Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Triennale in Matematica

ALCUNI PROBLEMI DI DINAMICA RELATIVA DEL PUNTO MATERIALE

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.
Emanuela Caliceti

Presentata da:
Federica Recchiuti

Sessione II
Anno Accademico 2012/'13

L'anima mia magnifica il Signore
ed il mio spirito esulta in Dio mio salvatore

Indice

Introduzione

Oggetto di questa trattazione è lo studio di alcuni problemi classici di meccanica che possono essere trattati nell'ambito della dinamica relativa del punto materiale. A questo scopo si introducono due sistemi di riferimento (O) ed (O_1) in moto generico uno rispetto all'altro e si adotta una concezione relativa del moto, per la quale le leggi di Newton sono valide rispetto a qualsiasi sistema di riferimento. Da questo punto di vista l'oggetto del nostro studio è il moto di un punto materiale P soggetto ad un sistema di forze attive assegnate rispetto ad uno dei due sistemi di riferimento. Secondo la concezione adottata non solo è diverso il moto del punto rispetto ai due diversi osservatori ma anche il sistema delle forze attive agenti su di esso. Il problema, dunque, che si intende affrontare può essere così formulato: *note le forze attive che agiscono su P rispetto ad uno dei due sistemi di riferimento, diciamo (O), si vuole determinare il moto di P rispetto all'altro sistema di riferimento, (O_1)*. Rispetto al sistema (O) il problema del moto del punto viene risolto utilizzando la legge di Newton per cui, se $\vec{F}$ è il vettore risultante delle forze agenti su P ed m è la sua massa, il punto si muove con accelerazione $\vec{a}$ data da

$$\vec{F} = m\vec{a}. \qquad (1)$$

In termini matematici la (1) rappresenta un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine avente come incognita la configurazione $P(t)$ del punto al generico istante t. Dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie, sotto opportune ipotesi di regolarità per la funzione $\vec{F}(P, \frac{dP}{dt}, t)$, la (1) ammette una e una sola soluzione, una volta che siano fissate le condizioni iniziali $P(t_0)$ e $\frac{dP}{dt}(t_0)$ che rappresentano la posizione e la velocità iniziale di P. Pertanto da punto di vista teorico il problema del moto di P rispetto ad (O) è completamente risolto. Per poter determinare invece il moto di P rispetto ad (O_1) è necessario innanzi tutto risolvere il problema della cinematica relativa del punto: noto il moto di P rispetto ad (O) e noto il moto del sistema (O) rispetto ad (O_1), si vuole determinare il moto di P rispetto ad (O_1). Questo problema classico della meccanica ammette una soluzione completa

sia in termini di velocità che di accelerazione. Più precisamente è possibile determinare la relazione che lega le velocità di P rispetto ai due sistemi di riferiemento (Teorema di composizione delle velocità) così come la relazione fra le accelerazioni di P rispetto ad (O) ed (O_1) (Teorema di Coriolis). Come caso particolare del problema fin qui descritto della dinamica relativa si insericsce quello della statica relativa che più semplicemente si propone di determinare la relazione fra le forze che agiscono su uno stesso punto rispetto a due diversi osservatori.
Impostato così il più generale problema di dinamica relativa, in questo contesto è possibile analizzare due problemi classici della meccanica: la variabilità del peso di un corpo sulla superficie terrestre al variare della latitudine e il cosiddetto *problema dei due corpi*. La prima questione rappresenta più propriamente un problema di statica relativa e parte dall'osservare che un corpo sulla superficie terrestre è soggetto alla forza di attrazione gravitazionale Newtoniana esercitata dalla massa della Terra rispetto ad un osservatore solidale con le stelle fisse. Quello che viene comunemente chiamato peso del corpo altro non è che questa stessa forza di attrazione Newtoniana così come vista da un osservatore solidale con la rotazione terrestre. Il problema dei due corpi invece riguarda lo studio del moto di un corpo materiale P ancora sotto l'azione di attrazione Newtoniana generata da un altro corpo materiale O, visto da un sistema di riferimento con origine in O che trasla rispetto alle stelle fisse. Così, ad esempio, si può esaminare il moto di un pianeta rispetto al Sole. Nel contesto fin qui descritto, con l'ulteriore ausilio delle equazioni cardinali della dinamica e dei risultati che si ottengono mediante lo studio di un moto piano in coordinate polari, è possibile effettuare uno studio completo del problema dei due corpi che include la determinazione delle tre leggi di Keplero.
La trattazione svolta in questa tesi si articola in tre capitoli: nel primo capitolo vengono presentati i principali risultati nell'ambito della cinematica relativa del punto ivi compresa la trattazione dei sistemi di riferimento equivalenti; nel secondo capitolo si passa ad affrontare il problema della dinamica e della statica relativa del punto nella sua impostazione più generale, con esplicito riferimento alle due diverse concezioni ammissibili del moto, quella relativa qui adottata e quella assoluta. Con queste premesse viene esaminato, in questo stesso capitolo, il primo dei problemi sopra citati: la variazione del peso di un corpo in base alla latitudine. Infine nel terzo capitolo viene trattato il problema dei due corpi con la determinazione delle leggi di Keplero.
L'esposizione degli argomenti trattati è stata svolta seguendo principalmente i testi [[1], [2], [3]].

Capitolo 1

Cinematica relativa del punto

1.1 Cinematica del punto materiale

Il mondo, con tutto quello che contiene, si muove. Anche ciò che in apparenza è immobile, come una strada, si muove con la rotazione della Terra intorno al Sole, con l'orbita del sole intorno al centro della Via Lattea, e con la migrazione della nostra galassia rispetto ad altre galassie.
Il confronto e la classificazione dei moti è chiamata *cinematica* e il suo scopo è la descrizione del movimento stesso indipendentemente dalle sue cause.
Si ammettono come primitive le nozioni di spazio e di tempo e inoltre si ammette che per lo spazio valga la geometria euclidea.
Si comincia lo studio con il caso più semplice e cioè con il moto di un punto.
Si consideri, in $\Re^3$, un generico punto P in moto; ad ogni istante t corrisponderà una posizione di P, che sarà così in funzione di t.
L'**equazione vettoriale del moto del punto è:**

$$P = P(t) \qquad t \geq t_0 \tag{1.1}$$

avendo indicato con t_0 l'istante iniziale. Da questa si possono ricavare tre equazioni scalari note con il nome di *equazioni parametriche della curva descritta da P al variare di t*:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = x(t)} \\ \boldsymbol{y = y(t)} \\ \boldsymbol{z = z(t)} \end{cases} \qquad \boldsymbol{t \geq t_0} \tag{1.2}$$

se è stato introdotto un sistema di coordinate cartesiane (O, x, y, z) in $\Re^3$, dove le coordinate di un generico punto P sono rappresentate dalla terna (x, y, z).

Definizione 1.1.
Si definisce traiettoria la curva descritta da P al variare del tempo t. Pertanto le equazioni appena enunciate (1.2) vengono anche chiamate equazioni della traiettoria.

Introduciamo la base ortonormale canonica di $\Re^3$ data dalla terna di versori (vettori unitari):

- $\vec{i} = (1, 0, 0)$
- $\vec{j} = (0, 1, 0)$
- $\vec{k} = (0, 0, 1)$

Dalle (1.2) si deduce una riscrittura dell'equazione del moto del punto P:

$$P = P(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \tag{1.3}$$

Fissati sulla traiettoria un'origine O_1 ed un verso positivo di percorrenza, ad ogni posizione di P sulla traiettoria corrisponderà un valore s dell'arco detto degli archi crescenti, compreso tra P ed O_1, cioè il valore della **coordinata curvilinea**, con la convenzione per cui $s > 0$ se P segue O_1 sulla curva nel verso positivo, e $s < 0$ se P precede O_1. Quindi, se si conosce la traiettoria, la posizione di P ad ogni istante è univocamente determinata dalla legge oraria del moto:

$$s = s(t). \tag{1.4}$$

Definizione 1.2.
Si definisce velocità di un punto materiale P, e si indica con $\vec{v}(P)$, la seguente derivata:

$$\vec{v}(P) = \frac{dP(t)}{dt} \tag{1.5}$$

Sostituendo $P(t)$ nella (1.5) con l'espressione data nella (1.3) si ottiene

$$\vec{v}(P) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \tag{1.6}$$

Dalla (1.5) e dalla (1.4) si ottiene una riscrittura della velocità:

$$\vec{v}(P) = \frac{dP}{dt} = \frac{dP}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\vec{t}, \tag{1.7}$$

poichè, come è noto, $\frac{dP}{ds} = \vec{t}$ è il versore tangente alla traiettoria diretto nel verso degli archi crescenti. Ricordiamo che un versore è un vettore di modulo unitario. L'equazione (1.7) è detta *rappresentazione intrinseca della velocità*; grazie ad essa si può ottenre una prima classificazione dei moti:

- se $\dot{s} > 0$ il **moto** si dice **diretto**, poichè $s(t)$ è crescente, pertanto P si muove nel verso degli archi crescenti
- se $\dot{s} < 0$ il **moto** si dice **retrogrado**, poichè $s(t)$ è decrescente, pertanto P si muove nel verso negativo della traiettoria.

Definizione 1.3.
Si definisce accelerazione del punto materiale P la seguente derivata seconda di $P(t)$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2P(t)}{dt^2}. \tag{1.8}$$

Sostituendo $P(t)$ nella (1.8) con l'espressione data nella (1.3) si ottiene:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt}\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \tag{1.9}$$

Dalla (1.8) e dalla (1.4) si ottiene:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\vec{t}) = \ddot{s}\vec{t} + \dot{s}\frac{d\vec{t}}{dt} = \ddot{s}\vec{t} + \dot{s}\frac{d\vec{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \ddot{s}\vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho_c}\vec{n} \tag{1.10}$$

ove:

- $\vec{n}$ è il **versore normale** alla curva con verso interno cioè verso il centro del cerchio osculatore; il **cerchio osculatore** è il cerchio di raggio massimo tangente alla curva.
- ρ_c è il raggio del cerchio osculatore ed è detto anche **raggio di curvatura**
- $\frac{1}{\rho_c}$ è detto **curvatura**.

L'equazione (1.10) è detta *rappresentazione intrinseca dell'accelerazione*. In particolare:

- $\ddot{s}\vec{t}$ è definita **accelerazione tangenziale** e si indica con: $\vec{a_t}$
- $\frac{\dot{s}^2}{\rho_c}\vec{n}$ è definita **accelerazione centripeta** o **normale** e si indica con: $\vec{a_n}$.

A questo punto si ottiene una ulteriore classificazione dei moti:

- se $\vec{a_t} = 0$ il **moto** è **uniforme**, poichè $\ddot{s} = 0$, cioè $\dot{s}$ è costante (la velocità è costante in modulo)
- se $\vec{a_n} = 0$ il **moto** è **rettilineo**, poichè $\frac{d\vec{t}}{ds} = 0$ (il versore tangente mantiene direzione costante).

1.2 Classificazione dei moti in base alla legge oraria

Esaminiamo ora alcuni particolari tipi di moto.

(1)-**Moto Uniformemente Vario**: è definito dalla legge oraria:

$$s = s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0 \tag{1.11}$$

con $s_0, v, a \in \Re$ costanti. Ora, si deriva la (1.11) e si ottiene:

$$\dot{s} = at + v_0. \tag{1.12}$$

Dunque $v_0 = \dot{s}(0)$ e $s_0 = s(0)$ rappresentano i valori iniziali della posizione e della velocità del punto. Derivando una seconda volta si ha $\ddot{s} = a$. Dunque a rappresenta, a meno del segno, il modulo dell'accelerazione tangenziale, che dunque è costante. Il moto si dice:

- **naturalmente accelerato** se è v_0=0;
- **uniformemente accelerato** se v_0 e a sono dello stesso segno;
- **uniformemente ritardato** se v_0 e a sono di segno opposto.

(2)- **Moto Periodico**

Si definisce moto periodico di periodo T un moto la cui legge oraria $s = s(t)$ è una funzione periodica, cioè se esiste $T \in \Re$ tale che

$$s(t + T) = s(t), \qquad \forall t \geq t_0. \tag{1.13}$$

Derivando la (1.13) si vede che della stessa proprietà godono anche $\dot{s}(t)$ e $\ddot{s}(t)$. Quindi si definisce *moto periodico* un moto tale che, dopo un periodo, si svolge con le stesse modalità.

(3)- **Moto Oscillatorio Armonico**

Questo moto è un particolare moto periodico, ed è rappresentato dalla legge oraria:

$$s(t) = C\cos(\omega t + \gamma), \qquad C, \omega, \gamma \in \Re \tag{1.14}$$

ove:

- C è l'ampiezza
- γ è la fase iniziale
- ω è la pulsazione
- $\omega t + \gamma$ è la fase del moto.

La (1.14) rappresenta chiaramente un moto periodico di **periodo** $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

(4)-**Moti Smorzati**

Un moto si dice smorzato se $\lim_{t \to +\infty} s(t) = 0$. Di particolare interesse sono i seguenti moti smorzati:

(a)-**Moto aperiodico smorzato**.
Questo moto è rappresentato dalla seguente legge oraria:

$$s(t) = C_1 e^{-\beta_1 t} + C_2 e^{-\beta_2 t} \tag{1.15}$$

con $C_1, C_2, \beta_1, \beta_2 \in \Re$ costanti, $\beta_1, \beta_2 > 0$.

(b)-**Moto aperiodico smorzato con smorzamento critico**.
Questo moto è rappresentato dalla seguente legge oraria:

$$s(t) = C_1 e^{-\beta t} + C_2 t e^{-\beta t} \tag{1.16}$$

con $C_1, C_2, \beta \in \Re$ costanti, $\beta > 0$.

c)-**Moto oscillatorio smorzato**.
E' rappresentato dalla seguente legge oraria:

$$s(t) = C e^{-pt} \cos(\omega t + \gamma) \tag{1.17}$$

con $C, p, \omega, \gamma \in \Re$ costanti, $p > 0$, così chiamate:

- ω è la pulsazione;
- C è l'ampiezza;
- γ è la fase iniziale del moto;
- p è la costante di smorzamento, sempre positiva.

1.3 Rappresentazione del moto piano in coordinate polari

Fino ad ora si sono viste due possibilità di rappresentare un moto:

1. RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA $\Rightarrow$ ove si conosce $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$
2. RAPPRESENTAZIONE INTRINSECA $\Rightarrow$ ove si conoscono la traiettoria del moto e la legge oraria $s = s(t)$

Ora è possibile introdurne una terza e cioè la rappresentazione in COORDINATE POLARI, particolarmente utile nel caso in cui il moto del punto P sia piano. Si fissano un'origine O detta polo e una semiretta con origine in O, detta semiasse polare. Le coordinate di un generico punto P sono date dalla coppia (ρ, θ), dove

- ρ è la distanza del punto P dal polo O;
- θ è l'angolo che il vettore $P - O$, detto raggio vettore, forma con il semiasse polare.

Dunque P si identifica con la coppia $(\rho,\ \theta)$. A questo punto si fissa una base in $\Re^2$ data dalla coppia di versori $(\vec{r}, \vec{h})$, dove:

- $\vec{r}$ è il versore diretto da O verso P;
- $\vec{h}$ è il versore ottenuto ruotando $\vec{r}$ di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario (fissato come verso positivo per la misura dell'angolo θ).

Si ottengono le equazioni del raggio vettore, della velocità e dell'accelerazione in funzione di $\rho, \theta, \vec{r}$, ed $\vec{h}$. Si ha infatti:

$$P - O = \rho\vec{r} \tag{1.18}$$

da cui, ricordando che $\vec{h} = \frac{d\vec{r}}{d\theta}$, si ottiene

$$\vec{v}(P) = \frac{d(\rho\vec{r})}{dt} = \dot{\rho}\vec{r} + \rho\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\vec{r} + \rho\frac{d\vec{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt},$$

da cui infine

$$\vec{v}(P) = \dot{\rho}\vec{r} + \rho\dot{\theta}\vec{h}. \tag{1.19}$$

In particolare si definiscono:

- $\vec{v_\rho}(P) = \dot{\rho}\vec{r}$ *velocità radiale*

- $\vec{v_\theta}(P) = \rho\dot{\theta}\vec{h}$ *velocità trasversa*,

ottenendo così
$$\vec{v} = \vec{v_\rho} + \vec{v_\theta}.$$
Derivando ora la (1.19) si ottiene la seguente espressione per l'accelerazione:

$$\vec{a}(P) = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{\rho}\vec{r} + \dot{\rho}\frac{d\vec{r}}{dt}) + (\dot{\rho}\dot{\theta}\vec{h} + \rho\ddot{\theta}\vec{h} + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{h}}{dt})$$

Poichè:
$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \frac{d\vec{h}}{d\theta}\dot{\theta} = -\dot{\theta}\vec{r}$$
si ottiene:
$$\vec{a}(P) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{r} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{h}. \tag{1.20}$$
In particolare si definiscono

- $\vec{a_\rho}(P) = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$ *accelerazione radiale*
- $\vec{a_\theta}(P) = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}$ *accelerazione trasversa*,

ottenendo dunque
$$\vec{a} = \vec{a_\rho} + \vec{a_\theta}. \tag{1.21}$$
Si usa spesso la seguente notazione

$$\vec{a_\rho} = a_\rho\vec{r} \qquad e \qquad \vec{a_\theta} = a_\theta\vec{h}$$

ossia:
$$a_\rho(P) = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2, \qquad a_\theta(P) = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} \tag{1.22}$$
Indichiamo ora con $S(t)$ *l'area descritta dal raggio vettore nella variazione di tempo* $[t_0, t]$: $S(t)$ è l'area della regione piana delimitata dai raggi vettori $P(t_0) - O$ e $P(t) - O$, e dall'arco di traiettoria di estremi $P(t)$ e $P(t_0)$.

Definizione 1.4.
Si chiama velocità areolare $S'(t)$ del punto P la velocità con cui il raggio vettore descrive le aree, ossia:

$$S'(t) = \frac{dS(t)}{dt}$$

Proposizione 1.5.
Per la velocità areolare vale la seguente espressione:

$$S'(t) = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} \tag{1.23}$$

Dimostrazione.
Si ha $S'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$, essendo ΔS l'area descritta dal raggio vettore nell'intervallo temporale infinitesimo Δt. Approssimando ΔS con l'area del settore circolare di raggio ρ e apertura angolare $\Delta\theta$, cioè $\Delta S \approx \frac{1}{2}\rho^2\Delta\theta$, si ottiene:

$$S'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2}\rho^2\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2}\rho^2 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}$$

□

Esiste una relazione tra la velocità areolare e l'accelerazione trasversa.

Proposizione 1.6.
Vale la seguente relazione:

$$a_\theta = \frac{2}{\rho}\frac{d}{dt}(S'),$$

da cui si ha che $a_\theta = 0$ se e solo se S' è costante.

Dimostrazione.

$$\frac{2}{\rho}\frac{d}{dt}(S') = \frac{2}{\rho}\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}) = \frac{1}{\rho}(2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho^2\ddot{\theta}) = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = a_\theta$$

□

Il risultato appena trovato sarà utilizzato nella trattazione del moto dei pianeti, in particolare nella dimostrazione di una delle *leggi di Keplero.*

Teorema 1.7 (formula di Binet)**.**
Supponiamo che sia S' costante. Allora per l'accelerazione, tutta radiale, vale la seguente espressione:

$$a_\rho = -\frac{c^2}{\rho^2}(\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho}), \tag{1.24}$$

dove $c = \rho^2\dot{\theta} = 2S'$ è costante per ipotesi.

Dunque l'accelerazione è nota non appena si conosce l'equazione della traiettoria $\rho = \rho(\theta)$. La (1.24) è nota come *formula di Binet.*

Dimostrazione.
Ricordiamo che $a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$. Si inizia con il calcolare $\dot{\rho}$:

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{d\rho}{d\theta}\frac{c}{\rho^2} = -c\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\theta}.$$

Per $\ddot{\rho}$ si ottiene dunque

$$\ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{dt} = \frac{d\dot{\rho}}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{d\dot{\rho}}{d\theta}\frac{c}{\rho^2} = \frac{c}{\rho^2}\frac{d(-c\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\theta})}{d\theta} = \frac{c}{\rho^2}(-c\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\theta^2}) = -\frac{c^2}{\rho^2}\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\theta^2}.$$

Dunque:

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = (-\frac{c^2}{\rho^2}\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\theta^2}) - \rho(\frac{c}{\rho^2})^2 = -\frac{c^2}{\rho^2}(\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho}).$$

□

1.4 Formule di Poisson

Dato il sistema di riferimento $(O) = (0, x, y, z)$, dove i versori degli assi sono $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, introduciamo un secondo sistema di riferimento $(O_1) = (O_1, x_1, y_1, z_1)$ in moto generico rispetto ad (O), dove i versori degli assi sono $(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$. Ricordando che un vettore di modulo costante è ortogonale alla propria derivata, avremo che i versori $\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1}$, sono perpendicolari alle loro derivate: $\dot{\vec{i_1}} = \frac{d\vec{i_1}}{dt}$, $\dot{\vec{j_1}} = \frac{d\vec{j_1}}{dt}$, $\dot{\vec{k_1}} = \frac{d\vec{k_1}}{dt}$.
Qui le derivate rispetto al tempo sono fatte rispetto all'osservatore (O). Allora esisteranno tre vettori $\vec{\omega_1}$, $\vec{\omega_2}$, $\vec{\omega_3}$ tali che:

$$\dot{\vec{i_1}} = \vec{\omega_1} \times \vec{i_1}$$
$$\dot{\vec{j_1}} = \vec{\omega_2} \times \vec{j_1}$$
$$\dot{\vec{k_1}} = \vec{\omega_3} \times \vec{k_1},$$

dove $\vec{a} \times \vec{b}$ indica il prodotto vettoriale di due generici vettori $\vec{a}, \vec{b} \in \Re^3$. Poichè i vettori $\vec{\omega_1}$, $\vec{\omega_2}$, $\vec{\omega_3}$ non sono unici, si può dimostrare che è possibile sceglierli in modo che siano uguali: $\vec{\omega_1} = \vec{\omega_2} = \vec{\omega_3} \equiv \vec{\omega}$.

Teorema 1.8.
$\exists!$ $\vec{\omega} \in \Re^3$ *tale che*

$$\frac{d\vec{i_1}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i_1}, \quad \frac{d\vec{j_1}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j_1}, \quad \frac{d\vec{k_1}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k_1}. \tag{1.25}$$

Dimostrazione.
L'esistenza è gia stata dimostrata. Per quanto riguarda l'unicità possiamo procedere per assurdo. Si suppone che esista $\vec{\omega_1} \in \Re^3$ tale che $\frac{d\vec{i_1}}{dt} = \vec{\omega_1} \times \vec{i_1}$, $\frac{d\vec{j_1}}{dt} = \vec{\omega_1} \times \vec{j_1}$, $\frac{d\vec{k_1}}{dt} = \vec{\omega_1} \times \vec{k_1}$. Si ha allora $\vec{\omega} \times \vec{i_1} = \vec{\omega_1} \times \vec{i_1}$, ossia $(\vec{\omega} - \vec{\omega_1}) \times \vec{i_1} = 0$. Ma questo è vero se e solo se o i due vettori $\vec{\omega} - \vec{\omega_1}$ e $\vec{i_1}$ sono paralleli o almeno uno dei due vettori è nullo. Ora, $\vec{i_1}$ è diverso da zero essendo un versore; supponendo per assurdo che $\vec{\omega} - \vec{\omega_1} \neq 0$, si ha dunque che $\vec{\omega} - \vec{\omega_1}$ è parrallelo a $\vec{i_1}$. Ma analogamente si ottiene

$$(\vec{\omega} - \vec{\omega_1}) \times \vec{j} = 0$$

e

$$(\vec{\omega} - \vec{\omega_1}) \times \vec{k} = 0$$

da cui $\vec{\omega} - \vec{\omega_1}$ dovrebbe essere parallelo anche a $\vec{j_1}$ e a $\vec{k_1}$, ciò che è impossibile, essendo $(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$ una terna ortonormale. □

Le (1.25) sono dette *formule di Poisson* e $\vec{\omega}$ è detto *vettore di Poisson* o *veloctà angolare* di (O_1) rispetto ad (O).

1.5 Cinematica relativa del punto materiale

Supponiamo di avere due sistemi di riferimento (O) ed (O_1) in moto generico l'uno rispetto all'altro, come nel paragrafo precedente. Uno dei due, diciamo (O) verrà detto convenzionalmente *sistema assoluto*, e l'altro, (O_1), verrà detto *sistema relativo*. Il problema da risolvere è il seguente: *noto il moto del punto P rispetto al sistema (O_1), e noto il moto del sistema relativo (O_1) rispetto al sistema assoluto (O), si vuole studiare il moto del punto P rispetto al sistema di riferimento assoluto (O).*

1.5.1 Velocità assoluta e velocità relativa

Introduciamo la seguente notazione:

- $\vec{v}(P)$: **velocità assoluta**, cioè velocità rispetto al sistema (O)
- $\vec{v_1}(P)$: **Velocità relativa**, cioè velocità rispetto al sistema (O_1)

Più precisamente, dalle due relazioni

$$P - O = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{1.26}$$

$$P - O_1 = x_1\vec{i_1} + y_1\vec{j_1} + z_1\vec{k_1}, \tag{1.27}$$

si ottiene

$$\vec{v}(P) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \tag{1.28}$$

e

$$\vec{v_1}(P) = \dot{x}_1\vec{i_1} + \dot{y}_1\vec{j_1} + \dot{z}_1\vec{k_1}. \tag{1.29}$$

Vogliamo ora stabilire una relazione fra $\vec{v}(P)$ e $\vec{v_1}(P)$. Scomponendo $P-O = (P-O_1)+(O_1-O)$ e derivando rispetto all'osservatore (O) si ottiene:

$$\vec{v}(P) = \frac{d(P-O_1)}{dt} + \frac{d(O_1-O)}{dt} = \frac{d}{dt}(x_1\vec{i_1} + y_1\vec{j_1} + z_1\vec{k_1}) + \vec{v}(O_1) \tag{1.30}$$

D'altra parte si ha $\frac{d}{dt}(x_1\vec{i_1}+y_1\vec{j_1}+z_1\vec{k_1}) = \dot{x}_1\vec{i_1}+\dot{y}_1\vec{j_1}+\dot{z}_1\vec{k_1}+x_1\dot{\vec{i_1}}+y_1\dot{\vec{j_1}}+z_1\dot{\vec{k_1}}$. Dalla (1.29) si ottiene dunque:

$$\vec{v}(P) = \vec{v_1}(P) + x_1\dot{\vec{i_1}} + y_1\dot{\vec{j_1}} + z_1\dot{\vec{k_1}} + \vec{v}(O_1), \tag{1.31}$$

e utilizzando le formule di Poisson (1.25) si ha

$$\vec{v}(P) = \vec{v_1}(P) + \vec{\omega} \times (P-O_1) + \vec{v}(O_1).$$

Se il punto P fosse fermo rispetto al sistema (O_1) e dunque ad esso solidale, si avrebbe $\vec{v_1}(P) = 0$ e pertanto la velocià assoluta di P sarebbe data da : $\vec{v_\tau} = \vec{v}(O_1) + \vec{\omega} \times (P-O_1) + \vec{v}(O_1)$, detta *velocità di trascinamento*. Più precisamnete $\vec{v_\tau}(P)$ è la velocità che P avrebbe se fosse rigidamente connesso al sistema (O_1) e da esso trascinato nel suo moto. Si ottiene così il seguente

Teorema 1.9 (legge di somposizione delle velocità)**.**
Vale la seguente relazione

$$\vec{v}(P) = \vec{v_1}(P) + \vec{v_\tau}(P). \tag{1.32}$$

1.5.2 Teorema di Coriolis

Vediamo ora di trovare un'analoga relazione per le accelerazioni. Con notazione analoga a quella usata per le velocità avremo che $\vec{a}(P) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$ è l'accelerazione assoluta di P (rispetto ad (O)) e $\vec{a_1}(P) = \ddot{x}_1\vec{i_1} + \ddot{y}_1\vec{j_1} + \ddot{z}_1\vec{k_1}$ è l'accelerazione relativa (rispetto ad (O_1)). Partendo dalla (1.32)

$$\vec{v}(P) = \dot{x}_1\vec{i_1} + \dot{y}_1\vec{j_1} + \dot{z}_1\vec{k_1} + x_1\dot{\vec{i_1}} + y_1\dot{\vec{j_1}} + z_1\dot{\vec{k_1}} + \vec{v}(O_1)$$

si ottiene, utilizzando ancora una volta le formule di Poisson (1.25):

$$\vec{a}(P) = \frac{d\vec{v}(P)}{dt} = \ddot{x}_1\vec{i_1}+\ddot{y}_1\vec{j_1}+\ddot{z}_1\vec{k_1}+2(\dot{x}_1\dot{\vec{i_1}}+\dot{y}_1\dot{\vec{j_1}}+\dot{z}_1\dot{\vec{k_1}})+x_1\ddot{\vec{i_1}}+y_1\ddot{\vec{j_1}}+z_1\ddot{\vec{k_1}}+\vec{a}(O_1)$$

$$= \vec{a_1}(P) + 2\vec{\omega} \times (\dot{x}_1\vec{i_1} + \dot{y}_1\vec{j_1} + \dot{z}_1\vec{k_1}) + x_1\ddot{\vec{i_1}} + y_1\ddot{\vec{j_1}} + z_1\ddot{\vec{k_1}} + \vec{a}(O_1)$$

$$= \vec{a_1}(P) + 2\vec{\omega} \times \vec{v_1}(P) + x_1\ddot{\vec{i_1}} + y_1\ddot{\vec{j_1}} + z_1\ddot{\vec{k_1}} + \vec{a}(O_1) \tag{1.33}$$

Osserviamo ora che $x_1\ddot{\vec{i_1}} + y_1\ddot{\vec{j_1}} + z_1\ddot{\vec{k_1}} + \vec{a}(O_1)$ è la parte di accelerazione che resterebbe se x_1, y_1, z_1 fossero costanti, cioè se P fosse fisso rispetto ad (O_1). Essa viene perciò definita come *accelerazione di trascinamento* ed è l'accelerazione che il punto P avrebbe se fosse rigidamente ancorato al sistema (O_1) e da esso trascinato nel suo moto, e si indica con $\vec{a_\tau}(P)$.
Pertanto la (1.33) può essere riscritta come

$$\vec{a}(P) = \vec{a_1}(P) + 2\vec{\omega} \times \vec{v_1}(P) + \vec{a_\tau}(P). \tag{1.34}$$

Si ottiene dunque il seguente:

Teorema 1.10 (di Coriolis)**.**
Si ha la seguente relazione

$$\vec{a}(P) = \vec{a_1}(P) + \vec{a_\tau}(P) + \vec{a_c}(P) \tag{1.35}$$

dove $\vec{a_c}(P) = 2\vec{\omega} \times \vec{v_1}(P)$ è detta accelerazione complementare o di Coriolis.

Osservazione 1.11.
E' interessante esaminare i casi in cui il termine complementare $\vec{a_c}(P)$ in (1.35) è nullo:

- se $\vec{\omega} = 0$, cioè se (O_1) trasla rispetto ad (O);
- se $\vec{v_1}(P) = 0$, cioè se P è fisso rispetto ad (O_1) ;
- se $\vec{v_1}(P)$ è parallelo a $\vec{\omega}$.

1.6 Sistemi di Riferimento Equivalenti

Molto utile nello studio della dinamica relativa di un punto materiale è la nozione di sistemi di riferimento equivalenti.

Definizione 1.12. *Due sistemi di riferimento (O) ed (O_1) si dicono equivalenti e si scrive*

$$(O) \approx (O_1)$$

se essi si muovono di moto di pura traslazione uniforme l'uno rispetto all'altro, cioè, prendendo (O) come sistema assoluto ed (O_1) come sistema relativo

1. *$\vec{\omega} = 0$, ossia tutti i punti del sistema (O_1), visto come corpo rigido, hanno la stessa velocità;*

2. *la velocità dei punti del sistema (O_1) è costante nel tempo, ossia, per ogni punto $P \in (O_1)$ si ha $\vec{a}(P) = 0$.*

Per comprendere meglio questa definizione è opportuno ricordare la *formula fondamentale della cinematica del corpo rigido.* Sia C un corpo rigido in moto rispetto ad un osservatore (O), sia (O_1) un sistema di riferimento solidale con C (rispetto ad (O_1) tutti i punti di C sono fissi). Si ha allora la seguente formula:

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(O_1) + \vec{\omega} \times (P - O_1), \qquad \forall P \in C \tag{1.36}$$

dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare di (O_1), e quindi di C, rispetto ad (O).

Definizione 1.13. *Si dice che C si muove di pura traslazione se*

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(O_1), \qquad \forall P, O_1 \in C \tag{1.37}$$

E' immediato verificare la seguente

Proposizione 1.14.
Il moto di C è di traslazione se e solo se $\vec{\omega} = 0$

Dimostrazione.
Se $\vec{\omega} = 0$ dalla (1.36) segue immediatamente che il moto è traslatorio. Viceversa se vale la (1.37) allora dalla (1.36) si ha

$$\vec{\omega} \times (P - O_1) = 0, \qquad \forall P, O_1 \in C.$$

Scegliendo P ed O_1 in modo che il vettore $P - O_1$ sia non nullo e non parallelo ad $\vec{\omega}$, si ha che $\vec{\omega} = 0$. $\square$

Dimostriamo ora il seguente

Teorema 1.15.

$$(O) \approx (O_1) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}(P) = \vec{a_1}(P), \qquad \forall P \in \Re^3$$

Dimostrazione.
Supponiamo $(O) \approx (O_1)$. Dalla (1.35) si ha $\vec{a}(P) = \vec{a_1}(P) + \vec{a_c}(P) + \vec{a_\tau}(P)$. Nel caso di due sistemi equivalenti però si ha

1. $\vec{a_c}(P) = 2\vec{\omega} \times \vec{v_1}(P) = 0$ poichè $\vec{\omega} = 0$.

2. $\vec{a_\tau}(P) = 0$ poiché $\vec{a_\tau}$ è l'accelerazione che il punto P avrebbe se fosse solidale con il sistema(O_1), e l'accelerazione dei punti di (O_1) è nulla.

Dunque la (1.35) nel caso di sistemi di riferimento equivalenti diventa

$$\vec{a}(P) = \vec{a_1}(P), \qquad \forall P \in \Re^3 \tag{1.38}$$

Viceversa supponiamo che valga la (1.38). Per $P \in (O_1)$ si ha $\vec{a_1}(P) = 0$, perciò dalla (1.38) si ottiene

$$\vec{a}(P) = 0, \qquad \forall P \in (O_1). \tag{1.39}$$

Dalla (1.39) ora segue che $\vec{a_\tau}(P) = 0, \forall P \in \Re^3$, e anche che il moto dei punti di (O_1) è uniforme (la loro velocità è costante). Pertanto dalla (1.35), essendo $\vec{a_\tau}(P) = 0$ si ottiene

$$\vec{a}(P) = \vec{a_1}(P) + \vec{a_c}(P), \qquad \forall P \in \Re^3$$

e dall'ipotesi $\vec{a}(P) = \vec{a_1}(P), \forall P \in \Re^3$ si ottiene

$$\vec{a_c}(P) = 2\vec{\omega} \times \vec{v_1}(P) = 0, \qquad \forall P \in \Re^3. \tag{1.40}$$

Ora prendendo $P \in \Re^3$ in modo che $\vec{v_1}(P)$ sia non nulla e non parallela ad $\vec{\omega}$, si ottiene $\vec{\omega} = 0$ e ciò prova che $(O) \approx (O_1)$. □

Capitolo 2

Dinamica relativa del punto

2.1 Forze

I concetti introdotti fino ad ora, non bastano quando si vuole prevedere il moto dei corpi, pertanto è opportuno e necessario introdurre un concetto nuovo, quello di **Forza**.
Da un punto di vista prettamente fisico una forza è un ente fisico in grado di alterare lo stato di quiete o di moto di un sistema, cioè di produrre un'accelerazione. Questa relazione concettuale tra le nozioni di forza e di accelerazione da essa provocata si deve a Isaac Newton (1642-1727).
Da un punto di vista prettamente matematico, si ha la seguente

Definizione 2.1.
Una forza è un vettore applicato $(\vec{F}, P)$ *ove* $\vec{F}$ *è il vettore della forza e* P *è il punto di applicazione della forza.*

Rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano (O, x, y, z) con versori $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ se $\vec{F} = \vec{F}_x\vec{i} + \vec{F}_y\vec{j} + \vec{F}_z\vec{k}$, e $P = (x, y, z)$, ovvero $P - O = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, la forza $(\vec{F}, P)$ quindi è rappresentata dai sei parametri $(\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z, x, y, z)$.
La previsione del moto date le forze, e, viceversa, la determinazione delle forze che producono un prefissato moto è oggetto della *Dinamica*. Però le forze applicate ai punti di un corpo possono essere tali da compensarsi nei loro effetti, così che il corpo rimanga in quiete rispetto ad un certo sistema di riferimento. Oggetto della *Statica* è proprio quello di determinare sotto quali condizioni un corpo, o un sistema di corpi, è in quiete.
Nella Statica e nella Dinamica non si può non tenere in considerazione la materia di cui sono fatti i corpi, per questo conviene introdurre il concetto di punto materiale.

Definizione 2.2.
Un punto materiale è un corpo o la porzione di un corpo, di estensione così piccola da poterla considerare nei calcoli come un punto, senza però poter prescindere dalla materia di cui è formato.

I corpi e i sistemi di corpi si distinguono in *liberi* ed *vincolati.* Per precisare queste nozioni permettiamo la seguente

Definizione 2.3.
Una configurazione è l'insieme dei punti dello spazio occupati dai punti del corpo. Un corpo si dice libero in una configurazione C se si può passare da C ad ogni altra configurazione vicina geometricamente. Un corpo si dice vincolato se esiste una configurazione C^1 vicina a C che il corpo non può raggiungere per la presenza di dispositivi detti Vincoli.

La Dinamica si basa su alcuni principi fondamentali i cui enunciati si devono a Newton. Occorre però notare che alla loro elaborazione contribuirono anche nolti altri scienziati; fra essi, il più grande è Galieleo Galilei. Dalle ricerche di Galileo infatti appare l'importanza dinamica della nozione di accelerazione, fondamento delle *leggi di Newton.* Anche l'esperienza quotidiana ci dice che una data Forza produrrà accelerazioni diverse applicata a corpi diversi, cioè a corpi con massa differente.
Tutto ciò viene formalizzato nella seguente *legge fondamentale della dinamica*: se su un punto P agisce una forza di vettore $\vec{F}$, questa produce su P un'accelerazione $\vec{a}$ tale che

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{2.1}$$

Ora, si suppone che sul punto P di massa m non agisca più solo una forza ma n-forze, di vettori: $\vec{F_1}...\vec{F_n}$. Chiamando $\vec{R}$ il vettore risultante di tutte le forze agenti sul punto P, cioè $\vec{R} = \vec{F_1} + ... + \vec{F_n}$, si ha

$$\vec{R} = m\vec{a} \tag{2.2}$$

Riguardo ai sistemi vincolati, a questo punto è importante ricordare il seguente

Postulato 2.4 (delle reazioni vincolari)**.**
E' possibile rendere libero un qualunque sistema vincolato a patto di introdurre un opportuno sistema di forze dette reazioni vincolari.

Le forze, in virtù di questo postulato, possono essere classificate in:

- Reazioni Vincolari: esprimono l'azione dei vincoli;
- Forze attive: tutte le altre.

Indicando con $\vec{F}$ il vettore risultante delle forze attive e con $\vec{\Phi}$ il vettore risultante delle reazioni vincolari agenti su P la (2.2) può essere così riscritta

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{\Phi}. \tag{2.3}$$

2.2 Forza di Trascinamento e Forza di Coriolis

Consideriamo ora due sistemi di riferimento (O) ed (O_1) ed indichiamo con $\vec{a}$ l'accelerazione osservata da (O) e con $\vec{a_1}$ l'accelerazione osservata da (O_1) per uno stesso punto P.
Dalla (1.35) si ha

$$\vec{a_1} = \vec{a} - \vec{a_\tau} - \vec{a_c}. \tag{2.4}$$

Adottando la concezione relativa della dinamica (si veda osservazione (2.5)), per cui la legge di Newton è valida rispetto a qualunque sistema di riferimento, indicando con $\vec{R_1}$ il vettore risultante delle forze agenti su P rispetto ad (O_1) si ha

$$m\vec{a_1} = \vec{R_1} \tag{2.5}$$

Combinando la (2.5) con la (2.4) si ottiene:

$$\vec{R_1} = \vec{R} - m\vec{a_\tau} - m\vec{a_c}. \tag{2.6}$$

Se $\vec{F_1}$ e $\vec{\Phi_1}$ sono rispettivamente il vettore risultante delle forze attive e delle reazioni vincolari agenti su P rispetto ad (O_1), da cui $\vec{R_1} = \vec{F_1} + \vec{\Phi_1}$, avendo già posto $\vec{R} = \vec{F} + \vec{\Phi}$ si ottiene:

$$\vec{F_1} + \vec{\Phi_1} = \vec{F} + \vec{\Phi} - m\vec{a_\tau} - m\vec{a_c} \tag{2.7}$$

Poichè le reazioni vincolari sono dovute all'azione di corpi (vincoli) e non al moto dei sistemi, si assume che esse non varino al variare del sistema di riferimento, ossia possiamo assumere che sia

$$\vec{\Phi_1} = \vec{\Phi},$$

da cui la (2.7) diventa

$$\vec{F_1} = \vec{F} - \vec{F_\tau} - \vec{F_c} \tag{2.8}$$

ove $\vec{F_\tau} = m\vec{a_\tau}$ si definisce *forza di trascinamento* e $\vec{F_c} = m\vec{a_c}$ è detta *forza di Coriolis*. L'equazione (2.8) è importantissima in quanto consente di conoscere le forze attive rispetto ad un qualunque sistema di riferimento (O_1) ove siano note la forza attiva $\vec{F}$ rispetto ad (O) e le accelerazioni di trascinamento e di Coriolis.

Osservazione 2.5.
Per quanto riguarda la scelta del sistema di riferimento si possono seguire due diverse concezioni del moto:

- *Concezione assoluta del moto*: tra le due è la più antica, parte dal concetto che le forze agenti su un corpo siano dovute solo all'azione di altri corpi e tendano a zero quando tali corpi si allontanano indefinitivamente dal corpo in esame. Con questa concezione le forze non dipendono dal sistema di riferimento. Allora la legge di Newwton risulterà valida solo per particolari sistemi di riferimento che vengono detti *sistemi inerziali*.

- *Concezione relativa del moto*: è quella che si adotta in questa trattazione. Questa concezione rinuncia ad attribuire alla forza un valore assoluto e ci si basa, invece, sui concetti, relativi al sistema di riferimento, di moto e di accelerazione. Ciò ha lo scopo di rendere valide le leggi di Newton rispetto a qualunque sistema di riferimento.

2.3 Come varia il peso in funzione della latitudine

Si consideri un punto materiale P di massa m. Indicando con M la massa terrestre, rispetto ad un osservatore (O) solidale con le stelle fisse, su P agisce la forza di attrazione gravitazionale Newtoniana di vettore $\vec{F}$ data da

$$\vec{F} = -k\frac{mM}{R^2}\vec{r},$$

dove k è una nota costante universale, R è il raggio terrestre e $\vec{r}$ è il versore diretto dal centro O_1 della terra al punto P, fisso sulla superficie terrestre. Indichiamo inoltre con (O_1) un sistema di riferimento terrestre (solidale con il moto di rotazione della terra intorno al proprio asse), con origine in (O_1) e che ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$ costante: il modulo ω di $\vec{\omega}$ corrisponde ad un angolo giro al giorno. Per definizione il *peso* $\vec{P}$ di P rappresenta l'azione della massa M su P vista dall'osservatore (O_1), ossia $\vec{P} = \vec{F_1}$. Denotando con $\vec{g}$ l'accelerazione di gravità, cioè l'accelerazione $\vec{a_1}(P)$ di P rispetto ad (O_1) generata dal peso $\vec{P}$, si ha

$$\vec{P} = m\vec{g} \tag{2.9}$$

Ora, per determinare l'espressione di $\vec{P}$, e quindi di $\vec{g}$, utilizziamo la relazione (2.8):

$$\vec{P} = \vec{F} - \vec{F_\tau} - \vec{F_c}$$

ossia,

$$\vec{P} = \vec{F} - m\vec{a_\tau}(P) - m\vec{a_c}(P) \tag{2.10}$$

Analizziamo ora $\vec{a_\tau}(P)$ ed $\vec{a_c}(P)$. Per definizione si ha

$$\vec{a_c}(P) = 2\vec{\omega} \times \vec{v_1}(P)$$

In questo caso $\vec{v_1}(P) = 0$ in quanto il punto P è fermo sulla superficie terrestre. Pertanto $\vec{a_c} = 0$ e la (2.10) diventa:

$$\vec{P} = \vec{F} - m\vec{a_\tau}. \tag{2.11}$$

Per quanto riguarda $\vec{a_\tau}(P)$, si tratta dell'accelerazione che P avrebbe se fosse fisso, come in effetti è, rispetto ad (O_1). Rispetto al sistema inerziale (O) delle stelle fisse il punto P, trascinato dalla rotazione terrestre, descrive una circonferenza definita come segue. Indichiamo con φ la latitudine di P e con H la sua proiezione sull'asse terrestre. Allora P descrive una circonferenza di centro H e raggio $\rho = |P - H| = R\cos\varphi$. Rappresentando il moto di tascinamento con la coordianta curvilinea $s_\tau = \rho\theta$, denotando con θ l'angolo di rotazione terrestre, si ha:

$$\dot{s_\tau} = \rho\dot{\theta} = \rho\omega$$

e

$$\ddot{s_\tau} = 0,$$

poichè la velocità angolare ω è costante, come osservato in precedenza. Riguardo ad $\vec{a_\tau}$ si ottiene allora

$$\vec{a_\tau} = \ddot{s_\tau}\vec{t} + \frac{\dot{s_\tau}^2}{\rho}\vec{n} = \rho\omega^2\vec{n} = R\omega^2\cos\varphi\vec{n},$$

dove $\vec{n}$ è il versore normale alla circonferenza diretto da P verso H. Dalla (2.11) si ottiene infine

$$\vec{P} = \vec{F} - mR\omega^2\cos\varphi\vec{n}. \tag{2.12}$$

Da quest'ultima equazione si può trarre la seguente conclusione:

Proposizione 2.6.
Il peso varia in base alla latitudine φ, in particolare il peso è massimo ai poli e minimo all'equatore.

Dimostrazione.
Si ha infatti che $\vec{P} = \vec{F} - mR\cos(\varphi)\omega^2\vec{n}$ e dunque chiaramente il peso dipende da φ che è la latitudine. In particolare all'equatore si ha $\varphi = 0$, ossia $\cos(\varphi) = 1$, da cui $\vec{P} = \vec{F} - mR\omega^2\vec{n}$ cioè $\vec{P}$ è MINIMO. Ai poli invece $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ossia $\cos(\varphi) = 0$, da cui $\vec{P} = \vec{F}$ risulta MASSIMO.

□

2.4 Il problema dei due corpi

Il problema dei due corpi riguarda lo studio del moto di due punti materiali soggetti alla loro mutua azione di attrazione Newtoniana. Questo problema si presenta nella teoria del moto dei sistemi Sole-Pianeta, Pianeta-Satellite, ecc, perchè il moto dei baricentri di due corpi lontani fra loro come il Sole e il Pianeta si può trattare supponendo la massa dei due corpi concentrata nei rispettivi baricentri.
Indichiamo con O e P i due punti, m e M ripettivamente le loro masse ed $\vec{F}$ la forza di attrazione che O esercita su P, considerando il moto riferito al sistema stellare; naturalmente per il *principio di azione-reazione* la forza agente su O è $-\vec{F}$. Utilizzando la *legge di Newton* (2.1) si potranno scrivere:

$$m\frac{d^2P}{dt^2} = \vec{F} \tag{2.13}$$

e

$$M\frac{d^2O}{dt^2} = -\vec{F} \tag{2.14}$$

Si vuole studiare il moto di P rispetto ad un sistema (O) con origine in O e in traslazione rispetto alle stelle fisse. Così il moto dei pianeti viene studiato rispetto al sistema solare. Ricordando la (2.8)

$$\vec{F_1} = \vec{F} - \vec{F_\tau} - \vec{F_c}$$

è necessario determinare la forza di trascinamento $\vec{F_\tau} = m\vec{a_\tau}$ e quella di Coriolis $\vec{F_c} = m\vec{a_c}$. Per quanto riguarda $\vec{F_c}$, poichè (O) trasla, $\vec{\omega} = 0$, pertanto $\vec{a_c} = 2\vec{\omega} \times \vec{v_1} = 0$ e dunque $\vec{F_c} = 0$.
Riguardo a $\vec{F_\tau}$, poichè (O) trasla tutti i punti hanno la stessa velocità e quindi la stessa accelerazione. Nel moto di trascinamento dunque P ha la stessa accelerazione di ogni punto del sistema (O) e quindi dello stesso punto O, che può essere ricavata dalla (2.14)

$$\vec{a_\tau} = \frac{d^2O}{dt^2} = -\frac{\vec{F}}{M}.$$

La (2.8) dunque diventa:

$$\vec{F_1} = \vec{F} + m\frac{\vec{F}}{M} = (\frac{M+m}{M})\vec{F}, \tag{2.15}$$

da cui:

$$m\vec{a_1} = \frac{M+m}{M}\vec{F}$$

e dunque

$$\frac{mM}{M+m}\vec{a_1} = \vec{F}. \tag{2.16}$$

Ponendo $\mu = \frac{mM}{M+m}$, detta *massa ridotta*, si ha infine:

$$\mu\vec{a_1} = \vec{F}. \tag{2.17}$$

Dunque il moto del punto P riferito al sistema (O) è identico al moto che avrebbe P qualora O fosse fermo rispetto al sistema stellare, purchè con massa di P non si intenda m ma la massa ridotta μ.

Osservazione 2.7.
In molti casi, come sole-pianeta o pianeta-satellite, $\frac{m}{M}$ è molto piccolo rispetto all'unità, quindi la massa ridotta vale praticamente m; infatti

$$\mu = \frac{mM}{M+m} = \frac{m}{1+\frac{m}{M}} \approx m.$$

Capitolo 3

Le Leggi di Keplero

Fin dai tempi più remoti i movimenti dei pianeti, con i loro vagabondaggi sullo sfondo del cielo stellato, hanno rappresentato un affascinante mistero per l'umanità. Giovanni Keplero (1571- 1630), dopo un'intera vita dedicata a questi problemi, arrivò a formulare alcune leggi empiriche che governano questi moti. Tycho Brahe (1546-1601), l'ultimo dei grandi astronomi a osservare il cielo senza l'ausilio del telescopio, aveva eseguito la registrazione di un'esauriente quantità di dati che consentì a Keplero di dedurre le tre leggi del moto dei pianeti che portano il suo nome e che sono presentate in quest'ultimo capitolo. Più tardi Isaac Newton (1642-1727) dimostrò come le leggi empiriche di Keplero si possano dedurre dalla sua legge sulla gravitazione. Per continuità con il capitolo precedente, e usando le stesse notazioni, si esamina prima la seconda legge di Keplero.
Innanazi tutto dimostriamo che il moto di P rispetto ad (O) è piano. Indicando con $\vec{K}_1(O) = m\vec{v}_1 \times (O-P)$ il momento angolare di P rispetto ad O e derivando rispetto al tempo, rispetto ad (O), si ha:

$$\frac{d\vec{K}_1(O)}{dt} = m\vec{a}_1 \times (O-P) = \frac{M+m}{M}\vec{F} \times (O-P) = 0,$$

essendo $\vec{F} = -k\frac{mM}{\rho^2}\vec{r}$ parallela al vettore $P-O$. Qui $\vec{r}$ denota il versore diretto da O verso P e $\rho = |P-O|$ la distanza di P da O. Allora $\vec{K}_1(O)$ è costante e i vettori $(P-O)$ e $\vec{v}_1$ giacciono nel piano costante passante per O e perpendicolare a $\vec{K}_1(O)$. Il moto di P rispetto ad (O) avviene duqnue in questo piano costante.
Possiamo dunque rappresentare il moto in coordinate polari, con polo O, e la (2.17) diventa:

$$\mu(a_\rho\vec{r} + a_\theta\vec{h}) = -k\frac{mM}{\rho^2}\vec{r} \tag{3.1}$$

da cui $a_\theta = 0$. Dalla Proposizione 1.6 segue che $S' = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}$ è costante e resta pertanto dimostrato il seguente

Teorema 3.1 (seconda legge di Keplero)**.**
Il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali.

Ponendo ora

$$S'(t) = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} = \frac{c}{2},$$

da cui

$$\rho^2\dot{\theta} = c,$$

ricordiamo la formula di Binet (1.24):

$$a_\rho = (-\frac{c^2}{\rho^2})(\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho}),$$

che, combinata con la (3.1), dà

$$(-\frac{c^2}{\rho^2})(\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho}) = -\frac{k(M+m)}{\rho^2}.$$

Semplificando opportunamente si ottiene

$$\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho} = \frac{k(M+m)}{c^2} \tag{3.2}$$

Ora, per comodità di notazione, si pone $\frac{k(M+m)}{c^2} = \frac{1}{p}$. Sostituendo nella (3.2) si ottiene:

$$\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{p}. \tag{3.3}$$

Per integrare questa equazione, e determinare $\rho = \rho(\theta)$, basta osservare che essa, nell'incognita $x := \frac{1}{\rho}$ e nella variabile θ, è *un'equazione differenziale del secondo ordine lineare non omogenea.*
La soluzione generale è data da

$$x = x_0 + x_1$$

dove:

- x_0 è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata $\ddot{x} + x = 0$;
- x_1 è una soluzione particolare dell'equazione completa.

Dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie la soluzione x_0 avrà la forma $A\cos(\theta+\theta_0)$, essendo A e θ_0 due costanti arbitrarie che si determinano con le condizioni iniziali. Inoltre $x_1 = \frac{1}{\rho}$ è una banale soluzione costante di (3.3). Dunque la soluzione generale di (3.3) sara':

$$\frac{1}{\rho}(\theta) = A\cos(\theta+\theta_0) + \frac{1}{p},$$

e dunque

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1+Ap\cos(\theta+\theta_0)}.$$

Ora, posto $e = -Ap$, si ottiene:

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1-e\cos(\theta+\theta_0)} \tag{3.4}$$

La (3.4) rappresenta, in coordiante polari, una *conica* di parametro p, di eccentricità $|e|$ e con fuoco in O. Se $|e| < 1$ si tratta di un'ellisse, se $|e| = 1$ è una parabola, se $|e| > 1$ si ha un'iperbole. Quindi si ottiene la seguente

Proposizione 3.2.
La traiettoria di P è una conica.

Dato che per i pianeti e per molte comete l'osservazione prova che $|e| < 1$, rimane dimostrato il segunete

Teorema 3.3 (prima legge di Keplero)**.**
Tutti i pianeti si muovono su orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.

Resta da trattare l'ultima delle leggi di Keplero, ossia la terza, facendolo nel caso di orbite ellittiche. Indichiamo con a il semiasse maggiore e con b il semiasse minore dell'ellisse. Ne segue che $p = \frac{b^2}{a}$. Ricordando che l'area dell'ellisse è data da πab e che $S' = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} = \frac{c}{2}$ è costante, il periodo T impiegato dal punto P per compiere una intera rivoluzione risulta essere tale che: $T\frac{c}{2} = \pi ab$, e dunque

$$T = \frac{2\pi ab}{c}. \tag{3.5}$$

Si esamina ora il rapporto $\frac{T^2}{a^3}$:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{(2\pi ab)^2}{c^2}\frac{1}{a^3} = \frac{4\pi^2 b^2}{c^2 a} = \frac{4\pi^2}{c^2}\frac{b^2}{a} = 4\pi^2\frac{p}{c^2}.$$

Essendo $p = \frac{c^2}{k(m+M)}$ si ottiene

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{k(m+M)}. \tag{3.6}$$

Questa relazione è l'espressione matematica della *terza legge di Keplero.*

Teorema 3.4 (terza legge di Keplero)**.**
Il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore della sua orbita.

Bibliografia

[1] Dario Graffi. *Elementi di Meccanica Razionale*, Patron, Bologna 1973.

[2] Sandro Graffi. *Appunti delle lezioni di Fisica Matematica II.* http://www.dm.unibo.it/fismat/didattica/html.

[3] David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker. *Fondamenti di fisica. Vol: Meccanica*, Zanichelli, Bologna 2001.