Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTA' DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

DALL'INSIEME ALLA STRUTTURA
METEMATICA NELLA SCUOLA DI OGGI

Tesi di Laurea in
DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Bolondi Giorgio

Presentata da:
Tommassoni Daniela

Terza Sessione
Anno Accademico 2012/2013

Indice

Introduzione 4

Capitolo 0 7

Capitolo 1 - La Logica matematica 11

Paragrafo 1.1……………………………………………………………..12

Paragrafo 1.2……………………………………………………………..15

Paragrafo 1.3……………………………………………………………..21

Capitolo 2 - Gli Insiemi 23

Paragrafo 2.1……………………………………………………………..23

Paragrafo 2.2……………………………………………………………..29

Paragrafo 2.3……………………………………………………………..31

Paragrafo 2.4……………………………………………………………..34

Paragrafo 2.5……………………………………………………………..39

Paragrafo 2.6……………………………………………………………..43

Capitolo 3 - La Funzione 50

Paragrafo 3.1……………………………………………………………..52

Paragrafo 3.2……………………………………………………………..54

Paragrafo 3.3……………………………………………………………..56

Capitolo 4 - Isomorfismo e Struttura 62

Paragrafo 4.1……………………………………………………………62

Paragrafo 4.2……………………………………………………………67

Conclusioni 70

Appendice 73

Bibliografia 76

Non possiamo pretendere che le cose cambino,
se continuiamo a fare le stesse cose.

Albert Einstein

Introduzione

Il concetto di *struttura matematica* è oggi un concetto cardine per la matematica; tale concetto ha ormai trovato numerose applicazioni nella scienza e nella tecnica di oggi e come tale risulta importante, in generale, situarlo alla base della formazione che fornisce la scuola. Lo sviluppo attuale della scienza e la sua applicazione in tutti i campi della vita quotidiana ha contribuito al miglioramento progressivo dei programmi di matematica nelle scuole; questo sviluppo comunque deve essere un obiettivo anche per il futuro, in tutti i settori delle scienze matematiche; questa prospettiva implica una maggiore conoscenza e consapevolezza da parte di chi insegna ma anche da parte di chi impara.

Allo stesso tempo, la matematica stessa, necessita di una trattazione più concisa rendendo altresì i suoi concetti maggiormente astratti e più generali, uniformandosi così ad una matematica ormai universale ovunque. Uno di questi concetti è appunto quello di struttura matematica, il quale non solo ha messo ordine organizzando la matematica, ma sta anche entrando con forza in tutti i campi scientifici di oggi come l'informatica e la tecnica.

A mio avviso, costruire una scala graduale di concetti che portano a quello di struttura matematica nella scuola non è compito facile ma è un lavoro necessario che tutti dovremmo affrontare, in particolar modo noi insegnanti.

La necessità di tale impegno non nasce solo per restare al passo con i tempi ma anche per *costruire*, progressivamente, una scuola che non stia passivamente a guardare il progresso scientifico e tecnico, ma che ne sia parte integrante. Gli studenti non sono solo soggetti passivi dell'evoluzione tecnico-scientifica in corso, ma devono essere capaci di costruire il loro futuro attraverso la partecipazione attiva a questa rivoluzione rivestendo un ruolo più dinamico e consapevole.

La mia proposta per il trattamento scientifico e didattico del concetto di struttura matematica nella scuola è quella di inserire nei programmi una minima quantità di concetti moderni della matematica al fine di ampliare da un lato l'orizzonte scientifico dei ragazzi e dall'altro fornire una trattazione più semplice e concisa, che richieda tempi più brevi di apprendimento di quelli attualmente previsti dai programmi (basti pensare alla mole dei libri di testo di matematica nel biennio e nel triennio).

L'insieme dei concetti legati a quello di struttura assicura allo studente la formazione matematica necessaria per capire e applicare in modo consapevole e coerente la matematica odierna. D'altra parte tale formazione è anche una premessa efficace per studiare più a fondo la scienza moderna e la matematica in generale.

Questi concetti moderni della matematica lasceranno allo studente anche una formazione logica più approfondita, una crescita della capacità intellettive e anche un parlare più preciso della lingua italiana. Nonostante alcuni dei concetti inerenti quello di struttura, quali Insiemi, concetti della Logica, che peraltro contribuiscono anche al suo sviluppo, siano presenti nella scuola da decine di anni purtroppo non sono stati affrontati in modo appropriato, rimanendo il più delle volte fine a sé stessi, isolati, senza mai assumere un ruolo importante e continuativo nel programma.

Durante lo svolgimento della tesi cercherò di presentare il valore didattico della struttura matematica mostrando le possibilità reali di un'ampia applicazione e diffusione nella scuola.

A partire dall'analisi di libri di testo di biennio di scuole secondarie superiori (in particolare del liceo scientifico) analizzerò i temi di *logica*, *insiemistica*, alcuni aspetti che riguardano le *relazioni*, le *operazioni* e le *funzioni*, concludendo con il concetto di struttura e mostrando una sua reale e concreta applicazione nella scuola.

Riassumo di seguito in alcuni punti in che modo gli argomenti riguardanti la logica, l'insieme, le relazioni, le operazioni, la funzione e la struttura matematica, vengono affrontati nei vari testi scolastici presi in esame:

- Solo alcuni libri di testo, indirizzati al biennio di scuola secondaria superiore, presentano una trattazione di logica. In alcuni casi più dettagliata e precisa, in altri più semplicistica e sbrigativa.
- Tutti i libri di testo presentano un capitolo riservato alla trattazione dell'insieme; nella maggior parte dei casi questa risulta confusionale e asettica, isolata e poco significativa.
- Quasi tutti i libri di testo introducono il concetto di relazione ma in diversi casi questo risulta impreciso e poco chiaro.
- Il concetto di operazione in alcuni casi presenta gravi errori già nella definizione stessa; ciò, di fatto, rischia di confondere lo studente che avrà difficoltà nell'apprendimento di tale concetto.
- La funzione viene trattata in ogni libro di testo in modo piuttosto chiaro e senza rilevanti imprecisioni.
- Infine il concetto di struttura matematica non viene introdotto in nessun libro di testo delle scuole superiori; ho trovato un'interessante trattazione in un testo per le scuole medie (cfr. [Agnesi, Baldi, Locatelli]).

Questi punti saranno analizzati nel dettaglio nei prossimi capitoli, con riferimento ai vari libri di testo, riportando e commentando alcuni esempi tratti proprio da testi scolastici.
Inoltre, in qualità di matematica, svilupperò, per ogni argomento, un'idea di modello didattico concreto con l'auspicio che possa essere d'aiuto per un miglioramento, in ambito scolastico, dello sviluppo dei concetti teorici che portano a quello di struttura matematica.

Capitolo 0

In questo capitolo viene presentata una breve panoramica dell'impianto complessivo, passato e attuale, dell'insegnamento della matematica nella scuola. Ritengo sia necessario contestualizzare i cambiamenti della matematica e considerare le nuove impostazioni nel suo insegnamento nella scuola, impostazioni e cambiamenti messi in atto nel corso degli anni. Tali innovazioni, come sarà spiegato anche in seguito, sono risultate necessarie perché da una parte vi era l'esigenza di avere una matematica più astratta e generale, caratteristiche che, prima degli anni sessanta la materia non possedeva, dall'altra vi era l'esigenza, anche da parte dell'Italia, di uniformarsi ad una matematica più scientifica ormai adottata da molti paesi del mondo e dunque ad una matematica che stava diventando universale ovunque. Infatti, negli anni sessanta, in molti paesi del mondo nasceva il movimento per il cambiamento radicale della matematica nella scuola. Sulla base di questo cambiamento, "New Math", vi era proprio il concetto di struttura.

Il movimento proponeva per la scuola media superiore quattro nuovi campi di studio in matematica:

1. Elementi di logica matematica;
2. Elementi di teoria degli insiemi;
3. Elementi di struttura elementare;
4. Elementi di probabilità e statistica matematica.

Questi capitoli, nella matematica di oggi, sono ormai sperimentati, adottati e rielaborati in diversi livelli e in diverse forme da moltissime scuole e paesi nel mondo. Da noi, in Italia, hanno iniziato a trovare posto in modo sistematico solo (o meglio dire addirittura) nei libri di testo della scuola elementare, però c'è molto lavoro da fare perché la loro trattazione dipende soprattutto dalla preparazione e competenza professionale dell'insegnante.

Il concetto di struttura matematica è stato creato all'inizio del 900 da Dedekind come risultato di idee e nuove teorie matematiche. Precisamente la struttura nasce con la teoria degli insiemi e l'assiomatica; chi diede un impulso decisivo fu Nikola Bourbaki con l'intento di rendere la matematica più rigorosa e astratta in un clima generale che aveva portato allo *strutturalismo*, una delle principali novità del XX secolo in ambito matematico. Fin dal XIX secolo le cosiddette basi della matematica erano costituite solo da numeri, quantità e figure. Con il lavoro di tanti matematici si riuscì a superare questo livello apportando modifiche importanti a questi precetti matematici. La nascita nel XIX secolo della teoria dei gruppi, della topologia,

della logica matematica, dell'analisi funzionale, ha chiarito il fatto che la matematica non si occupa solo di numeri e calcoli.
Da questo momento il concetto di ricerca e di basi matematiche diventarono l'*insieme*, la *relazione*, la *funzione*, le *operazioni*, la struttura di *gruppo* ecc..
Durante questa trasformazione (che potremmo anche chiamare evoluzione) della matematica iniziarono a crearsi anche nuovi simboli, come quello di appartenenza ($\in$) e nuove relazioni, come l'operazione in una struttura e le relazioni d'ordine.
Anche l'algebra, disciplina nata per risolvere i problemi con l'aiuto delle equazioni, si trasforma in una teoria più generale, astratta, che si occupa di proprietà di relazioni e specialmente delle operazioni e appunto delle strutture matematiche.
Le trasformazioni delle operazioni matematiche, come oggetto di studio, gettano le fondamenta per uno sviluppo astrattivo e generalizzato di tutta la matematica. Questo portò, come già accennato, ad un diverso interesse delle varie discipline matematiche: l'attenzione si era spostata dai numeri, quantità e figure, ad insiemi di qualsiasi natura.
Lo sviluppo cui si assiste in questo secolo non fu affatto casuale ma era il risultato di una ricerca intensiva in moltissime scuole e nasceva proprio da una esigenza pratica. Anche la scuola, con l'insegnamento della matematica, ha dato il suo contributo in quanto manifesta ogni giorno la necessità di concetti più generali, più astratti per risparmiare negli anni il tempo degli studi.
Con la nascita del concetto di struttura, la natura specifica e concreta degli oggetti matematici passa in secondo piano surclassata da concetti quali i *rapporti*, le *relazioni*, l'*ordine*, la posizione reciproca degli oggetti e specialmente le *operazioni* e le loro principali proprietà.
L'algebra ha cominciato ad influenzare tutte le scienze matematiche e come risultato sono nate nuove branche della matematica, tutt'oggi oggetto di studio, come la *teoria algebrica dei numeri*, l'*algebra geometrica*, la *geometria algebrica*, la *topologia algebrica* ecc.. Tanto da poter affermare che la matematica abbia "subito" una "algebrizzazione".
All'inizio del secolo scorso il metodo assiomatico, tranne che per la geometria, lo si ritrova in tantissimi campi della matematica, primo fra tutti l'algebra. La nascita di nuove idee e di nuovi concetti della matematica di oggi va ricercata infatti nella vastissima applicazione che ha avuto il metodo assiomatico in matematica. La definizione più elementare e astratta di struttura di gruppo è stata data da Cayley nel 1854 ma lo studio di gruppi astratti e finiti è stato per molto tempo solo una ricerca nei gruppi di permutazioni. Dopo il 1880 è cominciato lo sviluppo indipendente e consapevole basato sul metodo assiomatico della teoria dei gruppi finiti.

Verso la fine del XIX secolo, durante lo sviluppo della struttura di gruppo, ebbe un grande successo il concetto di invarianza nella geometria, nell'analisi e persino nella meccanica fisica e teorica. Questo concetto viene tutt'ora studiato anche in altre discipline.

La struttura matematica viene indicata generalmente con $S = (A, B)$; questa scrittura rappresenta ogni coppia ordinata di insiemi dove A costituisce un insieme di elementi di natura qualsiasi, mentre B costituisce un insieme di relazioni e operazioni tra gli elementi di A. Queste relazioni hanno proprietà definite dal sistema degli assiomi della struttura. Le strutture definiscono quindi completamente le relazioni.

Le dimostrazioni dei teoremi ricavate utilizzando il sistema degli assiomi della logica rappresentano proprio lo sviluppo della teoria assiomatica della struttura. L'insieme A può essere costituito da altri insiemi, chiamati sottoinsiemi. Per esempio in geometria, secondo Hilbert, A è un insieme costituito da punti, rette e piani ma la natura concreta di questi elementi non ha alcuna importanza (la retta può essere rappresentata con una linea, con una equazione o con un sistema di equazioni). Le relazioni contenute in B possono essere diverse, ossia tra elementi di A oppure tra i suoi sottoinsiemi.

Abbiamo quindi diversi tipi di strutture che si dividono dai tipi di relazioni:

- 1° tipo - Strutture algebriche.

  Le relazioni definite in questo tipo di strutture sono tali che: dati tre elementi, uno è definito completamente dagli altri due. Questo tipo di relazione si chiama composizione e si indica con il simbolo '$\circ$', oppure operazione binarie. Il gruppo è il più semplice esempio di struttura algebrica. A scuola si trovano anche strutture quali *anelli*, *campi* e *spazi vettoriali*.
- 2° tipo – Strutture d'ordine.

  Si definiscono con le relazioni d'ordine, per esempio (N , $>$) oppure (R , $\leq$) ecc.. .
- 3° tipo – Strutture topologiche.

  All'interno di questo tipo di strutture troviamo il concetto di intorno, di limite e di continuità.

Dall'opera di Euclide prima (III secolo a.C.) e poi dal lavoro di Hilbert (all'inizio del secolo scorso), si è capito che la gran parte delle scienze matematiche possono essere sviluppate logicamente secondo il metodo assiomatico, basandosi su un numero finito di concetti fondamentali e da assiomi scelti accuratamente dopo una lunghissima pratica. Questo modo di presentare una teoria matematica è risultato più limpido e trasparente del concetto stesso di struttura matematica. Per esempio il concetto di struttura ha portato alla ricostruzione di una teoria vasta, quale la geometria euclidea, attraverso i principi della assiomatica. Tale ricostruzione ha consentito di raggruppare e organizzare in piccoli insiemi la grande teoria di Euclide invece dei grandi capitoli di cui era costituito in origine.

Il concetto di struttura attraversa tantissimi temi della matematica generalizzando i concetti e standardizzando i metodi, unificandoli e aprendo continuamente nuovi orizzonti; lo studio della struttura matematica ha quindi portato ad una ricerca risultata molto fertile per tantissimi argomenti della matematica. Purtroppo il concetto di struttura matematica, quindi anche quello di gruppo, ancora non sono presenti nella scuola o meglio si parla di particolari insiemi con precise proprietà, ma non si sa che si chiamano gruppi. Certamente a scuola non è possibile intraprendere un percorso con concetti astratti e formali per l'insegnamento della matematica; per arrivare al concetto di struttura prima bisogna coltivare una serie di concetti che sono alla base della matematica d'oggi, specialmente quelli che si trovano nel segmento [insieme, gruppo] che racchiude al suo interni i seguenti argomenti: l'insieme, il numero, la coppia ordinata, il prodotto cartesiano, le relazioni e loro proprietà, le relazioni d'equivalenza, le relazioni d'ordine, le funzioni, l'operazione binaria e il gruppo.

Questi concetti sono ripresi dallo studente diverse volte durante il suo corso di studio; affinché tali concetti siano ben appresi e fissati devono essere applicati in diversi ambiti e diverse situazioni, più concrete dapprima e più generali poi attraverso un percorso lento e graduale. Noi sappiamo che le definizioni formali non sono accettate dallo studente, soprattutto se di giovane età, ciò nonostante la scuola realizza e coltiva concetti secondo il metodo dal concreto all'astratto.

CAPITOLO I – La Logica matematica

Il concetto di insieme a livello intuitivo è stato utilizzato dall'uomo fin dall'antichità. La nascita di una vera e propria teoria degli insiemi si ebbe, però, solo quando si iniziarono a creare modelli utili per risolvere problemi di logica. I primi concetti elementari si trovano già nel 1768 con Eulero (1707-1783), noto matematico svizzero, in *Lettere ad una principessa tedesca* e in *Analisi matematica della logica* del 1847 del matematico inglese George Boole (1815-1864). Chi per primo presentò una vera e propria trattazione sistematica della teoria degli insiemi fu il matematico tedesco di origine russa Georg Cantor (1845-1918). La sua teoria però si limitava ad una descrizione intuitiva, evitava difatti di fornire una definizione precisa di insieme tanto che venne chiamata 'teoria ingenua'. Cantor infatti scriveva: "un insieme è una qualunque collezione di oggetti della nostra intuizione o del nostro pensiero. Gli oggetti, detti elementi dell'insieme, devono essere distinguibili e ben determinati." Questa mancanza di coesione e precisione portò inevitabilmente a delle contraddizioni, in merito a questo, l'esempio più noto è il paradosso del barbiere di Bertrand Russell che può essere enunciato così:

"In un villaggio vi è un solo barbiere, un uomo ben sbarbato, che rade tutti e soli gli uomini del villaggio che non si radono da soli. Il barbiere rade sé stesso?".

Dividendo l'insieme degli uomini del villaggio in due insiemi (quelli che si radono da soli e quelli che non si radono da soli) si possono avanzare due ipotesi, entrambe, però, porteranno ad un assurdo. Infatti se il barbiere, in quanto uomo del villaggio, appartiene al primo insieme (uomini che si radono da soli) non dovrebbe farsi radere dal barbiere. Ma il barbiere è lui stesso, quindi in realtà si farebbe radere dal barbiere, assurdo!
Se invece supponiamo che il barbiere appartenga all'altro insieme (uomini che non si radono da soli), in questo caso, si farebbe radere dal barbiere, cioè da lui stesso, assurdo!
Il paradosso enunciato dal matematico filosofo Russell, gettò inevitabilmente i matematici del tempo nella confusione più totale; da qui seguì la necessità di una nuova teoria degli insiemi in grado di genere tutti gli insiemi di uso corrente in matematica ma di evitare gli aspetti paradossali che possono insorgere quando si usa la teoria ingenua di Cantor.
Questa nuova teoria, sviluppata inizialmente dal logico matematico Zermelo (1871-1953), è fondata su una precisa definizione di insieme e viene detta teoria assiomatica degli insiemi.

Paragrafo 1.1

Dopo questa breve introduzione che ho voluto inserire perché apre la strada alle tematiche che ho intenzione di sviluppare durante lo svolgimento di questa tesi, propongo e commento il percorso fatto dal libro di testo "Nuova matematica a colori" (di liceo scientifico) di L. Sasso, riguardo la trattazione degli insiemi e delle strutture. Il libro di testo è rivolto a studenti di scuola secondaria di secondo grado; i capitoli si chiamano Temi e ognuno presenta delle unità.

I Temi sono: Tema A – 'i numeri' (dai naturali agli interi, dai razionali ai reali); Tema B - 'linguaggio della matematica' (insiemi e il linguaggio della matematica); Temi C – 'il calcolo con le lettere' (monomi, polinomi, scomposizioni tra polinomi ecc.); Tema D – 'equazioni, disequazioni e funzioni'; Tema E – 'Dati e previsioni'.

Leggendo il primo capitolo, una delle cose che mi ha colpita di più è il fatto che si introducano i naturali, gli interi, i numeri in genere, parlando di "insiemi", "l'insieme dei naturali...l'insieme degli interi…" prima ancora di aver spiegato cosa sia un insieme (argomento riservato al secondo capitolo).

Ancor più grave, a mio avviso, è il fatto che manchi totalmente una trattazione logica persino prima di introdurre gli insiemi. Penso che riservare una parte, seppur breve, alla logica matematica, sia necessario affinché lo studente possa capire a fondo ciò che sta studiando e capire meglio gli oggetti con cui andrà a confrontarsi nel corso dei suoi studi.

Durante il mio corso di studi, mi è capitato di osservare alcune criticità nella trattazione della logica matematica. Di seguito stilerò una lista dei concetti esistenti attualmente nella logica matematica, poi ne sottolineerò gli aspetti che a mio avviso possono essere ingannevoli, ambigui per lo studente e infine esporrò una mia proposta con lo scopo di rendere più comprensibili e accessibili tali concetti.

Prima di iniziare mi piacerebbe sottolineare un aspetto proprio della matematica che viene molto spesso trascurato, da chi insegna ma anche da chi apprende. La matematica non è una disciplina semplice, intuitiva e immediata. La matematica è una scienza complessa e macchinosa, spesso si tende a esemplificare in modo esasperato gli argomenti da trattare perché 'troppo difficili', ma purtroppo o per fortuna la matematica è anche questo. Un atteggiamento del genere nei confronti della stessa rischia solo di danneggiarla, insegnando agli studenti solo una parte di questa, la più semplice, la più comprensibile, con questo approccio però gli studenti non avranno mai tutti gli strumenti e i mezzi per comprenderla in modo approfondito. (A proposito di questo [Adler] pp. 82, 83).

<u>Concetti di base di logica matematica necessari per introdurre la teoria degli insiemi</u>:

La logica (dal greco logos = ragione, parola) è la scienza del ragionamento. Nasce come branca della filosofia (dapprima con Aristotele e poi con i logici medievali) e solo successivamente (dall'Ottocento in poi) diviene campo di studio anche da parte dei matematici. La fase non-matematica della logica è tutta tesa ad una classificazione delle possibili forme di ragionamento, mentre il punto di vista matematico evidenzierà simmetria e organicità.
Alcuni principi formulati in ambito medievale sono ancora oggi tra gli assiomi della logica; questi sono:

- principio d'identità : da ogni affermazione segue se stessa;
- principio di non contraddizione : un'affermazione e la sua negazione non possono essere vere contemporaneamente;
- principio del terzo escluso : o un'affermazione è vera o lo è la sua negazione;
- ex falso quodlibet : dal falso segue tutto.

La logica proposizionale si propone di formalizzare e quindi analizzare quei ragionamenti che possono essere formulati nel nostro linguaggio naturale (cioè l'Italiano) ricorrendo ad affermazioni composte fra loro usando particelle come: e, o, sia. . sia, nè. . nè, ma non, o. . o, e/o, se. . . allora, ecc.. Il linguaggio della logica proposizionale (cioè l'insieme dei segni convenzionali che vengono usati nella trattazione matematica della logica) è composto dai seguenti gruppi di simboli:

- costanti : V (“il vero”), F (“il falso”);
- variabili proposizionali : p, q, r, s, t, . . .
- connettivi : $\wedge$ (“congiunzione o intersezione”), $\vee$ (“disgiunzione o vel”), $\rightarrow$ (“implicazione”), $\neg$ (“negazione”);
- parentesi : (,).

Se abbiamo due affermazioni A e B, allora ci saranno quattro classi di interpretazioni per tenere conto delle quattro combinazioni possibili dei valori di verità di A e B.

In questo caso possiamo schematizzare la situazione con una tabella del tipo:

A	B
V	V
V	F
F	V
F	F

Nota che ogni riga della tavola di verità non rappresenta una singola interpretazione bensì una classe di interpretazioni. Ad esempio la penultima riga rappresenta la classe di tutte le interpretazioni in cui A è falsa, ma B è vera. In questo modo è possibile schematizzare la definizione semantica dei connettivi e delle costanti tramite la seguente tavola chiamata “tavola delle verità”.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$\neg A$	V	F
V	V	V	V	V	F	V	F
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	F	V	V	V	V	F
F	F	F	F	V	V	V	F

Vediamo ora un esempio un po’ articolato combinando tra loro alcuni connettivi.

Esempio 1.1.1. Costruire la tavola di verità della formula: $(A \vee B) \wedge\neg (A \wedge B)$

Soluzione. Per prima cosa bisogna riconoscere quali sono le sottoformule della formula data. Le sottoformule sono (in ordine di complessità) A, B, $A \vee B$, $A \wedge B$, $\neg (A \wedge B)$ e, infine, la formula stessa. Nella tavola di verità bisogna inserire una colonna per ogni sottoformula.

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\neg (A \wedge B)$	$(A \vee B) \wedge\neg (A \wedge B)$
V	V	V	F	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F

Quindi la formula è vera se e solo se una e una sola fra A e B é vera.

Tutti i connettivi godono di alcune proprietà; le riporto di seguito nel caso della disgiunzione, certamente le stesse valgono anche per gli altri connettivi. Siano p, q, ed r, delle affermazioni, allora valgono le seguenti proprietà:

- Proprietà di idempotenza: $p \vee p = p$.
- Proprietà commutativa: $p \vee q = q \vee p$.
- Proprietà associativa: $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$.
- Proprietà distributiva (rispetto alla congiunzione logica):

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

- Teorema di assorbimento (rispetto alla congiunzione logica): $p \vee (p \vee q) = p$.
- Legge di De Morgan: $\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$.

Paragrafo 1.2

In questo paragrafo vengono analizzate alcune criticità riguardo la trattazione vista nel precedente paragrafo, apportando qualche miglioria:

- la negazione (¬ p);
- la disgiunzione o vel (∨);
- la congiunzione o l'intersezione (∧).

<u>La negazione</u>

E' un concetto presente nella scuola da tantissimi anni ma se poniamo la seguente domanda ai ragazzi "qual è il contrario di *positivo*?" la risposta sarà il *negativo*. Certamente la risposta è sbagliata perché viene confuso il concetto di contrario con quello di opposto. Anche la domanda però è mal posta perché non viene contestualizzata all'interno di un ambiente specifico, precisamente manca la struttura, l'insieme sostegno entro cui intendiamo muoverci. Per rendere la domanda accessibile, non ingannevole, dobbiamo parlare prima di numeri *positivi* e *nonpositivi*.

Per esempio se consideriamo N_0 e chiamiamo positivi tutti i numeri strettamente maggiori di zero, il *contrario* dei positivi sarà lo zero, mentre l'*opposto* in questa struttura non ha senso. Quindi ha senso parlare di *opposto* solo in una struttura con le caratteristiche della struttura gruppo.

Se pongo la stessa domanda cambiando l'insieme sostegno, considerando per esempio (Z , +), allora la risposta sarà: tutti i numeri *nonpositivi*, usando necessariamente il NON. Dobbiamo cioè chiedere aiuto ai linguisti per accettare gli aggettivi con il 'non' davanti. Il concetto di struttura richiede quindi un cambiamento anche nella struttura dei termini. Se consideriamo i reali e chiediamo quale sia il contrario di *razionale* la risposta sarà *irrazionali*, ossia usiamo il prefisso *irr*, mentre sarebbe più logico ed intuitivo usare il termine *nonrazionale*. Ancora, chiamiamo equazioni e disequazioni invece di *nonequazioni*. Il concetto di struttura, quindi, suggerisce anche uno sviluppo logico e più moderno della lingua italiana.

Distinguere il *contrario* logico dall'*opposto* è essenziale affinché chi impara sviluppi l'intelligenza adeguata senza confondere i due concetti.

Per la negazione si è soliti usare la simbologia vista sopra, $\neg p$, però, a mio avviso, sarebbe più adatto usare $\bar{p}$ semplicemente per una questione visiva, il primo è composto da due oggetti, il simbolo $\neg$ seguito dall'affermazione p, mentre il secondo è costituito da un solo simbolo, precisamente $\bar{p}$.

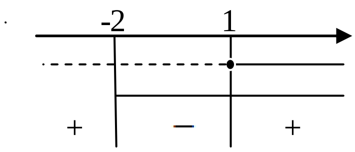
La negazione è un concetto logico mentre l'opposto è un concetto algebrico. La confusione tra il contrario logico e l'opposto aumenta quando didatticamente si fa uso di strumenti inappropriati, come per esempio le tabelle dei segni utilizzate per la risoluzioni di disequazioni, a questo punto forse meglio dire *nonequazioni*. Per capire meglio cosa intendo, di seguito risolverò una *nonequazione* fratta in due modi: il primo quello attualmente utilizzato in tutte le scuole; il secondo è una mia proposta che credo possa togliere quella ambiguità creata dal mischiare in modo più o meno consapevole la logica e l'algebra.

Esempio 1.2.1. Risolvere la seguente disequazione fatta

$$\frac{x-1}{x+2} \geq 0.$$

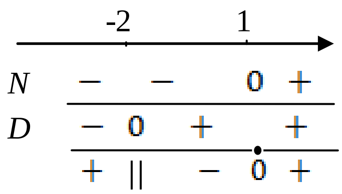
1. $N \geq 0 \quad x-1 \geq 0 \leftrightarrow x \geq 1$

   $D > 0 \quad x+2 > 0 \leftrightarrow x > -2$



2. $N \geq 0 \quad x-1 \geq 0 \leftrightarrow x \geq 1$

   $D > 0 \quad x+2 > 0 \leftrightarrow x > -2$



Nella tabella 1. vengono mischiati i concetti di negazione matematica (prima è – poi è +), l'intersezione, l'unione e la regola dei segni di una frazione nei reali, mentre nella tabella 2. abbiamo solo le regole dei segni, ossia è una tabella dei segni di *N/D*.

<u>La disgiunzione e la congiunzione</u>

Il concetto che rimane nel buio più totale è la disgiunzione; la complessità più grossa sta nel fatto che *disgiunzione*, *unione* e *oppure* sono la stessa cosa in scienze diverse, ossia hanno lo stesso significato logico (∨ = U = *oppure*). Come nel caso della negazione, ho posto una domanda ad alcuni studenti di classe seconda di liceo scientifico; la domanda è stata "mi dai la penna oppure il libro?".

I ragazzi dunque mi hanno passato la penna o il libro, ossia hanno fatto una disgiunzione dei due oggetti. Quindi i ragazzi trasformano 'oppure' in 'oppure…oppure…'; la mia domanda era formulata con un 'o' ed è stata modificata con 'o...o...'. Questo difetto logico è molto ricorrente e profondamente radicato nella scuola italiana. La cosa più grave sta nel fatto che la differenza tra un 'o' e due 'o' non si distingue neppure nella lingua italiana; ancora una volta bisogna chiedere aiuto ai linguisti per sopperire a tale ambiguità.

Riporto di seguito la tabella delle verità del 'vel' (∨) già vista nel paragrafo precedente:

A	B	A∨B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Come si può osservare dalla tabella, un 'oppure' (∨) ha tre verità, mentre un 'oppure...oppure…' ha due verità; quindi per la disgiunzione sono due 'o', mentre un solo 'o' ha dentro anche la congiunzione.

Si è cercato di "sistemare" questa la confusione creatasi tra 'o' e 'o…o…' in un modo completamente sbagliato, usando 'e/o' che non risulta essere una parola nella lingua italiana e di più non ha alcun significato nella logica matematica. Vediamo di seguito in poche righe, come 'e/o' di fatto non "sistema" proprio niente; costruisco la tabella della verità seguente dove 1 vuol dire "vero", mentre 0 vuol dire "falso":

A	B	A e B	A o B	(A e B) e (A o B)	(A e B) o (A o B)
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0

Dunque, se ‘e/o’ si intende come: ‘(A e B) e (A o B)’, allora dalla tabella si vede che la verità e solo una, cioè quando A e B sono tutte e due vere. In questo caso ‘e/o’ logicamente è uguale ad ‘e’. Se ‘e/o’ si intende come: ‘(A e B) o (A o B)’, allora dalla tabella si vede che le verità sono tre: in questo caso ‘e/o’ logicamente è uguale ad ‘o’.

Dall’analisi della tabella della verità si vede che ‘e/o’ non giustifica la sua nascita, non ha risolto il problema, ma ha prodotto ulteriore nebbia logica. Il simbolo ‘e/o’, con il significato ambiguo, porta solo confusione logica.

Per corregge quest’errore basta che la scuola insegni che ‘oppure’ e ‘oppure…oppure…’ sono due congiunzioni diverse nel significato logico e nella scrittura. La mancanza della formazione logica nel concetto dell’unione fa si che manchi anche un simbolo che ne esprima il concetto in matematica.

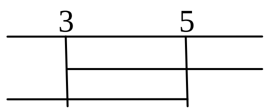
Una possibile soluzione potrebbe essere nell’utilizzo di parentesi diverse, ossia usare la parentesi graffa ‘{‘ per ‘e’ e la parentesi quadra ‘[‘ per ‘oppure’.

Nella scuola italiana si usa, spesso e volentieri, solo la parentesi graffa. Questo, a mio avviso, è un difetto grave nell'educazione generale e per la crescita e lo sviluppo intellettuale dei ragazzi, che rimangono senza capire bene il vasto concetto dell’unione, ciò di fatto limita la loro conoscenza.

Esempi 1.2.3

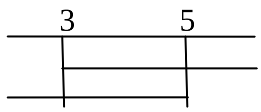
1. Risolvere le seguenti disequazioni

$$\begin{cases} x > 3 \\ x < 5 \end{cases}$$

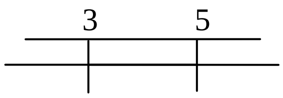


2. Risolvere le seguenti disequazioni

$$\left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 5 \end{array}\right.$$

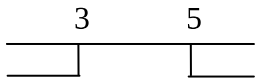


I due grafici sono esattamente identici, l'errore sta nel fatto che nel sistema numero 2. le soluzioni dovrebbero essere disegnate nello stesso livello e non su livelli diversi come invece è corretto fare per l'intersezione. Così le soluzioni del sistema 2. saranno rappresentate così:



le soluzioni dunque sono $\forall\, x \in R$.

Per esempio consideriamo le disequazioni precedenti invertendo i segni avremo $\left[\begin{array}{l} x < 3 \\ x > 5 \end{array}\right.$



le soluzioni sono $x < 3 \vee x > 5$.

Queste posso anche essere scritte in modo equivalemte come segue

$$]-\infty, 3\,[\, \cup \,]\,5, +\infty\,[\ .$$

Nel caso avessimo dovuto risolvere un sistema, ossia se invece della quadra avessimo avuto la graffa, il sistema non avrebbe avuto soluzioni.

Quindi, concludendo, possiamo scrivere $\vee = \cup = [= oppure$, ossia, abbiamo lo stesso significato logico per quattro simboli in campi diversi, rispettivamente in logica, insiemistica, matematica e nella lingua italiana.

La stessa cosa possiamo dire per l'intersezione: $\wedge = \cap = \{ = e$.

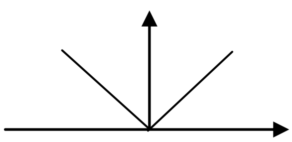
Nella scuola la mancanza del segno dell'unione ([ ) fa si anche si creino imprecisioni anche nelle funzioni costituite da più pezzi, per esempio la funzione,

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases},$$

per quanto appena detto, crea confusione nello studente in quanto viene usata la stessa simbologia (la parentesi graffa) per indicare una situazione completamente diversa dalla precedente. La funzione che spesso viene rappresentata, riscritta secondo le 'regole' introdotte in precedenza sarà così:

$$|x| = \left[\begin{array}{ll} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{array}\right.,$$

e graficamente avremo



Questa è una unione di due semirette, non una intersezione.

A scuola si risolvono milioni e milioni di sistemi, equazioni e disequazioni, ma non si fa nemmeno un esercizio per l'unione, come già detto, in questo modo insegnamo ai ragazzi solo la 'e' e dunque lavoriamo solamente su metà di ciò che invece potremmo insegnargli.
I concetti della logica forniti come lista di assiomi devono essere usati nello sviluppo degli altri concetti; per esempio nelle dimostrazioni delle proprietà quali l'associatività del prodotto di cartesio

$$A \times (\mathrm{B} \times \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \times \mathrm{C}.$$

La proprietà associativa quindi può essere dimostrata collegando i concetti della logica e degli insiemi attraverso l'assiomatica della logica matematica, mettendo insieme dunque diversi registri linguistici, per esempio dimostriamo la proprietà associativa:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Dobbiamo dimostrare gli elementi dell'insime di sinitra sono gli stessi dell'insieme di destra e viceversa basandoci sugli assiomi della logica, vediamo come:

$$sia\ x \in A \cap (B \cap C) = (x \in A) \wedge (x \in B \cap C)) =$$
$$= (x \in A) \wedge (x \in B \wedge x \in C) =$$

usaimo ora l'assioma della logica ($(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$)

$$= [(x \in A) \wedge (x \in B)] \wedge (x \in C) =$$
$$= (x \in (A \cap B)) \wedge (x \in C) =$$
$$= x \in [(A \cap B) \cap C].$$

Queste dimostrazioni rendono manifesto quel legame logico tra simboli diversi nelle diverse discipline, lavorando in questa direzione otterremo lo scopo di facilitare la comprensione di legami strutturali più astratti (a questo proposito si veda "Elementi di Didattica della Matematica" di Bruno D'Amore).

Effettivente tutta la matematica attuale si sta muovendo in questo senso, il passaggio dal concreto all'astratto è un passo necessario grazie al quale i nostri ragazzi sapranno padroneggiare con maggiore consapevolezza la matematca.

Paragrafo 1.3

A conclusione di questo primo capitolo, raccolgo di seguito una lista di concetti e teoremi riassuntivi che penso sia doveroso inserire nella scuola a completamento dei precedenti presenti nel libro di testo "Algebra" di R. Bruno, W. Cavalieri, P. Lattanzio.
Oltre alle correzioni introdotte nel paragrafo precedente aggiungerei i seguenti teoremi.

Teorema 1.3.1
Vale

$$\overline{\exists} = \forall$$

$$\overline{\forall} = \exists$$

Si legge "la negazione dell'*esiste* è equivalente al *per ogni*; la negazione del *per ogni* è equivalente all'*esiste*".

Teorema 1.3.2 (quadrato logico)

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p}).$$

Questo teorema sarà utile per la dimostrazione di tanti teoremi, vediamo subito un esempio.

Esempio 1.3.1
La funzione iniettiva viene definita così

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D.$$

Se chiamo $(x_1 \neq x_2) = p$ e $\left(f(x_1) \neq f(x_2)\right) = q$, allora per il Teorema 1.3.2, $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ infatti vale

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Questa è la definizione di funzione iniettiva che troviamo più spesso nei libri di testo perché più comprensibile per gli studenti in quanto viene espressa attraverso una equazione.

Un altro spetto da correggere è nella terminologia che risulta troppo vecchia e confusionale. La logica chiarisce e semplifica alcuni aspetti.

Prendiamo

$$p \Rightarrow q \quad allora \quad p \text{ è } condizione\ sufficiente\ per\ q,$$

$$q \text{ è } condizione\ necessaria\ per\ q.$$

Ora

$$p \Leftrightarrow q \quad allora \quad p \text{ è } condizione\ necessaria\ e\ sufficiente\ per\ q,$$

$$q \text{ è } condizione\ necessaria\ e\ sufficiente\ per\ q.$$

L'idea è quella di sostiture *condizione necessaria e sufficiente*, terminologia che appesantisce il costrutto, con *equivalente*.

Concludo riportando una tabella con le mie modifiche:

DA	A
Irrazionale	non razionale
Disequazione	non equazione
$\neg p$	$\bar{p}$
- - - ———	$- - -\ \ + + +$
{	{ , [
condizione necessaria e sufficiente	Equivalente

CAPITOLO II – Gli Insiemi

Il concetto di insieme è ormai presente nella scuola da tanti anni. Sono stati creati diversi modelli per concretizzare questo concetto di natura astratto. Grazie ad un alto livello di generalizzazione i concetti legati agli insiemi non hanno ancora percorso tutti i capitoli e gli argomenti di matematica nella scuola. Come già osservato non è presente uno stretto legame tra concetti propri della logica e quelli degli insiemi, per esempio il linguaggio della logica può essere tradotto con quello degli insiemi come segue:

$$p_1 \wedge p_2 \Rightarrow A \cap B,$$

$$x \geq 5 \Rightarrow [5, +\infty[= \{x \in R \mid x \geq 5\}.$$

A scuola ci si sofferma a lungo su $x \geq 5$ senza vedere come questa scrittura possa avere l'equivalente significato anche in un altro ambito (cfr. [D'Amore]).

Vediamo ora una panoramica generale di cosa si insegna nelle scuole (confronta anche il programma ministaeriale per la scuola secondaria superiore in Appendice).

Paragrafo 2.1

Nella scuola media si introducono in principio diversi esempi per chiarire e introdurre il concetto di insieme. I numeri naturali si introducono come caratteristica quantitativa di insiemi finiti di oggetti reali.

Per definire il numero zero si usano diversi esempi (vedi "l'ABC…dell'Algebra", p.12) in particolare si usa la semiretta orientata e si specifica che $-0 = +0 = 0$.

Il concetto di insieme vuoto viene presentato come vuoto assoluto invece che come inseme che non ha nessun elemento ma che gode comunque delle proprietà date (vedi "l'ABC dell'Algebra", p.15).

Nelle scuole elementari le operazioni con i numeri naturali si fanno con insiemi di oggetti concreti, per esempio sommando volti di bambini, maschi e femmine (cfr p.10 dei 'I favolosi quattro'). Sicuramente questa è una strada didattica valida perché si adatta allo sviluppo degli studenti e si basa sulle loro esperienze quotidiane. Questa tendenza oggi, nei nuovi libri, sta crescendo e sta migliorando, però il concetto di inseme nei cicli elementari della scuola è rimasto come concetto di quantità materiale di oggetti e non assume una forma più astratta e formale. Il termine stesso di insieme non si trova come definizione dello stesso, bensì si usa il termine ‘gruppo’, ‘mescolanza’ ecc..

Il concetto di insieme nel bambino nasce, si forma liberamente, in modo naturale, anche e soprattutto perché il suo significato intrinseco è racchiuso nella parola stessa di insieme: “l’atto dell’unione di elementi diversi in uno solo”, cioè nell’insieme gli elementi sono tutti e soli quelli ottenuti dall’atto dell’unione. Sarebbe opportuno già dai primissimi anni delle scuole elementari parlare del linguaggio degli insiemi; infatti il linguaggio insiemistico è necessario non solo per l’algebra, ma anche per l’apprendimento della geometria. Tale linguaggio semplifica il trattamento della materia e nello stesso tempo lo rende più scientifico. Per esempio per un bambino delle elementari è più semplice vedere il cerchio come un insieme di punti equidistanti da uno stesso punto (il centro) piuttosto che vederlo come una linea chiusa, curva ecc.. . Per cui il concetto di insieme di punti va dato ai ragazzi per definire ogni figura, anche nello spazio.

I diagrammi di Eulero-Venn come forma elementare di modelli per gli insiemi si usano molto nella scuola elementare con risvolti positivi in quanto da una parte trattano aspetti dell’insiemistica, dall’altra gettano le basi della matematica che proseguiranno anche nei successivi corsi di studio.

Questi metodi generali aiuteranno i ragazzi a focalizzare l’attenzione, a sistemare i pensieri, schizzando, facendo prove, sporcandosi proprio le mani con la materia, quindi le concoscenze vengono trattate usando diversi sensi fisici in modo da fissare maggiormente e capire più a fondo i concetti.

Vediamo ora una panoramica di come nelle diverse classi di scuola primaria, di scuola secondaria di primo e secondo grado, viene affrontata la trattazione della teoria degli insiemi.

<u>Scuole primarie</u> (scuole elementari): nel ciclo elementare oggi ci sono tanti esercizi nuovi per gli insiemi, inizialmente si usano oggetti reali e poi gradualmete si introducono figure geometriche (triangoli, quadrati, rettangoli, cubi ecc.. . Cfr. [Canali, Gerli] pp. 288-293).

Questi esercizi aiutano a rendere più chiari i concetti e formano anche le premesse per alleggerire i libri di testo dal numero senza fine di esercizi tutti uguali e con la stessa risoluzione.

Utilizzando i diagrammi di Eulero-Venn e con gli esercizi appropriati, nelle scuole elementari possiamo trattare i seguenti concetti:

- insieme di oggetti (finito, vuoto, con un solo elemento, con due o più elementi);

- appartenenenza di un oggetto ad un insieme;
- inclusione di un insieme in un altro;
- uguaglianza di insiemi;
- equivalenza di insiemi;
- complementare di un insieme;
- intersezione di insiemi;
- partizione di un insieme in sottoinsiemi la cui intersezione è vuota.

Certamente tutti questi concetti devono essere trattati con i metodi didattici delle scuole elementari, fornendo esercizi che contengano esempi e controesempi.

<u>Scuole secondarie di primo grado</u> (scuole medie): il concetto di insieme viene ripreso e vengono rivisti quasi tutti i concetti visti sopra, però anche in questo caso l'insieme non viene tenuto in considerazione per tutta la trattazione del programma, di più, questi concetti mancano anche nelle altre materie studiate dai ragazzi come la fisica, la chimica ecc..
Anche la geometria non viene trattata partendo da concetti più elementari come il concetto di punto, retta e piano ma si comincia dal corpo geometrico, superficie, linea, segmento ecc..
La mancanza di un'unificazione di termini diversi che si usano in diverse materie, per quanto concerne il concetto di insieme, fa si che queste materie rimangano separate e lontane dell'applicazione della matematica di oggi.
Osserviamo inoltre che: in geometria si usa ancora il concetto ormai obsoleto di *luogo geometrico* al posto di insieme; in algebra si continua a non fare distinzione tra l'insieme delle radici di un'equazione dall'equazione stessa, più semplice ed equivalente con quella iniziale; vediamo un esempio di questo: consideriamo l'equazione

$$x - 5 = 0.$$

Se si chiede di trovare le radici dell'equazione, uno studente, quasi certamente, scriverà

$$x = 5.$$

Ma $x = 5$ non è radice, è semplicemente un'equazione equivalente a quella di partenza; l'insieme delle radici deve essere rappresentato così: $\{5\}$ e si legge "l'equazione ha come radice il numero $\{5\}$".
Trattando in modo erroneo il concetto di radice di un'equazione, ragionando con gli insiemi, porta gli studenti a commettere gravi errori per la soluzione di equazioni definite in

determinate strutture. Se per esempio consideriamo l'equazione $x+5=0$ in $\mathbb{N}$ non ha soluzione, in $\mathbb{Z}$ ha soluzione ed è {-5}.

Capire cosa rappresenti graficamente l'insieme delle radici, per lo studente, è molto difficoltoso; non viene associato al fatto che un'equazione sia una funzione e dunque la sua rappresentazione sarà un insieme di punti.

Il programma di matematica ma anche quello di altre materie, nelle scuole secondarie, fornisce tante possibilità per usare il concetto di insieme. In geometria per esempio, per quanto riguarda le misure, bisogna caratterizzare un insieme, ad esempio quello dei segmenti, e definire un determinato elemento di quell'insieme (segmento unitario) con il quale confrontiamo e misuriamo tutti gli altri elementi (segmenti) dell'insieme; alla stessa maniera si possono classificare e misurare anche gli angoli per esempio. Quindi la misura è una proprietà intrinseca dell'insieme, concetto fondamentale e importante che non può e non deve sfuggire. Un trattamento non adeguato degli insiemi danneggia anche la comprensione logica se si rinuncia ad un trattamento più approfondito dei concetti propri della logica, inoltre si danneggiano anche gli altri concetti che portano al concetto di struttura.

I concetti proposti nella scuola elementare devono essere trattati ad un più alto livello teorico via via che aumenta il livello di scuola, ossia ci deve essere una crescita. In questa ottica, per esempio, possiamo definire un insieme attraverso i diagrammi di Eulero-Venn e in un secondo momento possiamo presentare lo stesso insieme attraverso le sue proprietà caratteristiche, usando ovunque i simboli di teoria degli insiemi e collegando questi simboli con i simboli della logica.

<u>Scuola secondaria di secondo grado</u> (scuole superiori): nelle scuole superiori ancora oggi si riprendono tutti i concetti dell'insieme già proposti nelle scuole secondarie di primo grado, viene ripetuto tutto dall'inizio.

Per quanto riguarda gli insiemi si trattano questi concetti (cfr. [Sasso])

Proprietà delle operazioni tra insiemi	**Espressione**
proprietà di idempotenza	$A \cap A = A$, $A \cup A = A$
proprietà commutativa di $\cap$	$A \cap B = B \cap A$
proprietà commutativa di $\cup$	$A \cup B = B \cup A$

proprietà associativa di $\cap$	$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
proprietà associativa di $\cup$	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$
leggi di assorbimento	$A\cap(A\cup B)=A$ $A\cup(A\cap B)=A$
proprietà distributiva di $\cap$ rispetto $\cup$	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
proprietà distributiva di $\cup$ rispetto $\cap$	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
leggi di Morgan	$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$ $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$

Inoltre vengono definite usando il linguaggio matematico l'intersezione tra insiemi, l'unione tra insiemi, la partizione di un insieme, differenza tra insiemi, vediamo come:

Intersezione tra due insiemi

L'intersezione di due insiemi A e B è l'insieme, indicato con $A\cap B$, costituito dagli elementi che appartengono sia ad A sia a B.

In simboli: $A\cap B=\{x|x\in A\ \boldsymbol{e}\ x\in B\}$.

Unione tra due insiemi

L'intersezione di due insiemi A e B è l'insieme, indicato con $A\cup B$, costituito dagli elementi che appartengono ad A o a B (o a entrambi).

In simboli: $A\cup B=\{x|x\in A\ \boldsymbol{o}\ x\in B\}$.

Partizione di un insieme

Dato un insieme A una famiglia di suoi sottoinsiemi $A_1A_2,\dots A_n$, si dice che questi formano una partizione di A se verificano le seguenti proprietà:

i) non sono vuoti;

ii) sono a due a due disgiunti;

iii) la loro unione coincide con A.

Differenza tra insiemi

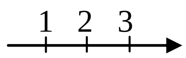
La differenza di due insiemi A e B è l'insieme, indicato con $A - B$, costituito dagli elementi di A che non appartengono a B.

In simboli: $A - B = \{x | x \in A \; e \; x \notin B\}$.

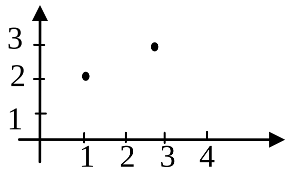
Solo nelle edizioni di testi più recenti si trova questo tipo di trattazione, rigoroso e preciso, certamente sarebbe stato meglio introdurre questo tipo di trattazione molto tempo prima.

Per dare la definizione di insieme sono proposte diverse forme: per elencazione, con proprietà caratteristiche, con i diagrammi per rappresentazione di Eulero-Venn. A mio avviso poteva essere aggiunto anche una rappresentazione geometrica che è molto importante per la visualizzazione grafica, per esempio:

$A = \{1,2,3\}$



$B = \{(1,2),(3,3)\}$



Manca inoltre una rappresentazione tabulare di un insieme e anche geometrica come insieme di punti a disegnare una funzione.

Per introdurre il prossimo paragrafo, che riguarda il prodotto cartesiano, vorrei sottolineare che un insieme può essere rappresentato utilizzando, come già visto, diverse forme. Per evidenziare le proprietà caratteristiche esistono sostanzialmente due forme.

Esempio 2.1.1

$$A = \{x \in N | 1 < x < 5\} \quad \text{e} \quad A = \{x | x \in N \wedge 1 < x < 5\}.$$

La prima è più veloce ma la seconda può essere più utile per l'importanza che ho sottolineato riguardo i collegamenti tra diversi linguaggi, in questo caso matematica, logica e insiemistica.

Inoltre è importante fare osservare che le proprietà caratteristiche di un insieme rimangono le stesse se si apportano modifiche equivalenti all'inisieme di partenza, esempio:

$$A = \{x \in N \mid 2x - 6 = 0\} = \{x \in N \mid 2x = 6\} = \{x \in N \mid x = 3\} = \{3\}.$$

Chiarire attraverso gli esercizi che le proprietà caratteristiche di un insieme possono essere scritte in modi diversi, aiuta lo studente ad apprendere meglio il formalismo matematico e saper riconoscere situazioni del tutto equivalenti tra loro.
Concludo sottolineando che anche se nel testo "Nuova matematica a colori", già citato, questi argomenti sono trattati piuttosto bene, rimagono comunque molto isolati e non sono sfruttati come dovrebbero per aiutare la crescita concettuale di altri argomenti presenti nel programma.

Paragrafo 2.2

La coppia ordinata.
Il concetto di coppia ordinata viene presentatato praticamente da subito nell'insegnamento della matematica, infatti quando si studia la somma di due numeri, si parla già di coppia ordinata; per esempio se consideriamo la somma $2+5$, stiamo prendendo in considerazione la coppia ordinata $(2,5)$. Questo concetto però non vinene sottolineato, chiarito e sviluppato, viene solamente presentata la somma come operazione semplice tra due numeri.
Solo più tardi quando vengono definite le coordinate cartesiane si mette in evidenza la coppia $(2,5)$, definita come un punto del piano rigorosamente diverso dal punto $(5,2)$.
Penso che il concetto di coppia ordinata debba essere sviluppato fin dall'inizio perché in primo luogo non costituisce un concetto particolarmente difficile e in secondo luogo è un modo per ordinare appunto i fattori in tutte le operazioni, non solo nell'addizione.
In prima elementare quando si studiano le decine, le unità e la loro somma, indirettamente si sta già parlando di coppie ordinate, si considerano infatti due numeri uno preso come primo e l'altro come secondo (cfr. [Airoldi, Morgese, Morotti] pp.7, 8) e si sommano. Dunque ogni somma non è una semplice somma di due numeri ma è la somma di un numero con un altro; solo se si gode della proprietà commutativa possiamo definire la somma come somma di due numeri senza badare all'ordine.
Diciamo che per quanto riguarda l'operazione di addizione, limitata allo studio nelle scuole secondarie di primo grado, la mancanza del concetto di coppia ordinata non risulta troppo grave (infatti in questi casi la somma gode sempre della proprietà commutativa), quando però dall'addizione si passa alla sottrazione il problema deve essere affrontato. Infatti, almeno alle elementari, il numero $5-2$ è accettato ma $2-5$ no. In questo esempio è importante sapere, definire chi è il primo fattore e chi il secondo.
Nella scuola elementare, per esempio, abbaimo a che fare con numeri a due cifre dove l'ordine e la posizione dei numeri nella coppia ha un'importanza primaria.

Anche quando, per esempio, si introduce il concetto di frazione l'ordine nella coppia è molto importante, infatti la frazione $3/4$ è diversa dalla frazione $4/3$. In una frazione il primo fattore si chiama numeratore e il secondo denominatore, quindi ogni frazione si può considerare come una coppia ordinata $(a, b) = a/b$.

Le radici delle equazioni a due incognite devono essere interpretate come coppia ordinata e non come sistema di equazioni.

Esempio 2.2.1

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

La soluzione è $(4,1)$.

La coppia ordinata è un elemento fondamentale quando si introduce il concetto di prodotto cartesiano; sul libro di testo "Nuova Matematica a colori" (p.163) per una classe di prima liceo scientifico, troviamo la seguente definizione di coppia ordinata:

si chiama coppia ordinata formata da due elementi a *e* b*, e si indica con* (a, b)*, l'insieme costituito da due elementi* a *e* b*, presi nell'ordine indicato.*

Questa definizione è abbastanza completa però necessita di qualche piccola correzione; non basta infatti specificare l'ordine in cui vengono presi (*presi nell'ordine indicato*) ma bisogna scrivere qual è il primo e quale il secondo. Di seguito propongo una definizione più corretta:

si chiama coppia ordinata l'insieme costituito da due elementi a *e* b *dove uno si dice il primo e l'altro si dice il secondo; si indica con* (a, b)*. In questa forma* a *è il primo elemento e* b *il secondo.*

Segue un'importante relazione:

$$\{a,b\} = \{b, a\} \qquad coppia;$$

$$(a,b) \neq (b,a) \qquad coppia\ ordinata.$$

La coppia ordinata può anche essere rappresentata usando una freccia, o come punto del piano; questo concetto rientra anche nelle definizioni di ogni operazione, relazione e di operazione binaria; viene definita nella scuola non solo con numeri ma anche con insiemi, segmenti, angoli, vettori ecc.

In ogni operazione binaria alla coppia ordinata di oggetti matematici si associa un altro oggetto matematico che è il risultato dell'operazione.

In ogni caso il risultato dell'operazione si scrive in modo che si distingua il primo elemento dal secondo elemento della coppia che fornisce quel risultato.

In molti casi a scuola quando si introduce l'operazione si usano termini singolari in modo da distinguere il primo elemento dal secondo; per esempio $a - b$ è il risultato della sottrazione che corrisponde alla coppia ordinata (a, b). In questo caso il primo elemento viene chiamato minuendo e il secondo sottraendo. Questi appellativi risultano inutili se si ha consapevolezza del concetto di coppia ordinata.

Lo stesso concetto è stato dato anche come l'insieme $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

In questo modo non è necessario specificare tra primo e secondo elemento e non viene usato come assioma l'uguaglianza delle coppie ordinate ma si ricava come conseguenza degli assiomi della teoria degli insiemi, presumibilmente è una scrittura troppo particolare per il percorso che sto affrontando.

Paragrafo 2.3

<u>Il prodotto cartesiano</u>

Il prodotto cartesiano è stato inserito nei libri di testo da non molto tempo, lo troviamo nei manuali di recenti pubblicazioni (cfr. [Sasso] p.163).

Per introdurre il prodotto cartesiano vengono utilizzate diverse rappresentazioni, quali

- tabella a doppia entrata;
- diagramma cartesiano;
- diagramma ad albero.

Però si dimentica che il prodotto cartesiano sia un insieme e come tale deve essere presentato con tutti gli aspetti propri degli insiemi discussi anche nel paragrafo precedente.

Questi sono:

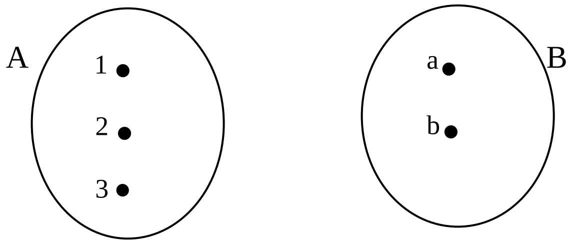
1. per elencazione;
2. con proprietà caratteristica;
3. con diagrammi di Eulero-Venn;

4. grafici cartesiani;
5. tabelle.

Il diagramma ad albero presentato dal libro di testo non rappresenta un modello di prodotto cartesiano bensì è un modo per rappresentare visivamente e calcolare gli elementi.

Esempio 2.3.1

Consideriamo i due insiemi A e B.



Di seguito scrivo esplicitamente ogni punto visto sopra:

1. Elencazione

$$\{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\};$$

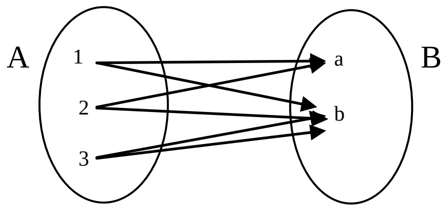
questa rapresentazione è possibile per un numero finito e piccolo di elementi.

2. Proprietà caratteristica

$$AxB = \{x, y \mid x \in \{1, 2, 3\} \wedge y \in \{a, b\}\};$$

questa rappresentazione si usa per gli insiemi finiti.

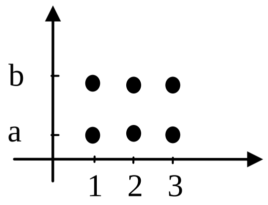
3. Diagramma Eulero-Venn



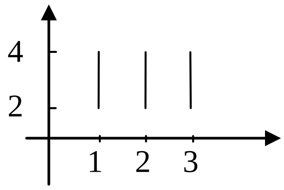
questa rappresentazione si usa per gli insiemi finiti.

4. Grafici cartesiani

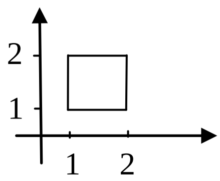
a)



b) $AxB = \{x, y \mid x \in \{1,2,3\} \wedge 2 \leq y \leq 4 \wedge y \in R\}$;



c) $AxB = \{x, y \in R^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \wedge 1 \leq y \leq 2\}$;

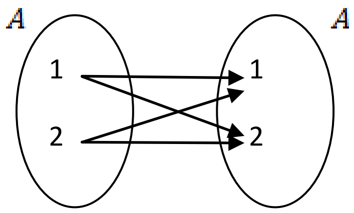


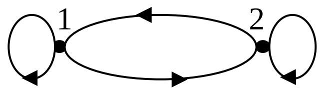
5. Tabella

B A	A	B
1	(1,a)	(1,b)
2	(2,a)	(2,b)
3	(3,a)	(3,b)

A scuola si usano alcune di queste diverse rappresentazioni per esprimere questo concetto. Come già osservato, il diagramma ad albero è un modo per calcolare le possibilità che ci sono ma non è una rappresentazione del prodotto cartesiano. Può essere usato per trovare le disposizioni, le combinazioni ecc.. .
Infine sarebbe opportuno aggiungere anche la nozione di quadrato cartesiano con relativa rappresentazione grafica:

$A = \{1,2\}$ $\qquad$ $A^2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$





Paragrafo 2.4

La relazione

Il concetto di relazione non attraversa tutto il percorso previsto per l'insegnamento della matematica nella scuola anche se tutta la matematica presenta una quantità vastissima di relazioni da studiare riguardanti il concetto stesso.

:

1. Relazioni tra i punti che si trovano nella retta: quale si trova prima e quale dopo, se è lo stesso punto, se si trova tra due punti ecc..
2. Relazioni definite negli insiemi numerici, per esempio numeri uguali, diversi, più grandi o più piccoli, "non è più piccolo di", "è più piccolo di", "è dividendo", "è multiplo", un numero divisibile da un altro ecc..
3. Relazioni nell'insieme della retta come rette parallele, perpendicolari, rette che si intersecano in un punto del piano, rette sghembe ecc..
4. Relazioni tra figure geometriche: figure uguali, congruenti, simili ecc..
5. Relazioni tra insiemi: insiemi uguali, inclusi uno nell'altro, con intersezione diversa dal vuoto, con intersezione vuota ecc..
6. Relazioni tra segmenti: "è più grande di", "è più piccolo di", "è uguale" a, ecc..
7. Relazioni tra angoli: uguali, "più grande di", "più piccolo di", ecc..
8. Relazioni tra affermazioni: "segue", "è equivalente", ecc..
9. Relazioni tra equazioni: "hanno stesse radici", "equivalenza di equazioni", ecc..

Nel risolvere diversi problemi, anche nella vita quotidiana, i ragazzi hanno a che fare con le operazioni binarie come "è più alto", "è più basso", "è più anziano", "costa più caro", "è padre", "è madre", "ha la stessa età", "è più leggero", ecc.. .

Già dalla prima elementare nei libri di testo vengono rappresentate immagini di insiemi con oggetti reali ben ordinati, a volte persino ordinati da relazioni contrarie come prima o dopo, dentro o fuori, sopra o sotto, più lungo o più corto, più grande o più piccolo. Ad ogni modo queste relazioni non presentano un trattamento teorico adeguato e più avanti proverò a esporne uno.

Oggi si studiano solo elementi che vengono messi in relazione tra loro e non si studia la relazione stessa, non si mettono in evidenza le sue proprietà, non ci si sofferma e non si ragiona sulla base di queste proprietà e dunque non si arriva ad una generalizzazione di queste nelle classi più avanzate.

Nei libri di testo per le scuole superiori di recente pubblicazione, le proprietà della relazione sono trattate, però sarebbe necessario avere una preparazione adeguata prima di iniziare le scuole secondarie superiori. Per esempio quando si studiano le figure simili ci si sofferma solo e unicamente sulle figure simili appunto e non sulla similitudine, la stessa cosa accade quando si studia la congruenza; in entrambi i casi senza approfondire tutte le proprietà delle diverse relazioni. Questa mancanza ci impedisce di arrivare ad una generalizzazione teorica.

Possiamo chiamare una tripla ordinata un insieme costituito da due insiemi e una relazione tra questi: $\{(A,B,G)\}$ dove G è un sottoinsieme del prodotto cartesiano AxB. Chiamiamo A insieme di partenza e B insieme di arrivo e G è il grafo della relazione R, quindi

$$R = \{(A,B,G)\}.$$

Riporto di seguito la definizione di relazione tra due insiemi tratta dal libro di testo "Nuova Matematica a colori":

Dati due insiemi non vuoti A e B (che possono eventualmente coincidere), si dice relazione tra A e B un procedimento che permette di associare ad alcuni (o a tutti) gli elementi di A uno o più elementi di B.

Questa definizione può creare confusione e si può correggere affermando che la relazione è un sottoinsieme del prodotto cartesiano AxB mentre nel libro di testo si usa il termine "procedimento" che allontana dal vero concetto di relazione.

Una relazione di A con B si considera data solo e solo se è dato il suo grafo; se invece è dato il grafo vuol dire che è stata data la proprietà caratteristica che definisce l'insieme delle relazioni.

Dunque una relazione tra A e B è intesa come una proprietà caratteristica definita in AxB.

Nel caso in cui $A = B$ la relazione binaria di A con A si dice relazione in A oppure come una proprietà caratteristica definita su A^2.

Nelle scuole secondarie superiori si può definire la relazione binaria ma generalizzando anche la relazione n-aria e, per esempio, un ternario sarà un sottoinsieme del prodotto cartesiano $AxBxC$.

Il concetto di relazione binaria è un concetto che deve percorrere tutte le materie presenti nella scuola e non solo nella matematica perché costituisce un aspetto basilare del ragionamento logico.

Nella didattica per la trattazione della relazione sono utili le forme di rappresentazioni insiemistiche perché, come già detto, la relazione deve essere concepita come sottoinsieme di un prodotto cartesiano.

Vediamo di seguito, come visto per la coppia ordinata, alcuni metodi di rappresentazione trattati dal libro di testo per le superiori "Nuova Matematica a colori" per la seguente relazione tra insiemi: consideriamo $A = \{2,3,4\}$, $B = \{4,5,6\}$; un elemento x di A è in relazione (R) con un elemento y di B se e solo se x e y sono primi tra loro.

1. Elencazione

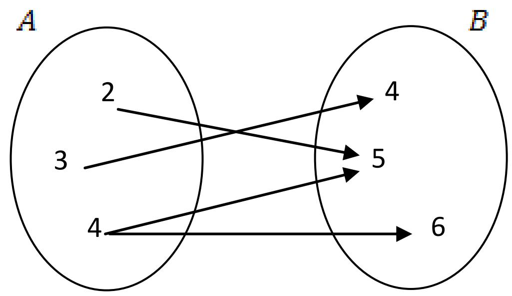
Bisogna elencare tutte le coppie ordinate di AxB in cui x è in relazione con y (xRy)

$$G = \{(2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}.$$

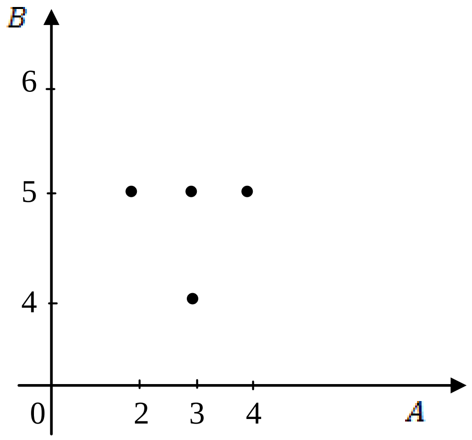
2. Proprietà caratteristica

$$G = \{x, y \mid MCD(x, y) = 1, \forall\, x \in A \wedge \forall\, y \in B\}.$$

3. Diagammi di Eulero-Venn



4. Grafico cartesiano



5. Tabelle

B \ A	4	5	6
2		x	
3	x	x	
4		x	

a.

B \ A	4	5	6
2	0	1	0
3	1	1	0
4	0	1	0

b.

B \ A	4	5	6
2		(2,5)	
3	(3,4)	(3,5)	
4		(4,5)	

c.

B \ A	4	5	6
2	F	V	F
3	V	V	F
4	F	V	F

d.

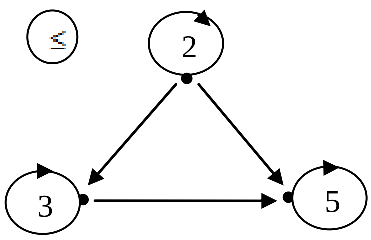
Le quattro tabelle rappresentano quattro modi possibili per rappresentare la relazione.

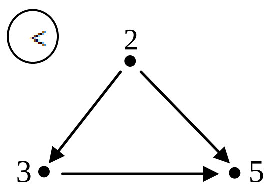
La trattazione fatta dal libro di testo risulta piuttosto ricca, manca comunque un esempio di relazione lineare in un insieme A; allora si può aggiungere un esempio che utilizzi un altro tipo di rappresentazione.

Esempio 2.4.1

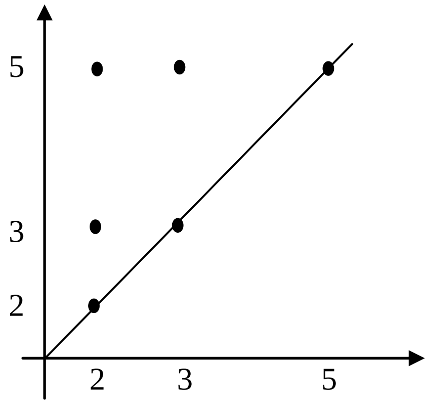
Sia $A = \{2, 3, 5\}$; consideriamo le relazioni "$\leq$" e "$<$" tra gli elementi dell'insieme A.

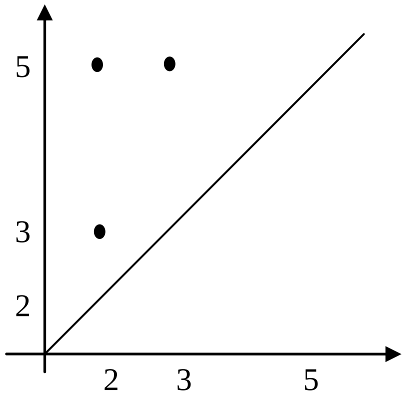
Con grafi:





Con grafici:





Un altro importante argomento da affrontare a scuola, legato al concetto di relazione binaria, è quello di relazione inversa. In nessun libro di testo preso in considerazione viene trattata la relazione inversa. Vediamone un cenno di trattazione con qualche rappresentazione grafica.

La relazione $R^{-1} = (A, B, G^{-1})$ è l'inversa di $R = (A, B, G)$ se e solo se vale la seguente

$$(\forall (x, y) \in AxB)\ \left((x, y) \in G^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in G\right).$$

Da questa espressione si ricava che $(R^{-1})^{-1} = R$. Quindi considerata una relazione, possiamo sempre calcolare la relazione inversa.

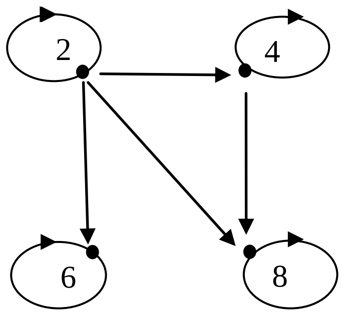
I due elementi (x, y) e (y, x) si dicono simmetrici mentre (x, x) si dice simmetrico a se stesso. Quindi G^{-1} è costituito da tutti gli elementi simmetrici al grafo G; la tabella di R^{-1} si ottiene facendo al simmetria rispetto alla diagonale principale.

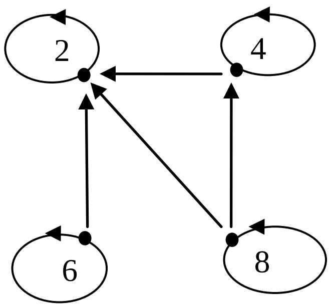
Nelle rappresentazioni con le frecce G^{-1} e G hanno le stesse frecce con verso contrario.

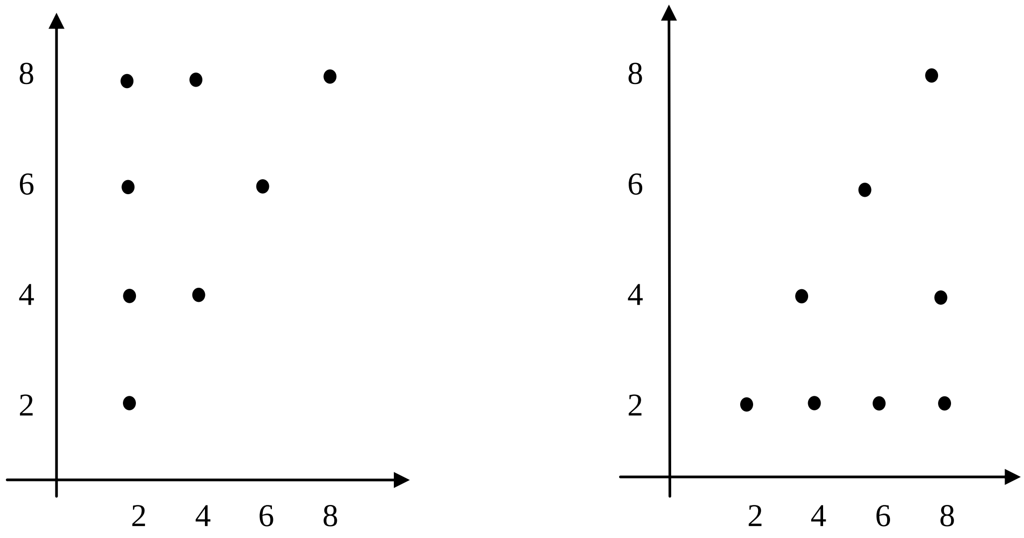
Esempio 2.4.2

Sia $A = \{2,4,6,8\}$ un insieme; le relazioni "divide" ed "è multiplo" sono una l'inversa dell'altra.

Vediamolo direttamente dalla rappresentazione con grafo e con rappresentazione cartesiana di entrambe le relazioni:







Queste quattro forme ci aiutano anche per introdurre le proprietà delle relazioni binarie.

Paragrafo 2.5

Dopo aver spiegato cosa sia una relazione e averla esaminata più nel dettaglio utilizzando una trattazione grafica, analizzo quanto esposto in alcuni libri di testo. In quasi tutti i testi presi in esame sono presentate le proprietà della relazione; ho deciso di riservare un paragrafo a questa parte perché, a mio avviso, ci sono diverse cose da sottolineare e da tenere in considerazione.

Innanzitutto, tutti i libri di testo considerati, a parte uno ("Algebra"), riservano una trattazione alle proprietà della relazione (proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva, antiriflessiva e antisimmetrica). In qualche testo è riservata una trattazione più discorsiva mentre in altri più matematica e formale. Vediamo ad esempio la trattazione delle proprietà della relazione adottata dal libro di testo "Scopriamo l'Algebra"; questa parte di teoria risulta molto accurata ed è presentata utilizzando un esempio che riporto di seguito.

Consideriamo una relazione binaria R in un insieme A.

Ad esempio, sia $A = \{x \mid x \ persone\}$ e introduciamo in A la relazione:

$$xRy \Leftrightarrow x \text{ è nato nello stesso anno di } y.$$

La relazione gode della

- Proprietà riflessiva: $\forall x \in A \quad xRx$.

  Nota che una relazione è *riflessiva solo se il suo grafo G contiene tutte le possibili coppie* (x, x).

Se sai che Aldo ha la stessa età di Nadia, puoi anche dire che Nadia ha la stessa età di Aldo, per cui R gode, anche, della

- Proprietà simmetrica: $xRy \Rightarrow yRx$,

  cioè una relazione è simmetrica se tutte le volte che un elemento x è in relazione con un elemento y, anche y è in relazione con x.

  Una relazione è *simmetrica se e solo se per ogni coppia* (x, y) *appartenente al grafo anche* (y, x) *appartiene al grafo.*

Se sai che Marco è nato nello stesso anno di Lucia e Lucia è nata nello stesso anno di Francesca, sei sicuro che anche Marco è nato nello stesso anno di Francesca, per cui R gode della

- Proprietà transitiva: $(xRy) \wedge (yRz) \quad \Rightarrow \quad xRz;$

  cioè una relazione è transitiva se tutte le volte che un elemento x è in relazione con un elemento y e l'elemeto y, a sua volta, è in relazione con un elemento z, allora anche l'elemento x è in relazione con z.

  Una relazione è transitiva se e solo se $(\forall(x,y) \in G \; e \; \forall(y,z) \in G) \Rightarrow (x,z) \in G$.

Per presentare le restanti proprietà (antitransitiva e antisimmetrica) viene dato un altro esempio e si procede come nel precedente, però la trattazione risulta meno precisa, vediamo di seguito l'esempio e poi facciamo qualche osservazione:

consideriamo $U = \{u \mid u \; uomini\}$ e introduciamo la relazione

$$\forall(x, y) \in UxU \quad xRy \Leftrightarrow (x \; cognato \; di \; y).$$

Questa relazione non è transitiva giacchè un uomo non può essere cognato di se stesso, non potendo sposare la sorella, gode della

- Proprietà antiriflessiva: $\forall \; x \in A \quad \overline{xRx}$
- Proprietà antisimmetrica: $\big((xRy) \wedge (yRx)\big) \Rightarrow x = y$ o, equivalentemente,

$$\big((xRy) \wedge (x \neq y)\big) \Rightarrow \overline{yRx}.$$

Per queste due proprietà, il libro di testo, come osservato, riserva una trattazione imprecisa e scarna; inoltre non si parla affatto di proprietà nonriflessiva, nonsimmetrica e nontransitiva e ciò a mio avviso può rappresentare un ostacolo per una conoscenza approfondita di tutte le proprietà della relazione.

Di seguito propongo una trattazione dell'argomento, cercando di esporre in modo chiaro ed esauriente tutte le proprietà della relazione, servendomi non solo di un linguaggio matematico, ma, come visto nella trattazione fatta dal libro di testo "Scopriamo l' Algebra", anche del linguaggio proprio della logica.

Una relazione R in un insieme A è riflessiva se $\forall\, x \in A \quad xRx$. Nella scuola ci sono moltissimi esempi di relazioni riflessive, per esempio, "$\geq$","$\leq$", nell'insieme dei numeri naturali le relazioni "è divisore", "è multiplo", la relazione di parallelismo tra rette ecc.

Dalla definizione si capisce che il grafo di una relazione che gode della proprietà riflessiva, contiene tutte le coppie (x, x), includendo nel grafo anche la diagonale di A^2.

La rappresentazione tabellare, in questo caso, risulterà quadrata con tutti e soli gli elementi disposti sulla diagonale principale. Mentre nella rappresentazione con le frecce, da ogni elemento dell'insieme di partenza parte una freccia che torna in quell'elemento. Nella rappresentazione cartesiana avremo tutti gli elementi disposti sulla bisettrice del 1° e 3° quadrante.

Una relazione è nonriflessiva nel caso in cui almeno una $x \in A$ non è in relazione con sé stessa.

Una relazione è antiriflessiva se $\forall x \in A$ si ha $\overline{xRx}$; quindi una relazione antiriflessiva non ha nemmeno una coppia (x, x).

Osserviamo che una relazione antiriflessiva è anche nonriflessiva ma non vale il viceversa.

Esempio 2.5.1

Si considera l'insieme $A = \{1, 2, 3\}$ con grafo $G = \{(2,3), (2,2)\}$.

In G non c'è la coppia $(3,3)$, dunque la relazione è nonriflessiva ma non è antiriflessiva.

Alcuni esempi di relazioni antiriflessive sono: la perpendicolarità di rette ad un piano, le relazioni "$<$", "$>$" in un insieme, la relazione "è padre" ecc.

Una relazione R in A si dice simmetrica se $\forall (x, y) \in A^2 \quad (x, y) \in G \Rightarrow (y, x) \in G$.

In altre parole una relazione in A si dice simmetrica quando è uguale alla sua relazione inversa. Esempi di relazioni simmetriche sono l'uguaglianza tra insiemi, la perpendicolarità e

il parallelismo tra rette ecc. La rappresentazione tabulare di una relazione simmetrica risulta simmetrica, appunto, rispetto alla diagonale principale, mentre il grafico cartesiano è un insieme di punti simmetrici rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante e i punti che si trovano sulla bisettrice stessa.
Una relazione che non è simmetrica si chiama nonsimmetrica ed ha come grafico un insieme di punti tra i quali ne esiste almeno uno che non appartiene a G, ossia tale che non è simmetrico rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante.

Una relazione in A si dice antisimmetrica se $\forall\ (x,y) \in A^2\ ((xRy)\wedge(yRx) \Rightarrow (x=y))$.
In altre parole una relazione antisimmetrica è una relazione il cui grafico cartesiano non ha coppie simmetriche rispetto la bisettrice del 1° e 3° quadrante ad eccezione di alcune coppie che stanno sulla diagonale di A^2. Nella rappresentazione con le frecce una relazione antisimmetrica può avere qualche freccia che si chiude in se stessa ma non ha nessuna coppia di frecce che tornano reciprocamente. Osserviamo che una relazione antisimmetrica è anche nonsimmetrica, ma non sempre vale il viceversa.

Esempio 2.5.2
$G = \{(1,2),(2,1),(2,3)\}$ è nonsimmetrica ma non è antisimmetrica. La distinzione tra antisimmetrica e nonsimmetrica è molto importante perché valga la proprietà nonsimmetrica basta negare la proprietà data per un solo elemento del grafo, mentre per l'antisimmetrica dobbiamo negare la proprietà per tutti gli elementi.

Una relazione in A è transitiva se $\forall\ (x,y,z) \in A^3 \quad ((xRy)\wedge(yRz)) \Rightarrow xRz.$
Nella rappresentazione della proprietà transitiva nel grafico con le frecce, si forma sempre un triangolo, ossia

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] & \\ y \arrow[rr] & & z \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Una relazione nontransitiva è una relazione per cui $\exists$ una tripla che non gode di questa proprietà. Ad esempio la relazione "è padre" è nontransitiva.

Una relazione è antitransitiva quando tutte le triple non si chiudono.

Paragrafo 2.6

Relazione di equivalenza, partizione di un insieme, classificazione

Nei libri di testo presi in considerazione la trattazione della relazione di equivalenza risulta piuttosto limitata e in alcuni casi anche imprecisa o addirittura fuorviante.

Per esempio nel libro di testo "Scopriamo l'Algebra" (p.93) per introdurre la definizione di classe d'equivalenza si propone un esempio a mio avviso poco significativo infatti si considera la relazione

$$xRy \Leftrightarrow x \text{ ha lo stesso numero di cifre di } y$$

E si considerano i sottoinsiemi di N in ognuno dei quali si trovano gli elementi equivalenti tra loro: $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\};\{10,11,12,..,50,..,97,98,99\};\{100,101,..,997,998,999\}$.. che vengono dette classi di equivalenza.

Di seguito si dà la definizione:

Sia R una relazione d'equivalenza in A; considerato un qualsiasi elemento a di A, si chiama classe di equivalenza determinata da a, l'insieme costituito da tutti gli elementi di A che sono equivalenti ad a.

L'esempio risulta poco efficace mentre la definizione non aiuta certamente a comprendere cosa effettivamente sia una classe di equivalenza.

Nel libro di testo "Nuova Matematica a colori" (p.211), questo argomento viene trattato decisamente in modo più appropriato e preciso anche se si predilige un linguaggio discorsivo piuttosto che matematico. Dopo aver fornito un esempio calzante, ossia la relazione $xRy \Leftrightarrow x \text{ appartiene alla stessa classe di } y$, viene sottolineato il fatto che questa relazione permette di eseguire una partizione: infatti, spiega il testo, la relazione permette di suddividere gli studenti di una scuola in base alla classe cui appartengono, soffermandosi a riflettere sulle caratteristiche di questa suddivisione come segue:

- Ogni studente della scuola appartiene ad una classe;
- Due classi diverse non hanno studenti in comune;
- L'unione degli studenti di tutte le classi riproduce l'insieme di tutti gli studenti della scuola.

A questo punto viene sottolineato il fatto che questa relazione rappresenta una partizione e si specifica che, in generale, una qualsiasi relazione di equivalenza costituisce una partizione dell'insieme in cui è definita. Prosegue in questo modo, citando testualmente:

ogni classe di equivalenza è costituita da un elemento dell'insieme in cui la relazione è definita e da tutti quelli a esso equivalenti (cioè ad esso corrispondenti nella relazione d'equivalenza).

Segue la definizione: dato un insieme A, in cui è definita una relazione di equivalenza R, si dice classe di equivalenza di un elemento a in A, e si indica con $[a]$, il sottoinsieme di A formato da tutti gli elementi di A che sono in relazione con a tramite R.

Come già detto questa trattazione risulta precisa e corretta; l'unica carenza, a mio avviso, è il fatto che manchi di un linguaggio prettamente matematico. Di seguito presento una possibile trattazione con l'intento di rendere più chiaro l'argomento usando il linguaggio matematico.

Alla luce di quanto è stato trattato nel paragrafo precedente (proprietà delle relazioni) inizierò fornendo la definizione di relazione di equivalenza:

Una relazione si dice di equivalenza in un insieme A se valgono le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Per esempio "uguaglianza tra insiemi", "similitudine delle figure", "congruenze", "parallelismo" ecc.

Quando si parla di relazioni di equivalenza, anche la simbologia cambia; infatti di solito per indicare che un elemento x è in relazione d'equivalenza con y si scrive $x \sim y$. L'elemento che rappresenta la classe si indica con $[x]$ e x si chiama rappresentante di quella classe.

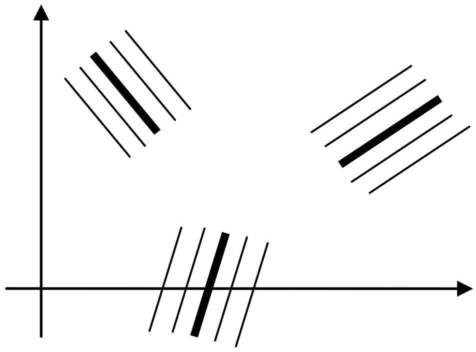
Se per esempio si considera la seguente relazione $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = cd$, le due frazioni, $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, si dicono uguali o equivalenti.

Ogni frazione rappresenta una classe di equivalenza, ad esempio $\frac{1}{2} = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6} \dots\}$ ha queste classi di equivalenza e ogni rappresentate è uguale ad ogni elemento della sua classe.

L'insieme di tutte le classi di equivalenza di un insieme A, costituiscono un sottoinsieme di A che si chiama insieme partizione e si indica con $P(A)$; i suoi elementi sono appunto le classi di equivalenza formate da tutti gli elementi di A.

Le classi di equivalenza che si formano in un insieme, data una relazione d'equivalenza, sono utili anche per la comprensione di concetti che verranno presentati nel triennio, come ad esempio la relazione di parallelismo nell'insieme delle rette nel piano.

Ogni retta ha la sua classe che è costituta da tutte le rette parallele ad una data (fascio di rette parallele).



Ogni fascio di rette equivalenti è infatti una direzione, quindi si forma nella mente dello studente il concetto di direzione.

Diamo ora la definizione formale di partizione di un insieme A:

sia A un insieme; siano $A_1, A_2, A_3, \dots$ una partizione di A, allora vale:

i. $A_1, A_2, A_3, \dots \neq \emptyset$

ii. $A \in \bigcup_i A_i$

iii. $A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$.

La partizione è alla base di tutte le classificazioni. Il concetto di classe, oppure sinonimi quali “tipo”, “famiglia”, “specie”, …, si incontrano dappertutto pertanto la scuola ha il compito di educare al pensiero scientifico riguardo la classificazione.

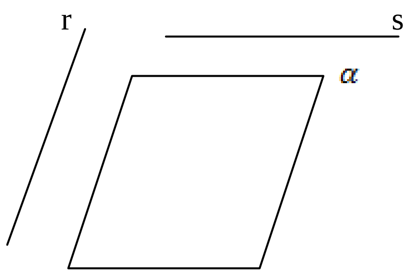
Si sa che una relazione di equivalenza A definisce una ripartizione dell’insieme e viceversa, per cui tutte le relazioni di equivalenza in un insieme A si possono ottenere facendo tutte le possibili ripartizioni dell’insieme.

Un’osservazione che mi sembra doveroso fare è la seguente: quando parliamo di relazione di equivalenza, di partizione e di classificazione, ci si riferisce sempre ad un solo insieme.

Se consideriamo la relazione di parallelismo nell’insieme delle rette, questa è una relazione d’equivalenza; se consideriamo la stessa relazione tra rette e piani non abbiamo più una relazione di equivalenza. Nel primo caso valgono tutte e tre le proprietà (riflessiva, simmetrica e transitiva), mentre nel secondo caso la proprietà transitiva non è verificata:

$r \parallel \alpha,\ \alpha \parallel s,$

ma $r \nparallel s$



Relazione d'ordine

La relazione d'ordine viene trattata in quasi tutti i libri di testo presi in considerazione; solo in un paio di questi viene fatta una trattazione precisa e dettagliata, mentre negli altri o risulta del tutto assente oppure viene svolta in modo breve e sbrigativo. I testi che considerano la relazione d'ordine presentano trattazioni diverse: alcuni (cfr. [Canduro, Fagnani, Liguori] p.96 e [Bruno, Cavalieri, Lattanzi] pp.84, 85) definiscono dapprima la relazione d'ordine e in un secondo momento spiegano la differenza tra relazione d'ordine in senso stretto e in senso largo. Mentre altri libri di testo (cfr. [Sasso] p.216 e [Dodero, Baroncini, Manfredi, Fragni] pp.158,159) presentano solo la differenza tra relazione d'ordine in senso stretto e in senso largo, specificando che la relazione d'ordine in senso largo coincide con la relazione d'ordine.
Riassumo in modo schematizzato i concetti presentati dai due tipi di trattazione:

- 1° metodo:

Relazione d'ordine

$$\begin{cases} proprietà\ antisimmetrica \\ proprietà\ transitiva \end{cases}$$

Relazione d'ordine in senso stretto

$$\begin{cases} proprietà\ antisimmetrica \\ proprietà\ transitiva \\ proprietà\ antiriflessiva \end{cases}$$

Relazione d'ordine in senso largo

$$\begin{cases} proprietà\ antisimmetrica \\ proprietà\ transitiva \\ proprietà\ riflessiva \end{cases}$$

- 2° metodo:

Relazione d'ordine in senso largo o relazione d'ordine

$$\begin{cases} proprietà\ antisimmetrica \\ proprietà\ transitiva \\ proprietà\ riflessiva \end{cases}$$

Relazione d'ordine in senso stretto

$$\begin{cases} proprietà\ antiriflessiva \\ proprietà\ transitiva \end{cases}$$

Prendiamo ad esempio l'esposizione presentata nel libro "Scopriamo l'Algebra" che a mio avviso risulta la più interessante in quanto utilizza un linguaggio prettamente matematico, seguendo il secondo metodo descritto sopra. Inizialmente viene data la definizione di relazione d'ordine in senso stretto, seguita da un esempio; in secondo luogo si da la definizione di ordine in senso largo che coincide con quella di ordine; infine conclude con la definizione di ordine totale.

Vediamo di seguito come, citando testualmente:

una relazione binaria in un insieme A che sia transitiva e antiriflessiva è una relazione di ordine stretto.

Una relazione di ordine stretto tra numeri naturali, che trova vasta applicazione in matematica è quella di 'minore', cioè: $\forall\ (x,y) \in N\text{x}N \quad xRy \Leftrightarrow x < y$.

Questa relazione è antiriflessiva perché un numero non è minore di se stesso; quindi $\forall\ (x,x) \in N\text{x}N \ \ \overline{xRx}$*; transitiva perché* $\forall\ x,y,z \in N\text{x}N\text{x}N \quad x < y \text{ e } y < z \Rightarrow x < z$.

Grazie a questa relazione diamo un ordinamento ai numeri naturali e infatti scriviamo $N = \{1, 2, 3, 4, \dots, 18, \dots\}$. *Essendo una relazione d'ordine stretto antiriflessiva, in essa mancano le coppie del tipo* (x,x).

Prendiamo in considerazione, ad esempio, la relazione '$<$*' nell'insieme* N, *ed aggiungiamo le coppie* $(x,x)\ \forall\ x \in N$. *Otteniamo così la relazione:*

$\forall\ (x,y) \in N\text{x}N \quad xR_1y \Leftrightarrow x \leq y \Leftrightarrow (x < y) \vee (x = y)$.

La relazione R_1 *gode delle proprietà*:

- Riflessiva $\forall\ x \in N \ \ xR_1x$ dato che $x = x$;
- Antisimmetrica $\forall\ (x,y) \in N\text{x}N \ \ (x \leq y \ \ e \ \ y \leq x) \Rightarrow x = y$;
- Transitiva $\forall\ (x,y,z) \in N\text{x}N\text{x}N \ \ (x \leq y \ \ e \ \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

Abbiamo così costruito una relazione d'ordine largo cioè:

Una relazione binaria in un insieme A *si dice d'ordine largo o, semplicemente, d'ordine quando è riflessiva, antisimmetrica e transitiva.*

Il capitolo termina con una definizione di relazione d'ordine totale non del tutto corretta e piuttosto sbrigativa. Riporto di seguito la definizione che viene data e subito dopo la definizione fornita da un altro libro di testo (cfr. [Sasso]) in modo da poter vedere in dettaglio cosa penso sia sbagliato:

una relazione R d'ordine in un insieme A è d'ordine totale se comunque si scelgano due elementi distinti di A, essi sono sempre confrontabili.

La seconda definizione di ordinamento totale è la seguente:
consideriamo una relazione d'ordine in un insieme A; se, comunque scelti due elementi distinti di A, essi sono confrontabili, si dice che la relazione è di ordine totale.

Nella definizione riportata dal primo libro di testo si usa il termine "confrontabili" senza nemmeno aver definito il suo significato; nel secondo caso si spiega cosa si intende per "non confrontabili" e cioè: definita una relazione d'ordine R possono esistere coppie di elementi per cui non è vero né che x è in relazione con y, né che y è in relazione con x: due elementi di questo tipo si dicono non confrontabili rispetto alla relazione R. Quindi penso che la chiarezza, anche verbale, nella terminologia che si sceglie di utilizzare sia fortemente necessaria; non ha molto senso definire cosa si intende per "non confrontabili" quando poi nella definizione si usa il suo concetto opposto, ossia il termine "confrontabili".

Anche altri libri di testo presentano all'incirca le stesse definizioni e mettendoli a confronto, la differenza sostanziale sta nell'esplicitare quali proprietà definiscono in particolare la relazione d'ordine in senso stretto accompagnata da una mancata definizione precisa di relazione d'ordine. Come abbiamo visto in questa trattazione le proprietà che definiscono la relazione d'ordine in senso stretto sono la proprietà transitiva e antiriflessiva.
Ad esempio nel testo "Nuova Matematica a colori", la stessa definizione viene data secondo le stesse proprietà con l'aggiunta della proprietà antisimmetrica. In un altro libro di testo, "Numero", addirittura si definisce relazione d'ordine in senso stretto solo se la relazione verifica la proprietà transitiva.
Dunque, a mio avviso, c'è un po' di confusione riguardo le diverse definizioni di relazioni d'ordine in senso stretto mentre la definizione di relazione d'ordine in senso largo è la stessa quasi in tutti i libri di testo, e in alcuni casi equivale alla definizione di relazione d'ordine.

Abbiamo osservato come la trattazione dell'argomento viene presentata in modi diversi dai vari libri di testo (ciò dovuto al fatto che ci sono più proposte didattiche per presentare questo argomento), ma in sostanza le diverse trattazioni risultano corrette tolto qualche raro caso di illustrazione troppo superficiale e sbrigativa.

Il vantaggio nell'utilizzare il primo metodo, dei due visti sopra, piuttosto che il secondo, sta nel fatto che sia "$<$" che "$\leq$" definiscono una relazione d'ordine. Questo aspetto è sicuramente più intuitivo per gli studenti che implicitamente vedono anche in "$<$" un ordinamento mentre nel secondo metodo solo il "$\leq$" soddisfa le proprietà richieste dalla relazione d'ordine.

Infine penso sia doveroso proporre una definizione di relazione d'ordine totale più chiara e formale di quelle incontrate nei diversi libri di testo.

Di seguito propongo un semplice schema logico che riassuma e risolva in modo definitivo (almeno in questa sede) le proprietà delle diverse relazioni.

Relazione d'ordine	Relazione d'ordine in senso stretto
$\begin{cases} proprietà\ antisimmetrica \\ proprietà\ transitiva \end{cases}$	$\begin{cases} proprietà\ antiriflessiva \\ proprietà\ transitiva \end{cases}$

Definizione

Una relazione d'ordine si dice totale se è una relazione d'ordine tale che

$$\forall (x, y) \in AxA \quad (x \neq y) \Rightarrow ((xRy) \vee (yRx))$$

L'ordine totale lo troviamo nell'insieme dei numeri naturali, interi e reali; però in tutti questi insiemi abbiamo anche relazioni che non sono totali, per esempio la relazione "è multiplo" in $\mathbb{N}$ è di ordine ma non totale.

In ogni insieme A se è data una relazione d'ordine R possiamo definire subito un'altra relazione R' con l'aiuto dell'equivalenza. Definito il minore, allora se ad esempio

$$(x < y) \Leftrightarrow (y > x),$$

si dimostra subito che anche la nuova relazione è d'ordine e si chiama relazione d'ordine inversa. Per cui possiamo sempre considerare una coppia di relazioni d'ordine contrarie in un insieme A; ad esempio "divide" ed "è divisore", "minore" e "maggiore", "minore uguale" e "maggiore uguale", "$\subset$" e "$\supset$" ecc.. .

Questo ci aiuta a risparmiare sulle definizioni da dare agli studenti alleggerendo così il carico di studio.

CAPITOLO III – La Funzione

La trattazione del concetto di funzione presenta da sempre una certa confusione tra il concetto di funzione, appunto, e quello di applicazione. Il concetto di funzione è fondamentale nella scuola superiore quindi una definizione precisa è fondamentale per definire altri concetti quali l'operazione binaria, interna ed esterna, trasformazioni geometriche ecc.. ossia concetti base che portano al concetto di struttura matematica. Il problema delle funzioni nelle scuole è molto vasto, cercherò di inquadrare solo la definizione e le proprietà più importanti che sono legate alla definizione e la rendono più chiara.

Il concetto di funzione trasmette in matematica la dipendenza tra diversi processi e quantità fisiche. Prima di diventare un concetto matematico, la funzione ha percorso una strada lunghissima, cambiando forma e definizione ma mantenendo la sua sostanza.

Anni fa, in quasi tutti i libri di testo, il concetto di funzione veniva trattato seguendo il metodo tradizionale in cui era primario il concetto fisico e non quello matematico. Il trattamento nella scuola ha seguito tutte le fasi dello sviluppo storico dell'argomento fino ad arrivare alla concezione che abbiamo oggi di funzione.

Considerando la funzione come concetto fisico (cfr. [Dodero, Baroncini, Manfredi, Fragni] p.178), essa viene caratterizzata come legge, legame, tra diverse quantità che cambiano (ad esempio la proporzionalità diretta e indiretta). Vengono presentate quantità fisiche dove il cambiamento di una quantità porta al cambiamento dell'altra. In questo legame le due quantità non sono in posizione simmetrica, cioè, secondo la concezione fisica, una diventa la base per i valori dell'altra. Quindi in altre parole la seconda quantità dipende solo ed unicamente dalla prima che risulta totalmente indipendente.

Se al tempo t attribuisco un valore, questo è l'argomento, mentre il processo S è una funzione di tale valore. Questa situazione funzionale fisica, in matematica, tradizionalmente, viene presentata così: $f(x) = y$. La lettera x è interpretata come argomento indipendente che varia e la lettera y è la quantità definita da x. Ma attenzione: in questo modo si rischia di passare agli studenti un messaggio sbagliato, ossia che la funzione sia una quantità che cambia la y.

$$y = 2x + 1, \quad y = x^2, \quad y = \frac{1}{x},$$

rappresentazioni analitiche di funzioni. Spesso si scrivono anche così: $y = f(x)$ o anche $S = S(t)$.

Questo trattamento semplicissimo con modelli concreti, porta al concetto di funzione ma trattare la funzione come quantità che cambia fisicamente limita molto la ricerca didattica. Quando si fa ricerca si studiano situazioni funzionali di cui non serve sapere se fisicamente esistano oppure no. Tante proprietà della funzione, quali suriettività, iniettività, biiettività, possono essere studiate prima di studiare la sostanza funzionale. Nel tempo la matematica ha cercato di superare l'impronta fisica della funzione chiamando funzione non la quantità y ma direttamente l'espressione $f(x)$.

Nell'uguaglianza $y = f(x)$ la x ha conservato il suo nome, argomento, e il suo ruolo di quantità indipendente, mentre y rappresentava un simbolo della funzione dato dall'espressione $f(x)$. In questo modo nacque il concetto di funzione come espressione i cui valori dipendono dai valori assunti dalla variabile. Inizialmente l'espressione veniva considerata come espressione analitica, come struttura formale, composta dalla variabile x e dai simboli delle operazioni.

Quindi in primo luogo per definire una funzione viene usata una regola per trovare i valori corrispondenti e non i modi in cui sono date queste regole con l'aiuto di espressioni, grafici, tabelle, frasi ecc.. .Questa regola, legge, corrispondenza, ha iniziato ad assumere il nome di funzione e quindi nell'uguaglianza $y = f(x)$ la lettera f si chiama funzione.

A questo proposito riporto la definizione del 1837 proposta del grande matematico Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859):

"se una variabile y ha una relazione con una variabile x tale che, ogni qualvolta venga assegnato un valore numerico alla x, esiste una regola in base alla quale viene determinato un valore univoco di y, si dice che y è una funzione della variabile indipendente x".

Questo modo di trattare la funzione ha dato la possibilità di studiare non solo funzioni con argomenti numerici, ma anche funzioni definite in insiemi di natura diversi da quelli numerici. Da questo trattamento, inoltre, si è capito che non ha nessuna importanza la forma concreta con cui viene data la regola, se nella forma tabellare, analitica, grafica, e per di più questa regola ha iniziato a prendere il nome di applicazione per distinguerla dalla funzione numerica. Oltre all'appellativo di applicazione, la funzione viene anche chiamata corrispondenza oppure anche corrispondenza biunivoca oppure corrispondenza univoca.

All'inizio del secolo scorso la teoria degli insiemi è diventata la base per la costruzione della matematica ed è proprio in questa teoria che si è sviluppato il concetto di funzione. Esaminiamo quattro modi di introdurre la funzione che sono (o erano) usati nella scuola.

1) Funzione definita come situazione reale, fisica;
2) Funzione come regola, legge cui ad ogni elemento corrisponde un altro elemento;
3) Funzione come corrispondenza;
4) Funzione a partire dal concetto di relazione.

Penso che l'ultimo trattamento sia più logico, più generale, più elaborato e soprattutto più astratto quindi più vicino alle esigenze della matematica. Insisto dicendo che più astratto è un concetto maggiori applicazioni potrà avere.

Paragrafo 3.1

Dopo questa prima panoramica sul percorso evolutivo della funzione, analizzo come questo delicato concetto sia trattato nei libri di testo presi in considerazione. Quasi tutti seguono la metodologia più astratta, ossia la scelta, in quasi tutti i libri di testo, è quella di situare il capitolo delle funzioni subito dopo il capitolo delle relazioni. Le trattazioni sono piuttosto corrette, ci sono però alcuni errori gravi e penso sia necessario evidenziarli.
Quando si definisce una funzione è importante presentare bene quali sono gli elementi, gli insiemi e tutti gli oggetti che sono coinvolti in questo nuovo argomento. Per esempio alcuni testi ([Battiroli, Cantone, Pionetti] p. 15, [De Tullio, Bruno, D'Esposito] p. 329, [Bruno, Cavalieri, Lattanzio] pp. 85, 86) dopo una prima definizione di dominio della funzione, presentano il codominio coincidente con l'immagine della funzione; infatti per esempio nel "Corso di matematica" si trova dapprima la definizione di funzione legata alla relazione:

Dati gli insiemi A e B, una relazione f da A a B è una funzione se, per ogni elemento $a \in A$ esiste uno e un solo elemento $b \in B$ tale che la coppia $(a; b)$ verifichi la relazione stessa.
Si scrive: $f: A \to B$ oppure $b = f(a)$ e si dice che '$f(a)$ è immagine di a'.

Dopo aver dato la definizione di funzione continua così:

Con $f(a)$ indichiamo l'insieme delle immagini di tutti gli elementi di A;

$f(a)$ rappresenta quindi un sottoinsieme di B, che può essere improprio se coincide con B. L'insieme A è detto dominio, l'insieme $f(a)$ il codominio della funzione.

Un altro libro di testo, "Numero", dopo aver dato la definizione di funzione, dà la definizione di dominio e codominio commettendo però lo stesso grave errore:

L'insieme A è detto dominio della funzione. L'insieme $f(A)$ delle immagini è detto codominio della funzione o immagine di A tramite f.

Addirittura il codominio B in questo testo viene chiamato semplicemente "insieme di arrivo".
Questo errore, a mio avviso, risulta veramente grave: non si possono e non si devono confondere concetti, definizioni così importanti come quelli che definiscono la funzione in matematica. Ancora una volta, manca organicità, coerenza e competenza nella trattazione di argomenti cardine dello studio della matematica.
Certamente non tutti i libri di testo presentano questo errore, in alcuni libri ho trovato definizioni chiare ed appropriate. Per esempio il libro "Scopriamo l'Algebra" da la seguente definizione di funzione:

Dati due insiemi A e B, una relazione che associa ad ogni elemento di un sottoinsieme X (proprio o improprio) di A uno ed un solo elemento di B è detta funzione o applicazione o mappa operante in A. In simboli: R è una funzione $\Leftrightarrow \exists\, X \subseteq A \mid (\forall\, x \in X\ \exists!\, y \in B \mid xRy)$.

La trattazione continua definendo campo di esistenza e immagine però non definisce affatto il codominio, questa mancanza potrebbe provocare una sorta di smarrimento nello studente che ha bisogno di capire dove e con cosa sta lavorando. Comunque continua così:

Se X è l'insieme di definizione di una funzione f e Y la sua immagine, si ha che $Y = f(X)$ e si scrive: $f\colon x \in X \to y = f(x) \in Y$, e il grafico della funzione è l'insieme di coppie ordinate: $G = \{(x,y) \in XxY \mid y = f(x)\}$.

L'osservazione che mi preme riportare riguarda la scrittura formale della funzione; non si capisce quale sia l'insieme in cui la funzione assume valori e quale l'insieme d'arrivo.

Sarebbe stato più chiaro scrivere una cosa per volta, ossia, prima dove opera la funzione e poi cosa fa la funzione:

$$\begin{aligned} f :\ & X \to Y \\ & x \mapsto f(x) = y \end{aligned}$$

con $x \in X$ e $y \in Y$.

Paragrafo 3.2

In questo paragrafo presento una mia brave trattazione dell'argomento della funzione, facendo anche qualche osservazione in aggiunta a quelle già riportate nel precedente paragrafo. Preciso che tutta la parte che riguarda la classificazione dei diversi tipi di funzione, iniettiva, suriettiva e biiettiva e la composizione di funzioni non sarà trattata in questo paragrafo in quanto non lo ritengo significativo ai fini del mio lavoro.

La definizione di funzione che segue penso possa ovviare a tutte le imprecisioni osservate in precedenza mantenendo un certo livello di astrazione:

Definizione

Si dice funzione la relazione tra due insiemi A e B il cui grafo non contiene due coppie ordinate diverse che hanno gli elementi al primo posto uguali.

In altre parole la funzione f è una relazione $f = (A, B, G)$ in cui si ha che

$$\forall\, x \in A \quad (x, y') \in G \wedge (x, y'') \in G \Rightarrow (y' = y'').$$

L'insieme A si chiama dominio e l'insieme B codominio, mentre l'insieme di tutti i valori della funzione si chiama immagine ed è un sottoinsieme di B (si indica $f(A) \subseteq B$).

La definizione può essere scritta anche in quest'altro modo:

$$\forall\, x \in A \quad (y_1 = f(x) \wedge y_2 = f(x)) \Rightarrow (y_1 = y_2).$$

Da questa definizione si capisce chiaramente che ad ogni x si associa un sola y al massimo.

Il simbolo $f(x)$, che è l'immagine di un elemento $x \in A$, non può avere due valori, può averne uno o nessuno.

L'uso del termine applicazione si usava quando $\forall\, x \in A$ si trovava sempre una $f(x)$ nel codominio, quindi quando il dominio A coincide con il campo di esistenza, i termini funzione e applicazione sono equivalenti. Poiché nei libri di testo la funzione è sempre definita in tutto il dominio A ogni funzione è un'applicazione.

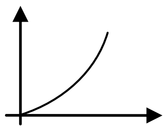
In matematica una applicazione è una restrizione di una funzione al suo campo di esistenza. Dunque per esempio nella definizione riportata nel paragrafo precedente tratta dal libro “Scopriamo l’Algebra”, dovrebbe essere corretta specificando quanto appena osservato. Infatti erroneamente si definisce funzione o applicazione una relazione che associa ad ogni elemento di un sottoinsieme X (proprio o improprio) di A uno ed un solo elemento di B. Dovrebbe essere corretta così:

si definisce funzione una relazione che associa ad ogni elemento di un sottoinsieme X di A uno ed un solo elemento di B. Quando X coincide con A la relazione si chiama applicazione.

Per quanto appena detto ritengo superfluo appesantire la definizione con terminologia inutile, quindi si potrebbe scegliere di abolire, a livello di scuola secondaria superiore, il termine applicazione.
Concludendo, ritengo sia molto importante che nella scuola il concetto di funzione sia espresso attraverso la terna ordinata $f = (A, B, G)$ dove A = dominio, B = codominio e G = immagine della funzione. Data questa terminologia, l’uguaglianza di due funzioni f e g è vera quando sono uguali dominio, codominio e immagine, ossia quando presentano la stessa terna ordinata.

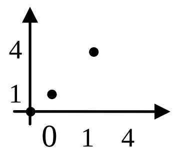
Esempio 3.2.1

$$f: [0,2] \to R$$
$$x \mapsto y = x^2$$



rappresenta una curva continua;

$$g: [0,2] \to N$$
$$x \mapsto y = x^2$$



rappresentano tre punti {0,1,4}.

Poiché la funzione è una particolare relazione, per rappresentarla si usano le stesse forme didattiche viste per la relazione: tabelle, grafici, ecc.. .
Basare il trattamento della funzione sul concetto di relazione presenta i seguenti vantaggi:

- Libera il concetto di funzione da aspetti inutili, difficili e nebulosi;
- Semplifica e riduce la definizione rendendola più scientifica, sottolineando la sua vera natura attraverso le proprietà specifiche;

- Dà la possibilità di creare modelli didattici diversi e prepara alla comprensione di argomenti successivi come le operazioni;
- Aumenta il numero di funzioni possibili da studiare a scuola, non solo quelle numeriche;
- E' un concetto presente anche in altre materie, quali la geometria quando studia le trasformazioni geometriche;
- Aiuta a studiare molte proprietà che riguardano il concetto di funzione, dal grafico, all'iniettività e suriettività di una funzione ecc..;
- Assicura un'assimilazione logica del programma aumentando anche il campo delle applicazioni.

Penso che per uno studente sia più facile pensare logicamente e legare bene i concetti tra loro. A volte si pensa che la mente dello studente sia una "tabula rasa" che aspetti solo di essere riempita con concetti sempre nuovi e diversi; in questo modo si creano compartimenti stagni e per lo studente l'utilizzo delle conoscenze possedute risulta estremamente laborioso e complesso.

Paragrafo 3.3

<u>L'operazione</u>

In questo paragrafo viene analizzata l'operazione in modo generale, puntualizzando su alcuni aspetti riguardanti la terminologia usata per esprimerla e si propone un ampliamento dei temi attualmente presenti nei libri di testo. Saranno riportati esempi, corretti e non, in merito all'argomento, tratti da alcuni testi del biennio di scuola superiore già analizzati durante lo svolgimento dei capitoli precedenti.

Il concetto di operazione oggi viene intesa come funzione; questa associazione è necessaria per arrivare al concetto di struttura algebrica e in generale a quello di struttura matematica.

Nei libri di testo, che attualmente si usano a scuola, non si usa definire il concetto di operazione ma viene trattato come se una semplice procedura, un algoritmo, o semplice operazione che si calcola per trovare un risultato.

Nel biennio, ma anche nelle classi successive, si calcolano una quantità enorme di espressioni algebriche, di equazioni e loro trasformazioni, questo fa si che gli studenti conoscano solo le capacità proprie del calcolo delle espressioni formali; sicuramente tali capacità sono fondamentali per proseguire nell'apprendimento della matematica e anche per le applicazioni pratiche come ad esempio nei problemi matematici o fisici.

Nello sviluppo delle espressioni manca totalmente una argomentazione, gli studenti sono autorizzati a passare da una espressione ad un'altra senza domandarsi su cosa e con cosa effettivamente si sta lavorando. Questo consegue dal fatto che le operazioni nelle strutture matematiche si definiscono come procedure statiche e di conseguenza il significato intrinseco delle proprietà delle operazioni non sono comprese come dovrebbero. Certamente è importante che lo studente possieda capacità formali matematiche ma ancor più importante è il fatto che tali capacità siano apprese con una base logica e argomentativa.

Vediamo un semplice esempio di cosa intendo:

$$(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$$

nessun studente è in grado di rendersi conto della differenza esistente tra le due operazioni di somma: la somma di sinistra è fortemente diversa dalla somma di destra. Questo perché non è chiaro il concetto che esistono operazioni diverse insiemi diversi.

Il trattamento dell'operazione per come è fatto attualmente, cioè come funzione, chiarisce completamente questa ambiguità. D'altra parte il concetto di operazione come funzione consente di studiare meglio i concetti del massimo comun divisore, minimo comune multiplo, la radice quadrata, l'elevamento a potenza, la composizione di funzioni, ecc.. .

In alcuni libri di testo (cfr. [Canduro, Fagnani, Liguori] e [Sasso]) si trovano diverse strutture algebriche ma sono analizzate soltanto le proprietà delle operazioni tra insiemi, senza interessarsi della natura degli elementi che vi appartengono e con i quali si svolgono operazioni; di più non viene minimamente menzionato il significato concreto di tali operazioni. Per esempio se definiamo un'operazione binaria come segue

$$\begin{aligned} \circ : E\text{x}E &\to E \\ (x,y) &\mapsto x \circ y \end{aligned}$$

e vogliamo definire la proprietà commutativa, basterà scrivere

$$\forall (x,y) \in E^2 \; (x \circ y = y \circ x). \tag{1}$$

Quindi di fatto non ci interessa la matura concreta degli elementi di E e nemmeno il significato matematico dell'operazione.

Dunque in (1) non solo x e y sono variabili ma anche E e l'operazione $\circ$ sono variabili; le prime, x e y, sono variabili appartenenti ad E, mentre E è una variabile che rappresenta un insieme qualsiasi e, infine, l'operazione $\circ$ è una variabile appartenente all'insieme delle funzioni.

Per esempio E può essere l'insieme dei naturali o dei reali e l'operazione $\circ$ può essere l'operazione di addizione o di moltiplicazione.

Esempio 3.3.1

$$+: N\text{x}N \rightarrow N \qquad\qquad \cdot: R\text{x}R \rightarrow R$$
$$(x,y) \mapsto x+y \qquad\qquad (x,y) \mapsto x \cdot y$$

Come si vede anche dall'esempio, trattare l'operazione binaria come una funzione la rende più generale, astratta e sicuramente viene compresa meglio se applicata a casi diversi e concreti.
E' chiaro che la proprietà commutativa non è verificata per ogni operazione, a scuola è importantissimo dare sempre esempi e contro esempi di questa caratteristica.

Esempio 3.3.2

$$\wedge: E\text{x}E \rightarrow E$$
$$(x,y) \mapsto x^{\wedge y} = x^y$$

certamente per l'operazione ^, non gode della proprietà commutativa, infatti $x^y \neq y^x$.

Pretendere che a scuola si arrivi a questi livelli di astrazione e generalizzazione è certamente una richiesta razionale e concepibile, inizializzata con cura già nella scuola dell'infanzia.
La quantità enorme delle operazioni concrete negli insiemi contenute nei programmi di matematica, se basate sul concetto della funzione, agevola la comprensione di concetti molto più astratti. Però, come già sottolineato nel precedente paragrafo, ancora non essendo chiaro del tutto il concetto di funzione, mancano di fatto gli strumenti per comprendere affondo il significato di operazione e di conseguenza anche quello di struttura algebrica.
Per rendersi conto di questa mancanza basterebbe porre le seguenti domande agli studenti e ascoltare le risposte (ammesso che ve ne siano).

- Perché il risultato di $2+3$ è unico?
- Qual è la differenza tra somma e addizione, oppure la differenza tra prodotto e moltiplicazione, oppure tra unione e insieme unione?

Quanto affermo trova conferma nel libro di testo "Scopiamo l'Algebra", già preso in considerazione, di seguito riporto la definizione che viene data riguardo l'addizione tra numeri naturali e la somma.

Intanto il paragrafo cui è dedicato l'argomento si chiama proprio "addizione o somma", generando confusione nel lettore.
Infatti l'addizione è l'operazione mentre si chiama somma il risultato dell'operazione, ossia hanno due ruoli completamente diversi!

Definizione
Si chiama somma di due numeri naturali a e b, associati rispettivamente agli insiemi finiti e disgiunti A e B, il numero naturale c associato a $C = A \cup B$ e si scrive $c = a + b$.
I numeri a e b si dicono addendi.

La nota positiva è il fatto che si usi un linguaggio proprio degli insiemi. In questa trattazione, seguono poi le proprietà di cui gode l'addizione nei numeri naturali.
Per fortuna ci sono testi che non fanno questa confusione, per esempio il testo "Corso di Matematica" presenta una definizione chiara e formale, così come i testi "Numero" e "Nuova Matematica a colori". Riporto di seguito solo la trattazione del primo:
Il titolo è "operazioni con numeri naturali" e il sottotitolo è "addizione"; poi continua così, citando testualmente:
I termini dell'addizione di chiamano addendi, il risultato si chiama somma.

Definizione
Dati due numeri naturali a e b, si dice somma si a e b il numero naturale c e otteniamo contando di seguito le unità di a le unità b.
Si scrive:

$$a + b = c.$$

Analizzando le diverse trattazioni, sembra ci sia la tendenza a sostituire il concetto moderno di operazione binaria come funzione con i pseudoconcetti tradizionali quali procedura, regola ecc.. . Questo approccio, a mio avviso, non è del tutto corretto e anzi vorrei sottolineare l'importanza di presentare l'operazione binaria (ma anche n-aria) come una vera e propria funzione. A conclusione di ciò raccolgo di seguito tre punti da tenere in considerazione:

1. Porre il concetto di funzione alla base di quello di operazione;
2. Studiare un insieme più vasto di operazioni tra cui anche l'operazione con oggetti di natura non numerica;

3. Confrontare diversi insiemi con diverse operazioni definite in essi in modo che lo studente scopra le proprietà in comune e quelle non in comune. In questo modo può capire che esistono strutture algebriche uguali e diverse.

L'operazione interna o esterna trattata subito come funzione chiarisce immediatamente l'unicità del risultato, quale sia il risultato dell'operazione elementare e quale sia l'operazione. In altre parole se definiamo l'operazione $\circ$, abbiamo

$$\begin{aligned} \circ : AxA \ &\to A \\ (x,y) &\mapsto x \circ y \end{aligned}$$

Sono automaticamente vere le affermazioni:

a) $\forall\, x \in A \quad \forall\, y \in A \quad \exists\, z \in A : \ x \circ y = z$;

b) $\forall\, x \in A \quad \forall\, y \in A \quad x \circ y = z \wedge x \circ y = t \ \Rightarrow z = t$;

La prima affermazione, a), prova l'esistenza del risultato dell'operazione $\circ$ per qualsiasi due elementi di A; mentre b) afferma l'unicità di questo risultato. L'operazione binaria in A si chiama anche legge interna oppure operazione interna.

L'insieme A si dice anche chiuso rispetto l'operazione $\circ$.

Anche se per lo studio delle operazioni è riservata una lunga trattazione è necessario, a mio avviso, mettere in evidenza l'esistenza, l'unicità e la chiusura dell'insieme e il loro legame con l'operazione interna.

Ogni volta che si definisce un'operazione è importante osservare i seguenti punti:

- Definire il risultato dell'operazione di un elemento qualsiasi con un elemento qualsiasi. Non è corretto dire "il risultato dell'operazione tra due numeri" perché in questo modo si perde l'ordine e implicitamente è già verificata la proprietà commutativa;
- Mostrare che questo risultato esiste sempre;
- Mostrare che questo risultato è unico;
- Mostrare che il risultato è in ogni caso un elemento dell'insieme;
- Definire l'operazione algebrica binaria come funzione del quadrato cartesiano dell'insieme nell'insieme in cui ad ogni coppia ordinata di elementi si associa il risultato dell'operazione del primo punto.

E' importante vedere le operazioni binarie anche in insiemi finiti; vediamo un esempio.

Esempio 3.3.3

Sia A l'insieme $A = \{a, b\}$ e $P(A) = \{0, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ l'insieme delle parti di A.

Possiamo definire la funzione $\cup$ così:

$$\cup : P(A) \mathrm{x} P(A) \rightarrow P(A)$$
$$(x,y) \mapsto x \mathrm{u} y$$

E graficamente rappresentare la tabella delle soluzioni

U	0	{a}	{b}	{a,b}
0	0	{a}	{b}	{a,b}
{a}	{a}	{a}	{a,b}	{a,b}
{b}	{b}	{a,b}	{b}	{a,b}
{a,b}	{a,b}	{a,b}	{a,b}	{a,b}

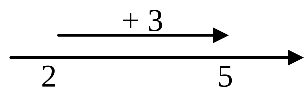
Questa operazione può essere chiamata unione in $P(A)$.

Un'importante operazione che può (e forse dovrebbe) essere fatta a scuola, è l'operazione per scalari che in questa sede indicheremo con *:

$$*: K \mathrm{~x~} \mathrm{V} \rightarrow V$$
$$(k, v) \mapsto k * v$$

Tale argomento viene considerato e affrontato solamente in fisica e quindi non presentato come operazione.

Esempio 3.3.4

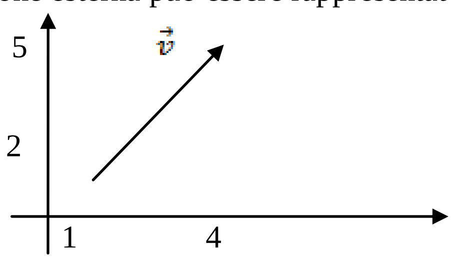


$2 + (+3) = 5$ formando il vettore spostamento.

Questo tipo di esempi non solo arricchiscono i metodi didattici ma ci aiutano anche per lo studio dello spazio affine: sommando un punto con un vettore si ottiene un altro punto.

Il concetto di operazione esterna può essere rappresentato anche sul piano cartesiano:

$\vec{v} = 3$



Inserire il concetto di operazione esterna nella scuola è importante perché si introduce il concetto del vettore e del movimento.

CAPITOLO IV – Isomorfismo e Struttura

In questo ultimo capitolo presento alcuni aspetti riguardanti i concetti di *isomorfismo* e di *struttura matematica*; l'impostazione di questo capitolo sarà diversa da quella utilizzata nei precedenti capitoli in quanto questi due argomenti (isomorfismo e struttura), purtroppo, non vengono trattati nei libri di testo di biennio di liceo scientifico che ho preso in considerazione per lo svolgimento di questa tesi. Invece, con stupore e sorpresa, ho trovato una trattazione piuttosto dettagliata, precisa e ricca di esempi, nel testo "L'ABC…dell'Algebra", indirizzato alle scuola medie. Questo capitolo, quindi, presenterà due paragrafi: il primo paragrafo riporterà alcune osservazioni e proposte didattiche in merito al concetto di isomorfismo e di *gruppo*; nel secondo paragrafo sarà riportata, a scopo illustrativo, la trattazione dell'argomento presentato dal libro di testo sopra citato.

Paragrafo 4.1

<u>Isomorfismo</u>

In matematica l'idea di *isomorfismo* è presente fin dai tempi dei pitagorici (VI secolo a.C.). Questo concetto ha avuto origine, principalmente, dalla volontà e dalla necessità di posizionare l'algebra alla base di ogni disciplina matematica, necessità che si rafforzò dopo la nascita della geometria analitica.

L'idea di isomorfismo fu chiarito e precisato da Leibniz (1646 – 1716), noto matematico tedesco, il quale, opponendosi all'idea che l'algebra dovesse essere alla base della matematica, mise in evidenza la possibilità di "identificare" relazioni e operazioni diverse, come ad esempio l'addizione e la moltiplicazione, attraverso le loro proprietà.

La geometria proiettiva diede un forte contributo allo sviluppo del concetto di isomorfismo, in particolare attraverso il principio del *duale*.

Nella metà del XIX secolo, il concetto di isomorfismo, nella sua forma più generale, veniva utilizzato solo per strutture matematiche quali i gruppi. Da questo momento in poi si forma l'idea secondo la quale ogni teoria assiomatica aveva insito anche il concetto di isomorfismo. Dunque anche ciò che rappresenta oggi la struttura matematica contiene il concetto di isomorfismo e quindi non è necessario dare una definizione particolare per ogni tipo di struttura. Cioè, se sono date le strutture (A, B) e (A', B'), dove A e A' sono due insiemi qualsiasi di elementi mentre B e B' sono due insiemi di relazioni e operazioni binarie definite rispettivamente in A e A', allora la struttura (A, B) si dice isomorfa a (A', B') se esiste la coppia ordinata di funzioni biiettive (f,g) rispettivamente di A in A' e di B in B', risulta vera l'affermazione

$$\forall\ (x,y) \in AxA \quad \forall\ r \in B \quad (xry) \Leftrightarrow f(x)g(r)f(y).$$

Quanto scritto sopra si traduce con la seguente simbologia $(A,B) \cong (A',B')$.

La funzione biiettiva f si dice anche isomorfismo dell'insieme A con A' rispetto all'insieme delle relazioni B e B', mentre le relazioni r e g di dicono relazioni isomorfe oppure operazioni isomorfe nel caso in cui le strutture siano isomorfe.

Le strutture isomorfe si differenziano una dall'altra solo dalla natura concreta degli elementi dei loro insiemi sostegno A e A'. Di solito si distinguono anche dai nomi e dalla simbologia utilizzata in ciascuno di essi, per le relazioni e per le operazioni isomorfe. Infatti le proprietà di queste relazioni e operazioni sono le stesse.

Queste proprietà, evidenziate in una delle strutture, possono essere trasposte in modo automatico nella struttura isomorfa cambiando solo la terminologia e la simbologia.

L'isomorfismo tra strutture rappresenta un concetto cardine nella matematica di oggi, ma nella scuola non vi è nessuna traccia di questo tema. Infatti, In nessun libro di testo, fra quelli che ho preso in considerazione, viene riservata una trattazione, seppur breve, dell'argomento. Penso invece che inserire nei testi una trattazione dei concetti, magari i più intuitivi, sarebbe utile per affrontare poi argomenti più difficili con basi adeguate.

Le proprietà uguali di strutture isomorfe aiutano ad identificare gli elementi corrispondenti con le stesse proprietà, rispetto alle relazioni isomorfe.

Vediamo un esempio che potrebbe essere presentato in una classe seconda di un liceo scientifico:

Esempio 4.1.1

Sia M l'insieme di tutti i punti che si trovano su una retta data, ordinato dalla relazione "è davanti". Sia R l'insieme dei numeri reali ordinati secondo la relazione "è più piccolo". Allora possiamo scrivere :

$$(M, \dashv) \cong (R, <).$$

Quindi in questo isomorfismo tutto ciò che può essere detto per l'ordinamento "$<$" dei numeri reali vale anche, usando un'altra terminologia, per i punti della retta con l'ordinamento "$\dashv$".

Il concetto di isomorfismo per la struttura potrebbe essere trattato a scuola in quanto prevede una trattazione abbastanza semplice. Infatti, quasi sempre, a scuola si studiano strutture matematiche isomorfe di insiemi numerici e l'insieme delle relazioni comprende un numero limitato di operazioni binarie. Purtroppo però, il concetto di isomorfismo trattato troppo tardi risulta complicato e forse è proprio per questo che non viene trattato. Detto questo, poiché il concetto dell'insieme viene trattato già dalla prima elementare, penso che l'idea di isomorfismo possa essere inserito a scuola. Magari non proprio come isomorfismo tra strutture, ma come isomorfismo tra insiemi rispetto ad alcune relazioni e operazioni.
Nelle scuole superiori può, dunque, essere introdotto il concetto di isomorfismo tra oggetti con cui gli studenti si confrontano quotidianamente. Vediamo di seguito alcuni esempi del tutto comprensibili per studenti di un triennio di liceo scientifico.

Esempio 4.1.2

a)
$$f: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^{-1}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

Allora $(\mathbb{N}^+, <) \cong (\mathbb{N}^{-1}, \succ)$ sono isomorfi. Da osservare che la simbologia utilizzata è volutamente diversa perché le operazioni sono relative a insiemi diversi.

b)
$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln x$$

Allora $(\mathbb{R}^+, <, \cdot) \cong (\mathbb{R}, \prec, +)$ sono isomorfi.

c)
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto (\frac{1}{2})^x$$

Allora $(\mathbb{R}, >, +) \cong (\mathbb{R}^+, \prec, \cdot)$ sono isomorfi.

A scuola fino a quando non viene spiegato un concetto di carattere generale, può essere utilizzata la stessa simbologia per la relazione d'ordine in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{R}^+$. Mentre quando viene presentato il concetto generale della relazione diventa necessario usare una diversa simbologia per relazioni diverse, come visto nell'Esempio 4.1.2. Si può procedere analogamente per le operazioni.

Nei libri di testo della scuola, analizzati durante lo svolgimento di questa tesi, possiamo trovare tantissimi esempi di funzioni elementari che si avvicinano al concetto di struttura, e di isomorfismo; questi possono essere usati per arrivare al concetto più astratto di struttura attraverso una trattazione sintetica; invece si nota un aumento considerevole del numero delle pagine solo perché mancano le idee centrali che sono alla base della matematica: l'isomorfismo è una di queste.

Infatti se si introduce il concetto di isomorfismo nella trattazione scolastica della matematica, si dà la possibilità allo studente di sviluppare potenzialità con cui poter vedere e riconoscere aspetti uguali in strutture diverse e concrete.

Lo sviluppo di tali capacità sono la base dell'educazione scientifico-matematico contemporanea per trattare in modo consapevole gli oggetti matematici.

Gli studenti, con queste conoscenze, potranno e sapranno tradurre situazioni diverse nel linguaggio della matematica, situazioni che riguardano l'*appartenenza*, l'*ordine* e non solo i calcoli.

I ragazzi educati con queste metodologie saranno capaci di utilizzare parole e simboli per rappresentare la matematica e viceversa: sapranno applicare la matematica in modo creativo.

Gruppo

Come già osservato, anche il concetto di *gruppo* non viene trattato nella scuola di oggi. A mio avviso, vi sono diversi motivi per cui tale concetto dovrebbe essere introdotto e approfondito a scuola.

Il gruppo è un argomento che, da una parte esprime in modo abbastanza semplice e astratto il concetto di struttura, dall'altra è un concetto molto importante perché costituisce il nucleo di molte strutture. Uno degli argomenti cardine, ampiamente affrontati a scuola, è l'*anello degli interi* che munito della sola operazione di addizione o di moltiplicazione rappresenta un gruppo, rispettivamente additivo o moltiplicativo.

Nella scuola superiore si studiano i vettori ([Dodero, Baroncini, Manfredi, Fragni] p.746), ma non si parla affatto della struttura di spazio vettoriale; in uno spazio vettoriale è presente la struttura di gruppo sia nel campo degli scalari sia nel gruppo additivo $(V, +)$.

Per studiare tutte le diverse trasformazioni, algebriche o geometriche, il concetto di gruppo è fondamentale; ad esempio basta considerare il *gruppo delle simmetrie*.

Insegnando ai ragazzi il concetto di gruppo, impareranno il concetto di varietà matematica, cioè il metodo di costruzione assiomatica di una teoria.

Gli studenti imparano, così, come si possa costruire un modello concreto di un concetto astratto e viceversa, cioè come da un concetto concreto si possa ricavare un modello astratto.
Certamente l'insegnamento del concetto di gruppo non risulta semplice e immediato, però, ad esempio, si può arrivare a tale concetto introducendo dapprima strutture matematiche più semplici, come il *gruppoide* e il *semigruppo*.
Seguire questa strada è molto importante perché mette in evidenza una proprietà della struttura matematica, la gerarchia da cui è costituita; così gli studenti capiscono che partendo da una struttura basilare, il gruppoide, aumentando gli assiomi, si possono costruire nuove strutture, come per esempio il gruppo, il *gruppo Abeliano*, ecc.
Bisogna però sottolineare che aumentando gli assiomi e quindi le particolarità di cui gode una nuova struttura, si otterranno strutture le cui applicazioni risulteranno più limitate.
Per giungere al concetto di gruppo bisogna passare attraverso le proprietà concrete che lo caratterizzano, facendo uso di esempi di gruppi reali e vicini a ciò che lo studente studia come ad esempio il gruppo additivo $(\mathbb{Q}, +)$, o ancora, introducendo l'*elemento neutro* di un gruppo: lo zero nell'addizione e l'uno per la moltiplicazione.
Per capire bene il concetto di *elemento neutro* in un gruppo, legato ad una operazione, si possono proporre diversi esercizi, specialmente utilizzando la forma tabellare; importante anche sottolineare l'esistenza e le proprietà dell' elemento neutro nelle diverse operazioni.
La Geometria, ad esempio, fornisce molti modelli concreti del concetto di gruppo e addirittura, la Geometria stessa potrebbe essere "sistemata" utilizzando proprio il concetto di gruppo. Vediamo solo come alcuni argomenti geometrici, quali l'uguaglianza e la congruenza di figure geometriche, utilizzino il concetto di gruppo. La figura geometrica viene introdotta nella scuola come un insieme di punti del piano; due figure si dicono uguali quando sono costituite dagli stessi punti, dunque due figure in posizioni diverse nel piano non possono essere uguali. Il concetto di uguaglianza tra figure geometriche è molto importante per capire anche il concetto di unicità. Per esempio si dice che la costruzione di un triangolo è unica quando sono dati tre lati, invece di tali triangoli se ne possono costruire un'infinità. Quindi per definire uguali due figure è necessario:

- dare una relazione di equivalenza tra figure nel piano che dimostri l'uguaglianza;
- legare il concetto di uguaglianza tra figure alle trasformazioni geometriche.

Per soddisfare questi due aspetti il concetto di gruppo risulta fondamentale e quindi risulta anche necessario per definire, appunto, l'uguaglianza.

Noi sappiamo che le figure congruenti sono anche simili, il viceversa non è vero. Questo consegue dal fatto che le proprietà che valgono per il *gruppo delle similitudini* valgono anche per il *gruppo delle isometrie*, nel senso che ogni proprietà che è invariante rispetto ad un elemento del "gruppo delle similitudini", che in questa sede indicheremo con $(H,\circ)$, lo è anche rispetto ad ogni elemento del gruppo delle isometrie, che indichiamo con $(I,\circ)$. In questo senso si dice che la geometria del gruppo è anche geometria del sottogruppo.

Paragrafo 4.2

In questo paragrafo riporto, a scopo illustrativo, il concetto di struttura algebrica affrontato dal libro di testo "L'ABC…dell'Algebra" indirizzato a studenti di terza media. La trattazione, a mio avviso, risulta chiara e dettagliata, ricca di esempi utili e applicazioni relative per approfondire la comprensione del tema stesso.
Il testo introduce il concetto di struttura con la seguente definizione, citando testualmente:

Definizione
Si dice struttura algebrica un insieme A (non vuoto) nel quale è assegnata almeno un'operazione.

Continua poi in questo modo:
Per indicare che l'insieme A è strutturato con l'operazione $*$ *si scrive* $S = (A,*)$. *L'insieme A si dice sostegno della struttura algebrica. Per esempio per indicare che l'insieme* $\mathbb{N}$ *e l'insieme* $\mathbb{Z}$ *sono strutturati con l'operazione di addizione si scrive:*$(\mathbb{N},+)$ *e* $(\mathbb{Z},+)$.

Successivamente viene definito l'elemento neutro dell'addizione, sottolineando il fatto che vale sia se addizionato a destra che addizionato a sinistra. Allo stesso modo viene presentato l'elemento neutro della moltiplicazione. Subito dopo viene proposta una definizione generalizzata:

un'operazione sempre possibile in un insieme A *si dice dotata di elemento neutro* u *se, qualunque sia l'elemento* $a \in A$ *l'operazione sulla coppia ordinata* (a,u) *e l'operazione sulle coppie ordinate* (u,a) *hanno entrambe per risultato* a.

Quindi se devono verificare le due disuguaglianze;

$$a * u = a \quad e \quad u * a = a.$$

E' evidente che $u * u = u$.

Segue poi un esempio:

per esempio, l'operazione che nell'insieme $\mathbb{N}_0$ *fa corrispondere alla coppia ordinata* (a, b) *il m.c.m.* (a, b) *ha per elemento neutro 1. Infatti qualunque sia* a *il m.c.m. della coppia ordinata* $(a, 1)$ *e il m.c.m della coppia ordinata* $(1, a)$ *è* a*. Ossia:*

$$a * 1 = m.c.m.(a, 1) = a \quad e \quad 1 * a = m.c.m.(1, a) = a.$$

Il testo poi prosegue definendo nell'anello degli interi gli elementi simmetrici rispetto l'addizione e nel gruppo dei razionali definisce gli elementi simmetrici rispetto alla moltiplicazione.

Dopo aver fornito qualche esempio, il testo continua dando la definizione di proprietà commutativa nel modo seguente:

Si dice che un'operazione sempre possibile in un insieme A gode della proprietà commutativa (o anche che l'operazione è commutativa) se per ogni coppia di elementi a e b si ha che

$$a * b = b * a.$$

L'addizione e la moltiplicazione sono operazioni commutative nell'insieme $\mathbb{N}$ *dei numeri naturali, nell'insieme* $\mathbb{Z}$ *dei numeri interi, nell'insieme* $\mathbb{Q}$ *dei numeri razionali. Anche l'unione e l'intersezione di due insiemi sono operazioni commutative.*

La definizione e la trattazione che seguono subito dopo, risultano molto interessanti per due aspetti: il primo di questi consiste nel fatto che nella definizione si usi un'operazione qualunque, ossia si generalizza un concetto che può essere poi precisato sostituendo l'operazione generica, ad esempio, con l'operazione di addizione o moltiplicazione.

Il testo prosegue poi dando anche la legge di composizione associativa e la definizione di insieme simmetrizzabile (che non riporterò).

Infine vengono rappresentate alcune strutture particolari come la *struttura abeliana*, il monoide e il gruppo; le definizioni sono le seguenti, citando testualmente:

Definizione

Una struttura algebrica $(A\ ,\ *)$ *nella quale l'operazione* $*$ *è sempre possibile ed è commutativa si dice struttura commutativa o abeliana.*

Per esempio le strutture $(\mathbb{N},+), (\mathbb{N},\cdot), (\mathbb{Q},+), (\mathbb{Q},\cdot)$ *sono strutture abeliane.*

Definizione

Una struttura algebrica $(A\ ,\ *)$ *nella quale l'operazione* $*$ *è sempre possibile ed è associativa si dice monoide (o semigruppo).*

Per esempio le strutture $(\mathbb{N},+), (\mathbb{N},\cdot)$ *sono monoidi.*

Definizione

Una struttura algebrica $(A\ ,\ *)$ *nella quale l'operazione* $*$ *è sempre possibile è un gruppo se l'operazione è associativa, ha l'elemento neutro, ogni elemento dell'elemento A è simmetrizabile.*

Infine il capitolo si conclude riportando alcune osservazioni ed esempi su monoidi, gruppi e strutture abeliane per chiarire ulteriormente i nuovi concetti. Viene anche riservata una breve trattazione sulle trasformazioni geometriche, quali, ad esempio, le traslazioni e le rotazioni.
Penso che il testo "L'ABC…dell'Algebra" abbia riportato in modo sintetico e chiaro, argomenti importanti e fondamentali della matematica. In questo modo uno studente riesce ad avere un quadro preciso e organizzato di questi argomenti, collegando tra loro gli insiemi, le relazioni, le funzioni, le operazioni, riassumendo tutto con il concetto di struttura algebrica. Infine penso che una simile trattazione risulti semplice e comprensibile, se non proprio a studenti delle scuole medie, sicuramente a studenti di scuola superiore.

CONCLUSIONI

Al temine di questo lavoro ho raccolto in alcuni punti tutti i concetti fondamentali e le osservazioni generali a partire dallo studio dell'insieme fino a quello di struttura.

- La tesi presentata vuole essere un tentativo per inserire nella scuola concetti e metodi della scienza di oggi, con lo scopo di far comprendere meglio ai ragazzi la matematica e renderli capaci di applicarla anche in ambiti diversi dalla matematica strettamente scolastica.

- La velocità dello sviluppo tecnico-scientifico cui assistiamo, richiede una conoscenza ampia e approfondita dei concetti. Bisogna quindi insegnare agli studenti teorie più astratte e concetti più sintetici, allo stesso tempo è necessaria chiarezza, praticità e razionalità in ciò che si insegna.

- L'insegnamento dei concetti che portano alla struttura e lo studio della struttura stessa è condizionato da due aspetti fondamentali: il primo deriva proprio dallo sviluppo dalla matematica alla luce dei concetti elaborati nel corso del XIX e all'inizio del XX secolo e che ora costituiscono la base della matematica moderna. Il secondo aspetto consiste nella necessità di estendere le applicazioni della matematica di oggi anche in campi diversi quali le scienze linguistiche, la biologia, la medicina, l'ambito farmaceutico ecc. Basti pensare che nessun farmaco viene messo sul mercato senza aver svolto preventivamente una elaborazione statistico-matematica. Questi due aspetti sono determinanti per definire il contenuto e il carattere dei programmi di matematica a scuola.

- Il concetto di struttura aumenta il livello di scientificità dell'insegnamento della matematica nella scuola, rendendolo più moderno ed efficace:
  - Attraverso metodi, idee, concetti nuovi e più generali sulla base dei quali si vuole unificare la disciplina e legarla alle altre scienze.
  - Attraverso un livello più alto di astrazione e contemporaneamente un ampliamento della sfera delle applicazioni matematiche.

- Attraverso una simbologia più ricca e un linguaggio più preciso in matematica; in questi termini sarà più semplice per lo studente formulare e dedurre conclusioni matematiche.
- Attraverso un'applicazione più chiara del metodo matematico e attraverso una costruzione di modelli concreti servendosi una teoria assiomatica.
- Attraverso una crescita del rigore matematico.

- Il concetto di struttura può cambiare in modo profondo il contenuto della matematica nella scuola e allo stesso tempo può aumentare il carattere "elementare" del suo insegnamento, in particolare: 1) L'insegnamento della matematica nella scuola risulterà più elementare, fornendo le basi della matematica moderna. 2) La matematica risulterà "più facile" da insegnare e da capire perché i suoi concetti risulteranno collegati logicamente tra loro, sarà quindi tutto più trasparente e più convincente e, di conseguenza, risulterà più accettabile per gli studenti, che non si porranno più il famoso quesito "a cosa mi serve la matematica?".

- La struttura inoltre fortifica il carattere teorico e applicativo della matematica nella scuola. Inserendo nei programmi di scuola anche il concetto di struttura, si formano le basi teoriche di tutte le teorie matematiche che si usano oggi. Si sa che anche quelle discipline matematiche che presentano caratteristiche del tutto applicative, come la statistica o la teoria delle probabilità, oggi si studiano anche con l'aiuto di concetti teorici legati strettamente al concetto di struttura matematica.

- La struttura matematica fornisce concetti e metodi fondamentali moderni che possono "ricostruire" l'insegnamento classico della matematica, sostituendo i metodi tradizionali con quelli moderni, utilizzando a scuola un linguaggio attuale con termini scientifici. Il concetto di struttura può servire anche come collante, come concetto che unifica e lega i vari argomenti della matematica della scuola.

- Il concetto di struttura matematica ha legami stretti con la logica che aiuta a sviluppare le capacità necessarie al ragionamento e all'educazione mentale verso la matematica. In questo modo si formerà nei ragazzi un pensiero matematico creativo e indipendente nei confronti sia di situazioni astratte che reali.

- Per introdurre il concetto di struttura matematica nella scuola sarebbe necessario impostare un percorso basato su una linea guida centrale, costituita da un numero minimo di concetti teorici e da concetti che si ramificano a partire proprio da questa linea.

- L'ordine di trattazione degli argomenti per arrivare al concetto di struttura deve essere lineare e logico, la mia proposta intende anche sottolineare questo aspetto. In molti libri di testo di liceo scientifico, come già osservato, manca del tutto una trattazione del concetto di struttura; nel testo "L'ABC...d'Algebra", per esempio, viene riservato un capitolo a questo tema, però rimane isolato, non viene inserito al termine dello studio che parte dagli insiemi e termina con le relazioni e funzioni. Quindi, a mio avviso e come ho cercato di illustrare in questa tesi, bisogna arrivare al concetto di struttura in modo graduale, partendo dai concetti che si trovano nel segmento [insieme, gruppo].

Questo può essere ottenuto con una metodologia didattica che preveda le seguenti tre modalità:

i) inserimento fin nel biennio della scuola superiore tutti i concetti riportati in questa tesi. Come abbiamo visto dall'analisi di alcuni libri di testo, molti di questi concetti sono presenti, ma il problema, a volte, consiste nel come questi vengono affrontati; non solo dal libro di testo ma anche dall'insegnante stesso.

ii) inserimento nei testi dei concetti moderni della matematica di oggi, attraverso un linguaggio appropriato e una simbologia chiara, seguendo i temi presenti nel segmento [insieme, gruppo] come proposto in questa tesi.

iii) Organizzazione di gruppi di formazione per docenti, ad esempio a livello regionale, per affrontare le problematiche relative alla matematica trattata sulla base di concetti astratti e specialmente della struttura matematica.

Presentare i temi della matematica in modo graduale con ordine, rigore, attraverso una trattazione logica, definizioni precise, generalizzazioni e astrazioni, mediante un linguaggio appropriato e preciso, con ragionamenti non ambigui, con applicazioni ed esempi tratti dalla vita quotidiana, porta gli studenti a scoprire la bellezza della matematica e a studiarla con passione ed entusiasmo.

Appendice

OBIETTIVI SPECIFICI DI APPRENDIMENTO

PRIMO BIENNIO

Aritmetica e algebra

Il primo biennio sarà dedicato al passaggio dal calcolo aritmetico a quello algebrico. Lo studente svilupperà le sue capacità nel calcolo (mentale, con carta e penna, mediante strumenti) con i numeri interi, con i numeri razionali sia nella scrittura come frazione che nella rappresentazione decimale. In questo contesto saranno studiate le proprietà delle operazioni.

Lo studio dell'algoritmo euclideo per la determinazione del MCD permetterà di approfondire la conoscenza della struttura dei numeri interi e di un esempio importante di procedimento algoritmico. Lo studente acquisirà una conoscenza intuitiva dei numeri reali, con particolare riferimento alla loro rappresentazione geometrica su una retta. La dimostrazione dell'irrazionalità di 2 e di altri numeri sarà un'importante occasione di approfondimento concettuale. Lo studio dei numeri irrazionali e delle espressioni in cui essi compaiono fornirà un esempio significativo di applicazione del calcolo algebrico e un'occasione per affrontare il tema dell'approssimazione. L'acquisizione dei metodi di calcolo dei radicali non sarà accompagnata da eccessivi tecnicismi manipolatori.

Lo studente apprenderà gli elementi di base del calcolo letterale, le proprietà dei polinomi e le operazioni tra di essi. Saprà fattorizzare semplici polinomi, saprà eseguire semplici casi di divisione con resto fra due polinomi, e ne approfondirà l'analogia con la divisione fra numeri interi. Anche in questo l'acquisizione della capacità calcolistica non comporterà tecnicismi eccessivi.

Lo studente acquisirà la capacità di eseguire calcoli con le espressioni letterali sia per rappresentare un problema (mediante un'equazione, disequazioni o sistemi) e risolverlo, sia per dimostrare risultati generali, in particolare in aritmetica. Studierà i concetti di vettore, di dipendenza e indipendenza lineare, di prodotto scalare e vettoriale nel piano e nello spazio nonché gli elementi del calcolo matriciale. Approfondirà inoltre la comprensione del ruolo fondamentale che i concetti dell'algebra vettoriale e matriciale hanno nella fisica.

Geometria

Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano. Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione, con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli Elementi di Euclide, essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale. In coerenza con il modo con cui si è presentato storicamente, l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica.

Al teorema di Pitagora sarà dedicata una particolare attenzione affinché ne siano compresi sia gli aspetti geometrici che le implicazioni nella teoria dei numeri (introduzione dei numeri irrazionali) insistendo soprattutto sugli aspetti concettuali.

Lo studente acquisirà la conoscenza delle principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini con particolare riguardo al teorema di Talete) e sarà in grado di riconoscere le principali proprietà invarianti. Inoltre studierà le proprietà fondamentali della circonferenza.

La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria.

Lo studente apprenderà a far uso del metodo delle coordinate cartesiane, in una prima fase limitandosi alla rappresentazione di punti, rette e fasci di rette nel piano e di proprietà come il parallelismo e la perpendicolarità. Lo studio delle funzioni quadratiche si accompagnerà alla rappresentazione geometrica delle coniche nel piano cartesiano. L'intervento dell'algebra nella rappresentazione degli oggetti geometrici non sarà disgiunto dall'approfondimento della portata concettuale e tecnica di questa branca della matematica.

Saranno inoltre studiate le funzioni circolari e le loro proprietà e relazioni elementari, i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli e il loro uso nell'ambito di altre discipline, in particolare nella fisica.

Relazioni e funzioni

Obiettivo di studio sarà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.), anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico. In particolare, lo studente apprenderà a descrivere un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni; a ottenere informazioni e ricavare le soluzioni di un modello matematico di fenomeni, anche in contesti di ricerca operativa o di teoria delle decisioni.

Lo studio delle funzioni del tipo $f(x) = ax + b$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ e la rappresentazione delle rette e delle parabole nel piano cartesiano consentiranno di acquisire i concetti di soluzione delle equazioni di primo e secondo grado in una incognita, delle disequazioni associate e dei sistemi di equazioni lineari in due incognite, nonché le tecniche per la loro risoluzione grafica e algebrica.

Lo studente studierà le funzioni $f(x) = |x|$, $f(x) = a/x$, le funzioni lineari a tratti, le funzioni circolari sia in un contesto strettamente matematico sia in funzione della rappresentazione e soluzione di problemi applicativi. Apprenderà gli elementi della teoria della proporzionalità diretta e inversa. Il contemporaneo studio della fisica offrirà esempi di funzioni che saranno oggetto di una specifica trattazione matematica, e i risultati di questa trattazione serviranno ad approfondire la comprensione dei fenomeni fisici e delle relative teorie.

Lo studente sarà in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati.

Dati e previsioni

Lo studente sarà in grado di rappresentare e analizzare in diversi modi (anche utilizzando strumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee. Saprà distinguere tra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e quantitativi continui, operare con distribuzioni di frequenze e rappresentarle. Saranno studiate le definizioni e le proprietà dei valori medi e delle misure di variabilità, nonché l'uso strumenti di calcolo (calcolatrice, foglio di calcolo) per analizzare raccolte di dati e serie statistiche. Lo studio sarà svolto il più possibile in collegamento con le altre discipline anche in ambiti entro cui i dati siano raccolti direttamente dagli studenti.

Lo studente sarà in grado di ricavare semplici inferenze dai diagrammi statistici.

Egli apprenderà la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica.

Sarà approfondito in modo rigoroso il concetto di modello matematico, distinguendone la specificità concettuale e metodica rispetto all'approccio della fisica classica.

Elementi di informatica

Lo studente diverrà familiare con gli strumenti informatici, al fine precipuo di rappresentare e manipolare oggetti matematici e studierà le modalità di rappresentazione dei dati elementari testuali e multimediali.

Un tema fondamentale di studio sarà il concetto di algoritmo e l'elaborazione di strategie di risoluzioni algoritmiche nel caso di problemi semplici e di facile modellizzazione; e, inoltre, il concetto di funzione calcolabile e di calcolabilità e alcuni semplici esempi relativi.

Bibliografia

- [Adler] I. Adler, *Matematica e sviluppo mentale*, Boringhieri, 1972.
- [Agnesi, Baldi, Locatelli] L. Agnesi, M. Baldi, A. Locatelli, *L'ABC…dell'algebra*, Ghisetti & Covi Edidori, 2003.
- [Airoldi, Morgese, Morotti] R. Airoldi, R. Morgese, G. Morotti, *I favolosi quattro*, Giunti Scuola, 2010.
- [Battiroli, Cantone, Pionetti] B. Bottiroli, A. Cantone, G. Pionetti, *Corso di Matematica*, Algebra 1, Ghisetti e Corvi Editori, 2007.
- [Bruno, Cavalieri, Lattanzio] R. Bruno, W. Cavalieri, P. Lattanzio, *Algebra*, Volume 1, Arnoldo Mondadori Scuola, 2007.
- [Canali, Gerli] T. Canali, L. Gerli, *Exploro*, Arnaldo Mondadori Scuola, 2010.
- [Canduro, Fagnani, Liguori] M. Canduro, B. Fagnani, M. Liguori, *Scopriamo l'Algebra*, volume 1, L. Editore, 2012.
- [D'Amore] B. D'Amore, *Elementi di Didattica della Matematica*, Pitagora Editrice Bologna, 1999.
- [De Tullio, Bruno, D'Esposito] V. De Tullio, G. Bruno, L. D'Esposito, *Numero*, Algebra 1, Bulgarini Editore Firenze, 2008.
- [Dodero, Baroncini, Manfredi, Fragni] N. Dodero, P. Baroncini, R. Manfredi, I. Fragni, *Lineamenti.Math*, Algebra 1, Ghisetti e Corvi Editori, 2011.
- [Guerraggio] A. Guerraggio, *15 grandi idee matematiche*, Bruno Mondadori, 2013.
- [Sasso] L. Sasso, *Nuova Matematica a colori*, Algebra 1, Petrini, 2011.