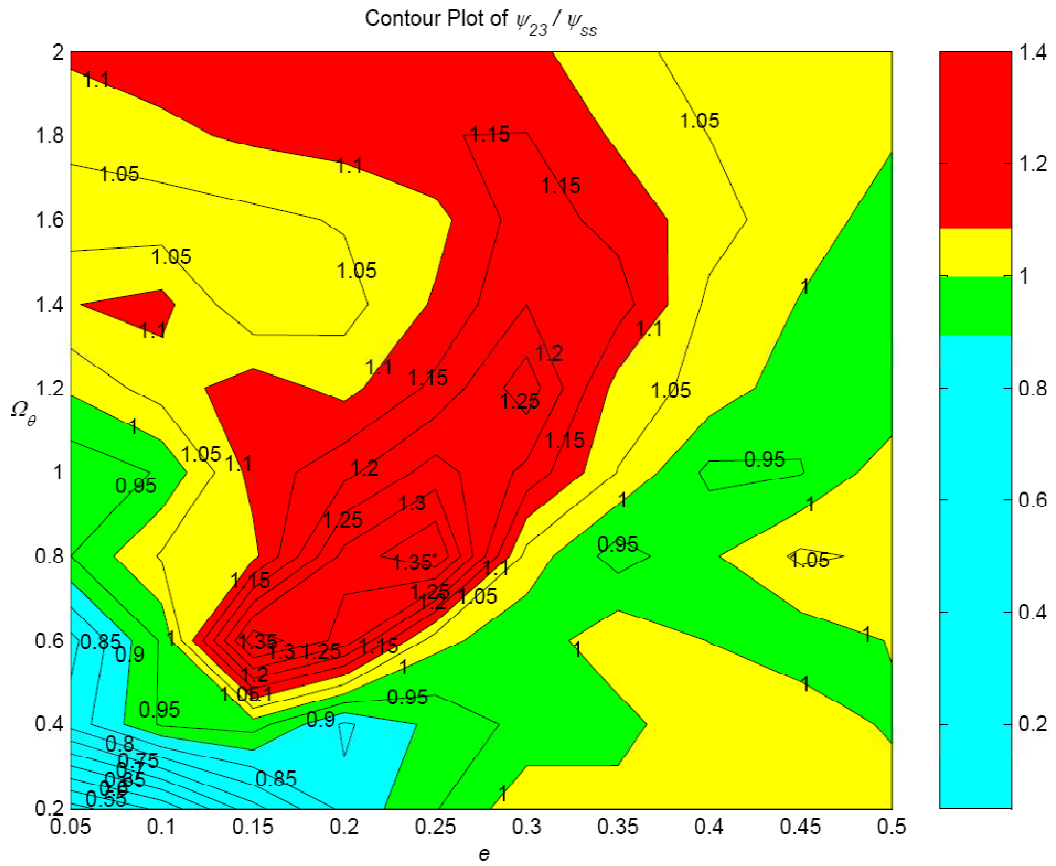
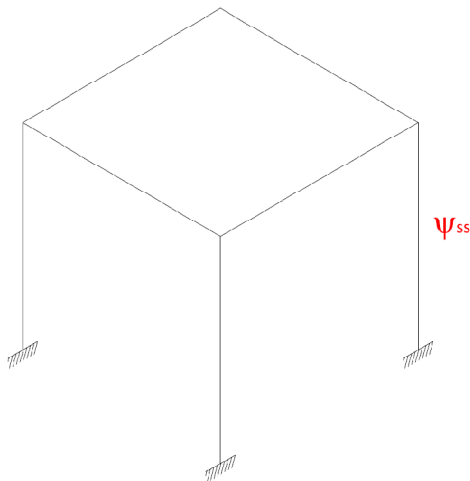


Fig. 6.72 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{SS}$ .

### 6.3.3.3 Caratteristiche di rigidezza totali



$$m_{SS} = m_3$$

$$k_{SS} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{SS} = e_2$$

$$\Omega_{\theta,SS} = \Omega_{\theta 2}$$

Fig. 6.73 Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:

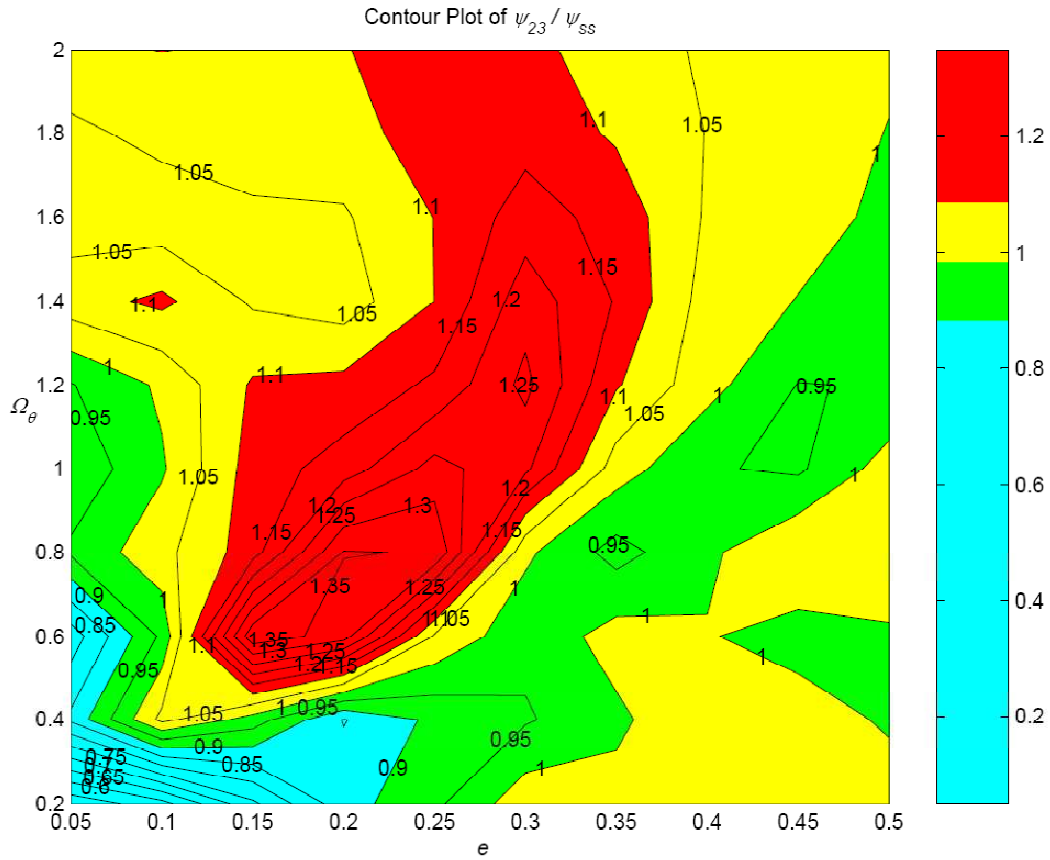
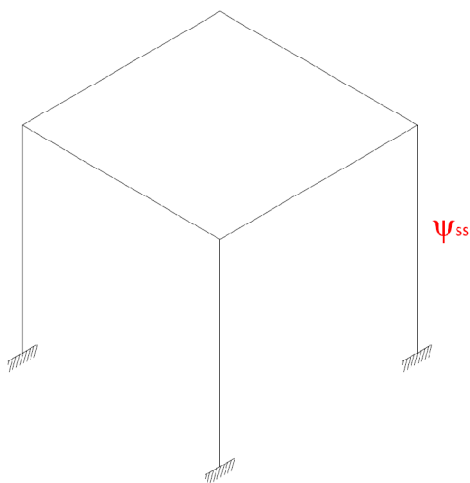


Fig. 6.78 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

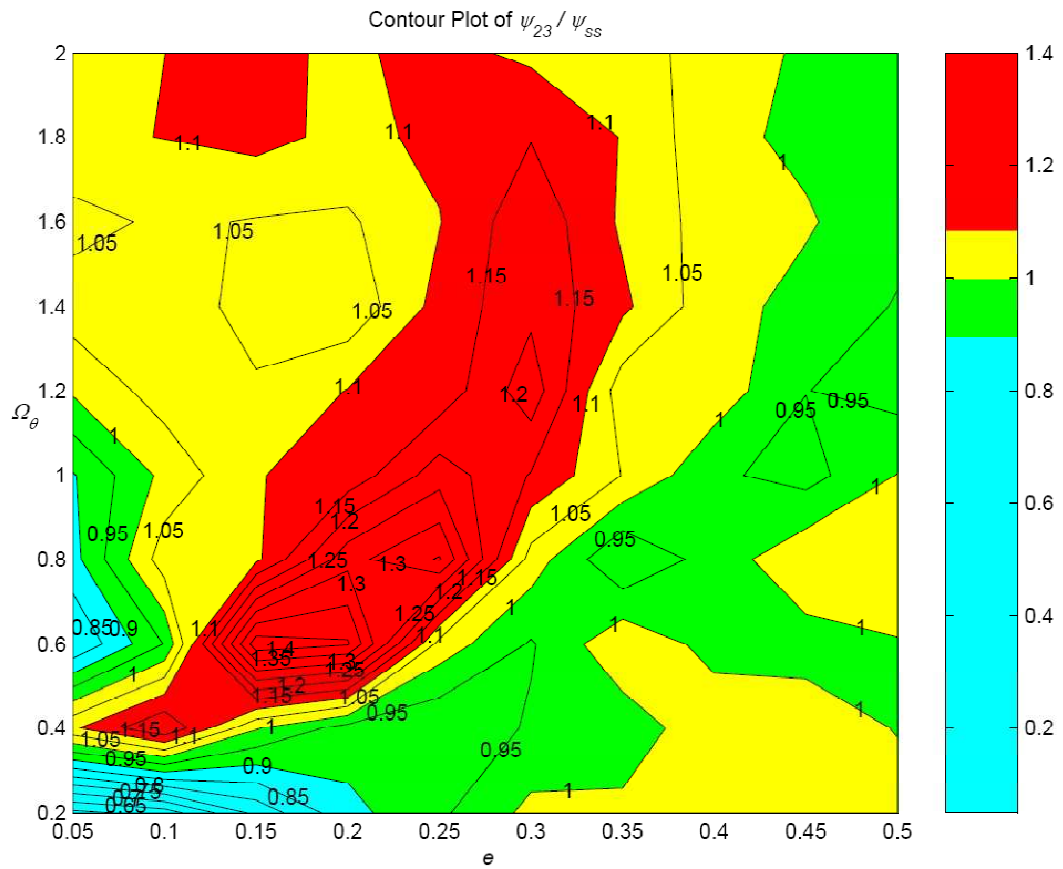
### 6.3.3.4 Caratteristiche di massa e rigidezza del secondo e terzo piano



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

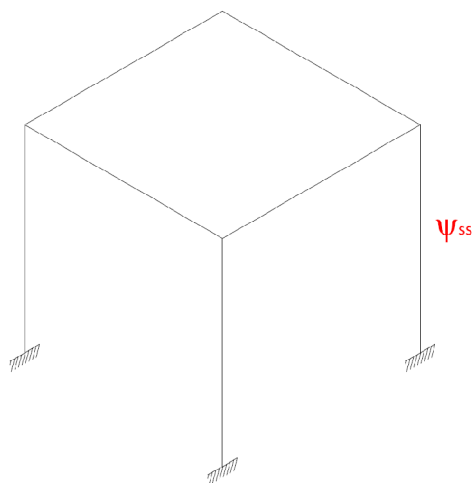
Fig. 6.79 Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:



**Fig. 6.80** Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 6.3.3.5 Caratteristiche di massa e del secondo e terzo piano e rigidità totale



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

**Fig. 6.81** Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:

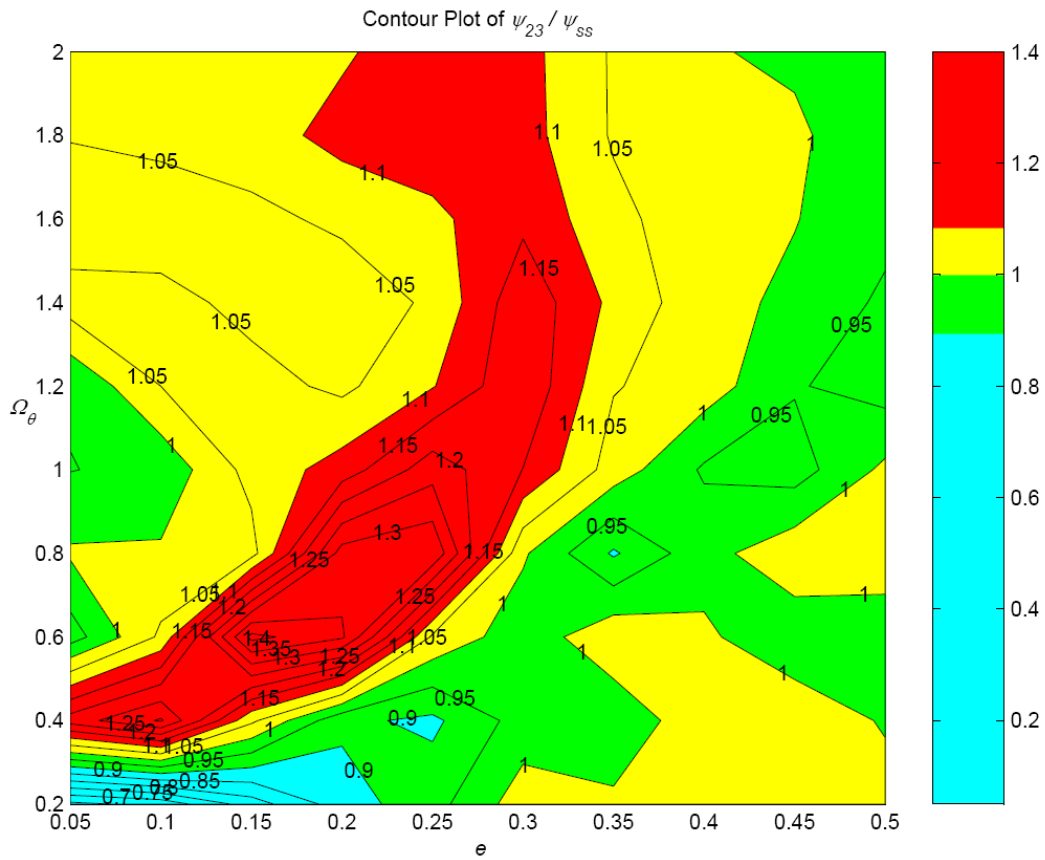
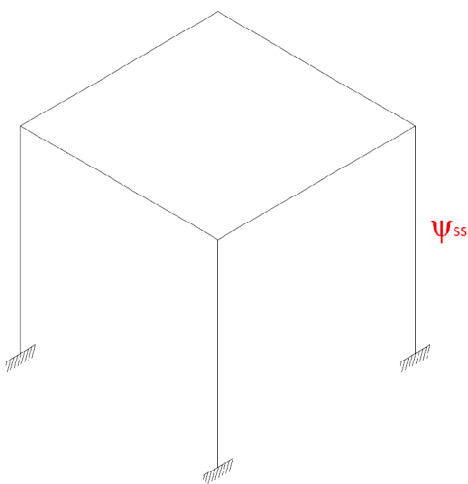


Fig. 6.82 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 6.3.3.6 Caratteristiche totali



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 2}$$

Fig. 6.83 Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{SS}$  sono i seguenti:

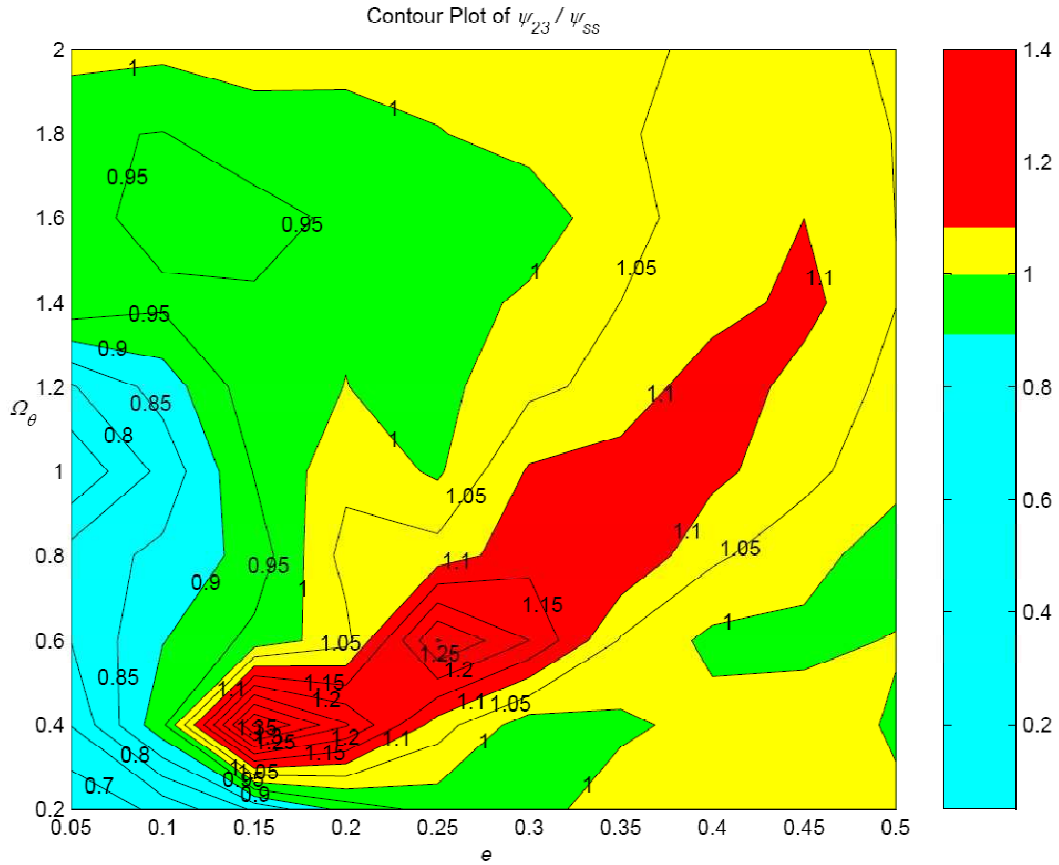


Fig. 6.84 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{SS}$ .

### 6.3.3.7 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre come il single storey che meglio rappresenta il comportamento del terzo piano della struttura multi storey sia, come per il primo e il secondo piano, quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{23}/\psi_{SS}$  rimane pari od inferiore all'unità per una porzione più estesa del dominio.

Il single storey cercato, quindi, ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{SS} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{SS} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{SS} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,SS} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

### 6.3.4 Riassunto

Per chiarezza, si riassume graficamente quanto ottenuto:

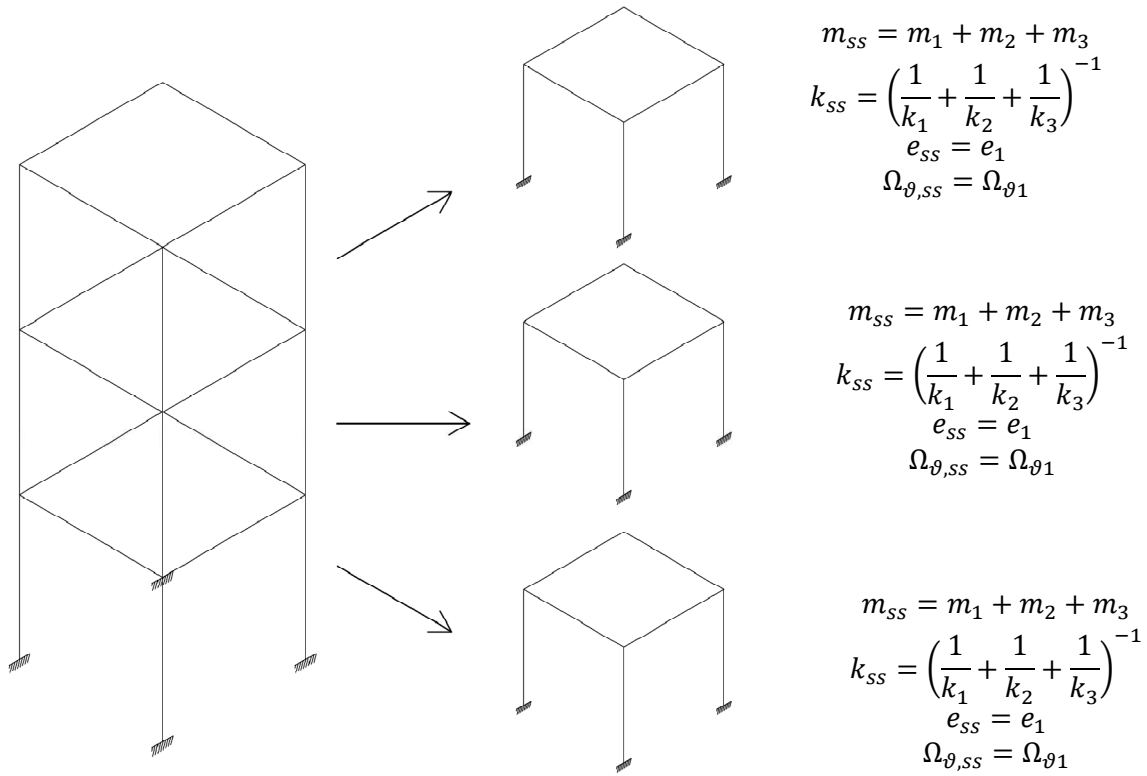


Fig. 6.85 Riassunto dei risultati ottenuti.

### 6.4 Caso 4: Diminuzione di massa

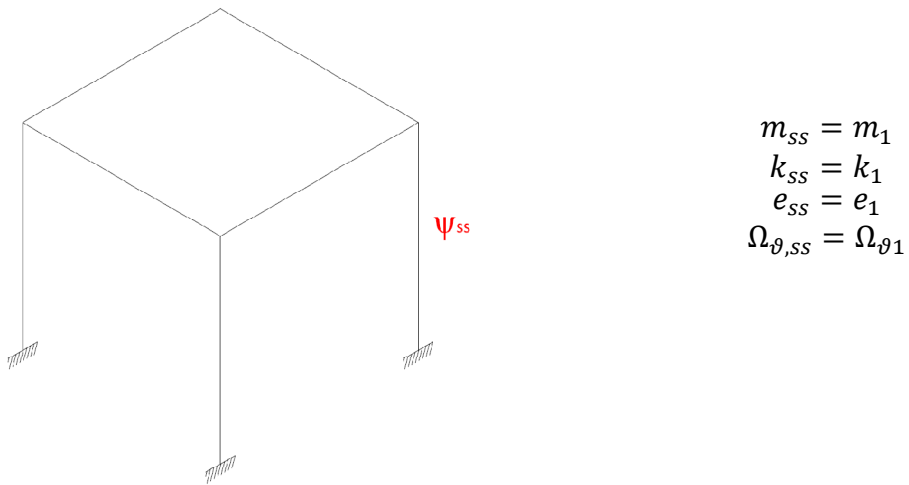
In questo caso si è deciso di variare la massa del secondo e del terzo piano; si considerano, infatti, i seguenti valori per i rapporti  $R_{e,i}$ ,  $R_{m,i}$ ,  $R_{k,i}$ ,  $R_{\Omega_{\vartheta},i}$ :

$$\begin{aligned}
 R_{e,2} &= R_{k,2} = R_{\Omega_{\vartheta},2} = 1 \\
 R_{m,2} &= 0.5 \\
 R_{e,3} &= R_{k,3} = R_{\Omega_{\vartheta},3} = 1 \\
 R_{m,3} &= 0.5
 \end{aligned}
 \tag{6.4}$$

## 6.4.1 Primo Piano

In questo caso si sono considerati due single storey equivalenti: il primo avente le caratteristiche del primo piano, mentre il secondo ha rigidezza e massa pari a quelle dell'intera struttura.

### 6.4.1.1 Caratteristiche del primo piano



**Fig. 6.86** *Struttura single storey equivalente.*

Il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:



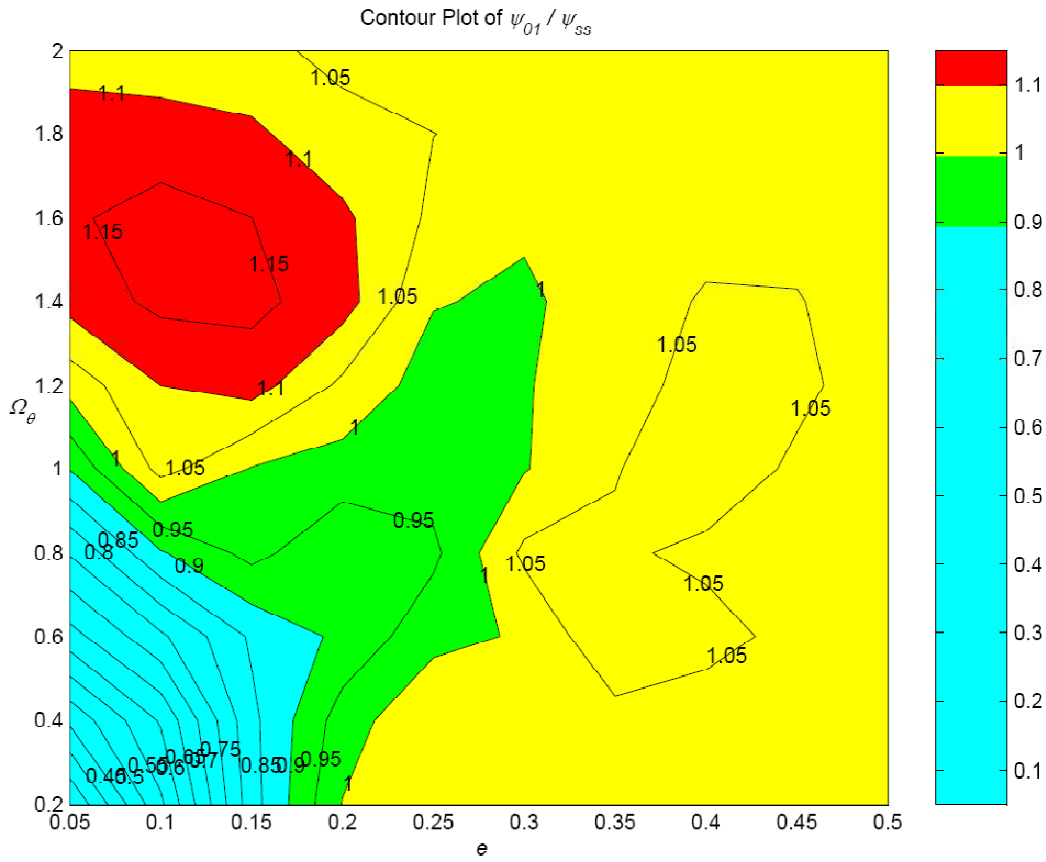
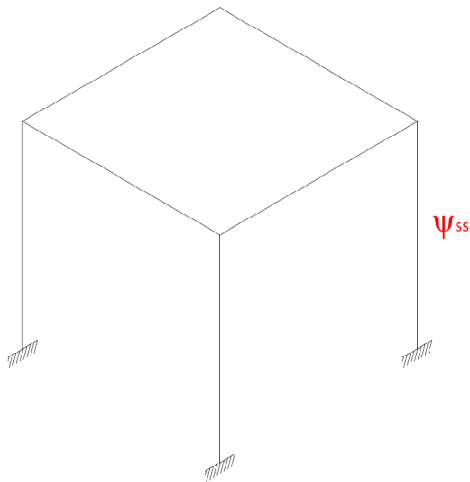


Fig. 6.87 Rapporto  $\psi_{01} / \psi_{ss}$ .

### 6.4.1.2 Caratteristiche totali



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.88 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  è il seguente:

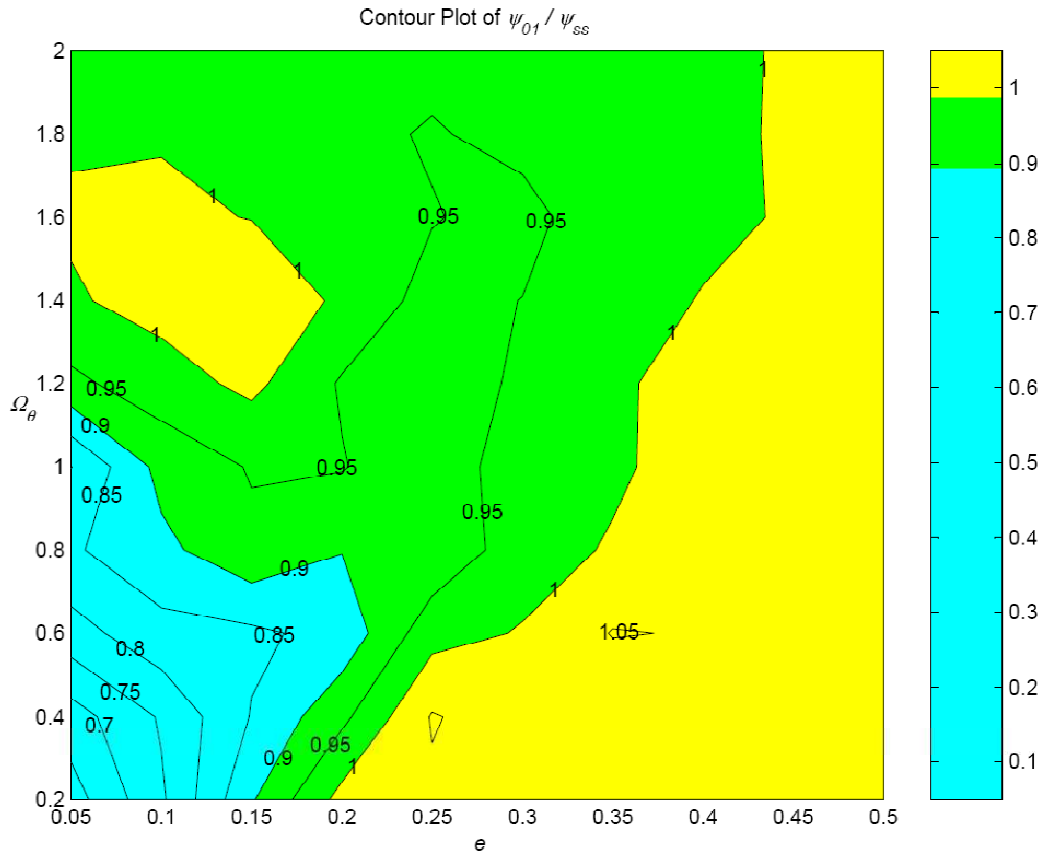


Fig. 6.89 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 6.4.1.3 Riassunto

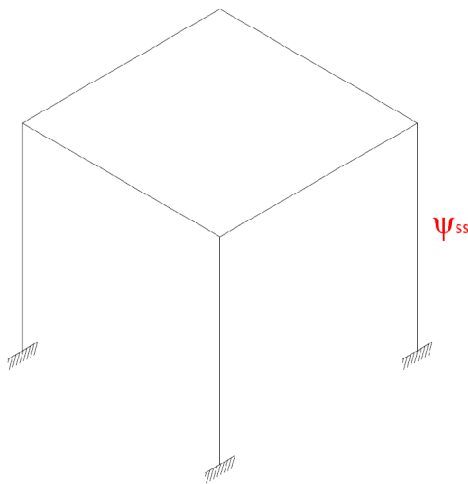
Osservando i grafici ottenuti risulta evidente come, anche in questo caso, il single storey che meglio coglie il comportamento del primo piano della struttura multi storey considerata ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 1}
 \end{aligned}$$

## 6.4.2 Secondo piano

Per il secondo piano si considerano sei single storey: il primo avente le caratteristiche del secondo piano, il secondo caratterizzato da massa del secondo piano e rigidezza pari alla somma delle rigidezze del secondo e terzo piano, il terzo con massa del secondo piano e rigidezza totale, il quarto con massa e rigidezza del secondo e terzo piano, il quinto con massa del secondo e terzo piano e rigidezza totale, l'ultimo con rigidezza e massa totali.

### 6.4.2.1 Caratteristiche del secondo piano



$$\begin{aligned} m_{ss} &= m_2 \\ k_{ss} &= k_2 \\ e_{ss} &= e_2 \\ \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2} \end{aligned}$$

**Fig. 6.90** *Struttura single storey equivalente.*

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

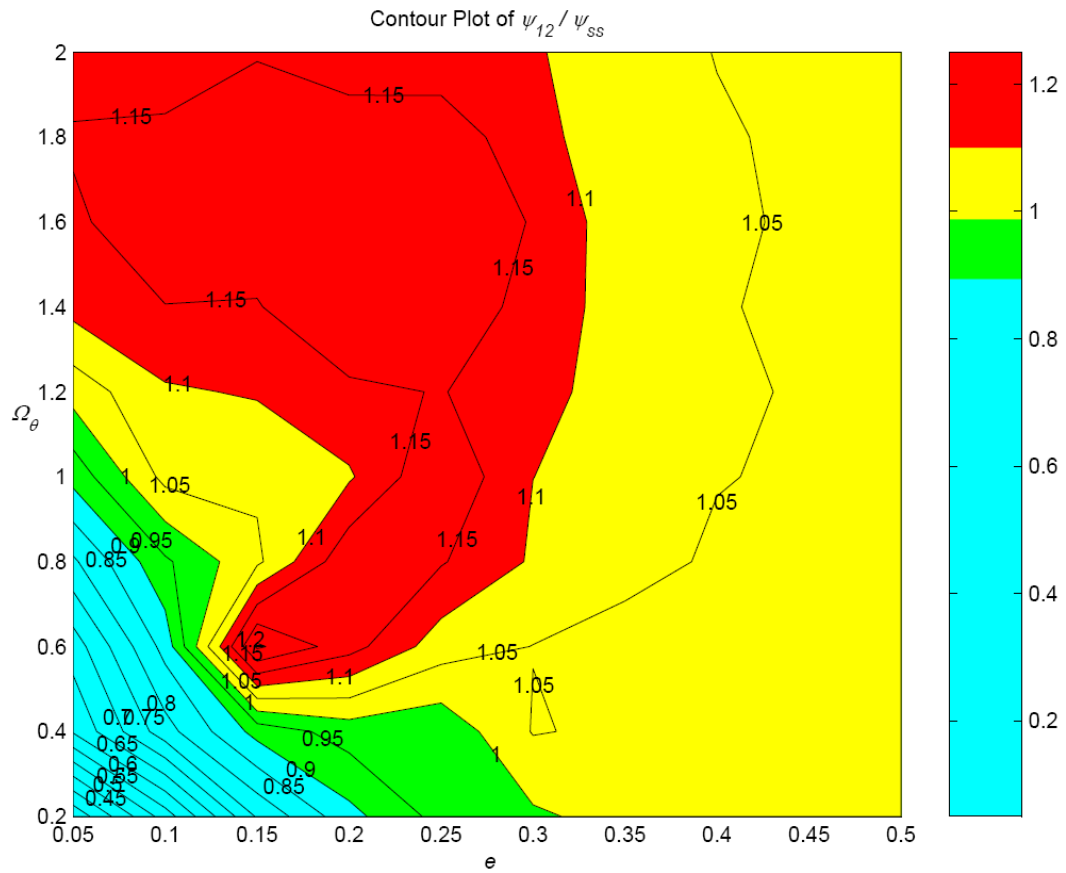
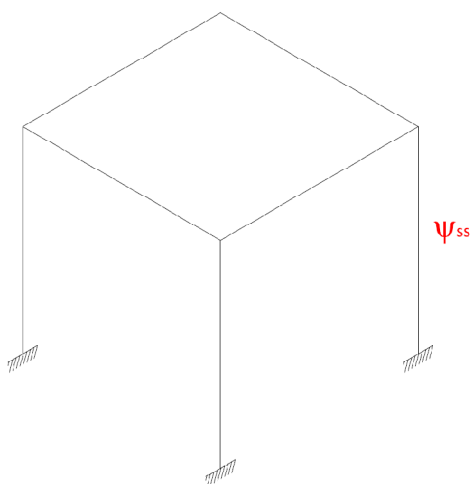


Fig. 6.91 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

#### 6.4.2.2 Caratteristiche di rigidità del secondo e terzo piano



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 2}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.92 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

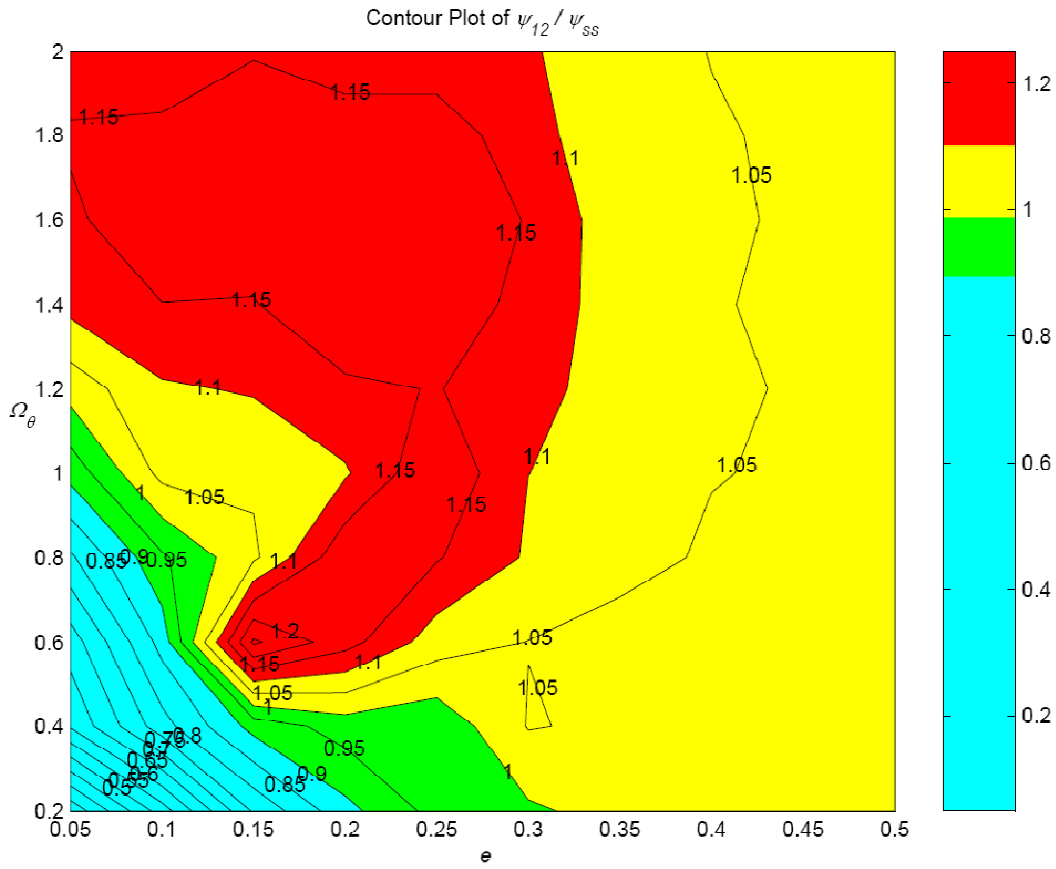
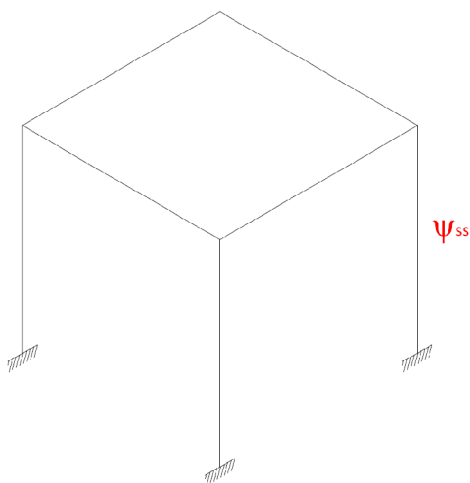


Fig. 6.93 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 6.4.2.3 Caratteristiche di rigidezza totali



$$m_{ss} = m_2$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 2}$$

Fig. 6.94 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

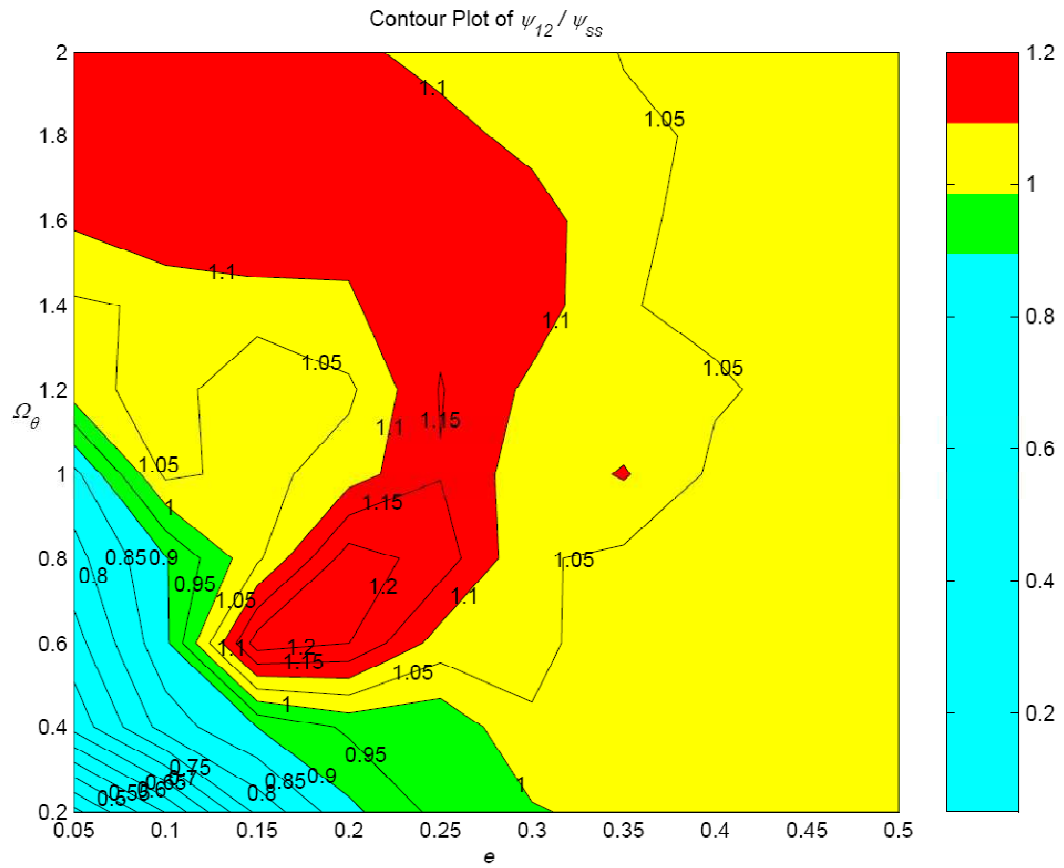
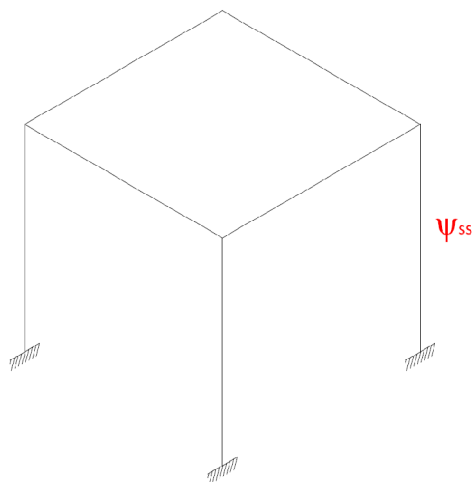


Fig. 6.95 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

#### 6.4.2.4 Caratteristiche di massa e rigidezza del secondo e terzo piano



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.96 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

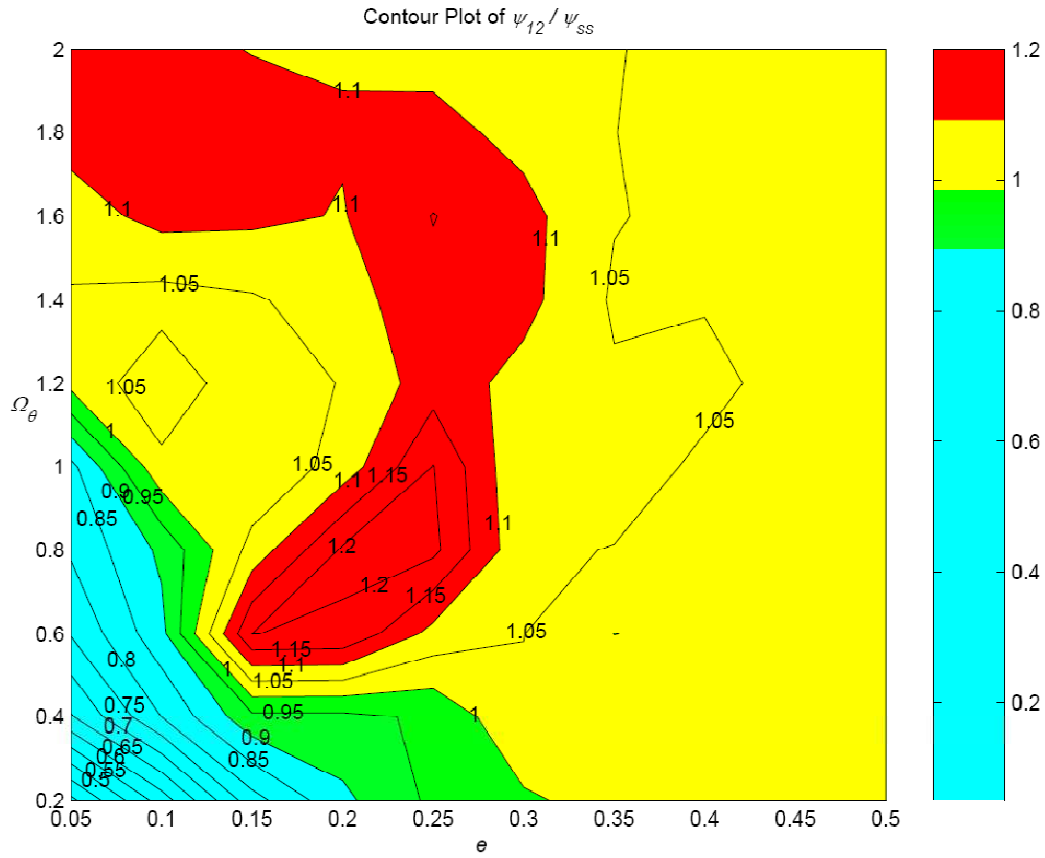
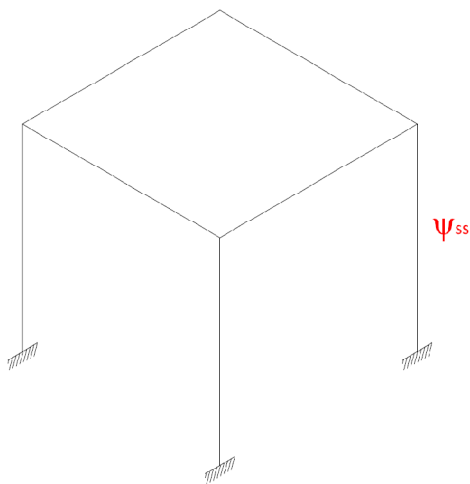


Fig. 6.97 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 6.4.2.5 Caratteristiche di massa del secondo e terzo piano e rigidezza totale



$$m_{ss} = m_2 + m_3$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 2}$$

Fig. 6.98 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

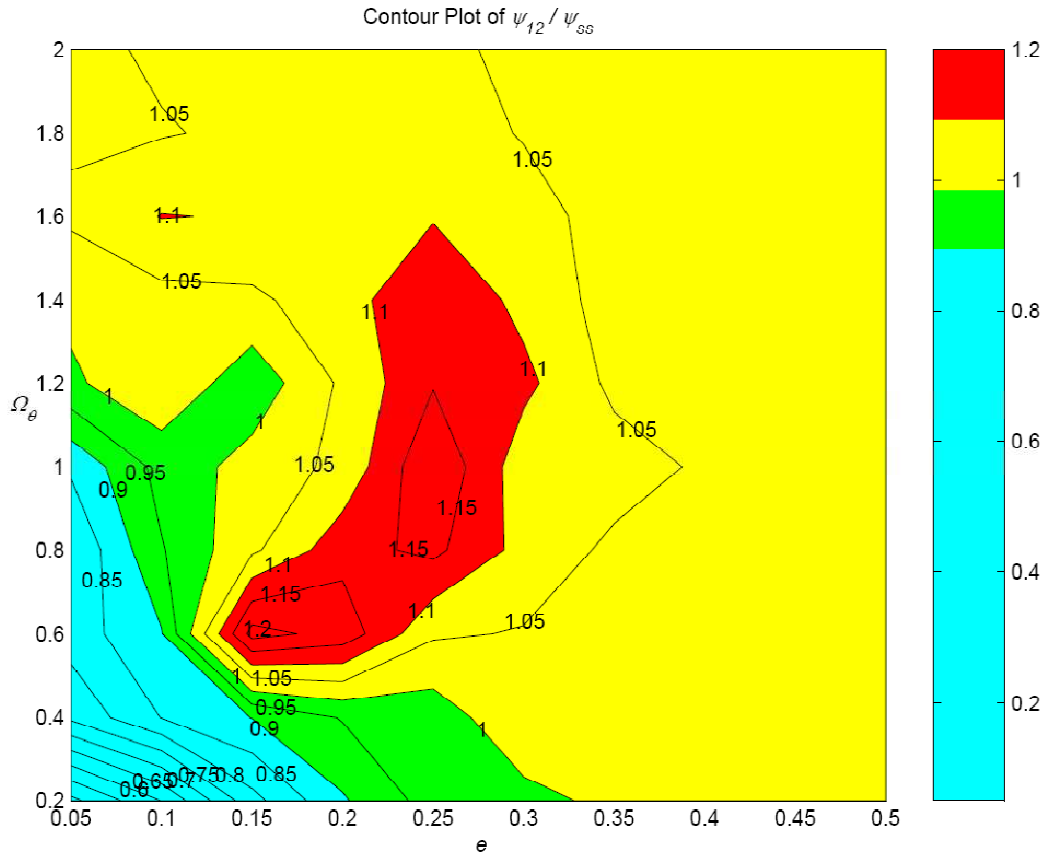
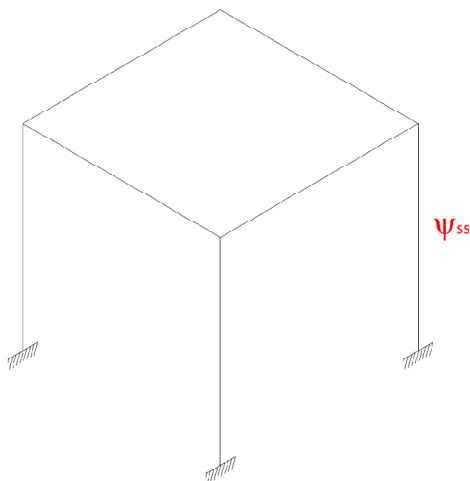


Fig. 6.99 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

#### 6.4.2.6 Caratteristiche totali



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 2}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.100 Struttura single storey equivalente.



Il grafico del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  è il seguente:

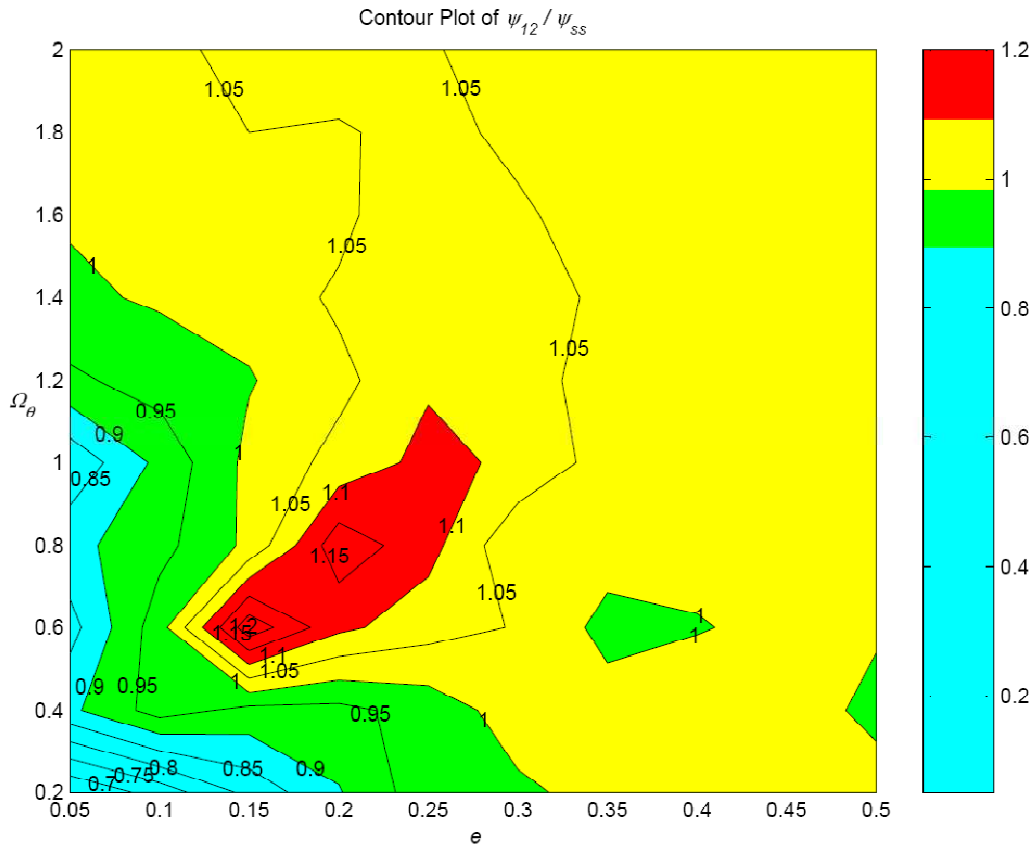


Fig. 6.101 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 6.4.2.7 Riassunto

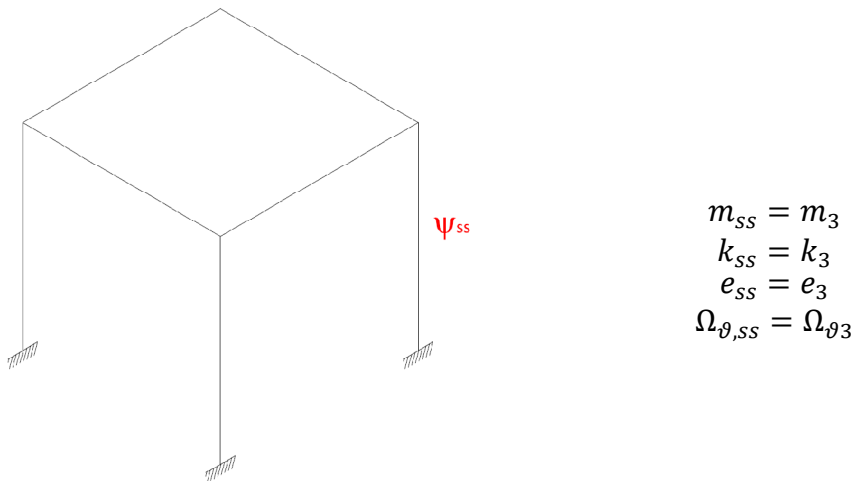
Osservando i grafici ottenuti si può dedurre che, anche per il secondo piano, il single storey che meglio ne coglie il comportamento ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 1}
 \end{aligned}$$

### 6.4.3 Terzo piano

Come per il secondo piano, per il terzo piano si considerano sei single storey: il primo avente le caratteristiche del terzo piano, il secondo caratterizzato da massa del terzo piano e rigidezza pari alla somma delle rigidezze del secondo e terzo piano, il terzo con massa del terzo e rigidezza totale, il quarto con massa e rigidezza del secondo e terzo piano, il quinto con massa del secondo e terzo piano e rigidezza totale, l'ultimo con rigidezza e massa totali.

#### 6.4.3.1 Caratteristiche del terzo piano



**Fig. 6.102** *Struttura single storey equivalente.*

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{SS}$  sono i seguenti:

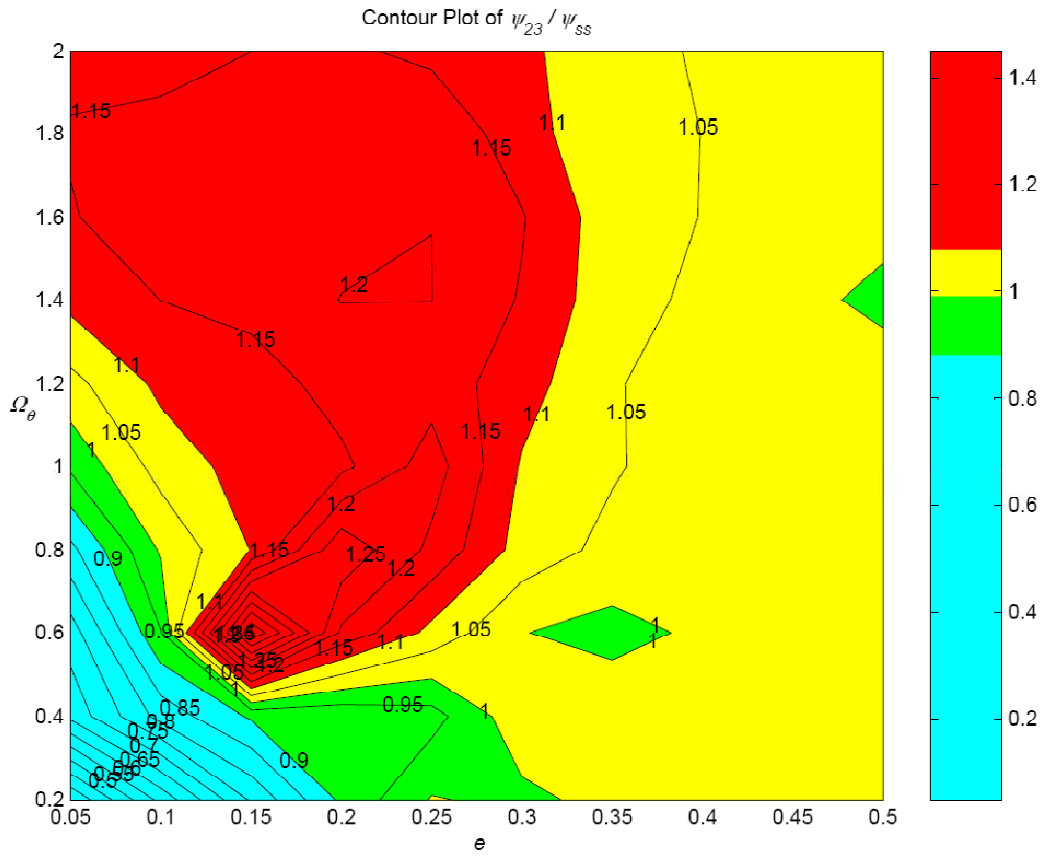
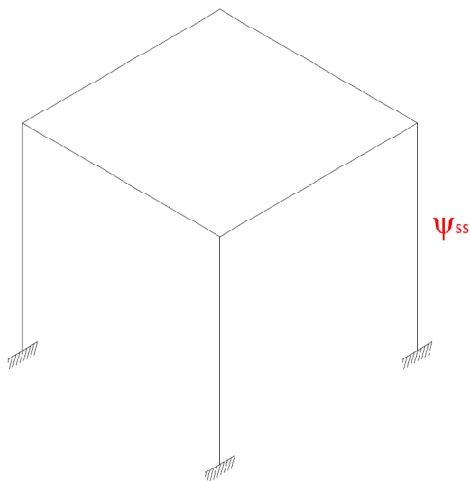


Fig. 6.103 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 6.4.3.2 Caratteristiche di rigidità del secondo e terzo piano



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.104 Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{SS}$  sono i seguenti:

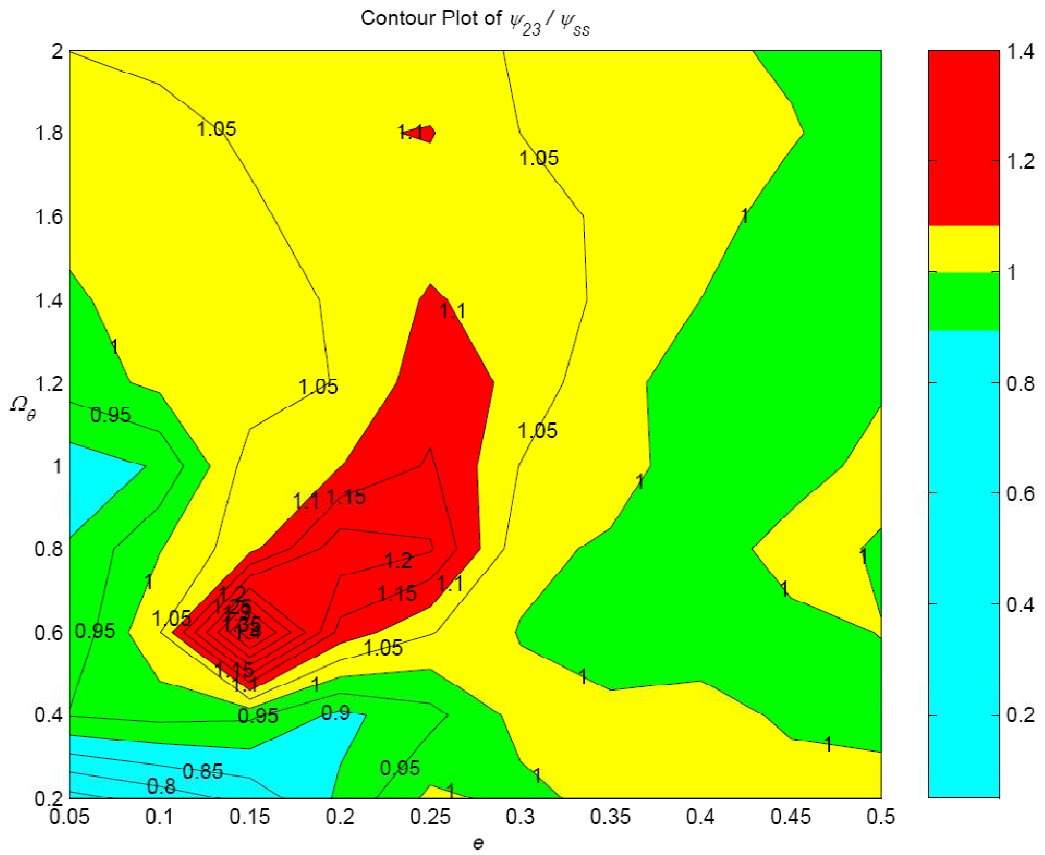
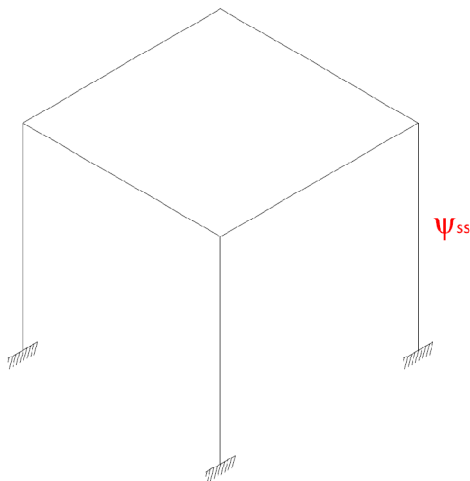


Fig. 6.105 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{SS}$ .

### 6.4.3.3 Caratteristiche di rigidità totali



$$\begin{aligned}
 m_{SS} &= m_3 \\
 k_{SS} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{SS} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,SS} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.106 Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:

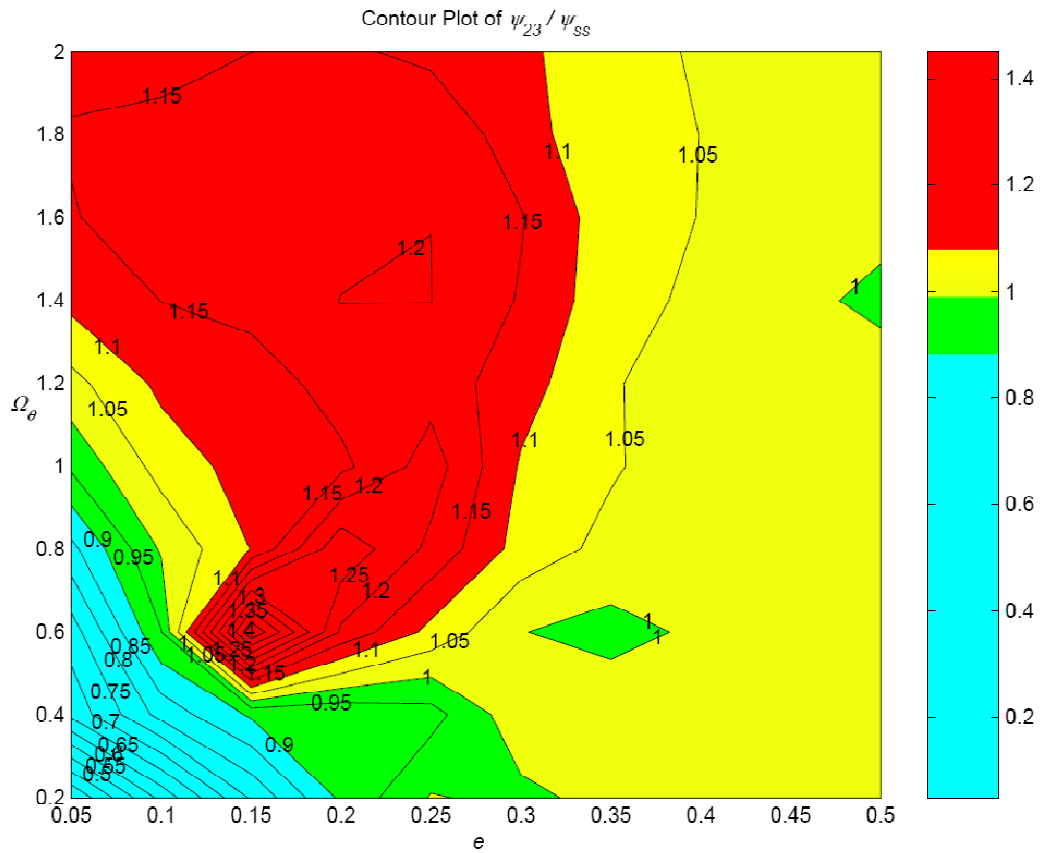
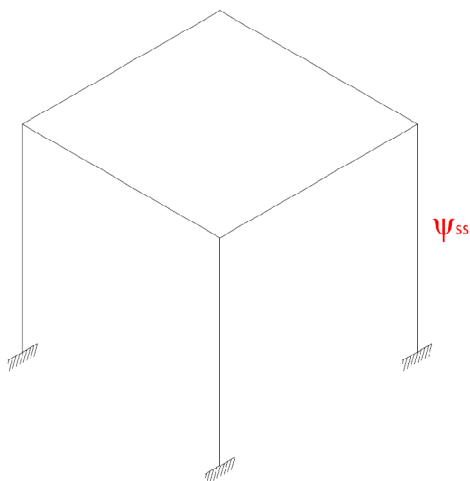


Fig. 6.107 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

#### 6.4.3.4 Caratteristiche di massa e rigidezza del secondo e terzo piano



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.108 Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:

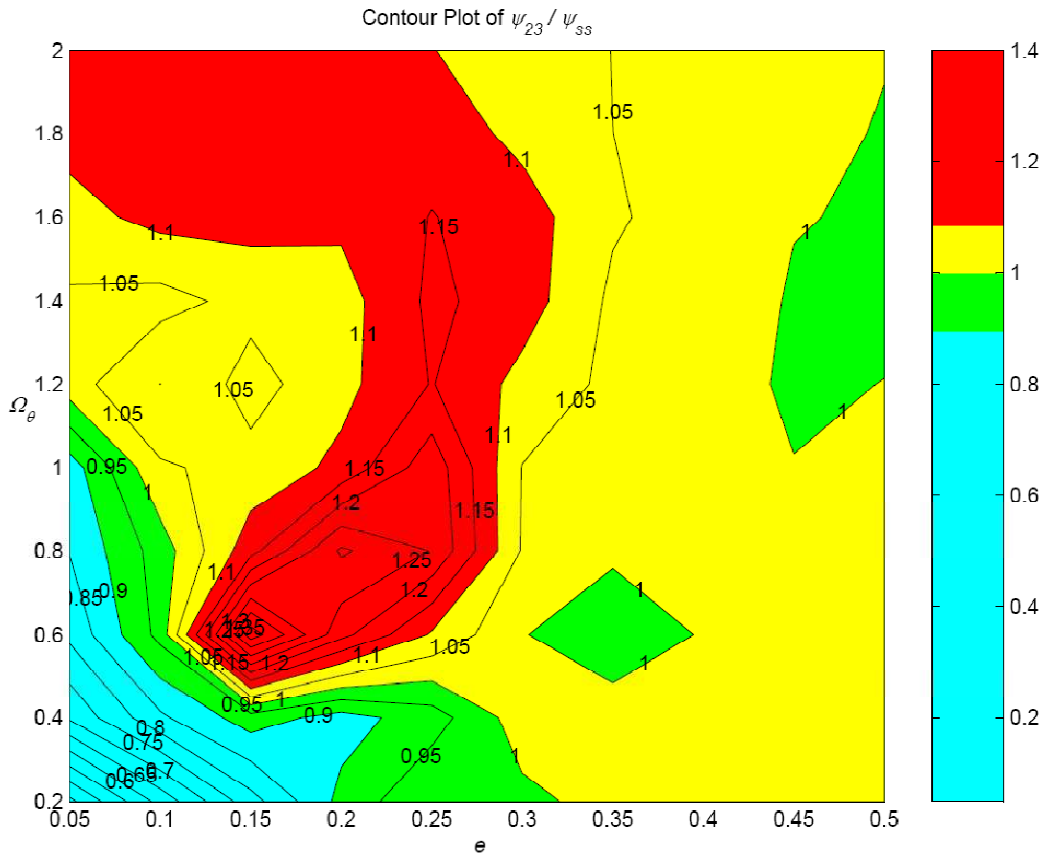
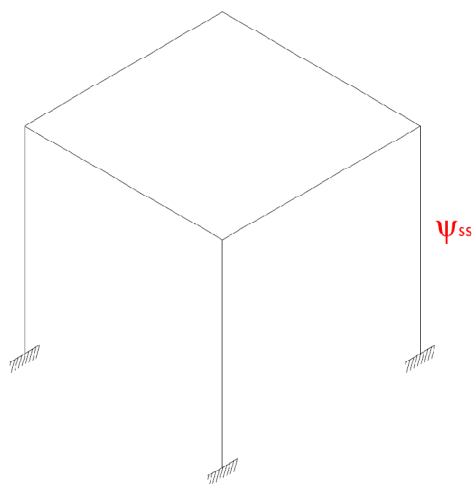


Fig. 6.109 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 6.4.3.5 Caratteristiche di massa e del secondo e terzo piano e rigidezza totale



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.110 Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:

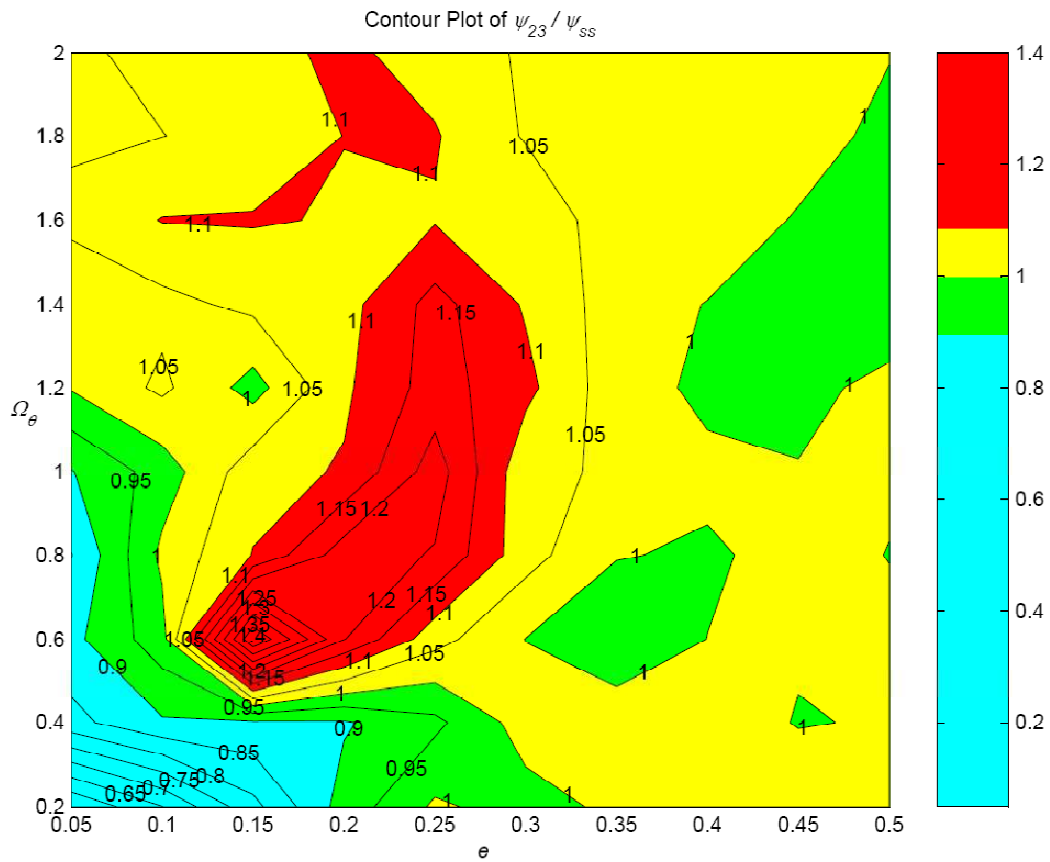
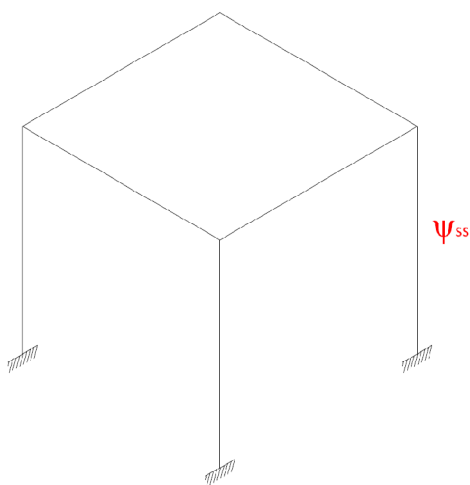


Fig. 6.111 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

#### 6.4.3.6 Caratteristiche totali



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 2}$$

Fig. 6.112 Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:

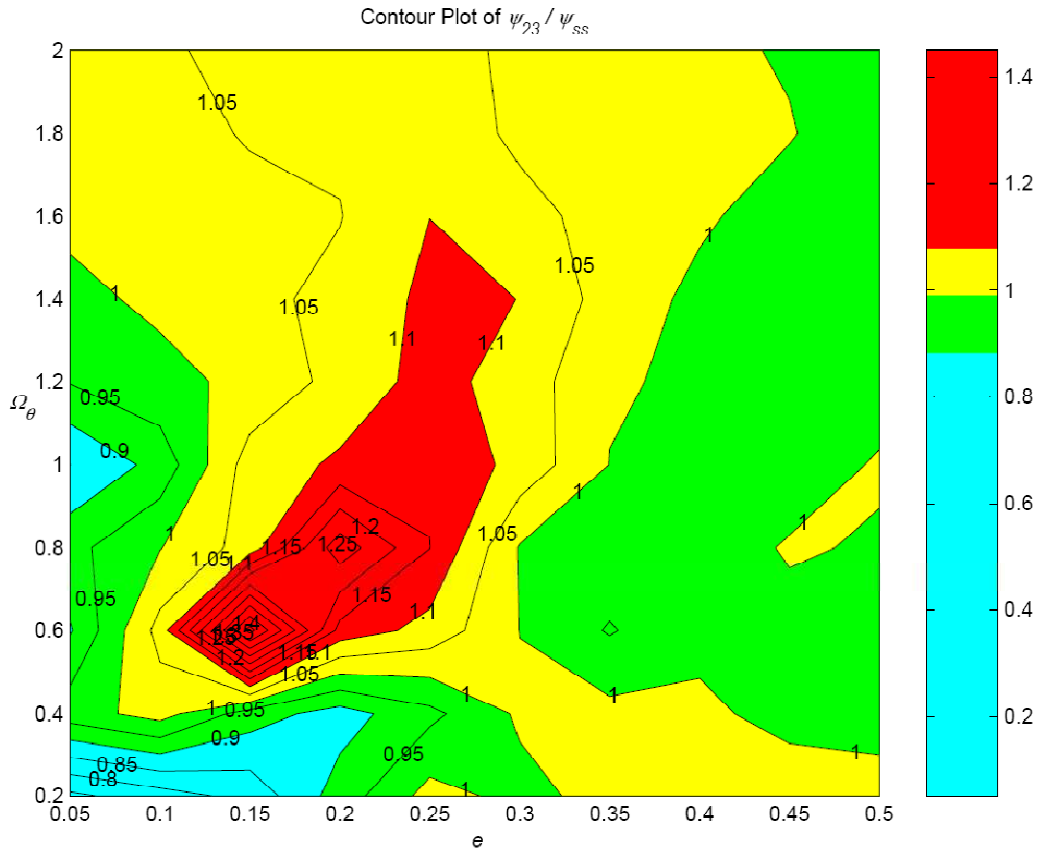


Fig. 6.113 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 6.4.3.7 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre come il single storey che meglio rappresenta il comportamento del terzo piano della struttura multi storey sia, come per il primo e il secondo piano, quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  rimane pari od inferiore all'unità per una porzione più estesa del dominio.

Il single storey cercato, quindi, ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$



### 6.4.4 Riassunto

Per chiarezza, si riassume graficamente quanto ottenuto:

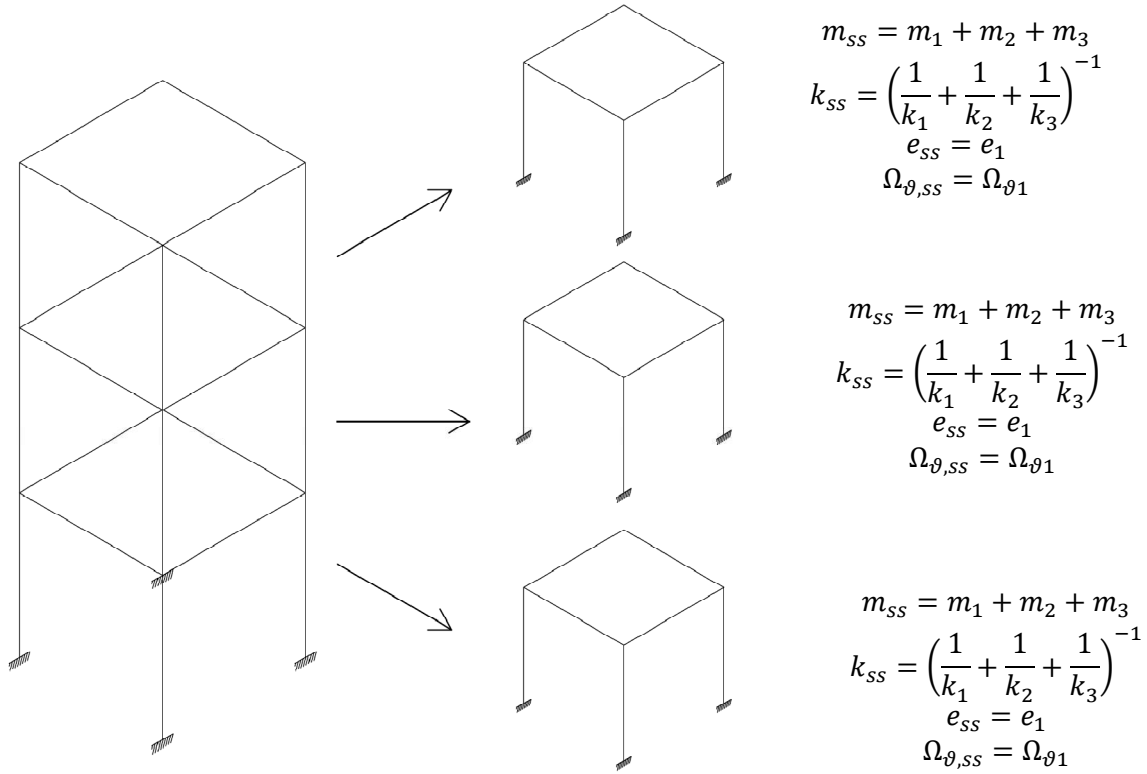


Fig. 6.114 Riassunto dei risultati ottenuti.

### 6.5 Caso 5: Aumento di massa

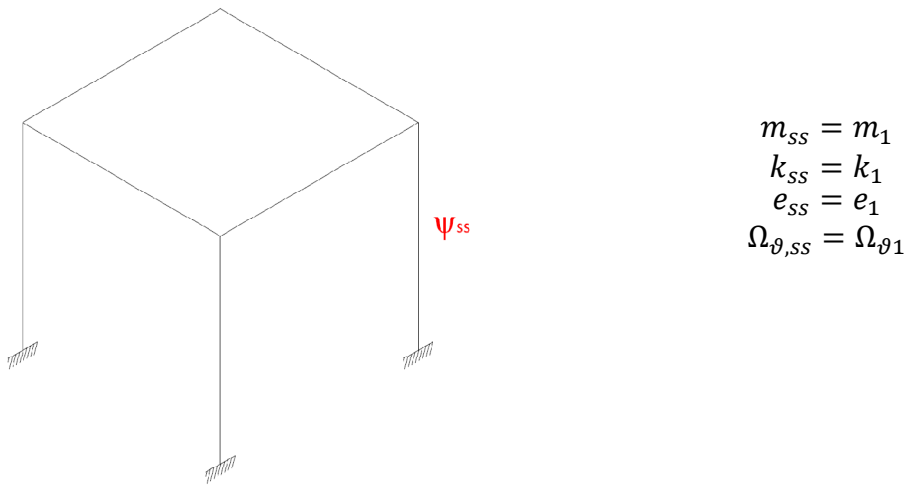
In questo caso si è deciso di variare la massa del secondo e del terzo piano; si considerano, infatti, i seguenti valori per i rapporti  $R_{e,i}$ ,  $R_{m,i}$ ,  $R_{k,i}$ ,  $R_{\Omega_{\vartheta},i}$ :

$$\begin{aligned}
 R_{e,2} &= R_{k,2} = R_{\Omega_{\vartheta},2} = 1 \\
 R_{m,2} &= 2 \\
 R_{e,3} &= R_{k,3} = R_{\Omega_{\vartheta},3} = 1 \\
 R_{m,3} &= 2
 \end{aligned}
 \tag{6.5}$$

## 6.5.1 Primo Piano

In questo caso si sono considerati due single storey equivalenti: il primo avente le caratteristiche del primo piano, mentre il secondo ha rigidezza e massa pari a quelle dell'intera struttura.

### 6.5.1.1 Caratteristiche del primo piano



**Fig. 6.115** *Struttura single storey equivalente.*

Il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

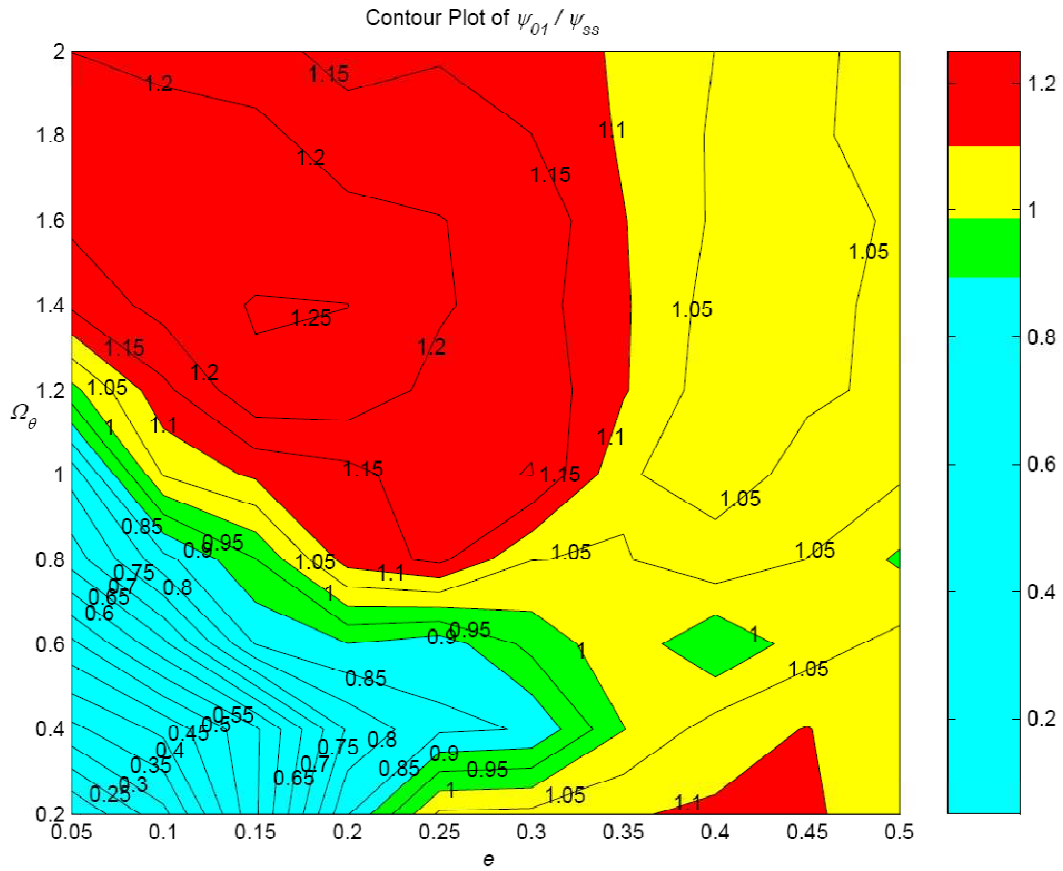
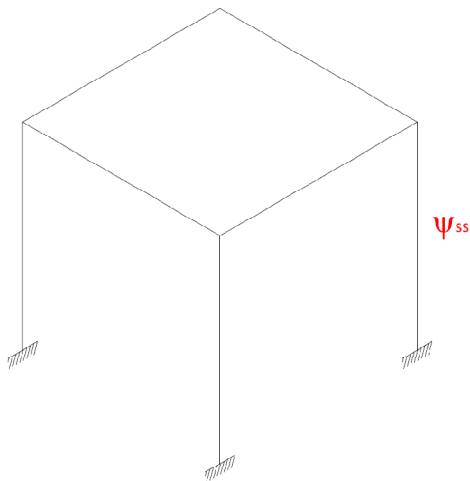


Fig. 6.116 Rapporto  $\psi_{01} / \psi_{ss}$ .

### 6.5.1.2 Caratteristiche totali



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.117 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  è il seguente:

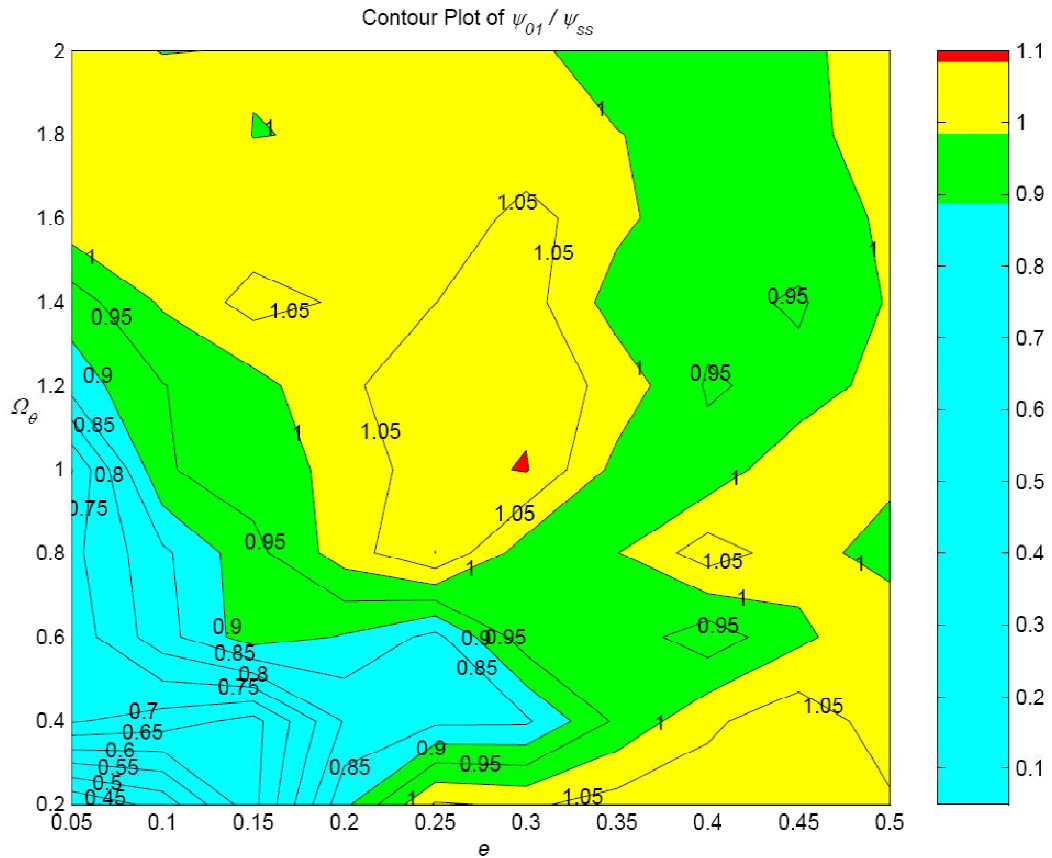


Fig. 6.118 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 6.5.1.3 Riassunto

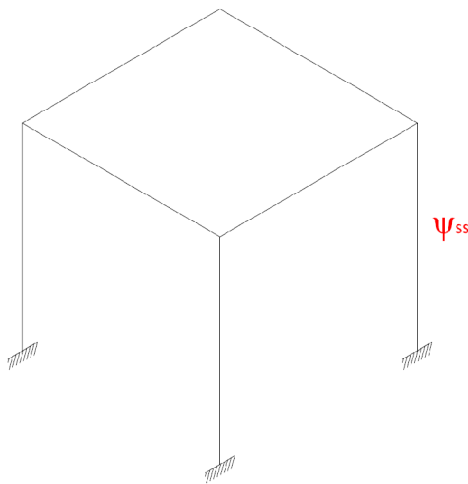
Osservando i grafici ottenuti risulta evidente come, anche in questo caso, il single storey che meglio coglie il comportamento del primo piano della struttura multi storey considerata ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

## 6.5.2 Secondo piano

Per il secondo piano si considerano sei single storey: il primo avente le caratteristiche del secondo piano, il secondo caratterizzato da massa del secondo piano e rigidezza pari alla somma delle rigidezze del secondo e terzo piano, il terzo con massa del secondo piano e rigidezza totale, il quarto con massa e rigidezza del secondo e terzo piano, il quinto con massa del secondo e terzo piano e rigidezza totale, l'ultimo con rigidezza e massa totali.

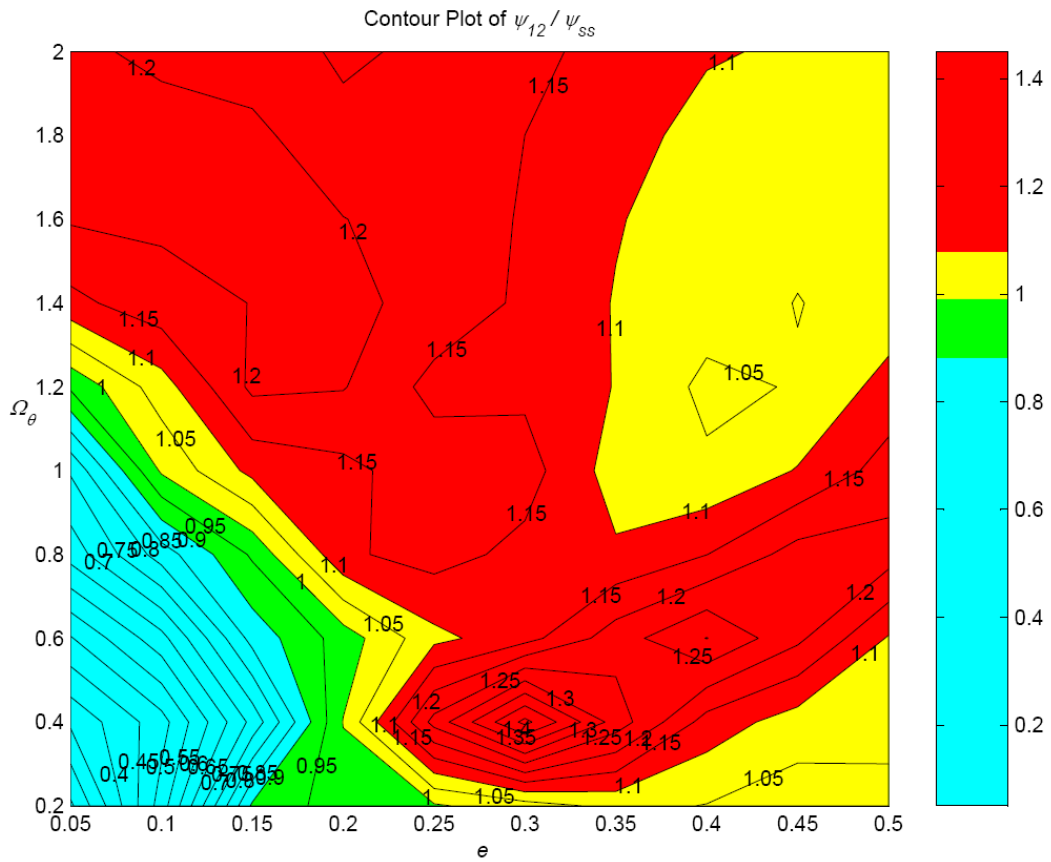
### 6.5.2.1 Caratteristiche del secondo piano



$$\begin{aligned} m_{ss} &= m_2 \\ k_{ss} &= k_2 \\ e_{ss} &= e_2 \\ \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2} \end{aligned}$$

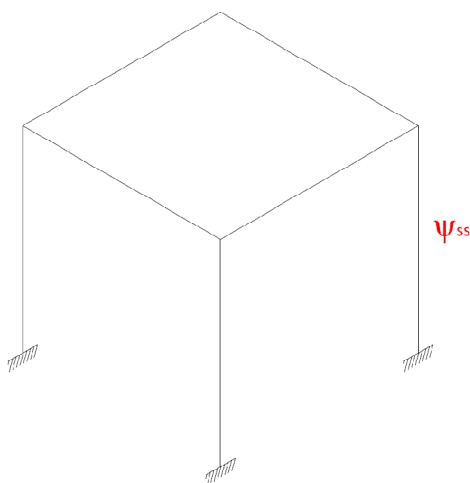
**Fig. 6.119** *Struttura single storey equivalente.*

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:



**Fig. 6.120** Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 6.5.2.2 Caratteristiche di rigidità del secondo e terzo piano



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 2}
 \end{aligned}$$

**Fig. 6.121** Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

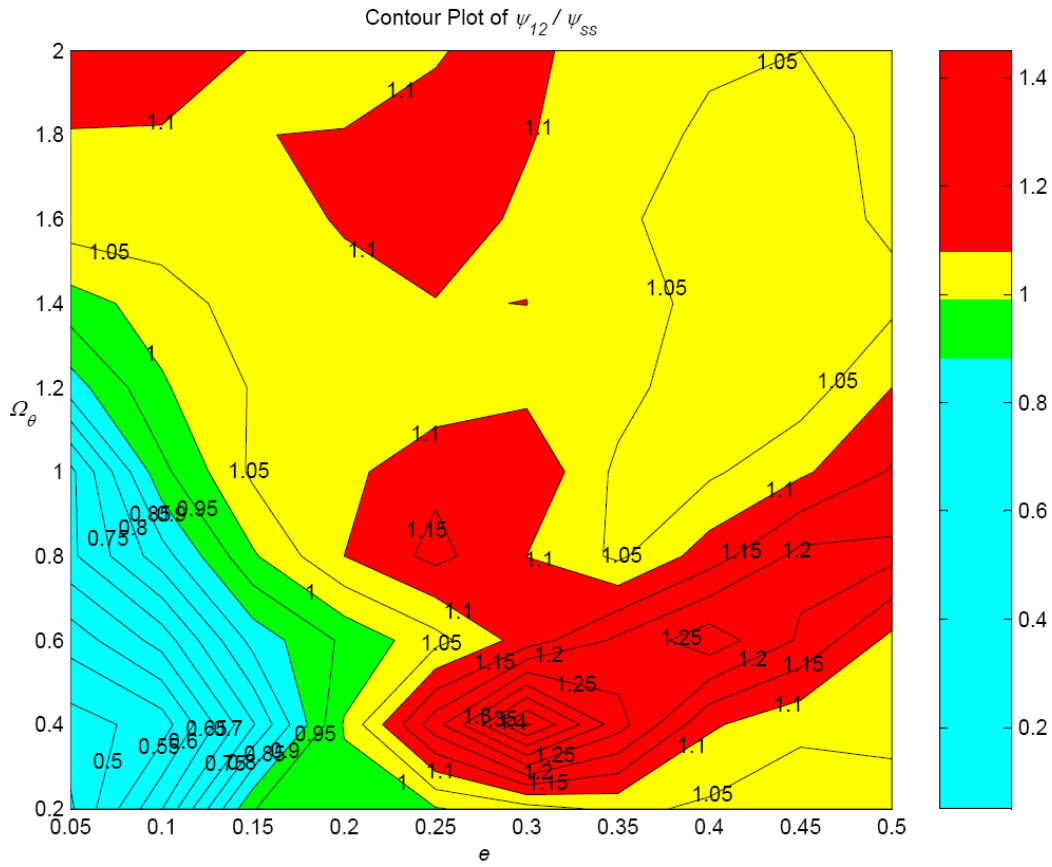
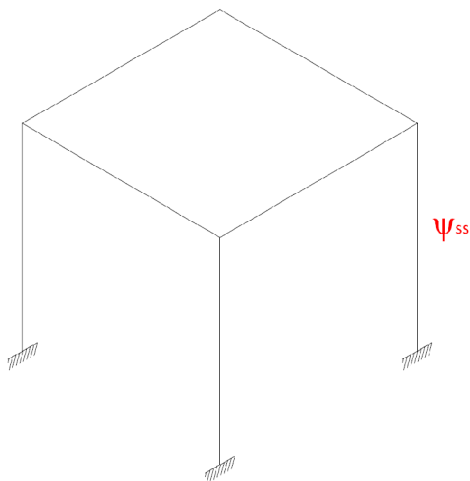


Fig. 6.122 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 6.5.2.3 Caratteristiche di rigidezza totali



$$m_{ss} = m_2$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 2}$$

Fig. 6.123 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

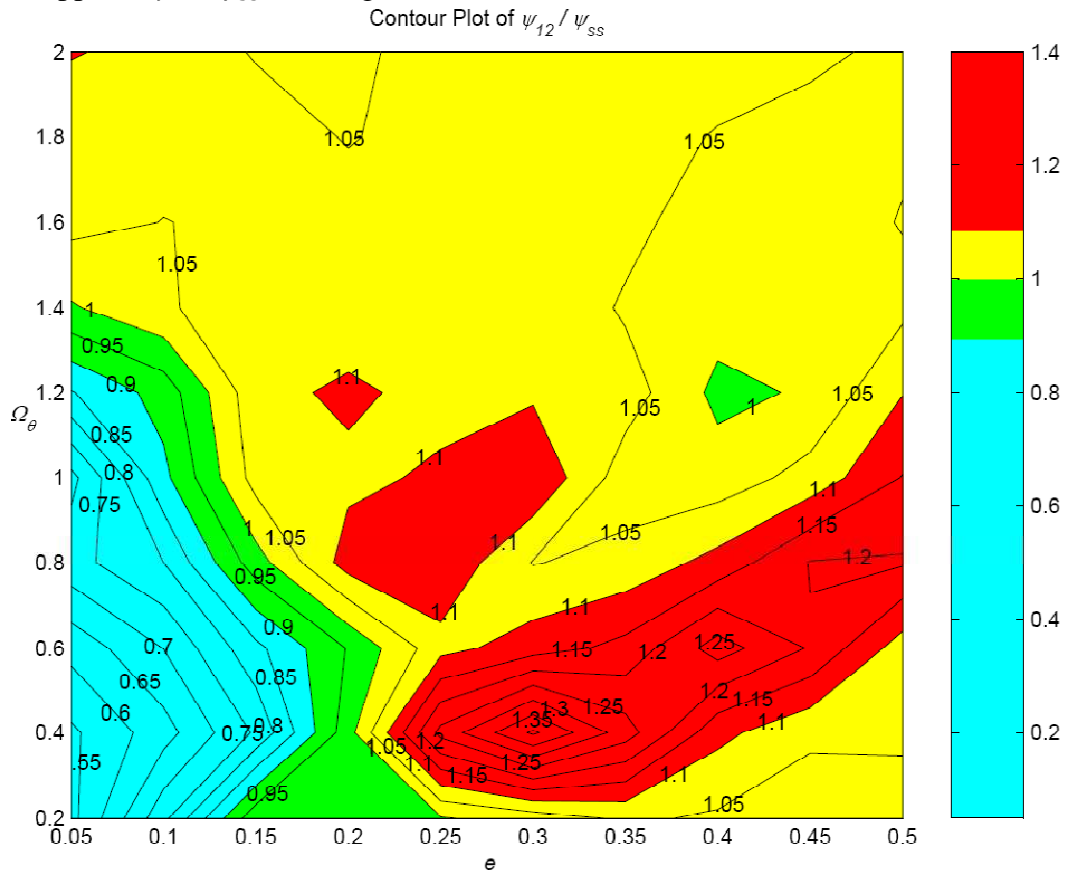
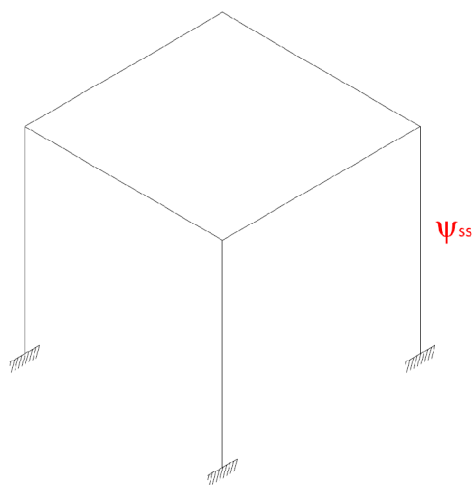


Fig. 6.124 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

#### 6.5.2.4 Caratteristiche di massa e rigidezza del secondo e terzo piano



$$m_{ss} = m_2 + m_3$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 2}$$

Fig. 6.125 Struttura single storey equivalente.



Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

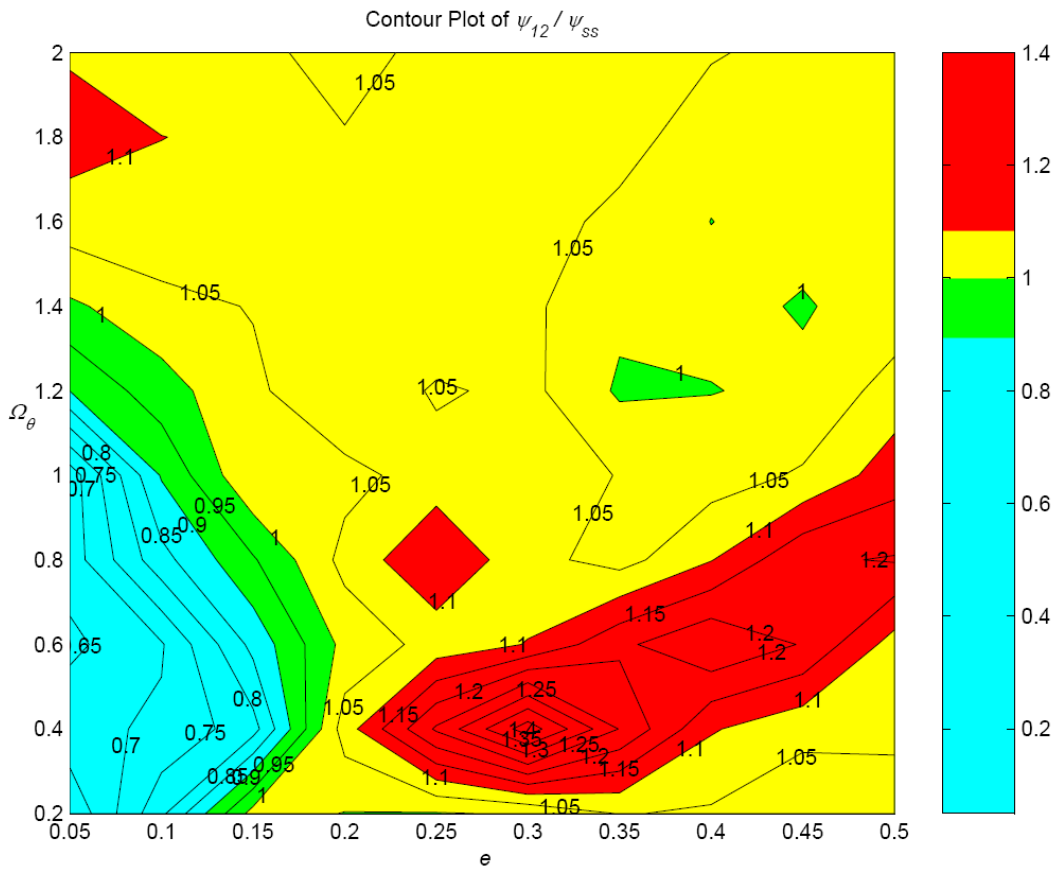
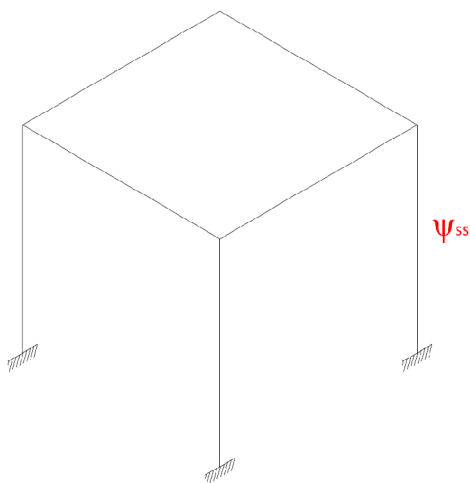


Fig. 6.126 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 6.5.2.5 Caratteristiche di massa del secondo e terzo piano e rigidezza totale



$$m_{ss} = m_2 + m_3$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 2}$$

Fig. 6.127 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

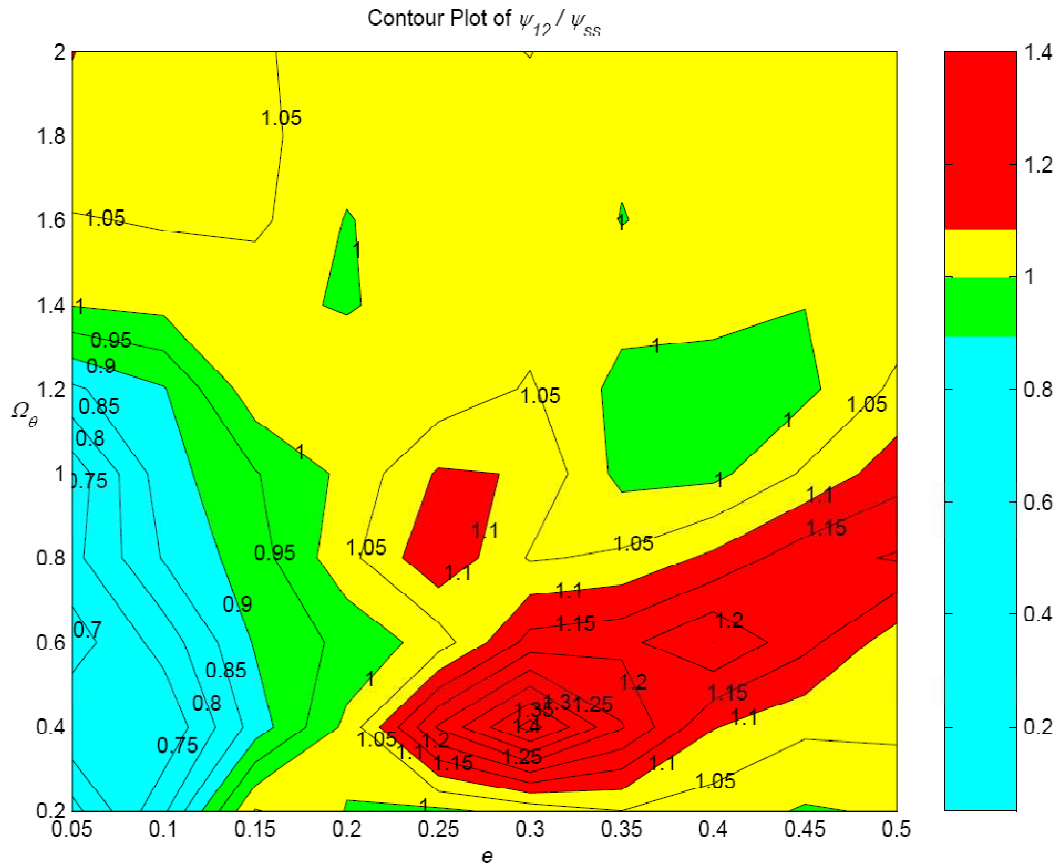
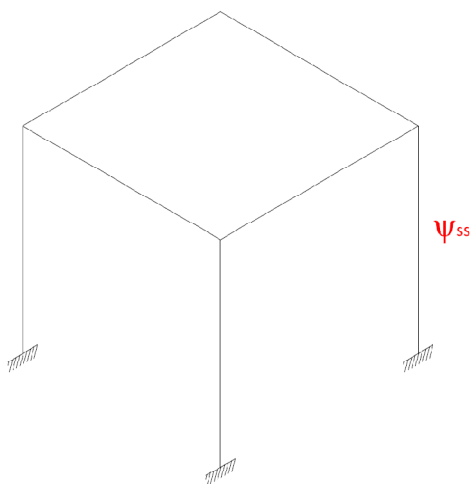


Fig. 6.128 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 6.5.2.6 Caratteristiche totali



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 2}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.129 Struttura single storey equivalente.

Il grafico del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  è il seguente:

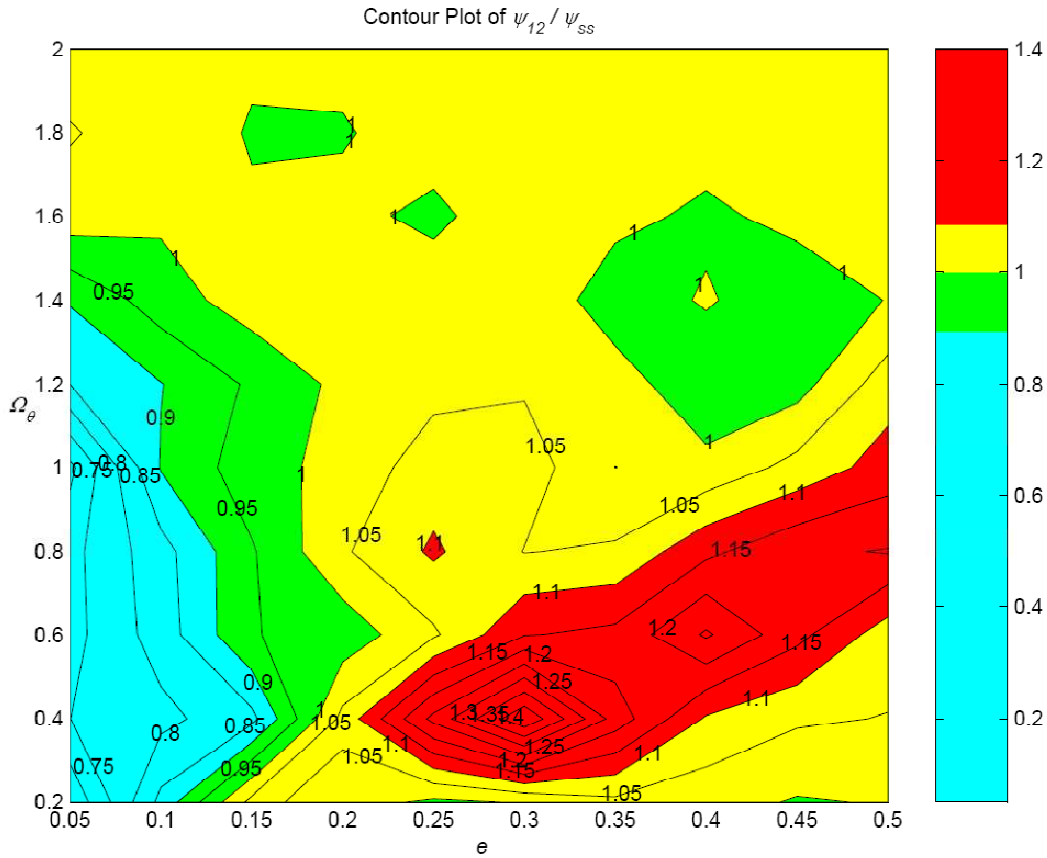


Fig. 6.130 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 6.5.2.7 Riassunto

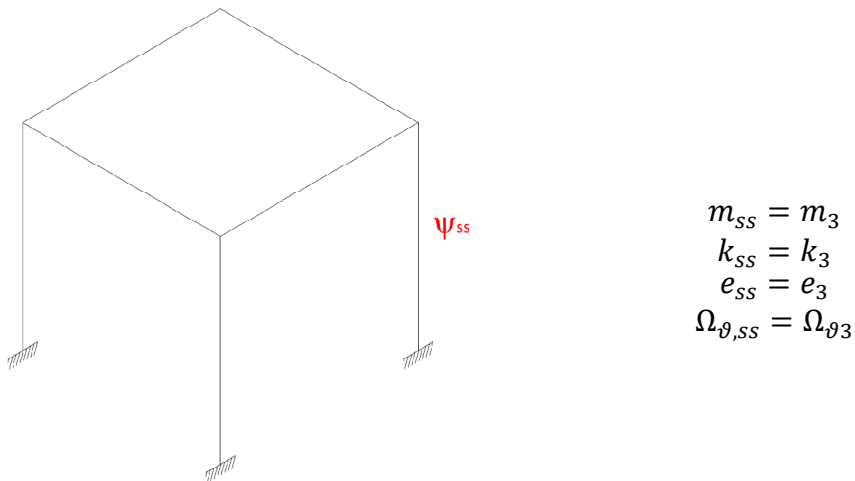
Osservando i grafici ottenuti si può dedurre che, anche per il secondo piano, il single storey che meglio ne coglie il comportamento ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 1}
 \end{aligned}$$

### 6.5.3 Terzo piano

Come per il secondo piano, per il terzo piano si considerano sei single storey: il primo avente le caratteristiche del terzo piano, il secondo caratterizzato da massa del terzo piano e rigidezza pari alla somma delle rigidezze del secondo e terzo piano, il terzo con massa del terzo e rigidezza totale, il quarto con massa e rigidezza del secondo e terzo piano, il quinto con massa del secondo e terzo piano e rigidezza totale, l'ultimo con rigidezza e massa totali.

#### 6.5.3.1 Caratteristiche del terzo piano



**Fig. 6.131** *Struttura single storey equivalente.*

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{SS}$  sono i seguenti:

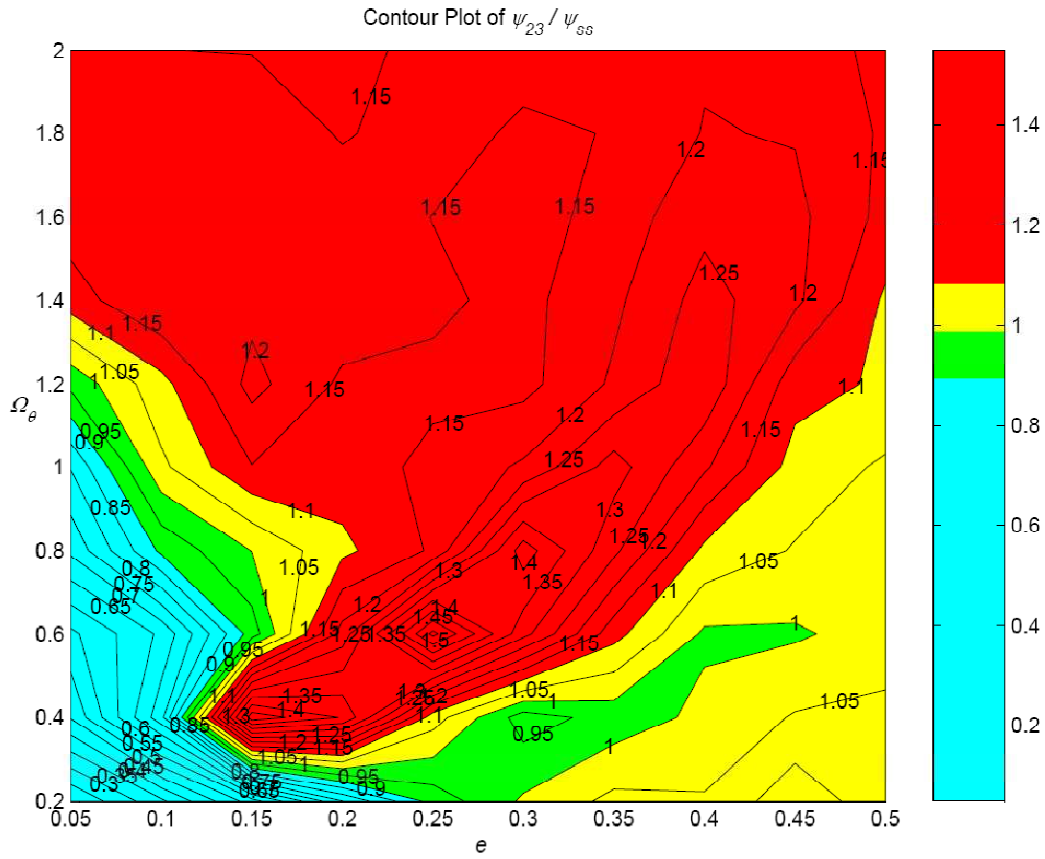
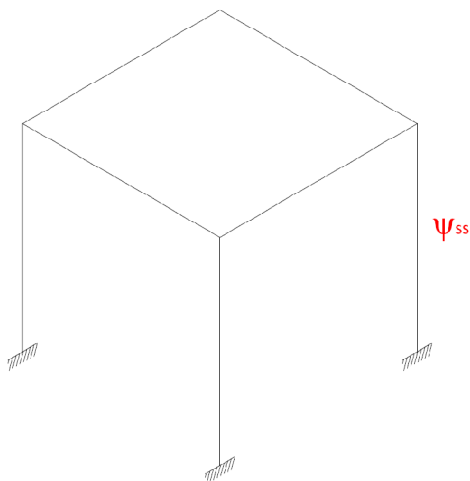


Fig. 6.131 Rapporto  $\psi_{23} / \psi_{ss}$ .

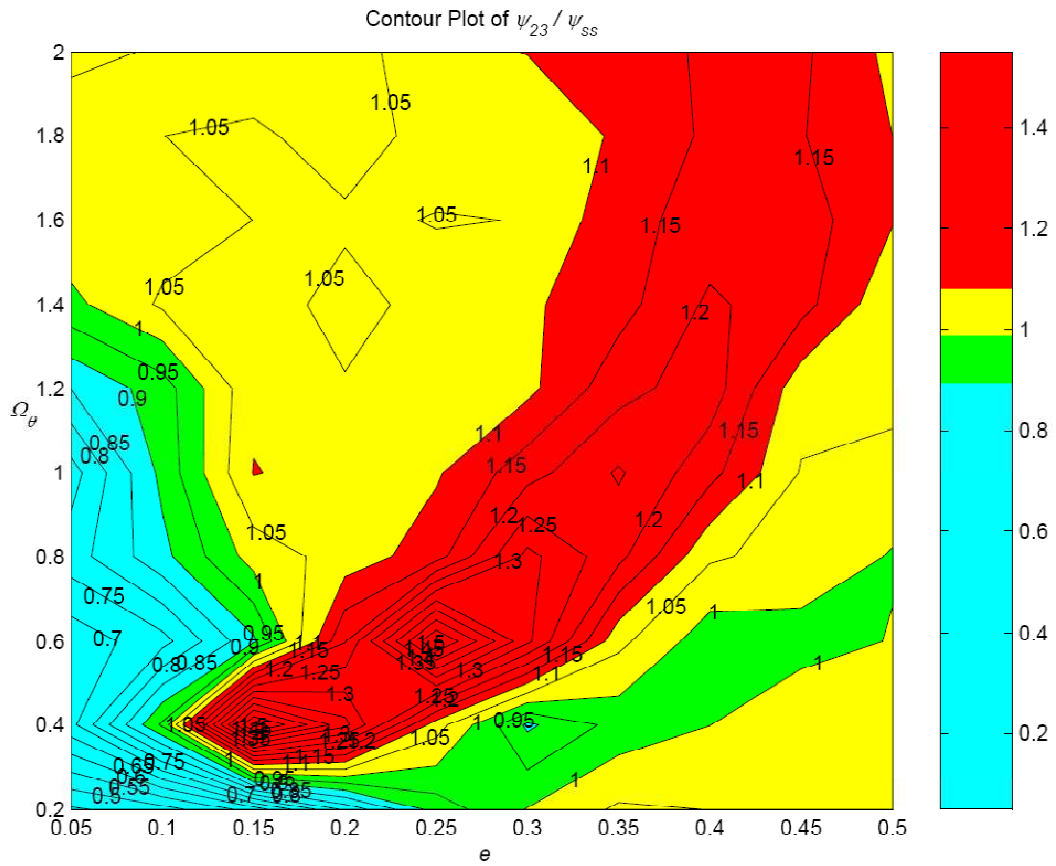
### 6.5.3.2 Caratteristiche di rigidità del secondo e terzo piano



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

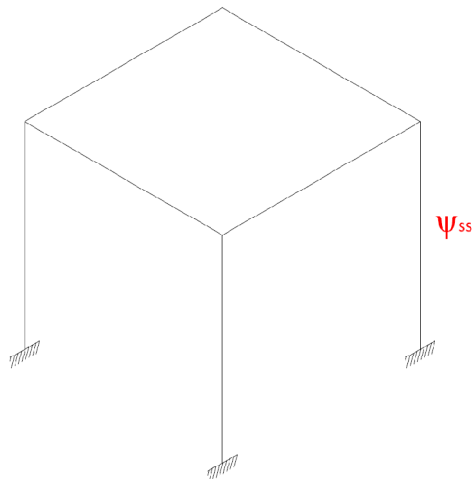
Fig. 6.132 Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:



**Fig. 6.133** Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 6.5.3.3 Caratteristiche di rigidezza totali



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

**Fig. 6.134** Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:

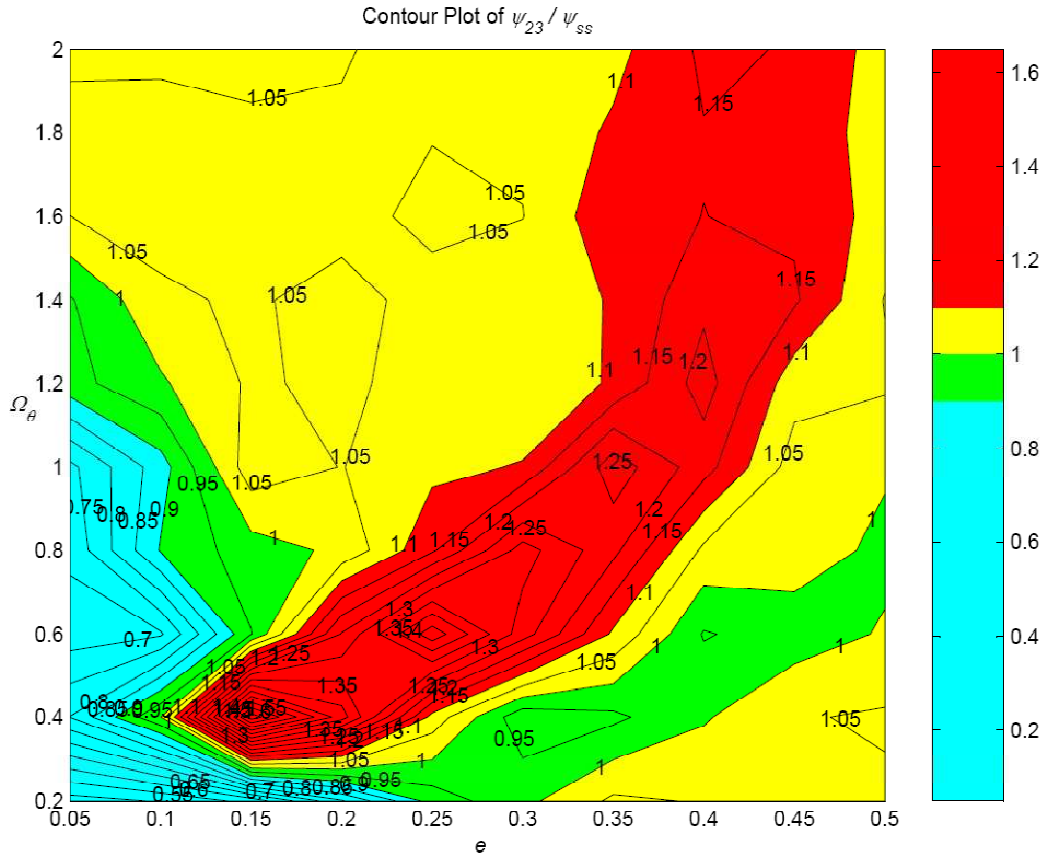
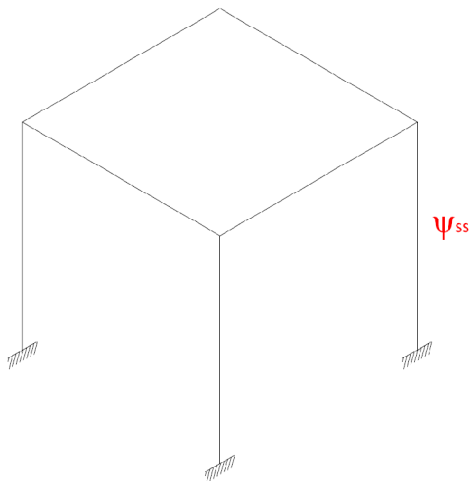


Fig. 6.135 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 6.5.3.4 Caratteristiche di massa e rigidezza del secondo e terzo piano



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.136 Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:

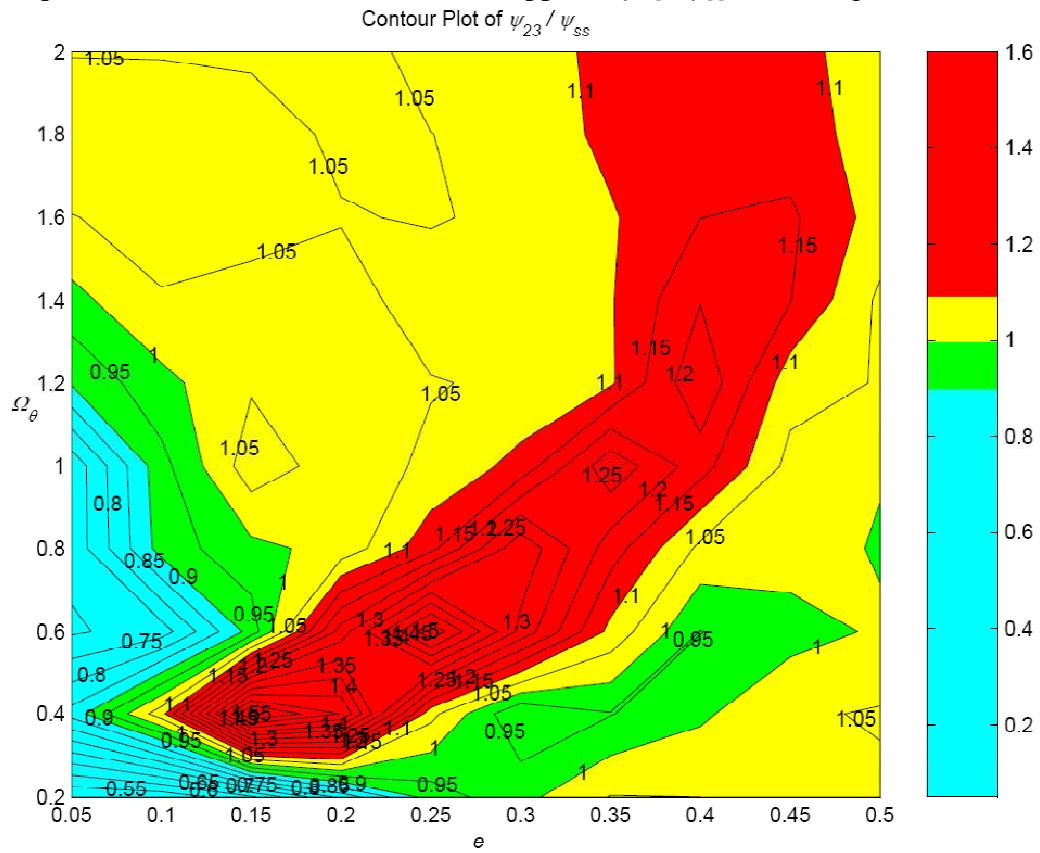
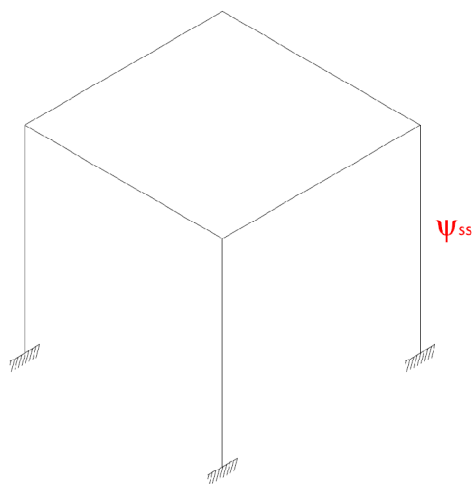


Fig. 6.137 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 6.5.3.5 Caratteristiche di massa e del secondo e terzo piano e rigidezza totale



$$m_{ss} = m_2 + m_3$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 2}$$

Fig. 6.138 Struttura single storey equivalente.



Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  sono i seguenti:

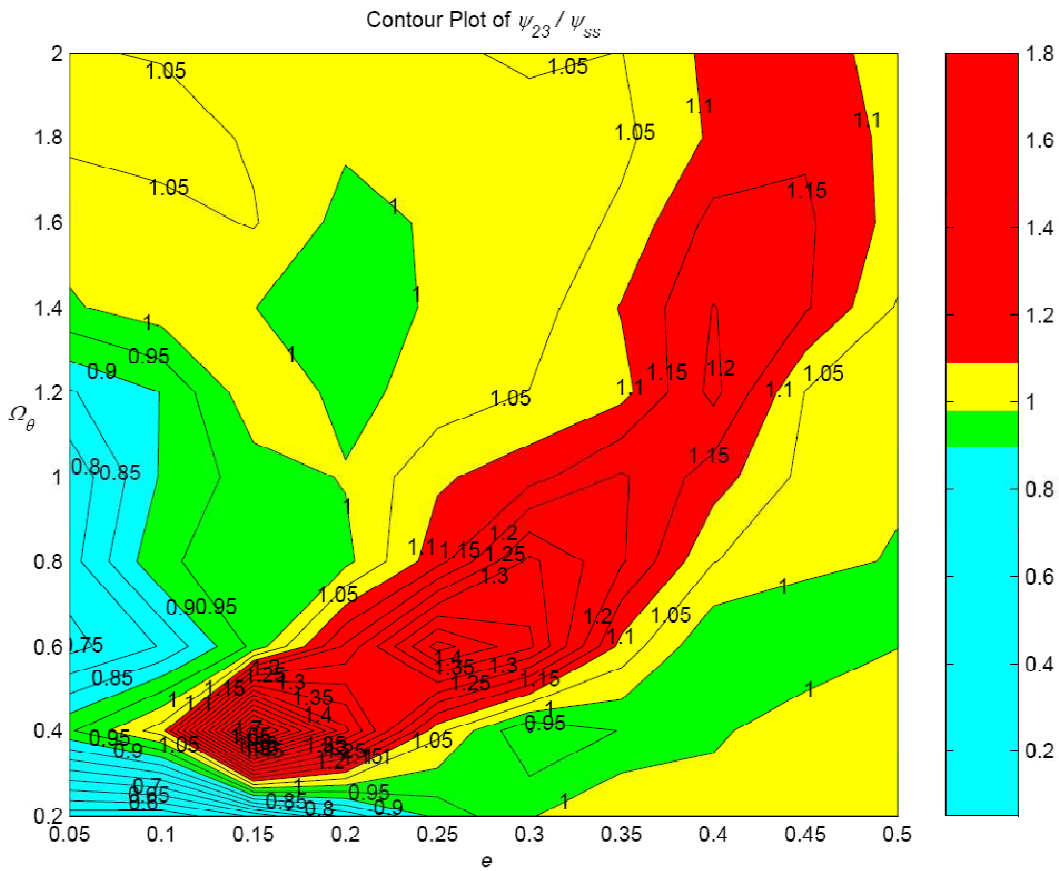
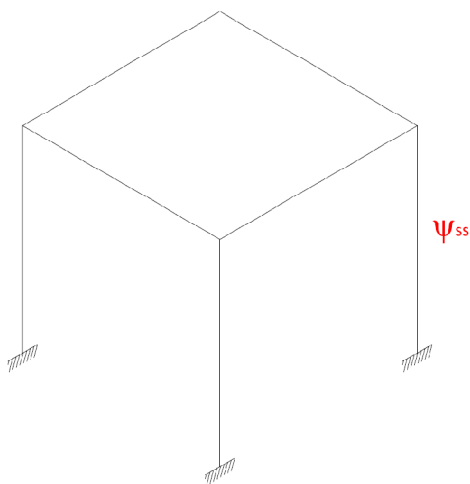


Fig. 6.139 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 6.5.3.6 Caratteristiche totali



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 2}$$

Fig. 6.140 Struttura single storey equivalente.

Per questo caso, i risultati in termini del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{SS}$  sono i seguenti:

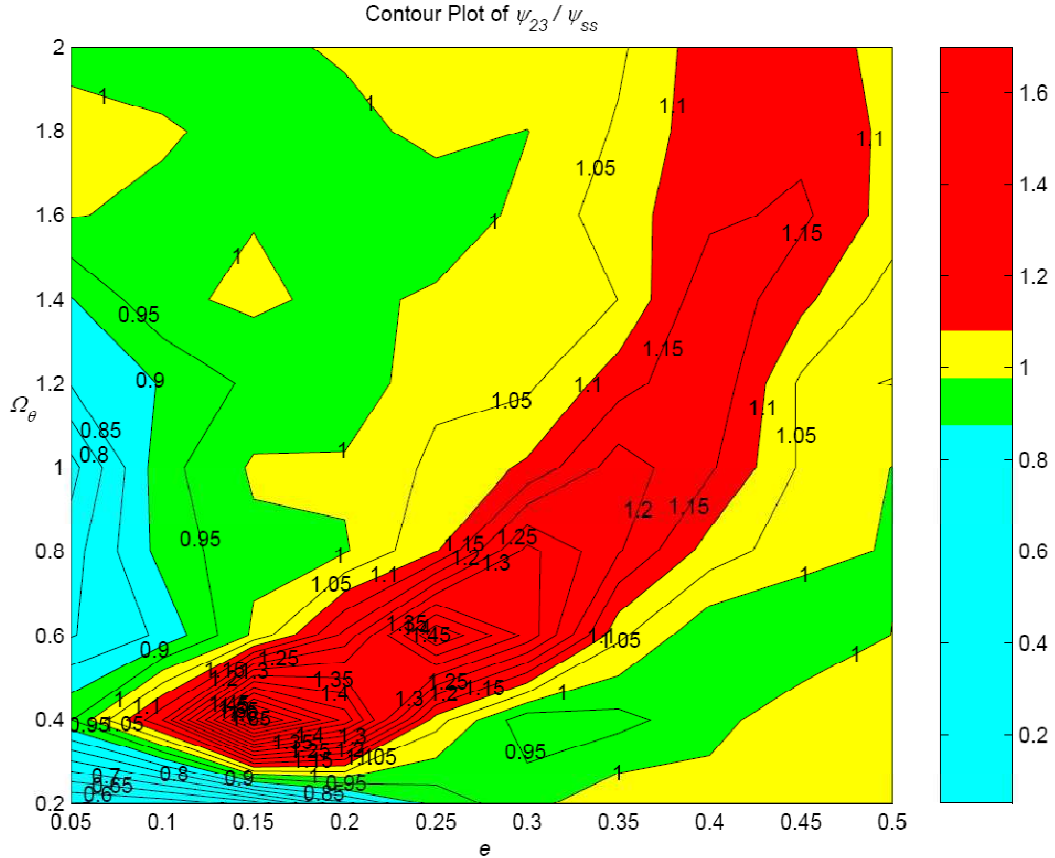


Fig. 6.141 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{SS}$ .

### 6.5.3.7 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre come il single storey che meglio rappresenta il comportamento del terzo piano della struttura multi storey sia, come per il primo e il secondo piano, quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{23}/\psi_{SS}$  rimane pari od inferiore all'unità per una porzione più estesa del dominio.

Il single storey cercato, quindi, ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{SS} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{SS} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{SS} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,SS} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

### 6.5.4 Riassunto

Per chiarezza, si riassume graficamente quanto ottenuto:

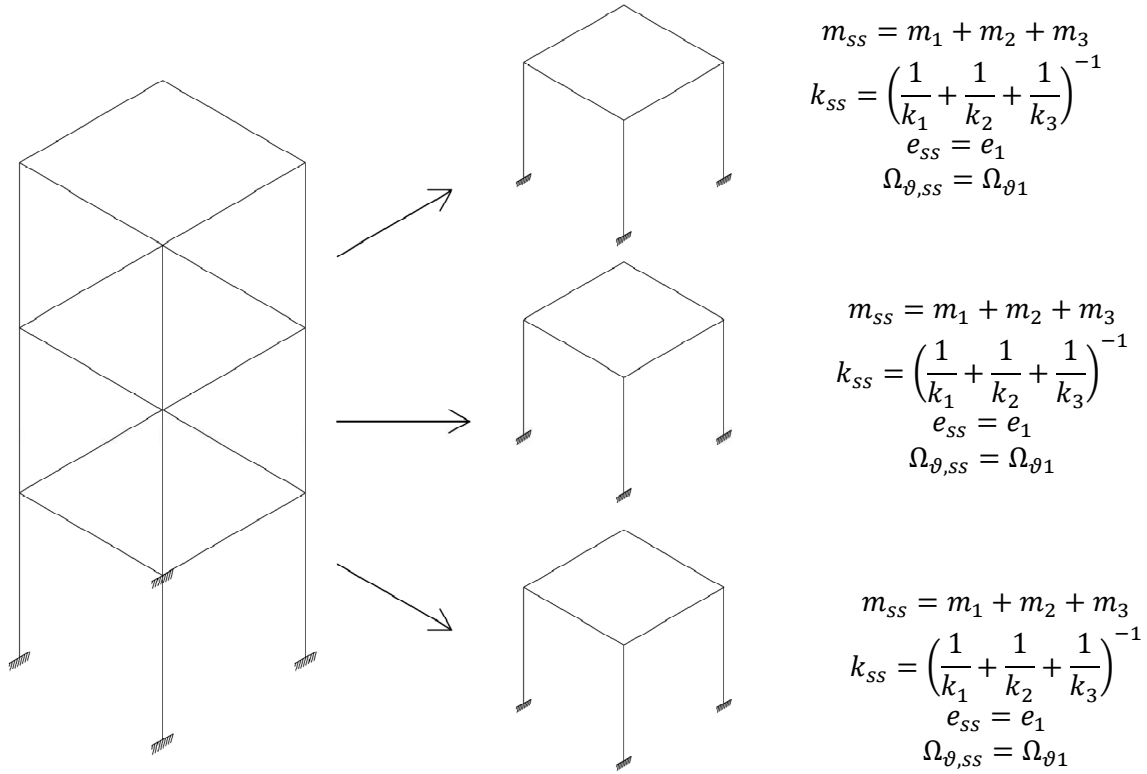


Fig. 6.142 Riassunto dei risultati ottenuti.

### 6.6 Caso 6: Diminuzione del parametro $\Omega_{\theta}$

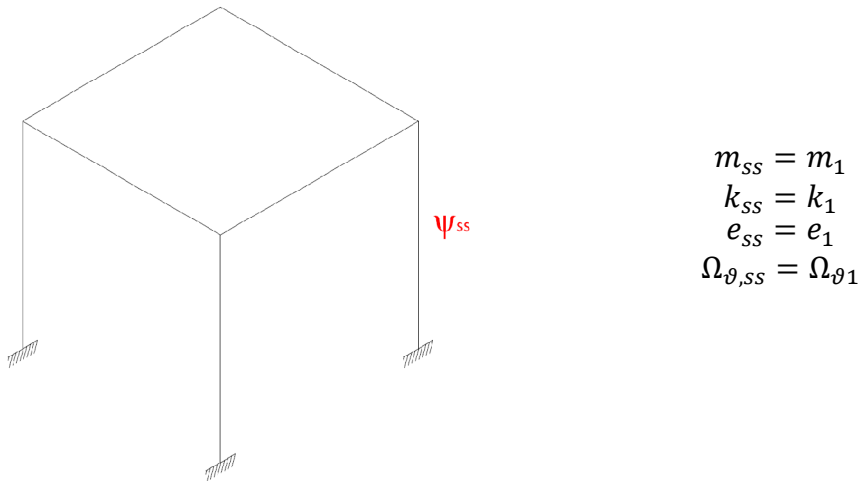
In questo caso a variare è il valore del parametro  $\Omega_{\theta}$ ; si considerano, quindi, i seguenti valori per i rapporti  $R_{e,i}$ ,  $R_{m,i}$ ,  $R_{k,i}$ ,  $R_{\Omega_{\theta},i}$ :

$$\begin{aligned}
 R_{m,2} &= R_{k,2} = R_{e,2} = 1 \\
 R_{\Omega_{\theta},2} &= 0.5 \\
 R_{m,3} &= R_{k,3} = R_{e,3} = 1 \\
 R_{\Omega_{\theta},3} &= 0.3
 \end{aligned}
 \tag{6.6}$$

### 6.6.1 Primo Piano

In questo caso si sono considerati due diversi single storey equivalenti. Il primo ha, come per gli altri casi, le caratteristiche del primo piano, mentre l'altro ha rigidezza e massa pari a quelle dell'intera struttura. Per queste due strutture si sono considerati diversi valori di  $\Omega_{\vartheta}$ ; per prima cosa si è utilizzato il parametro  $\Omega_{\vartheta}$  del primo piano, poi quello del secondo ed infine quello del terzo.

#### 6.6.1.1 Caratteristiche del primo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$



**Fig. 6.143** *Struttura single storey equivalente.*

Il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

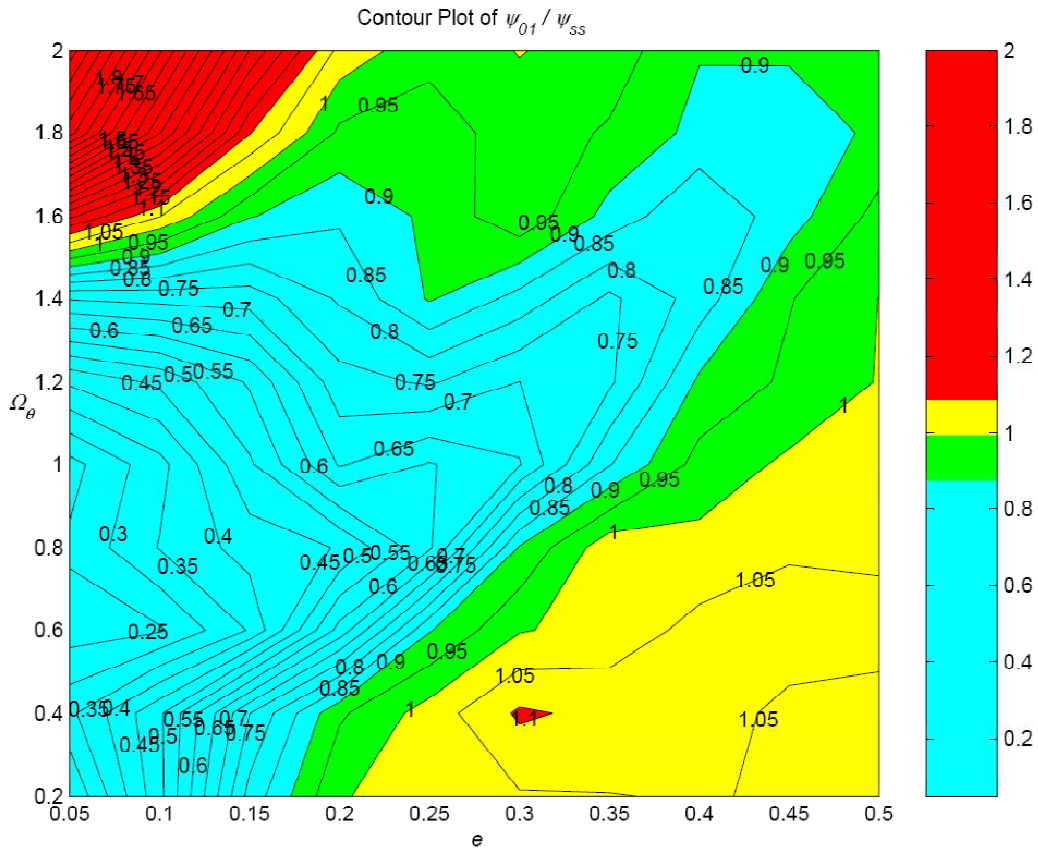


Fig. 6.144 Rapporto  $\psi_{01} / \psi_{ss}$ .

**6.6.1.2 Caratteristiche del primo piano con  $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta,2}$**

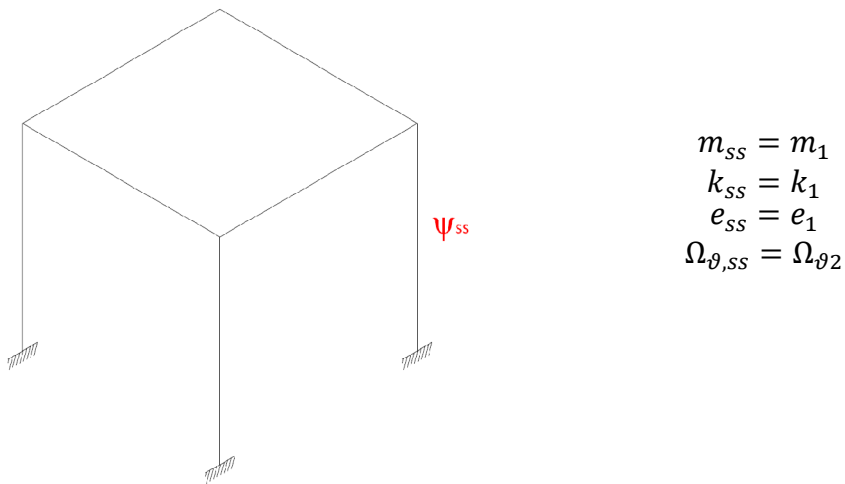


Fig. 6.145 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{SS}$  ha il seguente andamento:

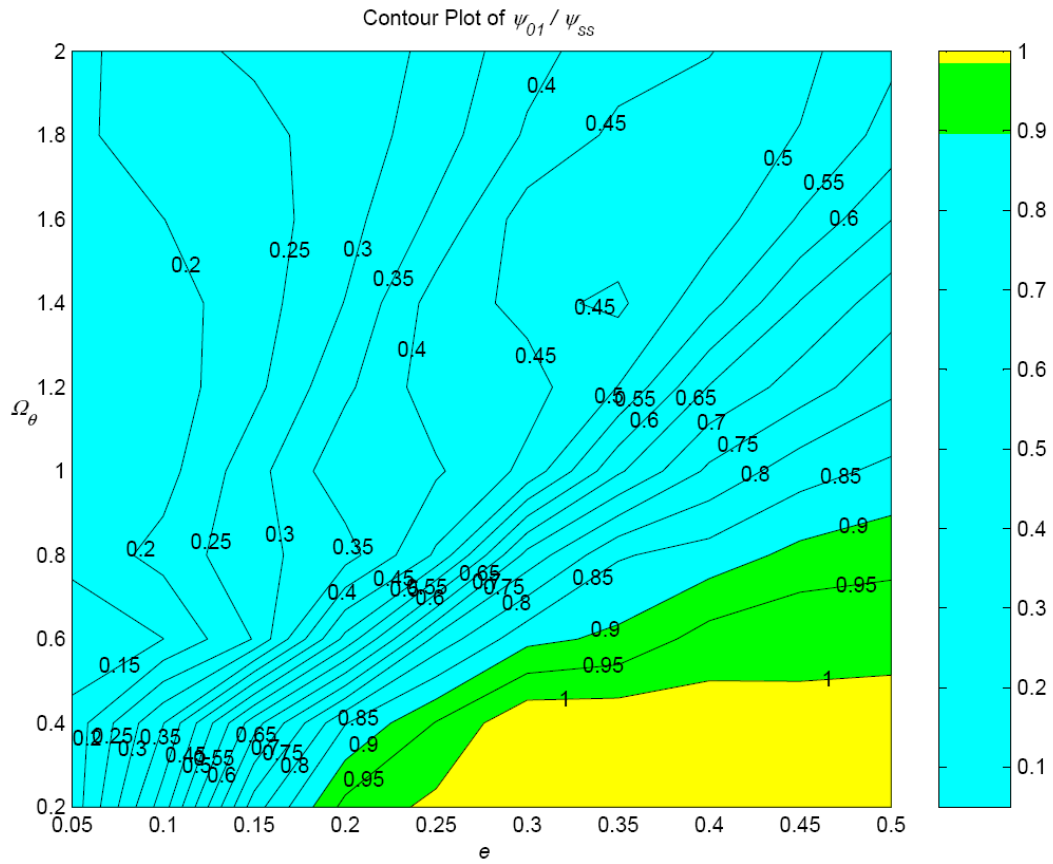


Fig. 6.146 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{SS}$ .

### 6.6.1.3 Caratteristiche del primo piano con $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta,3}$

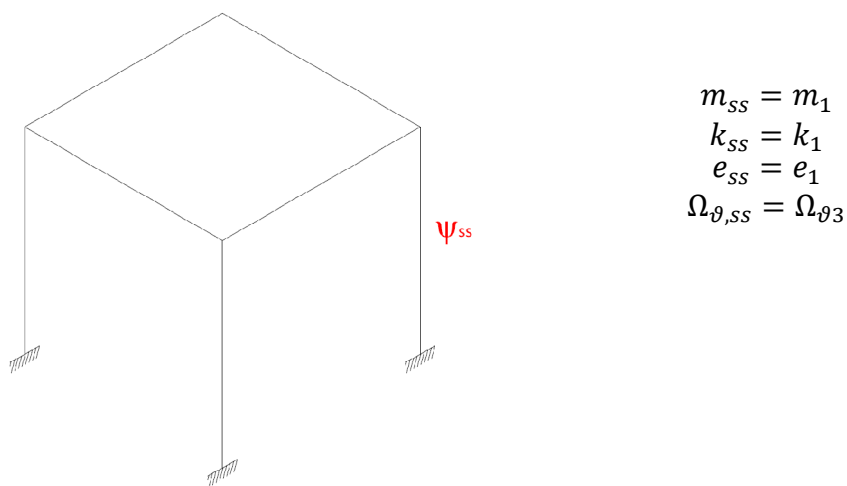


Fig. 6.147 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

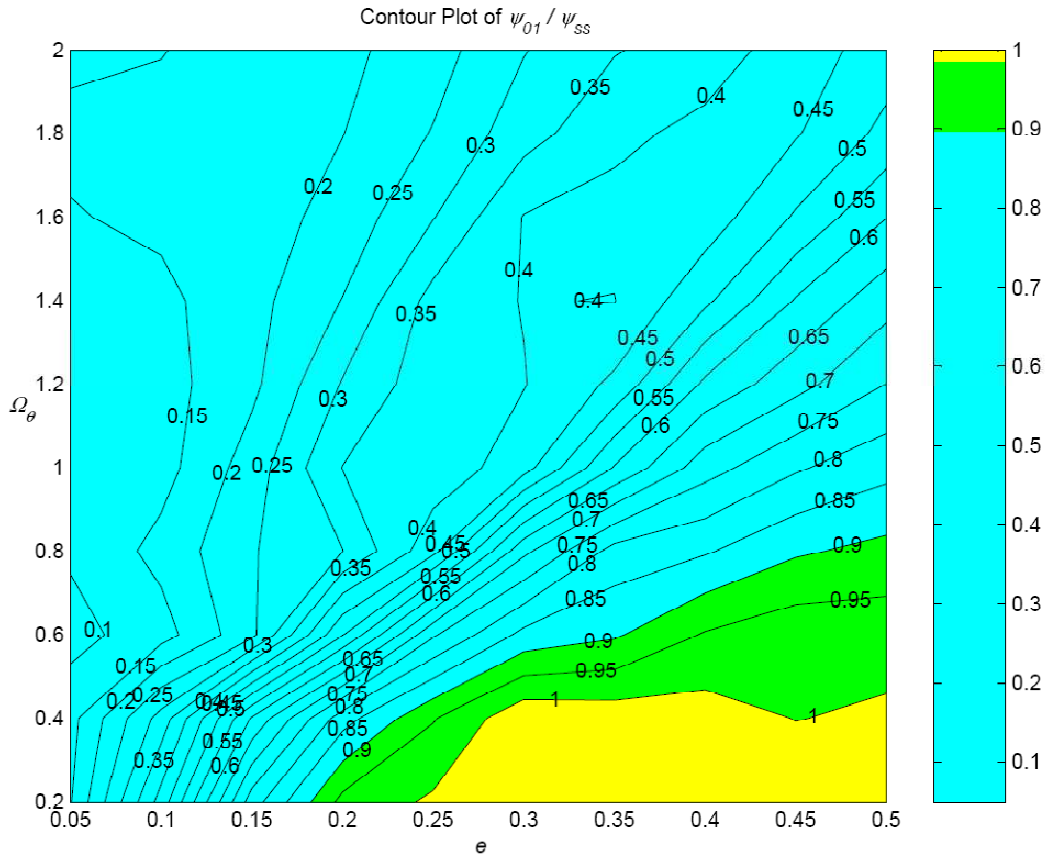
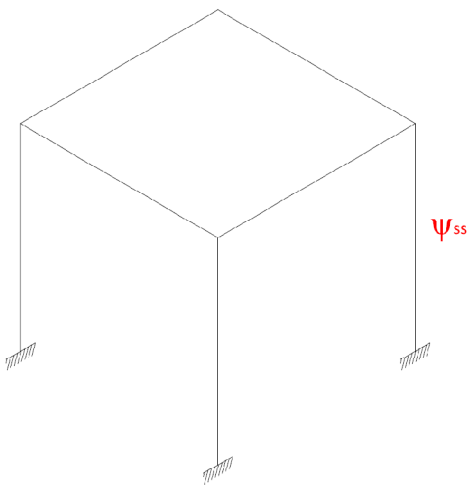


Fig. 6.148 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

#### 6.6.1.4 Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_1$$

$$\Omega_{\vartheta,ss} = \Omega_{\vartheta,1}$$

Fig. 6.149 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

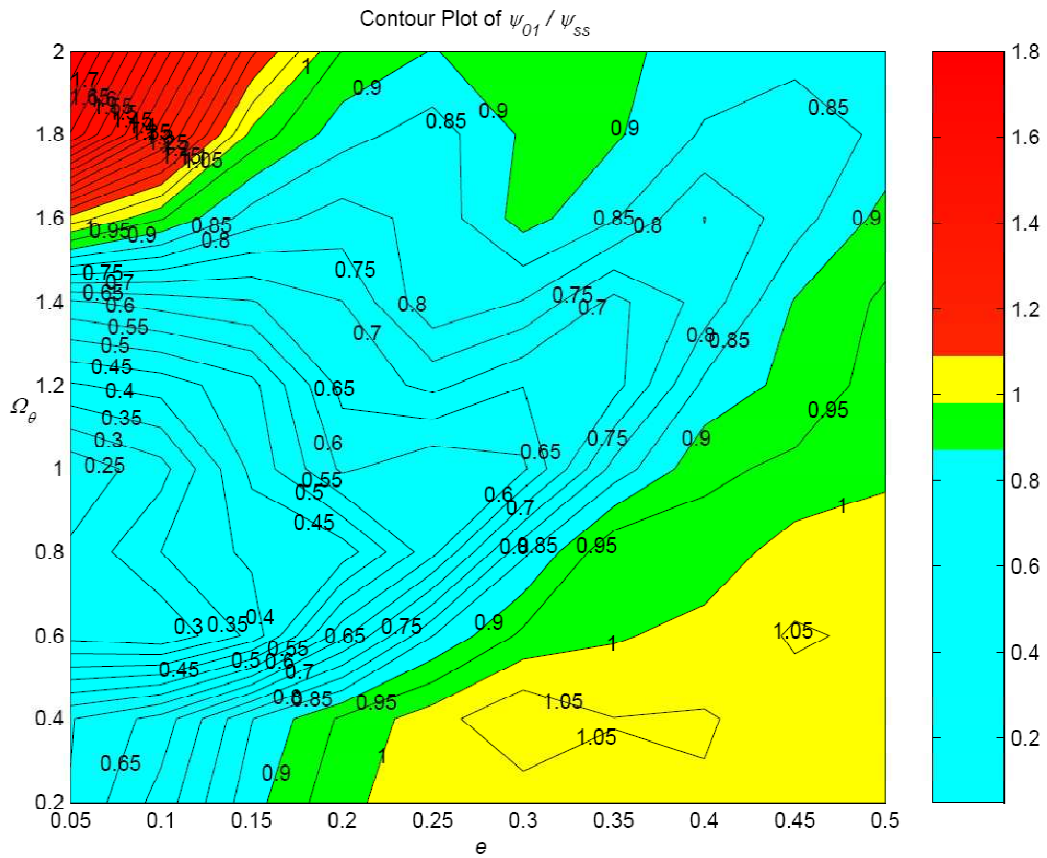
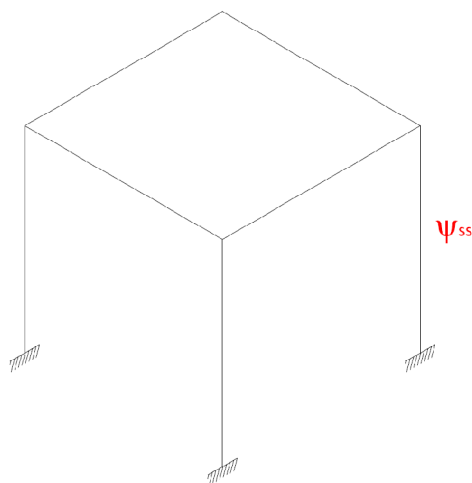


Fig. 6.150 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

**6.6.1.5 Caratteristiche totali con  $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,2}$**



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_1$$

$$\Omega_{\vartheta,ss} = \Omega_{\vartheta,2}$$

Fig. 6.151 Struttura single storey equivalente.



Il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

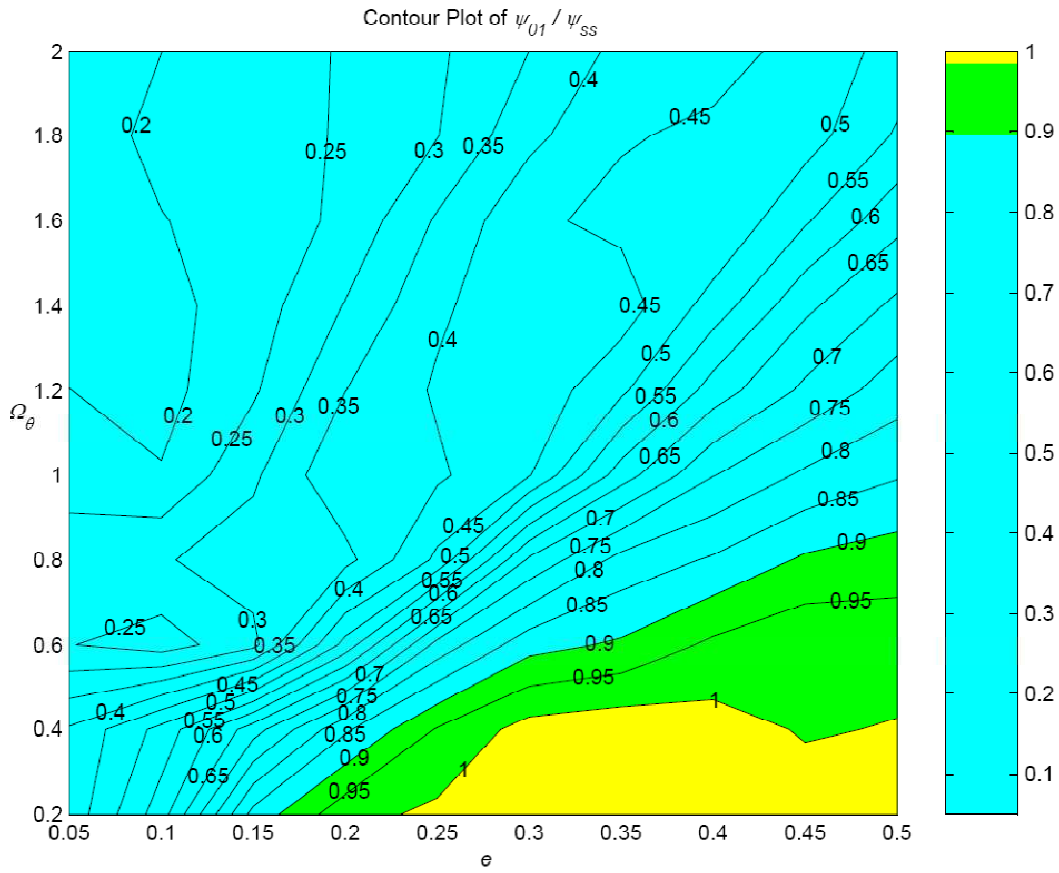
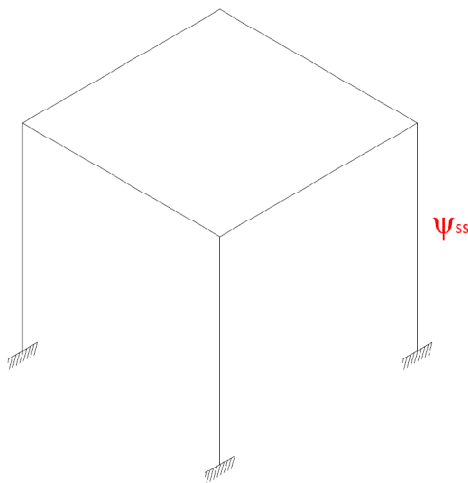


Fig. 6.152 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 6.6.1.6 Caratteristiche del primo piano con $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta,3}$



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_1$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta,3}$$

Fig. 6.153 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{SS}$  ha il seguente andamento:

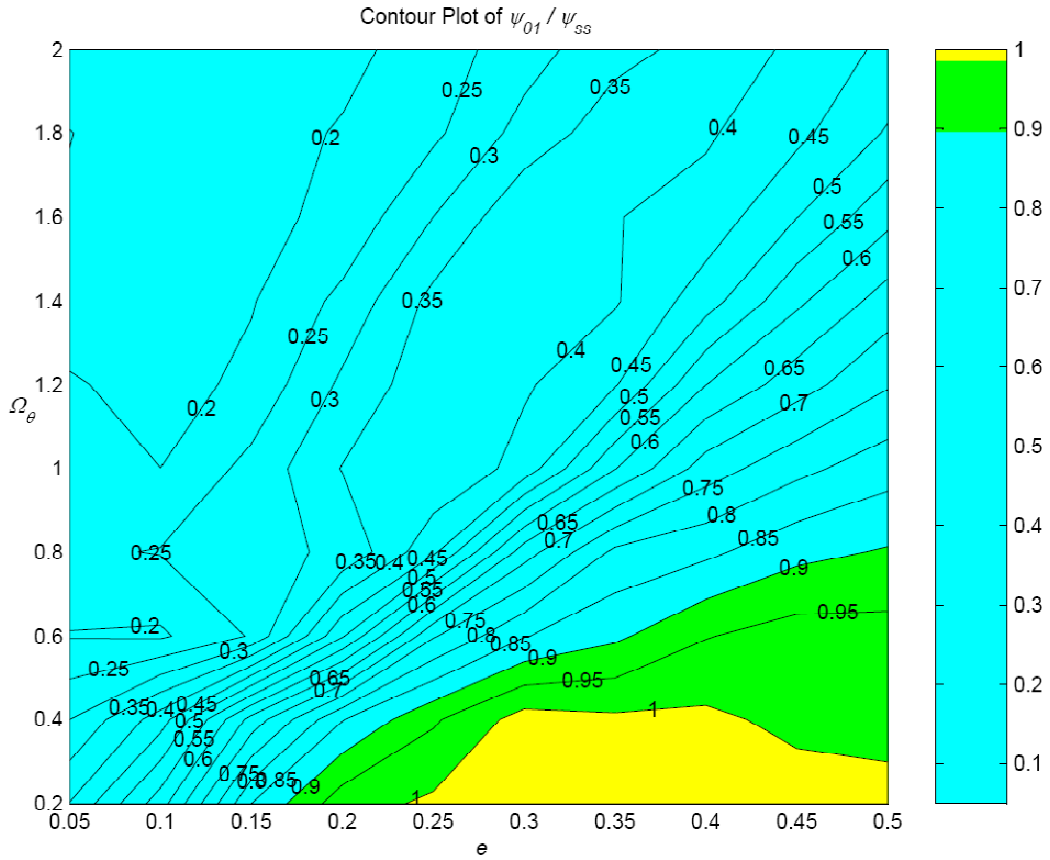


Fig. 6.154 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{SS}$ .

### 6.6.1.7 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti risulta evidente come il single storey che meglio coglie il comportamento del primo piano della struttura multi storey considerata ha le caratteristiche di massa, rigidezza ed eccentricità pari a quelle dell'intera struttura, mentre il parametro  $\Omega_{\vartheta}$  è pari a quello del terzo piano:

$$\begin{aligned}
 m_{SS} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{SS} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{SS} &= e_1 \\
 \Omega_{\vartheta,SS} &= \Omega_{\vartheta 3}
 \end{aligned}$$

## 6.6.2 Secondo piano

Per il secondo piano si sono considerati due casi base, analoghi a quelli utilizzati nei casi precedenti, ossia single storey di caratteristiche di massa e rigidezza tipiche del secondo piano della struttura multi storey e di caratteristiche proprie dell'intera struttura. Per ognuno di questi due casi, poi, si sono considerati diversi valori di  $\Omega_{\vartheta}$ , che, come per il primo piano, sono: eccentricità pari a quella del primo piano, del secondo piano ed un valore di eccentricità medio

### 6.6.2.1 Caratteristiche del secondo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$

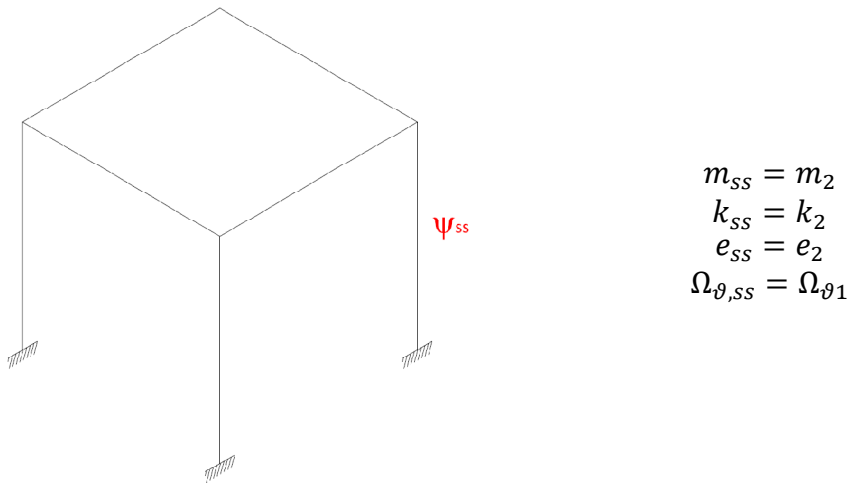


Fig. 6.155 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

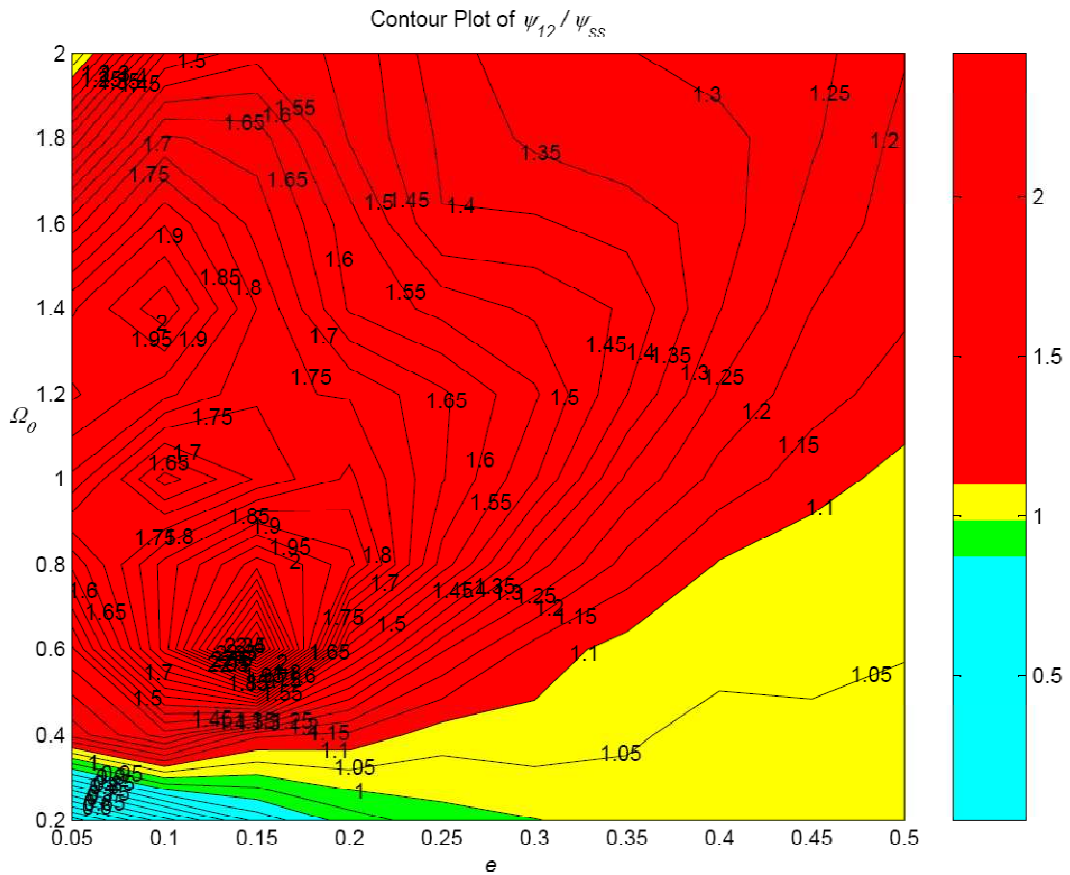


Fig. 6.156 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 6.6.2.2 Caratteristiche del secondo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,2}$

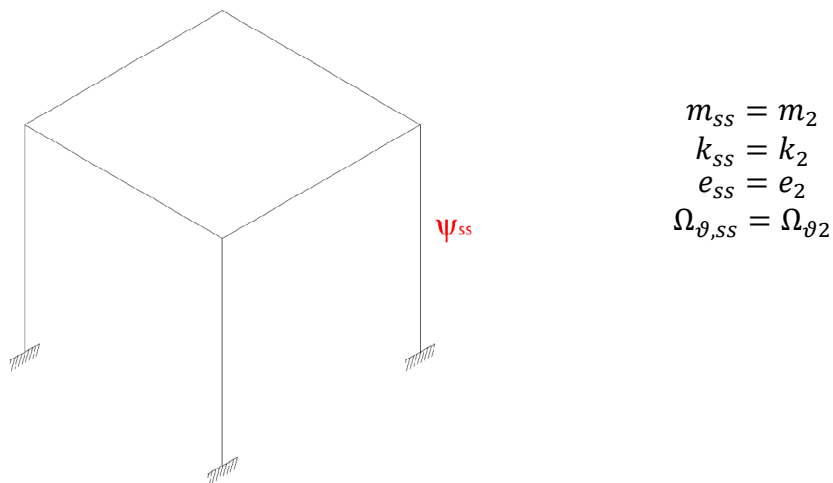


Fig. 6.157 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

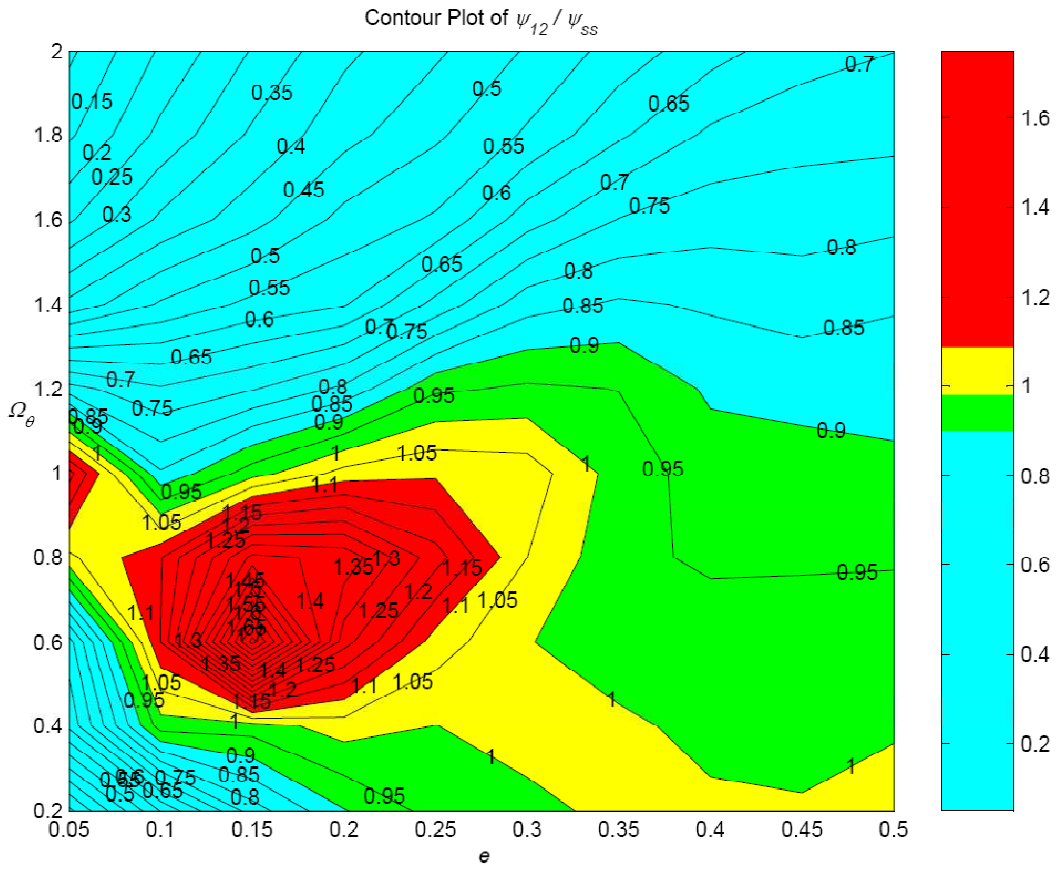
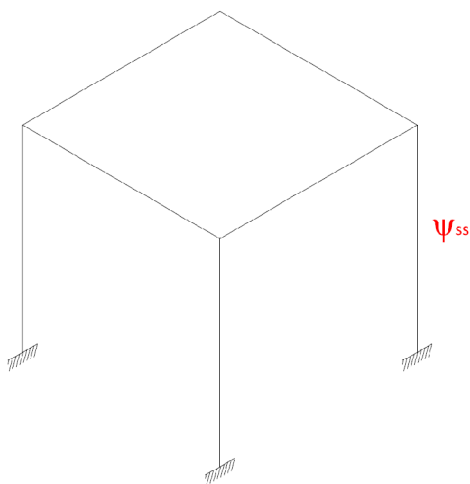


Fig. 6.158 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 6.6.2.3 Caratteristiche del secondo piano con $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta,3}$



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 \\
 k_{ss} &= k_2 \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 3}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.159 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

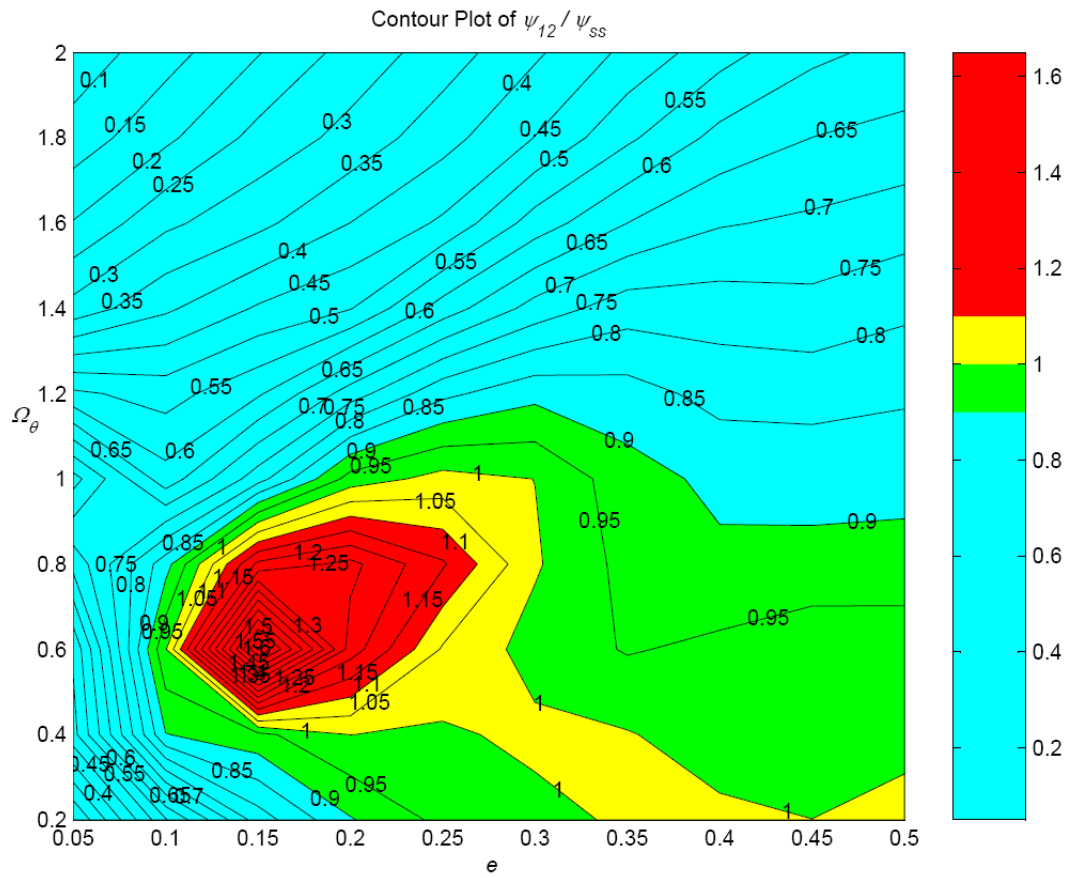
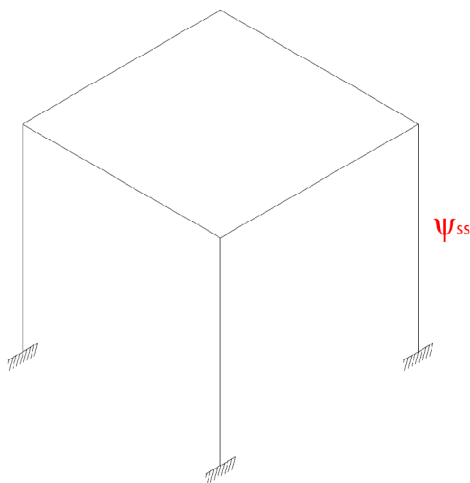


Fig. 6.160 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

#### 6.6.2.4 Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_1$$

$$\Omega_{\vartheta,ss} = \Omega_{\vartheta,1}$$

Fig. 6.161 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

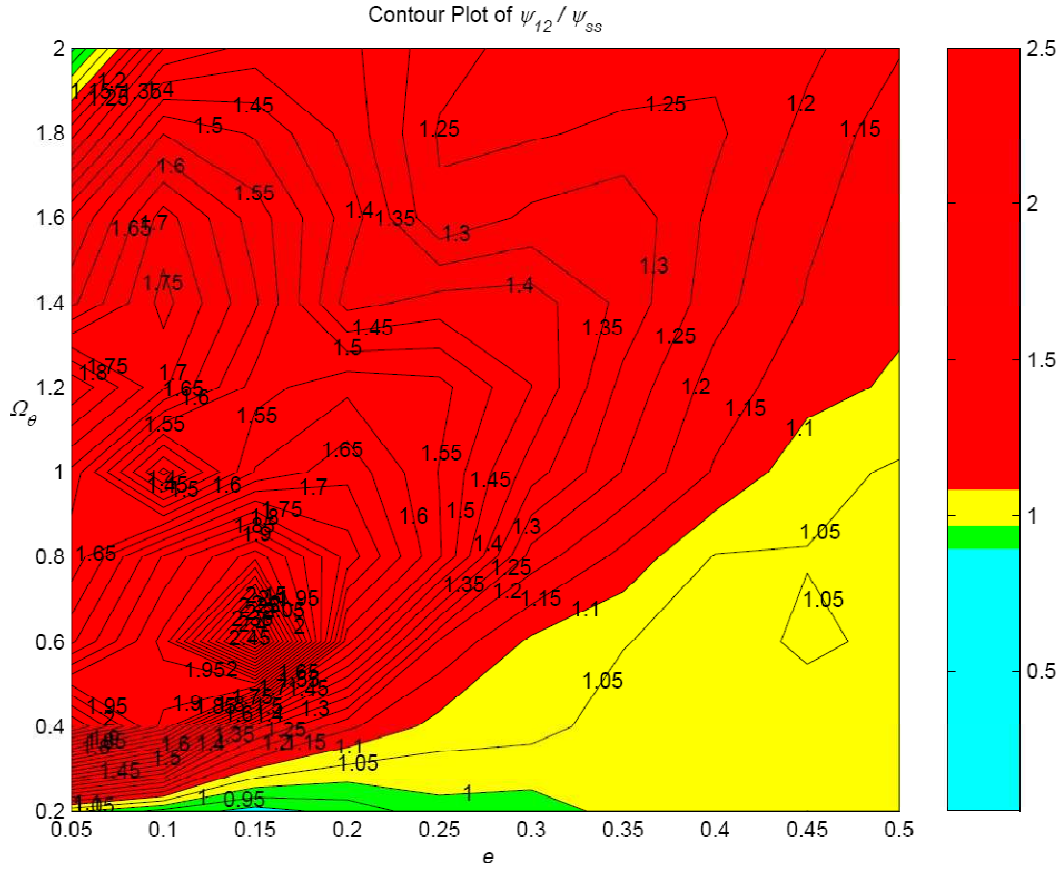
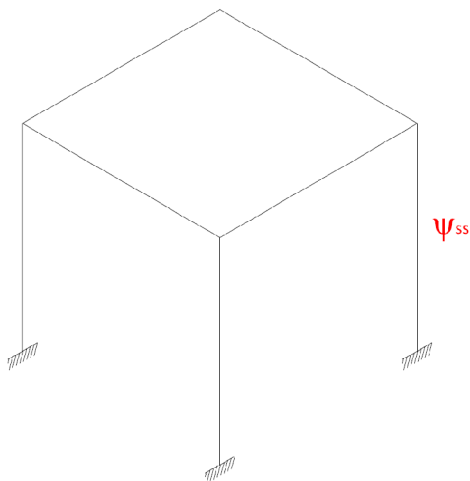


Fig. 6.162 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 6.6.2.5 Caratteristiche totali con $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta 2}$



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_1$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 2}$$

Fig. 6.163 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

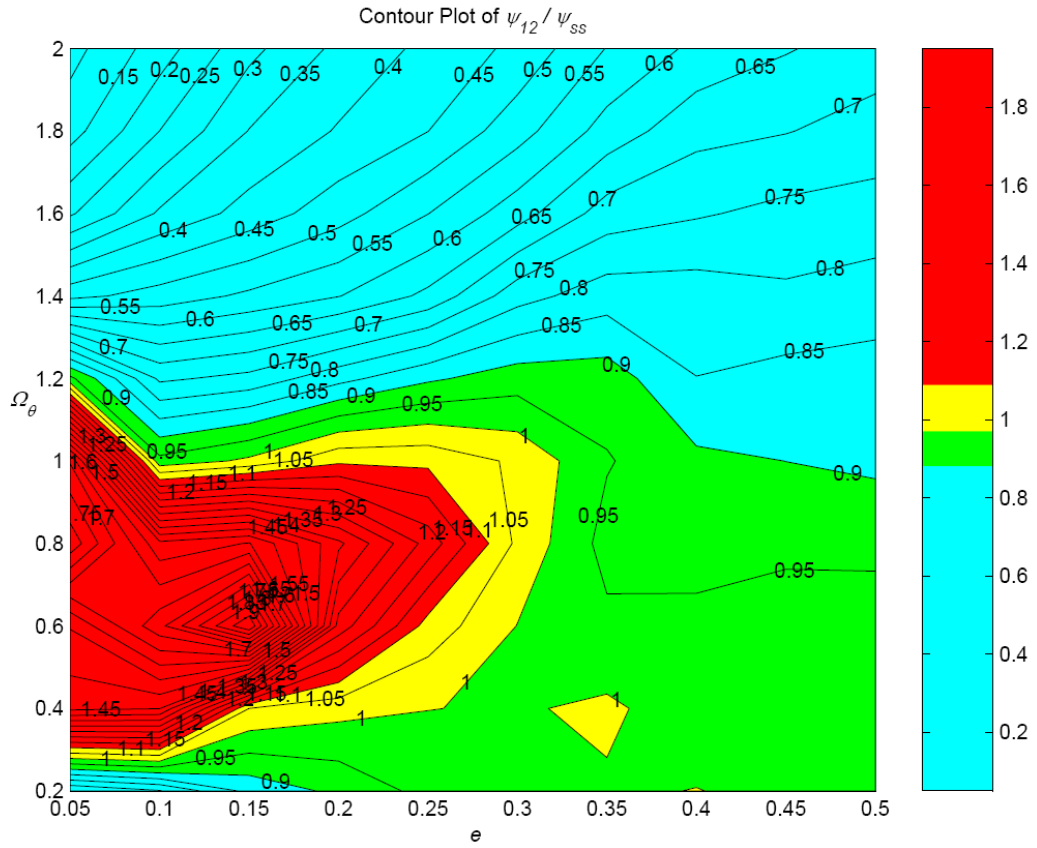
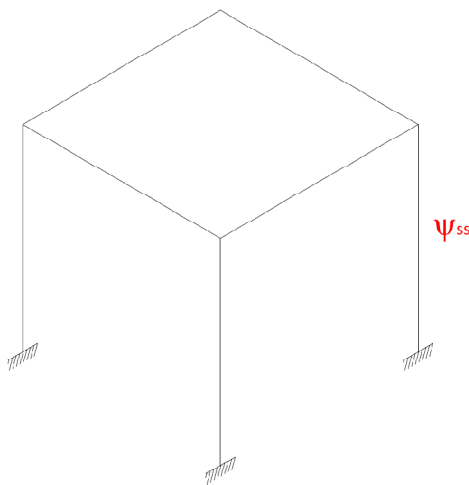


Fig. 6.164 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 6.6.2.6 Caratteristiche totali con $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta,3}$



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta,3}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.165 Struttura single storey equivalente.



Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

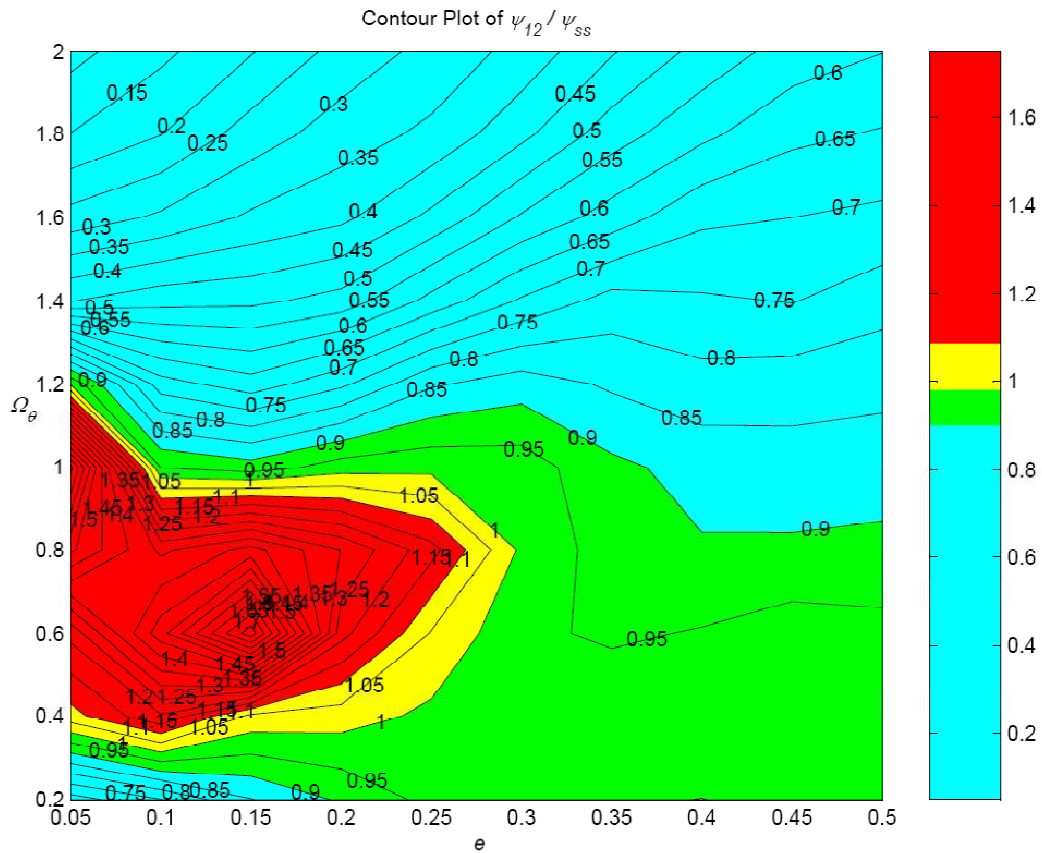


Fig. 6.166 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 6.6.2.7 Riassunto

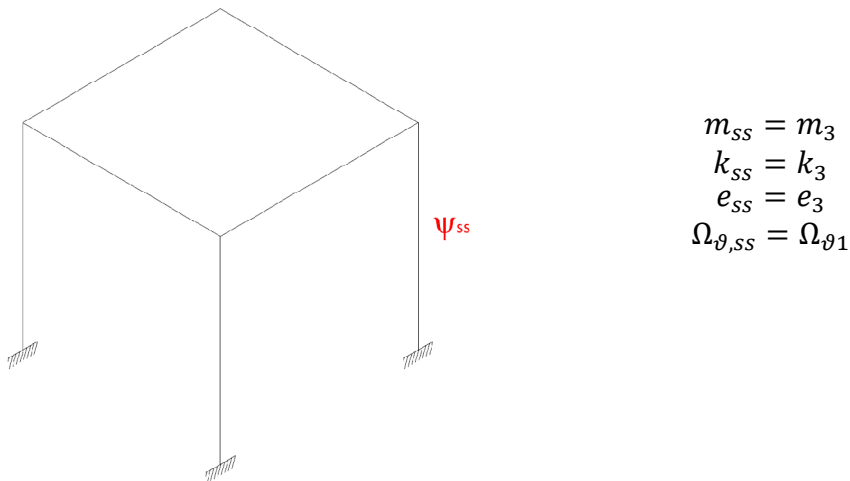
Osservando i grafici ottenuti si può dedurre che, per il secondo piano, il single storey che meglio ne coglie il comportamento ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 \\
 k_{ss} &= k_2 \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 3}
 \end{aligned}$$

### 6.6.3 Terzo piano

Anche per il terzo piano si sono considerati due casi base, analoghi a quelli utilizzati nei casi precedenti, ossia single storey di caratteristiche di massa e rigidezza tipiche del terzo piano della struttura multi storey e di caratteristiche proprie dell'intera struttura. Per ognuno di questi due casi, poi, si sono considerati diversi valori di  $\Omega_{\theta}$ , che, come per il primo piano, sono: eccentricità pari a quella del primo piano, del secondo piano ed un valore di eccentricità medio

#### 6.6.3.1 Caratteristiche del terzo piano con $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta,1}$



**Fig. 6.167** *Struttura single storey equivalente.*

Il rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

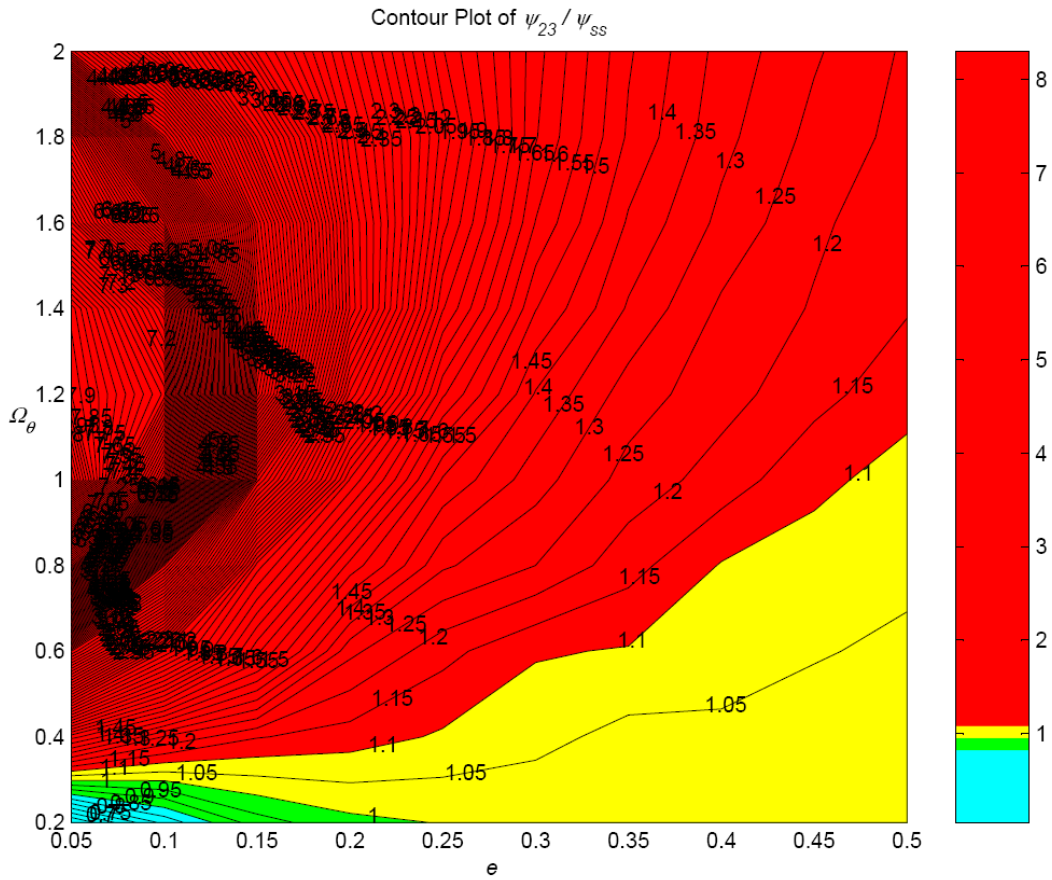


Fig. 6.168 Rapporto  $\psi_{23} / \psi_{ss}$ .

### 6.6.3.2 Caratteristiche del terzo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,2}$

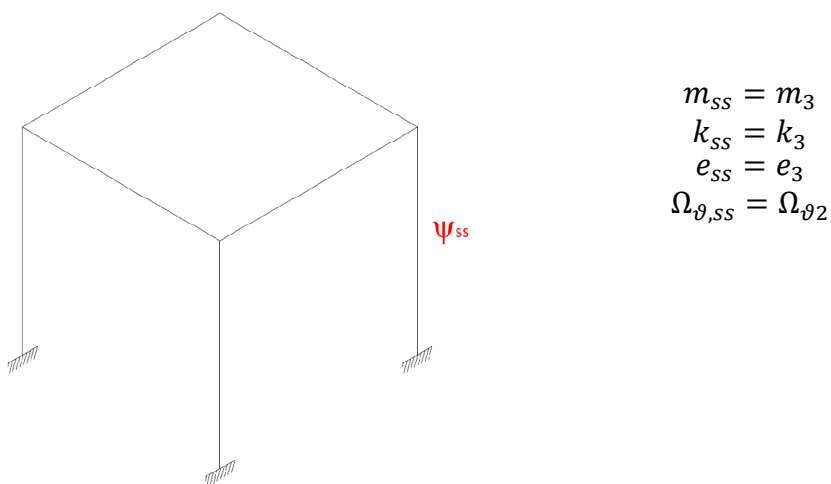


Fig. 6.169 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

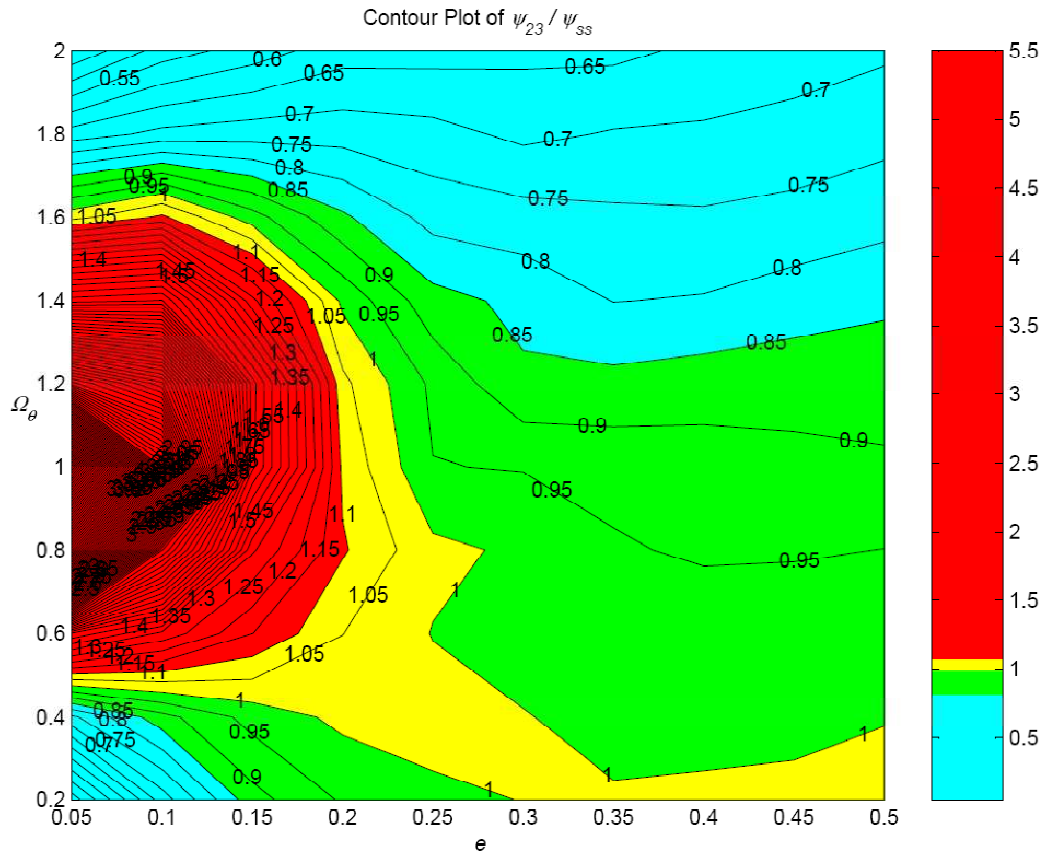
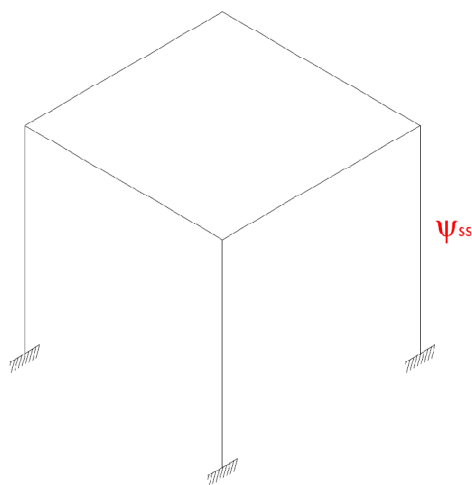


Fig. 6.170 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 6.6.3.3 Caratteristiche del terzo piano con $\Omega_\theta = \Omega_{\theta,3}$



$$\begin{aligned} m_{ss} &= m_3 \\ k_{ss} &= k_3 \\ e_{ss} &= e_3 \\ \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 3} \end{aligned}$$

Fig. 6.171 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

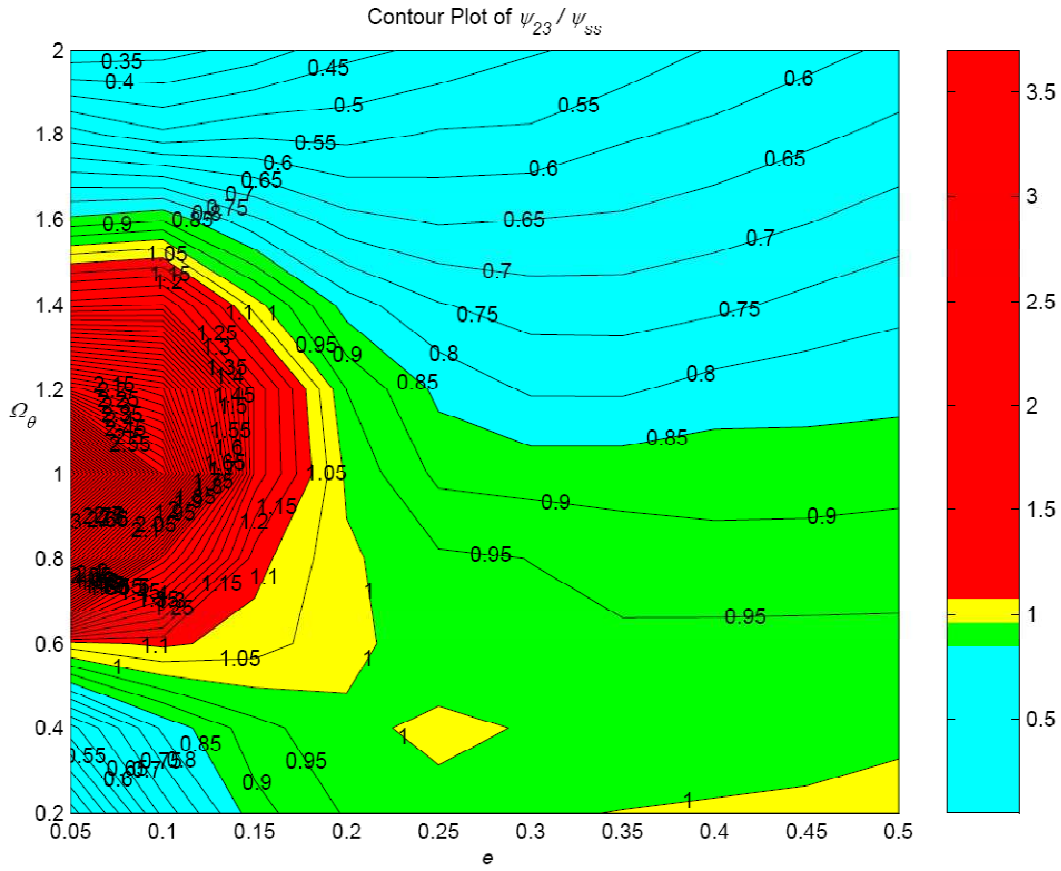
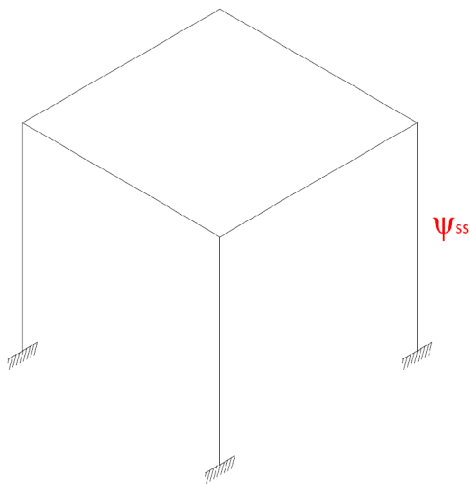


Fig. 6.172 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 6.6.3.4 Caratteristiche totali con $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta,1}$



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_1$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta,1}$$

Fig. 6.173 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

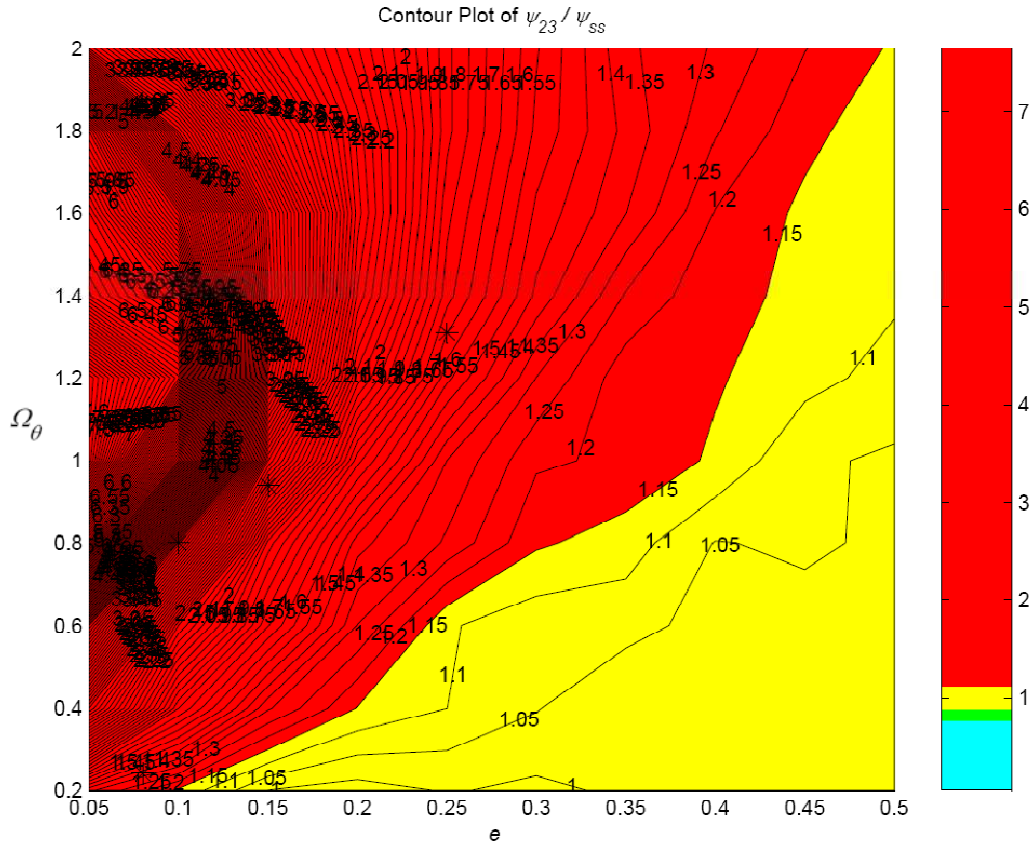
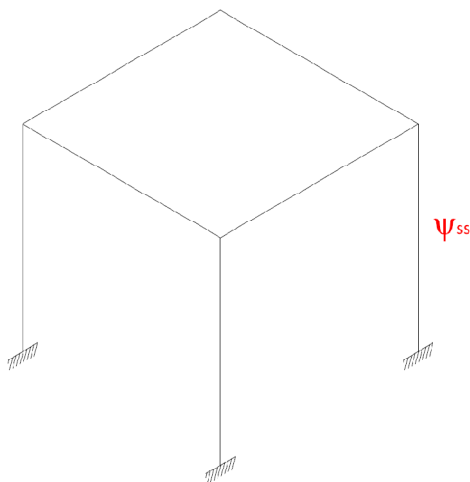


Fig. 6.174 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 6.6.3.5 Caratteristiche totali con $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta,2}$



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.175 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

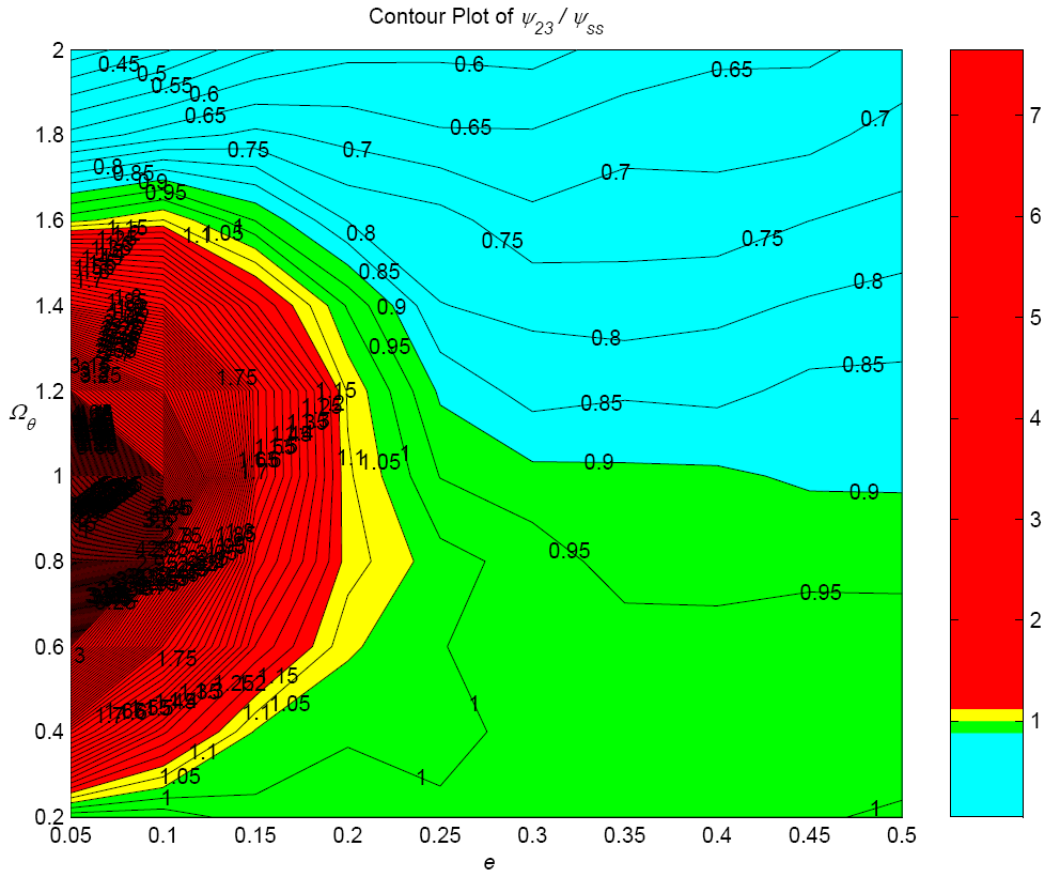
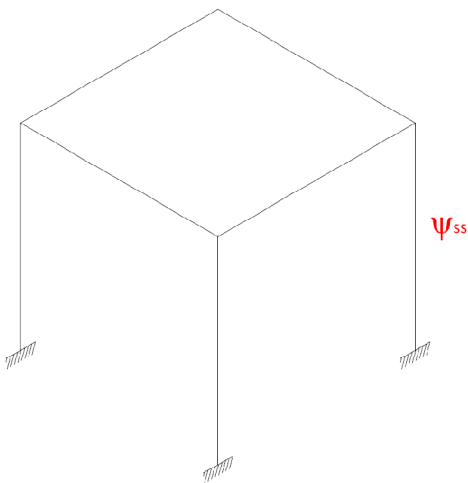


Fig. 6.176 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 6.6.3.6 Caratteristiche totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,3}$



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_1$$

$$\Omega_{\vartheta,ss} = \Omega_{\vartheta,3}$$

Fig. 6.177 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

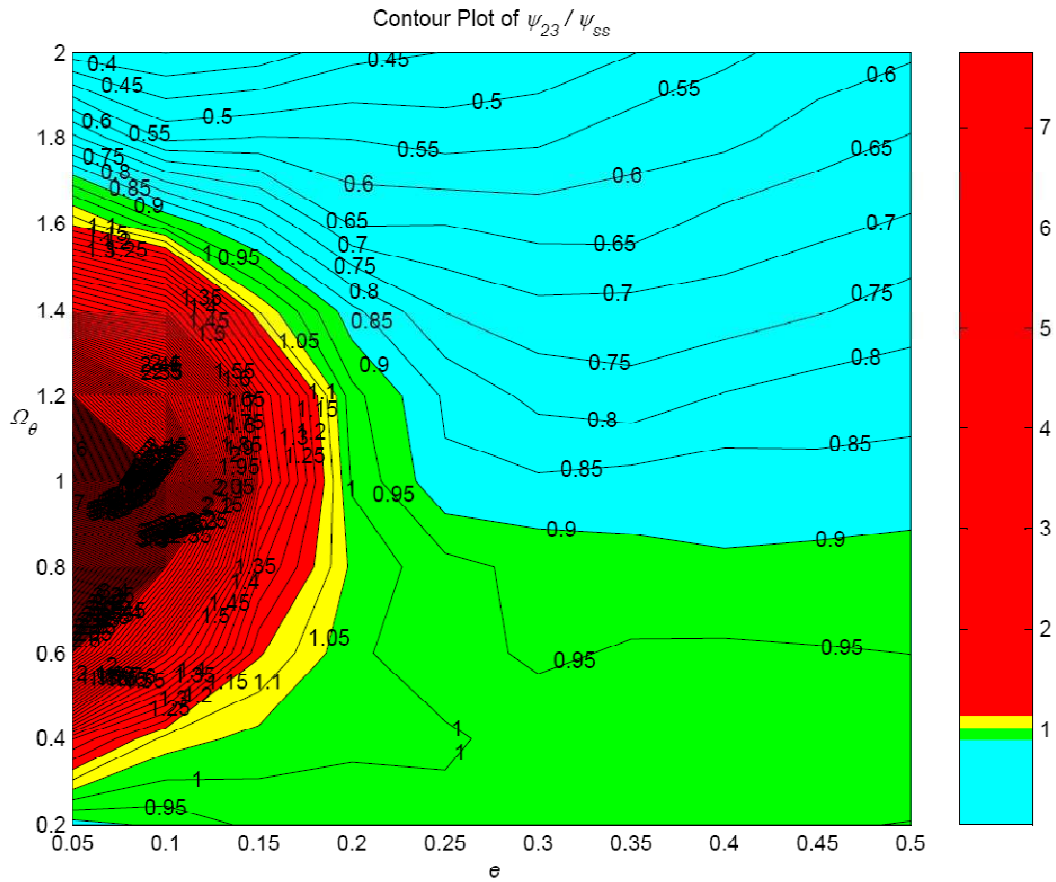


Fig. 6.178 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 6.6.3.7 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre che, per il terzo piano, il single storey che meglio ne coglie il comportamento ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_3 \\
 k_{ss} &= k_3 \\
 e_{ss} &= e_3 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 3}
 \end{aligned}$$



### 6.6.4 Riassunto

Per chiarezza, si riassume graficamente quanto ottenuto:

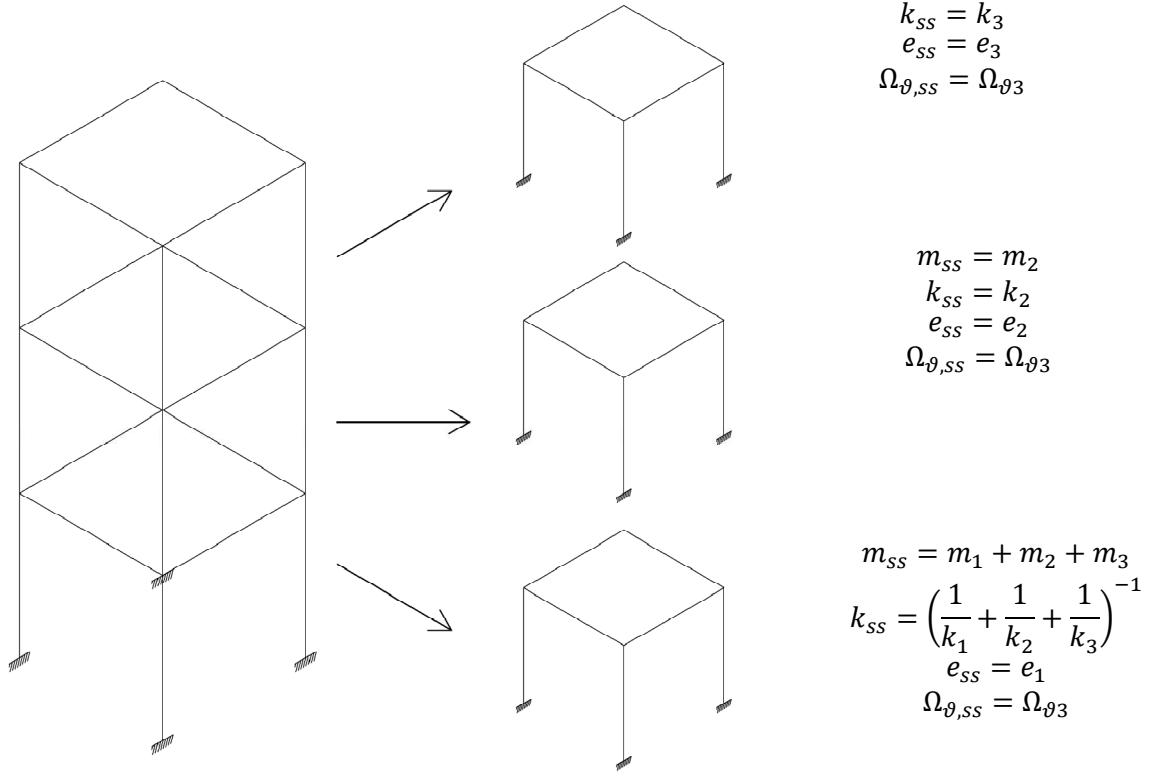


Fig. 6.179 Riassunto dei risultati ottenuti.

### 6.7 Caso 7: Aumento del parametro $\Omega_{\vartheta}$

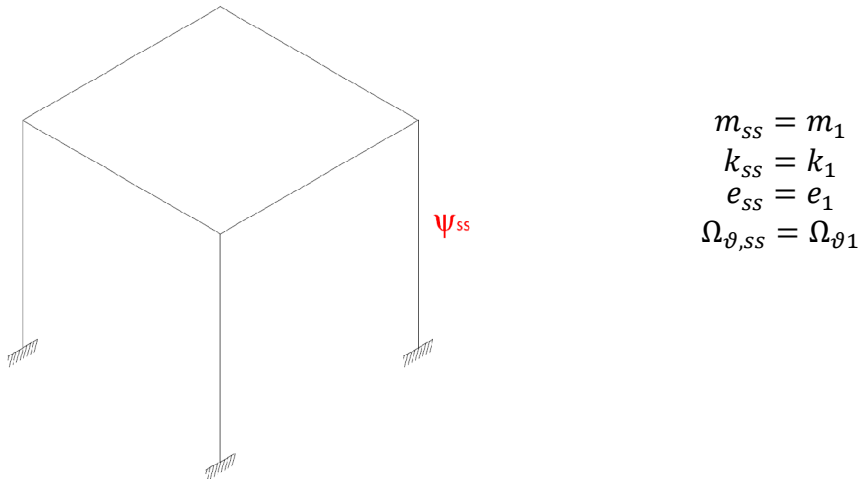
In questo caso a variare è il valore del parametro  $\Omega_{\vartheta}$ ; si considerano, quindi, i seguenti valori per i rapporti  $R_{e,i}$ ,  $R_{m,i}$ ,  $R_{k,i}$ ,  $R_{\Omega_{\vartheta},i}$ :

$$\begin{aligned}
 R_{m,2} &= R_{k,2} = R_{e,2} = 1 \\
 R_{\Omega_{\vartheta},2} &= 2 \\
 R_{m,3} &= R_{k,3} = R_{e,3} = 1 \\
 R_{\Omega_{\vartheta},3} &= 3
 \end{aligned}
 \tag{6.7}$$

### 6.7.1 Primo Piano

Anche in questo caso si sono considerati due diversi single storey equivalenti. Il primo ha, come per gli altri casi, le caratteristiche del primo piano, mentre l'altro ha rigidezza e massa pari a quelle dell'intera struttura. Visti i risultati precedenti, sia per le strutture a tre piani che per quelle a due piani, per questi due single storey si utilizzeranno soltanto valori minimi di  $\Omega_{\vartheta}$ ; in questo caso, quindi, si verificherà che utilizzare il parametro  $\Omega_{\vartheta}$  del primo piano porta alla migliore rappresentazione possibile.

#### 6.7.1.1 Caratteristiche del primo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$



**Fig. 6.180** *Struttura single storey equivalente.*

Il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

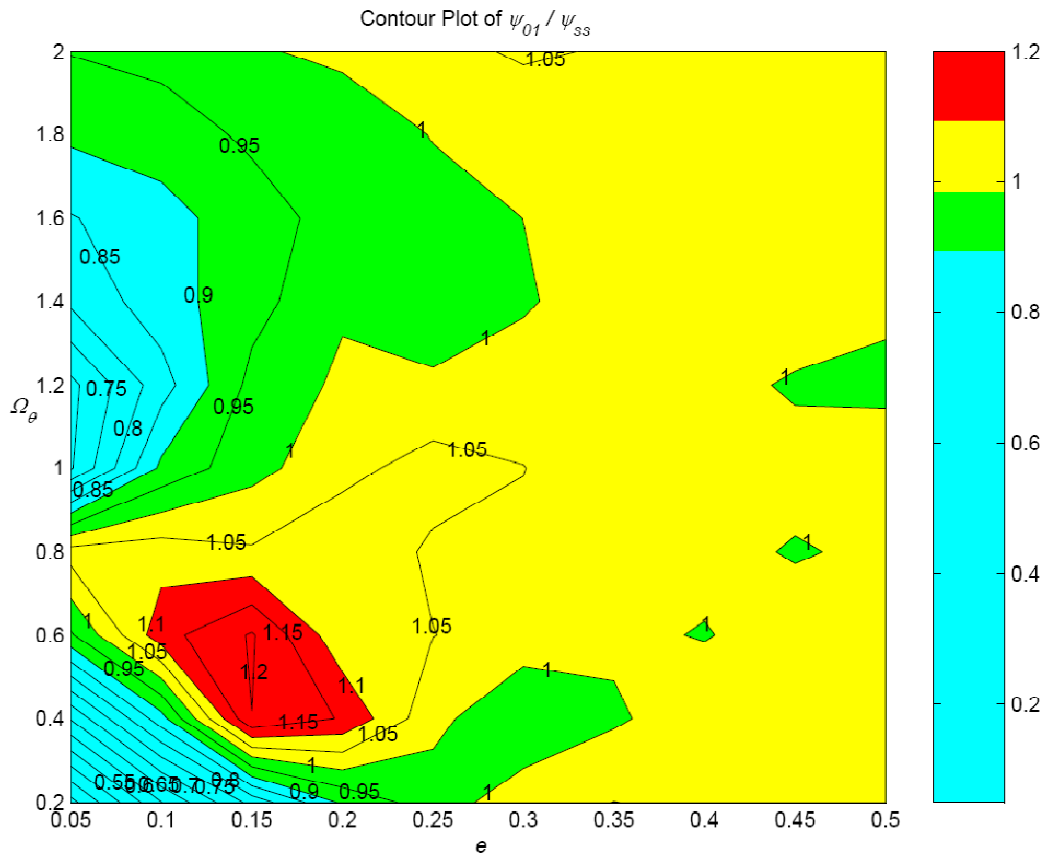
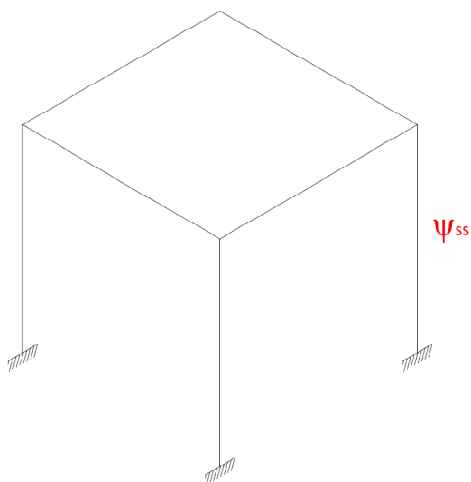


Fig. 6.181 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

6.7.1.2 Caratteristiche totali con  $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta,1}$



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta,1}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.182 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{SS}$  ha il seguente andamento:

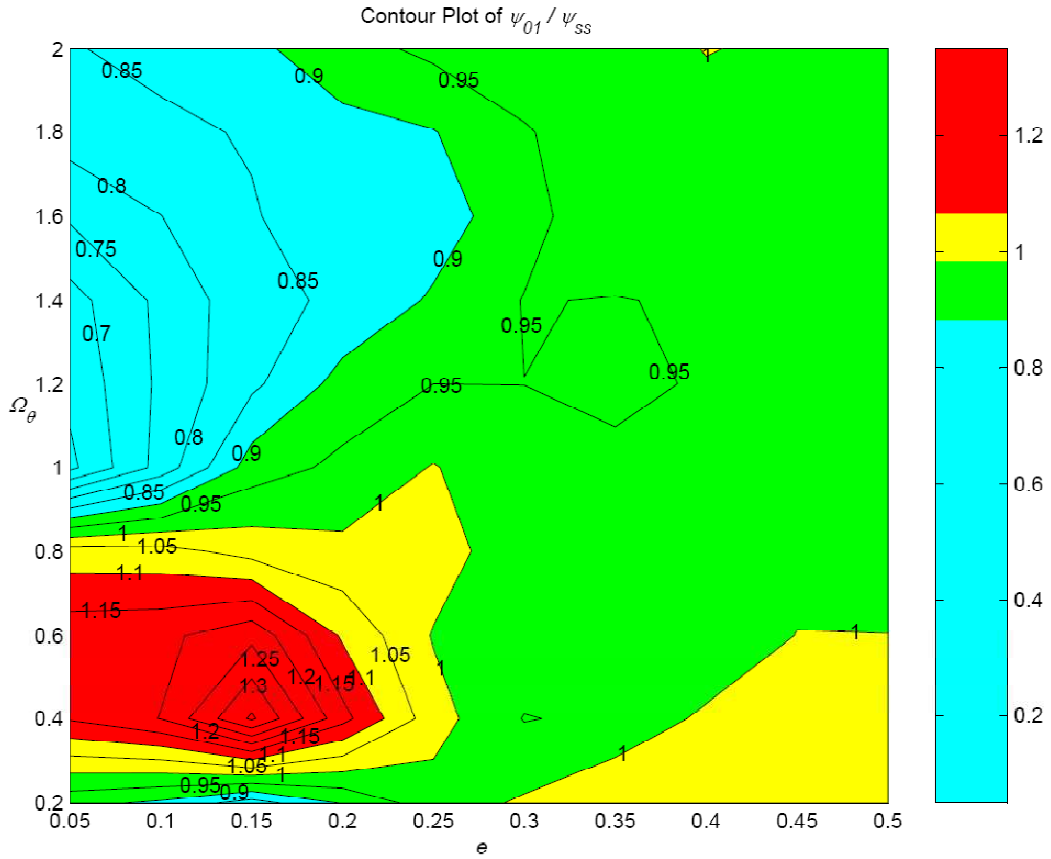


Fig. 6.183 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{SS}$ .

### 6.7.1.3 Riassunto

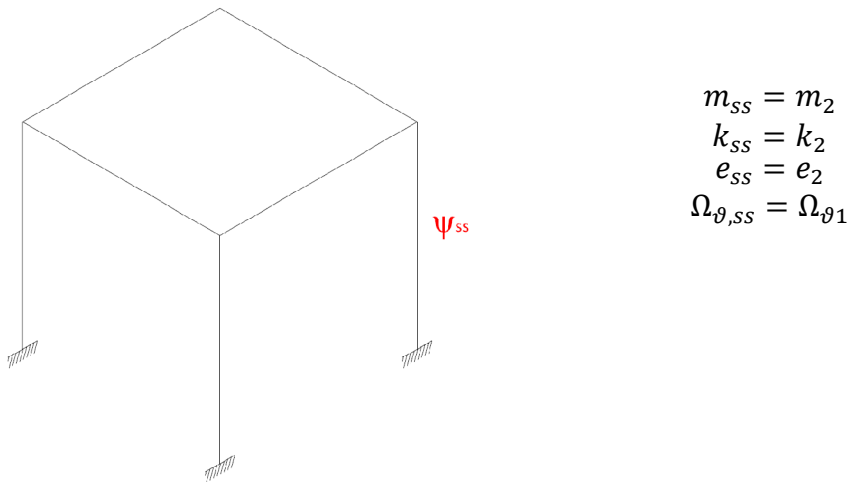
Osservando i grafici ottenuti risulta evidente come il single storey che meglio coglie il comportamento del primo piano della struttura multi storey considerata ha le caratteristiche di massa, rigidezza ed eccentricità pari a quelle dell'intera struttura, mentre il parametro  $\Omega_{\theta}$  è pari a quello del primo piano:

$$\begin{aligned}
 m_{SS} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{SS} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{SS} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,SS} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

## 6.7.2 Secondo piano

Mantenendo sempre il valore di  $\Omega_{\vartheta}$  pari a quello del primo piano, si sono considerati diversi single storey per tentare di rappresentare il comportamento del secondo piano.

### 6.7.2.1 Caratteristiche del secondo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$



**Fig. 6.184** *Struttura single storey equivalente.*

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

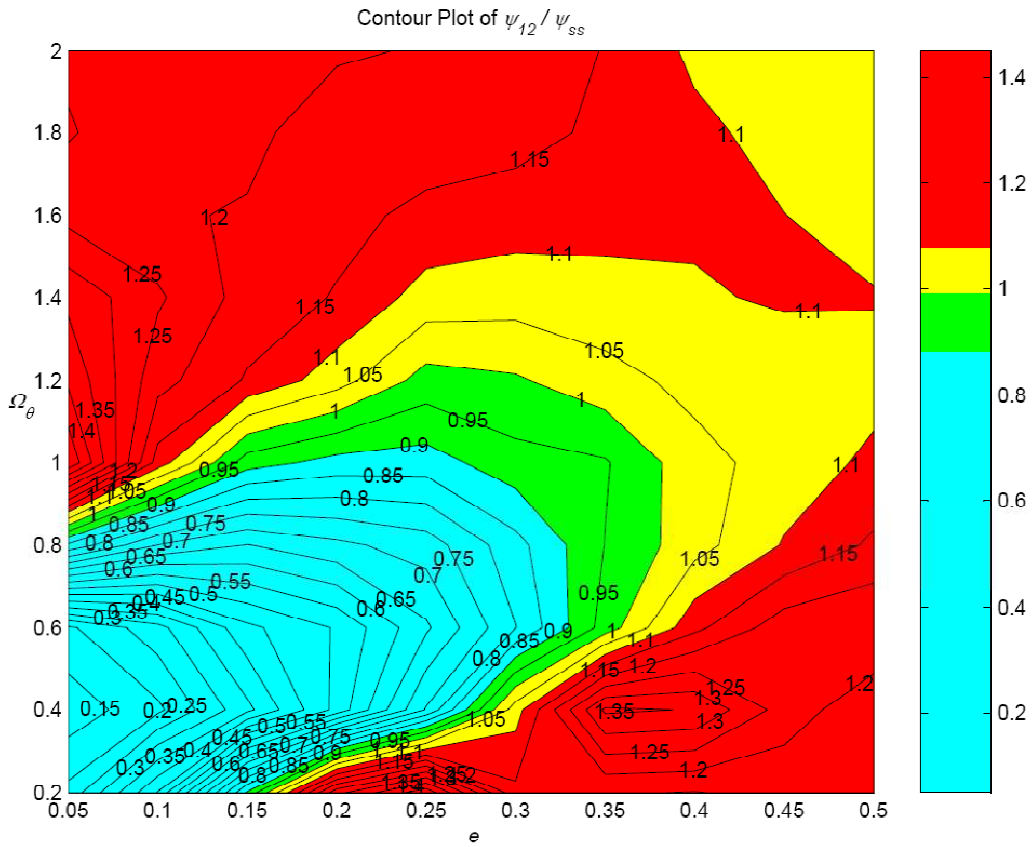


Fig. 6.185 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

6.7.2.2 Caratteristiche di massa del secondo e terzo piano con  $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$

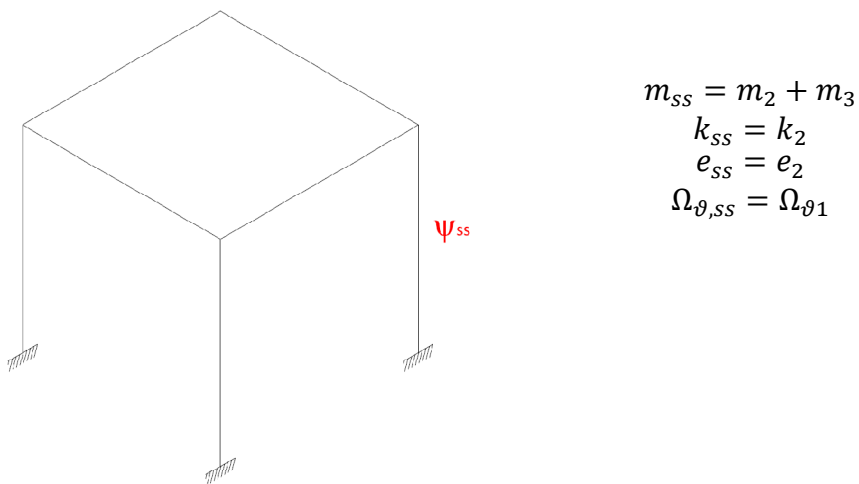


Fig. 6.186 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

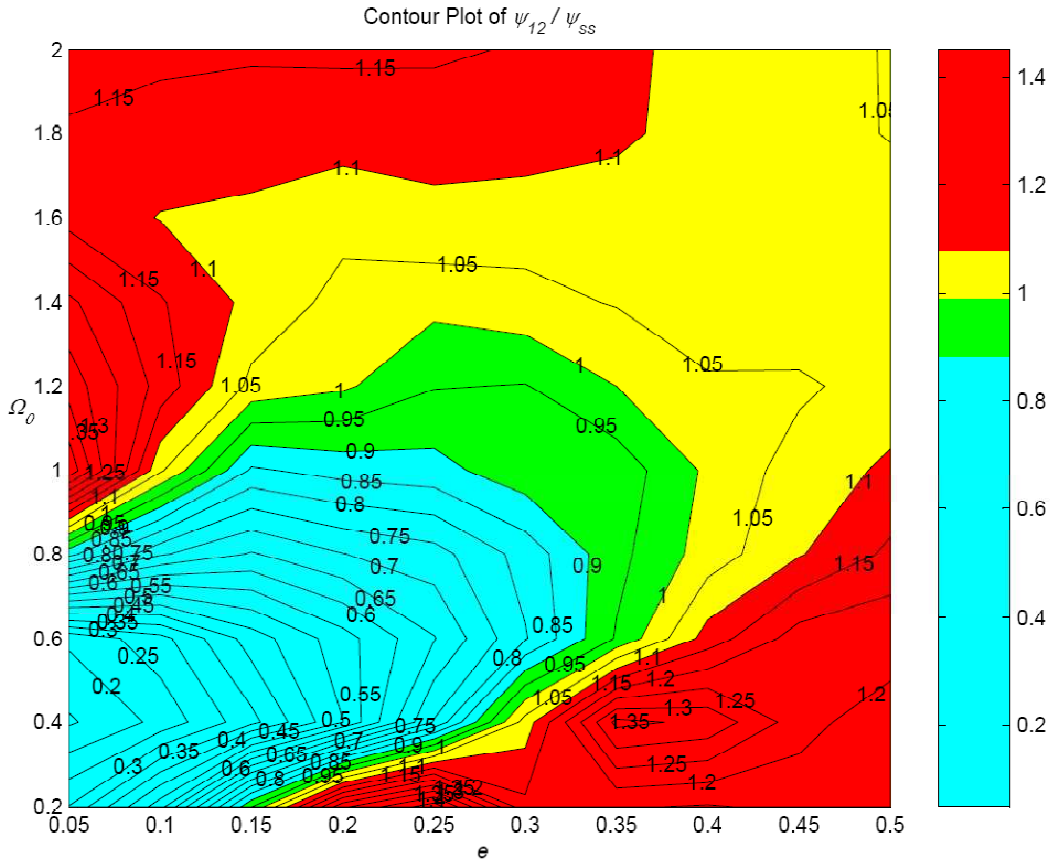
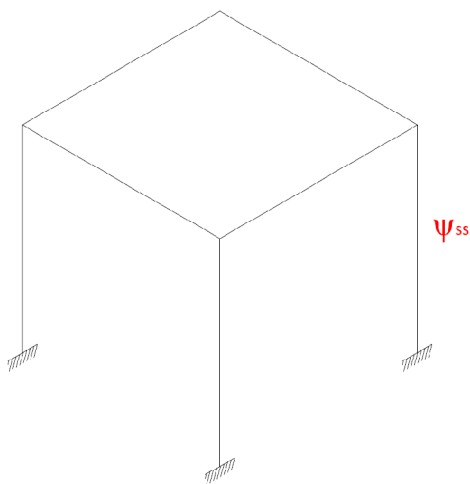


Fig. 6.187 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

**6.7.2.3 Caratteristiche di massa e rigidezza del secondo e terzo piano con  $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$**



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta,1}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.188 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

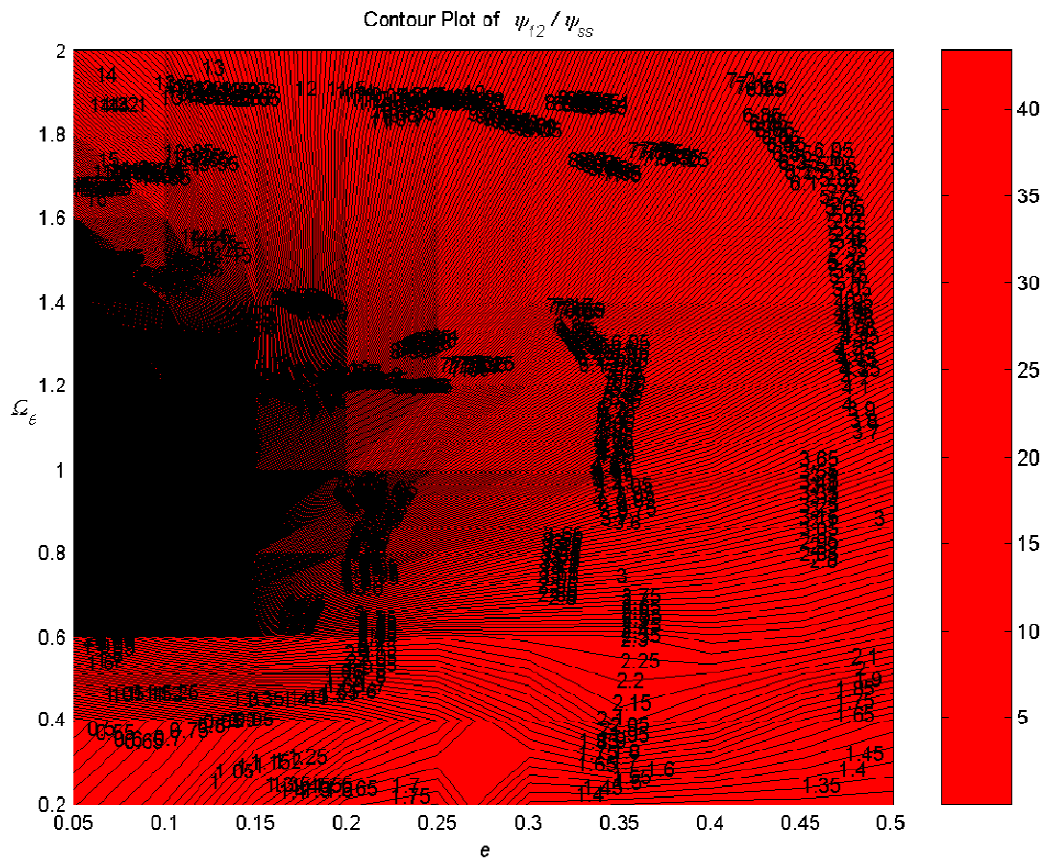
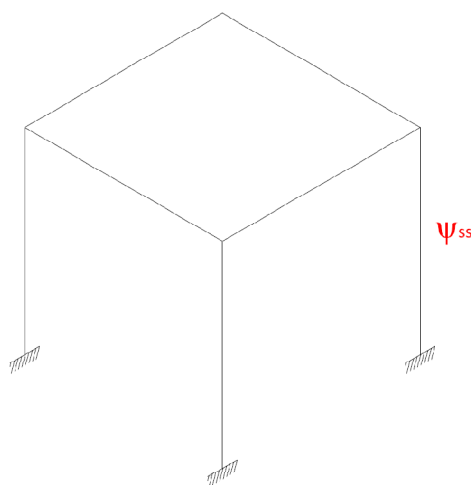


Fig. 6.189 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

#### 6.7.2.4 Caratteristiche di massa totali con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= k_2 \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta,1}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.190 Struttura single storey equivalente.



Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

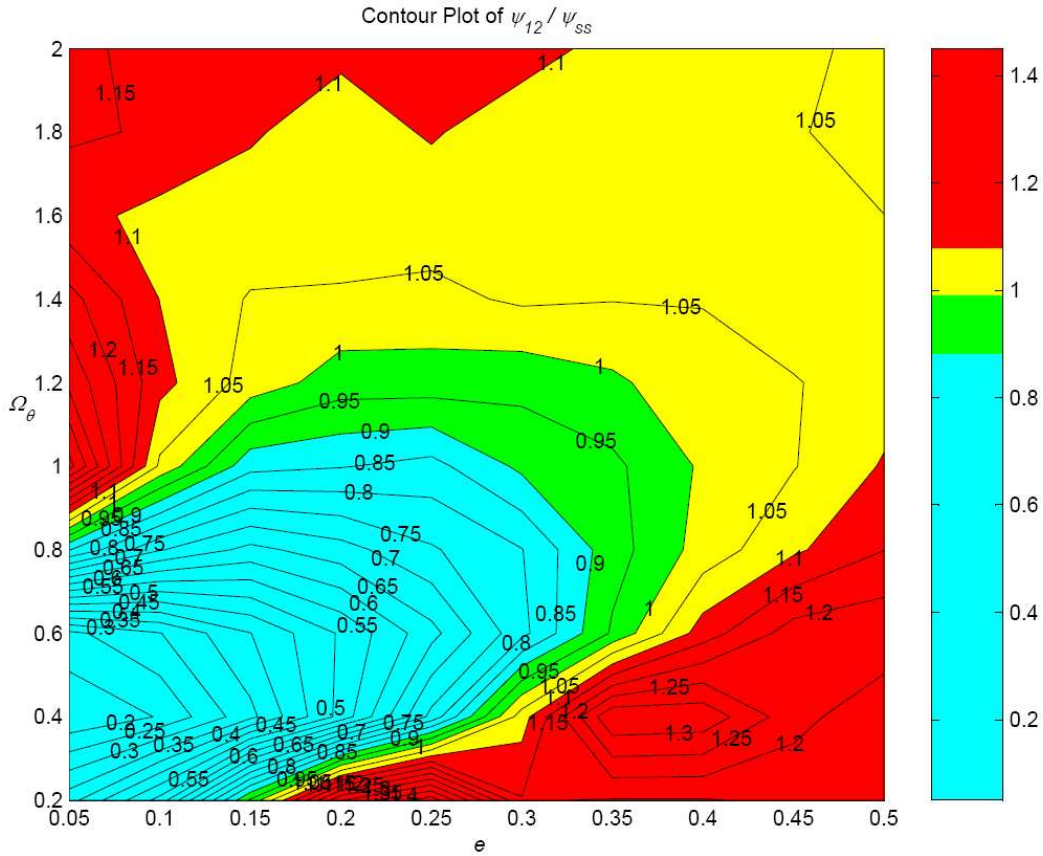
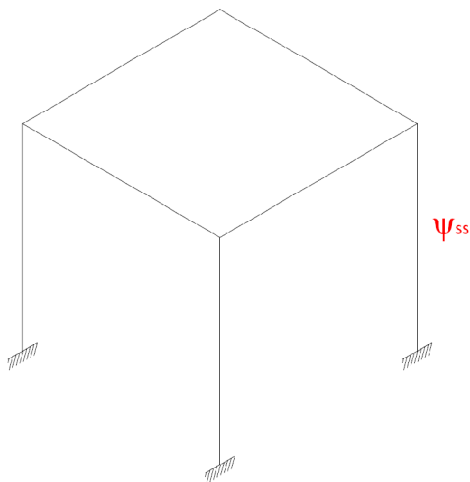


Fig. 6.191 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

6.7.2.5 Caratteristiche totali con  $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3$$

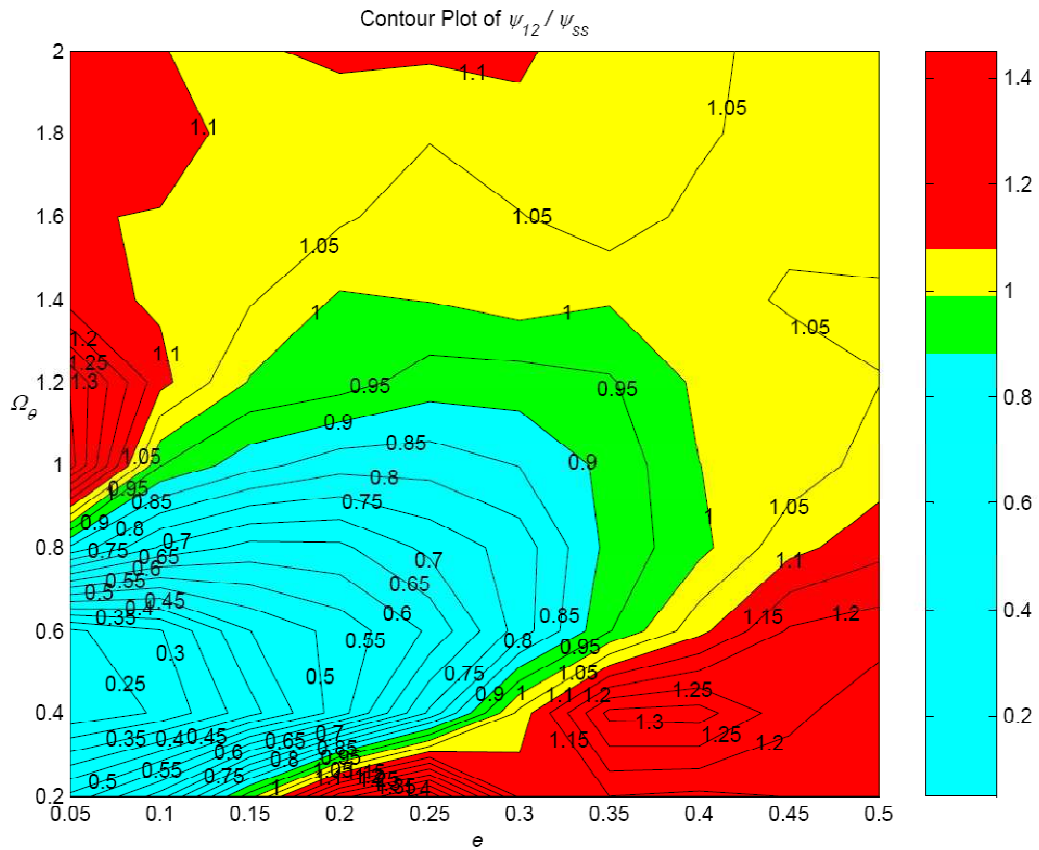
$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\vartheta,ss} = \Omega_{\vartheta,1}$$

Fig. 6.192 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:



**Fig. 6.193** Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 6.7.2.6 Riassunto

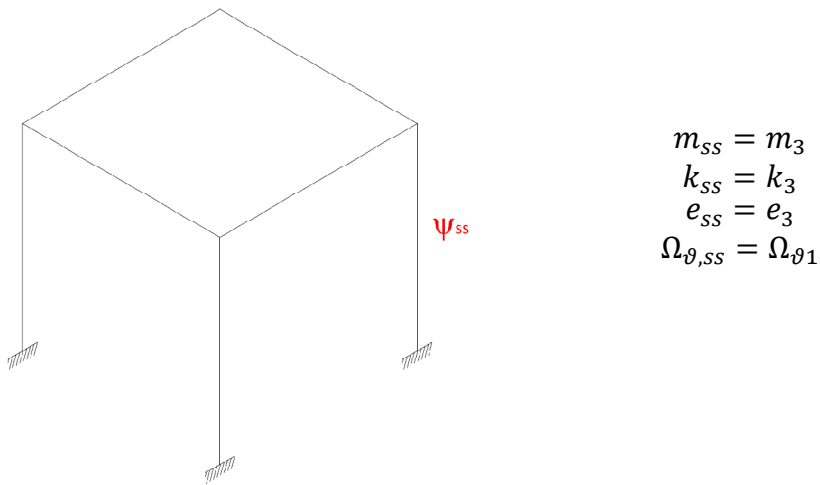
Osservando i grafici ottenuti si può dedurre che, per il secondo piano, il single storey che meglio ne coglie il comportamento ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

### 6.7.3 Terzo piano

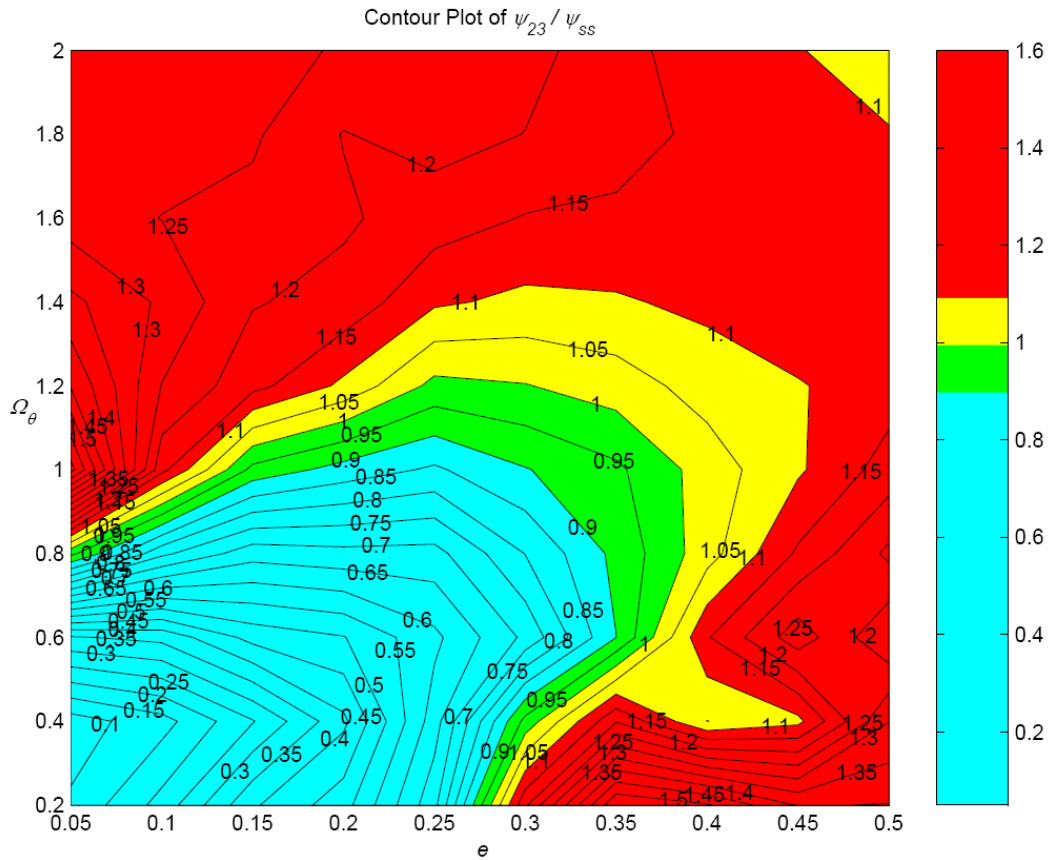
Mantenendo sempre il valore di  $\Omega_{\vartheta}$  pari a quello del primo piano, si sono considerati diversi single storey per tentare di rappresentare il comportamento del terzo piano.

#### 6.7.3.1 Caratteristiche del terzo piano con $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$



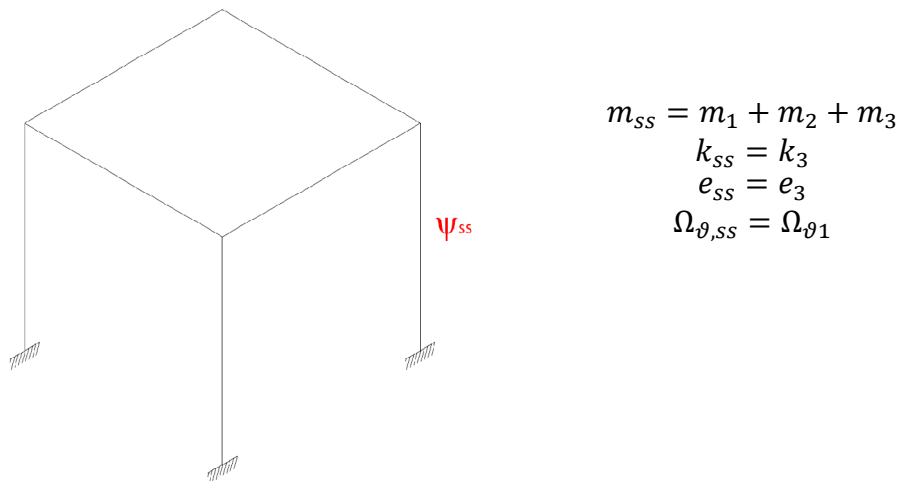
**Fig. 6.194** *Struttura single storey equivalente.*

Il rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:



**Fig. 6.195** Rapporto  $\psi_{23} / \psi_{ss}$ .

**6.7.3.2** Caratteristiche di massa totali con  $\Omega_{\vartheta} = \Omega_{\vartheta,1}$



**Fig. 6.196** Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

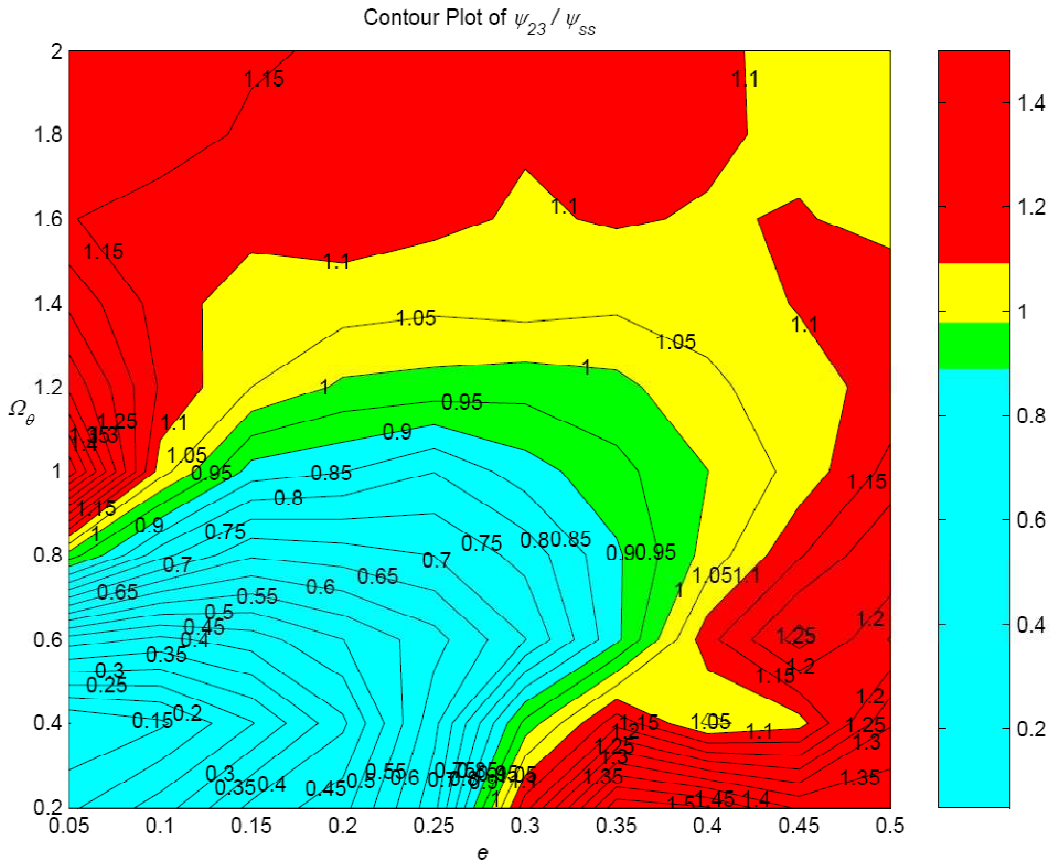
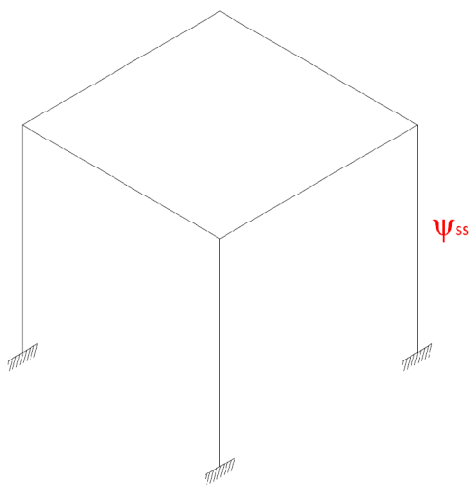


Fig. 6.197 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

**6.7.3.3 Caratteristiche di massa del secondo e terzo piano con  $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta,1}$**



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= k_3 \\
 e_{ss} &= e_3 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 3}
 \end{aligned}$$

Fig. 6.198 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

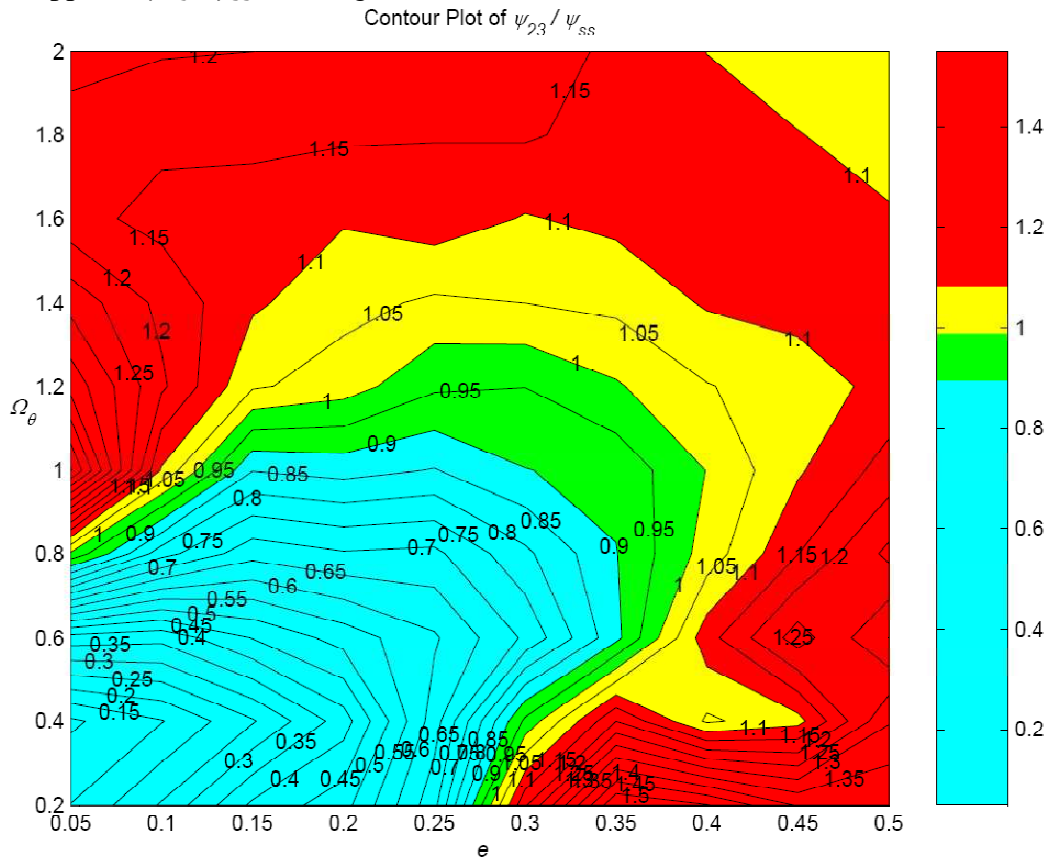
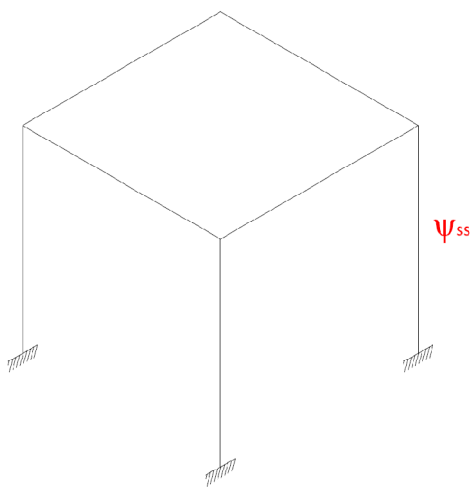


Fig. 6.199 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

**6.7.3.4 Caratteristiche di massa e rigidezza del secondo e terzo piano con  $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta,1}$**



$$m_{ss} = m_2 + m_3$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_3$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta,1}$$

Fig. 6.200 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:

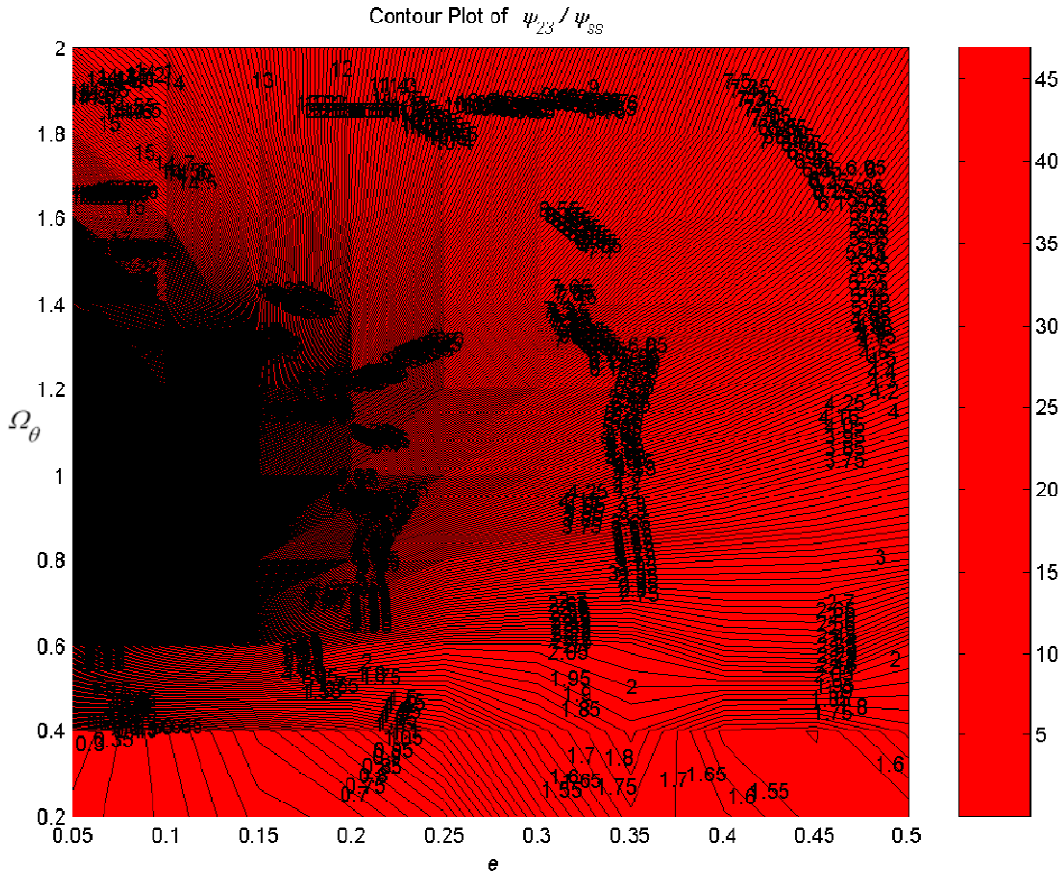
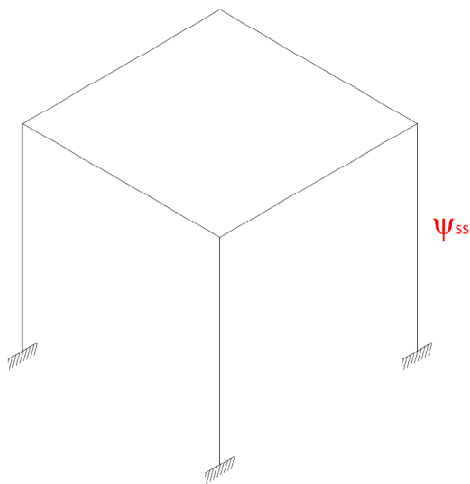


Fig. 6.201 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

6.7.3.5 Caratteristiche totali con  $\Omega_{\theta} = \Omega_{\theta,1}$



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3$$

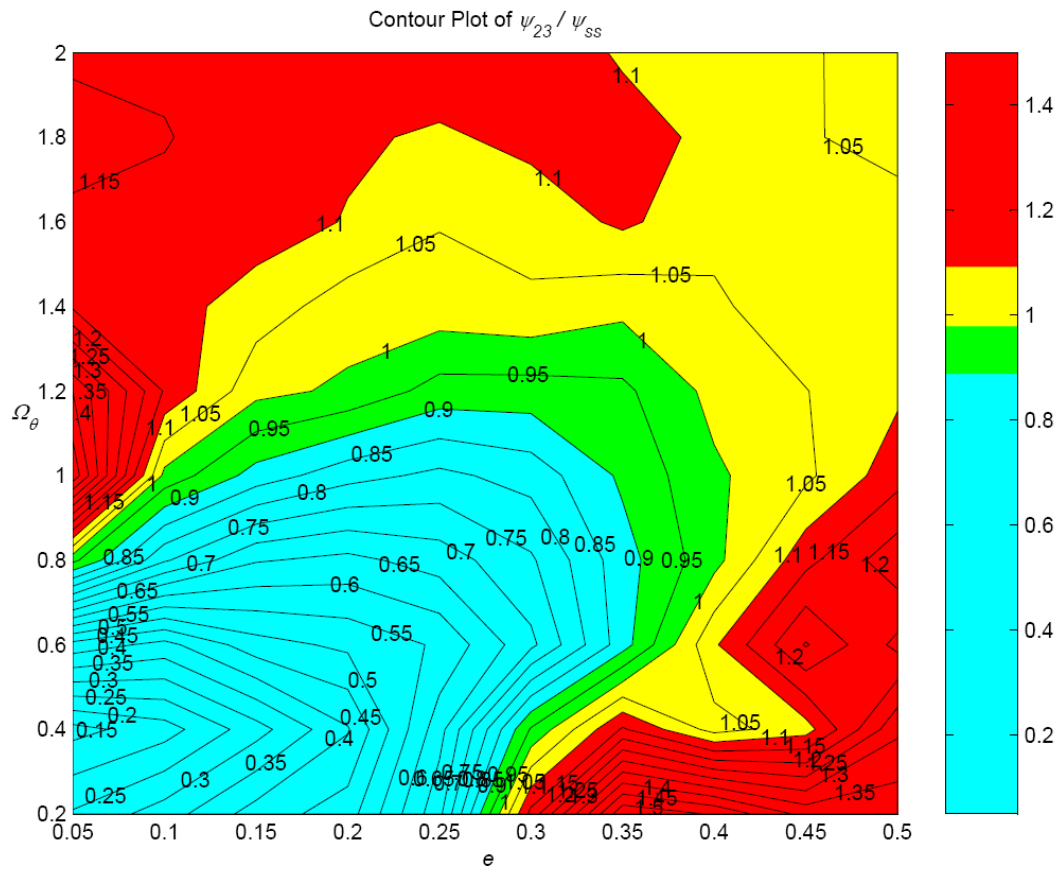
$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_1$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta,1}$$

Fig. 6.202 Struttura single storey equivalente.

Il rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  ha il seguente andamento:



**Fig. 6.203** Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 6.7.3.6 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre che, per il terzo piano, il single storey che meglio ne coglie il comportamento ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$



### 6.7.4 Riassunto

Per chiarezza, si riassume graficamente quanto ottenuto:

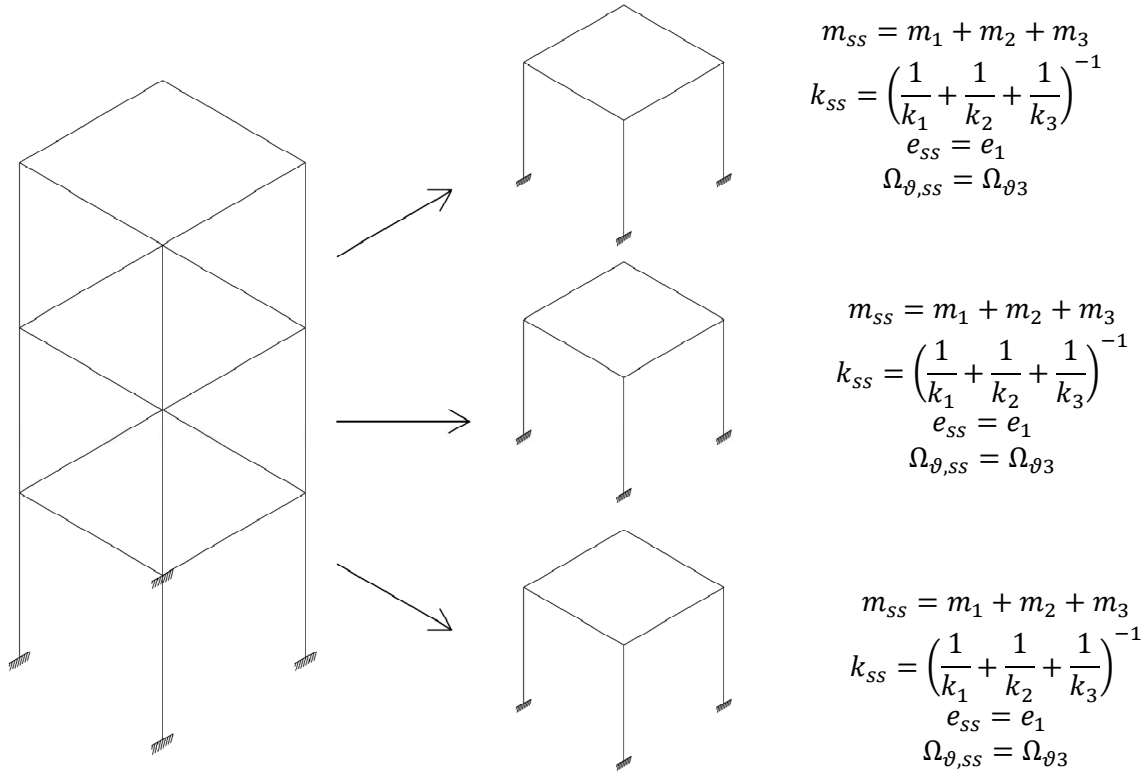


Fig. 6.179 Riassunto dei risultati ottenuti.

### 6.8 Riassunto dei risultati ottenuti

Si riassumono i risultati ottenuti nella tabella 5.2, nella quale sono indicati, per ogni caso di calcolo considerato, i valori di rigidezza, massa, eccentricità e  $\Omega_{\vartheta}$  del single storey che meglio approssima il comportamento dei piani della struttura multi storey.

Caso	Primo Piano				Secondo Piano				Terzo Piano			
	$k_{ss}$	$m_{ss}$	$e_{ss}$	$\Omega_{\vartheta,ss}$	$k_{ss}$	$m_{ss}$	$e_{ss}$	$\Omega_{\vartheta,ss}$	$k_{ss}$	$m_{ss}$	$e_{ss}$	$\Omega_{\vartheta,ss}$
1	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,02}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{03}$	$\Omega_{\vartheta,03}$
2	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,02}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{03}$	$\Omega_{\vartheta,03}$
3	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,02}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{03}$	$\Omega_{\vartheta,03}$
4	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,02}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{03}$	$\Omega_{\vartheta,03}$
5	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,02}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{03}$	$\Omega_{\vartheta,03}$
6	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,03}$	$k_{02}$	$m_{02}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,03}$	$k_{03}$	$m_{03}$	$e_{03}$	$\Omega_{\vartheta,03}$
7	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,01}$

Tab. 6.2 Risultati dei calcoli effettuati

In questa tabella si individuano:

$$k_{tot} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \quad (6.8)$$

$$m_{tot} = m_1 + m_2 + m_3 \quad (6.9)$$

### .8.1 Piani identici o variazione di massa e rigidezza

Riassumendo, se i due piani della struttura multi storey sono identici, oppure si presenta una variazione di massa o rigidezza,, i comportamenti dei vari piani della struttura possono essere rappresentati, con buona approssimazione, da una struttura single storey avente le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned} m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\ k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\ e_{ss} &= e_1 = e_2 = e_3 \\ \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 1} = \Omega_{\vartheta 2} = \Omega_{\vartheta 3} \end{aligned}$$

## 6.8.2 Variazione di $\Omega_\vartheta$

Nel caso che a variare sia il parametro  $\Omega_\vartheta$ , i single storey per i vari piani sono i seguenti:

### 6.8.2.1 $\Omega_{\vartheta,03} \leq \Omega_{\vartheta,02} \leq \Omega_{\vartheta,01}$

I single storey che meglio rappresentano il comportamento dei vari piani presentano le seguenti caratteristiche:

- Primo Piano

$$\begin{aligned} m_{SS} &= m_1 + m_2 + m_3 \\ k_{SS} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\ e_{SS} &= e_1 = e_2 = e_3 \\ \Omega_{\vartheta,SS} &= \Omega_{\vartheta 3} \end{aligned}$$

- Secondo Piano

$$\begin{aligned} m_{SS} &= m_2 \\ k_{SS} &= k_2 \\ e_{SS} &= e_1 = e_2 = e_3 \\ \Omega_{\vartheta,SS} &= \Omega_{\vartheta 3} \end{aligned}$$

- Terzo Piano

$$\begin{aligned} m_{SS} &= m_3 \\ k_{SS} &= k_3 \\ e_{SS} &= e_1 = e_2 = e_3 \\ \Omega_{\vartheta,SS} &= \Omega_{\vartheta 3} \end{aligned}$$

**6.8.2.2  $\Omega_{\vartheta,01} \leq \Omega_{\vartheta,02} \leq \Omega_{\vartheta,03}$** 

In questo caso, il single storey che rappresenta il comportamento dei tre piani è il seguente:

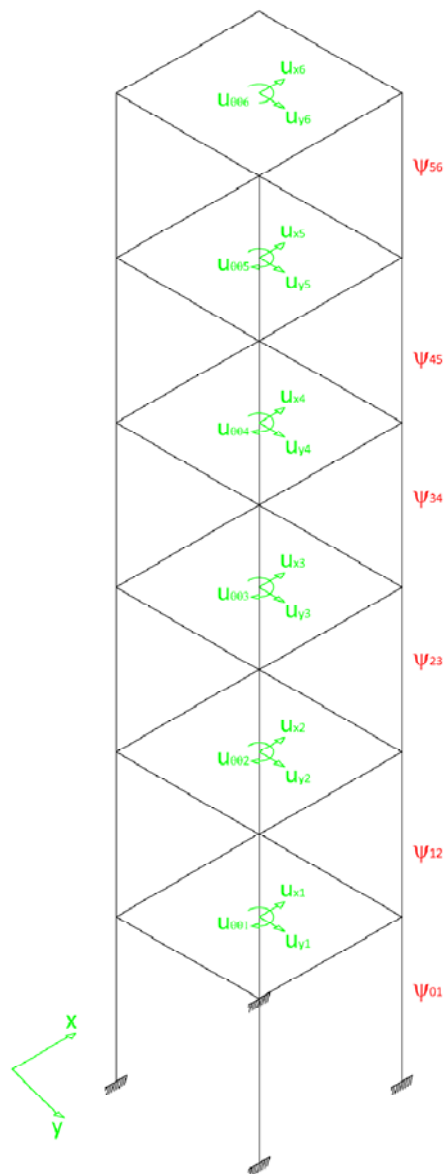
$$\begin{aligned}m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\e_{ss} &= e_1 = e_2 = e_3 \\ \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 1}\end{aligned}$$



## CAPITOLO 7

### Struttura a sei piani

In questo capitolo verranno presentate le analisi effettuate su una struttura multi storey a tre piani, rappresentata in Fig. 7.1.



**Fig. 7.1** *Struttura single storey a sei piani.*

I diversi casi di calcolo sono elencati nella tabella 7.1:

Caso	$R_{e,2}$	$R_{m,2}$	$R_{k,2}$	$R_{\Omega_{\vartheta},2}$	$R_{e,3}$	$R_{m,3}$	$R_{k,3}$	$R_{\Omega_{\vartheta},3}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	0.8	1	1	1	0.6	1

Caso	$R_{e,4}$	$R_{m,4}$	$R_{k,4}$	$R_{\Omega_{\vartheta},4}$	$R_{e,5}$	$R_{m,5}$	$R_{k,5}$	$R_{\Omega_{\vartheta},5}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	0.5	1	1	1	0.4	1

Caso	$R_{e,6}$	$R_{m,6}$	$R_{k,6}$	$R_{\Omega_{\vartheta},6}$
1	1	1	1	1
2	1	1	0.2	1

Tab. 7.1 Casi di calcolo per la struttura multi storey a sei piani

## 7.1 Caso 1: Piani identici

Il primo caso consiste in una struttura composta da tre piani di caratteristiche identiche; si considerano, infatti, i rapporti  $R_{e,i}$ ,  $R_{m,i}$ ,  $R_{k,i}$ ,  $R_{\Omega_{\vartheta},i}$  con valore unitario:

$$\begin{aligned}
 R_{e,2} &= R_{m,2} = R_{k,2} = R_{\Omega_{\vartheta},2} = 1 \\
 R_{e,3} &= R_{m,3} = R_{k,3} = R_{\Omega_{\vartheta},3} = 1 \\
 R_{e,4} &= R_{m,4} = R_{k,4} = R_{\Omega_{\vartheta},4} = 1 \\
 R_{e,5} &= R_{m,5} = R_{k,5} = R_{\Omega_{\vartheta},5} = 1 \\
 R_{e,6} &= R_{m,6} = R_{k,6} = R_{\Omega_{\vartheta},6} = 1
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

### 7.1.1 Primo Piano

Per cercare di rappresentare al meglio le caratteristiche del primo piano della struttura multi storey, verranno considerati, visti i risultati delle analisi precedenti, due single storey equivalenti: il primo avente le caratteristiche di massa del primo piano e rigidezza dell'intera struttura, il secondo con rigidezza e massa dell'intera struttura.

7.1.1.1 Caratteristiche di massa del primo piano

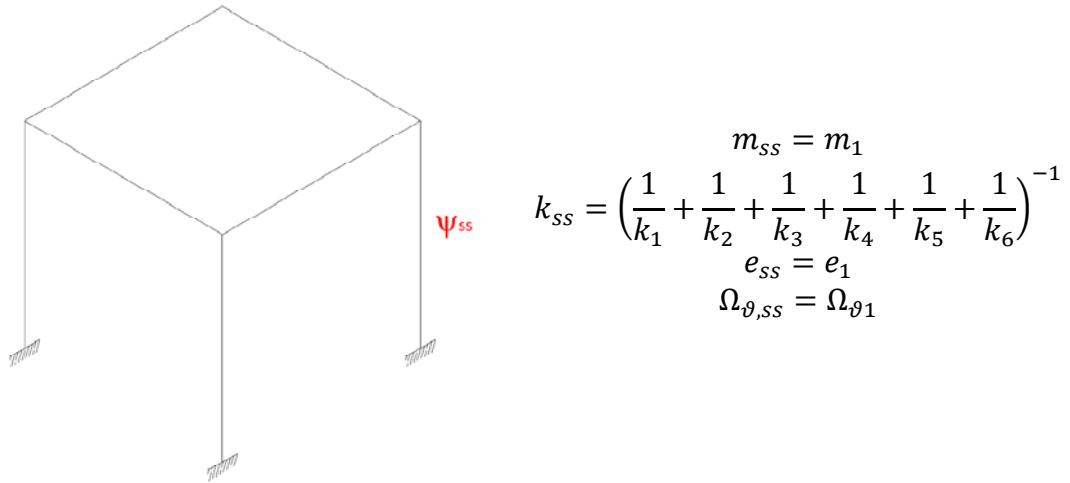


Fig. 7.2 Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

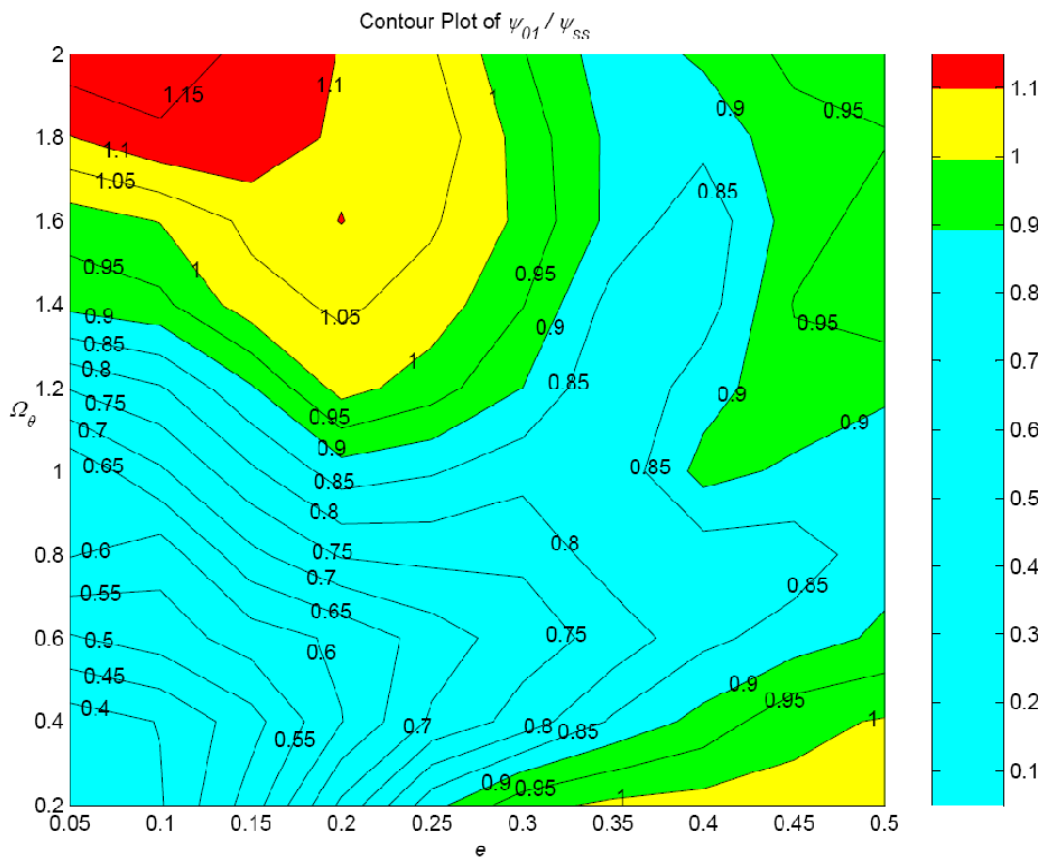
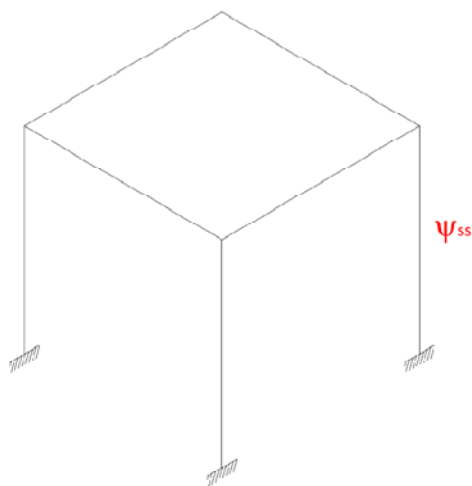


Fig. 7.3 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .



7.1.1.2 Caratteristiche totali



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_1$$

$$\Omega_{\vartheta,ss} = \Omega_{\vartheta 1}$$

Fig. 7.4 Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

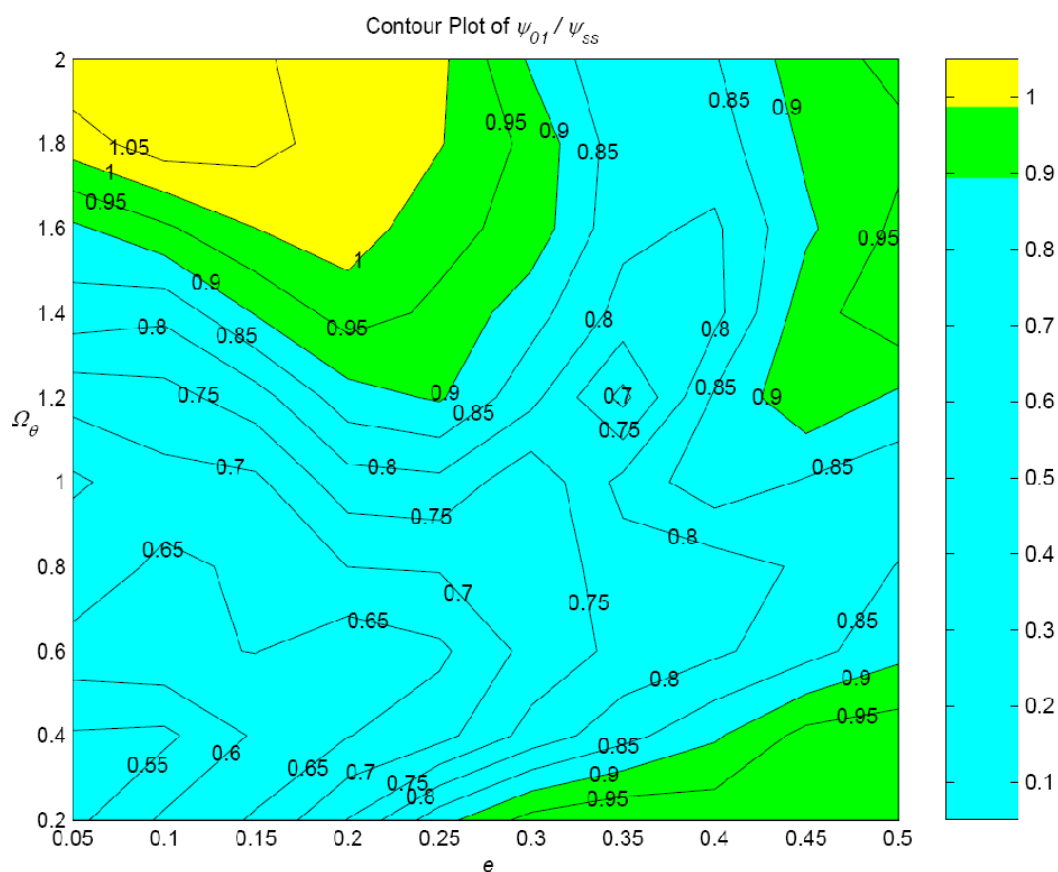


Fig. 7.5 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 7.1.1.3 Riassunto

Dai grafici ottenuti risulta evidente come, per il primo piano, il single storey che meglio ne coglie il comportamento sia quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  rimane, per buona parte del dominio considerato, inferiore all'unità; inoltre, nelle porzioni di dominio in cui il valore unitario viene superato, la differenza tra i due parametri rimane comunque inferiore al 5%.

Si può quindi affermare che, in questo caso, il single storey che meglio rappresenta il comportamento del primo piano della struttura multi storey ha le seguenti caratteristiche:

$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

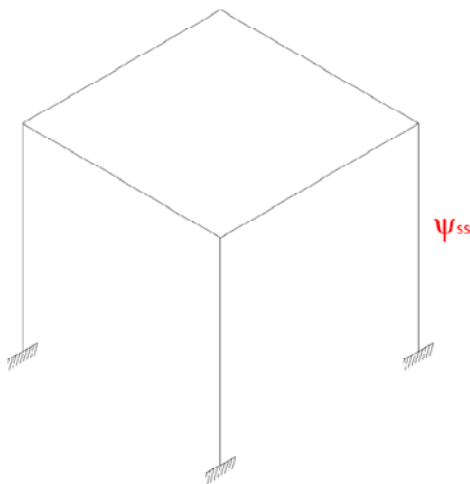
$$e_{ss} = e_1$$

$$\Omega_{\vartheta,ss} = \Omega_{\vartheta 1}$$

### 7.1.2 Secondo Piano

Per il secondo della struttura multi storey verranno considerati due single storey equivalenti, entrambi con le caratteristiche di rigidezza dell'intera struttura: il primo avente massa del secondo piano, il secondo con massa pari a quella dell'intera struttura.

#### 7.1.2.1 Caratteristiche di massa del secondo piano



$$m_{ss} = m_2$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\vartheta,ss} = \Omega_{\vartheta 2}$$

Fig. 7.6 Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

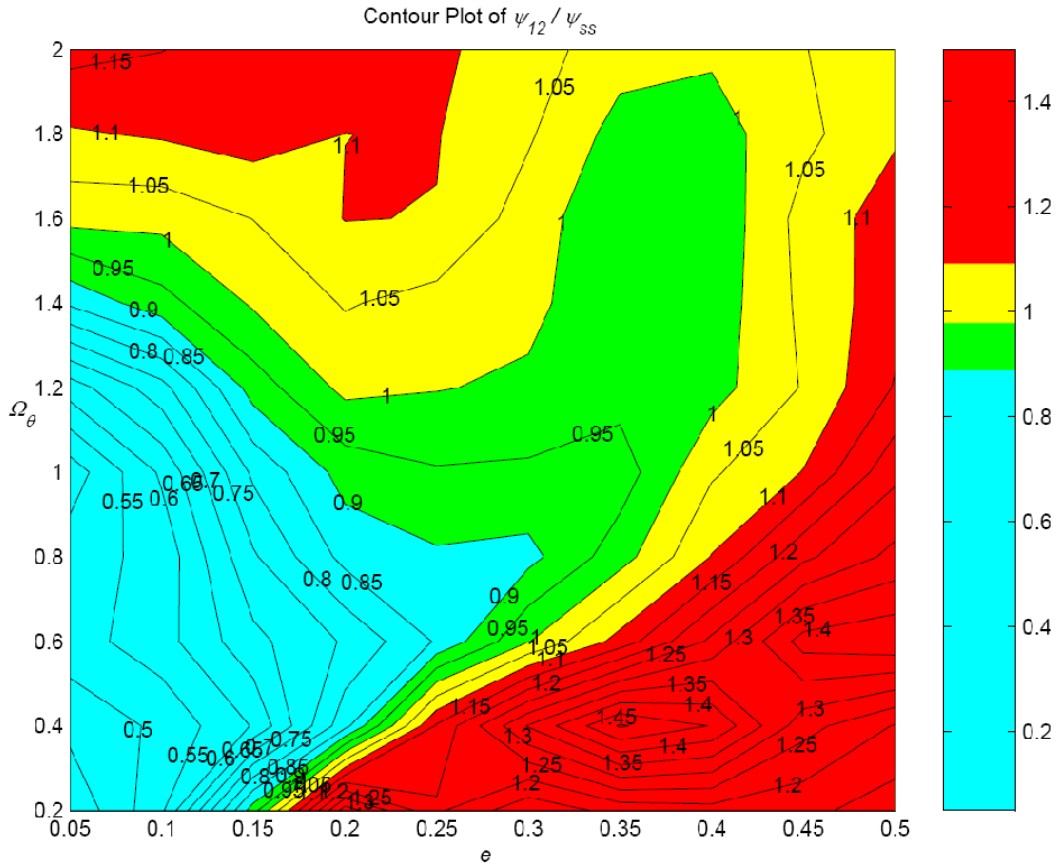
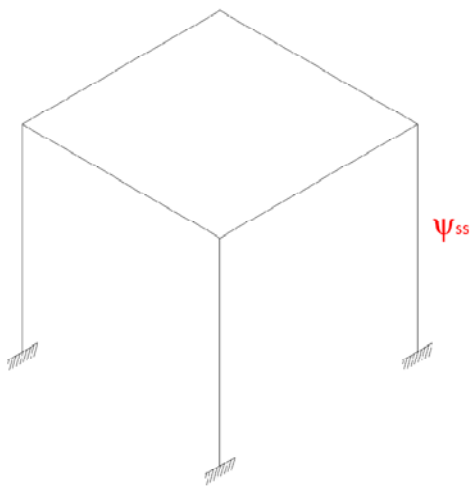


Fig. 7.7 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 7.1.2.2 Caratteristiche totali



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 2}$$

Fig. 7.8 Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

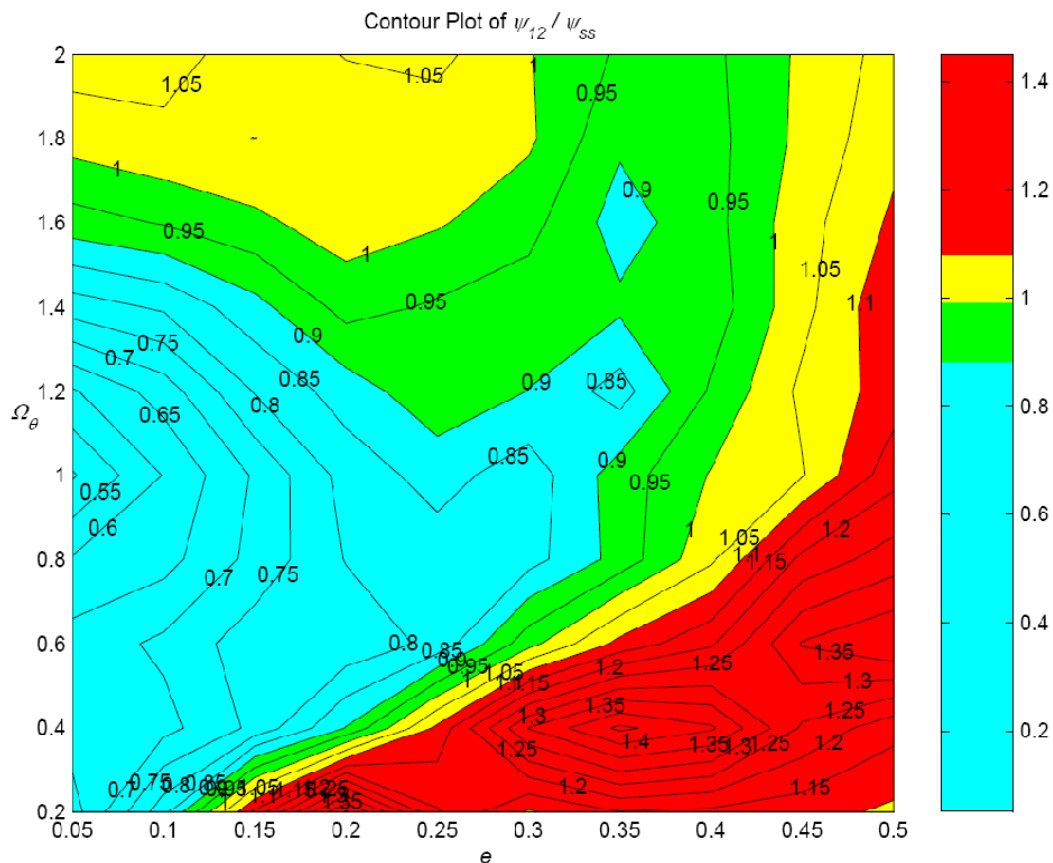


Fig. 7.9 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 7.1.2.3 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre come il single storey che meglio rappresenta il comportamento del secondo piano della struttura multi storey sia, anche in questo caso, quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  rimane inferiore all'unità per una porzione più estesa del dominio. Vi sono tuttavia delle zone in cui la differenza tra i due parametri è superiore al 10%; come però dimostrato in Fig. 7.10, in cui sono indicate le coppie  $e$  ed  $\Omega_g$  proprie delle strutture reali analizzate nel capitolo 2, le zone dove si verifica questo superamento non sono tipiche di tali strutture reali. Per questo motivo si ritiene accettabile la rappresentazione scelta.

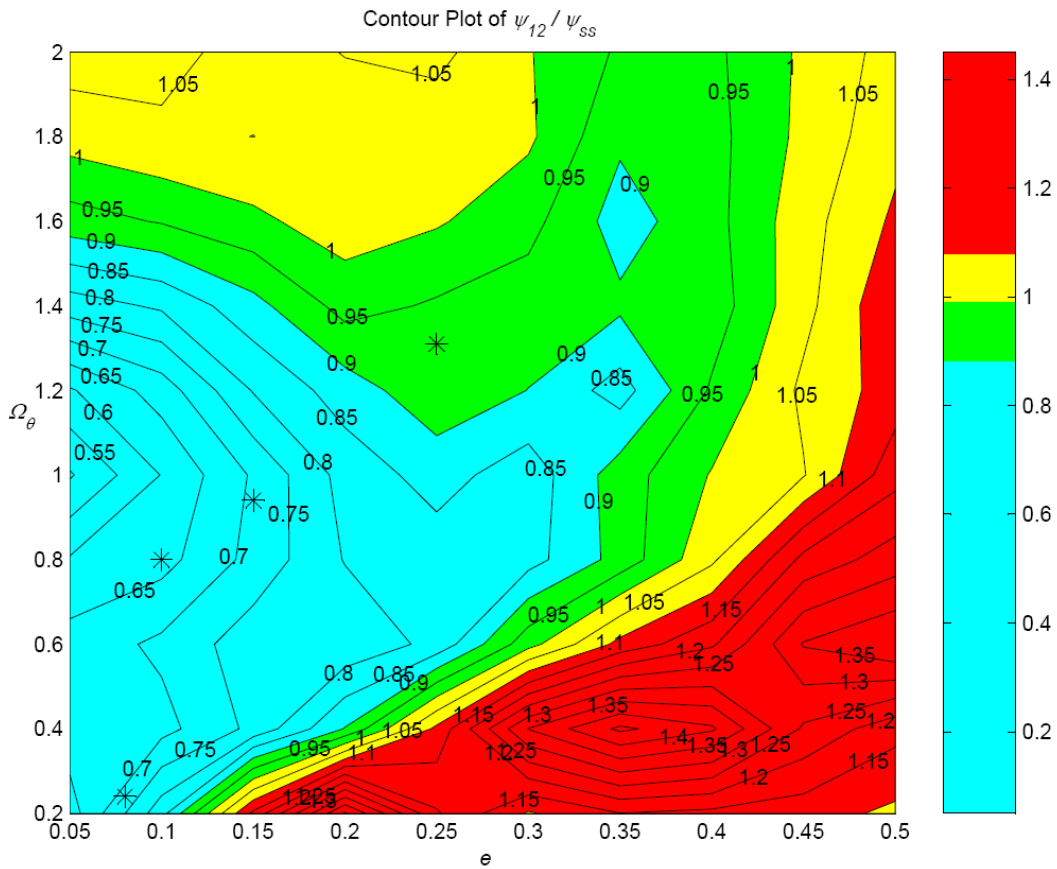


Fig. 7.10 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  con evidenziati i valori di  $e$  ed  $\Omega_\theta$  per strutture reali.

Come si può vedere, le considerazioni fatte sono corrette, per cui, in conclusione, anche per il secondo piano la struttura single storey che meglio approssima il comportamento del secondo piano della struttura multi storey ha le seguenti caratteristiche:

$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

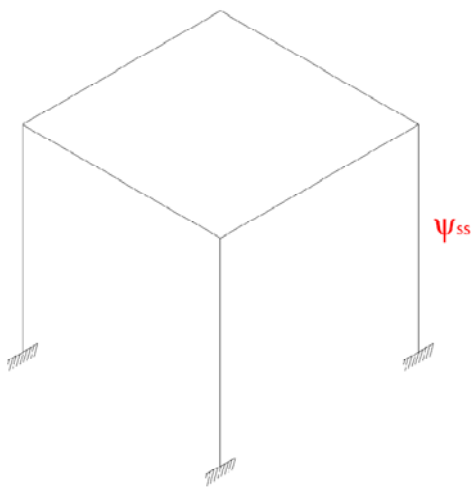
$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 2}$$

### 7.1.3 Terzo Piano

Come per il secondo piano, anche per il terzo piano della struttura multi storey verranno considerati due single storey equivalenti, entrambi con le caratteristiche di rigidezza dell'intera struttura: il primo avente massa del terzo piano, il secondo con massa pari a quella dell'intera struttura.

#### 7.1.3.1 Caratteristiche di massa del terzo piano



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_3 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 3}
 \end{aligned}$$

**Fig. 7.11** *Struttura single storey equivalente.*

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

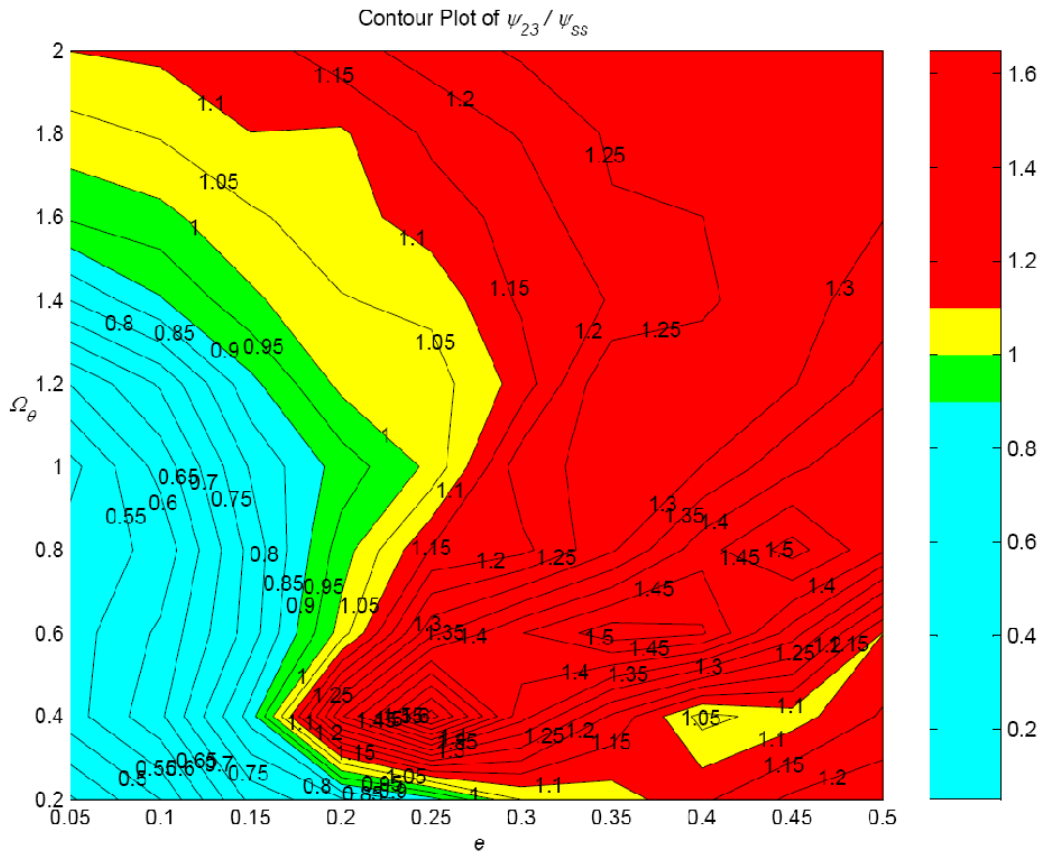
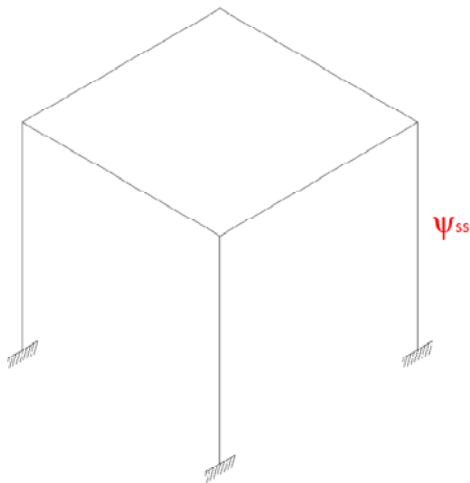


Fig. 7.12 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 7.1.3.2 Caratteristiche totali



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_3$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 3}$$

Fig. 7.13 Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

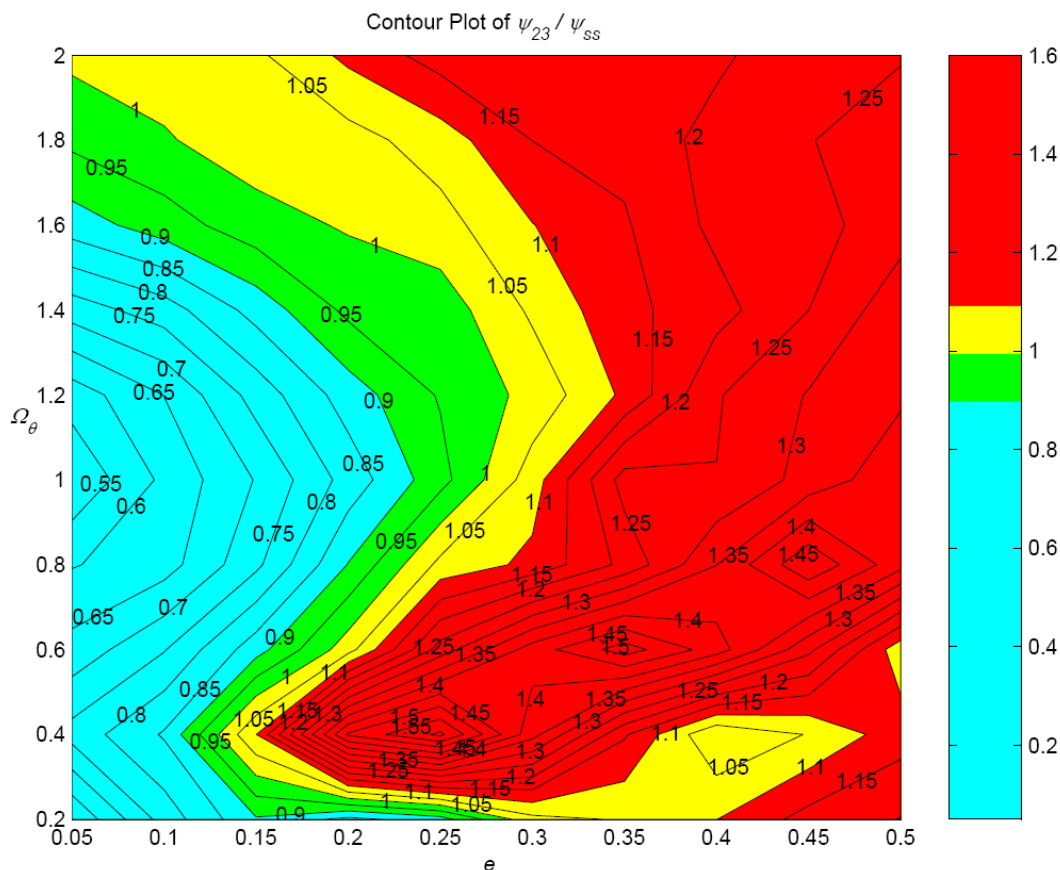


Fig. 7.14 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$ .

### 7.1.3.3 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre come il single storey che meglio rappresenta il comportamento del terzo piano della struttura multi storey sia, anche in questo caso, quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  rimane inferiore all'unità per una porzione più estesa del dominio. Vi sono tuttavia anche qui delle zone in cui la differenza tra i due parametri è di molto superiore al 10%; tuttavia, le considerazioni fatte per il secondo piano sono valide anche in questo caso, per cui si può ritenere accettabile la scelta di rappresentare il comportamento del terzo piano con un single storey avente le seguenti caratteristiche:



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

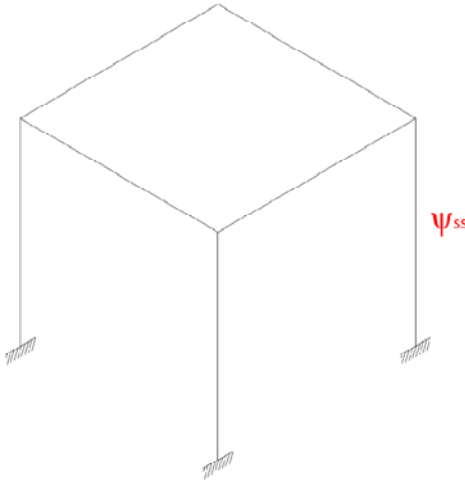
$$e_{ss} = e_3$$

$$\Omega_{\vartheta,ss} = \Omega_{\vartheta 3}$$

## 7.1.4 Quarto Piano

Le strutture prese in considerazione sono le stesse utilizzate per il terzo piano, ma questa volta con la massa del quarto piano

### 7.1.4.1 Caratteristiche di massa del quarto piano



$$m_{ss} = m_4$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_4$$

$$\Omega_{\vartheta,ss} = \Omega_{\vartheta 4}$$

**Fig. 7.15** *Struttura single storey equivalente.*

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{34}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

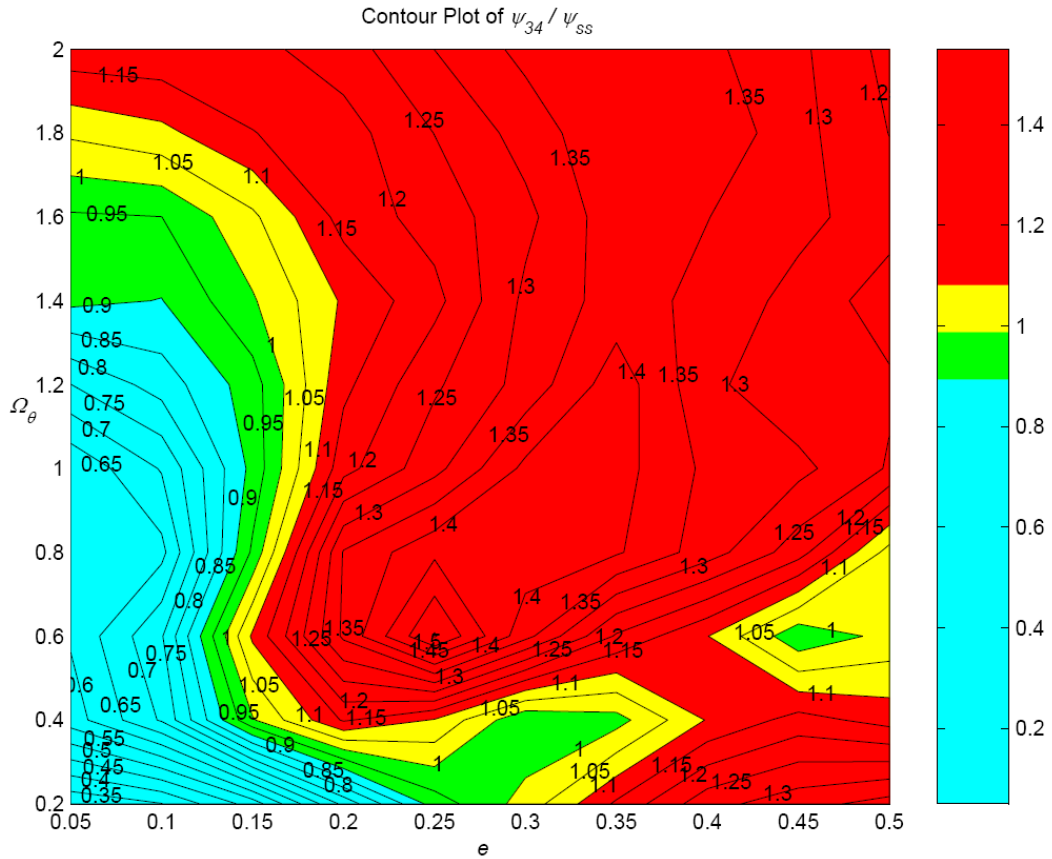
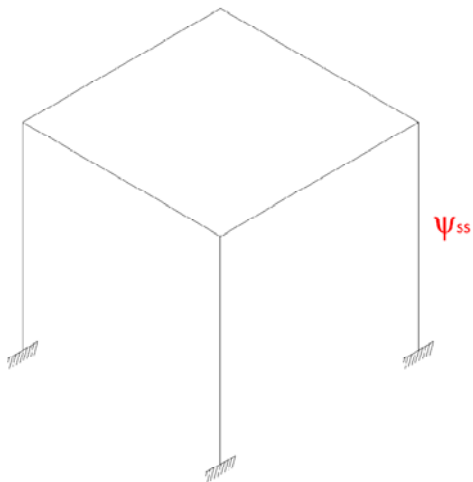


Fig. 7.16 Rapporto  $\psi_{34} / \psi_{ss}$ .

### 7.1.4.2 Caratteristiche totali



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_4$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 4}$$

Fig. 7.17 Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{34}/\psi_{SS}$  per questa struttura sono i seguenti:

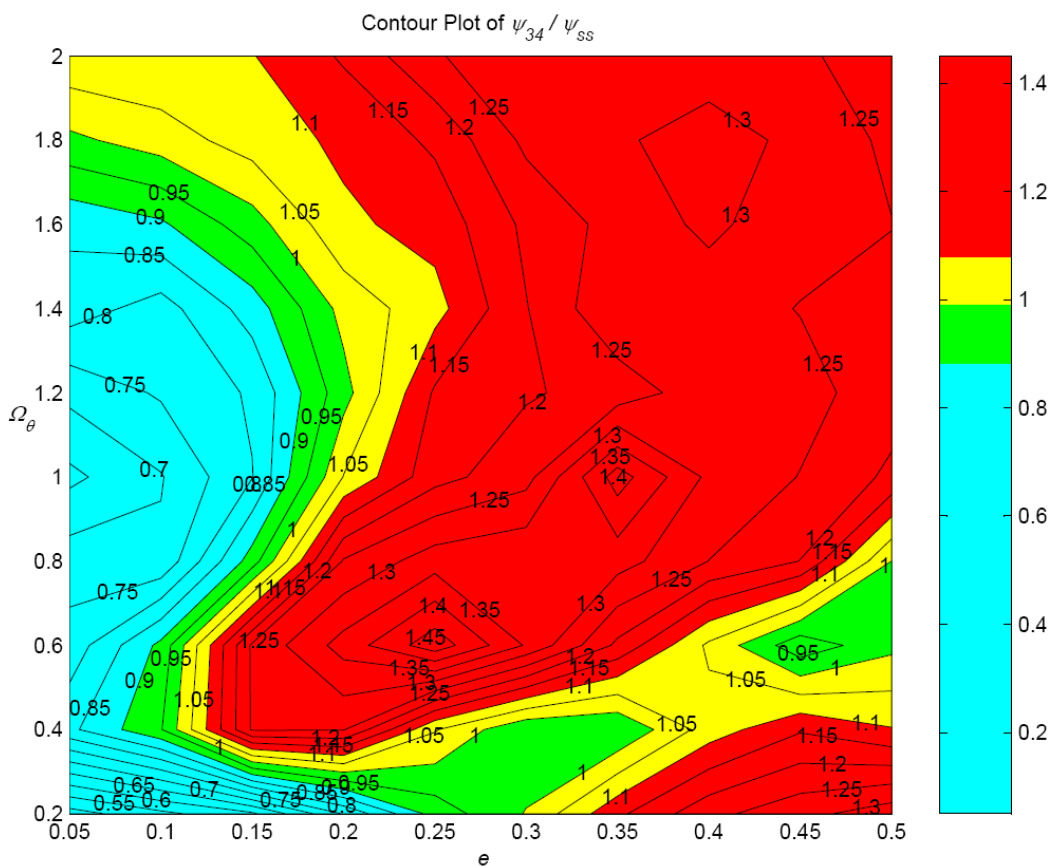


Fig. 7.18 Rapporto  $\psi_{34}/\psi_{SS}$ .

### 7.1.4.3 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre come il single storey che meglio rappresenta il comportamento del quarto piano della struttura multi storey sia, anche in questo caso, quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{34}/\psi_{SS}$  rimane inferiore all'unità per una porzione più estesa del dominio. Vi sono tuttavia anche qui delle zone in cui la differenza tra i due parametri è di molto superiore al 10%; tuttavia, le considerazioni fatte per il secondo e il terzo piano sono valide anche in questo caso, per cui si può ritenere accettabile la scelta di rappresentare il comportamento del quarto piano con un single storey avente le seguenti caratteristiche:

$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

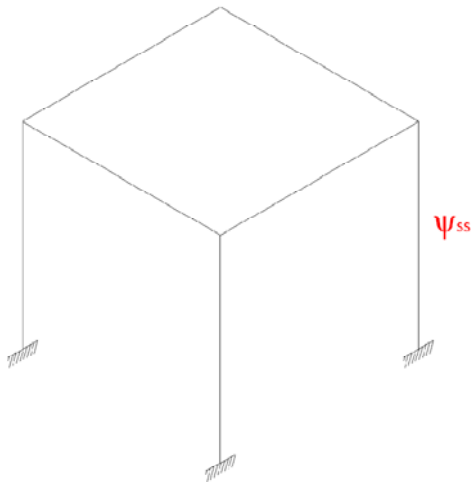
$$e_{ss} = e_4$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 4}$$

### 7.1.5 Quinto Piano

Le strutture prese in considerazione sono le stesse utilizzate per i piani precedenti, ma questa volta con la massa del quinto piano.

#### 7.1.5.1 Caratteristiche di massa del quinto piano



$$m_{ss} = m_5$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_5$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 5}$$

**Fig. 7.19** *Struttura single storey equivalente.*

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{45}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

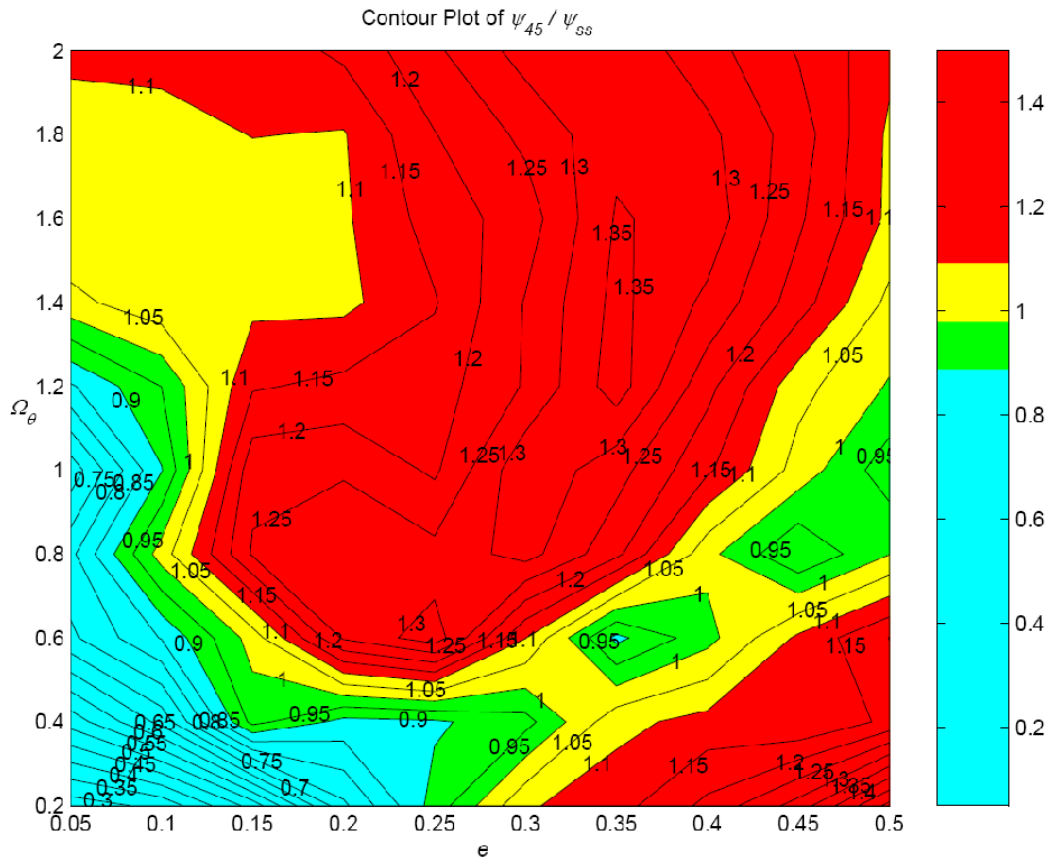
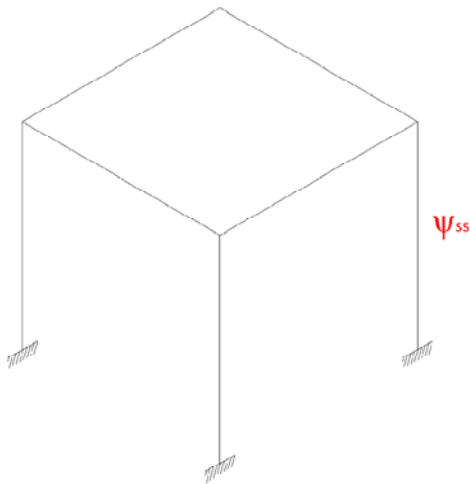


Fig. 7.20 Rapporto  $\psi_{45}/\psi_{ss}$ .

### 7.1.5.2 Caratteristiche totali



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_5$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 5}$$

Fig. 7.21 Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{45}/\psi_{SS}$  per questa struttura sono i seguenti:

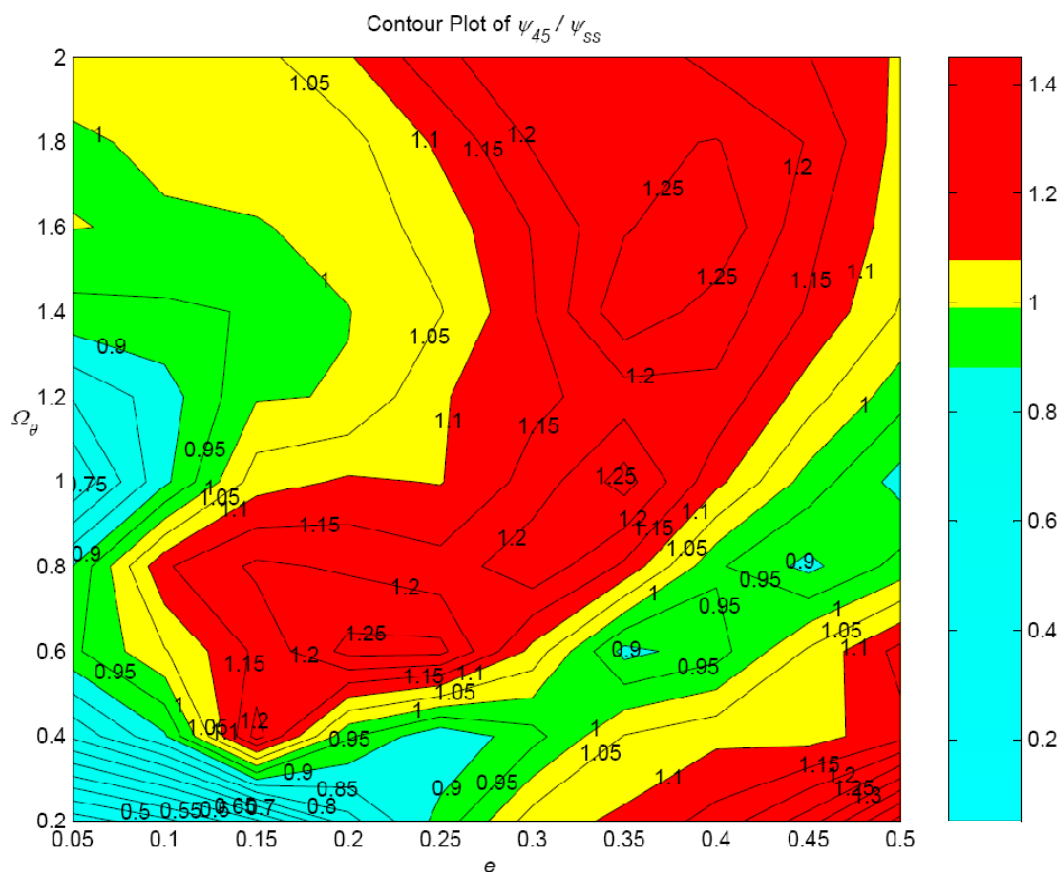


Fig. 7.22 Rapporto  $\psi_{45}/\psi_{SS}$ .

### 7.1.5.3 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre come il single storey che meglio rappresenta il comportamento del quinto piano della struttura multi storey sia, anche in questo caso, quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{45}/\psi_{SS}$  rimane inferiore all'unità per una porzione più estesa del dominio. Vi sono tuttavia anche qui delle zone in cui la differenza tra i due parametri è di molto superiore al 10%; tuttavia, le considerazioni fatte per i piani precedenti sono valide anche in questo caso, per cui si può ritenere accettabile la scelta di rappresentare il comportamento del quinto piano con un single storey avente le seguenti caratteristiche:

$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

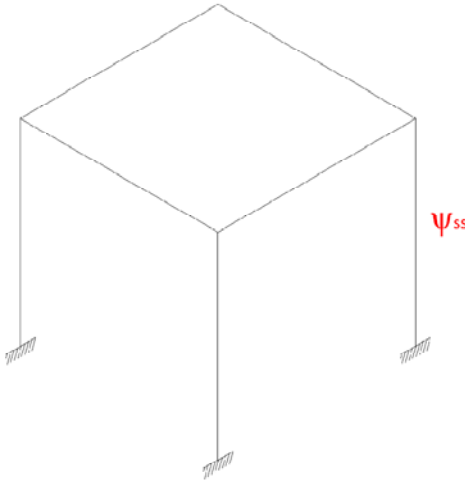
$$e_{ss} = e_5$$

$$\Omega_{\vartheta,ss} = \Omega_{\vartheta 5}$$

## 7.1.6 Sesto Piano

Le strutture prese in considerazione sono le stesse utilizzate per i piani precedenti, ma questa volta con la massa del sesto piano.

### 7.1.6.1 Caratteristiche di massa del sesto piano



$$m_{ss} = m_6$$

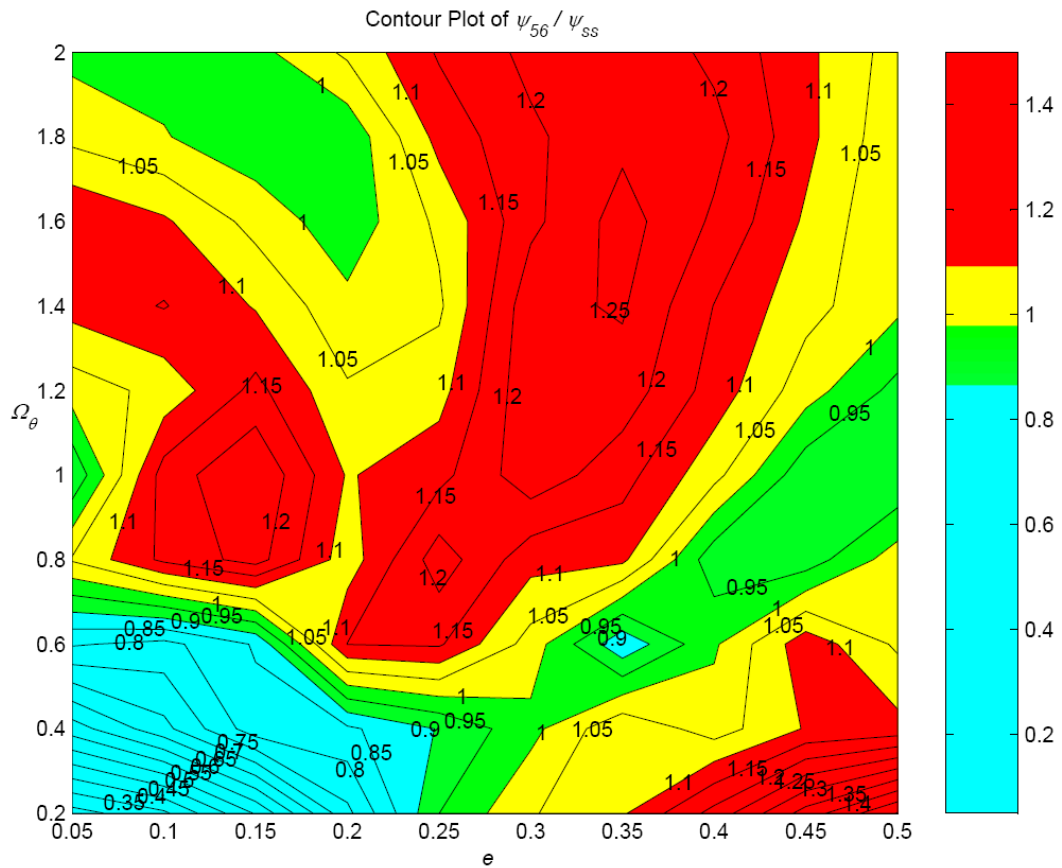
$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_6$$

$$\Omega_{\vartheta,ss} = \Omega_{\vartheta 6}$$

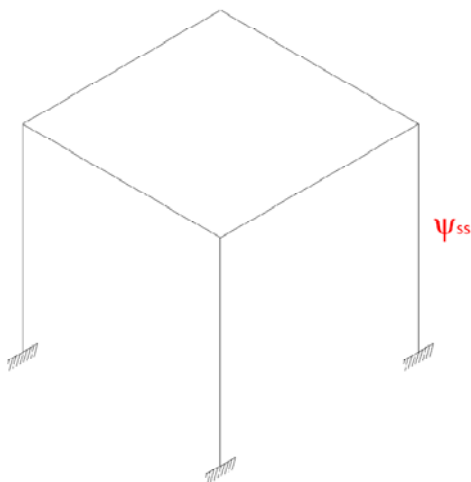
**Fig. 7.23** *Struttura single storey equivalente.*

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{56}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:



**Fig. 7.24** Rapporto  $\psi_{56} / \psi_{ss}$ .

### 7.1.6.2 Caratteristiche totali



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_6$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 6}$$

**Fig. 7.25** Struttura single storey equivalente.



I risultati in termini del rapporto  $\psi_{56}/\psi_{SS}$  per questa struttura sono i seguenti:

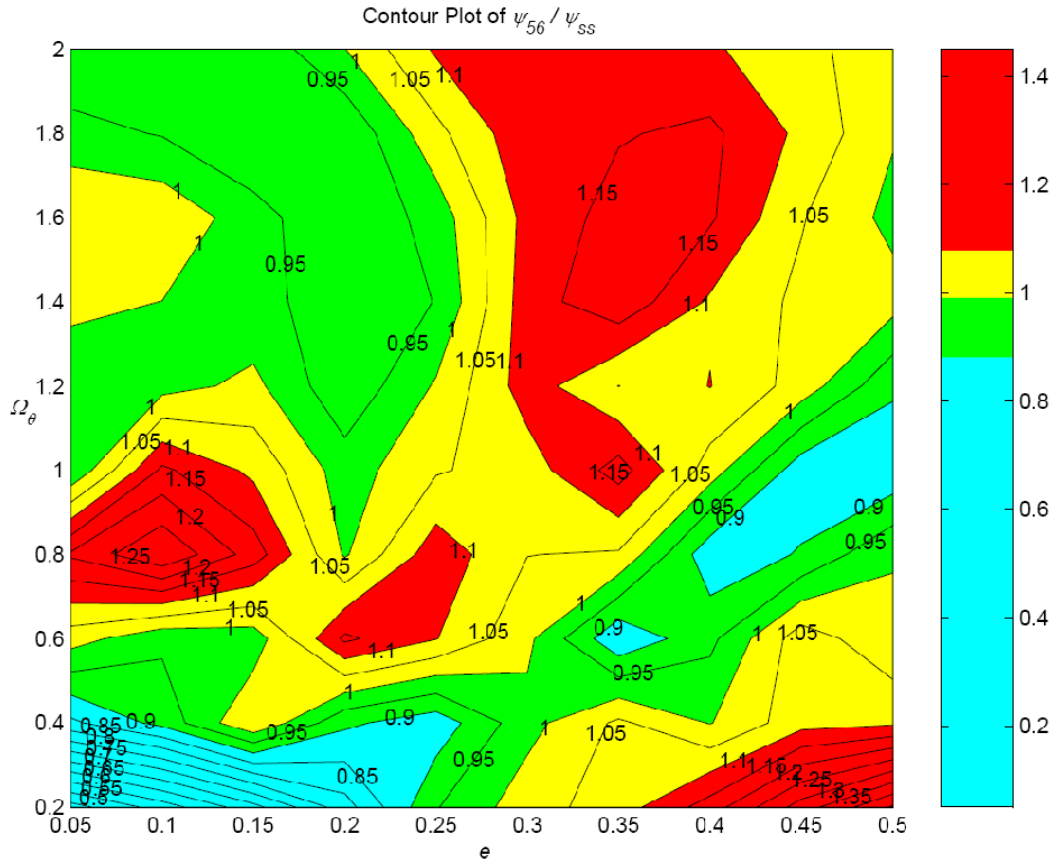


Fig. 7.26 Rapporto  $\psi_{56}/\psi_{SS}$ .

### 7.1.6.3 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre come il single storey che meglio rappresenta il comportamento del sesto piano della struttura multi storey sia, anche in questo caso, quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{56}/\psi_{SS}$  rimane inferiore all'unità per una porzione più estesa del dominio. Vi sono tuttavia anche qui delle zone in cui la differenza tra i due parametri è di molto superiore al 10%; tuttavia, le considerazioni fatte per i piani precedenti sono valide anche in questo caso, per cui si può ritenere accettabile la scelta di rappresentare il comportamento del sesto piano con un single storey avente le seguenti caratteristiche:

$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_6$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 6}$$

### 7.1.7 Riassunto

Per chiarezza, si riassume graficamente quanto ottenuto:

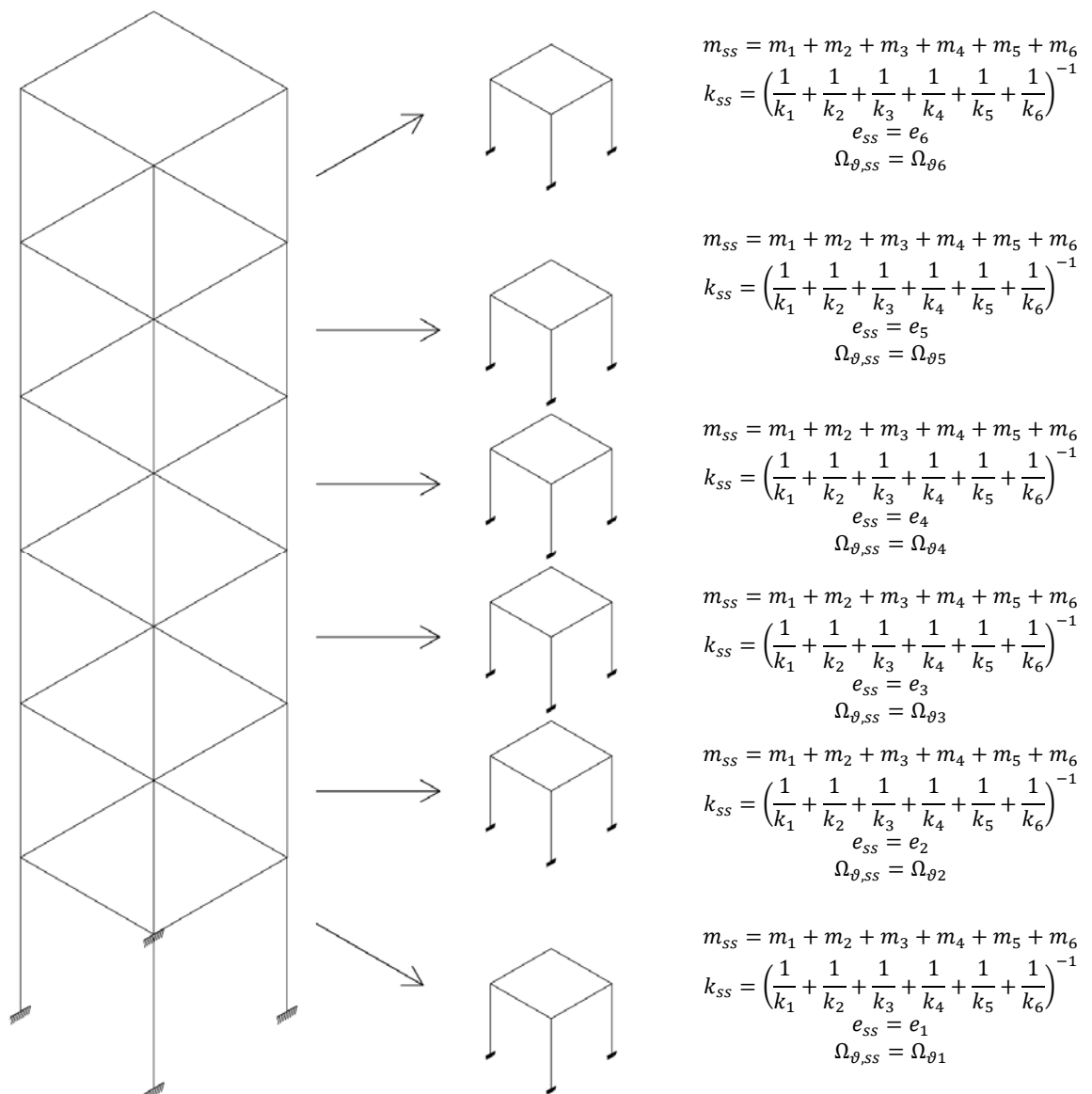


Fig. 7.27 Riassunto dei risultati ottenuti.

## 7.2 Caso 2: Diminuzione di rigidezza

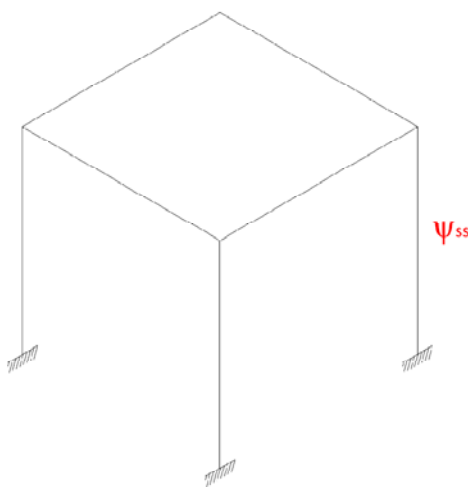
Il secondo caso prevede di diminuire la rigidezza dei piani dal secondo al sesto; si considerano, infatti, i seguenti valori per i rapporti  $R_{e,i}$ ,  $R_{m,i}$ ,  $R_{k,i}$ ,  $R_{\Omega_{\theta},i}$ :

$$\begin{aligned}
 R_{e,2} &= R_{m,2} = R_{\Omega_{\theta},2} = 1 \\
 R_{k,2} &= 0.8 \\
 R_{e,3} &= R_{m,3} = R_{\Omega_{\theta},3} = 1 \\
 R_{k,3} &= 0.6 \\
 R_{e,4} &= R_{m,4} = R_{\Omega_{\theta},4} = 1 \\
 R_{k,4} &= 0.5 \\
 R_{e,5} &= R_{m,5} = R_{\Omega_{\theta},5} = 1 \\
 R_{k,5} &= 0.4 \\
 R_{e,6} &= R_{m,6} = R_{\Omega_{\theta},6} = 1 \\
 R_{k,6} &= 0.2
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Visti i risultati precedenti, si considereranno solo strutture single storey aventi la massa totale dell'intera struttura. L'unica cosa che varierà sarà la rigidezza, che sarà considerata prima pari a quella dell'intera struttura, e successivamente uguale al valore medio delle rigidzze dei sei piani.

### 7.2.1 Primo Piano

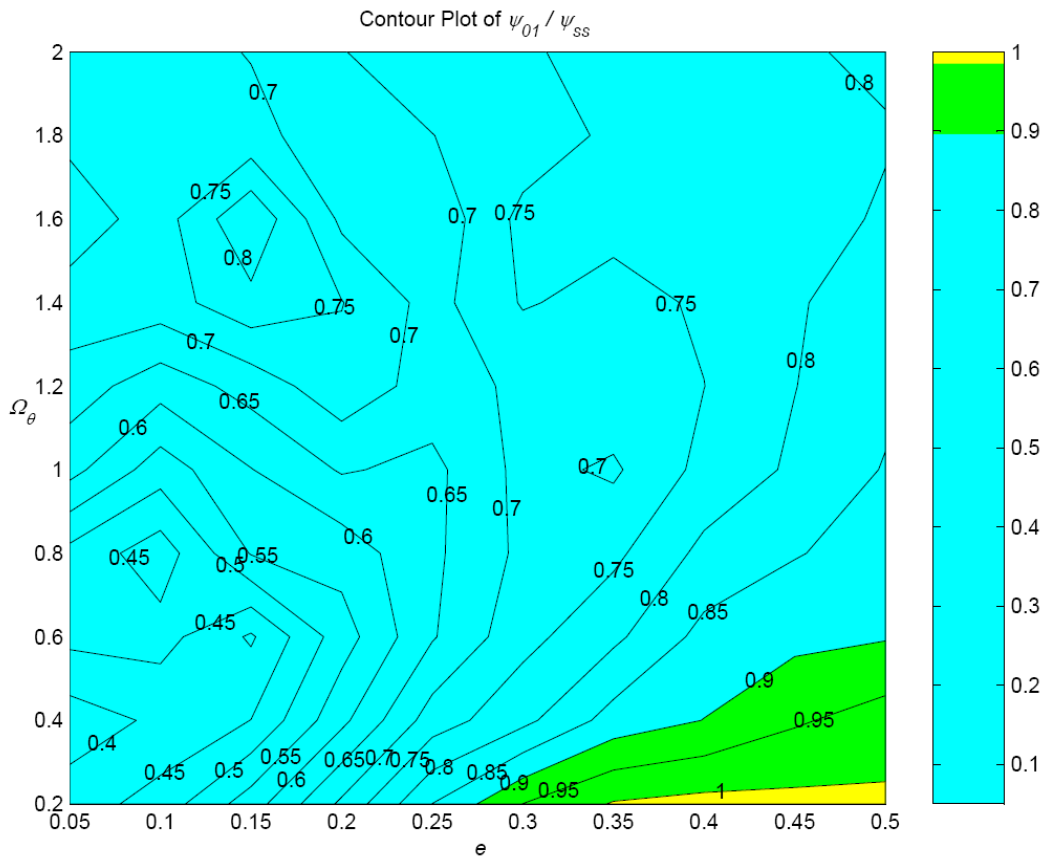
#### 7.2.1.1 Caratteristiche di rigidezza medie



$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 \\
 k_{ss} &= \frac{k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6}{6} \\
 e_{ss} &= e_1 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

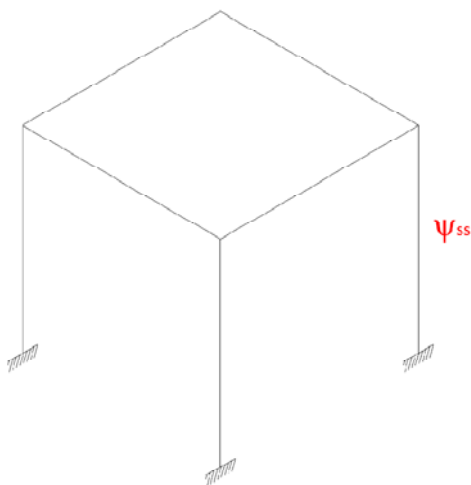
**Fig. 7.28** Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:



**Fig. 7.29** Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 7.2.1.2 Caratteristiche totali



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_1$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 1}$$

**Fig. 7.30** Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

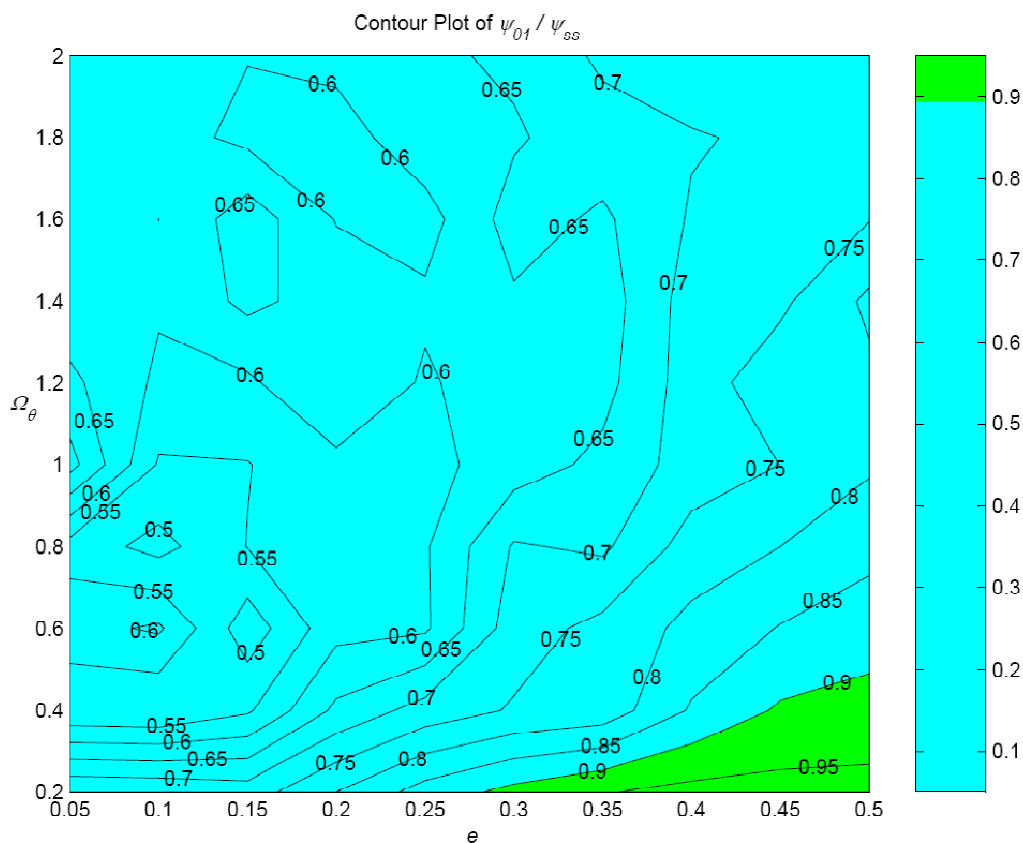


Fig. 7.31 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

### 7.2.1.3 Riassunto

Dai grafici ottenuti risulta evidente come, per il primo piano, il single storey che meglio ne coglie il comportamento sia quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$  rimane, per buona parte del dominio considerato, inferiore all'unità; inoltre, nelle porzioni di dominio in cui il valore unitario viene superato, la differenza tra i due parametri rimane comunque inferiore al 5%.

Si può quindi affermare che, in questo caso, il single storey che meglio rappresenta il comportamento del primo piano della struttura multi storey ha le seguenti caratteristiche:

$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

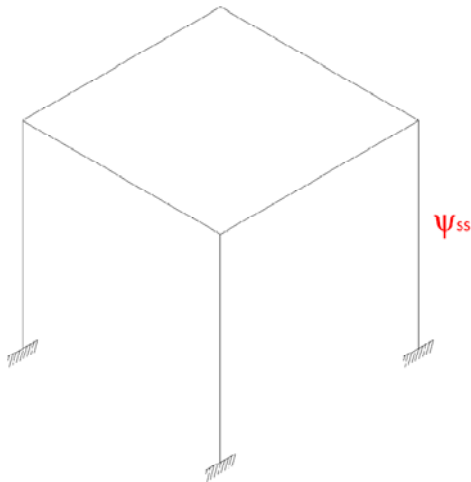
$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_1$$

$$\Omega_{\vartheta,ss} = \Omega_{\vartheta 1}$$

## 7.2.2 Secondo Piano

### 7.2.2.1 Caratteristiche di rigidezza medie



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$k_{ss} = \frac{k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6}{6}$$

$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\vartheta,ss} = \Omega_{\vartheta 2}$$

Fig. 7.32 Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

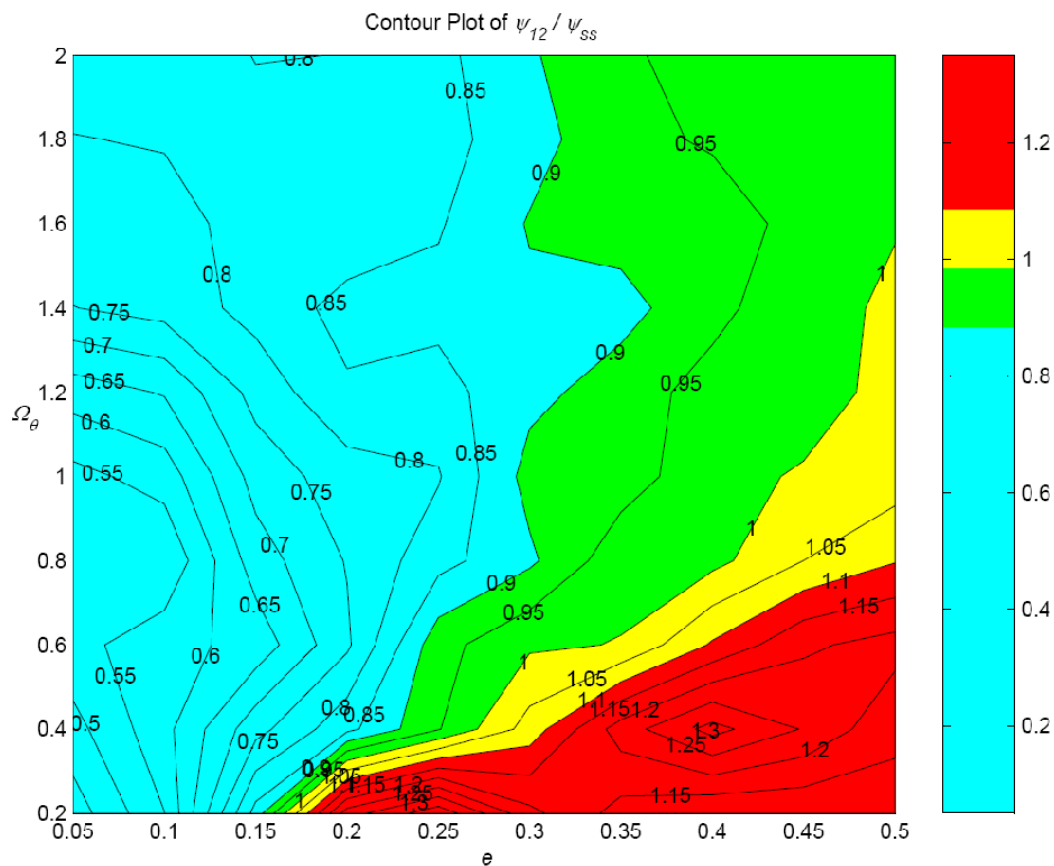
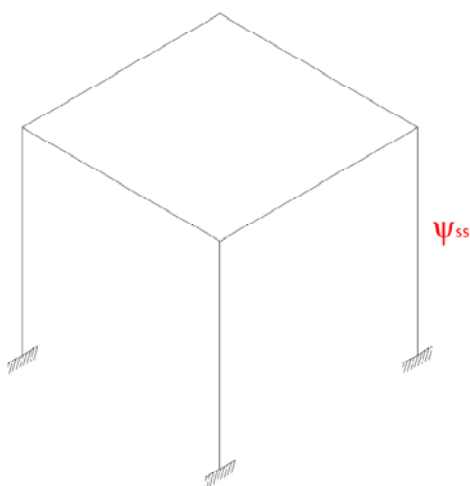


Fig. 7.33 Rapporto  $\psi_{12} / \psi_{ss}$ .

### 7.2.2.2 Caratteristiche totali



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 2}$$

Fig. 7.34 Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

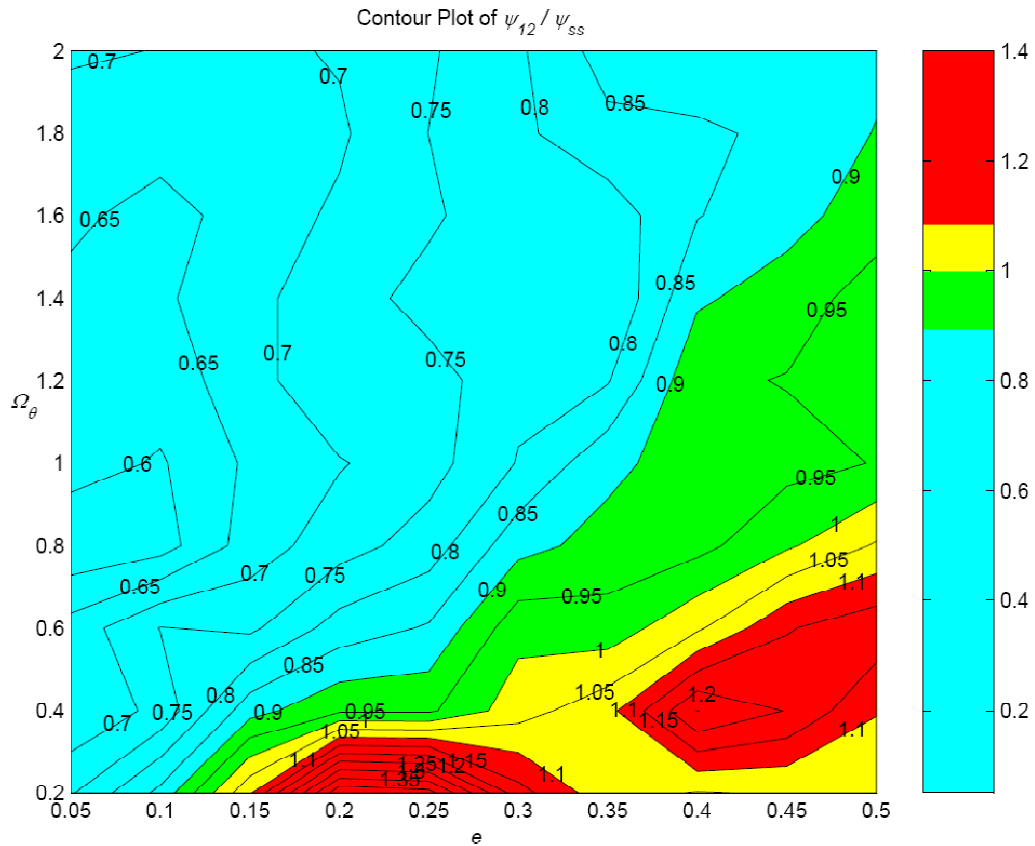


Fig. 7.35 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 7.2.2.3 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre come il single storey che meglio rappresenta il comportamento del secondo piano della struttura multi storey sia, anche in questo caso, quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$  rimane inferiore all'unità per una porzione più estesa del dominio. Vi sono tuttavia delle zone in cui la differenza tra i due parametri è superiore al 10%; come però dimostrato in precedenza, le zone dove si verifica questo superamento non sono tipiche delle strutture reali. Per questo motivo si ritiene accettabile la rappresentazione scelta:



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

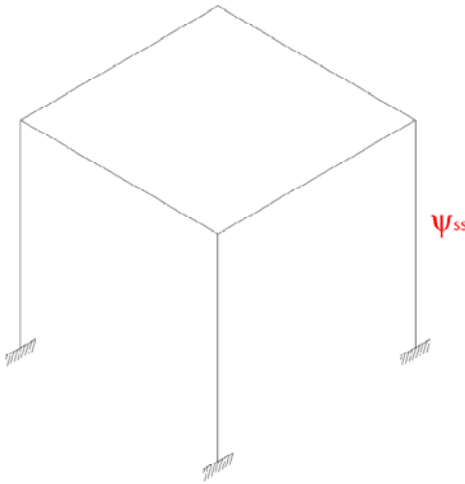
$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_2$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 2}$$

## 7.2.3 Terzo Piano

### 7.2.3.1 Caratteristiche di rigidità medie



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$k_{ss} = \frac{k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6}{6}$$

$$e_{ss} = e_3$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 3}$$

**Fig. 7.36** *Struttura single storey equivalente.*

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

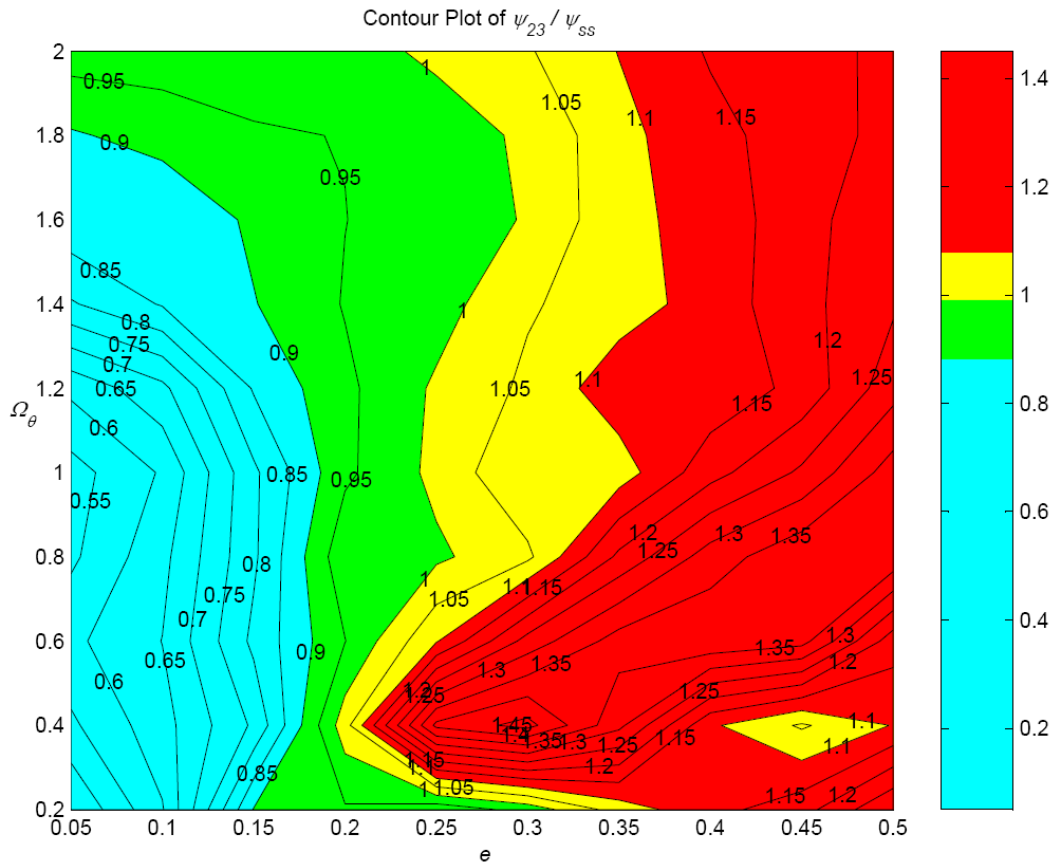
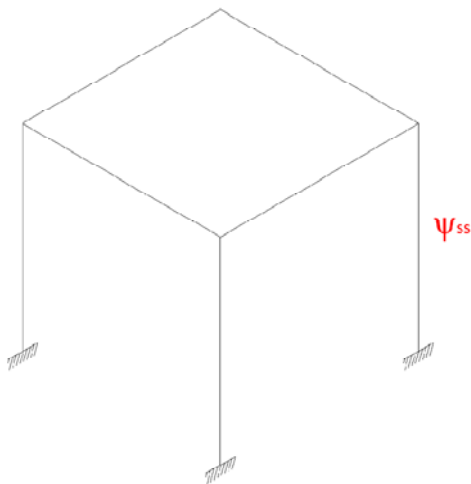


Fig. 7.37 Rapporto  $\psi_{23} / \psi_{ss}$ .

### 7.2.3.2 Caratteristiche totali



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_3$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 3}$$

Fig. 7.38 Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{23}/\psi_{SS}$  per questa struttura sono i seguenti:

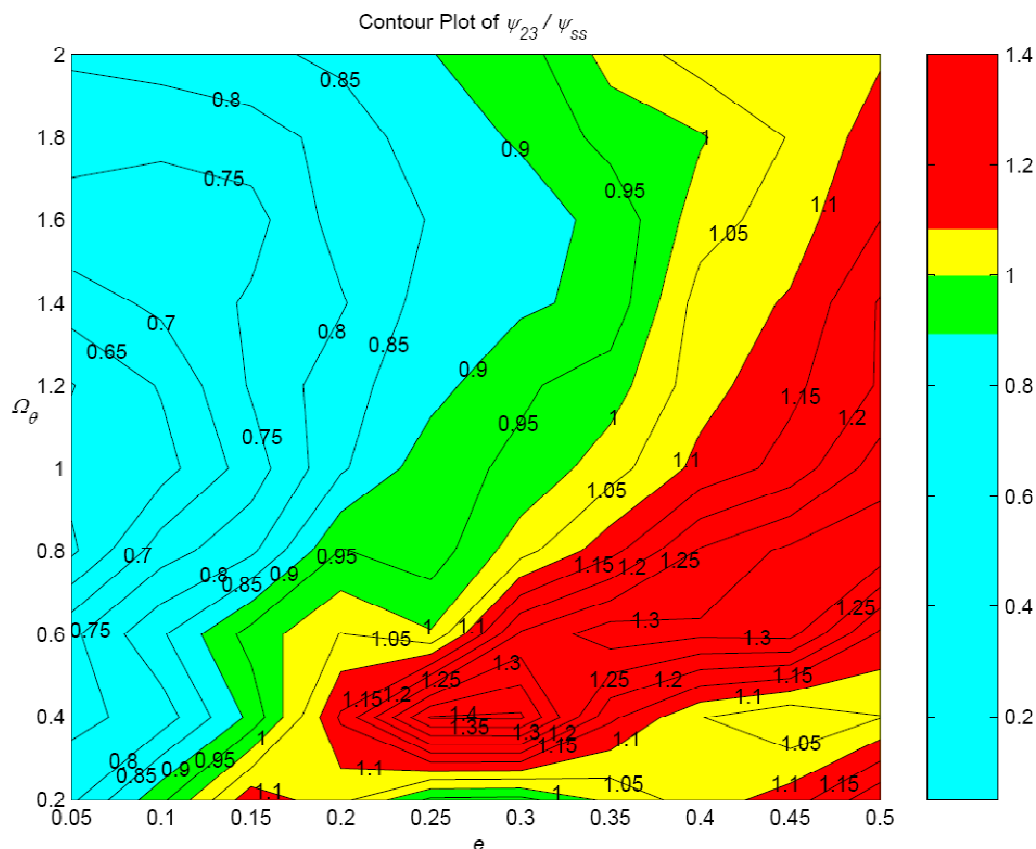


Fig. 7.39 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{SS}$ .

### 7.2.3.3 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre come il single storey che meglio rappresenta il comportamento del terzo piano della struttura multi storey sia, anche in questo caso, quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{23}/\psi_{SS}$  rimane inferiore all'unità per una porzione più estesa del dominio. Vi sono tuttavia anche qui delle zone in cui la differenza tra i due parametri è di molto superiore al 10%; tuttavia, le considerazioni fatte per il secondo piano sono valide anche in questo caso, per cui si può ritenere accettabile la scelta di rappresentare il comportamento del terzo piano con un single storey avente le seguenti caratteristiche:

$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

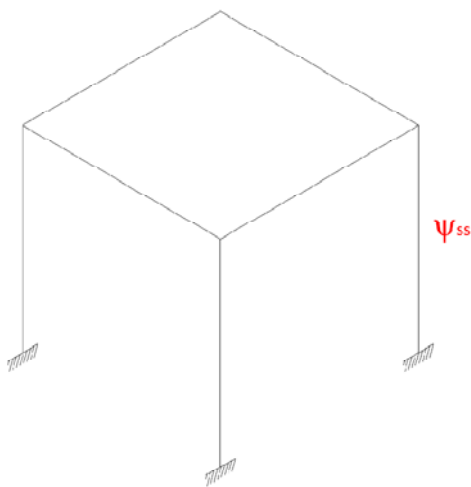
$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_3$$

$$\Omega_{\vartheta,ss} = \Omega_{\vartheta 3}$$

## 7.2.4 Quarto Piano

### 7.2.4.1 Caratteristiche di rigidezza medie



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$k_{ss} = \frac{k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6}{6}$$

$$e_{ss} = e_4$$

$$\Omega_{\vartheta,ss} = \Omega_{\vartheta 4}$$

**Fig. 7.40** *Struttura single storey equivalente.*

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{34}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

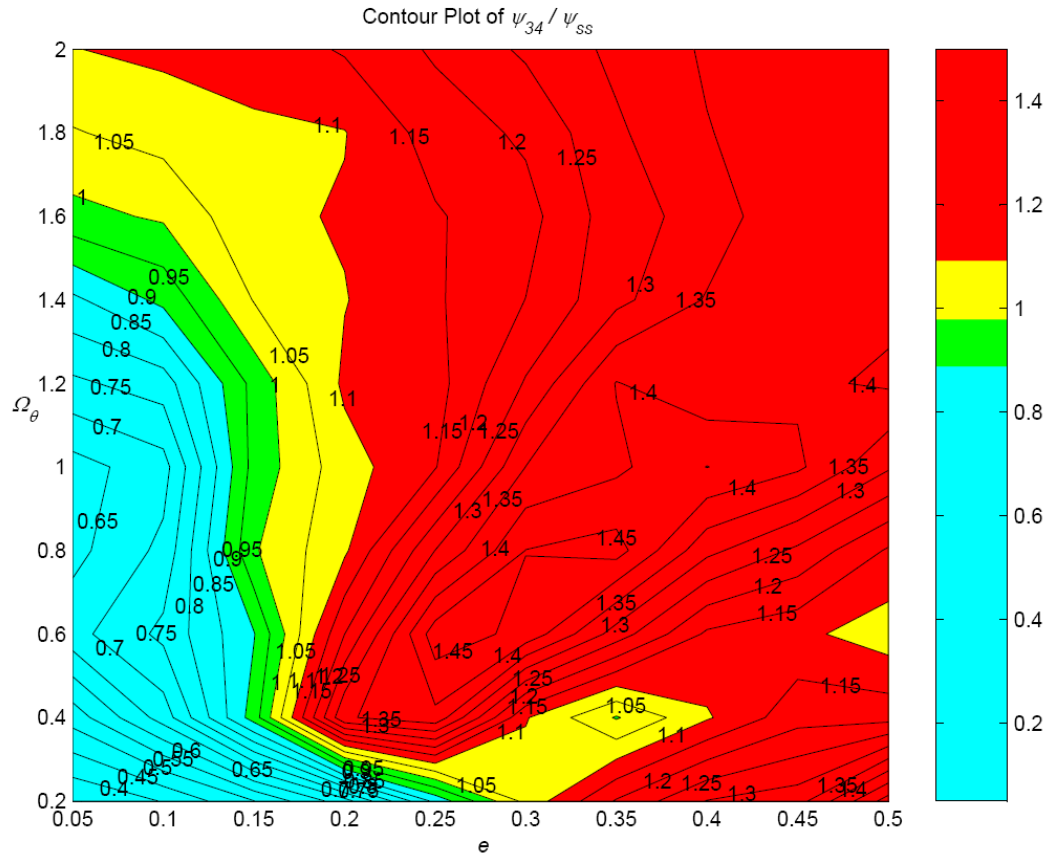
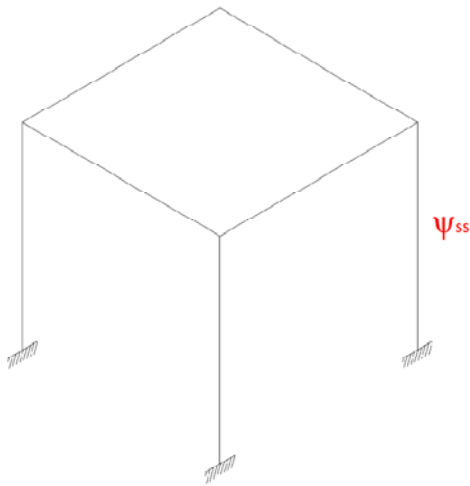


Fig. 7.41 Rapporto  $\psi_{34} / \psi_{ss}$ .

### 7.1.4.2 Caratteristiche totali



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_4$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 4}$$

Fig. 7.41 Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{34}/\psi_{SS}$  per questa struttura sono i seguenti:

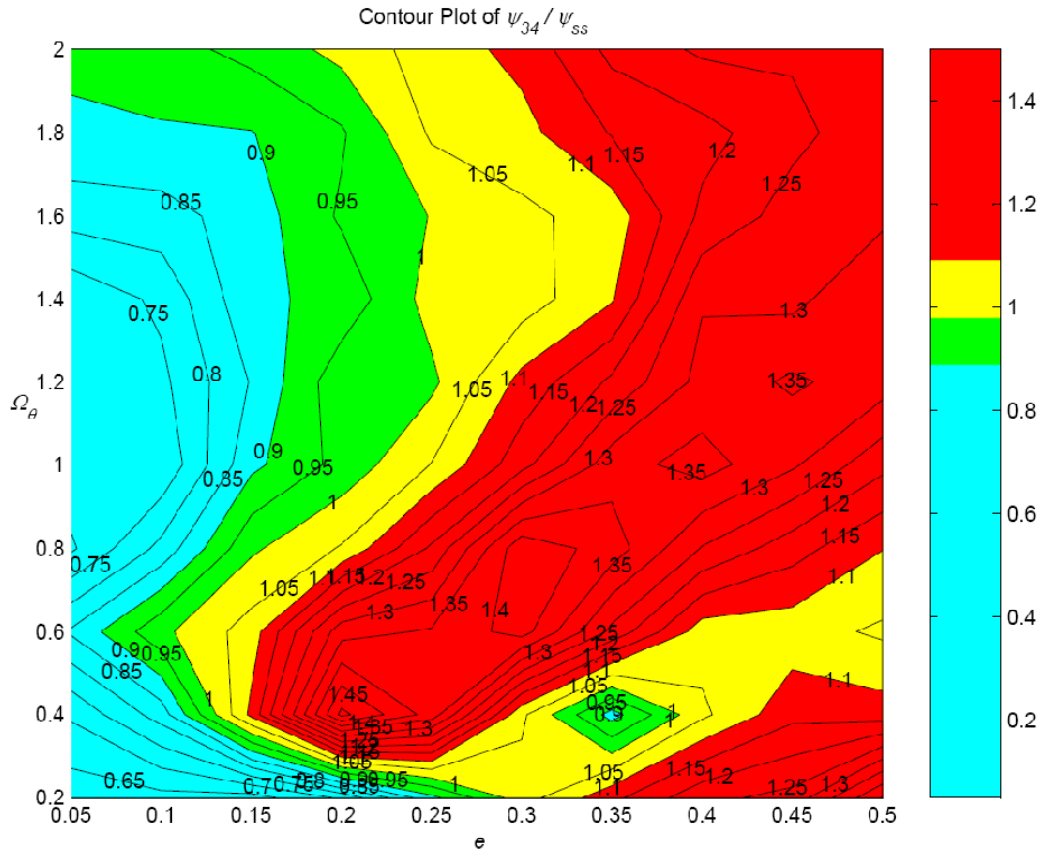


Fig. 7.42 Rapporto  $\psi_{34}/\psi_{SS}$ .

### 7.2.4.3 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre come il single storey che meglio rappresenta il comportamento del quarto piano della struttura multi storey sia, anche in questo caso, quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{34}/\psi_{SS}$  rimane inferiore all'unità per una porzione più estesa del dominio. Vi sono tuttavia anche qui delle zone in cui la differenza tra i due parametri è di molto superiore al 10%; tuttavia, le considerazioni fatte per il secondo e il terzo piano sono valide anche in questo caso, per cui si può ritenere accettabile la scelta di rappresentare il comportamento del quarto piano con un single storey avente le seguenti caratteristiche:

$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

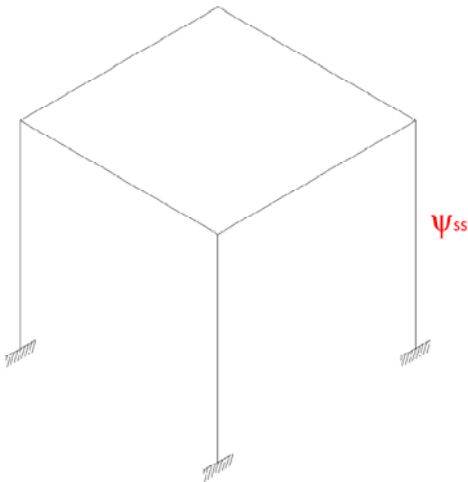
$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_4$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 4}$$

## 7.2.5 Quinto Piano

### 7.2.5.1 Caratteristiche di rigidità medie



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$k_{ss} = \frac{k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6}{6}$$

$$e_{ss} = e_5$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 5}$$

**Fig. 7.43** *Struttura single storey equivalente.*

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{45}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

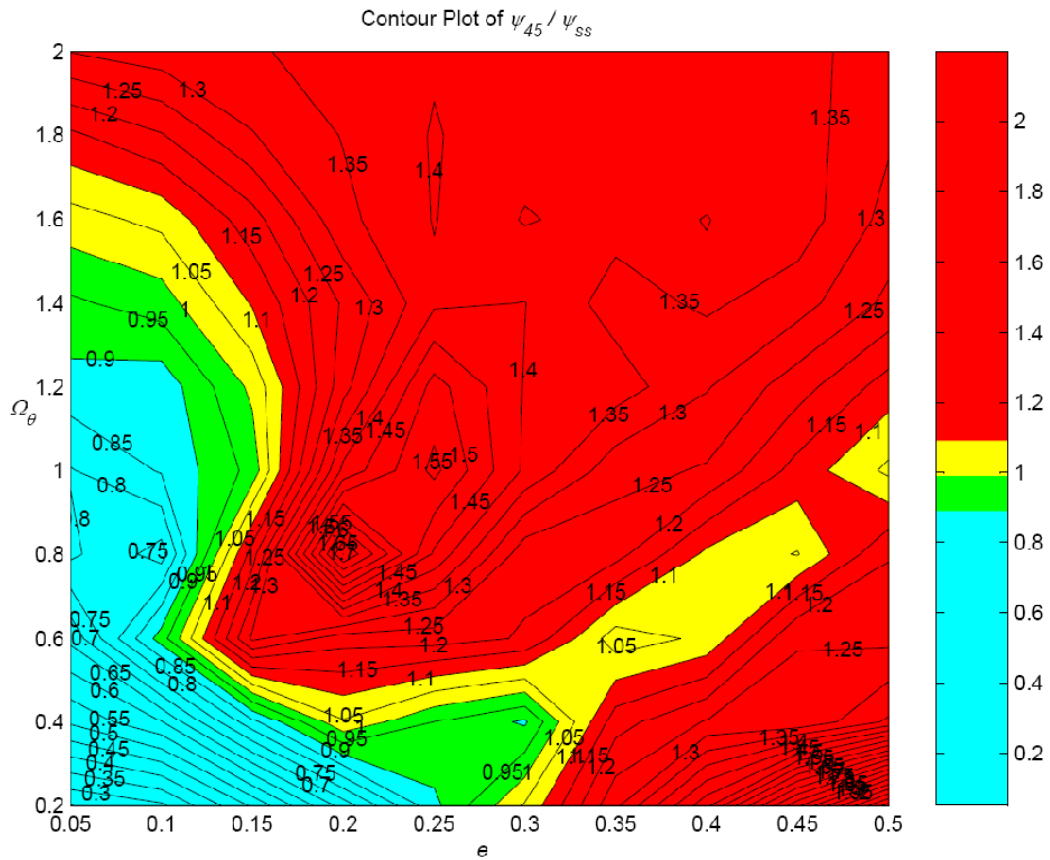
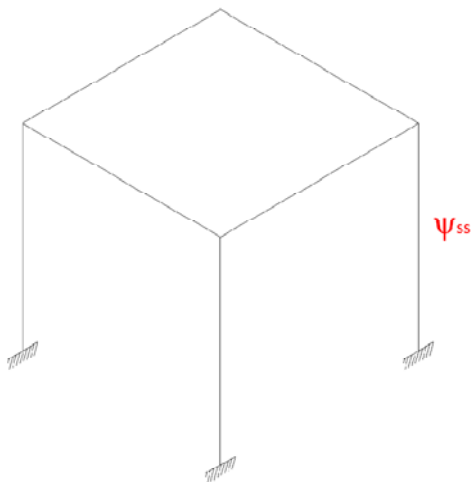


Fig. 7.44 Rapporto  $\psi_{45} / \psi_{ss}$ .

### 7.2.5.2 Caratteristiche totali



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

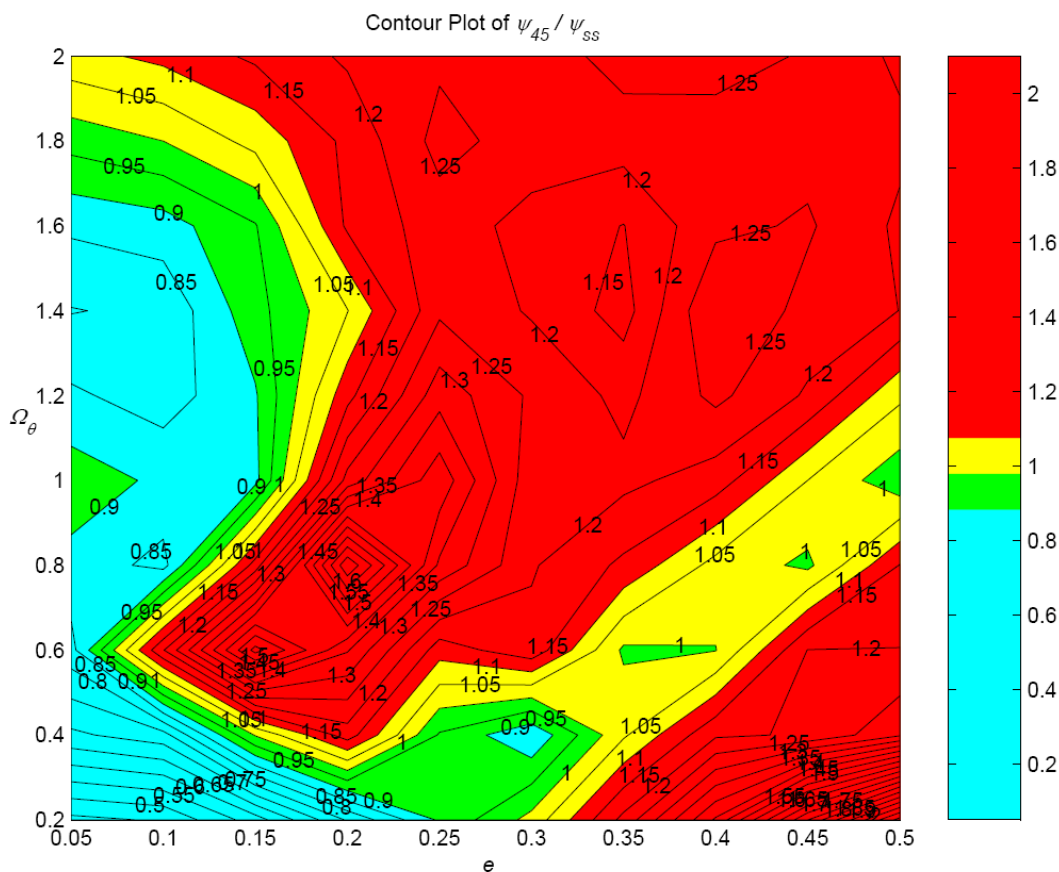
$$e_{ss} = e_5$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 5}$$

Fig. 7.45 Struttura single storey equivalente.



I risultati in termini del rapporto  $\psi_{45}/\psi_{SS}$  per questa struttura sono i seguenti:



**Fig. 7.46** Rapporto  $\psi_{45}/\psi_{SS}$ .

### 7.2.5.3 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre come il single storey che meglio rappresenta il comportamento del quinto piano della struttura multi storey sia, anche in questo caso, quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{45}/\psi_{SS}$  rimane inferiore all'unità per una porzione più estesa del dominio. Vi sono tuttavia anche qui delle zone in cui la differenza tra i due parametri è di molto superiore al 10%; tuttavia, le considerazioni fatte per i piani precedenti sono valide anche in questo caso, per cui si può ritenere accettabile la scelta di rappresentare il comportamento del quinto piano con un single storey avente le seguenti caratteristiche:

$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

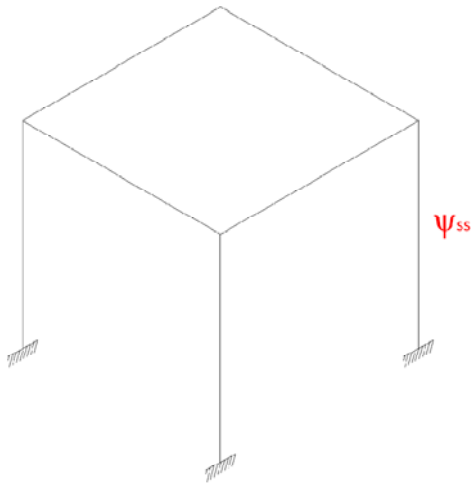
$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_5$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 5}$$

## 7.2.6 Sesto Piano

### 7.2.6.1 Caratteristiche di rigidezza medie



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$k_{ss} = \frac{k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6}{6}$$

$$e_{ss} = e_6$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 6}$$

Fig. 7.47 Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{56}/\psi_{ss}$  per questa struttura sono i seguenti:

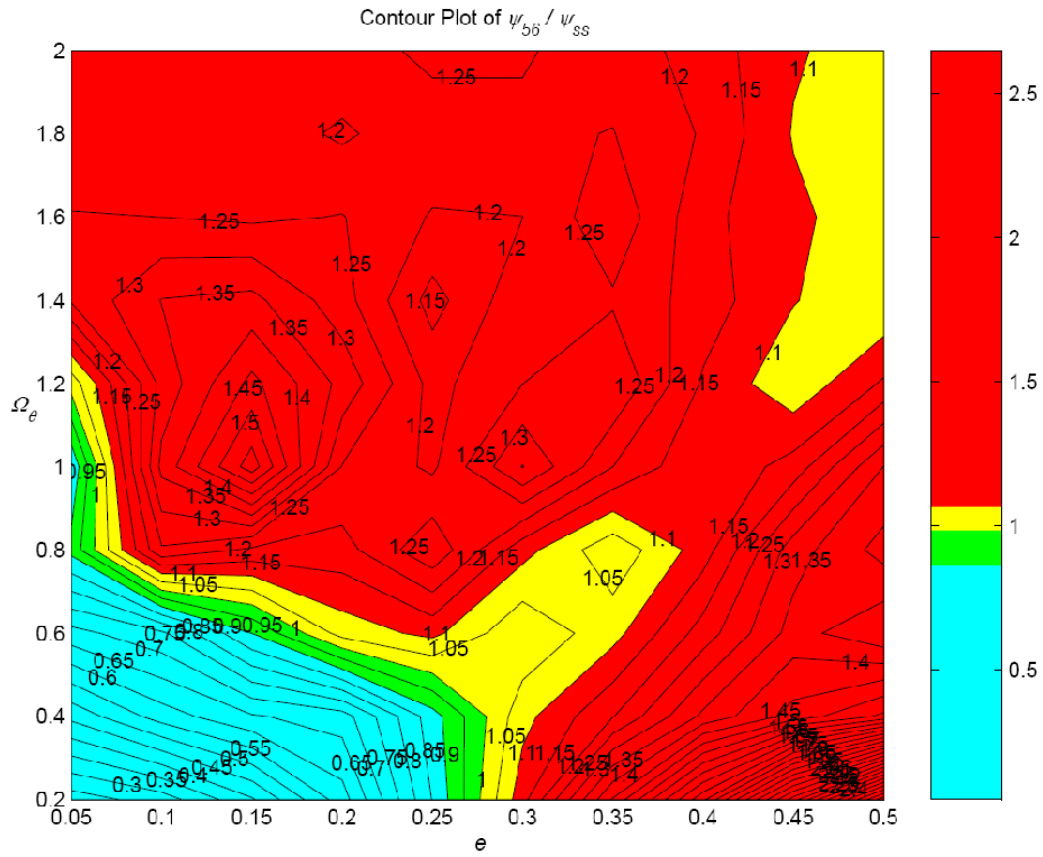
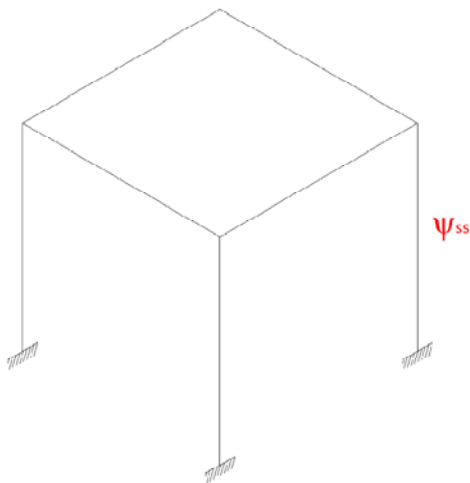


Fig. 7.48 Rapporto  $\psi_{56}/\psi_{ss}$ .

### 7.2.6.2 Caratteristiche totali



$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

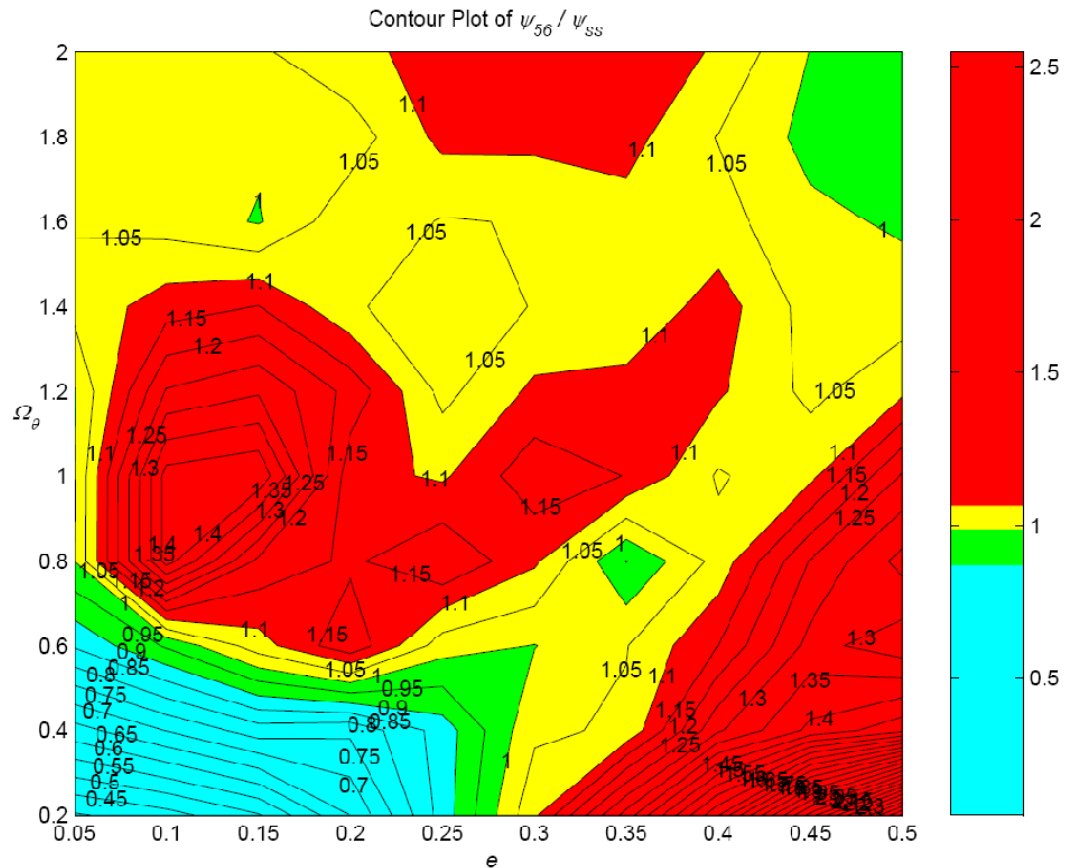
$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_6$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta 6}$$

Fig. 7.49 Struttura single storey equivalente.

I risultati in termini del rapporto  $\psi_{56}/\psi_{SS}$  per questa struttura sono i seguenti:



**Fig. 7.50** Rapporto  $\psi_{56}/\psi_{SS}$ .

### 7.1.6.3 Riassunto

Osservando i grafici ottenuti si può dedurre come il single storey che meglio rappresenta il comportamento del sesto piano della struttura multi storey sia, anche in questo caso, quello con caratteristiche analoghe a quelle dell'intera struttura, poiché il rapporto  $\psi_{56}/\psi_{SS}$  rimane inferiore all'unità per una porzione più estesa del dominio. Vi sono tuttavia anche qui delle zone in cui la differenza tra i due parametri è di molto superiore al 10%; tuttavia, le considerazioni fatte per i piani precedenti sono valide anche in questo caso, per cui si può ritenere accettabile la scelta di rappresentare il comportamento del sesto piano con un single storey avente le seguenti caratteristiche:

$$m_{ss} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$k_{ss} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_6$$

$$\Omega_{\vartheta,ss} = \Omega_{\vartheta 6}$$

### 6.2.7 Riassunto

Per chiarezza, si riassume graficamente quanto ottenuto:

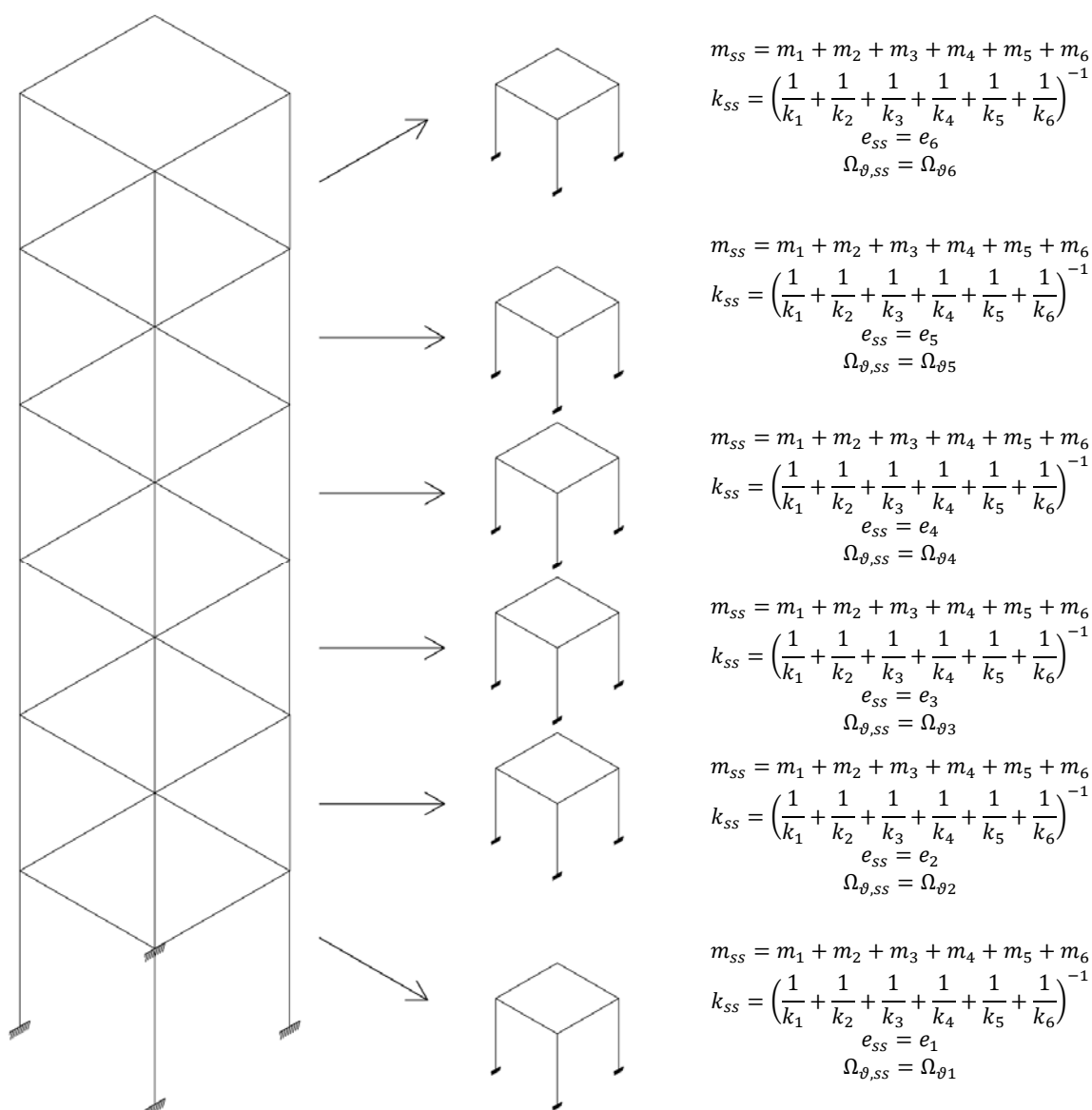


Fig. 7.51 Riassunto dei risultati ottenuti.

## 7.3 Riassunto dei risultati ottenuti

Si riassumono di seguito i risultati ottenuti

### 7.3.1 Piani identici o diminuzione di rigidità

Riassumendo, se i due piani della struttura multi storey sono identici, o se si verifica una diminuzione di rigidità dal primo al sesto piano, i comportamenti dei vari piani della struttura possono essere rappresentati, con buona approssimazione, dalla seguente struttura single storey:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_5 = e_6 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 1} = \Omega_{\vartheta 2} = \Omega_{\vartheta 3} = \Omega_{\vartheta 4} = \Omega_{\vartheta 5} = \Omega_{\vartheta 6}
 \end{aligned}$$

## Struttura a sei piani

## CAPITOLO 8

### Considerazioni conclusive

Il metodo ALPHA è uno strumento predittivo che permette di determinare la massima rotazione  $|u_\vartheta|_{max}$ , a partire dal massimo spostamento longitudinale del baricentro delle masse  $|u_{y,C_M}|_{max}$ , in ambito elastico-lineare per le strutture ad un singolo piano (strutture *single storey*). Difficilmente, però, è possibile individuare strutture costituite da un singolo piano, per cui si è resa necessaria un'indagine approfondita al fine di individuare un modo per individuare la massima rotazione anche per strutture con un numero di piani superiore ad uno.

I calcoli e le simulazioni svolte e presentate nella presente tesi hanno avuto come scopo principale l'individuazione dei parametri caratteristici di una struttura *single storey* che rappresenti al meglio l'andamento degli spostamenti di rotazione dei vari piani delle strutture multi piano (strutture *multi storey*) considerate. Per farlo si sono analizzate strutture a due, a tre e a sei piani.

### 8.1 Analisi Condotte

Al fine di rendere la trattazione più generale possibile, sono stati svolti studi su 35 strutture, caratterizzate da una diversa disposizione degli elementi laterali resistenti (pilastri, setti e vani), per individuare gli intervalli entro cui far variare i parametri che influenzano la soluzione dell'equazione del moto.

Dopodiché sono state condotte 216000 simulazioni numeriche al variare:

- dell'eccentricità relativa  $e$  [0.05 ÷ 0.5];
- del parametro  $\Omega_\vartheta$  esprimente il rapporto tra raggio d'inerzia delle rigidezze e raggio d'inerzia delle masse [0.2 ÷ 2]

per 20 diversi input sismici caratterizzati da una PGA compresa tra 0.15g e 0.40g. Le analisi si sono riferite a strutture con eccentricità longitudinale nulla ( $e_y = 0$ ), con rapporto di smorzamento  $\xi = 0.05$  e periodo di vibrazione longitudinale del primo piano  $T_{L,1} = 0.2$  s. Le caratteristiche dell' $i$ -esimo piano della struttura, in termini di massa ( $m$ ), rigidezza ( $k$ ), eccentricità ( $e$ ) e del parametro  $\Omega_\vartheta$ , sono state riferite a quelle del primo piano, attraverso i rapporti:



$$R_{e,i} = \frac{e_i}{e_1} \quad R_{\Omega_{\vartheta,i}} = \frac{\Omega_{\vartheta i}}{\Omega_{\vartheta 1}} \quad R_{m,i} = \frac{m_i}{m_1} \quad R_{k,i} = \frac{k_{Li}}{k_{L1}} \quad (8.1)$$

Si è quindi ottenuto, per ogni struttura e per il  $j$ -esimo piano, il valore della massima rotazione  $|u_{\vartheta,j}|_{max}$ , del massimo spostamento longitudinale  $|u_{y,C_{M,j}}|_{max}$ , del parametro  $\alpha_{u,j}$ :

$$\alpha_{u,j} = \frac{4e_j\sqrt{3}}{\sqrt{(\Omega_{\vartheta,j}^2 + 12e_j^2 - 1)^2 + 48e_j^2}} \quad (8.2)$$

e del rapporto  $R_{ij}$ :

$$R_{ij} = \rho_{mj} \frac{|u_{\vartheta j} - u_{\vartheta i}|_{max}}{|u_{y,C_{M,j}} - u_{y,C_{M,i}}|_{max}} \quad (8.3)$$

relativo allo spostamento relativo tra i piani  $i$  e  $j$  di una struttura soggetta ad input sismici, al variare dei parametri appena elencati per ogni piano della struttura multi storey.

Dopodiché si è calcolato, per ogni piano, il parametro adimensionale:

$$\psi_{ij} = \frac{R_{ij}}{\alpha_{u,j}} \quad (8.4)$$

Questo parametro è stato confrontato con il corrispondente valore relativo alla struttura single storey scelta come riferimento ( $\psi_{ss}$ ); la bontà o meno di tale riferimento è indicata dal valore assunto dal rapporto:

$$R_{\psi} = \frac{\psi_{ij}}{\psi_{ss}} \quad (8.5)$$

## 8.2 Risultati ottenuti

Il valore dei coefficienti indicati nelle (8.2) e (8.3) è stato valutato per ogni caso strutturale e per ogni input sismico. Dopodiché è stato possibile valutare il valore

medio di tali coefficienti, con cui si è calcolato, per ogni coppia di valori di  $e$  ed  $\Omega_\vartheta$ , il valore assunto da  $\psi_{ij}$  e  $\psi_{ss}$ , e di conseguenza il valore di  $R_\psi$ .

Per ogni valore assunto dai rapporti (8.1) si è ricavato un grafico del rapporto  $R_\psi$ , cercando di ottenere:

$$R_\psi \leq 1,1 \quad (8.6)$$

Per maggiore chiarezza, tutti i grafici sono caratterizzati da quattro colori, che indicano l'andamento del rapporto  $R_\psi$ :

- Colore Ciano:  $\frac{\psi_{ij}}{\psi_{ss}} \leq 0,9$ ;
- Colore Verde:  $0,9 < \frac{\psi_{ij}}{\psi_{ss}} \leq 1$ ;
- Colore Giallo:  $1 < \frac{\psi_{ij}}{\psi_{ss}} \leq 1,1$ ;
- Colore Rosso:  $\frac{\psi_{ij}}{\psi_{ss}} \geq 1,1$

### 8.2.1 Struttura con piani identici

Il primo caso studiato per tutte le strutture multipiano considerate è stato quello di struttura caratterizzata da piani aventi le stesse caratteristiche, quindi con i rapporti (8.1) aventi valore unitario.

Il primo risultato significativo della presente trattazione è stato constatare come, in questo caso, per tutte le strutture considerate, il single storey equivalente che meglio approssima il comportamento dell' $i$ -esimo piano della struttura multi storey sia sempre lo stesso. Tale struttura monopiano presenta le seguenti caratteristiche:

$$m_{ss} = \sum_{i=1}^n m_i$$

$$k_{ss} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_i$$

$$\Omega_{\vartheta,ss} = \Omega_{\vartheta i}$$

dove  $n$  corrisponde al numero di piani della struttura considerata. Riassumendo, quindi, la struttura single storey che meglio approssima il comportamento dell' $i$ -esimo piano di una struttura ad  $n$  piani è caratterizzato da una massa pari alla massa totale della struttura multi storey, da una rigidezza pari alla somma in serie delle rigidezze degli  $n$  piani della struttura multipiano, mentre i parametri  $e$  ed  $\Omega_{\vartheta}$  corrispondono a quelli dell' $i$ -esimo piano della struttura considerata.

### 8.2.1.1 Struttura a due piani

In accordo con quanto appena affermato, la struttura single storey che meglio rappresenta il comportamento dei due piani è la stessa, ed ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 = e_2 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 1} = \Omega_{\vartheta 2}
 \end{aligned}$$

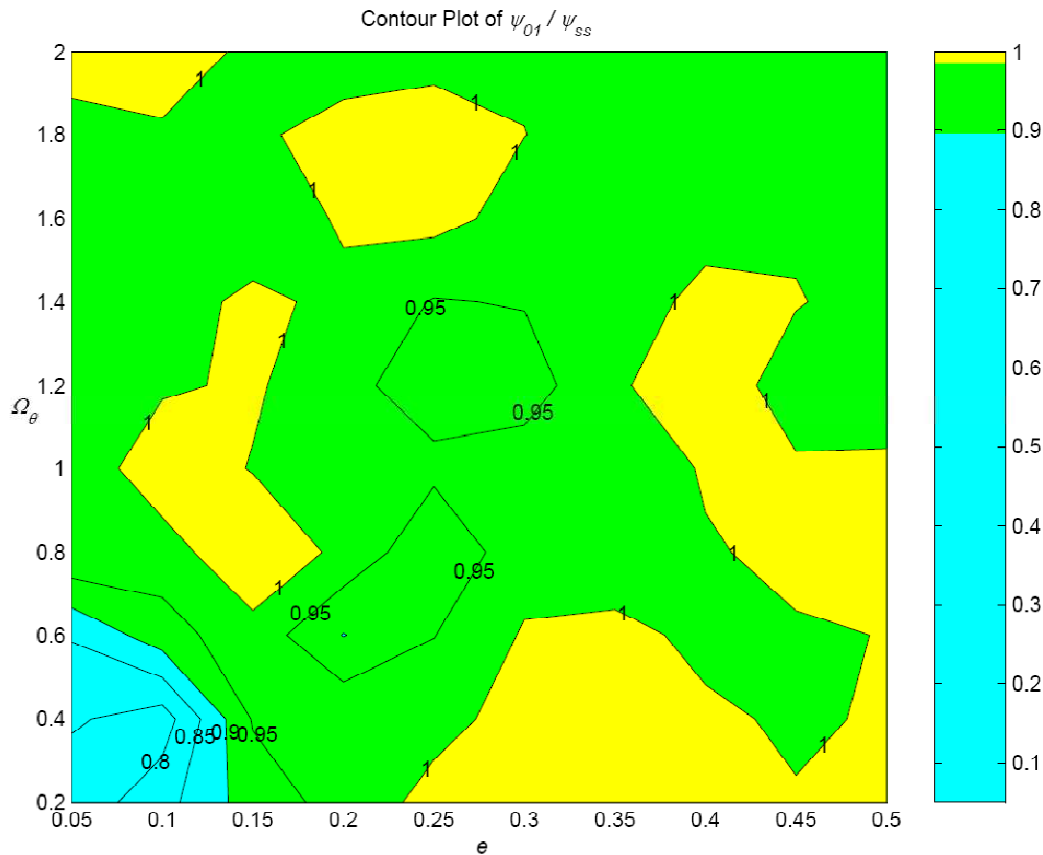


Fig. 8.1 Rapporto  $\psi_{01} / \psi_{ss}$

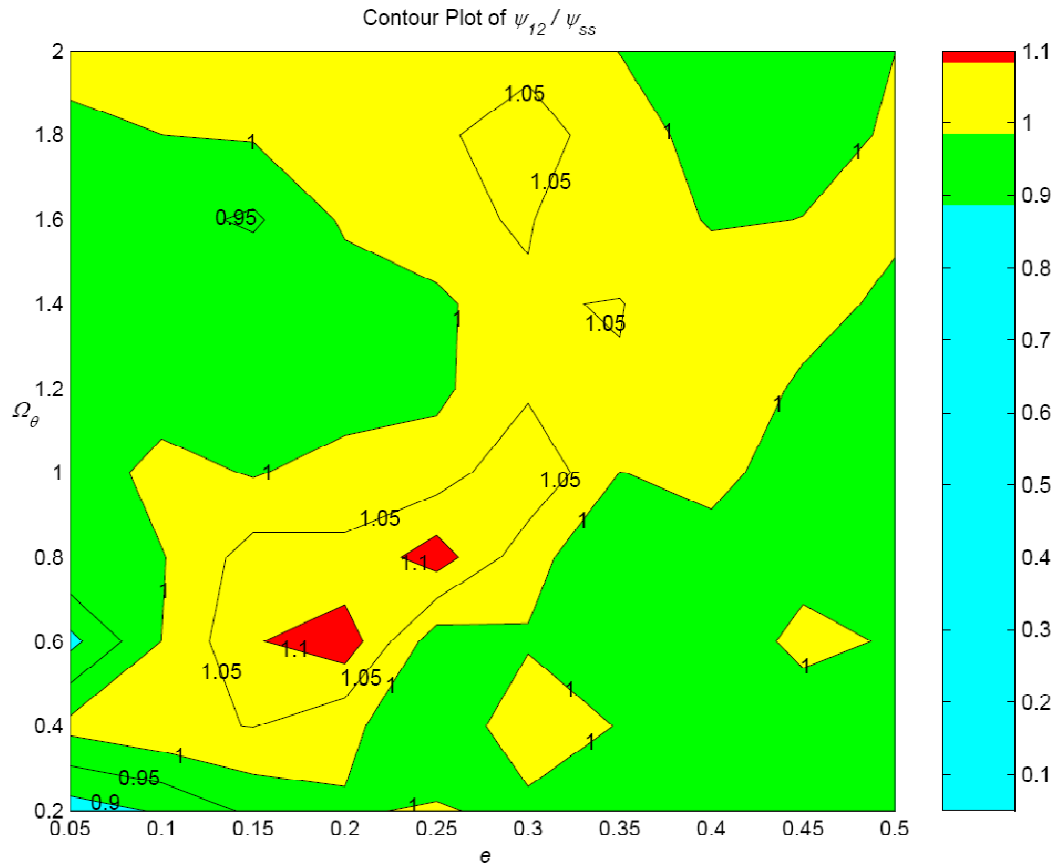
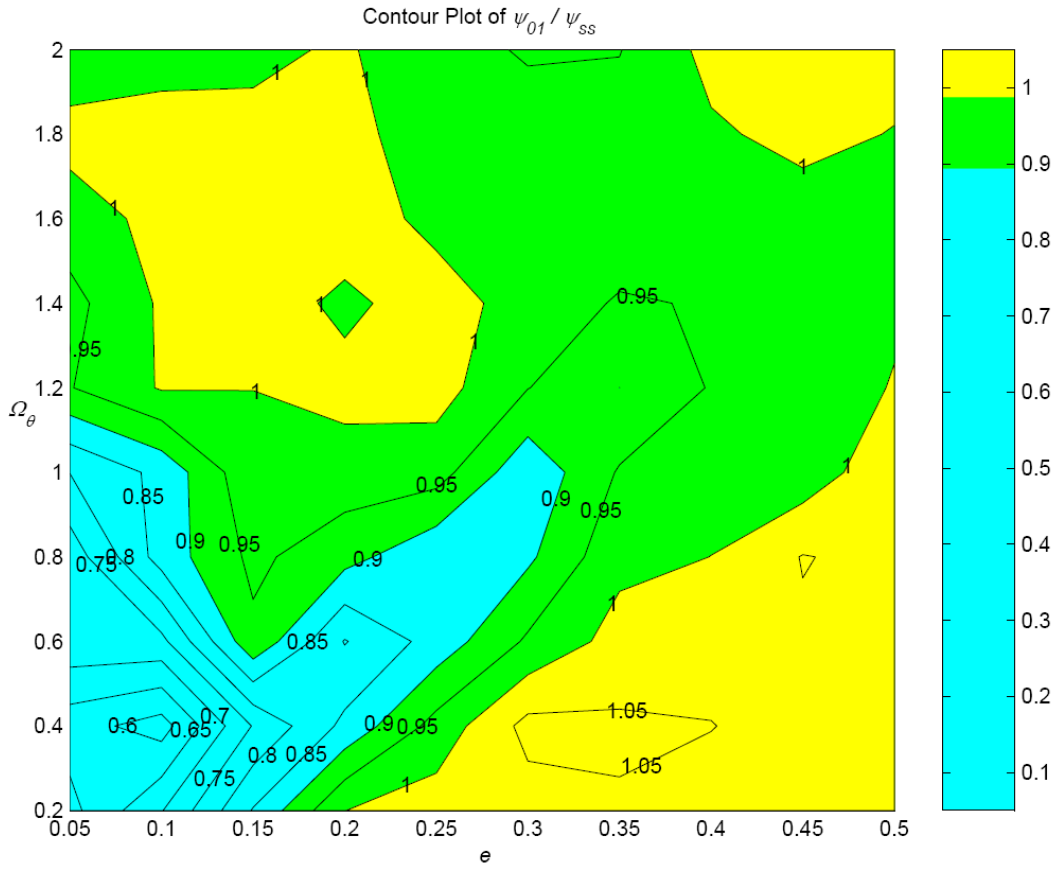


Fig. 8.2 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$

### 8.2.1.2 Struttura a tre piani

In questo caso la struttura single storey che meglio rappresenta il comportamento dei tre piani ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 = e_2 = e_3 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1} = \Omega_{\theta 2} = \Omega_{\theta 3}
 \end{aligned}$$



**Fig. 8.3** Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$

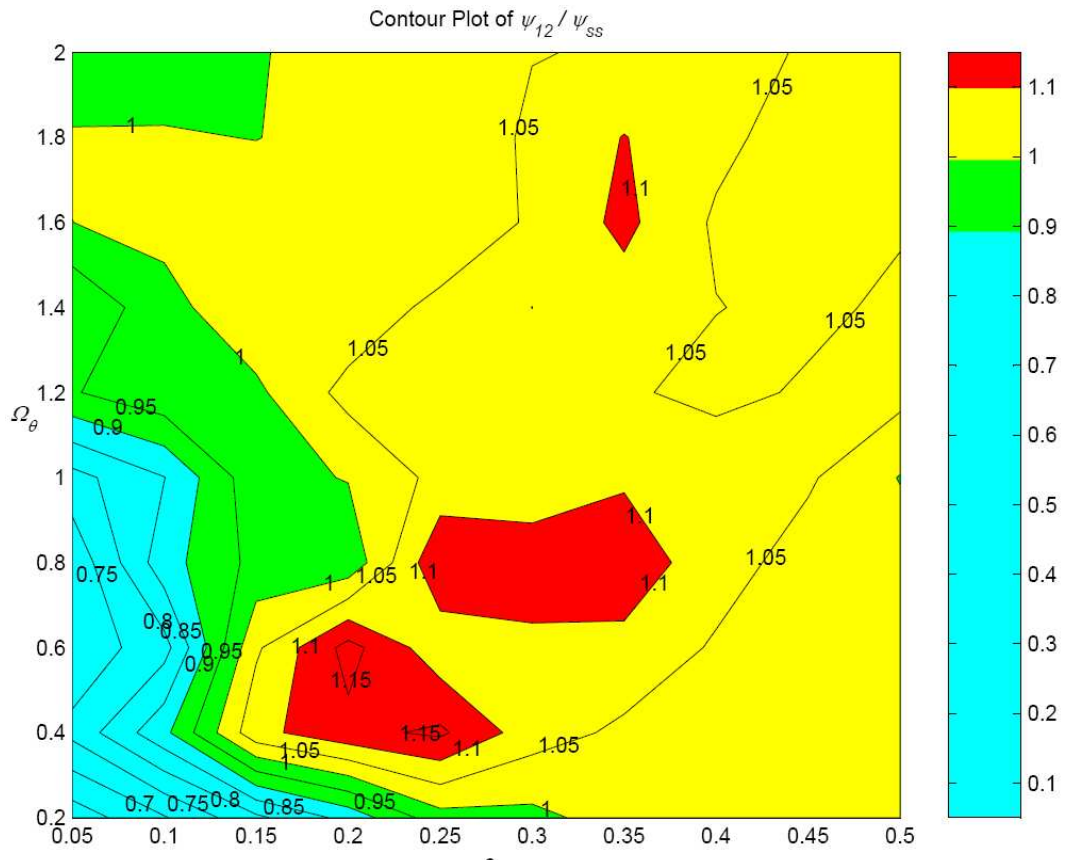
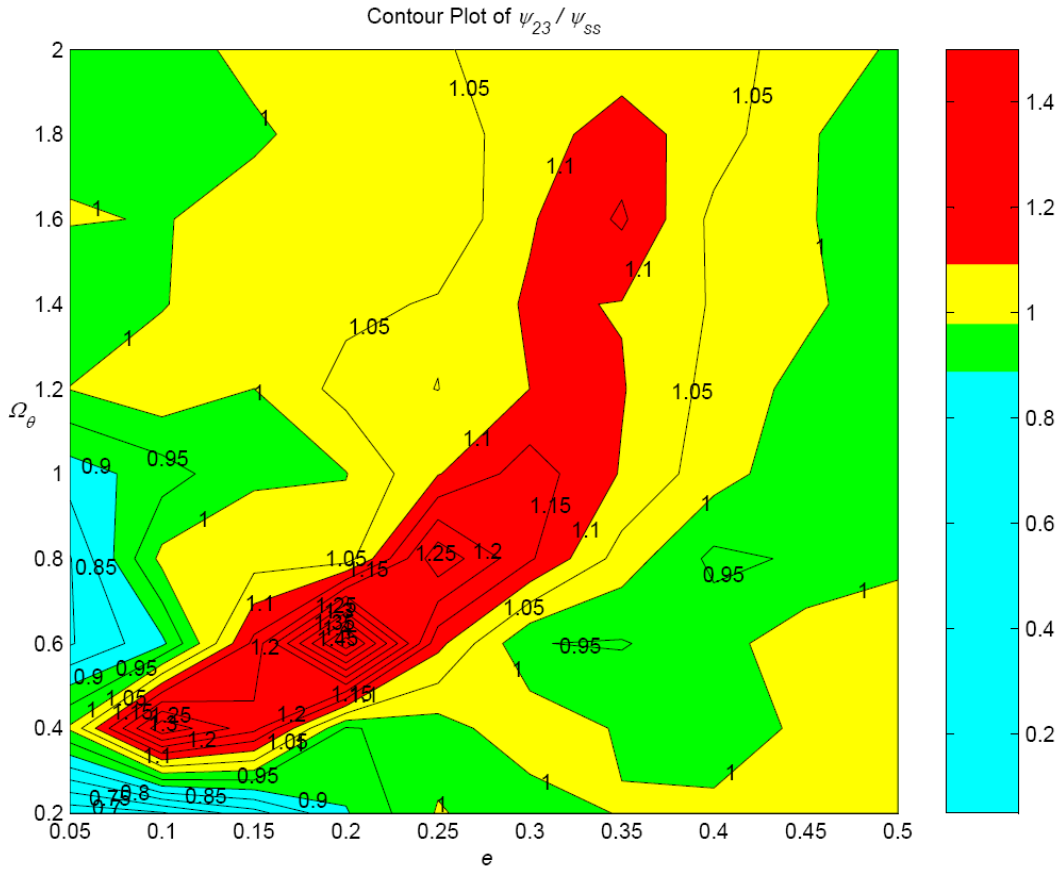


Fig. 8.4 Rapporto  $\psi_{12} / \psi_{ss}$



**Fig. 8.5** Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$

### 8.2.1.3 Struttura a sei piani

In questo caso il single storey equivalente per i sei piani ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_5 = e_6 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1} = \Omega_{\theta 2} = \Omega_{\theta 3} = \Omega_{\theta 4} = \Omega_{\theta 5} = \Omega_{\theta 6}
 \end{aligned}$$

Considerazioni conclusive

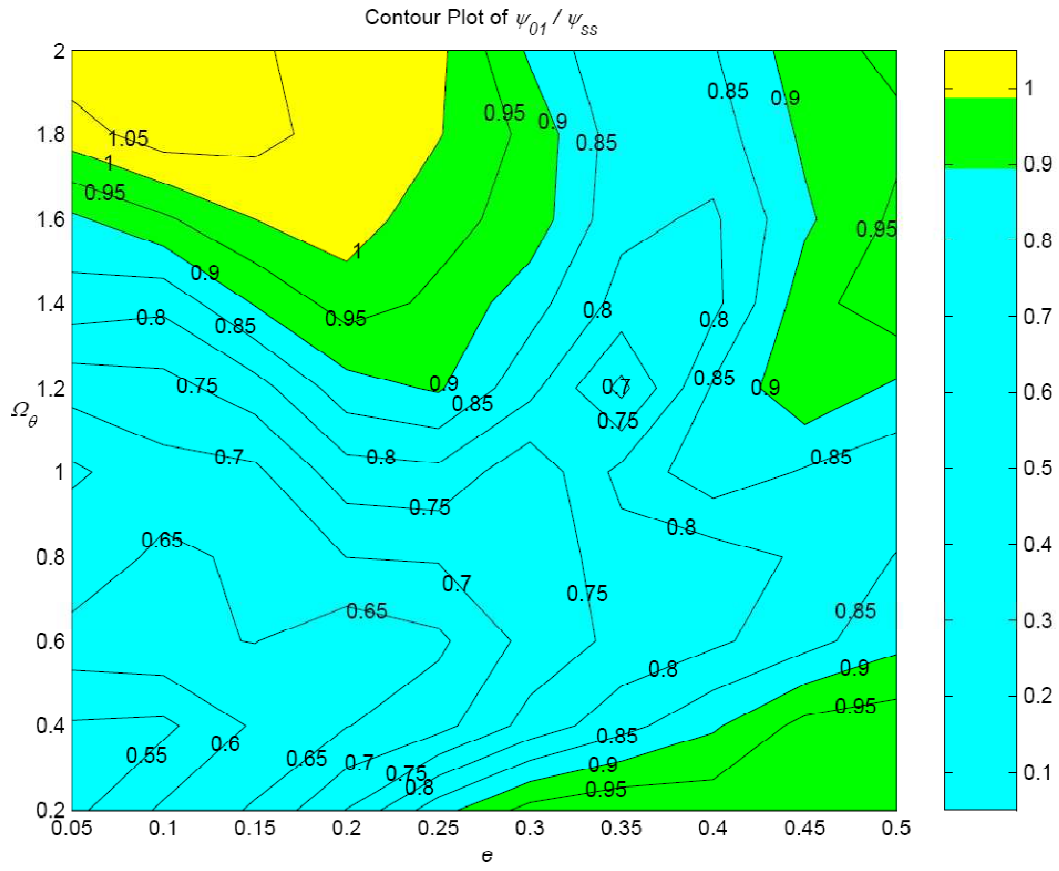
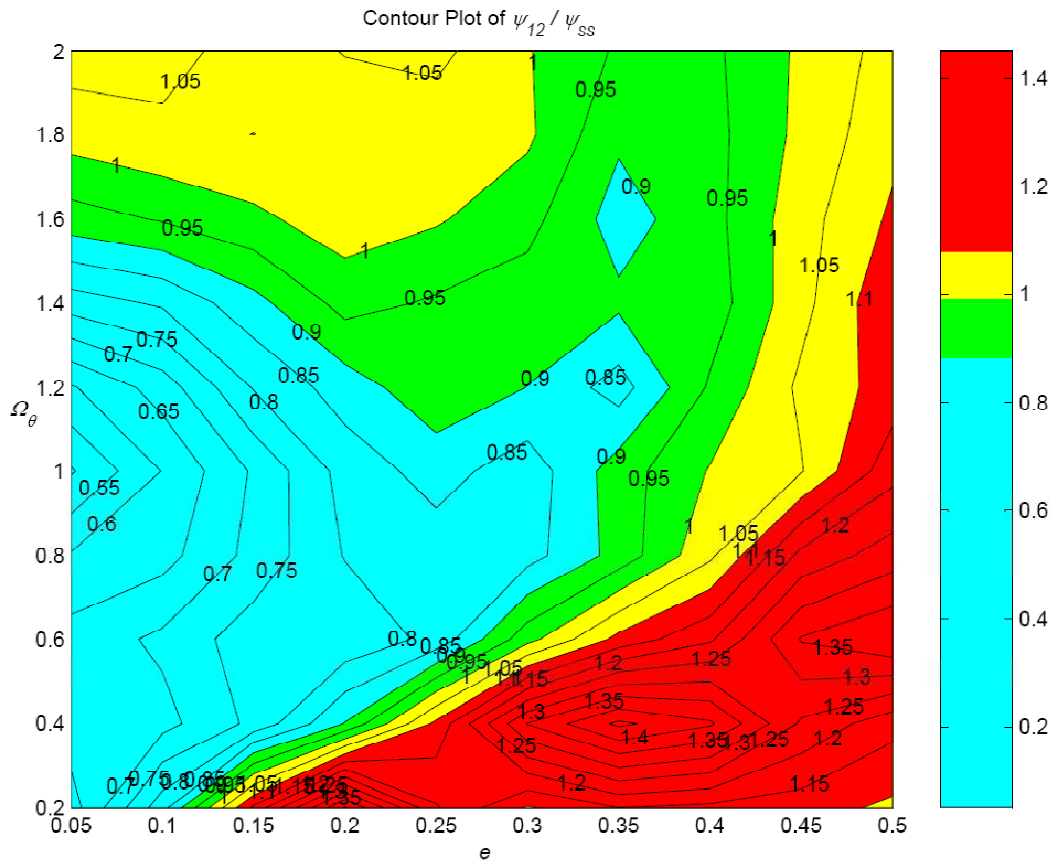


Fig. 8.6 Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$





**Fig. 8.7** Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$

Considerazioni conclusive

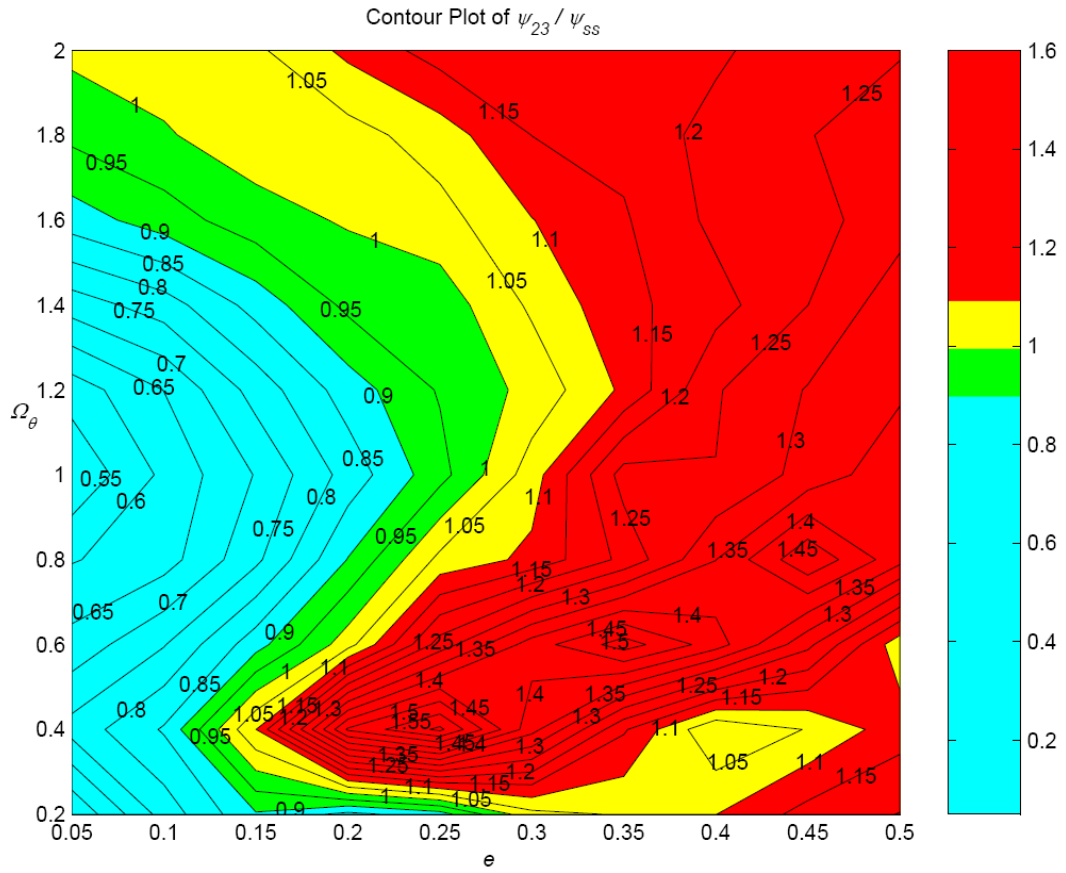
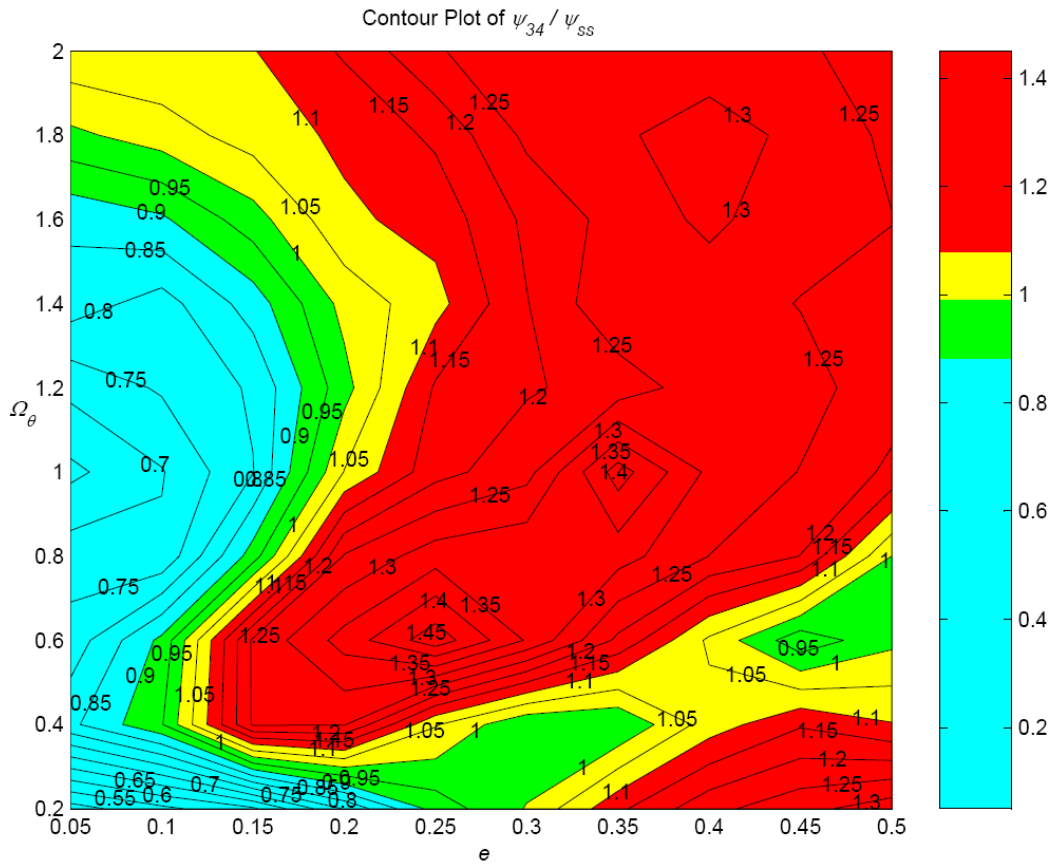
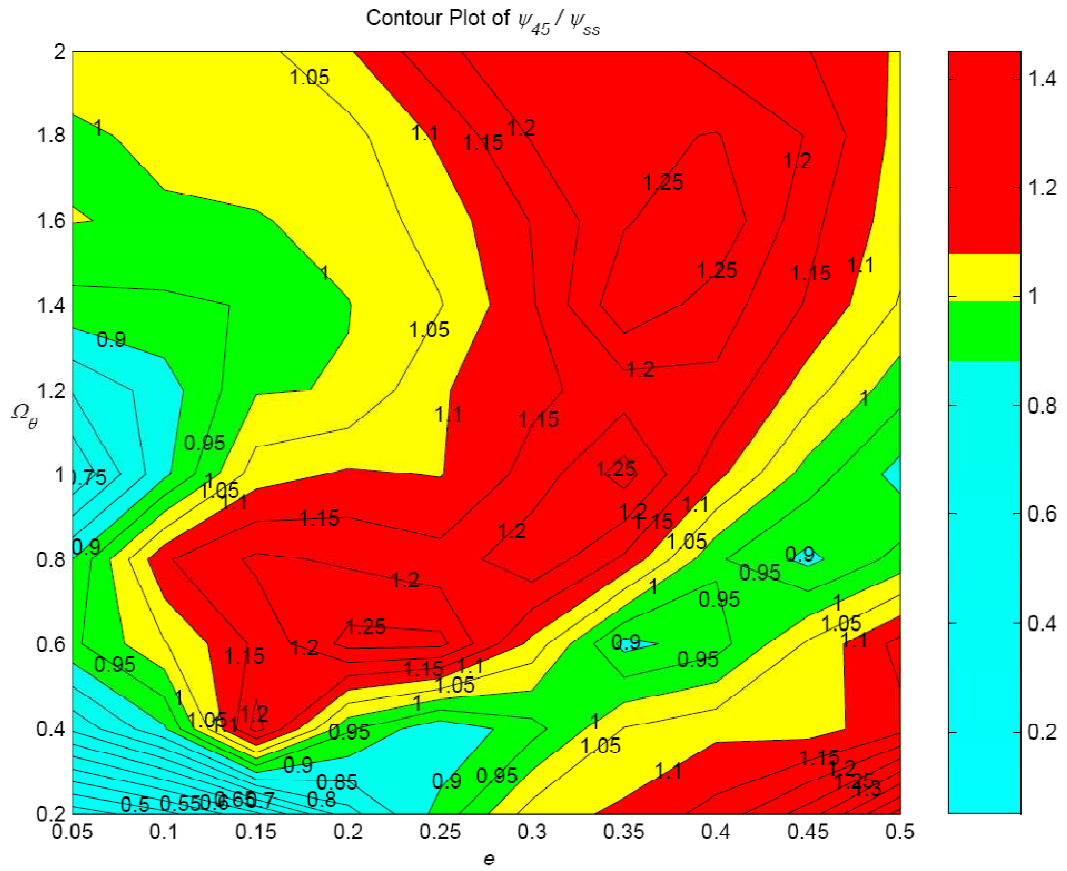


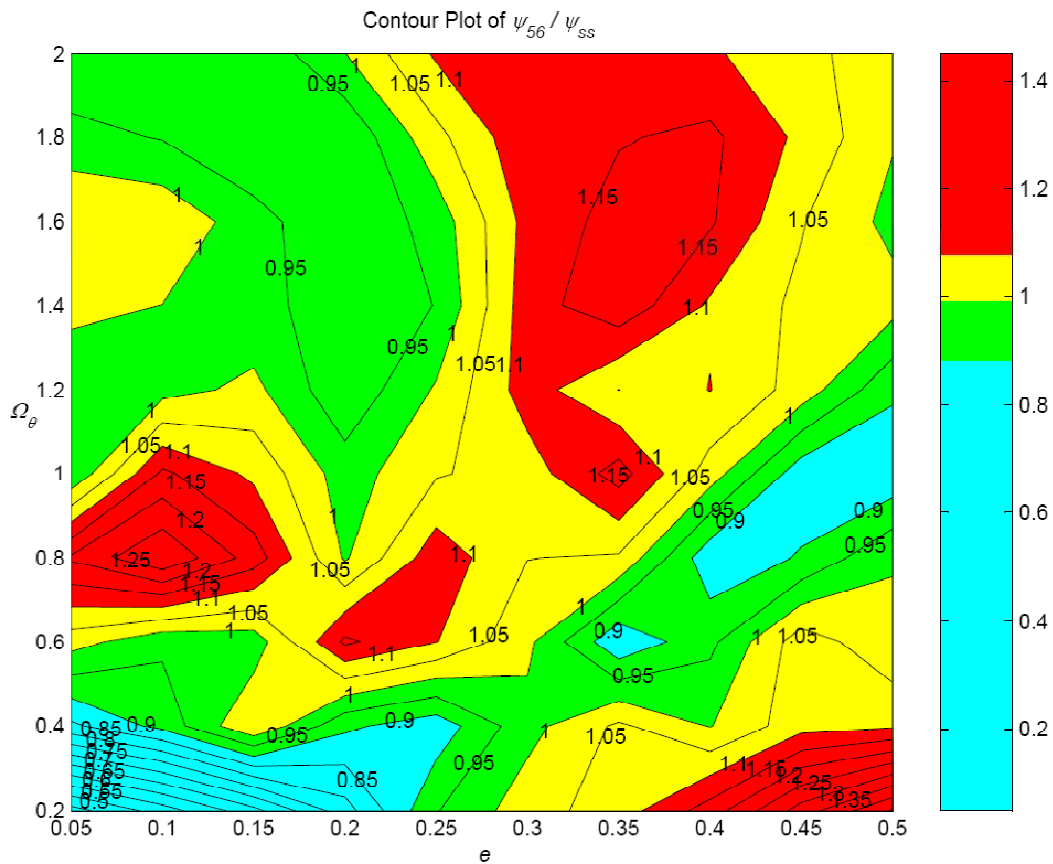
Fig. 8.8 Rapporto  $\psi_{23} / \psi_{ss}$



**Fig. 8.9** Rapporto  $\psi_{34}/\psi_{ss}$



**Fig. 8.10** Rapporto  $\psi_{45}/\psi_{ss}$



**Fig. 8.11** Rapporto  $\psi_{56}/\psi_{ss}$

### 8.2.2 Struttura con variazione di rigidità

Un altro risultato importante della ricerca svolta è stato verificare che il single storey che meglio approssima il comportamento dell'*i*-esimo piano della struttura nel caso di variazione di rigidità ai piani superiori (sia nel caso di incremento che di decremento) è analogo a quello utilizzato nel caso precedente:

$$m_{ss} = \sum_{i=1}^n m_i$$

$$k_{ss} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \right)^{-1}$$

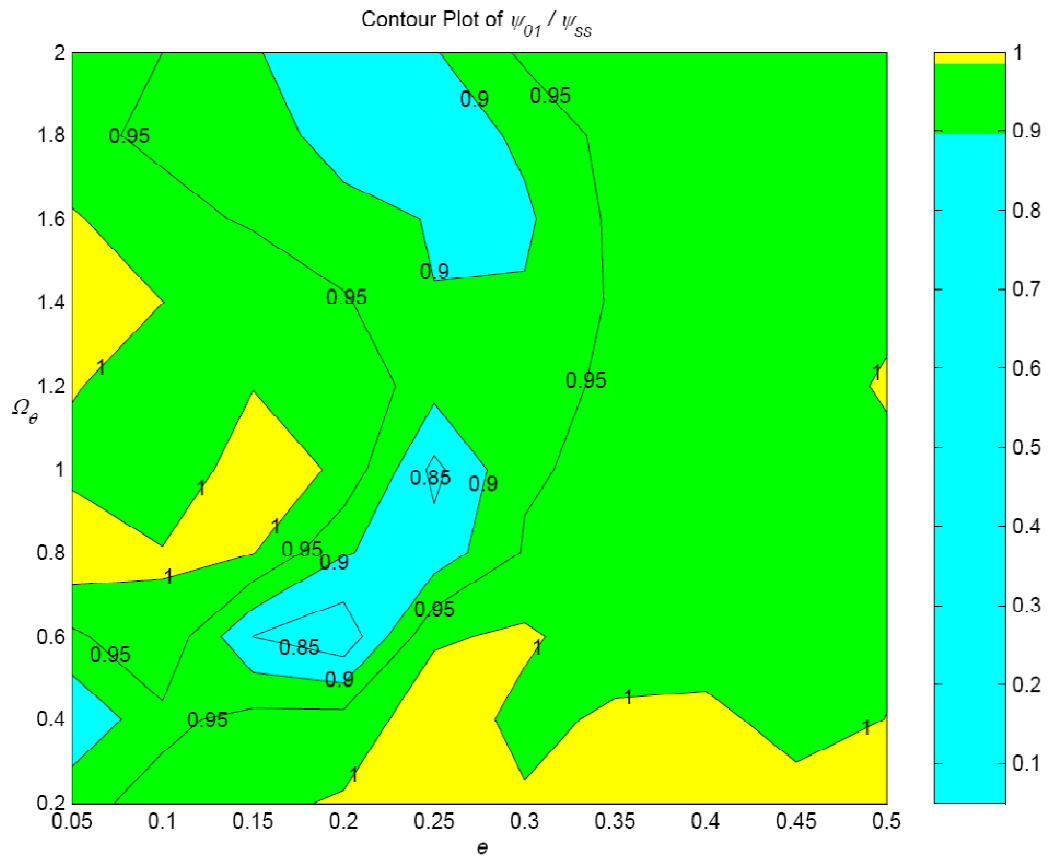
$$e_{ss} = e_i$$

$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta i}$$

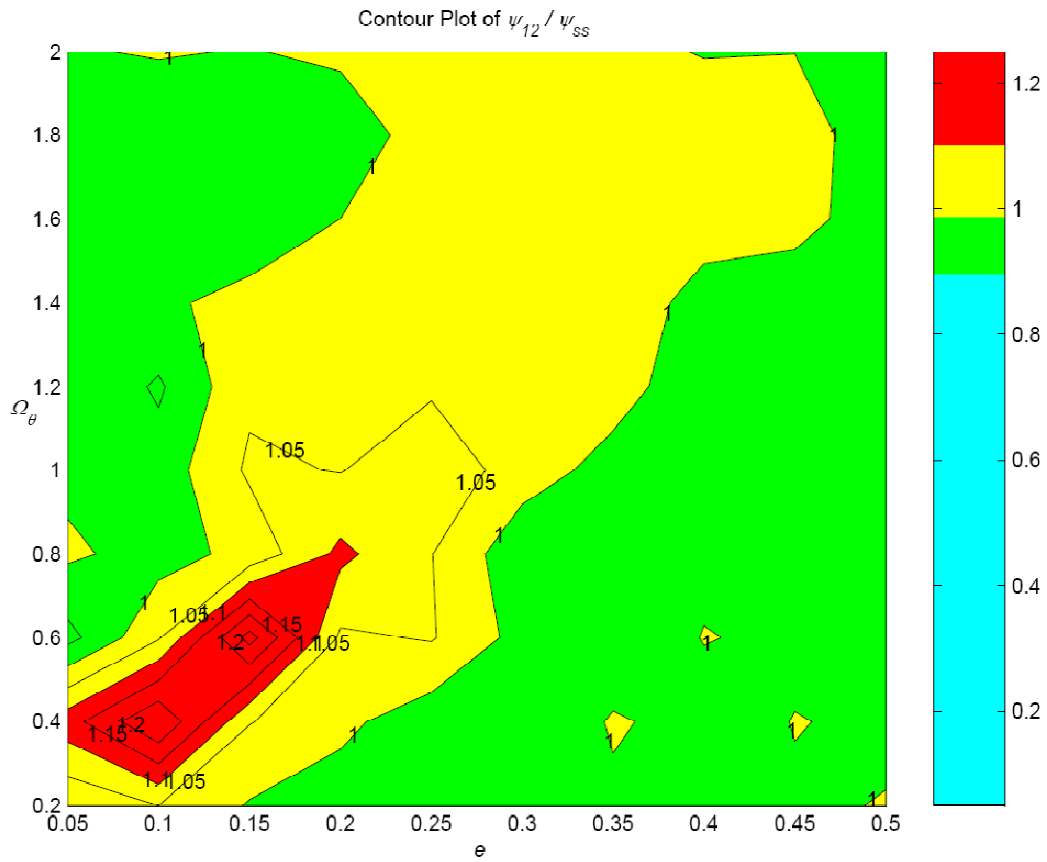
### 8.2.2.1 Struttura a due piani

Utilizzando il single storey appena descritto si ottengono i seguenti risultati.

#### 8.2.2.1.1 Struttura con diminuzione di rigidità al secondo piano

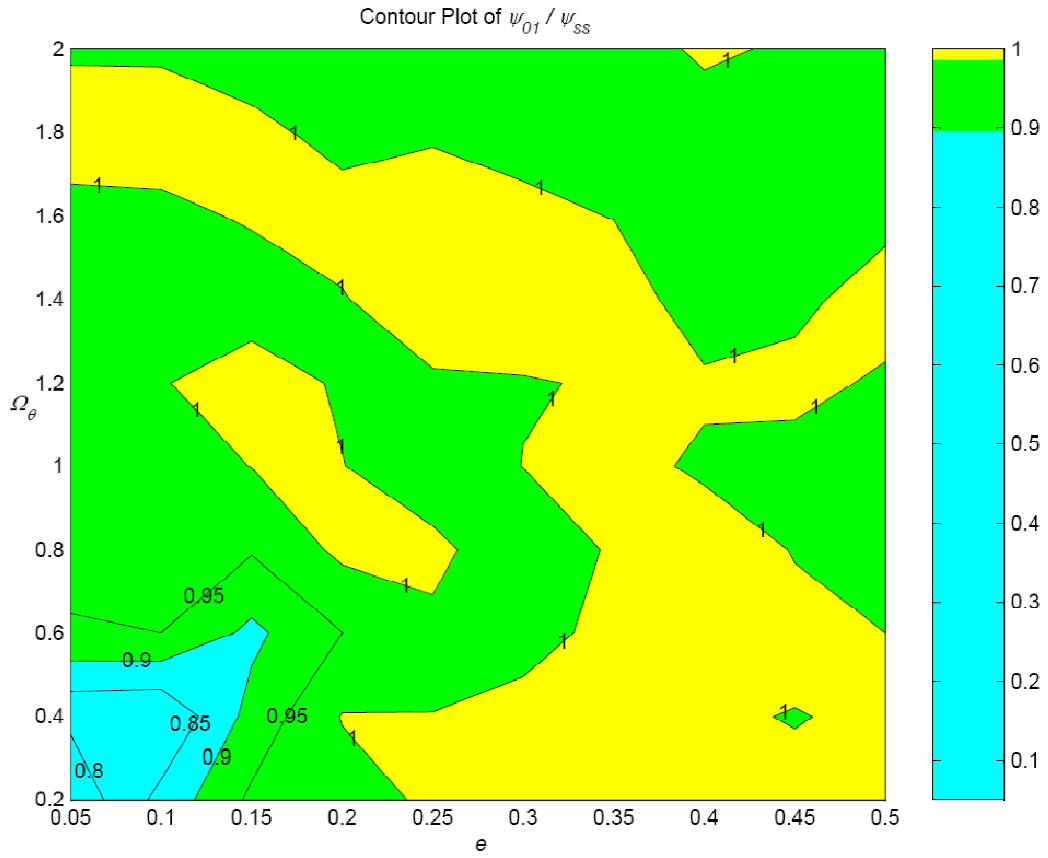


**Fig. 8.12** Rapporto  $\psi_{01} / \psi_{SS}$ .



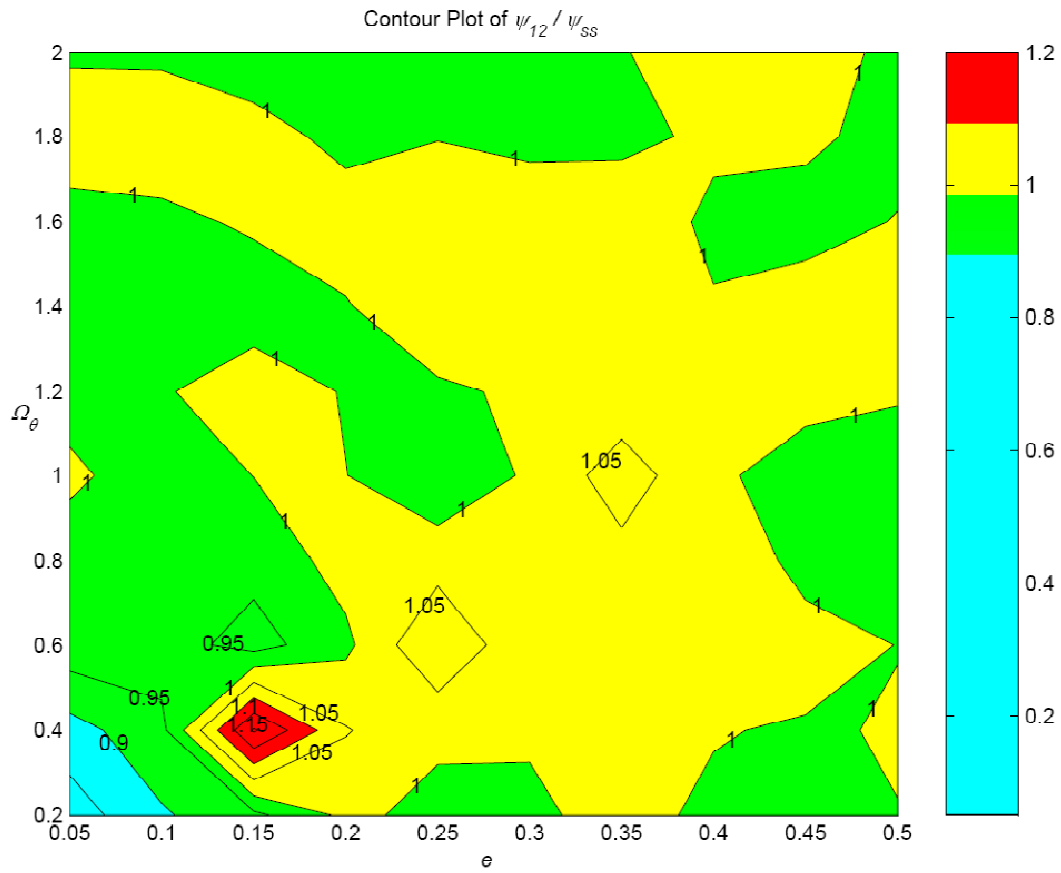
**Fig. 8.13** Rapporto  $\psi_{12} / \psi_{ss}$ .

8.2.2.1.2 Struttura con aumento di rigidità al secondo piano



**Fig. 8.14** Rapporto  $\psi_{01} / \psi_{SS}$ .

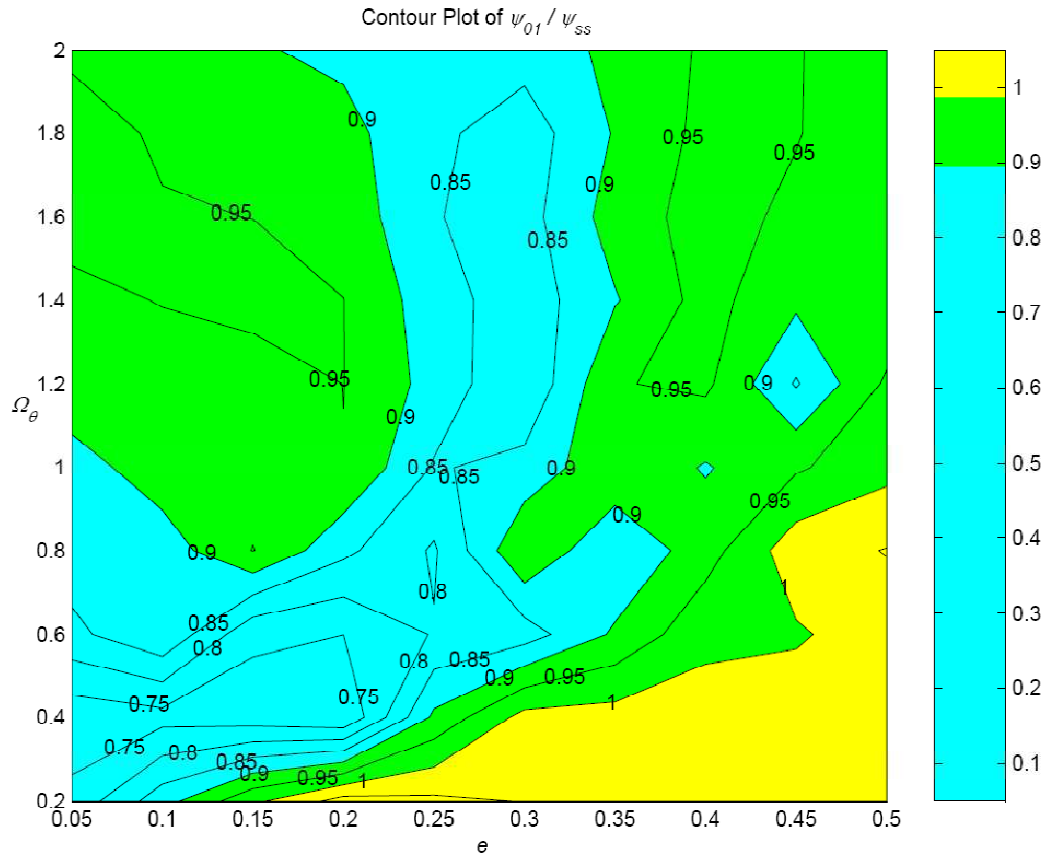




**Fig. 8.15** Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 8.2.2.2 Struttura a tre piani

#### 8.2.2.2.1 Struttura con diminuzione di rigidità al secondo e terzo piano



**Fig. 8.16** Rapporto  $\psi_{01} / \psi_{ss}$

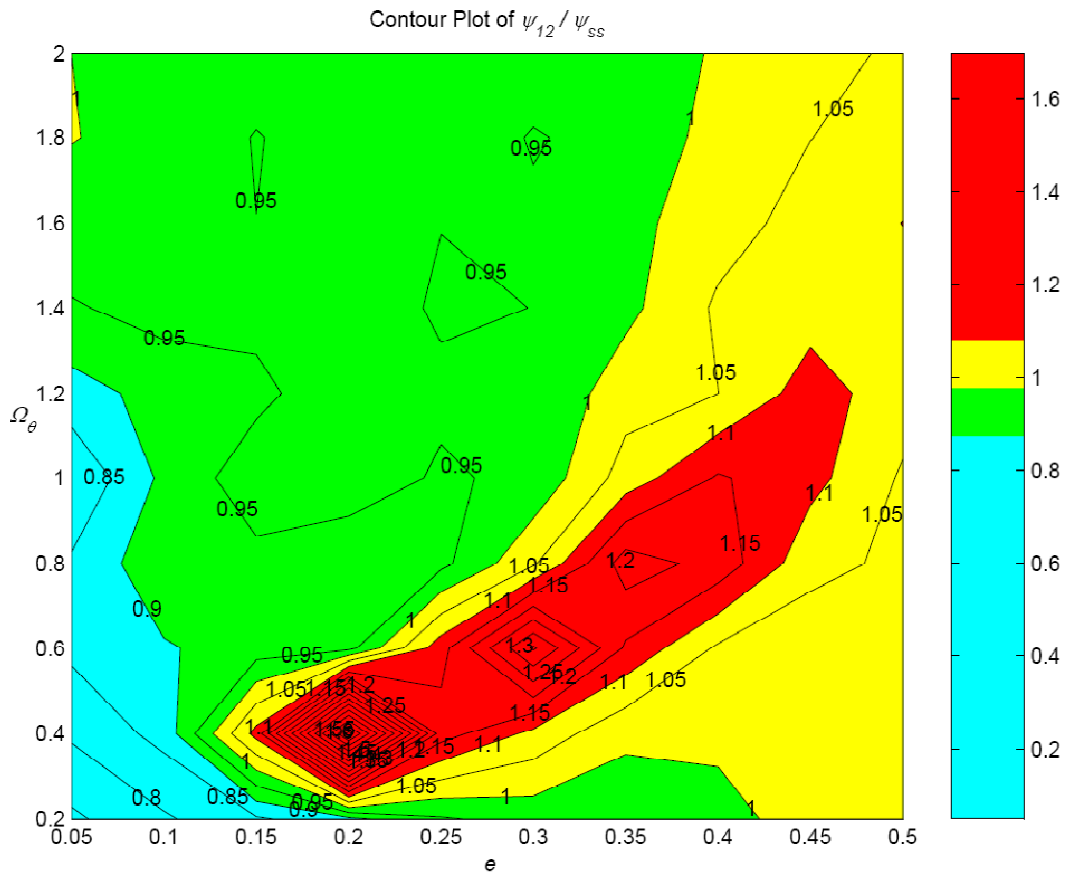
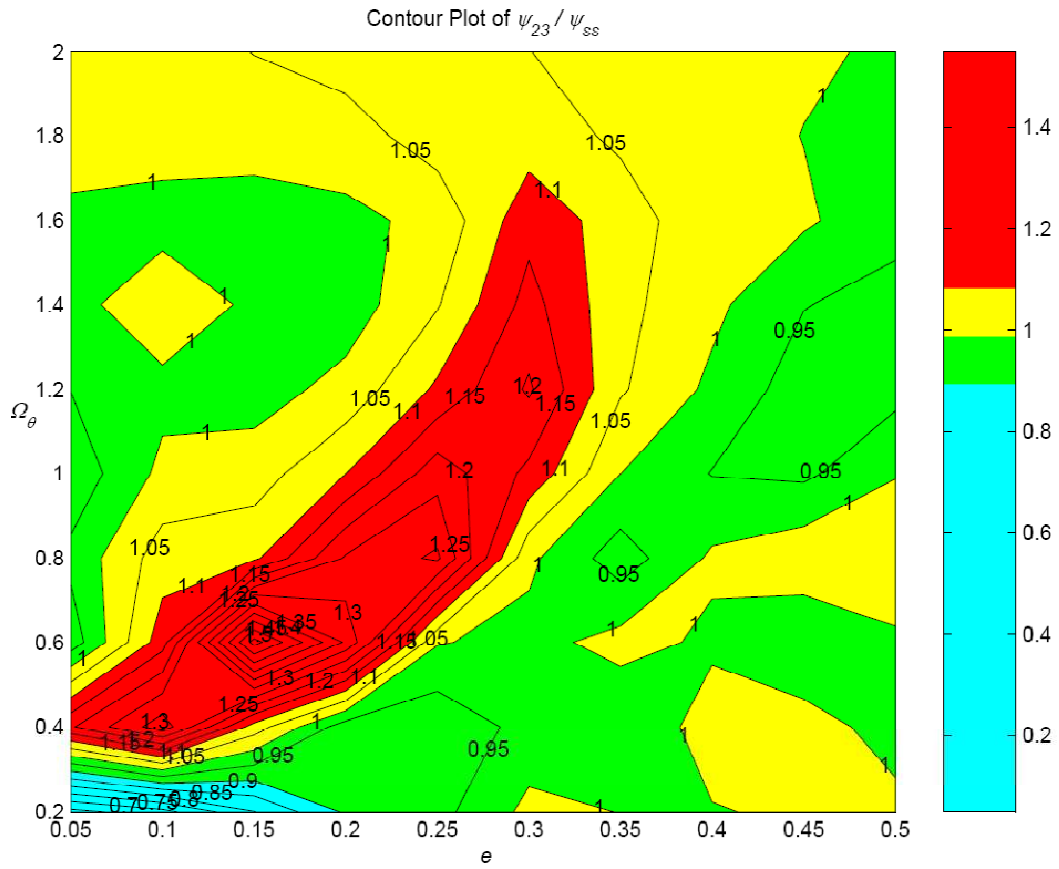


Fig. 8.17 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$



**Fig. 8.18** Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$

8.2.2.2.2 Struttura con aumento di rigidità al secondo e terzo piano

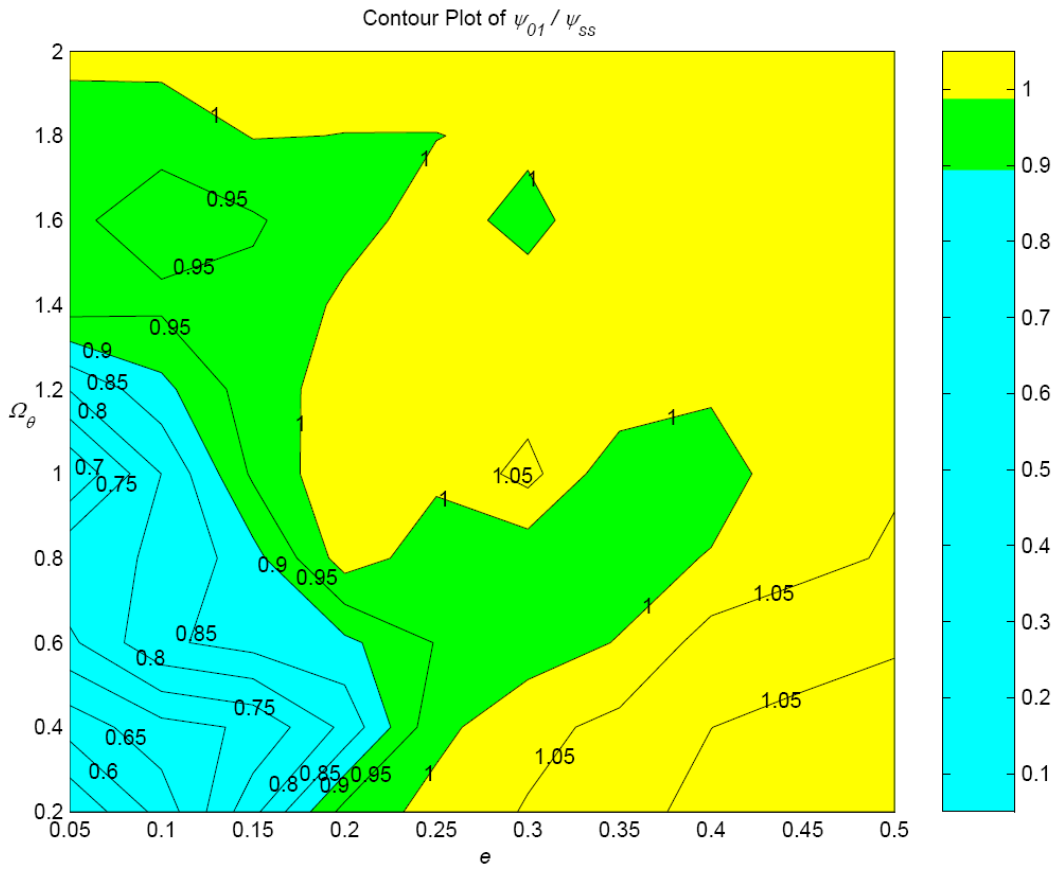


Fig. 8.19 Rapporto  $\psi_{01} / \psi_{ss}$ .

Considerazioni conclusive

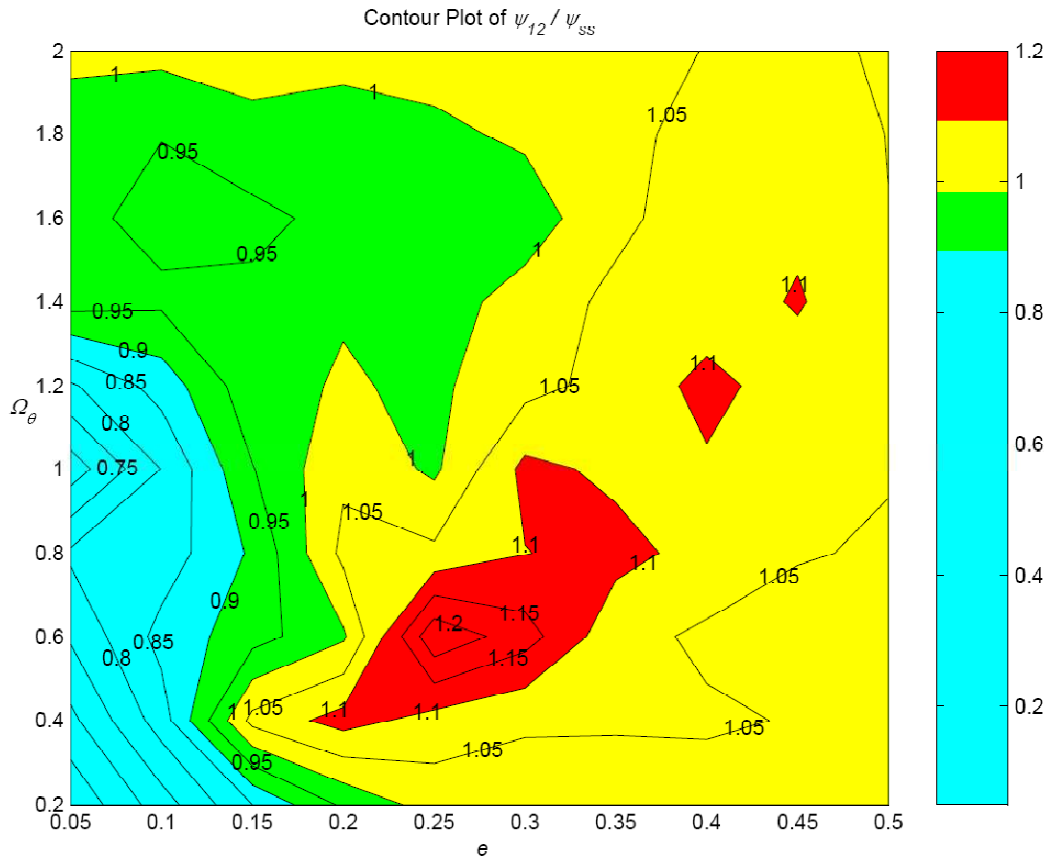
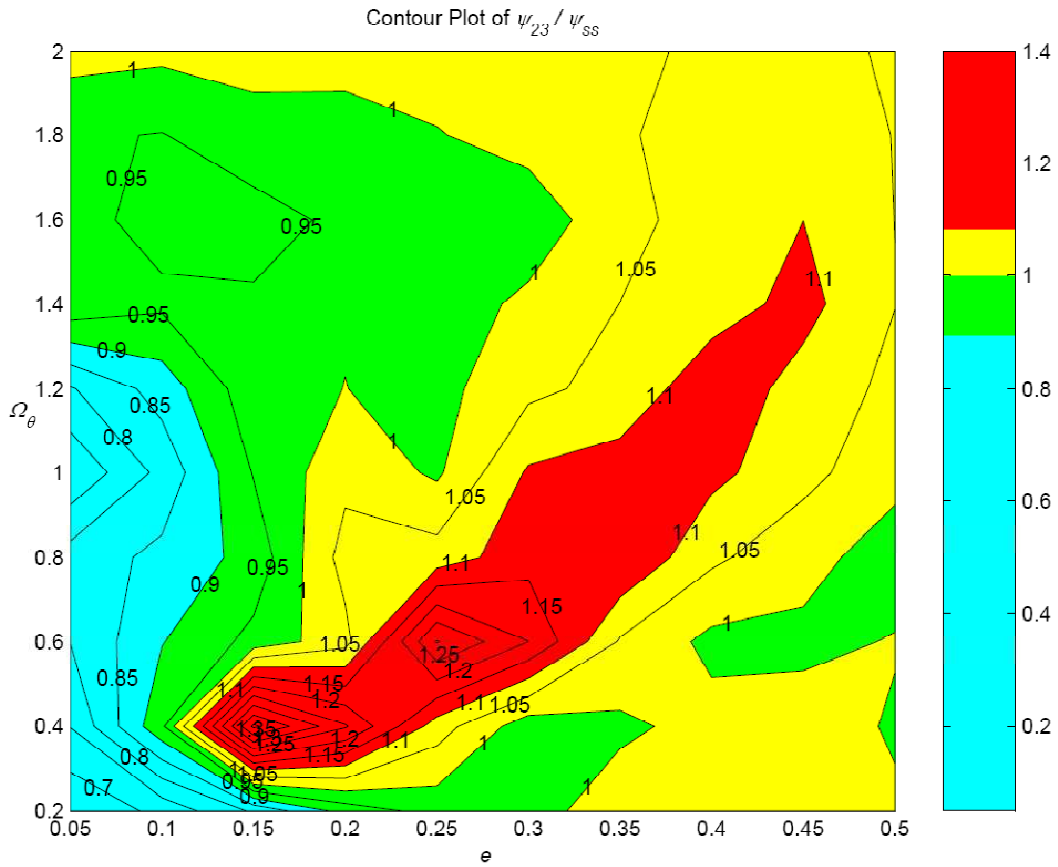


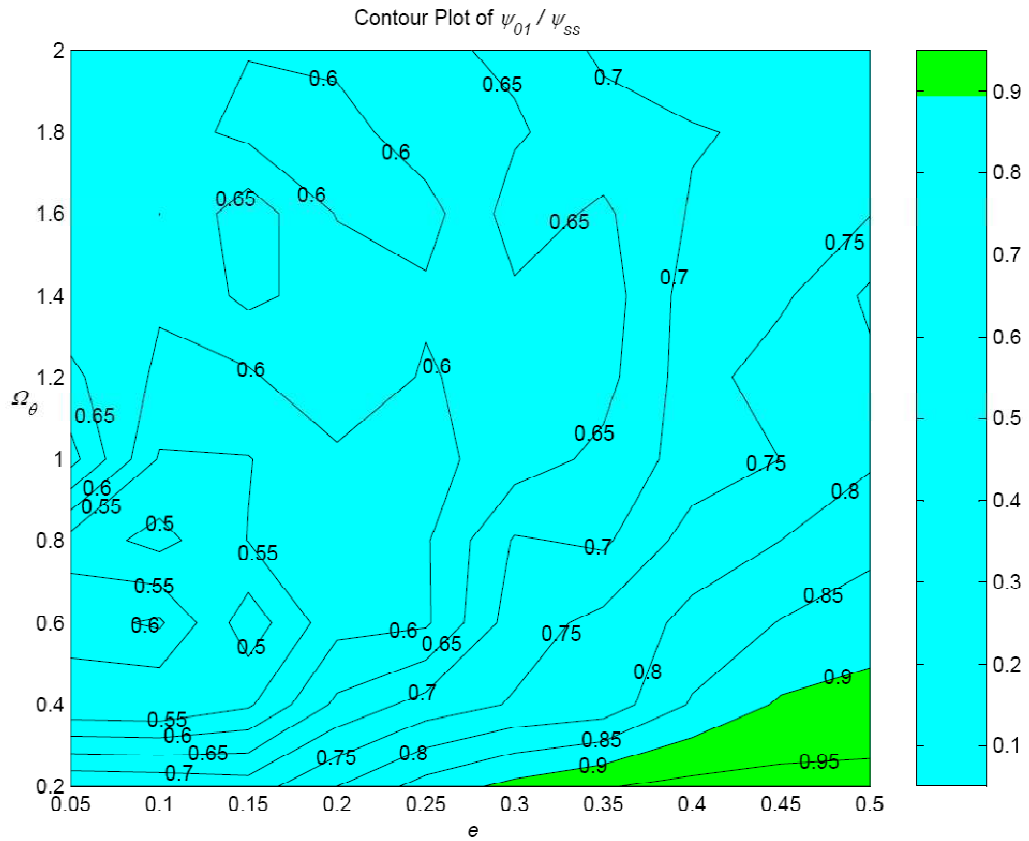
Fig. 8.20 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$



**Fig. 8.21** Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$

### 8.2.2.3 Struttura a sei piani

In questo caso si è analizzata soltanto una struttura avente una rigidità decrescente andando dal primo al sesto piano. I grafici ottenuti sono i seguenti:



**Fig. 8.22** Rapporto  $\psi_{01} / \psi_{ss}$



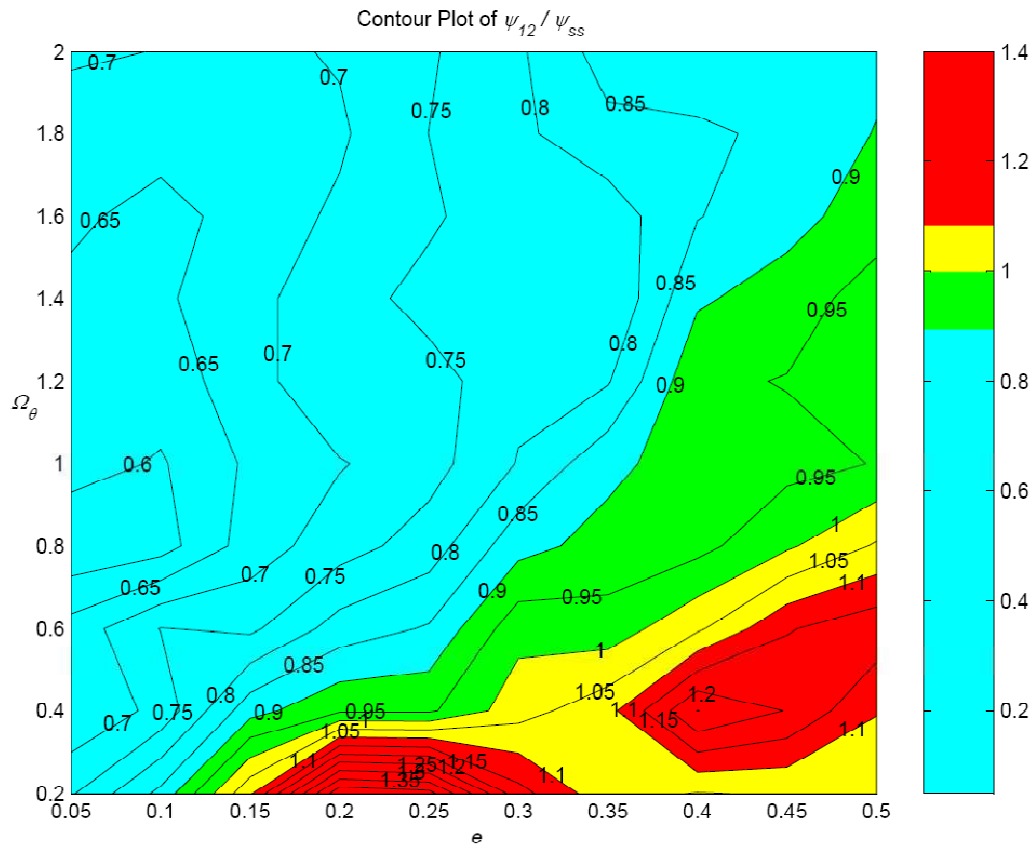
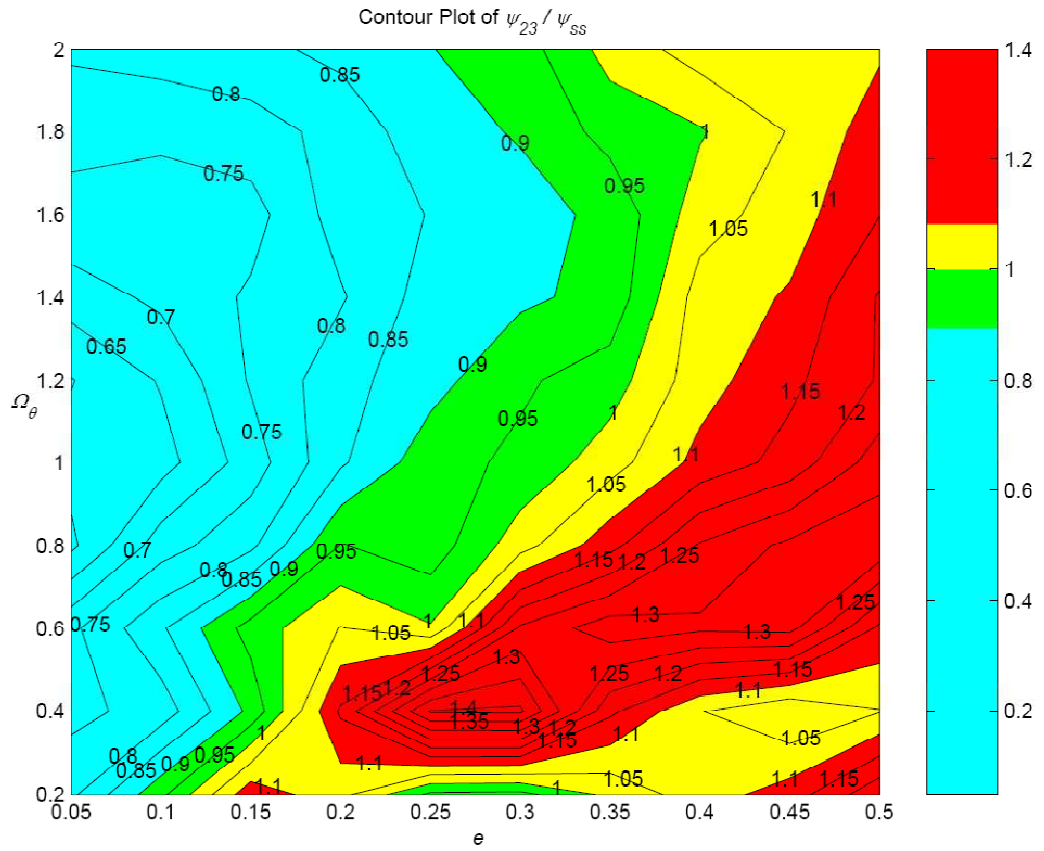


Fig. 8.23 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$



**Fig. 8.24** Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$

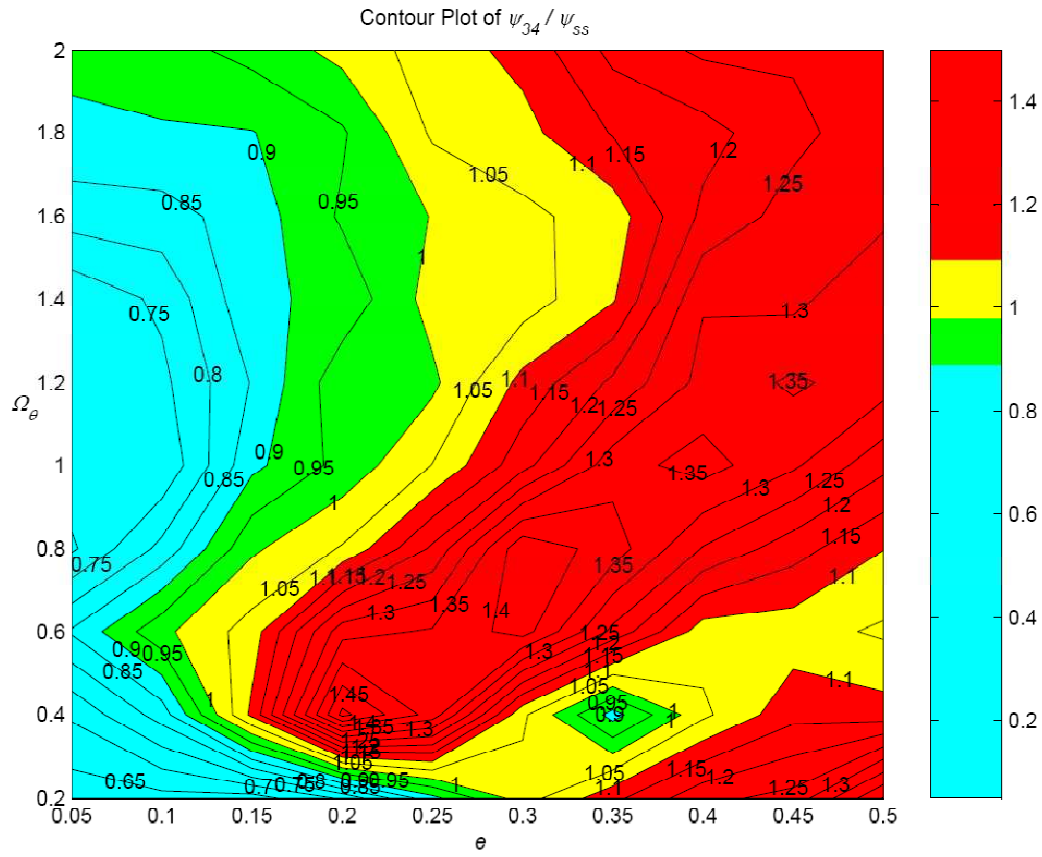


Fig. 8.25 Rapporto  $\psi_{34} / \psi_{35}$

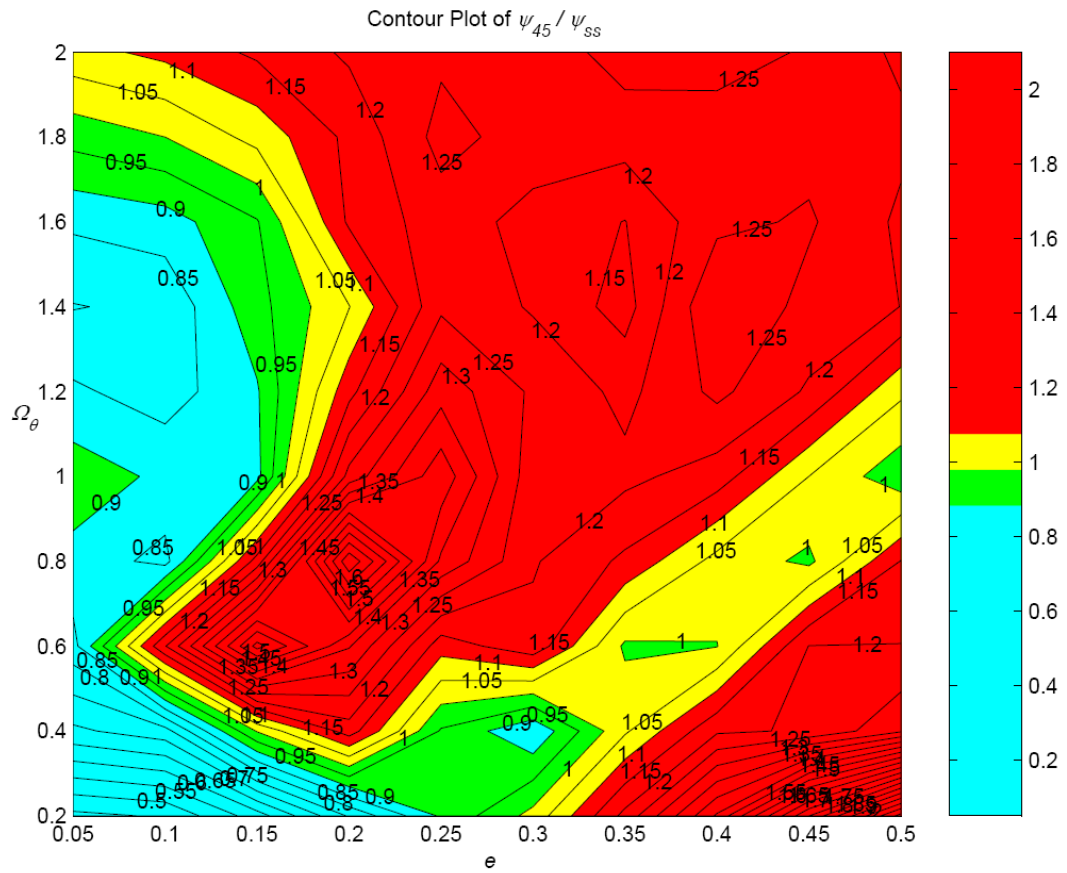


Fig. 8.26 Rapporto  $\psi_{45}/\psi_{ss}$

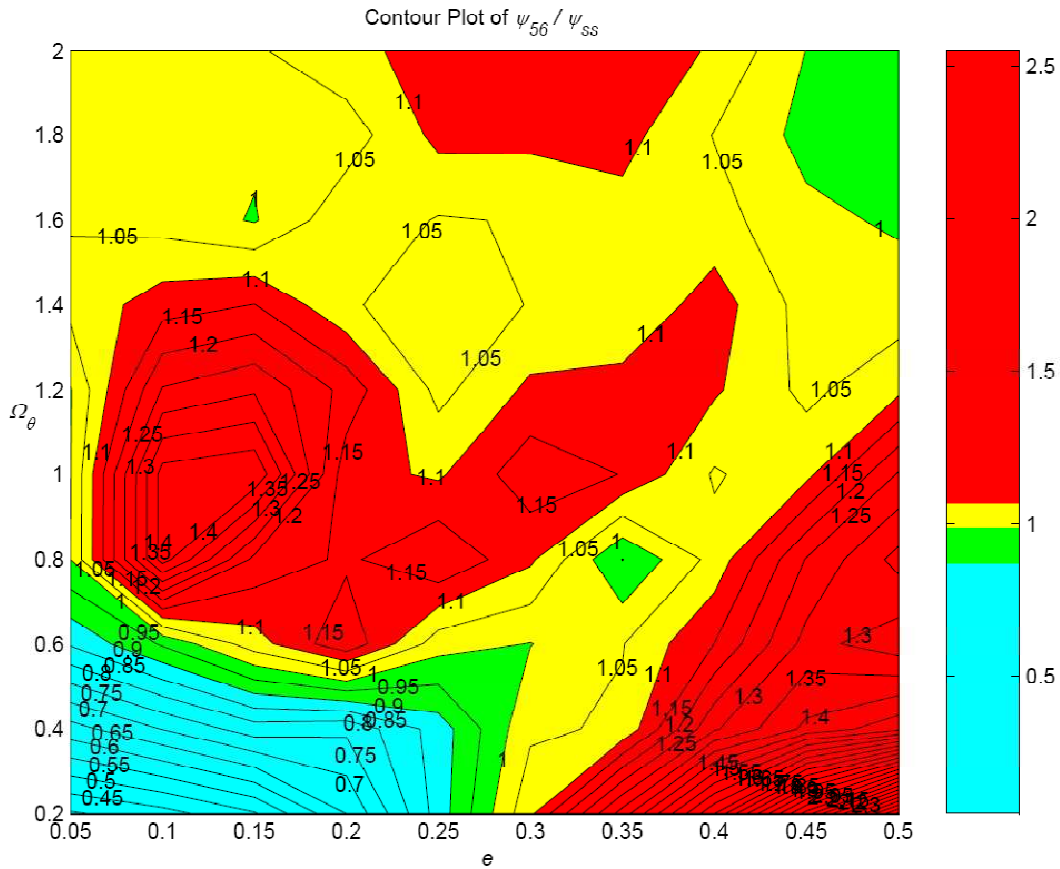


Fig. 8.27 Rapporto  $\psi_{56}/\psi_{ss}$

### 8.2.3 Struttura con variazione di massa

Le analisi numeriche svolte hanno permesso di affermare che, anche nel caso di variazione progressiva di massa tra i vari piani della struttura multi storey (sia nel caso di incremento che di decremento), la struttura single storey che meglio approssima il comportamento dell' $i$ -esimo piano della struttura è analogo a quello utilizzato nei casi precedenti:

$$m_{ss} = \sum_{i=1}^n m_i$$

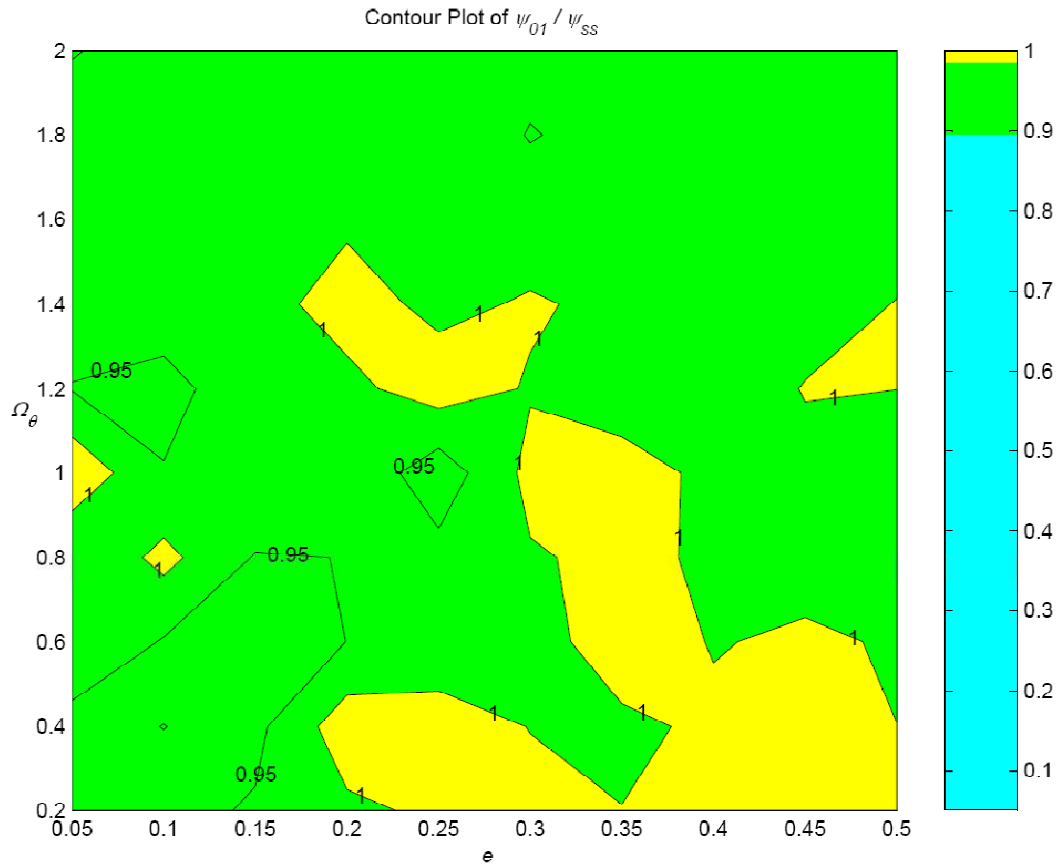
$$k_{ss} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_i$$

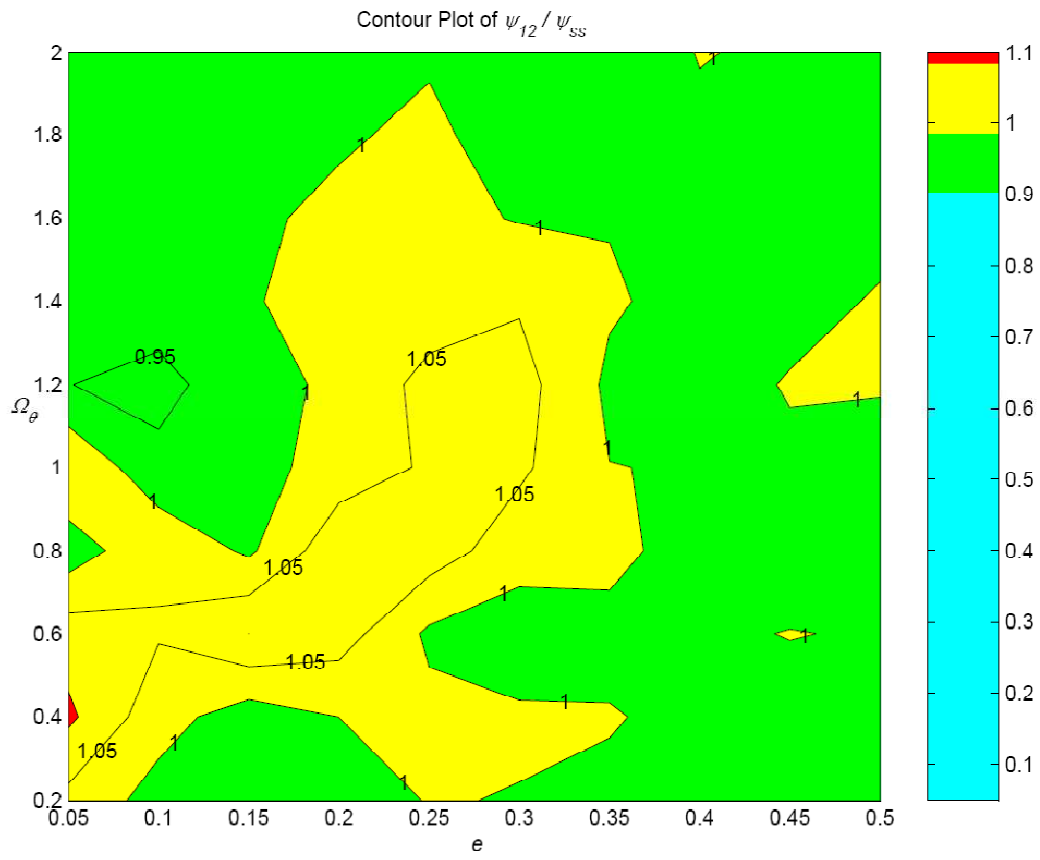
$$\Omega_{\theta,ss} = \Omega_{\theta i}$$

### 8.2.3.1 Struttura a due piani

#### 8.2.3.1.1 Struttura con diminuzione di massa al secondo piano



**Fig. 8.28** Rapporto  $\psi_{01} / \psi_{ss}$ .



**Fig. 8.29** Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

8.2.3.1.2 Struttura con aumento di massa al secondo piano

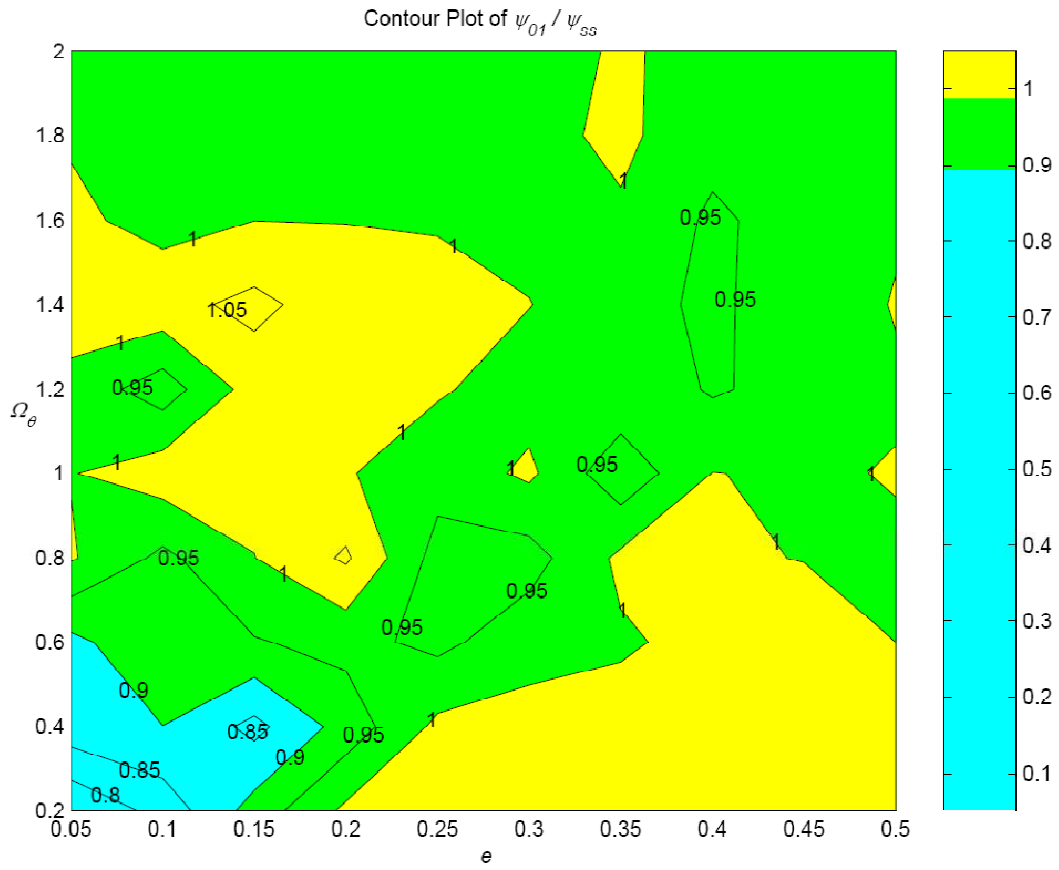
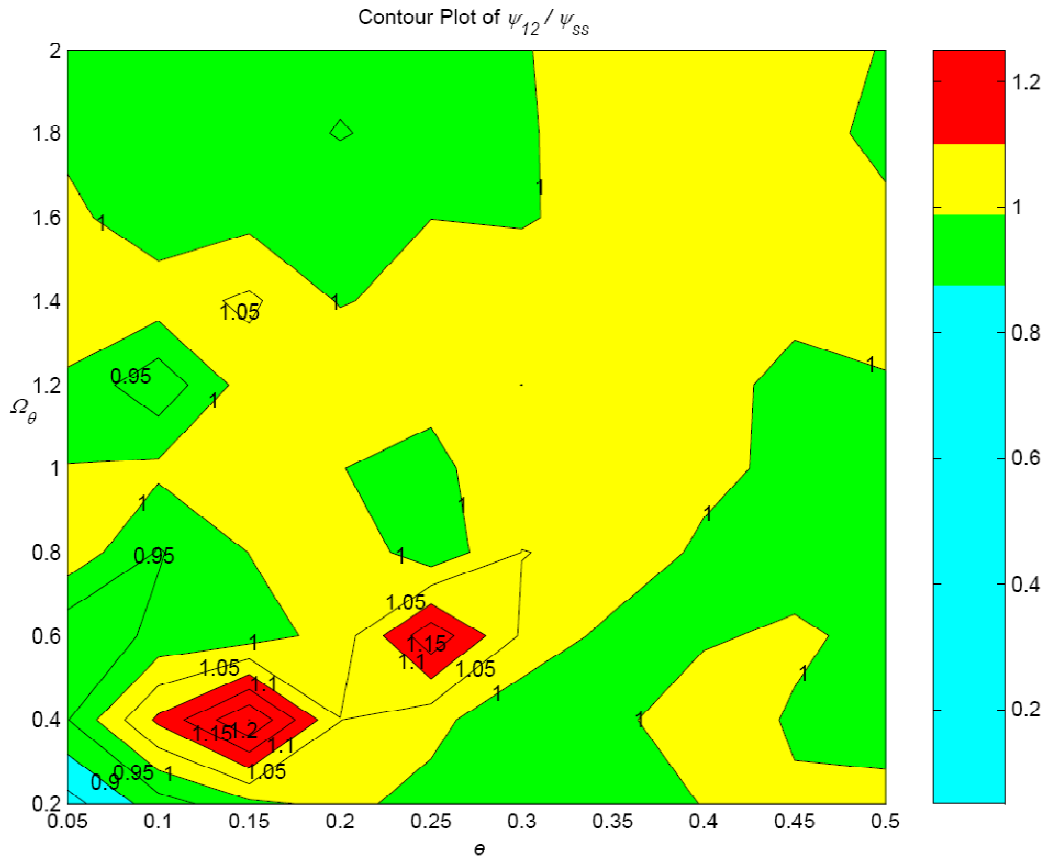


Fig. 8.30 Rapporto  $\psi_{01} / \psi_{ss}$ .





**Fig. 8.31** Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 8.2.3.2 Struttura a tre piani

#### 8.2.3.2.1 Struttura con diminuzione di massa al secondo e terzo piano

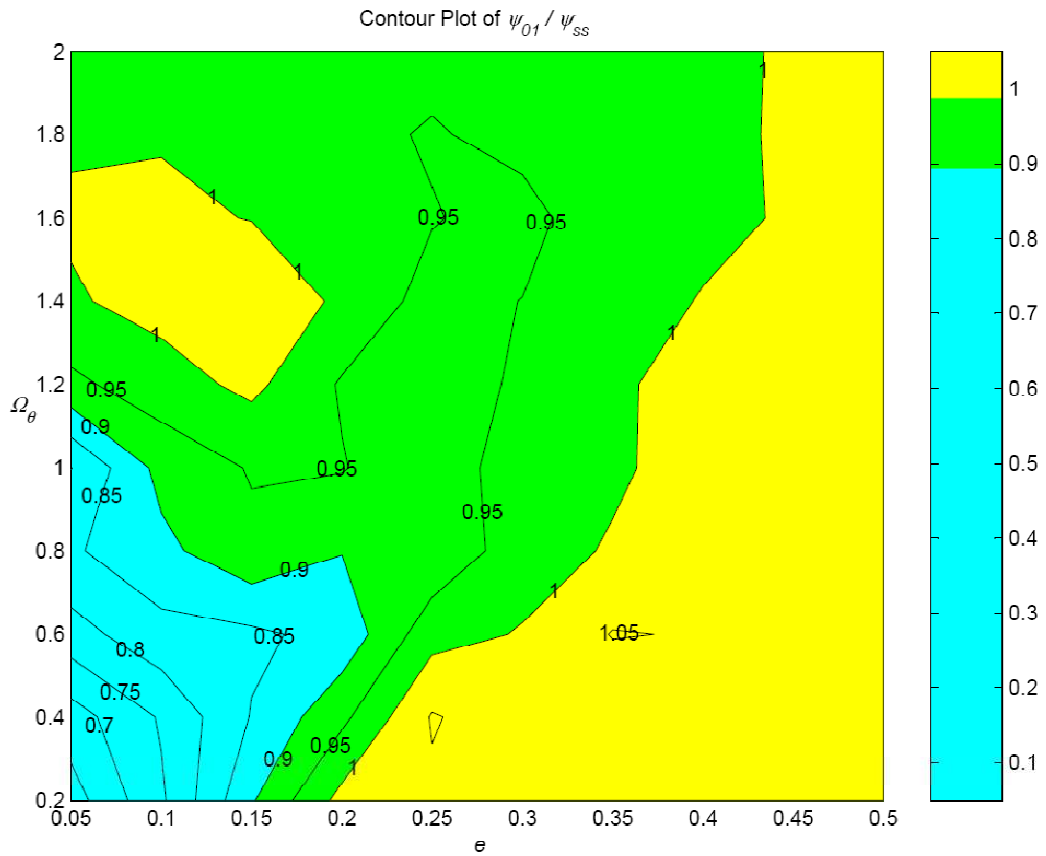
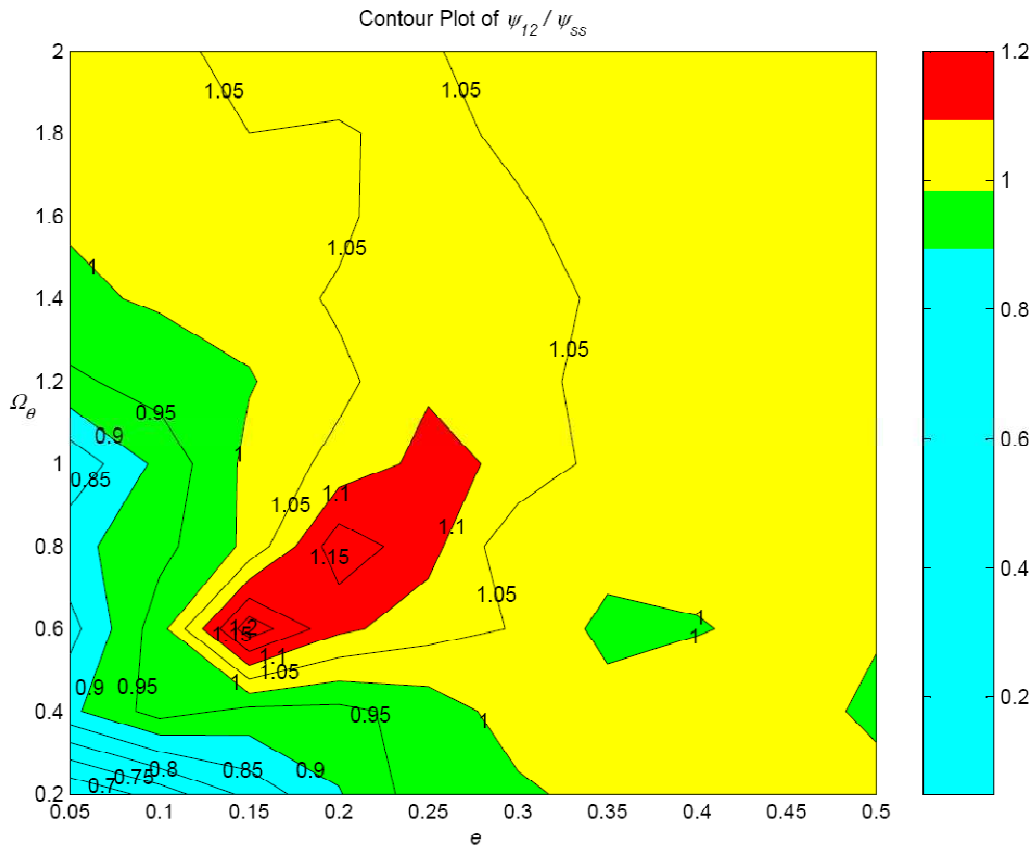
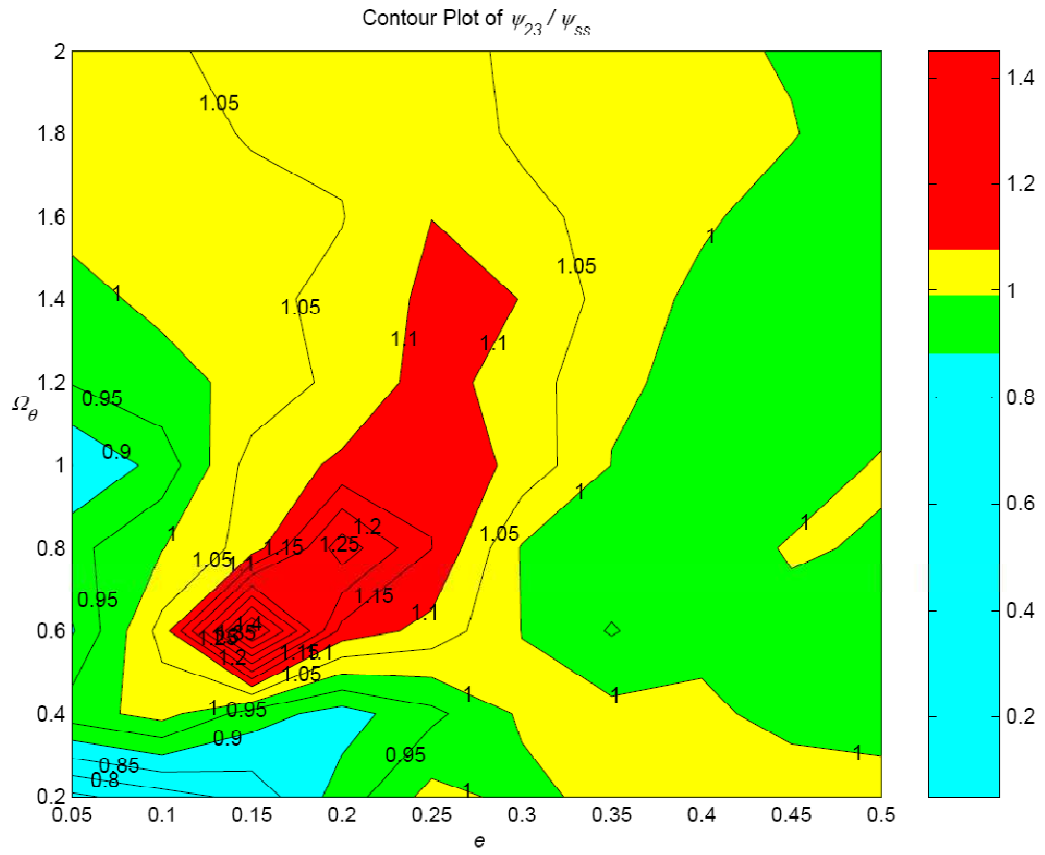


Fig. 8.32 Rapporto  $\psi_{01} / \psi_{ss}$ .



**Fig. 8.33** Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$



**Fig. 8.34** Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$

8.2.3.2.2 *Struttura con aumento di massa al secondo e terzo piano*

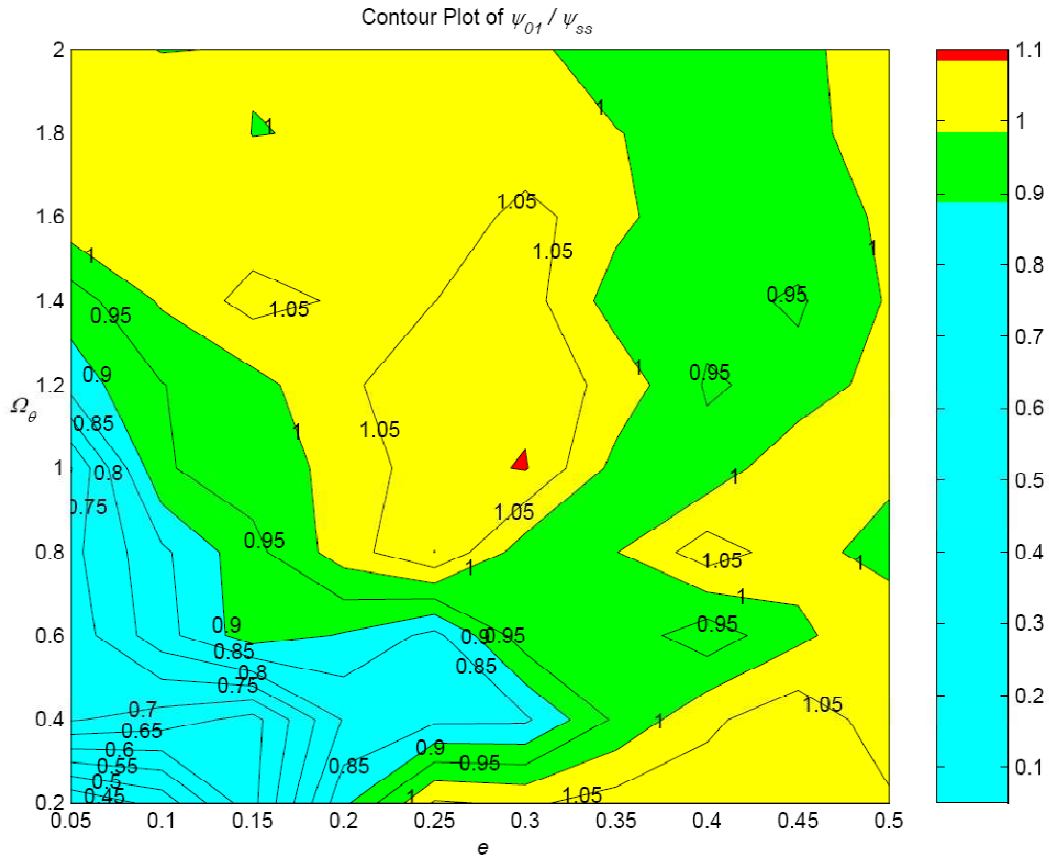
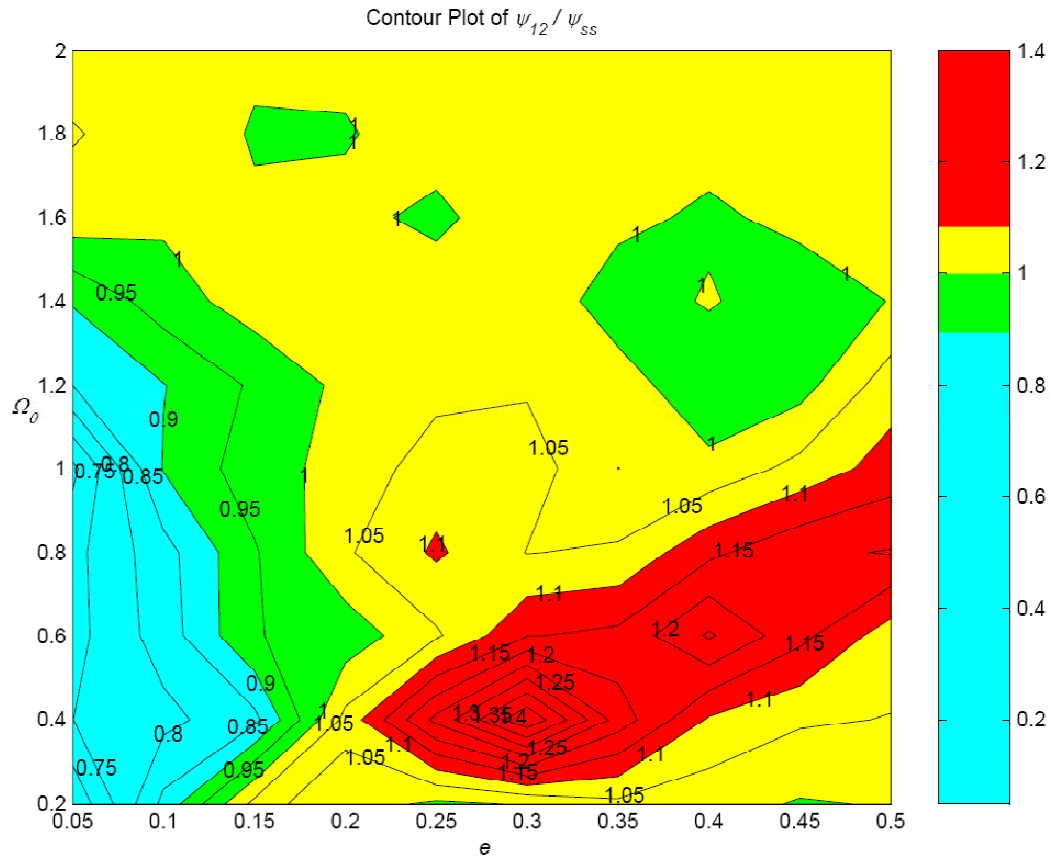
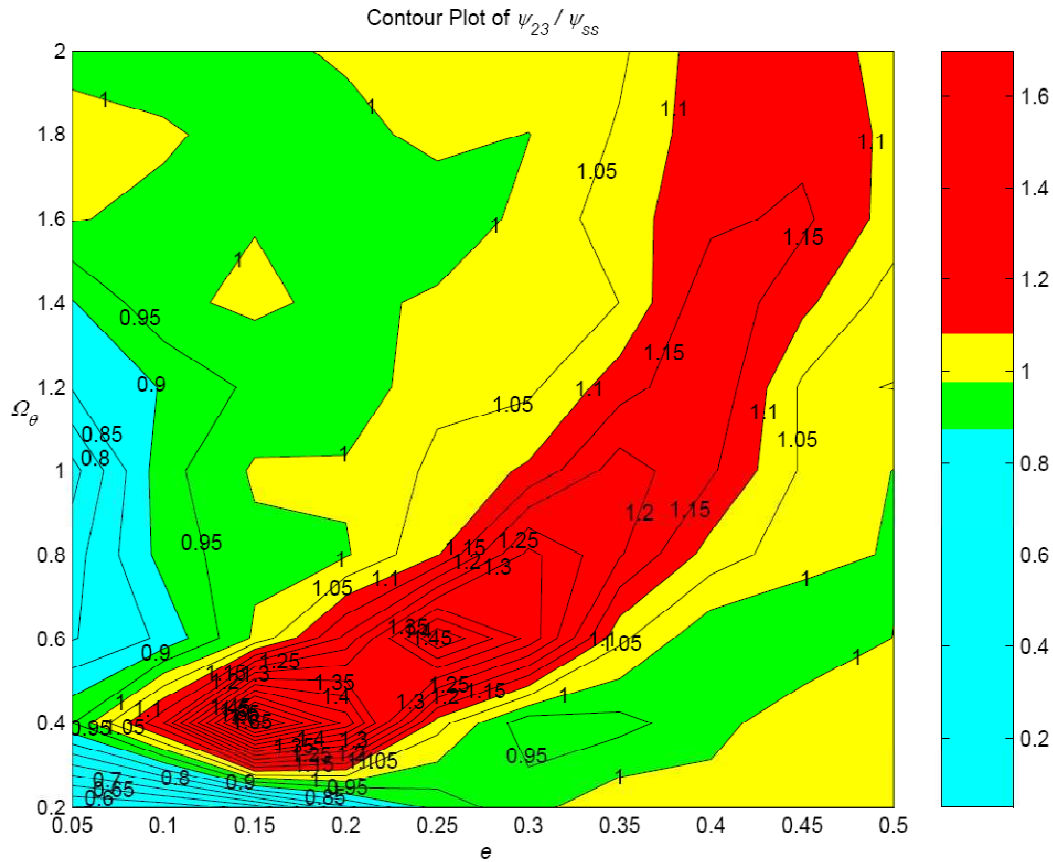


Fig. 8.35 Rapporto  $\psi_{01} / \psi_{ss}$ .

Considerazioni conclusive



**Fig. 8.36** Rapporto  $\psi_{12} / \psi_{ss}$



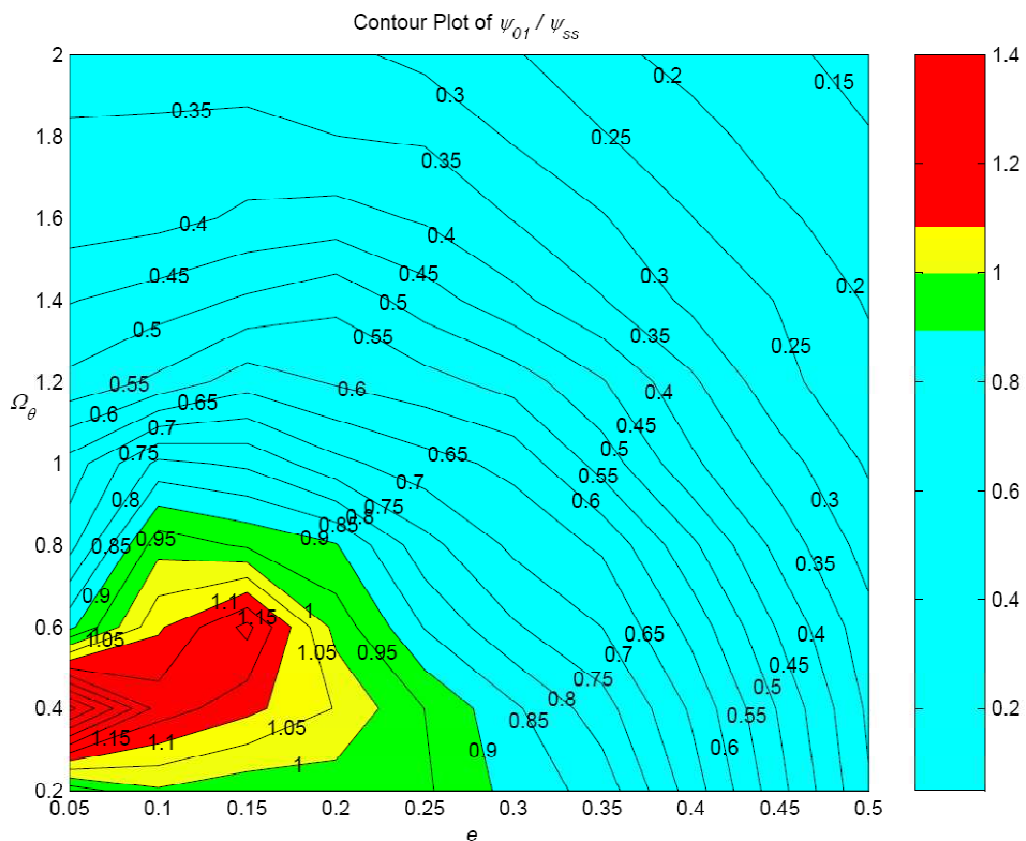
**Fig. 8.37** Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$

### 8.2.4 Struttura con variazione di eccentricità

La presente ricerca ha stabilito come, sfortunatamente, il modello di single storey equivalente ricavato per i casi precedenti perda la sua validità quando si varia l'eccentricità da un piano all'altro. In questo caso, infatti, il single storey equivalente per l'*i*-esimo piano varia. Lo studio di una struttura a due piani in cui l'eccentricità al secondo piano è raddoppiata rispetto a quella del primo piano ha portato ai seguenti risultati:

- Per il primo piano, la struttura single storey equivalente deve avere le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned} m_{ss} &= m_1 \\ k_{ss} &= k_1 \\ e_{ss} &= e_1 \\ \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1} = \Omega_{\theta 2} \end{aligned}$$

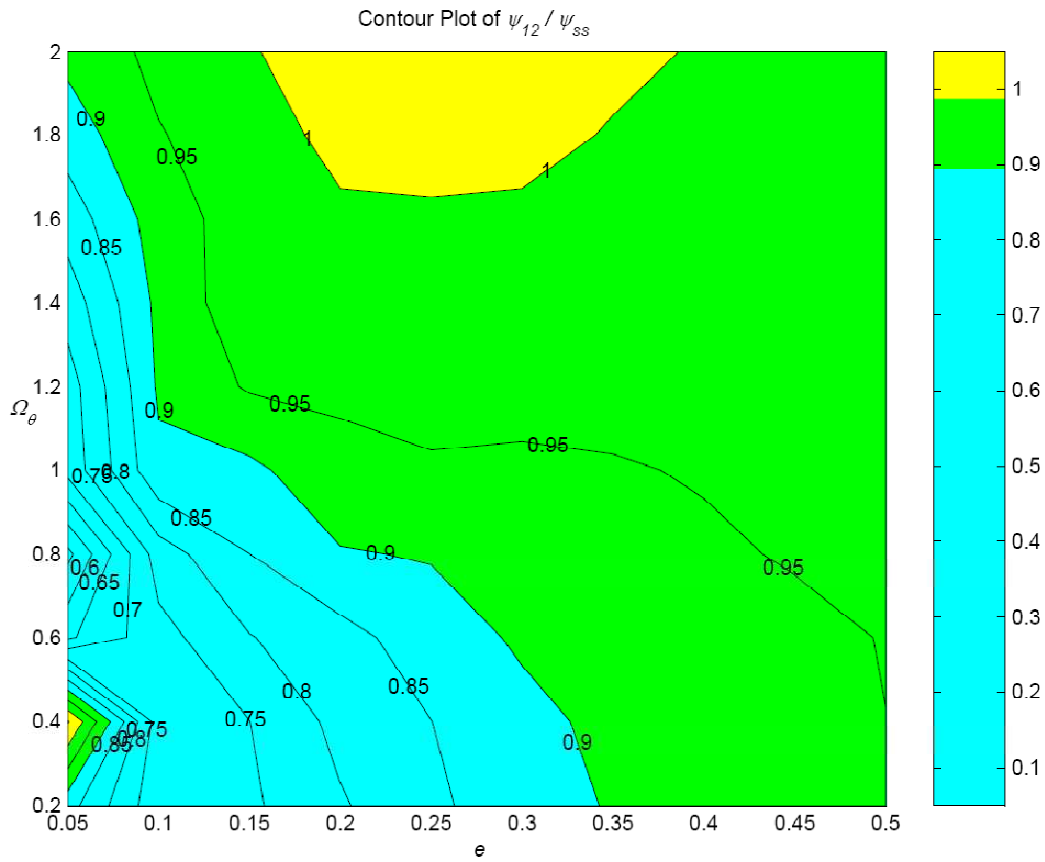


**Fig. 8.38** Rapporto  $\psi_{\theta 1} / \psi_{ss}$ .

- Per cogliere al meglio il comportamento del secondo piano, invece, si deve ricorrere ad una struttura single storey con le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned} m_{ss} &= m_2 \\ k_{ss} &= k_2 \\ e_{ss} &= \frac{e_1 + e_2}{2} \\ \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1} = \Omega_{\theta 2} \end{aligned}$$





**Fig. 8.39** Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 8.2.5 Struttura con variazione di $\Omega_\theta$

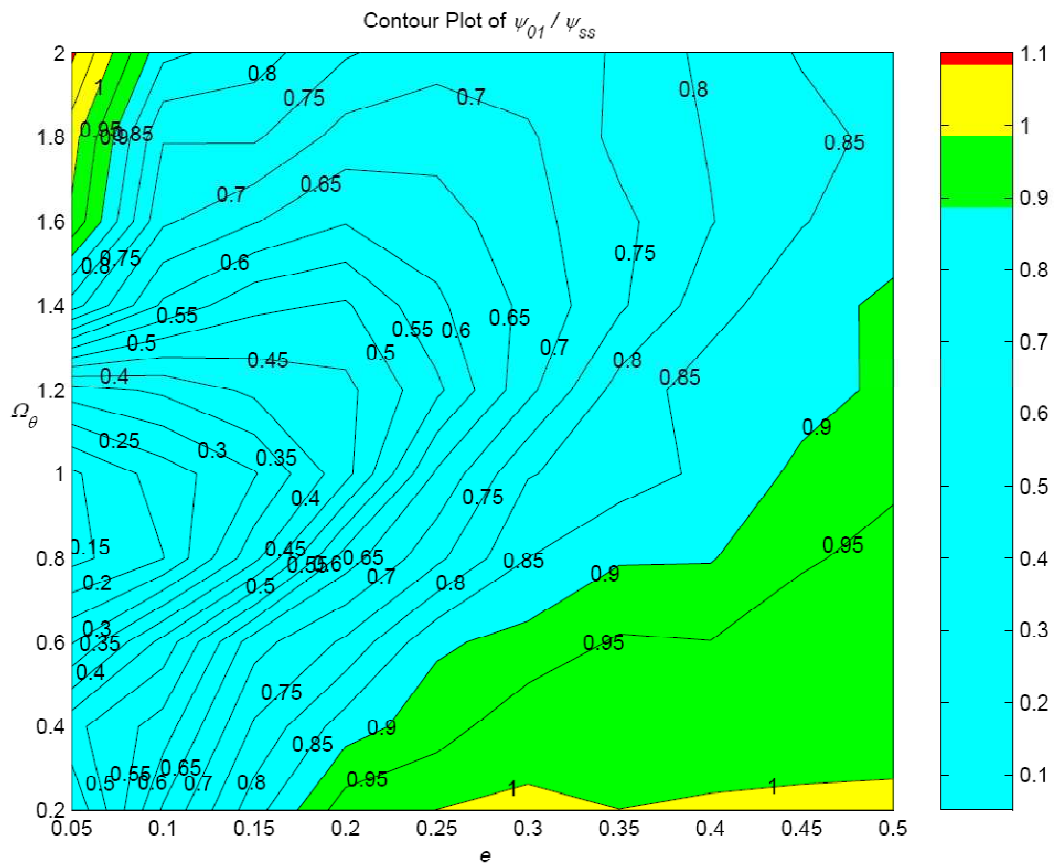
Anche nel caso di variazione del parametro  $\Omega_\theta$  non è possibile individuare una struttura single storey equivalente comune ai vari piani e alle varie tipologie strutturali, per cui è necessario ricavarla caso per caso.

### 8.2.5.1 Struttura a due piani

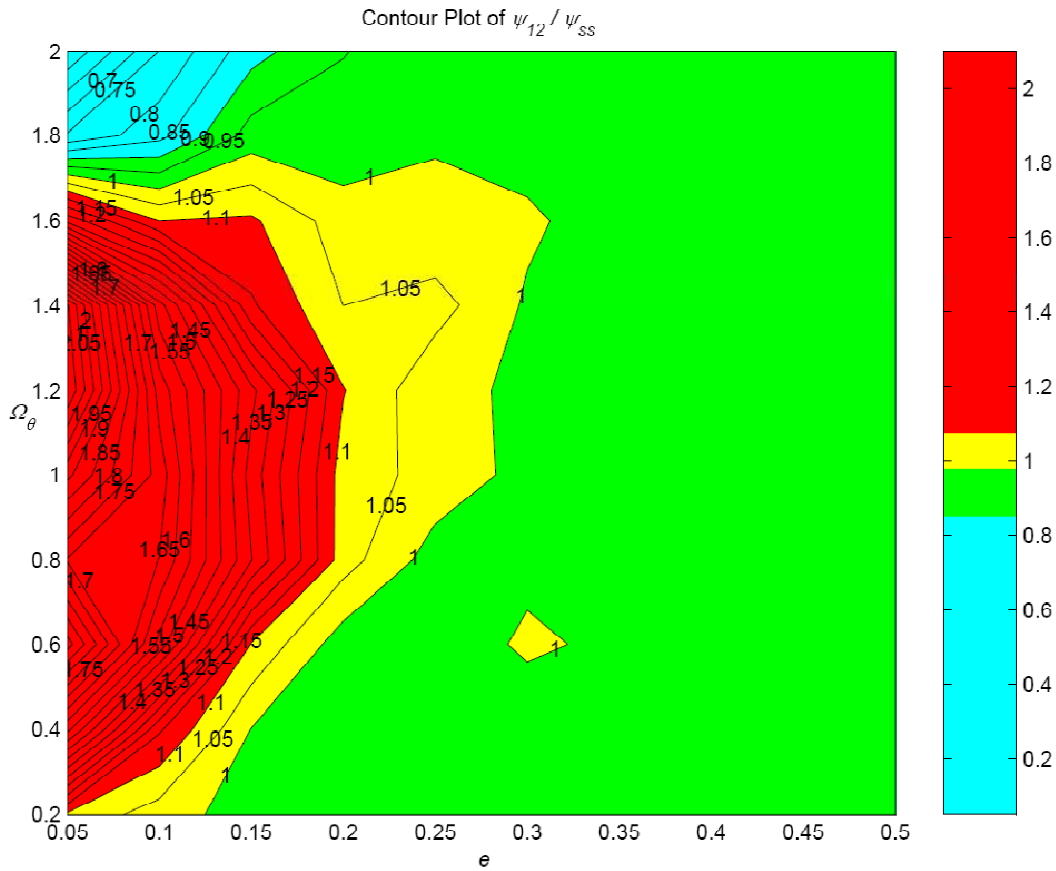
#### 8.2.5.1.1 Struttura con diminuzione di $\Omega_\theta$ al secondo piano

In questo caso, la struttura single storey che meglio rappresenta il comportamento dei due piani è la stessa, ed ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned} m_{ss} &= m_1 + m_2 \\ k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\ e_{ss} &= e_1 = e_2 \\ \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 2} \end{aligned}$$



**Fig. 8.40** Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .



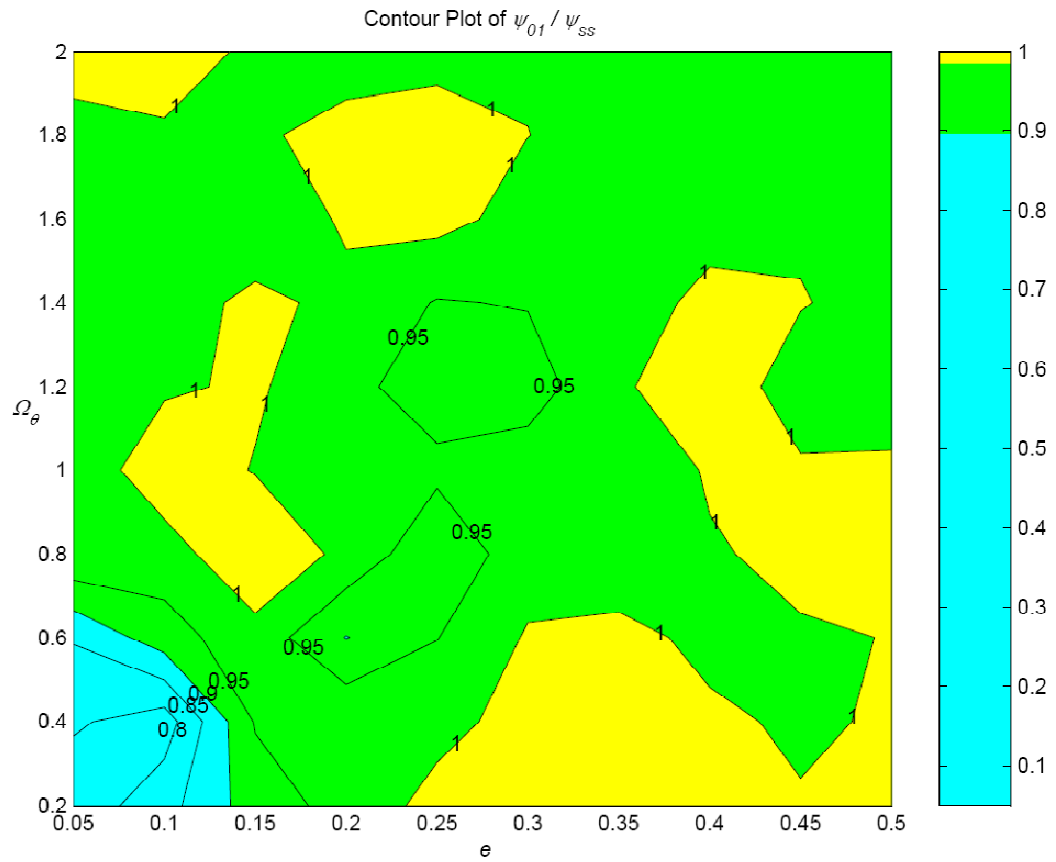
**Fig. 8.41** Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

### 8.2.5.1.2 Struttura con aumento di $\Omega_\theta$ al secondo piano

In questo caso, la struttura single storey che meglio rappresenta il comportamento dei due piani è differente; per il primo piano ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 = e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 1}
 \end{aligned}$$

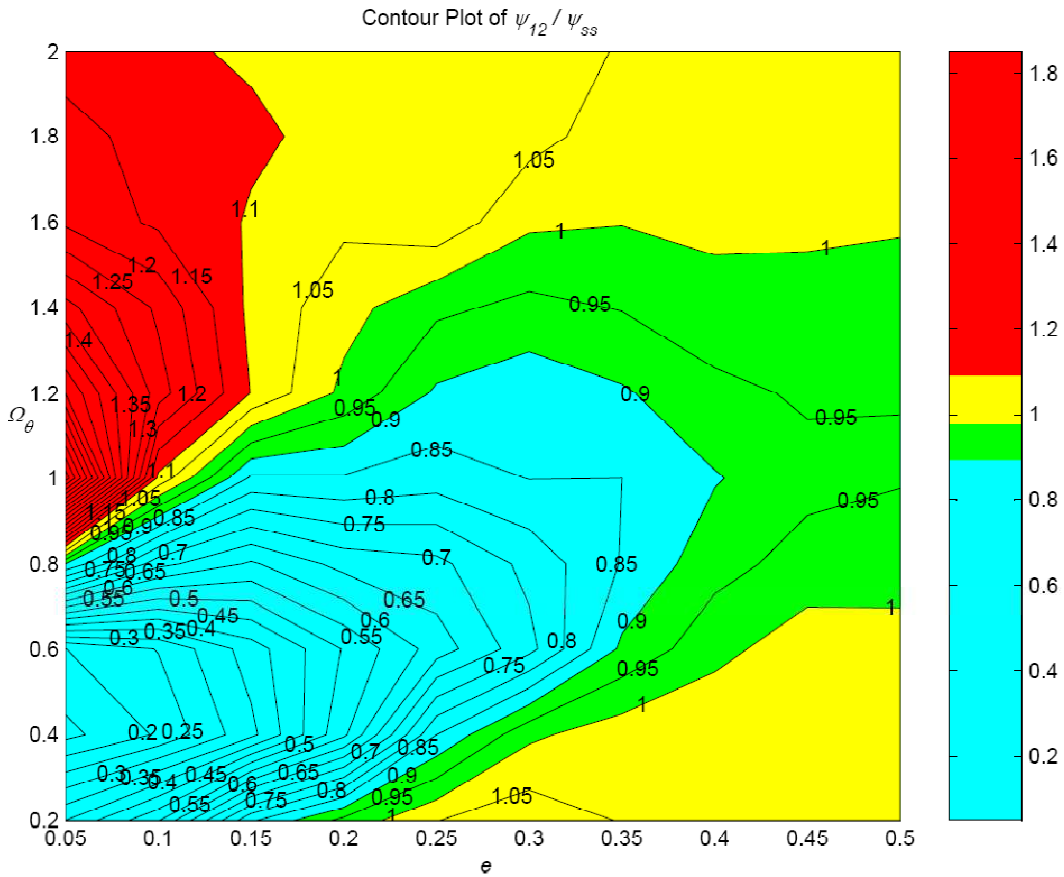
Considerazioni conclusive



**Fig. 8.42** Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

Per il secondo piano, invece, si deve ricorrere, per coglierne al meglio il comportamento, ad un single storey avente le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 \\
 k_{ss} &= k_2 \\
 e_{ss} &= e_2 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \frac{\Omega_{\theta 1} + \Omega_{\theta 2}}{2}
 \end{aligned}$$



**Fig. 8.43** Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$ .

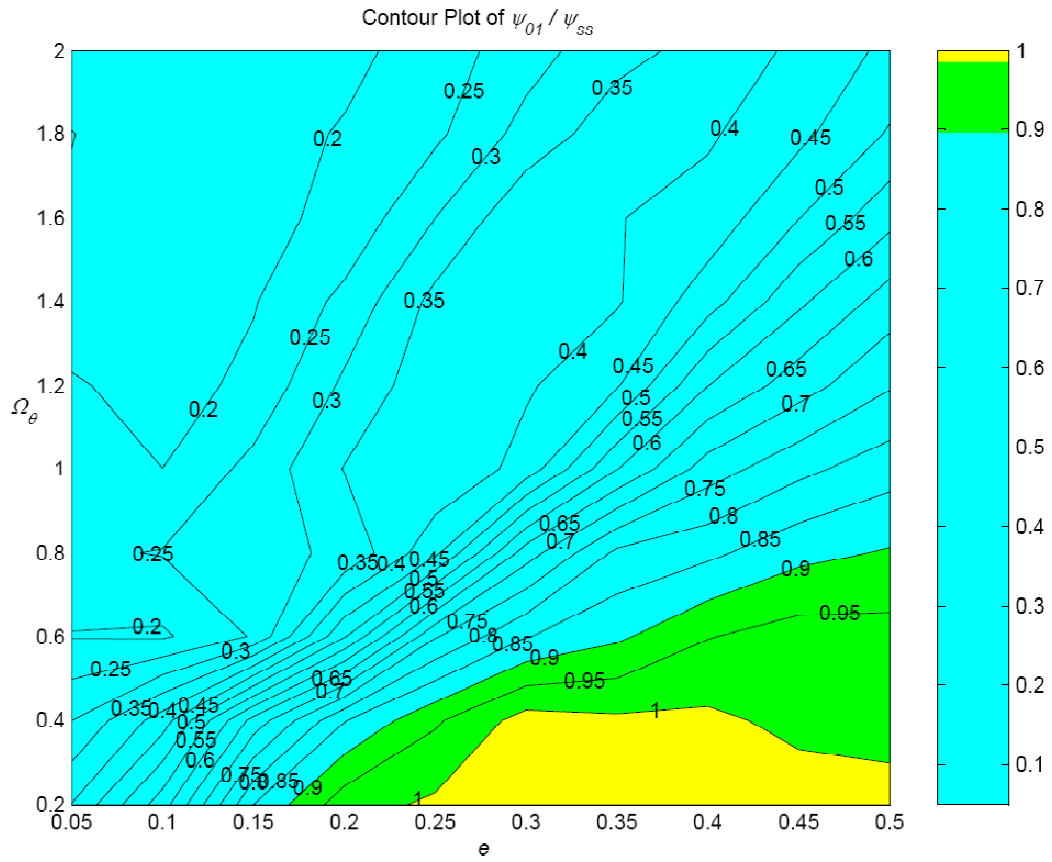
### 8.2.5.2 Struttura a tre piani

Anche per le strutture a tre piani il single storey equivalente varia da piano a piano.

#### 8.2.5.2.1 Struttura con diminuzione di $\Omega_\theta$ al secondo e terzo piano

Per il primo piano, il single storey equivalente presenta le seguenti caratteristiche:

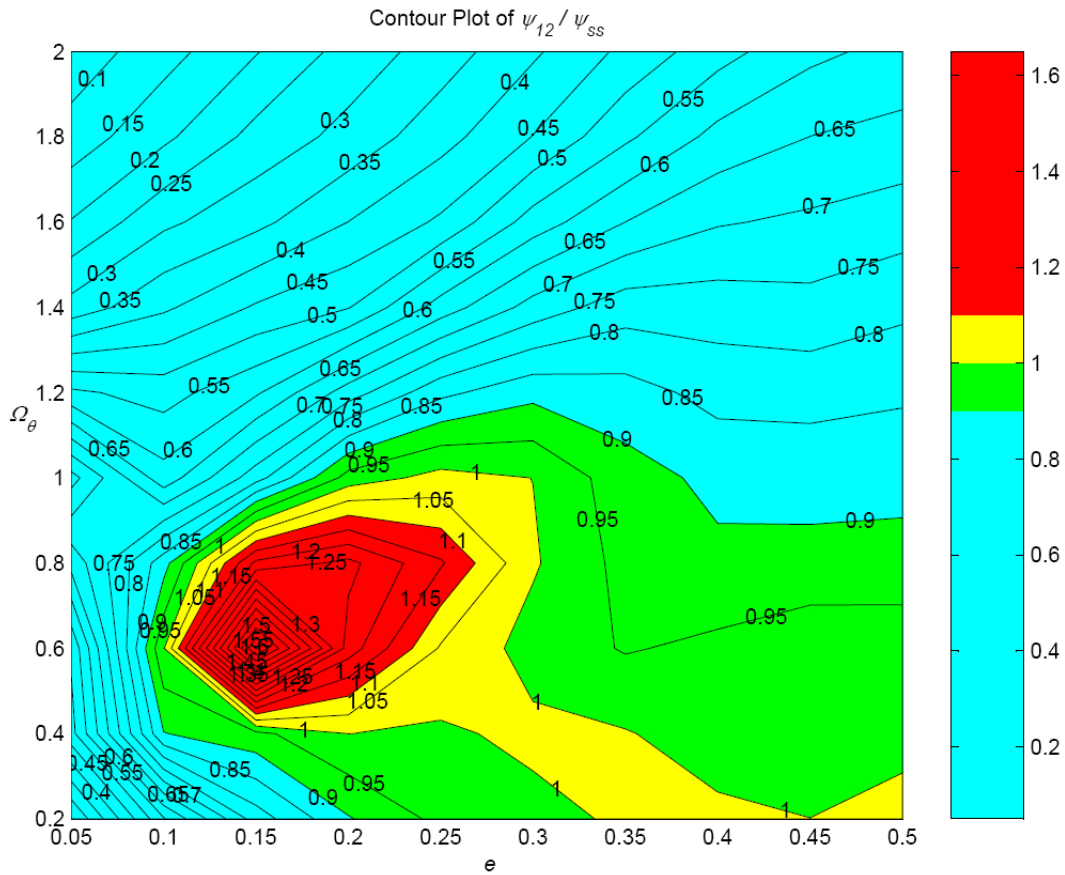
$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 = e_2 = e_3 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 3}
 \end{aligned}$$



**Fig. 8.44** Rapporto  $\psi_{01}/\psi_{ss}$ .

Per rappresentare il comportamento del secondo piano, invece, occorre considerare un single storey avente le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_2 \\
 k_{ss} &= k_2 \\
 e_{ss} &= e_1 = e_2 = e_3 \\
 \Omega_{\theta,ss} &= \Omega_{\theta 3}
 \end{aligned}$$



**Fig. 8.45** Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$

Per rappresentare il comportamento del terzo piano, invece, occorre considerare un single storey avente le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_3 \\
 k_{ss} &= k_3 \\
 e_{ss} &= e_1 = e_2 = e_3 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 3}
 \end{aligned}$$

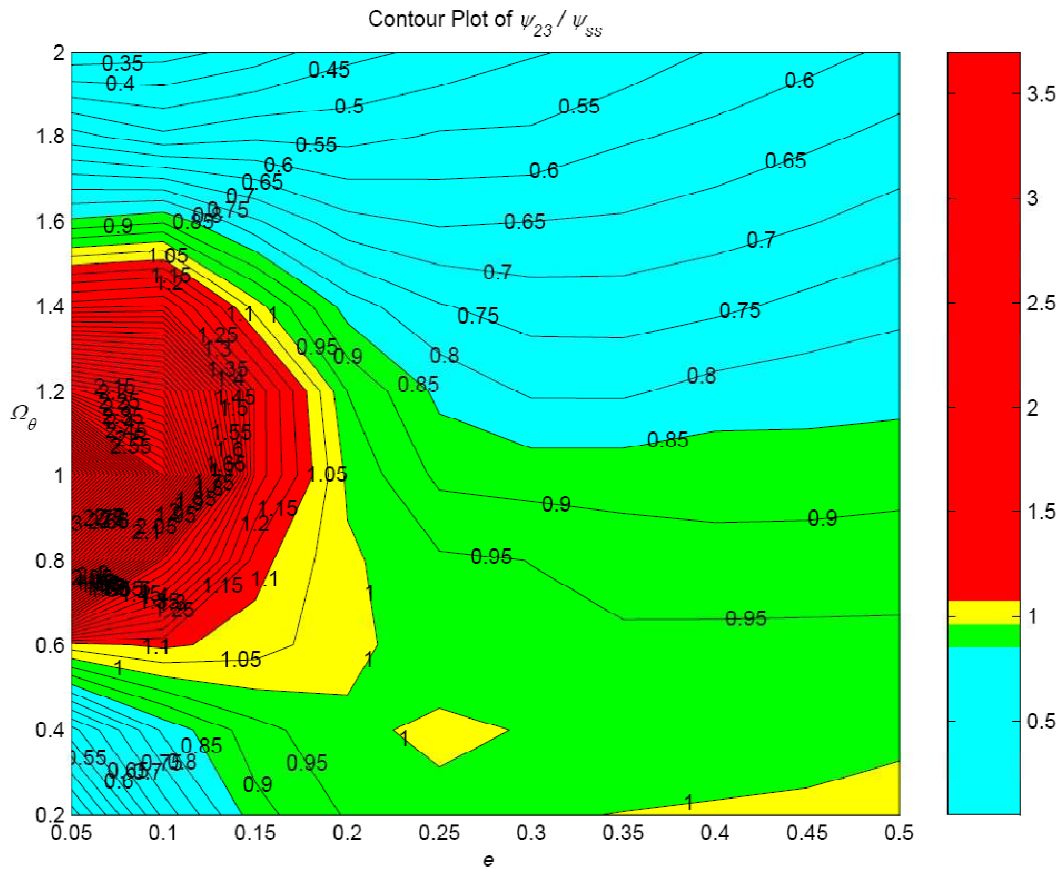


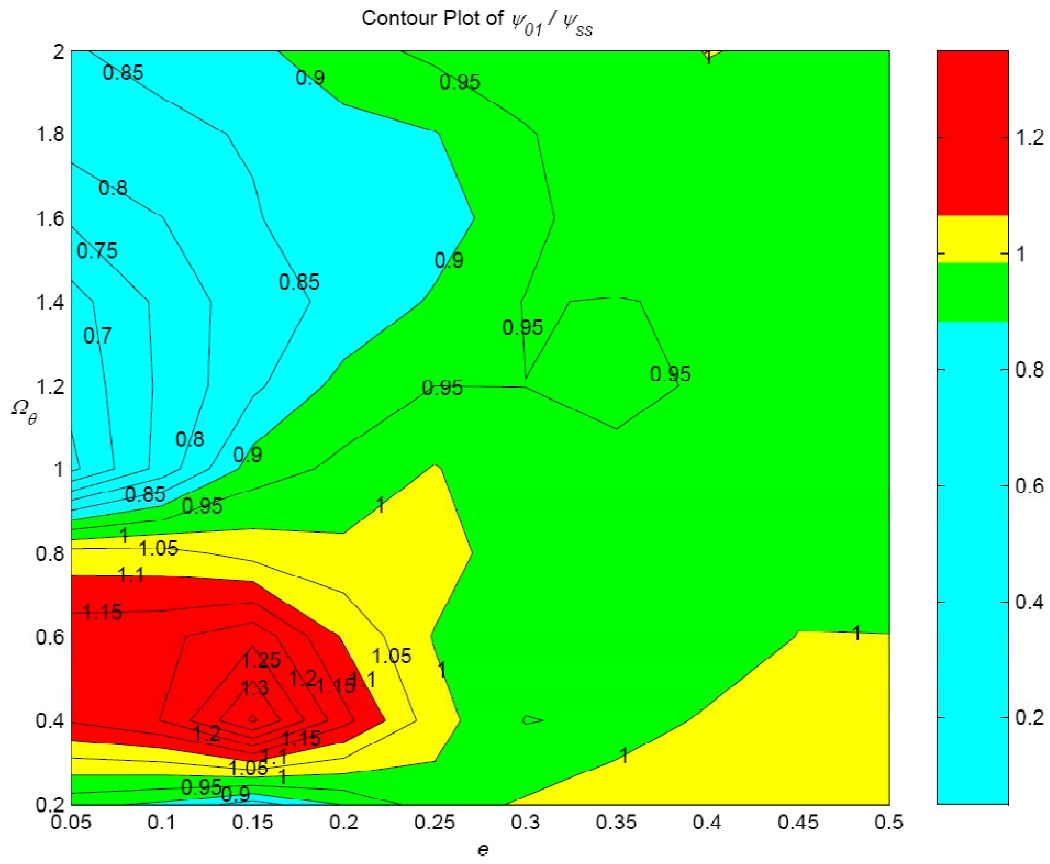
Fig. 8.46 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$

8.2.5.2.2 Struttura con aumento di  $\Omega_{\vartheta}$  al secondo e terzo piano

In questo caso, invece, il single storey che meglio rappresenta il comportamento dell' $i$ -esimo piano è comune ai tre piani, ed ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m_{ss} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 k_{ss} &= \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \\
 e_{ss} &= e_1 = e_2 = e_3 \\
 \Omega_{\vartheta,ss} &= \Omega_{\vartheta 1}
 \end{aligned}$$





**Fig. 8.47** Rapporto  $\psi_{01} / \psi_{ss}$ .

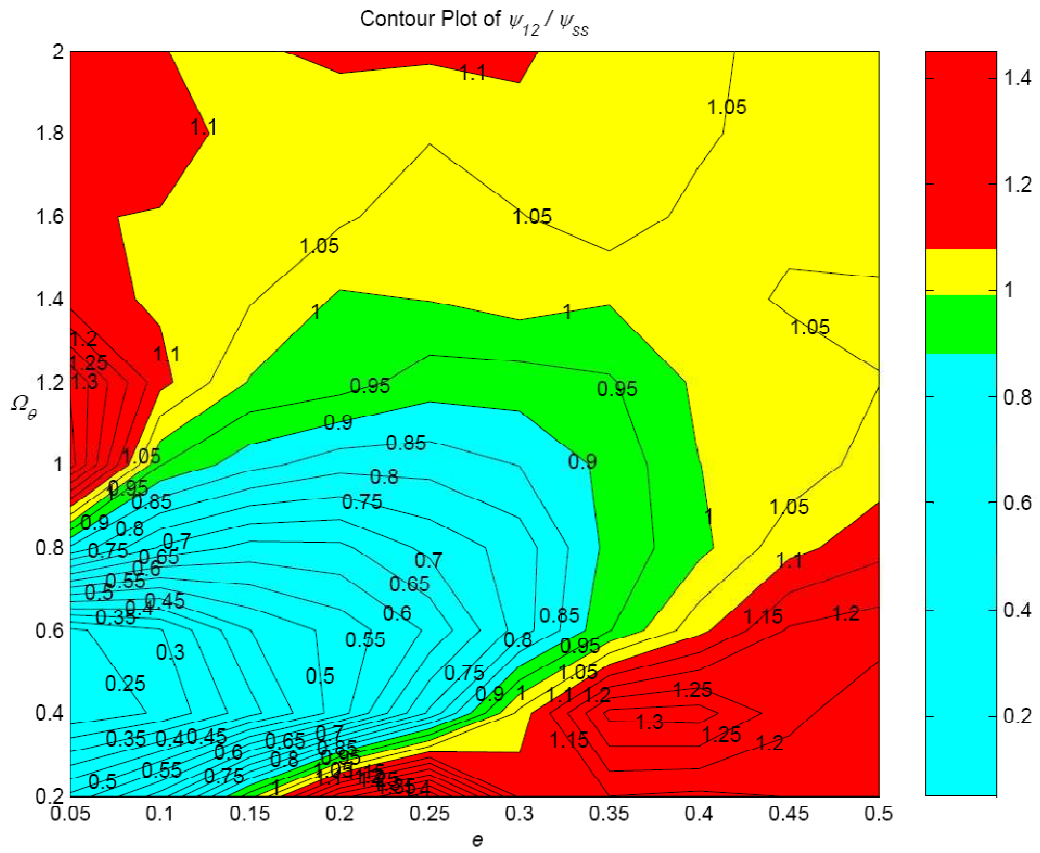


Fig. 8.48 Rapporto  $\psi_{12}/\psi_{ss}$

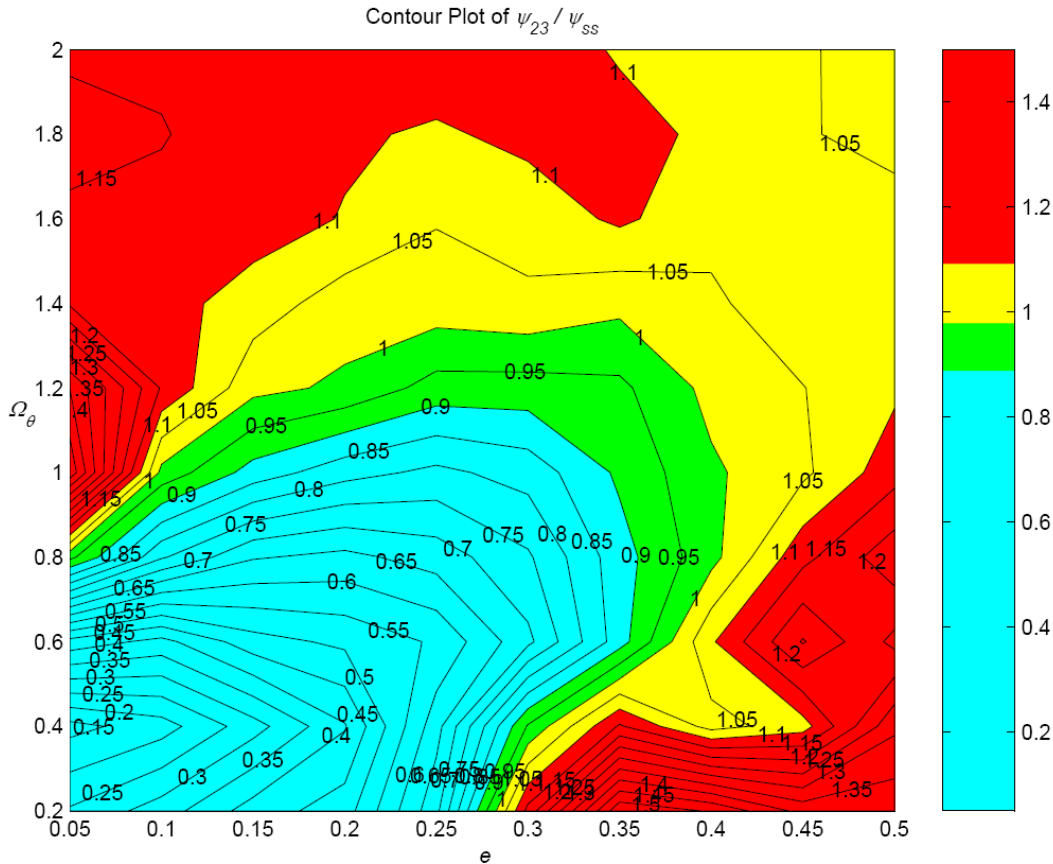


Fig. 8.49 Rapporto  $\psi_{23}/\psi_{ss}$

### 8.2.6 Riassunto dei risultati ottenuti

Lo studio di diverse tipologie di strutture multi storey (a due, tre e sei piani) ha portato all'elaborazione di un single storey equivalente che simuli il comportamento dell'*i*-esimo piano della struttura in esame. Il risultato più importante della presente ricerca è stato quello di aver individuato un modello unico che permette di rappresentare le strutture multi storey aventi piani identici o con variazioni di massa e rigidezza, avente:

- massa  $m_{ss}$  pari alla massa totale della struttura multi storey;
- rigidezza  $k_{ss}$  pari alla somma in serie delle rigidzze degli *n* piani della struttura;
- eccentricità relativa  $e_{ss}$  e parametro  $\Omega_{\theta,ss}$  pari a quelli dell'*i*-esimo piano.

$$m_{ss} = m_{tot} = \sum_{i=1}^n m_i$$

$$k_{ss} = k_{tot} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \right)^{-1}$$

$$e_{ss} = e_i$$

$$\Omega_{\vartheta,ss} = \Omega_{\vartheta i}$$

Non è stato invece possibile determinare un modello unico quando a variare sono l'eccentricità relativa  $e$  ed il parametro  $WJ$ ; in questi casi, infatti, il single storey ottenuto precedentemente non è in grado di cogliere il comportamento di tutti i piani della struttura.

Per una migliore comprensione si riportano i risultati numerici nelle tabelle 8.1 e 8.2, relative a strutture a due e tre piani.

Variazione	Primo Piano				Secondo Piano			
	$k_{ss}$	$m_{ss}$	$e_{ss}$	$\Omega_{\vartheta,ss}$	$k_{ss}$	$m_{ss}$	$e_{ss}$	$\Omega_{\vartheta,ss}$
/	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,02}$
$R_k = 0.5$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,02}$
$R_k = 2$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,02}$
$R_m = 0.5$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,02}$
$R_m = 2$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,02}$
$R_e = 2$	$k_{01}$	$m_{01}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{02}$	$m_{02}$	$e_{medio}$	$\Omega_{\vartheta,02}$
$R_{\Omega_{\vartheta}} = 0.5$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,02}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,02}$
$R_{\Omega_{\vartheta}} = 2$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{02}$	$m_{02}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,medio}$

Tab. 8.1 Risultati dei calcoli effettuati per una struttura a due piani

Variazione	Primo Piano				Secondo Piano			
	$k_{ss}$	$m_{ss}$	$e_{ss}$	$\Omega_{\vartheta,ss}$	$k_{ss}$	$m_{ss}$	$e_{ss}$	$\Omega_{\vartheta,ss}$
/	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,02}$
$R_{k,2} = 0.5$ $R_{k,3} = 0.3$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,02}$
$R_{k,2} = 2$ $R_{k,3} = 3$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,02}$
$R_{m,2} = 0.5$ $R_{m,3} = 0.3$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,02}$
$R_{m,2} = 2$ $R_{m,3} = 3$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,02}$
$R_{\Omega_{\vartheta},2} = 0.5$ $R_{\Omega_{\vartheta},3} = 0.3$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,03}$	$k_{02}$	$m_{02}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,03}$
$R_{\Omega_{\vartheta},2} = 2$ $R_{\Omega_{\vartheta},3} = 3$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{01}$	$\Omega_{\vartheta,01}$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,01}$

Variazione	Terzo Piano			
	$k_{ss}$	$m_{ss}$	$e_{ss}$	$\Omega_{\vartheta,ss}$
/	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{03}$	$\Omega_{\vartheta,03}$
$R_{k,2} = 0.5$ $R_{k,3} = 0.3$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{03}$	$\Omega_{\vartheta,03}$
$R_{k,2} = 2$ $R_{k,3} = 3$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{03}$	$\Omega_{\vartheta,03}$
$R_{m,2} = 0.5$ $R_{m,3} = 0.3$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{03}$	$\Omega_{\vartheta,03}$
$R_{m,2} = 2$ $R_{m,3} = 3$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{03}$	$\Omega_{\vartheta,03}$
$R_{\Omega_{\vartheta},2} = 0.5$ $R_{\Omega_{\vartheta},3} = 0.3$	$k_{03}$	$m_{03}$	$e_{03}$	$\Omega_{\vartheta,03}$
$R_{\Omega_{\vartheta},2} = 2$ $R_{\Omega_{\vartheta},3} = 3$	$k_{tot}$	$m_{tot}$	$e_{02}$	$\Omega_{\vartheta,01}$

Tab. 8.2 Risultati dei calcoli effettuati per una struttura a tre piani

### 8.3 Sviluppi futuri

In questa trattazione si sono studiate tre tipologie di strutture, ognuna con un differente numero di piani, al variare, tra i vari piani, dei parametri di rigidezza, massa, eccentricità e  $\Omega_{\theta}$ . Lo sviluppo di questa ricerca prevede di studiare in maniera più approfondita l'influenza della variazione di eccentricità sul comportamento dei diversi piani, soprattutto per le strutture a tre piani; inoltre è necessario completare lo studio sulle strutture a sei piani, integrandolo con analisi complete su strutture a quattro e cinque piani.

Lo studio dei grafici di  $R_{\psi}$  ottenuti nel caso di struttura a sei piani suggerisce di cercare una strada alternativa per cogliere il comportamento rotazionale di questa tipologia di strutture; questo traguardo è fondamentale, in quanto, nella realtà costruttiva, l'uso di strutture con un forte sviluppo in altezza, e quindi con un elevato numero di piani, è sempre più frequente.

Per ultimo sarà necessario estendere la ricerca per strutture multi piano anche in ambito non lineare, in cui i legami costitutivi degli elementi resistenti possono essere di tipo elastico-perfettamente plastico oppure elasto-plastici incrudenti.

## Considerazioni conclusive

## Bibliografia

Trombetti T., Conte J.P.

2005, *New Insight into and simplified approach to seismic analysis of torsionally coupled one-story, Elastic systems*, in “Journal of Sound and Vibration”, 286, 265-312.

Trombetti T., Silvestri S., Gasparini G., Pintucchi B., De Stefano M.

2008, *Numerical Verification of the Effectiveness of the “Alpha” method for the Estimation of the Maximum Rotational Elastic Response of Eccentric System*, in “Journal of Earthquake Engineering, 12:2, pp. 249-280.

Silvestri S., Trombetti T., Gasparini G.

2008, *An Upper Bound and an Estimation for the Maximum Non-Linear Rotational Response of One-Storey Asymmetric Buildings*, in “Seismic Behaviour of Irregular and Complex Structures”, pp. 51-62

Viola E.

1996, *Fondamenti di Analisi Matriciale delle Strutture*, Pitagora Editrice, Bologna

Orci C.

2009, *Risposta sismica torsionale di edifici irregolari in pianta*, Tesi di Laurea



