Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Triennale in Matematica

TAVOLE SEMANTICHE E CRITERI DI DECIDIBILITÁ

Tesi di Laurea in Logica Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Piero Plazzi

Presentata da:
Federica Guerra

Sessione II
Anno Accademico 2012/2013

Indice

Capitolo 1

Tavole semantiche nel linguaggio proposizionale

Le tavole semantiche o tableaux semantici, dovute a Beth e Hintikka, sono state introdotte come metodo di risposta alla domanda sulla verità logica di un enunciato o formula generica. Il pregio fondamentale di queste tavole sta nella facilità con cui tale metodo può essere trasformato in un semplice algoritmo. In realtà, per dimostrare la validità logica di un enunciato composto, può essere utilizzato anche il metodo della tavole di verità, consistente nel prendere in considerazione tutte le combinazioni possibili dei valori di verità. Questo però può risultare estremamente lungo e dispendioso, specialmente per enunciati complessi: per un enunciato composto da n enunciati atomici, è necessario esaminare 2^n casi di verità. Il metodo dei tableaux al contrario permette di velocizzare il procedimento attraverso la costruzione, non unica, della tabella stessa: esistono diverse strategie di calcolo e, talvolta, la scelta di una strategia su un'altra può consentire all'operatore la costruzione di una tavola più efficace e veloce.
A questo problema si può ricondurre il problema della conseguenza logica. Dato un insieme di enunciati $\{A_1, ..., A_n\} \cup \{B_1, ..., B_m\}$, diviso in due sottoinsiemi, ci si chiede se esiste un'interpretazione M tale che $M \models A_1, ..., M \models A_n$ e $M \not\models B_1, ..., M \not\models B_m$. Se la risposta è negativa, allora si ha

$$A_1 \wedge ... \wedge A_n \models B_1 \vee ... \vee B_m$$

mentre se è positiva

$$A_1 \wedge ... \wedge A_n \not\models B_1 \vee ... \vee B_m$$

Scopo delle tavole è determinare, dato un insieme finito o infinito di enunciati, l'esistenza di un'interpretazione che li soddisfi. Peculiarità del metodo è la ricerca del contro esempio: il problema della validità di una formula A si controfigura come ricerca di un'interpretazione che falsifichi la proposizione e viene affrontato mediante un procedimento che ad ogni passo riduca l'equazione iniziale in sistemi di equazioni sempre più semplici. Se al termine del processo è stata trovata una interpretazione che renda valida la negazione la proposizione è falsa, in caso contario è dimostrata l'impossibilità di trovarla e di conseguenza la proposizione è una tautologia.

Per iniziare si prenda in considerazione la seguente proposizione.

$$((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Longrightarrow \neg p$$

che si vuol dimostrare essere una tautologia.
Si osservi che le lettere maiuscole A,B,..., indicano enunciati generici, mentre le lettere minuscole p,q,...,enunciati atomici. La strategia è il ragionamento secondo l'interpretazione refutativa, in base alle definizione di $\Rightarrow$: si considera cioè vera la prima formula $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q$ e falsa $\neg p$.

Utilizzando la regola della negazione a destra, ovvero se $\neg p$ è falsa allora p è vera, si ottiene:

V	F
(1) $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q$ (3) p^*	$((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p^*$ (2)$\neg p^*$

Lavorando ora sulla proposizione $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q$ e applicando la regola per $\wedge$, cioè $A \wedge B$ è vera se A, B entrambe vere, si ha:

V	F
(1)$(p \Rightarrow q) \wedge \neg q*$ (3) p^* (4) $p \Rightarrow q$ (5) $\neg q$	$((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p^*$ (2) $\neg p^*$

Applicando poi la regola della negazione a sinistra, ovvero se $\neg q$ è vera, allora q è falsa risulta:

V	F
	$((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$*
(1) $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q$*	(2) $\neg p$*
(3) p*	
(4) $p \Rightarrow q$	
(5) $\neg q*$	
	(6) $q*$

Infine attraverso la regola per l'implicazione a sinistra, cioè se un'implicazione è vera allora o l'antecedente è falso o il conseguente è vero e si hanno due alternative, rappresentabili con le formule (7) e (8):

V	F
	$((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$*
(1)$(p \Rightarrow q) \wedge \neg q*$	(2)$\neg p$*
(3)p*	
(4)$p \Rightarrow q*$	
(5)$\neg q*$	
	(6)q*
	(7)p*
(8)q*	

Partendo dal presupposto che $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q$ sia vera e $\neg p$ falsa, ne viene che (2) e (6) si contraddicono con (5) e (7):è stata dimostrata l'insoddisfacibilità del contro esempio nonchè la validità logica dell'enunciato

$$(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Longrightarrow \neg p$$

Per la costruzione delle tavole semantiche è quindi importante conoscere le regole di calcolo e i casi in cui si può considerare finito il procedimento. Per comodità e semplicità la struttura delle tavole sarà composta da due colonne, V e F, nelle quali inizialmente si disporranno i diversi enunciati secondo la loro validità. Alcune regole di calcolo, come si evince dall'esempio, potranno spezzare la tavola in due sottotavole che permetteranno di considerare tutti i casi possibili dei valori di verità.

Definizione 1.1 (chiusura)**.** Una tavola o una sottotavola viene definita chiusa se ad uno stadio n esiste in essa uno stesso enunciato sia nella colonna V che nella colonna F.

Definizione 1.2 (termine di una tavola)**.** Una tavola si dice terminata se ogni enunciato è stato preso in considerazione, analizzato ed eventualmente modificato in base alle regole di calcolo e non è più possibile procedere.

1.1 Regole di calcolo

Nello sviluppo delle tavole semantiche solitamente si lavora con un numero piuttosto elevato di enunciati. Per chiarezza si contrassegnano nei vari passaggi gli enunciati già modificati e non più utili con un asterisco, in modo tale da avere sempre chiara la situazione della tavola.

Allo stadio n dello sviluppo, si considera il primo enunciato non asteriscato A e lo si analizza:

- Se A è una lettera proposizionale p, lo si asterisca senza cambiare la sua forma e si passa allo stadio *n+1*.
- Se A è della forma $\neg B$ ed è nella colonna V, lo si asterisca e si introduce B nella colonna F. Se, viceversa, A è della forma $\neg B$ ma è nella colonna F, lo si asterisca e si introduce B in V. (regola della negazione a sinistra e a destra)
- Se A è della forma $B \wedge C$ ed è in V, lo si asterisca e si introducono sia B che C in V, nel modo seguente:

V	F
$(n)B \wedge C$ $(n+1)B$ $(n+2)C$	

- In maniera analoga, se A è della forma $B \vee C$ ed è nella colonna F, lo si asterisca e si introducono sia B che C nella colonna F
- Se A è della forma $B \Rightarrow C$ ed è nella colonna F, lo si asterisca e si introduce B in V e C in F

V	F
$(n+1)B$	$(n)B \Rightarrow C$ $(n+2)C$

- Se A è della forma $B \wedge C$ ed è in F, lo si asterisca e si divide la tavola in due sottotavole, aventi entrambe le stesse due colonne e gli stessi enunciati marcati.
- Se A è della forma $B \vee C$ in V, lo si asterisca e si divide la tavola in due sottotavole sotto V, aventi in comune la colonna F e gli stessi enunciati marcati.

V		F
$(n) A \vee B$		
$(n+1) A$	B	

- Se A è della forma $B \Rightarrow C$ in V, lo si asterisca e si divide la tavola in due sottotavole: in una si aggiunge B in F, nell'altra si aggiunge C in V, come segue:

V		F	
$(n) B \Rightarrow C$			
$(n+1)$	C		B

Il metodo termina quando tutte le sottotavole sono chiuse o terminate.
In particolare, a un determinato stadio della costruzione della tavola, se ogni ramo della tavola risulta chiuso, la tavola risulterà chiusa e il procedimento può essere considerato concluso: il controesempio risulta insoddisfacibile e quindi A è una tautologia. Nel caso opposto, se ad ogni stadio della tavola vi è sempre un ramo aperto, allora per ogni ramo non chiuso esiste un'interpretazione che soddisfi l'enunciato (cioè il controesempio), dunque A non è tautologia.
Trattandosi di un algoritmo, il primo problema che si presenta è proprio quella terminazione. Il seguente toerema permetterà di essere certi di una fine del processo e conseguentemente di poter arrivare ad una risposta.

Teorema 1.1.1 (Terminazione)**.**
Il metodo delle tavole semantiche, applicato a insiemi finiti di proposizioni termina sempre in un numero finito di passi.

Dimostrazione. Si consideri altezza di una proposizione il numero dei connettivi presenti nella proposizione stessa. Se ad ogni stadio si lavora su una proposizione che ha altezza massima n tra quelle non ancora considerate, l'applicazione delle regole fa sì che dopo un numero finito di passi tutte le proposizioni con altezza n siano state considerate, e l'altezza massima di quelle non ancora prese in considerazione sia quindi $< n$.

Anche se nel corso del procedimento il numero di proposizioni nelle varie colonne cresce, diminuisce quello delle proposizioni di altezza massima, e dopo un numero finito di passi ci saranno solo proposizioni senza connettivi, non ancora considerate, e a quel punto il processo termina, se non è terminato prima per la chiusura della tavola. □

Attraverso questo teorema ci si assicura una fine per l'algoritmo, per quanto riguarda il caso del linguaggio proposizionale, e dunque si può definire il metodo delle tavole semantiche come un metodo di decisione che porta sempre ad una risposta corretta in un numero finito di passi. Si tratta inoltre di un algoritmo basato esclusivamente sulla struttura sintattica, anche se espresso con terminologie semantiche: la risposta corretta si evince dalla struttura della tavola.
Ora, ricordando che A è una tautologia se e solo se $\neg A$ è insoddisfacibile, ci si può porre come problema sintattico sia quello della verità logica che quello dell'insoddisfacibilità.

Teorema 1.1.2 (completezza).
Per ogni sottotavola terminata e non chiusa, esiste un'interpretazione v tale che, $v(A) = 1$ *per ogni A che occorre nella colonna V, e* $v(B) = 0$ *per ogni B che occorre nella colonna F. (In altri termini il contro esempio può essere vero e la proposizione iniziale non è logicamente valida)*

Dimostrazione. Si ponga $v(A) = 1$ se A è nella colonna V e $v(A) = 0$ se A è nella colonna F, se e solo se A è una proposizione atomica: se la sottotavola non è chiusa ciò non è ambiguo.

Ciò che si deve dimostrare è che per ogni A della tavola, se A occorre in V, allora $v(A) = 1$, mentre se A occorre in F risulta $v(A) = 0$.

Si proceda per induzione sull'altezza delle proposizioni A.

- Se A è una lettera, l'affermazione è vera per come è stata definita v.
- Se A è $\neg B$ nella colonna V, siccome la tavola è terminata, B sarà in F. Per ipotesi induttiva allora $v(B) = 0$ e dunque $v(\neg B) = 1$. In maniera analoga se $\neg B$ era nella colonna F, durante il procedimento è stato inserito in V. Dunque, per ipotesi induttiva, $v(B) = 1$ e $v(\neg B) = 0$.
- Se A è $B \wedge C$ ed è in V, quando è stata analizzata sono stati inseriti sia B che C in V, dunque per ipotesi induttiva si ha $v(B) = 1$ e $v(C) = 1$ e quindi $v(A) = 1$. Analogamente si procede nel caso in cui A è della forma $B \vee C$ in F, e ne verrà $v(A) = 0$.

Se A è invece della forma $B \wedge C$ ed è nella colonna F, sono state prodotte due sottotavole, una con B in F e l'altra con C in F. Nel caso in cui B compaia nella nostra sottotavola per ipotesi induttiva $v(B) = 0$ e quindi $v(A) = 0$, analogamente per C

Il ragionamento è il medesimo per A della forma $B \vee C$ nella colonna V. Il caso dell'implicazione si riduce ai precedenti.

□

In particolare, la proposizione permette di arrivare ad una conclusione immediata al momento in cui la tavola sia terminata e non chiusa. È supportata inoltre dal seguente teorema, che dimostra la correttezza del metodo:

Teorema 1.1.3 (correttezza).
Se esiste un'interpretazione v che soddisfa le condizioni iniziali la tavola non si chiude, perché ad ogni stadio si verifica, per almeno una delle sottotavole generate, $v(A) = 1$ per ogni A che occorre in V e $v(B) = 0$, per ogni B che occorre in F.

Dimostrazione. Si proceda per induzione sul numero dei passi svolti.

Al passo 0 la condizione per v è soddisfatta per ipotesi dalla tavola iniziale.

Supposto che al passo n ci sia almeno una sottotavola non chiusa, se al passo $n + 1$ la proposizione A su cui si sta lavorando è una lettera non vi sono cambiamenti e la tavola stessa continua a soddisfare le condizioni del lemma, ovvero non è chiusa.

Se A è invece della forma $\neg B$ ed è nella colonna V, per ipotesi induttiva si ha $v(\neg B) = 1$ e di conseguenza $v(B) = 0$.

La nuova tavola, con B nella colonna F, continua a soddisfare le ipotesi del lemma. Analogamente si procede per A della forma $\neg B$ all'interno della colonna F.

Se A è $B \wedge C$ ed è in V, per ipotesi induttiva $v(B \wedge C) = 1$, cioè $v(B) = 1 = v(C)$ e la nuova tavola continua a soddisfare le condizioni del teorema. Se $B \wedge C$ è in F, una delle due sottotavole ha ad esempio B in F e soddisfa la richiesta del teorema. Lo stesso ragionamento si applica per la disgiunzione e l'implicazione.

□

La ricerca della risposta attraverso il metodo dei tableaux, può avvenire in modi differenti. I due teoremi analizzati precedentemente possono essere espressi anche attraverso il seguente lemma:

la proposizione di partenza della tavola è insoddisfacibile se (e solo se) la tavola si chiude.

L'esito complessivo dei teoremi di completezza e correttezza porta ad affermare che il metodo delle tavole semantiche è un algoritmo completo e consistente : esso prende in considerazione tutte le possibili strade per provare a definire interpretazioni, se ce ne sono le fornisce tutte, altrimenti rivela la loro non presenza.

Si osservi inoltre che le varie dimostrazioni dei teoremi di completezza e correttezza non prendono in considerazione l'ordine delle proposizioni da esaminare. Il procedimento delle tavole di verità si può rendere deterministico fissando un ordine progressivo per le proposizioni introdotte ma il fatto che le stesse dimostrazioni sono indipendenti da esso porta ad affermare che l'algoritmo e le conclusioni ad esso associate non sono collegati all'ordine dell'aplicazione delle regole di calcolo. Analizzare una proposizione prima di un'altra cambia l'aspetto della tavola ma non la risposta: ogni modifica infatti dipende solo dalla proposizione in sé e non dalle precedenti.

Esempio 1.1

Si vuole vedere se

$$(p \vee r) \Rightarrow (\neg p \wedge (q \Rightarrow r))$$

è una tautologia. Alla ricerca di un controesempio si inserisce l'enunciato nella colonna F e si applica la regola per l'implicazione falsa

V	F
	$(p \vee r) \Rightarrow (\neg p \wedge (q \Rightarrow r))*$
$(1)p \vee r$	$(2)\neg p \wedge (q \Rightarrow r)$

Lavorando poi su $\neg p \wedge (q \Rightarrow r)$ e applicando la regola per $\wedge$ in F ne viene:

V	F	
	$(p \vee r) \Rightarrow (\neg p \wedge (q \Rightarrow r))*$	
$(1)p \vee r$	$(2)\neg p \wedge (q \Rightarrow r)*$	
	$(3)\neg p$	$q \Rightarrow r$

Analizzando $\neg p$ e $q \Rightarrow r$ risulta:

V	F	
	$(p \vee r) \Rightarrow (\neg p \wedge (q \Rightarrow r))*$	
$(1)p \vee r$	$(2)\neg p \wedge (q \Rightarrow r)*$	
	$(3)\neg p*$	$(q \Rightarrow r)*$
$(4)p*$		$r*$
$(5)q*$		

Infine, applicando la regola della disgiunzione nella colonna V:

V		F	
		$(p \vee r) \Rightarrow (\neg p \wedge (q \Rightarrow r))*$	
$(1) p \vee r*$		$(2) \neg p \wedge (q \Rightarrow r)*$	
		$(3) \neg p*$	$(q \Rightarrow r)*$
$(4) p*$			$r*$
$(5) q*$			
$(6) p*$	$r*$		

La tavola non si chiude per p, dunque esiste un'interpretazione che soddisfa la negazione, di conseguenza

$$p \vee r \Rightarrow \neg p \wedge (q \Rightarrow r)$$

non è una tautologia.(Se p è in V l'implicazione è falsa)

La presentazione della tavola nella forma di una tabella con due colonne, una contrassegnata con V e l'altra con F non è essenziale. Una rappresentazione alternativa è quella data dalla struttura ad albero, denominato anche albero di refutazione (per la terminologia si rimanda a [6] e al capitolo 2). La struttura ad albero è composta dalla radice, che è la proposizione iniziale di cui si cerca un'interpretazione, e da etichette, o nodi, che rappresentano le varie proposizioni. La sua costruzione è analoga a quella della tabella, quindi le regole di calcolo sono le medesime: quando si applica una regola si aggiunge semplicemente un ramo o due.

Esempio 1.2

Si vuole analizzare la seguente proposizione:

$$(\neg p \vee q) \wedge p \Longrightarrow q$$

dunque si cerca un'interpretazione che soddisfi la negazione:

$$\neg((\neg p \vee q) \wedge p \Longrightarrow q)$$

La proposizione si inserisce alla radice dell'albero con V e via via che si applicano le regole di calcolo viste si creano nuovi rami

$$\neg((\neg p \vee q) \wedge p \Longrightarrow q)* \ [V], (\neg p \vee q) \wedge p \Rightarrow q* \ [F]$$
$$\downarrow$$
$$(\neg p \vee q) \wedge p \, [V], q* \ [F] \, (B)$$
$$\downarrow$$
$$\neg q \, [V]$$

Lavorando su $(\neg p \vee q) \wedge p$ e tralasciando gli enunciati già asteriscati si ottiene:

$$(\neg p \vee q) \wedge p* \ [V]$$
$$\downarrow$$
$$\neg q \, [V] \, (C)$$
$$\downarrow$$
$$\neg p \vee q \, [V]$$
$$\downarrow$$
$$p* \ [V] \, (A)$$

Successivamente, lavorando su $\neg q$ senza alcuna modifica e poi su $\neg p \vee q$ ne viene, richiamando parti precedenti:

$$\neg p \vee q* \ [V]$$
$$\downarrow$$
$$p* \ [V] \, (A)$$
$$\downarrow$$
$$q* \ [F] \, (B)$$
$$\swarrow \quad \searrow$$
$$\neg p \, [V] \qquad q \, [V]$$
$$p* \ [F] \circledcirc \qquad \circledcirc$$

Sarebbe inutile prendere in considerazione le lettere non negate: l'albero risulta essere chiuso poichè su un ramo sono presenti p e $\neg p$ entrambi veri e sull'altro q e $\neg q$ entrambi veri.(Si veda (A), (B), (C))

Per quanto osservato precedentemente si conclude che la proposizione iniziale non è soddisfacibile e dunque $(\neg p \vee q) \wedge p \Longrightarrow q$ è tautologia.

Lo stesso risultato si trova utilizzando il modello a tabella. Volendo dimostrare che $(\neg p \vee q) \wedge p \Longrightarrow q$ è una tautologia si considera la negazione $\neg((\neg p \vee q) \wedge p \Longrightarrow q$ e si pone che sia vera.

V		F
(1)$\neg((\neg p \vee q) \wedge p \Longrightarrow q*$		(2)$(\neg p \vee q) \wedge p \Longrightarrow q*$
(3)$(\neg p \vee q) \wedge p*$		
		(4) q^*
(5) p^*		
(6)$\neg p \vee q*$		
(7)$\neg p*$	$q*$	
		(8) p^*

Il metodo delle tavole semantiche non si limita a dimostrare esclusivamente se una certa proposizione è una tautologia o meno, ma indica i casi in cui un determinato enunciato è soddisfacibile o insoddisfacibile. In altre parole, l'algoritmo mantiene tutte le informazioni essenziali che si ricaverebbero con le tavole di verità e raggiunge la conclusione in tempi più brevi.

Esempio 1.3

Si vuole dimostrare la soddisfacibilità dell'enunciato

$$p \wedge [(\neg q) \vee (\neg p)]$$

Applicando il metodo delle tavole semantiche con la rappresentazione ad albero risulta:

$$
\begin{array}{c}
p \wedge [(\neg q) \vee (\neg p)] * \ [V] \\
\downarrow \\
p * \ [V] \\
\downarrow \\
(\neg q) \vee (\neg p) * \ [V] \\
\swarrow \searrow \\
p * \ [F] \circledcirc \qquad q * \ [F]
\end{array}
$$

L'albero rimane aperto, se q è in F, in quanto il ramo di destra è aperto e terminato. Non solo, si possono estrapolare alcune informazioni importanti: se p vero e q falso, la proposizione iniziale è soddisfatta, di conseguenza non è insoddisfacibile.
Inoltre nel caso in cui p sia falso, si può concludere immediatamente che è falsa l'intera proposizione, senza dover andare a considerare ulteriori valori di verità. In maniera analoga si raggiunge lo stesso risultato partendo da $p \wedge [(\neg q) \vee (\neg p)]$ $[F]$ col metodo del controesempio, o attraverso le rappresentazioni a tabella.

1.2 Perchè le tavole semantiche

Charles Sanders Pierce (1839-1914), in "Pensiero e scrittura"(vedi [5]) scrisse:

"Le due parole logica e ragione hanno origine da due opposte concezioni della natura del pensiero. Logica, da lògos*, significa parola, mentre ragione incorpora l'idea greca che il ragionamento non possa venir portato avanti senza il linguaggio. Ragione, dal latino* ratio*, che in origine indica un conto, implica che il ragionamento sia una questione di computazione, che richiede non parole, bensì qualche tipo di diagramma o abaco o figura. La logica formale moderna, specialmente la logica dei relativi, mostra che la concezione greca è sostanzialmente erronea, e che quella romana è sostanzialmente corretta. Le parole, sebbene indubitabilmente necessarie al pensiero già sviluppato, giocano un ruolo solo secondario nel processo, mentre il diagramma o icona, che può venir manipolato e sul quale si possono fare esperimenti, è importantissimo. I diagrammi sono stati sempre usati, in logica, fin dai tempi di Aristotele e nessun ragionamento complicato può venir eseguito senza loro. [...]*
Tutto il ragionamento è sperimentazione e tutta la sperimentazione è ragionamento. Se le cose stanno così, la conclusione per la filosofia è importantissima, vale a dire che davvero non esiste ragionamento che non abbia la natura del ragionamento diagrammatico o matematico, e dunque non dobbiamo ammettere alcun concetto che non sia suscettibile di venire rappresentato in forma diagrammatica. [...] il buon ragionamento ha a che fare con forti immagini visive. Le idee auditive sono la fonte della maggior parte del pensiero scorretto."

La risposta al quesito "Perchè le tavole semantiche" è proprio racchiusa nello scritto di Pierce.

La relazione che collega il diagramma alla matematica è iconica: l'icona è costituita proprio dal diagramma e trasmette una caratteristica generale, pur essendo un soggetto individuale e osservabile, un elemento sul quale i matematici e gli studenti possono operare per elaborare e ottenere ulteriori caratteristiche del diagramma stesso.

Nel caso in esame, ovvero per determinare la validità logica di un enunciato, vi sono due tipi di diagrammi differenti: le tavole di verità e le tavole semantiche.
E' importante osservare che entrambi i metodi raggiungono lo stesso risultato: a questo punto ci si può domandare il motivo per cui si è voluto trovare un metodo diverso quando già si possedeva quello delle tavole di verità.

Lo scopo delle tavole semantiche non è solo la possibilità di arrivare ad un risultato, che nel caso proposizionale sarà certo, piuttosto garantire l'efficacia del procedimento in maniera computazionalmente efficiente e didatticamente più efficace (meno complicato): si veda la scelta in [2].
Si prenda come esempio il seguente enunciato che si vuole provare insoddisfacibile:

$$p \wedge [(\neg q) \vee (\neg p)]$$

Attraverso le tavole di verità risulta:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	$p \wedge [(\neg q) \vee (\neg p)]$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F

Il metodo consente di affermare dopo alcuni passaggi che la proposizione non è insoddisfacibile. Non solo, è possibile anche stabilire il perchè: se p è vero e q è falso, l'enunciato è soddisfacibile.
Applicando il metodo delle tavole semantiche il risultato è il seguente:(si veda anche esempio 1.3)

V		F
(1)$p \wedge [(\neg q) \vee (\neg p)]$*		
(2)p*		
(3)$(\neg q) \vee (\neg p)$*		
(4)$(\neg q)$	(5)$(\neg p)$*	
		(6)p*
		(7)q*

La tavola non si chiude, perciò l'enunciato di partenza considerato vero è soddisfacibile. in particolare, l'attribuzione dei valori di verità da assegnare affinchè sia valido è piuttosto chiara: se $\neg q$ e p sono entrambi veri, l'intera proposizione è vera.
La scelta dunque del metodo delle tavole semantiche non ha comportato la perdita di informazioni, piuttosto si è arrivati ad un risultato più velocemente.

L'esempio riportato non mostra esplicitamente la conquista di velocità, perciò si consideri il seguente:

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee q$$

Si supponga di voler verificare che è una tautologia: ciò significa che nel metodo del tableaux verrà inserito nella colonna F per tentare di ottenere un controesempio.

Tavola semantica

V	F	
	$(1)(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee q*$	
	$(2)(p \wedge q)*$	
	$(3)\neg p \wedge q*$	
	$(4)q*$	
	$(5)p*$	$q*$
	$(6)\neg p*$	
$(7)p*$		

La tavola è evidentemente aperta: si riesce a determinare con semplicità che le interpretazioni che verificano la tavola, e quindi la negazione, sono p e q entrambe false e p vera e q falsa. Le valutazioni compiute sono state sette, contro le ventotto del caso delle tavole consuete.

Tavola di verità

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee q$
V	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	F	F

Attraverso ventotto valutazioni si può concludere che l'enunciato non è una tautologia: nel caso in cui p sia vero e q falso, oppure entrambi falsi, la proposizione non è soddisfacibile.

Dunque, nel caso della logica proposizionale, si può considerare il metodo delle tavole semantiche come un procedimento valido per confutare un enunciato composto, o analogamente per dimostrare che è una tautologia, ed esso risulta assai più agile rispetto al metodo delle tavole di verità.

Nonostante attraverso il metodo dei tableaux non si perdano informazioni sui valori da attribuire alle singole lettere per far risultare l'intera proposizione vera o falsa, non è possibile dire lo stesso per gli enunciati composti.

Nell'esempio visto sopra si riesce a determinare dal diagramma stesso che per certi valori di p e q la tavola risulta vera (rispettivamente falsa), ma non si evince nulla, ad esempio, dei valori di verità dell'enunciato $(p \wedge q)$. Quindi non è possibile esaminare i valori di verità in generale degli enunciati composti al variare dei valori dei componenti: per condurre un simile esame è necessario affidarsi alle tabelle di verità.(vedi [2])

Capitolo 2

Tavole semantiche in un linguaggio predicativo

Il metodo delle tavole semantiche si estende ai quantificatori ed è quindi utilizzabile anche nel caso di un linguaggio predicativo. Per la logica predicativa però non esiste un risultato di terminazione della tavola: le regole relative ai quantificatori in genere non fanno diminuire il numero dei simboli logici.
Nel 1936 Church dimostrò che il linguaggio predicativo non è decidibile nel suo complesso, ma solo in parti di esso:

l'insieme delle formule valide è ricorsivamente indecidibile.

La logica predicativa del primo ordine è soltanto semidecidibile e quindi non è possibile progettare un algoritmo che, presa in ingresso una formula A, termini sempre stabilendo se A è una verità logica o meno. Il calcolo procede secondo una base di semidecisione: se la formula in ingresso è logicamente valida sarà sempre possibile appurarlo in modo meccanico in tempo finito, in caso contrario solo in alcuni casi si riuscirà ad arrivare ad una conclusione.
Nel paragrafo successivo (2.2) verranno esaminati i casi in cui il metodo dei tableaux termina sempre in un numero finito di passi, come ad esempio per gli enunciati universali, esistenziali, enunciati semplici privi di simboli funzionali e linguaggio monadico. In generale le problematiche di decidibilità della logica predicativa si proiettano inevitabilmente nell'algoritmo, non garantendo in questo modo una risposta in tempo finito alla domanda di validità o insoddisfacibilità di un enunciato generico. Per risolvere alcuni aspetti di non terminazione, creati sia dai quantificatori che dai simboli funzionali, è importante introdurre il concetto di alberi e alberi infiniti.

Nel seguito si utilizzeranno per i termini *grafo, albero (orientato), albero binario, nodo(nodo padre, nodo figlio, radice, foglie), ramo e cammino*, le definizioni di [6].

Definizione 2.1. Un albero di dice finitario se ha ogni nodo al più un numero finito di figli

Definizione 2.2 (Nodo prolungabile)**.** Un nodo è prolungabile se tra i cammini finiti che passano per esso ce ne sono di arbitrariamente lunghi.

Già nel caso proposizionale erano stati utilizzati gli alberi binari di refutazione come rappresentazione alternativa delle tavole semantiche. E' importante però ricordare la definizione di chiusura di un albero, che differisce da quella della tabella.

Definizione 2.3 (Chiusura di un albero)**.** Un albero si dice chiuso se su uno stesso cammino compare una lettera e la sua negazione.

Analogamente alla rappresentazione a tabella invece, un albero è terminato se ogni nodo è stato preso in esame ed eventualmente prolungato secondo le regole di calcolo.
Per quanto riguarda le tavole semantiche della logica predicativa, è utile considerare l'albero di tutte le sottotavole generate nello sviluppo di una tavola: la radice sarà proprio la tavola iniziale e ogni nodo verrà etichettato con una tavola generata dall'applicazione di una regola. In particolare, se si tratta di una tavola chiusa questa non avrà alcun figlio, negli altri casi invece uno o due, a seconda della regola applicata.

Teorema 2.0.1 (Lemma di König)**.**
Se un albero finitario ha rami finiti arbitrariamente lunghi, allora ha un ramo infinito.

Dimostrazione. Ragionando per induzione, si considerino i cammini come descritti da funzioni f, tali che $f(0)$ è l'etichetta della radice, e per ogni $m+1$ nel dominio di f, $f(m+1)$ è l'etichetta di un figlio $f(m)$.
Si considerino i nodi prolungabili: $f(0)$, la radice, è per definizione un nodo prolungabile. Per ipotesi induttiva se $f(m)$ è l'etichetta di un nodo prolungabile, questo nodo ha almeno un figlio, altrimenti non sarebbe prolungabile. Tra tutti i suoi figli almeno uno è prolungabile poichè altrimenti, se per ogni figlio esistesse un confine superiore alla lunghezza dei cammini che passano per quel nodo, esisterebbe anche un confine superiore alla lunghezza dei cammini che passano per il genitore. Si definisca allora $f(m+1)$ come l'etichetta di uno di questi figli prolungabili. Si ha allora un cammino di lunghezza infinita. □

Introducendo questi alberi si verifica facilmente che un albero costituito da sottotavole, di un processo che non ha termine, ha rami finiti arbitrariamente lunghi e quindi vi è almeno una tavola infinita. È abbastanza ovvio affermare che una tavola infinita non è chiusa: se ci fosse in essa uno stesso enunciato sia in V che in F allora si sarebbe chiusa ad un certo stadio n finito.

2.1 Regole di calcolo

Diverse parti delle regole di calcolo e di conseguenza dell'algoritmo stesso riproducono fedelmente l'algoritmo nel caso proposizionale. La costruzione della tavola semantica per i connettivi $\vee$,$\wedge$, $\Longrightarrow$ è quindi la stessa analizzata nel caso proposizionale: l'unica differenza sostanziale è l'introduzione di regole per i quantificatori.

Si supponga di inizializzare la tavola con enunciati (fbf chiuse).

- Se A è della forma $\exists x B$,ed è nella colonna V, lo si asterisca, si aggiunge al linguaggio una costante c e si introduce $B[x/c]$ nella colonna V
- Se A è della forma $\forall x B$ ed è nella colonna F, lo si asterisca, si aggiunge una nuova costante c e si introduce $B[x/c]$ in F
- Se A è invece della forma $\forall x B$ ed è in V, lo si asterisca, si introducono in V tutti gli enunciati $B[x/t]$ che già non compaiono in V, per ogni termine e sottotermine t chiuso che occorra in qualche enunciato della tavola sviluppata sino a quel punto. Infine si aggiunge di nuovo, all'ultimo posto, $\forall x B$ in V
- Se A è della forma $\exists x B$, ed è in F, lo si asterisca, si introducono in F tutti gli enunciati $B[x/t]$, per ogni termine e sottotermine t chiuso che occorra in qualche enunciato sviluppato precedentemente ed infine si aggiunge, all'ultimo posto, $\exists x B$ in F.

Per le ultime due regole descritte si ha la garanzia che se t è un qualunque termine chiuso presente in un enunciato della tavola, e $\forall x B$ è in V (o analogamente $\exists x B$ in F) allora, a meno che la tavola non si chiuda prima, vi è uno stadio in cui anche $B[x/t]$ è in V.
Inoltre che se a un certo stadio le uniche regole applicabili sono queste ultime due e se tutti gli enunciati sono già stati sostituiti, allora si asteriscono semplicemente e il procedimento termina. Nel caso in cui ci si trovi di fronte ad una tavola che si prolunga indefinitamente, con l'accorgimento di applicare

per prime le regole "problematiche" per i quantificatori ($\exists xB$ in F e $\forall xB$ in V), si può fare in modo che ogni enunciato inserito via via nella tavola venga asteriscato. Difatti, applicate queste ultime due all'inizio e successivamente le regole proposizionali e quelle per i quantificatori che permettono di abbassare le altezze degli enunciati, si arriva ad un bivio immediato: o la tavola si chiude (ma non sarebbe soddisfatta la condizione sulla radice) oppure la tavola termina.

Teorema 2.1.1 (Correttezza).
Se esiste un'interpretazione M che soddisfa le condizioni iniziali, allora la tavola non si chiude, perché ad ogni stadio l'interpretazione M può essere arricchita in modo tale che per almeno una delle sottotavole generate, M soddisfi tutti gli enunciati della colonna V e nessuno di quelli della colonna F della sottotavola.

Dimostrazione. Si procede come nel caso proposizionale, salvo sostituire M al posto di v; non si considerano più le regole proposizionali.
M per ipotesi soddisfa la tavola inizializzata; se allo stadio n si applica (in una sottotavola per cui vale l'ipotesi induttiva) la regola per $\exists$ in V, ad esempio $\exists xB$, per ipotesi induttiva si ha $M \models \exists xB$. Per una qualunque σ, che soddisfa $\exists xB$, esiste una x-variante σ' che soddisfa B. Si introduce una costante c si definisce $c^M = \sigma'(x)$, allora σ' soddisfa anche $B[x/c]$, e $M \models B[x/c]$.
Per la regola $\forall$ in F il ragionamento è del tutto analogo. Se si applica la regola $\forall$ in V, allora M è già stata arricchita in modo che ogni termine chiuso t presente nella tavola fino a quello stadio ha una interpretazione t^M: $M \models B[x/t]$ per ogni termine chiuso t. Analogamente per $\exists$ in F. □

Anche nel caso predicativo, se un tableaux con radice $\neg A$ è chiuso, allora A è tautologia. Viceversa, se la tavola non si chiude, si può definire un'interpretazione che soddisfa condizioni iniziali.

Teorema 2.1.2 (Completezza).
Per ogni tavola terminata e non chiusa, finita, e per ogni tavola infinita in cui ogni enunciato sia stato asteriscato e quindi preso in considerazione, esiste un'interpretazione M che soddisfi le condizioni iniziali.

Dimostrazione. Si veda [1] pag. 142. L'insieme M, sostegno della struttura è l'insieme dei termini chiusi occorrenti in qualcuno degli enunciati presenti nella tavola. Per ogni costante c, si ponga $c^M = c$. Per ogni simbolo funzionale F^M, si definisca

$$F^M(t_1, ..., t_m) = Ft_1...t_m$$

per ogni $t_1, ..., t_m \in M$.
Con questa definizione, si vede subito che per ogni termine chiuso t, se $t \in M$ allora $t^M = t$. Per ogni simbolo relazionale R a n argomenti, e per ogni $t_1, ..., t_n \in M$, si ponga per definizione

$$< t_1, ..., t_n > \in R^M$$

se e solo se $Rt_1, ..., t_n$ è nella colonna V. Si dimostra ora che per ogni enunciato A presente nella tavola,

$$M \models A$$

se e solo se A è in V, da cui segue la conclusione voluta.
La verifica di questa proprietà è simile a quella da effettuare per il teorema del modello (si veda [1], cap. 8). Occorre procedere per induzione sulla lunghezza della formula, il che richiede di considerare fbf non chiuse. □

I teoremi di correttezza e di completezza mostrano che il metodo delle tavole semantiche è una procedura di semidecisione per l'insoddisfacibilità (e analogamente la validità) degli enunciati della logica predicativa. Ciò significa che se un certo enunciato è soddisfacibile, l'algoritmo si fermerà di certo chiudendo la tavola opportunamente inizializzata. In caso contrario invece può terminare o meno. (si veda esempio 2.3)
Alla luce anche del teorema di Church precedentemente accennato (si veda inizio capitolo 2) si può concludere che il metodo delle tavole semantiche è quanto meglio si possa ottenere per determinare la validità logica o meno di un enunciato nel linguaggio predicativo.

Esempio 2.1 (si veda [4])

Si vuole dimostrare che l'enunciato

$$\exists x Px \wedge \exists x Qx \Rightarrow \exists x(Px \wedge Qx)$$

non è logicamente valido.
Procedendo per refutazione si vuole provare che sia soddisfacibile la negazione, quindi si inserisce $\exists x Px \wedge \exists x Qx$ nella colonna V e $\exists x(Px \wedge Qx)$ nella colonna F. Applicando poi la regola di $\wedge$ in V, risulta:

V	F
$(1)\exists x Px \wedge \exists x Qx$ * $(3)\exists x Px$* $(4)\exists x Qx$*	$(2)\exists x(Px \wedge Qx)$*

Si applichi ora la regola di $\exists$ in V : siccome si hanno P e Q diversi, si dovranno aggiungere due costanti diverse c e d:

V	F
$(1)\exists xPx \wedge \exists xQx$*	$(2)\exists x(Px \wedge Qx)$*
$(3)\exists xPx$*	
$(4)\exists xQx$*	
$(5)Pc$*	
$(6)Qd$*	

Passando poi ad operare sulla colonna F, si utilizza la regola di $\exists$ in F, sostituendo con le costanti c e d:

<table>
<tr><th>V</th><th colspan="3">F</th></tr>
<tr><td>$(1)\exists xPx \wedge \exists xQx$*</td><td colspan="3">$(2)\exists x(Px \wedge Qx)$*</td></tr>
<tr><td>$(3)\exists xPx$*</td><td colspan="3">$(7)Pc \wedge Qc$*</td></tr>
<tr><td>$(4)\exists xQx$*</td><td>$(8)Pc$*</td><td colspan="2">$(9)Qc$*</td></tr>
<tr><td>$(5)Pc$*</td><td></td><td colspan="2">$(10)Pd \wedge Qd$*</td></tr>
<tr><td>$(6)Qd$*</td><td></td><td>$(11)Pd$*</td><td>$(12)Qd$*</td></tr>
</table>

Ora, la prima sottotavola è chiusa in quanto Pc compare sia nella colonna V che nella colonna F. L'ultima sottotavola si chiude in quanto Qd è sia in V che in F. Solo la sottotavola centrale non si chiude per Pd. Ciò significa che esiste un'interpretazione che soddisfa le ipotesi: $M = \{c, d\}, P^M = \{c\}, Q^M = \{d\}$) e quindi la negazione dell'enunciato di partenza è vera. Si conclude che

$$\exists xPx \wedge \exists xQx \Rightarrow \exists x(Px \wedge Qx)$$

non è logicamente valido.

Esempio 2.2(si veda [4])

La rappresentazione con tavole è equivalente, come prima, a una con alberi. Per mostrare che

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(\neg Q(x) \Rightarrow P(x)) \wedge \exists x\neg Q(x)$$

non è logicamente valido, lo si ponga alla radice dell'albero: se l'albero si chiude allora effettivamente l'enunciato non è logicamente valido, in caso contrario si riuscirà (forse) a trovare un'interpretazione che lo verifichi.
Si cominci applicando la regola per $\wedge$.

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(\neg Q(x) \Rightarrow P(x)) \wedge \exists x \neg Q(x) * [V]$$
$$\downarrow$$
$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))\ [V], \forall x(\neg Q(x) \Rightarrow P(x))[V], \exists x \neg Q(x)[V]$$

Analizzando ora $(\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(\neg Q(x) \Rightarrow P(x)))$ e applicando nuovamente la regola per $\wedge$ (come nel caso proposizionale, per ottimizzare gli spazi, verrano trascritti soltanto gli enunciati non ancora asteriscati)si ottiene:

$$\exists x \neg Q(x)[V]$$
$$\downarrow$$
$$(A)\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(\neg Q(x) \Rightarrow P(x)) * [V]$$
$$\downarrow$$
$$(B)\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)[V]$$
$$\downarrow$$
$$\forall x(\neg Q(x) \Rightarrow P(x))[V]$$

Applicando poi la regola $\exists$ in V nell'enunciato $\exists x \neg Q(x)$, si introduce a come costante:

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))[V], \forall x(\neg Q(x) \Rightarrow P(x))[V], \exists x \neg Q(x) * [V]$$
$$\downarrow$$
$$\neg Q(a)[V]$$

Lavorando su $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ in V:

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) * [V], \forall x(\neg Q(x) \Rightarrow P(x))[V]$$
$$\downarrow$$
$$\neg Q(a)[V]$$
$$\downarrow$$
$$P(a) \Rightarrow Q(a) * [V]$$
$$\swarrow \searrow$$
$$P(a)*, [F] \qquad Q(a)*, [V]$$

Il cammino di destra si chiude, in quanto sono presenti $\neg Q(a)$ e $Q(a)$ su di esso. Procedendo poi con l'algoritmo e operando su $\forall x(\neg Q(x) \Rightarrow P(x))$ in V, si ha:

$$\begin{array}{c}
\forall x(\neg Q(x) \Rightarrow P(x)) * [V] \\
\downarrow \\
\neg Q(a)[V] \\
\downarrow \\
P(a)\ [F] \\
\downarrow \\
\neg Q(a) \Rightarrow P(a) * [V] \\
\swarrow \searrow \\
\neg Q(a)| : [F] \qquad \neg P(a)\ [V] \\
\circledcirc \qquad\qquad \circledcirc
\end{array}$$

Entrambi i cammini risultano chiusi: l'albero allora si chiude e dunque l'enunciato non è soddisfacibile. Si conclude che

$$(\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(\neg Q(x) \Rightarrow P(x))) \wedge \exists x \neg Q(x)$$

non è logicamente valido.
Si può chiudere un cammino anche con formule *non* atomiche con valori sia V che F (si veda $\neg Q(a)\ [V]$ e $\neg Q(a)\ [F]$)

Esempio 2.3

L'esempio mostra una tavola non chiusa e interminabile

Considerato l'enunciato:

$$(\forall x \exists y R(x,y)) \wedge (\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z))) \wedge \forall x \neg R(x,x)$$

si vuole vedere se è logicamente valido o meno.
Attraverso il metodo dei tableaux con rappresentazione ad albero risulta, applicando la regola per $\wedge$:

$$(\forall x \exists y R(x,y)) \wedge (\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z))) \wedge (\forall x \neg R(x,x)) * [V]$$
$$\downarrow$$
$$\forall x \exists y R(x,y)[V], \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z))[V], \forall x \neg R(x,x)[V]$$

Cominciando poi ad applicare la regola per $\forall$ in $\forall x \exists y R(x,y)$:

$$\forall x \exists y R(x,y) * [V]$$
$$\downarrow$$
$$\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z))[V]$$
$$\downarrow$$
$$\forall x \neg R(x,x)[V]$$
$$\downarrow$$
$$\exists y R(a_1,y)[V]$$

Continuando sempre sullo stesso enunciato, si applichi la regola per $\exists$ in V:

$$\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z))[V]$$
$$\downarrow$$
$$\forall x \neg R(x,x)[V]$$
$$\downarrow$$
$$\exists y R(a_1,y) * [V]$$
$$\downarrow$$
$$R(a_1,a_2) * [V]$$
$$\downarrow$$
$$\forall x \exists y R(x,y)[V]$$

A questo punto, avendo introdotto una nuova costante, si itera nuovamente il procedimento (cioè le regole di calcolo), sempre sul primo enunciato, ottenendo:

$$\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z))[V]$$
$$\downarrow$$
$$\forall x \neg R(x,x)[V]$$
$$\downarrow$$
$$\exists y R(a_1, y) * [V]$$
$$\downarrow$$
$$R(a_1, a_2) * [V]$$
$$\downarrow$$
$$\forall x \exists y R(x,y)[V]$$
$$\downarrow$$
$$\exists y R(a_2, y)[V]$$
$$\downarrow$$
$$R(a_2, a_3)[V]$$

E' abbastanza evidente che il processo può andare avanti in questo modo all'infinito.
L'enunciato di partenza non ha interpretazioni su un dominio finito, dunque il ramo risulta essere infinito: esisterà un'interpretazione che lo soddisfi, altrimenti si sarebbe chiuso in un qualche passaggio, ma non è possibile determinarla. (Un esempio potrebbe essere quello di considerare R come $<$ in $\mathbb{N}$)

2.2 Criteri di decidibilità

Nel paragrafo precedente è stato analizzato il metodo delle tavole semantiche nella logica predicativa, giungendo alla conclusione che a causa della semidecidibilità del linguaggio, anche l'algoritmo può avere problemi di decidibilità e di terminazione. Vi sono però alcune classi di enunciati per le quali il metodo termina sempre in un numero finito di passi ed è quindi possibile determinare la loro validità o insoddisfacibilità.

Definizione 2.4 (Forma prenessa)**.** Un enunciato si dice in forma prenessa se è costituito da una successione iniziale di quantificatori(prefisso), ciascuno con la propria variabile, ed è poi seguita da una formula senza quantificatori(matrice).

Definizione 2.5. Un enunciato si dice universale se è in forma prenessa e il suo prefisso è costituito solamente da quantificatori universali. In maniera analoga, un enunciato si dice esistenziale se è in forma prenessa ed il suo prefisso è costituito esclusivamente da quantificatori esistenziali.

E' importante osservare che è possibile trasformare un enunciato generico in un enunciato in forma prenessa logicamente equivalente. Il seguente teorema, che qui non verrà dimostrato, supporta tale affermazione.(si veda [1, pag 149]

Teorema 2.2.1. *Ogni enunciato è logicamente equivalente ad un enunciato in forma prenessa.*

Esso risulta fondamentale per la trattazione dei casi in cui le tavole semantiche hanno termine in un numero finito di passi. Si può dimostrare infatti che enunciati universali e esistenziali sono decidibili se non presentano simboli funzionali. Ciò assicura che dato un enunciato composto, una volta trasformato in un enunciato equivalente in forma prenessa, se risulta universale o esistenziale e non ha simboli funzionali, di certo si potrà stabilire se è una tautologia o meno.

Teorema 2.2.2. *Un enunciato universale della forma $\forall x_1 ... \forall x_n A$, dove A è una matrice con m costanti e nessun simbolo funzionale, è soddisfacibile se e solo se è soddisfacibile in una struttura finita con m (1 se m=0) elementi. Non solo, l'enunciato risulta decidibile con le tavole semantiche.*

Dimostrazione. Se si inizializza una tavola con l'enunciato in V, al primo passo si introducono in V m^n enunciati della forma $A[\mathbf{x}/\mathbf{t}]$,dove $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ e $\approx$ è una n-pla di costanti. Se non ce ne sono in A, l'unica n-pla è quella

formata da c, nuova costante, ripetuta n volte.
A questo punto il procedimento prosegue con l'applicazione esclusivamente di regole proposizionali: non viene creato nessun nuovo termine chiuso e il procedimento termina in un numero finito di passi. Se la tavola non si chiude, esiste un modello per $\forall x A$ con m elementi (o 1 se m=0). $\square$

In maniera analoga, si ha il teorema per enunciati esistenziali (si veda [1]).

Teorema 2.2.3. *Un enunciato esistenziale $\exists x_1, ..., \exists x_n A$, dove A è una matrice con m costanti e nessun simbolo funzionale, è soddisfacibile se e solo se è soddisfacibile in una struttura finita con $n + m$ elementi. L'enunciato inoltre risulta essere decidibile con le tavole semantiche.*

Dimostrazione. Se la tavola viene inizializzata con l'enunciato in V, i primi n passi portano ad aggiungere nuove costanti c_i, con $i = 1, ..., n$ e ad introdurre in V gli enunciati $\exists x_{i+1}, ..., \exists x_n A[x_1/c_1, ..., x_i/c_i]$ fino a $A[x_1/c_1, ..., x_n/c_n]$. A questo punto si applicano esclusivamente le regole proposizionali e dunque il procedimento termina in un numero finito di passi. Se la tavola non si chiude, allora esiste un modello per $\exists x A$ con $n + m$ elementi, cioè le costanti originali più le nuove. $\square$

I due teoremi dimostrano che le due tipologie di enunciati non solo hanno un'interpretazione se la tavola non si chiude, ma soprattutto sono decidibili. Il seguente teorema racchiude i due risultati:

Teorema 2.2.4. *Il problema della validità logica per enunciati universali ed esistenziali privi di simboli funzionali è decidibile*

Dimostrazione. Un enunciato universale è logicamente valido se e solo se la sua negazione, che è equivalente ad un enunciato esistenziale, è insoddisfacibile. Analogamente il viceversa. Essendo entrambi decidibili si ottiene il risultato cercato. $\square$

Alla luce di quanto visto e dimostrato si può dedurre che un'altro caso in cui si ha terminazione certa è per enunciati dove i quantificatori non si alternano, cioè non sono presenti scritture del tipo $\forall\exists$ o $\exists\forall$. (Per un controesempio si veda l'esempio 2.3 del capitolo 2)

Definizione 2.6 (Enunciato semplice)**.** Un enunciato si definisce semplice se è combinazione proposizionale (con connettivi) di enunciati universali, di enunciati esistenziali e di enunciati privi di quantificatori.

Con questa definizione si ha che enunciati semplici possono essere decidibili:

Teorema 2.2.5. *Il metodo delle tavole semantiche termina sempre in un numero finito di passi se applicato ad enunciati semplici privi di simboli funzionali.*

Dimostrazione. Si cominci ad applicare le regole proposizionali e successivamente le regole per quantificatori non "problematiche", cioè $\forall$ in F e $\exists$ in V. Infine si applichino le regole per $\exists$ in F e $\forall$ in V, che comportano la sostituzione di un numero finito di termini chiusi (le costanti nuove e quelle originali), in matrici prive di quantificatori e l'introduzione di queste nelle rispettive colonne.
A questo punto nella tavola occorrono solo enunciati privi di quantificatori escludendo $\forall$ in V e $\exists$ in F, che sono stati scritti in fondo alla colonna. A questo punto, dopo un numero finito di passi, il procedimento termina.

$\square$

Ricordando la definizione di linguaggio monadico:

Definizione 2.7. Un linguaggio si dice monadico se è un linguaggio predicativo privo di simboli funzionali, in cui tutti i predicati sono ad un solo argomento

si dimostra che, in generale, gli enunciati appartenenti ad un linguaggio monadico sono decidibili ed è possibile determinare la loro validità logica attraverso il metodo delle tavole semantiche. L'osservazione è supportata dal teorema seguente che dimostra la possibilità di trasformare un enunciato di un linguaggio monadico in un enunciato semplice equivalente. (si veda [1, pag 153])

Teorema 2.2.6. *Ogni enunciato di un linguaggio monadico è logicamente equivalente ad un enunciato semplice.*

Si può concludere dunque che le tavole semantiche per un linguaggio monadico sono un metodo di decisione, che termina e porta sempre ad un risultato certo. Ciò ovviamente non risolve il problema di decidibilità delle tavole semantiche predicative in quanto la semidecisione deriva dal linguaggio stesso, ma rimane comunque un buon metodo per determinare la validità logica di certi tipi di enunciato.

Bibliografia

[1] Gabriele Lolli (1991). *Introduzione alla logica formale*. Bologna, Il Mulino

[2] Giorgio T.Bagni (1996). *Corso di matematica 1*. Bologna, Zanichelli

[3] Flavio Previale. (1975) *Tavole semantiche per sistemi astratti di logica estensionale*. Tratto da *"Rendiconti del seminario matematico dell'università di Padova"*, reperibile sul sito www.numdam.org

[4] Alberto Marcone (2008) *Elementi di logica matematica*. Dispense del suo corso per gli studenti in informatica dell'università di Udine. Reperibile sul sito http://users.dimi.uniud.it/ alberto.marcone/dispenseELM0809.pdf

[5] Giorgio T.Bagni (2008) *Tableaux semantici e ragionamento diagrammatico a cento anni dalla nascita di Everth W. Beth* (Progetto Alice). Reperibile sul sito http://www.syllogismos.it/education/BethAlice.pdf

[6] Allena Downey, Jeffrey Elkner, Chris Meyer (2002) *Pensare da informatico (Imparare con Python)*. Green Tea Press

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare il professor Piero Plazzi che mi ha dato l'opportunità di analizzare questo argomento con il suo appoggio costante. Ad oggi non è facile incontrare professori che hanno a cuore il proprio lavoro e i propri studenti: ho avuto la fortuna di aver scelto un relatore che mi ha accompagnato nella stesura dell'elaborato con un'attenzione che mai mi sarei aspettata.

Ringrazio la mia mamma, il mio papà e la mia sorellina perchè senza loro non sarei nessuno. Aggiungo inoltre l'intera famiglia partendo dai cugini, zii fino ai nonni perchè hanno sempre fatto il tifo per me e mi hanno supportata e sopportata in questi anni particolarmente difficili.

Ringrazio Agne, Cate e Guenda perchè sono il mio punto fermo da sempre e credono in me più di quanto io credi in me stessa.

Ringrazio Lara perchè c'è stata, c'è e ci sarà.

Ringrazio i compagni di avventure e disavventure scout perchè, sebbene mi sia allontanata, hanno reso più felici questi anni universitari (non ancora giunti al termine!)

Infine ringrazio tutti gli altri, i miei compagni di università, i miei amici (di infanzia e non) che hanno condiviso con me questo primo capitolo!