ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

**SCUOLA DI SCIENZE**
**Corso di Laurea in Matematica**

# LA DEFINIZIONE DEL CAMPO REALE SECONDO C. MÉRAY: UN PRIMO APPROCCIO

**Tesi di Laurea in Storia della Matematica**

**Relatore:**
**Chiar.mo Prof.**
**SALVATORE COEN**
**Correlatore:**
**Chiar.mo Prof.**
**GIORGIO BOLONDI**

**Presentata da:**
**STEFANO BERNARDINI**

**II Sessione**
**Anno Accademico 2012/13**

*Ai miei genitori Rosella e Massimo*
*e a mia sorella Lucia*

# Introduzione

Nel 1869 M. Charles Méray, allora professore all'Università di Digione, pubblicò un lavoro dal titolo *Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données* [Méray, 1869]. Questa memoria è considerata generalmente il primo lavoro pubblicato contenente una teoria dei numeri reali senza l'uso di nozioni geometriche. Anche se sui testi che andiamo ad analizzare l'esposizione appare ben ordinata, data l'epoca, il lavoro di Méray non soddisfa gli attuali standard di rigore matematico, ma è sufficientemente preciso da poter essere considerato una delle prime costruzioni pubblicate di $\mathbb{R}$, dove i numeri reali sono introdotti come elementi dello spazio di certi oggetti detti *varianti convergenti* (le successioni di Cauchy razionali) quozientato mediante la relazione che dice equivalenti due varianti quando la loro differenza è infinitesima.

Lo scopo della presente tesi è quello di iniziare lo studio della impostazione di Méray per poterne comprendere poi la portata storica. Dopo il 1869, lo stesso Méray è tornato almeno due volte sulle sue definizioni, precisandole: questo nel suo testo *Nouveau précis d'analyse infinitésimale* ([Méray, 1872]) del 1872 e, più tardi, nelle *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques* ([Méray, 1894]) del 1894, opera più matura e completa della precedente. Nella presente tesi abbiamo preferito analizzare questi due testi più recenti, dove l'esposizione appare più matura e meditata, tenedo però sempre presente il lavoro fondamentale del 1869.

Méray, comunque, nel suo primo lavoro spiega bene le ragioni che lo hanno motivato. Fino ad allora l'equivalenza per una successione (di reali) di essere di Cauchy o di essere convergente era data per accettata. Egli precisa che spera di mostrare l'equivalenza delle due nozioni. Mentre una delle implicazioni è immediata, Méray si accorge che per mostrare l'altra implicazione occorre effettivamente introdurre nuove nozioni e, in sostanza, creare una nuova teoria (anche se questo esplicitamente egli non lo afferma) che dia senso a tali concetti.

Nel primo capitolo della presente tesi illustriamo le nuove nozioni che egli introduce. Méray esordisce esponendo la nozione di variante: le varianti, come vedremo meglio in seguito, sono le successioni che egli vede come applicazioni $\mathbb{N}^s \longrightarrow \mathbb{Q}$ dove $\mathbb{N}$ è l' insieme dei naturali (privati dello zero) ed $s$ un numero naturale (potremmo quindi parlare di successione multi-indicizzate).
È bene fare attenzione alle sfumature della terminologia: per Méray una variante *convergente* (quando indicizzata da un solo parametro) corrisponde alla attuale nozione di successione razionale di Cauchy. Viene introdotta quindi una relazione d'equivalenza: due successioni sono equivalenti quando la loro differenza (termine a termine) converge a 0.
L'autore quindi osserva che ci sono delle successioni (*varianti*) che non hanno alcun limite (razionale) numericamente assegnabile. Mentre ogni successione (*variante*) dotata di limite (razionale) risulta di Cauchy (*convergente*), se una successione (*variante*) è di Cauchy (*convergente*) e non ha limite numericamente assegnabile si dice che ha un *limite fittizio incommensurabile.* Per citare le parole dell'autore, *i numeri incommensurabili sono delle finzioni che permettono di enunciare in modo più uniforme e pittoresco tutte le proposizioni relative alle varianti convergenti.*

Nel secondo capitolo della presente tesi esponiamo più in dettaglio la struttura del campo numerico che egli definisce. Il ragionamento di Méray continua osservando che ogni successione di Cauchy (*variante convergente*) non infinitesima *finisce per conservare un determinato segno*, cioè è definitivamente sempre strettamente positiva o negativa. Questo gli permette di definire quando una variante convergente senza limite commensurabile è maggiore di un'altra. Successivamente l'autore estende la nozione ad una vera e propria relazione d'ordine sulle varianti convergenti (*successioni di Cauchy*) commensurabili o non.
Viene definita, inoltre, anche la nozione di approssimazione di un numero incommensurabile per eccesso o per difetto a meno di un numero (razionale) $\delta$ positivo, mostrando che per ogni numero $A$ incommensurabile e per ogni $\delta$, $A$ può essere approssimato a meno di $\delta$.
Le varie versioni della nozione di incommensurabilità date da Méray negli scritti citati, alla fin fine, non differiscono molto l'una dall'altra; si può notare però che l'ultima (che segue di 25 anni la prima) risulta assai più precisa.
In chiusura di capitolo, l'autore fornisce alcune applicazioni immediate dei risultati appena enunciati: nelle prime versioni, Méray richiama la nozione di potenza e quindi di radice, come esempio tipico di uso degli incommensurabili; nell'ultima fornisce una vera e propria dimostrazione del fatto che ogni numero commensurabile o incommensurabile positivo ammette radici

$m-$esime, ciò che nelle versioni precedenti non compare almeno nei particolari: questa dimostrazione la riprenderemo alla fine del secondo capitolo.

La conclusione dei capitoli dei testi [Méray, 1872], [Méray, 1894] contiene l'affermazione che *condizione necessaria e sufficiente affinché una variante* $v_{m,n,\dots}$ *tenda verso un limite commensurabile o incommensurabile è che sia convergente, cioè che la differenza* $v_{m'',n'',\dots} - v_{m',n',\dots}$ *tenda a zero, quando* $m', n', \dots, m'', n'', \dots$ *crescono indefinitamente in qualsiasi maniera,* cioè quanto ci si proponeva di verificare dapprincipio, ovvero che quanto costruito è un campo ordinato di Cauchy (anche se, in nessun caso, Méray ne esplicita una dimostrazione). Pertanto, ogni variante convergente, finalmente, converge sempre ad un numero reale.

La tesi si conclude con due appendici, che sono rispettivamente la traduzione in italiano del lavoro del 1969 [Méray, 1869] e del primo capitolo di quello del 1972 [Méray, 1872].

# Indice

# Capitolo 1

# Varianti, varianti convergenti e numeri fittizi

Figura 1.1: Charles Méray

Charles Méray (nato a Chalon-sur-Saône, Saône-et-Loire il 12 novembre 1835, morto a Digione il 2 febbraio 1911) pubblicò il suo primo saggio sui numeri reali nel 1869 (v. [Méray, 1869]). Tornò poi sulle sue definizioni nel suo testo di Analisi, *Nouveau précis d'analyse infinitésimale* [Méray, 1872] nel capitolo primo e poi ancora nel testo della maturità *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques* [Méray, 1894] pubblicato in quattro volumi dal 1894 al 1898, precisamente nel secondo capitolo del primo tomo.

Nella presente tesi noi preferiamo concentrarci sui due testi di Analisi pur avendo sottocchio il suo lavoro iniziale *Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données* [Méray, 1869].

È bene ricordare che il famoso saggio di Dedekind *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (*Continuità e numeri irrazionali*), laddove i reali sono definiti come sezioni razionali, è stato pubblicato nel 1872 e che è dello stesso anno dell' altro famoso saggio *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* (*Sull'estensione di un teorema della teoria delle serie trigonometriche*) di G. Cantor [Math. Annalen 5, 123–132], dove si analizzano insiemi infiniti di punti in relazione al problema della convergenza delle serie trigonometriche. In questo saggio, tra l'altro, l'autore, per

poter operare rigorosamente, premette una teoria dei numeri reali in cui ogni numero reale viene introdotto come classe di equivalenza rappresentata da una successione di Cauchy razionale (che lui chiama *successione fondamentale*). La vicinanza tra le classi definite da Méray e quelle di Cantor ha spinto parecchi storici della matematica e matematici a chiamare tali classi come *classi di Cantor-Méray.*
Non ci soffermiamo oltre sulla storia dei numeri reali che appare assai antica e coinvolge i fondamenti della Matematica, sia dell'Analisi che della Geometria.

## 1.1 Varianti e successioni che ammettono limite

Il primo capitolo dell'opera *Nouveau précis d'analyse infinitésimale* [Méray, 1872] si apre con la definizione di *variante.*

**Definizione 1.1.1.** *Una variante $v_{m,n,\dots}$ è una quantità razionale variabile, il cui valore dipende dai numeri interi (positivi) $m, n, \dots$ che definiamo i suoi indici.*

Una variante è quindi una funzione

$$v : \mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

dove il prodotto cartesiano che compare come dominio della funzione $v$ viene effettuato tante volte quanti sono gli indici della variante.
Noi assumeremo sempre che lo zero non faccia parte dell'insieme dei numeri naturali.

**Esempio 1.1.1.** Sono, ad esempio, delle varianti

$$v_m : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q} \qquad v_m = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m}$$

$$\text{e} \qquad w_{m,n} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q} \qquad w_{m,n} = \frac{1}{mn}.$$

Capiamo immediatamente che la definizione di variante fornita da Méray è una generalizzazione della definizione di successione che incontriamo in analisi dove il codominio è l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$.
Una successione a valori razionali è quindi una variante dove compare un solo indice.
Frequentemente, illustreremo le proposizioni nel caso di varianti con un solo indice (successioni razionali) sottintendendo che si può operare in modo analogo con varianti multi-indicizzate.

**Osservazione 1.1.1.** Prima di continuare con l'analisi dell'opera, osserviamo, come fa Méray al paragrafo 34 dell'opera più recente *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques* [Méray, 1894], che per quanto riguarda lo studio delle varianti, quello che importa è soprattutto come una variante *finisce* per comportarsi:

**Definizione 1.1.2.** *Si dice che una variante $v_{m,n,\dots}$ gode di una certa properità a partire dai valori $\mu, \nu, \dots$ quando tale proprietà vale per tutti gli indici*

$$m \geq \mu, \qquad n \geq \nu, \qquad \dots.$$

Le proprietà di questo tipo sono quelle che oggi, con un linguaggio moderno, chiameremmo *definitive*, cioè una variante gode di una determinata proprietà se questa vale *per indici sufficientemente alti*, ovvero da certi valori degli indici in poi.

Méray, a questo punto, in [Méray, 1872], si definisice il concetto di *variante convergente verso un limite*, variante *infinitesima, infinita* e *finita*, per arrivare poi ad enunciare alcuni risultati relativi a tali oggetti. Sottolineamo il fatto che la definizione di *convergenza verso un determinato limite* è diversa da quella di *convergenza* (in senso lato), come vedremo meglio nel prossimo paragrafo.

**Definizione 1.1.3.** *Se esiste un numero razionale $V \in \mathbb{Q}$ tale che la variante $v_{m,n,\dots}$ è tale che*

$$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q} \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |v_{m,n,\dots} - V| < \varepsilon \ \ \forall m, n, \dots \in \mathbb{N}, \ \ m, n, \dots > \bar{n},$$

*diremo che la variante $v_{m,n,\dots}$ converge verso il limite $V$.*

**Definizione 1.1.4.** *Se $v_{m,n,\dots}$ converge verso il limite $V = 0$, diremo che tale variante è infinitamente piccola (o infinitesima).*

**Esempio 1.1.2.** Se $v_{m,n,\dots}$ è tale che converge verso il limite $V$, allora la variante $v_{m,n,\dots} - V$ è infinitesima.

Tra le varianti che non convergono a nessun limite razionale, Méray punta l'attenzione sulle varianti divergenti (che lui chiama *infinite*) e su quelle limitate, che invece definisce *finite*:

**Definizione 1.1.5.** *Una variante $v_{m,n,\dots}$ è divergente se*

$$\forall M > 0, M \in \mathbb{Q} \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |v_{m,n,\dots}| > M \ \ \forall m, n, \dots \in \mathbb{N}, \ \ m, n, \dots > \bar{n}.$$

**Definizione 1.1.6.** *Una variante $v_{m,n,\dots}$ è limitata se*

$$\exists M > 0, M \in \mathbb{Q} \ : |v_{m,n,\dots}| \leq M \ \ \forall m, n, \dots \in \mathbb{N}.$$

Méray enuncia adesso alcuni risultati sulle varianti omettendone però le dimostrazioni: adesso noi riportiamo, enunciato per enunciato, le parole dell'autore; quindi, per semplicità di notazione, trascriviamo i risultati in termini di successioni, riportando infine le relative (moderne) dimostrazioni.

*La somma, il prodotto (o la potenza) di un numero determinato qualsiasi di varianti provviste di limite e di quantità invariabili hanno per limiti i risultati che si ottengono sostituendo, negli stessi calcoli, i limiti alle varianti. Lo stesso per il quoziente di due simili quantità, se il divisore non è infinitamente piccolo.*

**Proposizione 1.1.1.** *Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{Q}$ tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = m$ con $l, m \in \mathbb{Q}$. Allora:*

*i)*
$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = l + m$$

*ii)*
$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = lm$$

*iii) se $a_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ e se $l \neq 0$*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{l}.$$

*Dimostrazione.* Ricordiamo che per ipotesi abbiamo:

$$\forall \delta > 0, \delta \in \mathbb{Q} \ \exists \bar{n}_1 \in \mathbb{N} : |a_n - l| < \delta \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ n > \bar{n}_1$$

$$\forall \delta > 0, \delta \in \mathbb{Q} \ \exists \bar{n}_2 \in \mathbb{N} : |b_n - m| < \delta \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ n > \bar{n}_2$$

i) Fissato $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}$, posto $\bar{n} = \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\}$, se $n > \bar{n}$ varrà per ipotesi che

$$|(a_n + b_n) - (l + m)| = |(a_n - l) + (b_n - m)| \leq |a_n - l| + |b_n - m| < \delta + \delta = 2\delta.$$

Prendendo quindi $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ avremo che

$$|(a_n + b_n) - (l + m)| < \varepsilon \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ n > \bar{n},$$

da cui la tesi.

ii) Fissato $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}$, posto $\bar{n} = \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\}$, se $n > \bar{n}$ varrà per ipotesi che:

$$\begin{aligned}|a_n b_n - lm| &= |(a_n - l)(b_n - m) + a_n m + l b_n - 2lm| = \\ &= |(a_n - l)(b_n - m) + (a_n - l)m + (b_n - m)l| \leq \\ &\leq |a_n - l||b_n - m| + |a_n - l||m| + |b_n - m||l| \leq \\ &\leq \delta^2 + \delta|m| + \delta|l|;\end{aligned}$$

Poiché se $\delta < 1$ allora $\delta^2 < \delta$, si avrà che

$$|a_n b_n - lm| < \delta(1 + |l| + |m|).$$

Prendendo quindi $\delta < \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{1 + |l| + |m|}\right\}$ avremo che

$$|a_n b_n - lm| < \varepsilon \;\; \forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n},$$

da cui la tesi.

iii) Fissato $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}$, se $n > \bar{n}_1$ per ipotesi avremo che

$$|a_n| = |(a_n - l) + l| \geq |l| - |a_n - l| > |l| - \delta.$$

Se noi prendiamo $\delta < \dfrac{|l|}{2}$, abbiamo che

$$|a_n| > |l| - \frac{|l|}{2} = \frac{|l|}{2}, \;\; \forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}_1$$

da cui ricaviamo che

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|a_n - l|}{|a_n||l|} < \frac{2\delta}{|l|^2}.$$

Prendendo quindi $\delta < \min\left\{\dfrac{|l|}{2}, \varepsilon\dfrac{|l|^2}{2}\right\}$, avremo che

$$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q} \;\; \exists \bar{n}_1 \in \mathbb{N} : \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{l}\right| < \varepsilon \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \;\; n > \bar{n}_1,$$

da cui la tesi.

$\square$

**Osservazione 1.1.2.** Nell'opera più matura [Méray, 1894], l'autore presenta la seguente proposizione:

*Se le varianti $u, v, w, \dots$ tendono rispettivamente verso i limiti $U, V, W, \dots$ e se $f(u, v, w, \dots)$ rappresenta una funzione di queste varianti, sia questa intera* (ovvero: polinomiale) *o frazionaria* (ovvero: razionale)*, ma che non abbia un denominatore che tende a zero, si ha*

$$\lim f(u, v, w, \dots) = f(U, V, W, \dots),$$

dove il limite viene fatto facendo tendere all'infinito tutti gli indici delle varianti considerate.
Questa proposizione si ottiene direttamente della proposizione precedente, quindi può essere considerata come una sua prima generalizzazione (in realtà, poiché le funzioni considerate sono tutte funzioni continue, sappiamo dall'analisi che questa proposizione può essere ulteriormente generalizzata prendendo in considerazione funzioni continue).
L'autore in questo caso ne dà un'accenno di dimostrazione: egli utilizza però il concetto di variante *convergente* che esporremo nel prossimo paragrafo: presenteremo quindi la dimostrazione fatta da Méray più avanti.

*Il prodotto di un infinitamente piccolo per una quantità invariabile o finita, la somma di un numero qualunque di simili prodotti, (le potenze positive) di un infintamente piccolo, l'inverso di una quantità infinita sono delle varianti infinitamente piccole.*

**Proposizione 1.1.2.** *Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{Q}$. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione infinitesima e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, allora $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione infinitesima.*

*Dimostrazione.* Per ipotesi esiste $M > 0$ tale che $|b_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, da cui ricaviamo che

$$0 \leq |a_n b_n| \leq M|a_n| \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poiché $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ implica $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, otteniamo che $\lim_{n\to\infty} M|a_n| = 0$. Per il teorema del confronto si ha che

$$\lim_{n\to\infty} |a_n b_n| = 0,$$

da cui la tesi. $\square$

**Proposizione 1.1.3.** *Siano* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *successioni in* $\mathbb{Q}$. *Se* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty(-\infty)$, $a_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, *allora*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

*Dimostrazione.* Supponiamo $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (se tale limite fosse $-\infty$ la dimostrazione sarebbe analoga). Allora

$$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}\ \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : a_n > \frac{1}{\varepsilon}\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ n > \bar{n}.$$

Quindi abbiamo che $a_n > 0$ e

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{a_n} < \varepsilon\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ n > \bar{n}.$$

Quindi

$$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}\ \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ n > \bar{n},$$

da cui la tesi. □

*Una potenza di esponente infinito (positivo) di una quantità invariabile o di una variante è infinita o infinitamente piccola a seconda che in valore assoluto sia (o meglio finisce per essere) superiore ad una quantità* $> 1$ *o minore di una quantità* $< 1$.

**Osservazione 1.1.3.** Per quanto riguarda il precedente enunciato, ci sembra che Méray commetta un'imprecisione che non ha comunque conseguenze sul seguito.
In verità, infatti, se consideriamo la successione

$$a_n = (-2)^n,$$

essa è tale che $|-2| > 1$, ma potendo estrarre due sottosuccessioni

$$a_{2n} = (-2)^{2n} = 2^{2n} \qquad a_{2n+1} = (-2)^{2n+1} = -(2^{2n+1})$$

che divergono la prima positivamente e la seconda negativamente, il teorema cade. Bisogna quindi, come possiamo vedere nei punti i) delle proposizioni seguenti, limitare il ragionamento per i valori $a$ tali che $a$ stesso (e non il suo modulo) sia strettamente maggiore di 1.

**Proposizione 1.1.4.** *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la successione* $a_n = a^n$ *con* $a \in \mathbb{Q}$. *Allora:*

*i) Se* $a > 1$, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

*ii) Se* $|a| < 1$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

*Dimostrazione.* i) Sia $a = 1+\varepsilon$, con $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$. Per la disuguaglianza di Bernoulli, abbiamo che

$$a_n = a^n = (1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon.$$

Poiché $\lim_{n\to\infty}(1+\varepsilon) = +\infty$, per il criterio del confronto si ha la tesi.

ii) Se $a = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (0)^n = 0.$$

Se $0 < |a| < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} |a|^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{|a|}\right)^n}$$

con $\frac{1}{|a|} > 1$, quindi, per il risultato precedente, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{|a|}\right)^n = 0$ e, per la proposizione precedente, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

□

**Proposizione 1.1.5.** *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione tale che* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *con* $a \in \mathbb{Q}$. *Allora:*

*i) Se* $a > 1$, $\lim_{n\to\infty} a_n^n = +\infty$

*ii) Se* $|a| < 1$, $\lim_{n\to\infty} a_n^n = 0$.

*Dimostrazione.* i) Poiché esistono $b \in \mathbb{Q}, b > 1$ e $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tali che $a_n > b$ $\forall n \in \mathbb{N},\ n > \bar{n}$, allora

$$a_n^n \geq b^n \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > \bar{n}.$$

Applicando la proposizione precedente, $\lim_{n\to\infty} b^n = +\infty$ da cui, per il criterio del confronto, la tesi.

ii) Poiché esistono $b \in \mathbb{Q}, 0 < b < 1$ e $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tali che $|a_n| < b$ $\forall n \in \mathbb{N},\ n > \bar{n}$, allora

$$|a_n|^n \leq b^n \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > \bar{n}.$$

Applicando la proposizione precedente, $\lim_{n\to\infty} b^n = 0$ da cui, per il criterio del confronto, la tesi.

□

## 1.2 Varianti convergenti

Oltre alle varianti che convergono verso un numero razionale, Méray rivolge adesso la sua attenzione verso determinate varianti che non hanno un vero e proprio limite nel campo dei razionali, ma che sembrano tuttavia essere molto simili a queste: egli quindi definisce *convergenti* (in senso lato) quegli oggetti che oggigiorno noi chiameremmo *successioni di Cauchy*: sarà proprio questa classe di varianti (e quindi di successioni) che darà la base alla costruzione del campo dei numeri reali secondo Méray.

**Definizione 1.2.1.** *Una variante $v_{m,n,\dots}$ si dice che è convergente (o di Cauchy) se $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |v_{m'',n'',\dots} - v_{m',n',\dots}| < \varepsilon\ \forall m'', n'', n', m', \dots \in \mathbb{N},\ m'', n'', n', m', \dots > \bar{n}$ o, equivalentemente, quando la variante $v_{m'',n'',\dots} - v_{m',n',\dots}$ è infinitesima.*

Intuitivamente, una variante convergente è tale che i suoi elementi arrivano ad essere *vicini fra loro* di tanto quanto si vuole a patto di prendere indici abbastanza grandi.

L'autore fornisce quindi due esempi di varianti di Cauchy: il primo è quello di una variante che ammette limite razionale, il secondo è quello di una variante monotona e limitata.
Partiamo subito dal primo esempio, del quale l'autore dà un cenno di dimostrazione:

**Proposizione 1.2.1.** *Ogni variante che ammette limite in $\mathbb{Q}$ è di Cauchy in $\mathbb{Q}$.*

*Dimostrazione.* Sia $v_{m,n,\dots}$ una variante che ammette limite $V \in \mathbb{Q}$. Allora, $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |v_{m,n,\dots} - V| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall m, n, \dots \in \mathbb{N},\ m, n, \dots > \bar{n}$. Quindi:

$$|v_{m,n,\dots} - v_{m',n',\dots}| \leq |v_{m,n,\dots} - V| + |V - v_{m',n',\dots}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\forall m, n, m', n', \dots \in \mathbb{N},\ m, n, m', n', \dots > \bar{n}$, cioè $v_{m,n,\dots}$ è di Cauchy. □

Anche se non viene osservato esplicitamente dall'autore in [Méray, 1872], ma affermato altrove come ad esempio in [Méray, 1894], è ben noto che il viceversa non vale sempre: esistono nel campo ordinato dei razionali delle varianti di Cauchy non covergenti nel campo stesso. Anche se l'autore non fornisce un esempio concreto, noi, per completezza di trattazione, ne riportiamo uno tratto da [Coen, 2012] riguardante varianti con un solo indice, ovvero successioni.

**Esempio 1.2.1.** Siano $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di numeri naturali definite nel modo seguente:

$$\begin{cases} x_0 = 2, \\ x_n = 3x_{n-1} + 2y_{n-1}, \quad n \geq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_0 = 3, \\ y_n = 4x_{n-1} + 3y_{n-1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Col calcolo diretto, si ha che per ogni $n$ naturale

$$\ldots = y_n^2 - 2x_n^2 = y_{n-1}^2 - 2x_{n-1}^2 = \ldots = y_1^2 - 2x_1^2 = 1.$$

Da cui, ponendo $b_n = \dfrac{y_n}{x_n}$, si ottiene

$$b_n^2 = 2 + \frac{1}{x_n^2}.$$

Ora, poiché $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di numeri naturali divergente, allora $(b_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 2, quindi è una successione di Cauchy. Ma allora anche $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy. Supponiamo infatti che non lo sia: esiste quindi un razionale $c > 0$ tale che per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ esistono $n, m \geq \bar{n}$ naturali tali che $|b_m - b_n| > c$. Ne segue $b_m^2 + b_n^2 - 2b_m b_n > c^2$, quindi, supponendo $b_m \geq b_n \geq 0$, si ha che

$$|b_m^2 - b_n^2| = b_m^2 - b_n^2 > c^2 + b_m b_n - 2b_n^2 = c^2 + 2b_n(b_m - b_n) \geq c^2 > 0,$$

che va contro l'ipotesi.
Adesso, se $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergesse a $q \in \mathbb{Q}$, per ogni $\varepsilon > 0$ razionale esisterebbe un indice $p$ naturale tale che, per ogni $n > p$, si avrebbe $|b_n - q| < \varepsilon$, e quindi anche $|b_n + q| < \varepsilon + 2q$. Moltiplicando membro a membro, si avrebbe

$$|b_n^2 - q^2| < \varepsilon(\varepsilon + 2q)$$

e quindi che la successione $(b_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ convergerebbe a $q^2$, da cui $q^2 = 2$. Ma questo è assurdo: se 2 (che è un primo) si scrivesse come $2 = \left(\dfrac{m}{n}\right)^2$ con $m, n$ naturali, si avrebbe che $2n^2 = m^2$; ma poiché nella fattorizzazione in primi (unica nei naturali a meno dell'ordine) il fattore primo 2 dovrebbe comparire solo elevato ad una potenza pari, tutto ciò è impossibile.

Come vedremo in seguito, l'esistenza di tali successioni e quindi la non invertibilità della Proposizione 1.2.1. sta alla base del bisogno di estendere il campo dei numeri razionali, e questo fatto si esprime dicendo che il campo dei razionali non è completo secondo Cauchy.

Presentiamo quindi il secondo esempio fornito da Méray; per quanto riguarda la sua dimostrazione, l'autore non ne fornisce una in [Méray, 1872]; riportiamo quindi la dimostrazione che appare, più tardi, in [Méray, 1894].

**Proposizione 1.2.2.** *Ogni variante monotona e limitata è convergente (ovvero: di Cauchy).*

*Dimostrazione.* Esaminiamo il caso per una variante $v_m$ con un solo indice non decrescente (il caso generale si tratta allo stesso modo). Se, per assurdo, non fosse convergente, allora per definizione

$$\exists \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q} \quad : \forall \bar{n} \in \mathbb{N} \ \exists m, n, \ldots \in \mathbb{N}, \ \ m, n, \ldots > \bar{n} \quad : |v_m - v_n| \geq \varepsilon$$

e possiamo supporre, ad esempio, $m < n$.
Si può quindi costruire una prima successione di indici $\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_p, \ldots$ e una seconda successione di indici $\mu''_1, \mu''_2, \ldots, \mu''_p, \ldots$ (formate rispettivamente dai numeri $n$ ed $m$ al variare di $\bar{n} \in \mathbb{N}$) tali che $\mu''_i > \mu'_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ e

$$\begin{gathered} v_{\mu''_1} - v_{\mu'_1} \geq \varepsilon, \\ v_{\mu''_2} - v_{\mu'_2} \geq \varepsilon, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ v_{\mu''_p} - v_{\mu'_p} \geq \varepsilon, \\ \ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

dove abbiamo soppresso il valore assoluto per l'ipotesi di non decrescenza.
Inoltre, possiamo supporre che

$$\mu'_p \geq \mu''_{p-1} \ \ \forall p \in \mathbb{N}$$

a meno di eliminare le disuguaglianze che non verificano questa condizione.
A questo punto, la successione

$$\mu'_1, \mu''_1, \mu'_2, \mu''_2, \ldots, \mu'_p, \mu''_p, \ldots$$

è non decrescente, quindi, per ipotesi, valgono

$$\begin{gathered} v_{\mu'_2} - v_{\mu''_1} \geq 0, \\ v_{\mu'_3} - v_{\mu''_2} \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

$$v_{\mu'_p} - v_{\mu''_{p-1}} \geq 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Ora, sommando termine a termine le prime $p$ disuglianze con le prime $p$ precedenti, si ha

$$v_{\mu''_p} - v_{\mu'_1} \geq p\varepsilon,$$

ovvero

$$v_{\mu''_p} \geq v_{\mu'_1} + p\varepsilon.$$

Ma adesso potremmo scegliere $p$ (e di conseguenza $m = \mu''_p$) arbitrariamente grande tale che $v_m$ sia maggiore di una qualsiasi quantità fissata, il che va contro l'ipotesi. □

Riportiamo, in conclusione di questo paragrafo dedicato alle varianti di Cauchy, alcuni risultati che compaiono in [Méray, 1894], con le relative dimostrazioni fornite dall'autore.

**Proposizione 1.2.3.** *Sia $v_{m,n,\dots}$ una variante convergente (di Cauchy). Allora $v_{m,n,\dots}$ è limitata, cioè esiste $M > 0,\ M \in \mathbb{Q}$ tale che per ogni $m, n, \dots \in \mathbb{N}$ si ha $|v_{m,n,\dots}| \leq M$.*

*Dimostrazione.* Fissiamo $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}$ e sia, per semplicità, $v_m$ una variante ad un solo indice.
Per ipotesi, esistono $\mu', \mu'' \in \mathbb{N}$ tali che per ogni $m', m'' \in \mathbb{N},\ m' \geq \mu', m'' \geq \mu''$ vale

$$|v_{m''} - v_{m'}| < \varepsilon,$$

e quindi vale

$$|v_m - v_{\mu'}| < \varepsilon$$

per ogni $m \in \mathbb{N},\ m \geq \mu''$.
Poiché possiamo scrivere

$$v_m = v_{\mu'} + v_m - v_{\mu'},$$

chiamando $\varphi = |v_{\mu'}|$, si avrà che

$$|v_m| = |v_{\mu'} + v_m - v_{\mu'}| \leq |v_{\mu'}| + |v_m - v_{\mu'}| = \varphi + \varepsilon,$$

da cui, posto $M = \varphi + \varepsilon$, la tesi. □

**Proposizione 1.2.4.** *Ogni funzione razionale di varianti convergenti (di Cauchy) è ancora una variante convergente (di Cauchy), a meno che il suo denominatore non sia infinitesimo.*

*Dimostrazione.* 1. Prenderemo in considerazione il caso di funzioni di una sola variante.

Sia $f(u)$ una funzione polinomiale di una variante $u$ convergente (di Cauchy) e sia

$$u', u''$$

un insieme di valori della nostra variante corrispondenti a determinati valori crescenti attribuiti agli indici.

Poiché $f(u)$ è una funzione polinomiale, $f$ sarà della forma

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j.$$

Ponendo

$$u'' - u' = \alpha$$

e quindi

$$u'' = u' + \alpha$$

ricaviamo che

$$\begin{aligned} f(u'') - f(u') &= \sum_{j=0}^{n} a_j (u'')^j - \sum_{j=0}^{n} a_j (u')^j = \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j (u' + \alpha)^j - \sum_{j=0}^{n} a_j (u')^j = \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j [(u' + \alpha)^j - (u')^j] = \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j [(u')^j + j(u')^{j-1}\alpha + \ldots + \alpha^j - (u')^j] = \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j [j(u')^{j-1}\alpha + \ldots + \alpha^j)]. \end{aligned}$$

Poiché, per la Proposizione 1.2.3, $u'$ è limitata e poiché $\alpha$, per come è definita, risulta infinitesima, allora anche $f(u'') - f(u')$ è necessariamente una quantità infinitesima, da cui la tesi.

2. Se $p, q$ sono varianti di Cauchy, con $q$ non infinitesima, allora $\frac{p}{q}$ è una variante di Cauchy.

Infatti, se $p', q', p'', q''$ sono valori di $p, q$ in corrispondenza di indici crescenti, si ha che

$$\frac{p''}{q''} - \frac{p'}{q'} = \frac{p''q' - p'q''}{q'q''} = \frac{(p'' - p')q' - (q'' - q')p'}{q'q''}.$$

Facendo tendere gli indici all'infinito, si ha che che il numeratore è infinitesimo, perché, utilizzando la Proposizione 1.1.2, $p'' - p'$ e $q'' - q'$ sono infinitesime e $q', p'$ sono di Cauchy e quindi limitate; per quanto riguarda il denominatore, questo non è infinitesimo, poiché, per ipotesi, avremo che per indici alti $|q| > l$ e quindi $q'q'' > l^2$. Per la Proposizione 1.1.1 abbiamo la tesi.

□

## 1.3 I *numeri fittizi*

Dopo i precedenti discorsi introduttivi, l'autore arriva alla vera e propria definizione dei numeri reali.
Innanzitutto, viene introdotta una relazione di equivalenza tra varianti, che fa intendere come l'autore avesse presente la necessità di ottenere una nuova classe di numeri attraverso l'operazione di passaggio al quoziente: questo è un metodo attraverso il quale lavorando su un campo ordinato si può giungere alla costruzione di un sovracampo Cauchy-completo.

**Definizione 1.3.1.** *Due varianti $v_{m,n,\ldots}, v'_{m',n',\ldots}$ sono equivalenti se la loro differenza*

$$v_{m,n,\ldots} - v'_{m',n',\ldots}$$

*pensata come una variante con indici $m, n, \ldots, m', n', \ldots$ è infinitesima.*

La verifica che si tratti effettivamente di una relazione d'equivalenza è immediata.
Capiamo a questo punto che l'autore ha bene in mente la presenza di quantità *sui generis,* ovvero di numeri che non sono razionali, ma che possono essere visti come limiti di particolari successioni razionali. Intuitivamente, due successioni sono equivalenti se tendono verso una stessa quantità, che può essere un numero razionale ben noto, ma che invece può anche non esserlo: la definizione di questi nuovi oggetti non sembra essere lontana.
Per chiarire subito le idee, Méray enuncia (senza dimostrarla) la seguente

**Proposizione 1.3.1.** *Siano $v_{m,n,\ldots}, w_{m',n',\ldots}$ due varianti equivalenti. Se una converge in $\mathbb{Q}$, allora anche l'altra converge in $\mathbb{Q}$ alla stessa quantità.*

*Dimostrazione.* Sia, ad esempio, $v_{m,n,\ldots}$ convergente a $V \in \mathbb{Q}$. Per ipotesi abbiamo che

$$\forall \delta > 0, \delta \in \mathbb{Q} \ \exists \bar{n}_1 \in \mathbb{N} : |v_{m,n,\ldots} - V| < \delta \ \forall m, n, \ldots \in \mathbb{N}, \ \ m, n, \ldots > \bar{n}_1 \qquad \text{e}$$

$$\forall \delta > 0, \delta \in \mathbb{Q} \ \exists \bar{n}_2 \in \mathbb{N} : |v_{m,n,\ldots} - w_{m',n',\ldots}| < \delta$$
$$\forall m, n, m', n', \ldots \in \mathbb{N}, \ \ m, n, m', n' \ldots > \bar{n}_2.$$

Allora, fissato $\varepsilon > 0$, posto $\bar{n} = \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\}$ e preso $\delta < \dfrac{\varepsilon}{2}$, si ha che

$$\begin{aligned} |w_{m',n',\ldots} - V| &= |w_{m',n',\ldots} - v_{m,n,\ldots} + v_{m,n,\ldots} - V| \leq \\ &\leq |w_{m',n',\ldots} - v_{m,n,\ldots}| + |v_{m,n,\ldots} - V| \leq 2\delta < \varepsilon, \end{aligned}$$

da cui la tesi.

□

Come primo esempio, possiamo affermare che due successioni che differiscono per un numero finito di elementi appartengono alla stessa classe (ritroviamo, in accordo con l'Osservazione 1.1.1., l'importanza di studiare le proprietà *definitive* di una variante, ovvero quello che interessa è come si comporta la variante all'infinito).

L'autore quindi fa questa interessante osservazione:

*La somma, il prodotto (o la potenza) di un determinato numero qualsiasi di varianti convergenti* (ovvero: di Cauchy) *e di quantità invariabili* (costanti) *è una variante convergente* (di Cauchy) *che resta equivalente a se stessa quando si sostituisce a queste altre varianti che sono a loro rispettivamente equivalenti. Lo stesso vale per un quoziente il cui divisore non è infinitamente piccolo.*

Questa proposizione, come specifica l'autore, non è che la Proposizione 1.1.1. nel caso che tali varianti siano convergenti a un numero razionale; nel caso invece che tali varianti di Cauchy non convergano a nessun numero razionale, Méray afferma che tale variante converge verso un limite che lui chiama *fittizio incommensurabile*, ovvero il nostro numero reale. Vedremo che in questo modo, l'autore ha fornito un limite ad ogni variante di Cauchy, che tale limite sia razionale o che sia irrazionale o *fittizio*.
In effetti, come preciserà meglio in [Méray, 1894],

*quando una variante convergente non tende verso nessun limite, si assegna a questa un limite* ideale *che chiamiano numero o quantità* incommensurabile, *e che rappresentiamo con lo stesso simbolo, come se esistesse veramente. Si* *può allora esprimere la convergenza di una variante qualunque dicendo che* questa tende verso un determinato limite *(effettivo o ideale a seconda dei casi).*

Così facendo, Méray ha quindi enunciato quella proprietà relativa a $\mathbb{R}$ che oggi chiameremmo *completezza sequenziale* o *completezza secondo Cauchy* o *Cauchy completezza*.

**Definizione 1.3.2.** *Si dice che $(A, \leq)$ anello ordinato*[1] *è Cauchy completo se tutte le successioni di Cauchy a valori in $A$ sono convergenti.*

Torneremo sui concetti di completezza e di completezza secondo Cauchy più avanti.

Presentiamo, in chiusura di paragrafo, alcuni risultati sulle varianti equivalenti tratti ancora una volta da [Méray, 1894], con le relative dimostrazioni indicate da Méray.

**Proposizione 1.3.2.** *Se $f$ rappresenta una funzione razionale con denominatore non infinitesimo e se $u', v', \ldots, u'', v'', \ldots$ indicano due gruppi di varianti di Cauchy ordinatamente equivalenti (ovvero $u'$ equivalente a $u''$, $v'$ equivalente a $v''$, e così via), allora le varianti*

$$f(u', v', \ldots) \text{ e } f(u'', v'', \ldots),$$

*che sappiamo già essere convergenti per la Proposizione 1.2.4, sono anche equivalenti.*

*Dimostrazione.* Essendo, per ipotesi, $u'' - u', v'' - v', \ldots$ infinitesime, in modo particolare sono di Cauchy. Ripercorrendo la dimostrazione della Proposizione 1.2.4, ne deduciamo subito la tesi. □

Riprendiamo e dimostriamo una proposizione che avevamo enunciato nell'Osservazione 1.1.2:

**Proposizione 1.3.3.** *Se $u, v, \ldots$ sono delle varianti che tendono verso $U, V, \ldots$ e se $f(u, v, \ldots)$ rappresenta una funzione razionale di queste varianti con denominatore non infinitesimo, si ha che $f(u, v, \ldots)$ tende a $f(U, V, \ldots)$.*

[1] Si dice *anello ordinato* un anello $(A, +, \cdot)$ commutativo unitario munito di una relazione d'ordine totale $\leq$ tale che per ogni $a, b, c \in A$ si ha:

$$a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c$$

$$0 \leq c \text{ e } a \leq b \Longrightarrow c \cdot a \leq c \cdot b$$

*Dimostrazione.* Sia $\nu$ una variante che assume valori costanti uguali a $U$, $\varphi$ una variante che assume valori costanti uguali a $V$, e così via. Evidentemente, $\nu, \varphi, \ldots$ risultano equivalenti, ordinatamente, a $u, v, \ldots$ e, grazie alla proposizione precedente, $f(\nu, \varphi, \ldots)$ risulta equivalente a $f(u, v, \ldots)$ ovvero, per definizione,

$$f(U, V, \ldots) - f(u, v, \ldots)$$

risulta infinitesima, da cui la tesi. $\square$

Dimostrate quindi le precedenti proposizioni, prende compimento il ragionamento seguito da Méray nell'introdure questa nuova classe di numeri: l'autore, infatti, prima dimostra la serie di teoremi che abbiamo presentato in questi paragrafi relativi a varianti di Cauchy che tendono verso un limite razionale; poi, attraverso l'introduzione della relazione di equivalenza della Definizione 1.3.1, l'autore, identificando le varianti di Cauchy con i suoi limiti, afferma che possiamo considerare validi (quasi per una sorta di convenzione, di abuso di linguaggio) tutti i risultati precedenti anche per questa nuova classe di limiti, definiti dall'autore, a maggior ragione, *fittizi* o *ideali*: in questo modo, l'autore ha *esteso* tutta una serie di enunciati che risutano validi non solo per varianti convergenti a numeri razionali, ma anche a quelle varianti di Cauchy che non godono di questa proprietà, ma che hanno comportamenti molto simili alle prime. Risultano adesso più chiare le parole di Méray quando afferma in [Méray, 1872] che

*si può convenire in senso figurato che una variante tende verso un limite fittizio incommensurabile, quando questa è convergente e non ha nessun limite numericamente assegnabile; che i limiti incommensurabili di due varianti convergenti sono uguali quando queste sono equivalenti; che la somma, il prodotto, etc. di varianti convergenti ha per limite (vero o fittizio secondo i casi) la somma, il prodotto, etc., dei loro limiti commensurabili o incommensurabili.*
*(...) Questa è per noi la natura dei numeri incommensurabili; sono delle finzioni che permettono di enunciare in modo più uniforme e pittoresco tutte le proposizioni relative alle varianti convergenti.*

# Capitolo 2

# Costruzione e struttura del campo reale secondo Méray

## 2.1 Teorema della permanenza del segno

Prima di passare alla vera e propria costruzione dei numeri reali, introduciamo in questo paragrafo un noto teorema di analisi presentato in [Méray, 1872] con le parole
*una variante convergente non infinitamente piccola finisce per conservare un determinato segno,*
più noto in letteratura col nome di *teorema della permanenza del segno.*

**Proposizione 2.1.1.** *Sia $v$ una variante convergente (di Cauchy) non infinitesima. Allora $v$ finisce per conservare il segno costante.*

*Dimostrazione.* Sia, per semplicità, $v_m$ una variante ad un solo indice. Poiché $v_m$ non è infinitesima, esiste un $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un indice $k \geq n$ in corrispondenza del quale si ha

$$|v_k| > \varepsilon. \tag{2.1}$$

Utilizzando la definizione di variante di Cauchy, esiste poi un indice $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $h, k \geq N$ si ha

$$|v_h - v_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2}$$

Fissiamo ora un qualunque indice $j \geq N$ : scegliendo $n = N$ nella (2.1) esiste un $k \geq N$ per cui $|v_k| > \varepsilon$ e poi, essendo $j, k \geq N$, usando la (2.2) otteniamo

che $|v_j - v_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Adesso in corrispondenza dell'indice $k$ varrà una ed una sola delle relazioni:

$$v_k > \varepsilon \quad \text{oppure} \quad -v_k > \varepsilon.$$

Se $v_k > \varepsilon$, per un qualunque indice $j \geq N$ si ha che

$$v_j = (v_j - v_k) + v_k \geq v_k - |v_j - v_k| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} > 0,$$

cioè la variante $v_m$ finisce per assumere segno positivo.
Se $-v_k > \varepsilon$, per un qualunque indice $j \geq N$ si ha che

$$-v_j = (-v_j + v_k) - v_k \geq -v_k - |v_j - v_k| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} > 0,$$

cioè la variante $v_m$ finisce per assumere segno negativo.

□

Questo teorema ci dice che se una variante di Cauchy non ha limite zero, essa, da un certo indice in poi, finirà per assumere sempre lo stesso segno, positivo o negativo. È proprio attraverso questa idea intuitiva che Méray fornisce la definizione di numero reale positivo (e quindi negativo):

**Definizione 2.1.1.** *Se due varianti $v_{m,n,\ldots}, v'_{m',n',\ldots}$ non sono equivalenti, in accordo con il teorema precedente, la loro differenza*

$$v_{m,n,\ldots} - v'_{m',n',\ldots}$$

*pensata come una variante con indici $m, n, \ldots, m', n', \ldots$ finisce per assumere un determinato segno: se il segno è positivo (risp. negativo) diremo che il limite incommensurabile di $v_{m,n,\ldots}$ è maggiore (minore) del limite incommensurabile di $v'_{m',n',\ldots}$.*
*Analogamente, diremo che un numero commensurabile $V$ è maggiore (risp. minore) di un numero incommensurabile definito dalla variante $v'_{m',n',\ldots}$ se il segno della variante*

$$V - v'_{m',n',\ldots}$$

*finisce per essere positivo (negativo). Inoltre, se*

$$\exists \delta \in \mathbb{Q},\ \ \delta > 0 : |V - v'_{m',n',\ldots}| < \delta \ \ \forall m, n, \ldots \in \mathbb{N},$$

*diremo che $V$ è il valore del numero incommensurabile definito dalla variante $v'_{m',n',\ldots}$ approssimato a $\delta$ per eccesso (risp. per difetto).*

A questo punto, prima di procedere oltre con l'analisi dell'opera, siamo in grado di presentare nella prossima sezione la costruzione in termini moderni del campo dei numeri reali secondo Méray, ovvero come sovracampo Cauchy completo del campo ordinato dei razionali.

## 2.2 Costruzione dei numeri reali

Presentiamo in qusto paragrafo la costruzione moderna tratta da [Coen, 2012] del campo reale a partire da quello razionale nota in letteratura come *costruzione secondo Méray-Cantor*.
Per semplicità di notazione, scriviamo tutto non in termini di varianti, come avrebbe fatto Méray, ma in termini più moderni di successioni.

**Teorema 2.2.1** (La costruzione secondo Méray-Cantor)**.** *Sia* $(\mathbb{Q}, \leq)$ *il campo ordinato dei razionali. Sia* $C = C(\mathbb{Q})$ *lo spazio delle successioni di Cauchy a termini in* $\mathbb{Q}$ *e sia* $S$ *il sottospazio delle successioni infinitesime a coefficienti in* $\mathbb{Q}$*. Allora, le operazioni di somma e prodotto definite termine a termine su* $C$ *inducono una struttura di anello di cui* $S$ *è ideale ed inducono una struttura di campo su* $C/S$*.*

*Dimostrazione.* Si definisce la struttura di campo su $C$ nel modo seguente. Se $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$, si pone

$$a + b = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad ab = (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Bisogna ora verificare che si tratta di una buona definizione, cioè che
$a + b, ab \in C$ e che tali operazioni soddisfano gli assiomi di campo.
Siano $a, b \in C$. Per ogni $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}$ consideriamo $\dfrac{\varepsilon}{2}$ :

$$\exists \bar{n}_1 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} \;\; \forall n, m \in \mathbb{N}, \;\; n, m > \bar{n}_1$$

$$\exists \bar{n}_2 \in \mathbb{N} : |b_n - b_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} \;\; \forall n, m \in \mathbb{N}, \;\; n, m > \bar{n}_2.$$

Per ogni $n, m \geq \max\{\bar{n}_1 \bar{n}_n\}$ si ha allora che

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| &= |(a_n - a_m) + (b_n - b_m)| \\ &\leq |(a_n - a_m)| + |(b_n - b_m)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

quindi $a + b \in C$.
Siano sempre $a, b \in C$. Dalla proposizione precedente si ha che entrambe le successioni sono limitate: esiste quindi un intervallo $[-M, M]$ a cui appartengono tutti i termini sia di $a$ che di $b$.
Per ogni $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}$ consideriamo $\dfrac{\varepsilon}{2M}$ :

$$\exists \bar{n}_1 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \;\; \forall n, m \in \mathbb{N}, \;\; n, m > \bar{n}_1$$

$$\exists \bar{n}_2 \in \mathbb{N} : |b_n - b_m| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \ \ \forall n, m \in \mathbb{N}, \ \ n, m > \bar{n}_2.$$

Per ogni $n, m \geq \max\{\bar{n}_1 \bar{n}_n\}$ si ha allora che

$$\begin{aligned} |a_n b_n - a_m b_m| &= |a_n b_m - a_m b_n - a_m b_m + a_m b_n| \\ &\leq |(a_n - a_m) b_n - a_m(b_m - b_n)| \\ &\leq |a_n - a_m||b_n| + |a_m||b_m - b_n| \\ &\leq M|a_n - a_m| + M|b_m - b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

quindi $ab \in C$.
Le verifiche degli assiomi di campo sono immediate in quanto si riconducono alle operazioni di somma e prodotto tra elementi di un campo. Si noti che l'elemento neutro per la somma è la successione $(0) = (0, 0, 0, \ldots)$ mentre quello del prodotto è la successione $(1) = (1, 1, 1, \ldots)$.
Si consideri adesso lo spazio $S$ delle successioni infinitesime a termini in $\mathbb{Q}$, ovvero le successioni $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$ con $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Poiché le successioni convergenti sono tutte di Cauchy, vale $S \subset C$. Certo $S$ è un sottogruppo additivo; verifichiamo che è un ideale di $C$. Siano allora $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$ e $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$. Allora, $ab \in S$ per le Proposizioni 1.1.2. e 1.2.3..
Così, per sua stessa definizione, $C/S$ è un anello; verifichiamo che è un campo. Dobbiamo quindi provare che tutti gli elementi non nulli $A$ di $C/S$ sono invertibili per il prodotto.
Osserviamo che l'invertibilità (rispetto alla moltiplicazione) di una successione di Cauchy è evidentemente il problema algebrico più grosso: infatti, se $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ è una successione di Cauchy di razionali, per definire $\frac{1}{x}$ non basta eliminare eventuali componenti nulle; si pensi ad esempio alla successione di Cauchy

$$x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots\right)$$

che non ha componenti nulle, ma la cui inversa

$$\frac{1}{x} = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots, k, \ldots)$$

non è certo di Cauchy (perché non è limitata). Bisogna quindi agire in maniera più accurata.
Supponiamo che A sia rappresentato dalla successione $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin S$. Per la Proposizione 2.1.1., possiamo supporre che esista $\eta > 0$ con $a_n > \eta$ per ogni $n$ superiore ad un indice $\nu$ (se così non fosse, si avrebbe, alternativamente, che $a_n < -\eta$ per $n > \nu$ ed il ragionamento che stiamo per fare si applicherebbe

lo stesso). Si consideri adesso la successione $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$ definita nel modo seguente:

$$\begin{cases} b_n = 1, & n \leq \nu \\ b_n = \frac{1}{a_n}, & n > \nu \end{cases}$$

Vediamo adesso che $b$ è una successione di Cauchy. Sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice $\nu_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n, m \geq \nu_\varepsilon$ vale $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$. Ma noi sappiamo anche che per indici abbastanza alti vale che $|a_n| \geq \eta$, quindi $|\frac{1}{a_n}| \leq \frac{1}{\eta}$ e $|\frac{1}{a_n a_m}| \leq \frac{1}{\eta^2}$. Quindi, per $m, n$ abbastanza alti, vale

$$|b_n - b_m| = |\frac{1}{a_n a_m}||a_n - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{\eta^2},$$

quindi $b \in C$. Certo se $B$ è rappresentato in $C/S$ dalla successione $b$, vale $AB = 1$, da cui la tesi. □

**Notazione.** Nelle condizioni precedenti, indicheremo $C/S$ con $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ (o, semplicemente, $\mathbb{R}$) e lo diremo *il campo dei reali secondo Cantor* o *di Cantor*.

Presentiamo, infine, un altro teorema non presente nelle opere di Méray, che trasferisce la struttura d'ordine dal campo dei razionali a quello dei reali ed immerge, attraverso un omeomorfismo iniettivo, $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

**Teorema 2.2.2.** *Sia $(\mathbb{Q}, \leq)$ il campo ordinato dei razionali. Sia $C = C(\mathbb{Q})$ lo spazio delle successioni di Cauchy a termini in $\mathbb{Q}$ e sia $S$ il sottospazio delle successioni infinitesime a coefficienti in $\mathbb{Q}$. Allora:*

*i) su $C/S$ si definisce un ordinamento che lo rende un campo ordinato, definendo positive le classi indotte dalle successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$ strettamente positive;*

*ii) l'applicazione $j : \mathbb{Q} \longrightarrow C/S$ che associa ad ogni elemento $q \in \mathbb{Q}$ la successione costante $(q, q, q, \ldots)$ è un omomorfismo iniettivo di gruppi che conserva l'ordine.*

*Dimostrazione.* i) Se una successione $a \in C$ non è infinitesima ed è strettamente positiva, allora qualunque sia $b \in S$ anche $a + b$ è strettamente positiva. Infatti, per $n$ abbastanza alto, si avrà che $|a_n| > \eta$ e $|b_n| < \dfrac{\eta}{2}$, e quindi

$$a_n + b_n > \eta - \frac{\eta}{2} = \frac{\eta}{2}.$$

Pertanto ha senso dire che un elemento di $C/S$ è positivo quando è indotto da una successione di Cauchy in $C$ strettamente positiva. Poiché somma e prodotto di due successioni strettamente positive sono ancora tali, sommando o moltiplicando elementi positivi di $C/S$ si ottiene ancora un elemento positivo. Di più segue dal punto i) della Proposizione 1.4.1. che se $a \in C$ non è infinitesima, allora $a$ è strettamente positiva oppure alternativamente lo è $-a$. Questo ci dice che l'insieme degli elementi di $C/S$ che abbiamo definito positivi costituisce effettivamente un insieme di positivi per un ordinamento su $C/S$ che lo rende un campo ordinato.

ii) Certo l'applicazione $j$ è ben definita, mantiene le operazioni e l'ordinamento (se $q > 0$ in $\mathbb{Q}$, allora $j(q) > 0$ in $C/S$). Di più, $j$ è iniettiva: se $p, q \in \mathbb{Q}$ e $p' = j(p), q' = j(q)$, allora $p' - q'$ è infinitesima se e solo se è la successione identicamente nulla; vale cioè $p = q$ se e solo se $p' = q'$.

□

**Osservazione 2.2.1.** Se $A, B$ sono due elementi di $C/S$ rappresentati rispettivamente dalle successioni $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$, allora vale $A > B$ se e solo se esistono un indice $p$ ed un elemento $\eta > 0,\ \eta \in \mathbb{Q}$ tali che $a_n > b_n + \eta$ per $n > p$.
Per esempio: se $c > 0,\ c \in C/S$ è rappresentato dalla successione $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$, vale $|a - b| < c$ quando esistono un indice $p$ ed un elemento $\eta > 0,\ \eta \in \mathbb{Q}$ tali che per ogni $n > p$ si abbia $|a_n - b_n| + \eta < c_n$.

**Osservazione 2.2.2.** Grazie alla proposizione precedente, possiamo allora immergere $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$, identificando $\mathbb{Q}$ con il sottoinsieme $j(\mathbb{Q})$ di $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$. In modo evidente, poiché $j$ è un omeomorfismo, allora $j : \mathbb{Q} \longrightarrow j(\mathbb{Q})$ è un isomorfismo.

**Notazione.** Gli elementi $q \in \mathbb{Q}$ sono identificati con le successioni costanti $j(q) \in \mathbb{R}(\mathbb{Q})$. Questo potrebbe all'inizio creare un po' di confusione tra gli elementi di $\mathbb{Q}$ e le loro immagini secondo $j$. Per un poco, allora, quando vorremo evidenziare il fatto che la disuguaglianza considerata è riferita al campo $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ useremo talvolta i simboli $>_{\mathbb{R}}$ o $<_{\mathbb{R}}$ .

Notiamo infine che Méray, come ha modo di osservare in [Méray, 1894], afferma che

*quando due varianti convergenti sono equivalenti, si dice che i loro limiti (commensurabili o incommensurabili) sono uguali.*

Tuttavia, l'autore non esplicita mai il fatto che un numero reale è una classe d'equivalenza e, inoltre, non afferma mai esplicitamente che anche un numero razionale è il limite di una determinata variante di Cauchy (ad esempio, della variante di valore costante uguale al numero stesso).

## 2.3 Densità dei razionali nei reali

Riprendendo la nostra analisi dell'opera, a questo punto del [Méray, 1872] e accennata altrove nel [Méray, 1869], l'autore fa la seguente affermazione:

*Si può assegnare a qualsiasi numero incommensurabile un valore approssimato a meno di una quantità data qualunque $\delta > 0$ arbitrariamente piccola.*

Questa considerazione, e quelle seguenti, dicono che dato un qualsiasi numero irrazionale, è possibile trovare una sua approssimazione razionale arbitrariamente fine, ovvero afferma che il campo dei razionali è denso nel campo dei reali.
Noi presentiamo allora la dimostrazione fornita da Méray; in seguito, deriveremo questo risultato di densità in termini moderni, riprendendo le notazioni che abbiamo utilizzato nel paragrafo precedente.

**Proposizione 2.3.1.** *Dato un numero incommensurabile qualsiasi $A$, possiamo approssimarlo con una quantità commensurabile a meno di una qualsiasi quantità data $\delta$ arbitrariamente piccola.*

*Dimostrazione.* Supponiamo, ad esempio, $A > 0$ e sia $v_{m,n,\ldots}$ una variante che abbia come limite incommensurabile il nostro $A$. Allora, esisterà $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $m, n, m', n' \geq \bar{n}$ vale

$$|v_{m,n,\ldots} - v_{m',n',\ldots}| < \frac{1}{2}\delta.$$

Supponiamo inoltre che la nostra variante sia crescente, ovvero che valga per ogni $m, n, m', n' \geq \bar{n}$, $m > m', n > n', \ldots$

$$v_{m,n,\ldots} - v_{m',n',\ldots} < \frac{1}{2}\delta,$$

ovvero

$$v_{m',n',\ldots} > v_{m,n,\ldots} - \frac{1}{2}\delta. \tag{2.3}$$

Poiché possiamo scrivere

$$v_{m',n',\ldots} = v_{m,n,\ldots} + v_{m',n',\ldots} - v_{m,n,\ldots},$$

ricaviamo che vale

$$|v_{m',n',\dots}| \leq |v_{m,n,\dots}| + |v_{m',n',\dots} - v_{m,n,\dots}| < |v_{m,n,\dots}| + \frac{1}{2}\delta.$$

Poiché, per la Proposizione 1.4.1, la nostra variante finirà necessariamente per assumere lo stesso segno di $A$, avremo che

$$v_{m',n',\dots} < v_{m,n,\dots} + \frac{1}{2}\delta. \tag{2.4}$$

In definitiva, dalla (1.1) e dalla (1.2) si ha che

$$v_{m,n,\dots} - \frac{1}{2}\delta < v_{m',n',\dots} < v_{m,n,\dots} + \frac{1}{2}\delta$$

e, facendo tendere $m', n'$ all'infinito,

$$v_{m,n,\dots} - \frac{1}{2}\delta < A < v_{m,n,\dots} + \frac{1}{2}\delta.$$

□

**Definizione 2.3.1.** *I valori $v_{m,n,\dots} - \frac{1}{2}\delta$ e $v_{m,n,\dots} + \frac{1}{2}\delta$ della precedente dimostrazione sono detti i valori approssimati ad $A$ di una quantità $\delta$, il primo per difetto, il secondo per eccesso.*

Ritornando, come annunciato, ad un linguaggio più moderno, presentiamo adesso la prossima proposizione tratta da [Coen, 2012], che ci dice che dato un qualsiasi numero reale $A$ positivo, esiste un numero razionale positivo minore di $A$. Da ciò ricaveremo subito che i numeri razionali sono densi nei numeri reali.

**Proposizione 2.3.2.** *Sia $(\mathbb{Q}, \leq)$ il campo ordinato dei razionali, sia $A \in \mathbb{R}(\mathbb{Q})$ e sia $j : \mathbb{Q} \longrightarrow C/S$ l'applicazione che associa ad ogni elemento $q \in \mathbb{Q}$ la successione costante $(q, q, q, \dots)$. Allora:*
*se $A >_{\mathbb{R}} 0$, esiste $\eta > 0$, $\eta \in \mathbb{Q}$ tale che*

$$A >_{\mathbb{R}} j(\eta) >_{\mathbb{R}} 0;$$

*se $A < 0$, esiste $\eta > 0$, $\eta \in \mathbb{Q}$ tale che*

$$A <_{\mathbb{R}} -j(\eta) <_{\mathbb{R}} 0.$$

*Dimostrazione.* Sia $A >_{\mathbb{R}} 0$. Se $A$ è rappresentato dalla successione $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$ questa è strettamente positiva, quindi esiste $\eta > 0,\ \ \eta \in \mathbb{Q}$ con $a_n > \eta$ per ogni $n$ alto. Certo la successione costante $j(\eta)$ rappresenta un elemento di $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ strettamente positivo con $\eta > \frac{\eta}{2} > 0$, da cui

$$A >_{\mathbb{R}} j(\eta) >_{\mathbb{R}} 0.$$

Sia $A <_{\mathbb{R}} 0$. Se $A$ è rappresentato dalla successione $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$ questa è strettamente negativa, quindi esiste $\eta > 0,\ \ \eta \in \mathbb{Q}$ con $a_n < -\eta$ per ogni $n$ alto. Certo la successione costante $j(\eta)$ rappresenta un elemento di $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ strettamente positivo con $\eta > \frac{\eta}{2} > 0$, da cui

$$A <_{\mathbb{R}} -j(\eta) <_{\mathbb{R}} 0.$$

□

**Corollario 2.3.1.** Sia $(\mathbb{Q}, \leq)$ il campo ordinato dei razionali e sia $A \in \mathbb{Q}$. Sia $A \in \mathbb{R}(\mathbb{Q})$ rappresentato dalla successione $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$. Allora la successione $(j(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad $A$ in $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$. In particolare, $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$.

*Dimostrazione.* Dobbiamo verificare che per ogni $\sigma > 0,\ \ \eta \in \mathbb{R}(\mathbb{Q})$ esiste un indice $p$ tale che per $n > p$ vale $|(j(a_n)) - a| < \sigma$. Dalla precedente Proposizione 2.3.2. segue che basta provare che per ogni $\eta > 0,\ \ \eta \in \mathbb{Q}$ esiste un indice $p$ con $|(j(a_n)) - a| < j(\eta)$ per $n > p$. Poiché la successione $a$ è di Cauchy, per ogni $\eta > 0,\ \ \eta \in \mathbb{Q}$ esiste un indice $p$ tale che per $m, n > p$ si ha $|a_n - a_m| < \frac{\eta}{2}$. Per $n > p$ consideriamo l'elemento $j(a_n) \in \mathbb{R}(\mathbb{Q})$ indotto dalla successione di termine costante $a_n$. Per $n > p$, vale $|j(a_n) - a| <_{\mathbb{R}} \frac{\eta}{2}$; infatti, passando a considerare per $m > p$ gli $m$-simi termini della successione in esame, abbiamo

$$|(j(a_n))_m - a_m| + \frac{\eta}{2} = |a_n - a_m| + \frac{\eta}{2} < \eta.$$

□

Dopo questo risultato di densità, ritorniamo, nel prossiomo paragrafo, al concetto di Cauchy completezza e vediamo come questo si ricollega alla definizione più usuale di completezza (per l'ordine).

## 2.4 Completezza e Cauchy completezza

Approfondiamo meglio, in questo paragrafo, il risultato cruciale di tutto il ragionamento effettuato da Méray, che è anche il fine ultimo per il quale l'autore ha introdotto il nuovo concetto di numero irrazionale, ovvero quello di fornire un limite a ogni successione di Cauchy.
Infatti, come spiega chiaramente l'autore in conclusione del secondo capitolo del primo volume di [Méray, 1894],

*abbiamo assegnto dei limiti ideali a ogni variante convergente che non ne hanno di effettivi. D'altra parte, ogni variante che tende verso un limite effettivo è convergente. Ne risulta che* condizione necessaria e sufficiente affinché una variante $v_{m,n,\ldots}$ tenda verso un limite commensurabile o incommensurabile è che sia convergente, cioè che la differenza

$$v_{m'',n'',\ldots} - v_{m',n',\ldots}$$

tenda a zero, quando $m', n', \ldots, m'', n'', \ldots$crescono indefinitamente in qualsiasi maniera.

Il risultato che enuncia Méray in sostanza è, detto in termini moderni, la Cauchy-completezza del campo dei reali, ovvero che tutte le successioni di Cauchy a valori reali sono convergenti.
L'autore, però, enuncia solamente questa proposizione, senza fornirne una dimostrazione. Noi, in virtù di alcuni risultati scritti in forma moderna introdotti nei due paragrafi precedenti, abbiamo tutti gli strumenti per presentarne una dimostrazione.

**Teorema 2.4.1.** *Sia* $(\mathbb{Q}, \leq)$ *il campo ordinato dei razionali. Allora* $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ *è Cauchy completo.*

*Dimostrazione.* Si deve dimostrare che ogni successione di Cauchy $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ ammette limite $B \in \mathbb{R}(\mathbb{Q})$. Ci accingiamo a definire una successione $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in $\mathbb{Q}$ con la proprietà che per ogni $n$, l'elemento $b_n$ (o meglio l'elemento $j(b_n)$ indotto in $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ dalla successione di termine costante $b_n$) sia abbastanza vicino ad $A_n$, per verificare poi che $b$ è di Cauchy e che rappresenta il limite cercato.
Si fissi $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$; poiché $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, esiste un indice $n'$ tale che per ogni $n, m \geq n'$ si abbia

$$|A_n - A_m| <_{\mathbb{R}} \frac{j(\varepsilon)}{3}.$$

Per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ provata nel Corollario 2.3.1., per ogni $n \geq 1$ sia $b_n \in \mathbb{Q}$ tale che
$$|A_n - j(b_n)| <_{\mathbb{R}} \frac{j(\varepsilon)}{3}.$$
Quindi, per ogni $n, m \geq n'$ si ha
$$|j(b_n) - j(b_m)| \leq_{\mathbb{R}} |j(b_n) - A_n| + |A_n - A_m| + |A_m - j(b_m)| <_{\mathbb{R}} j(\varepsilon).$$
Ora, in $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ vale
$$|j(b_n) - j(b_m)| =_{\mathbb{R}} |j(b_n - b_m)| =_{\mathbb{R}} j(|b_n) - b_m|)$$
che si identifica con $|b_n - b_m| \in \mathbb{Q}$. Pertanto $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{Q}$ e definisce un elemento $B \in \mathbb{R}(\mathbb{Q})$ a cui essa converge in $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ per il Corollario 2.3.1.
Fissato $\varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbb{Q}$, esiste un indice $n'' \geq n'$ tale che per $n \geq n''$ si abbia $|j(b_n) - B| <_{\mathbb{R}} \frac{j(\varepsilon)}{2}$, e quindi
$$|A_n - B| \leq_{\mathbb{R}} |A_n - j(b_n)| + |j(b_n) - B| <_{\mathbb{R}} j(\varepsilon).$$
Ma noi sappiamo dalla Proposizione 2.3.2. che per ogni $\eta > 0$ in $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ esiste $\varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbb{Q}$ con $0 < j(\varepsilon) < \eta$; pertanto si ha, come voluto, che
$$\lim_{n\to\infty} A_n = B.$$
□

Infine, ricordiamo che è possibile ricollegare il concetto che abbiamo appena illustrato di Cauchy completezza con quello di completezza. Ricordiamone quindi la definizione e alcuni risultati classici.

**Definizione 2.4.1.** *Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato. Si dice che $A$ è completo se ogni suo sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato è dotato di estremo superiore in $(A, \leq)$.*

**Definizione 2.4.2.** *Un campo ordinato o in generale un gruppo ordinato $(G, \leq)$ si dice che è archimedeo se per ogni $a, b \in G,\ a > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $na > b$.*

Come vedremo nel prossimo risultato, la densità dei razionali nei reali provata nel Corollario 2.3.1. e il fatto che $\mathbb{Q}$ è archimedeo ci assicura che anche $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ è archimedeo.

**Teorema 2.4.2.** $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ *è archimedeo.*

*Dimostrazione.* Siano $A, B$ due numeri reali, per semplicità entrambi positivi, tali che $A < B$.
Fissiamo $\delta > 0$ tale che $\delta < \frac{A}{2}$. Per il Corollario 2.3.1., esisterà un numero razionale $a$ tale che $|A - a| < \delta$ con

$$0 < a < A$$

(se $a > A$, basta prendere $a - \dfrac{\delta}{2}$); per lo stesso motivo, esisterà un numero razionale $b$ tale che $|B - b| < \delta$ con

$$0 < B < b$$

(se $b < B$, basta prendere $b + \dfrac{\delta}{2}$).
Poiché $\mathbb{Q}$ è archimedeo, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$na > b.$$

Inoltre, poiché $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ è un campo ordinato,

$$a < A \Longrightarrow na < nA.$$

Unendo le disuguaglianze, abbiamo che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$nA > na > b > B,$$

da cui la tesi. □

Nelle opere di Méray da noi analizzate non trovo la dimostrazione della completezza di $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$. D'altra parte, come possiamo vedere in [Coen, 2012], noi sappiamo che vale il seguente

**Teorema 2.4.3.** *Un campo ordinato è completo se e solo se è archimedeo e Cauchy completo.*

Come corollario, si ha che per $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ vale la completezza

**Corollario 2.4.1.** $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ è completo.

*Dimostrazione.* Poiché sappiamo dal Teorema 2.4.2. che $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ è archimedeo e dal Teorema 2.4.1. che $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ è Cauchy completo, la tesi segue dal Teorema 2.4.3.. □

## 2.5 Esempi

In conclusione di [Méray, 1872], Méray prende in considerazione alcuni esempi. L'esempio principale, naturalmente, è quello della radice quadrata.

**Osservazione 2.5.1.** Prendiamo ancora in considerazione la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita nell'Esempio 1.2.1.; si tratta di una successione a valori razionali tale che
$$\lim_{n\to\infty} b_n^2 = 2.$$
Sempre nell'Esempio 1.2.1., avevamo dimostrato che tale successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ risulta essere di Cauchy, ma non risulta convergere a nessun valore razionale. A questo punto, in virtù del Teorema 2.4.1., possiamo affermare che la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rappresenta un numero irrazionale $B$ e che vale
$$B^2 = 2.$$
Per convenzione, si scrive
$$B = \sqrt{2}$$
e si dice che $B$ è la *radice quadrata* di 2.

L'autore generalizza questo risultato dicendo che a questo punto è lecito affermare che *ogni numero positivo ha una radice quadrata*: infatti, se un numero $B$ fosse un quadrato, allora ammetterebbe una radice razionale, la cui esistenza era nota anche in precedenza; se invece $B$ non fosse un quadrato, la scrittura $\sqrt{B}$ indicherebbe questa nuova entità irrazionale, che Méray chiama *radice incommensurabile o fittizia*. Il numero $\sqrt{B}$ rappresenta quindi il limite di una qualunque successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che
$$\lim_{n\to\infty} b_n^2 = B.$$

In modo del tutto analogo, quando incontriamo l'uguaglianza
$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$
significa che stiamo considerando due varianti $a, b$ tali che, facendo tendere tutti i loro indici all'infinito, si ha
$$\lim a^2 = A$$
$$\lim b^2 = B$$

e che
$$\lim(a - 2b) = 0,$$
ovvero che $a$ è equivalente a $2b$.

Ancora, una scrittura del tipo
$$1 < \sqrt{2} < \sqrt{8}$$
sta a significare che esistono tre varianti $a, b, c$ tali che
$$\lim a = 1$$
$$\lim b^2 = 2$$
$$\lim c^2 = 8$$
e che
$$\lim(c - b) > 0$$
$$\lim(b - a) > 0,$$
ovvero che, citando le parole di Méray, *gli eccessi della prima sulla seconda e di questa sull'unità finiscono per assumere il segno +.*

Infine, una volta definita la radice quadrata, acquista significato anche l'espressione
$$\sqrt{\sqrt{A}};$$
ad esempio, la relazione
$$\sqrt[4]{A} = \sqrt{\sqrt{A}}$$
*vuol dire che la radice quarta di un biquadrato che converge ad a è equivalente alla radice di una variante quadrata equivalente ad un'altra variante convergente ad a, etc.*

*Ragionando in questo modo,* afferma ancora Méray, *si arriva sempre a ridurre le proposizioni sui numeri incommensurabili esprimendo certe relazioni tra numeri propriamente detti,* ovvero i numeri razionali.

Il fatto che ogni numero positivo ammette una radice quadrata viene enunciato dall'autore anche in [Méray, 1894]. In questo caso, l'autore ne fornisce anche una prova; presentiamo quindi, in conclusione della nostra analisi, questa dimostrazione, seguendo, il più possibile da vicino, il ragionamento di Méray.

**Proposizione 2.5.1.** *Sia $m$ un numero naturale. Allora: una quantità positiva qualunque $A$ ha sempre una radice $m-$sima positiva ed una sola.*

*Dimostrazione.* 1.) *L'espressione $u^k$, dove $u$ è una costante e $k$ è un intero positivo, al crescere di $k$ all'infinito cresce o descresce a seconda che $u$ sia maggiore o minore di 1.*

Infatti, sia, per esempio, $u > 1$, ovvero $u = 1 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$. Si ha, allora,

$$u^{k+1} = u^k u = u^k(1+\varepsilon) = u^k + u^k\varepsilon > u^k,$$

quindi $u^k$ è crescente. Di più, poiché, per la disuguaglianza di Bernoulli e per le proprietà archimedee, vale

$$u^k = (1+\varepsilon)^k \geq 1 + k\varepsilon,$$

e, per il criterio del confronto, il secondo termine va all'infinito, anche $u^k$ cresce all'infinito.

Se, invece, $0 < u < 1$, allora $\frac{1}{u} > 1$ e, per quanto appena visto, $(\frac{1}{u})^k = \frac{1}{u^k}$ cresce all'infinito. Ma allora $u^k$ decresce e, per la Proposizione 1.1.3, tende a zero.

2.) *Esiste una variante positiva la cui $m-$sima potenza tende verso $A$.*

Per fissare le idee, supponiamo $A > 1$ e sia $u > 1$. Formiamo la successione

$$1, u, u^2, \ldots.$$

Poiché, per il punto 1.), i termini vanno tutti crescendo all'infinito, segue, dalle proprietà archimedee, che ce ne saranno sicuramente due consecutivi $u^{k_u}, u^{k_u+1}$ tali che

$$u^{k_u} < A \leq u^{k_u+1}$$

da cui ricaviamo che

$$0 < A - u^{k_u} \leq u^{k_u+1} - u^{k_u} = u^{k_u}(u-1) < A(u-1)$$

e quindi, facendo tendere $u$ ad 1, avremo che $u^{k_u}$ tende ad $A$ (notiamo che $k_u$ è in funzione di $u$ e di $A$).

Siano adesso $q_u, r_u$ il quoziente e il resto della divisione di $k_u$ per $m$, e poniamo

$$v = u^{q_u}.$$

Poiché $k_u = mq_u + r_u$ con $r_u < m$, si avrà

$$v^m = u^{q_u m} = u^{k_u - r_u} = \frac{u^{k_u}}{u^{r_u}}$$

e, poiché

$$\lim_{u\to 1} u^{r_u} < \lim_{u\to 1} u^m = 1,$$

si avrà che $v^m$ tenderà al

$$\lim_{u\to 1} \frac{u^{k_u}}{u^{r_u}} = \frac{A}{1} = A,$$

quindi $v$ è la variante cercata.
In modo analogo, si dimostra il risultato nel caso $A < 1$, prendendo questa volta $u < 1$.

3.) *Ogni variante positiva $v$ la cui $m-$sima potenza tende ad $A$ è di Cauchy.*
Sicuramente esisterà $\alpha > 0$ tale che $\alpha^m < A$ e $v$ finirà per essere maggiore di $\alpha^m$ poiché, altrimenti, $v^m < \alpha^m$ e, quindi, $v^m$ non potrebbe tendere ad $A > \alpha^m$.
Detto ciò, siano $v', v''$ due valori di $v$ i cui indici crescono all'infinito e siano $\varepsilon', \varepsilon''$ due quantità positive arbitrariamente piccole. Per ipotesi, abbiamo che valgono

$$A - (v')^m \leq \varepsilon'$$

$$A - (v'')^m \leq \varepsilon'',$$

da cui si ricava, sottraendo membro a membro la seconda disequazione dalla prima, che

$$(v'')^m - (v')^m \leq \varepsilon' - \varepsilon''$$

ovvero

$$v'' - v' \leq \frac{\varepsilon' - \varepsilon''}{(v'')^{m-1} + (v'')^{m-2}v' + \ldots + (v')^{m-1}}$$

e quindi, per quanto osservato precedentemente,

$$v'' - v' \leq \frac{\varepsilon' - \varepsilon''}{m\alpha^m},$$

da cui la tesi.

4.) Segue dalla dimostrazione appena fatta che *due varianti come $v'$ e $v''$ sono sempre equivalenti.*

5.) Quando, per caso, $A$ è l'$m-$sima potenza di un numero commensurabile $a$, la costruzione appena fatta ha poco interesse.
Se, invece, questo non accade, la variante $v$ non tende verso un vero numero (commensurabile). Ecco quindi che intervengono le considerazioni finora fatte a proposito dei limiti fittizi.
Inoltre, lo stesso tipo di ragionamento risulta valido non solo nel caso

in cui $A$ sia un numero commensurabile, ma anche nel caso in cui sia una quantità incommensurabile. Quindi, la scrittura

$$\sqrt[m]{A} \quad \text{o} \quad A^{\frac{1}{m}}$$

acquista significato per ogni valore di $A$, sia che questo sia una potenza $m-$sima commensurabile o incommensurabile.

$\square$

# Appendice A

# Traduzione [Méray, 1869]

**Osservazioni sulla natura delle quantità definite dalla condizione di servire da limiti per delle variabili date**,
di M. Charles Méray,
professore della Facoltà di scienze di Dijou

**I.** La teoria delle quantità incommensurabili, quella delle serie, delle quadrature, e in generale di tutte le parti della matematica dove si ha luogo di considerare dei limiti di quantità variabili hanno per fondamento essenziale i seguenti principi:

$1^o$ Una quantità variabile $v$, che assume successivamente dei valori in numero indefinito:

$$v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$$

tende verso un certo limite se i termini di questo limite vanno sempre aumentando o diminuendo, purchè restino nel primo caso minori, nel secondo caso maggiori di una quantità fissa qualunque.

$2^o$ La variabile $v$ definita come sopra gode ancora della stessa proprietà se la differenza $v_{n+p} - v_n$ tende a zero quando $n$ aumenta indefinitamente, qualunque sia la relazione che si possa stabilire tra $n$ e $p$.

Fino ad oggi si è considerato queste proposizioni come degli assiomi. Tuttavia, esaminandole con attenzione, ho scoperto che si può ricavare la seconda dalla prima, la cui evidenza è più immediata, e infine che è anche possibile passare dall'una all'altra. Procedendo in questo modo, si segue, questo è vero, un cammino più distorto, ma più sicuro, e si sfugge alla necessità di introdurre nel ragionamento il concetto abbastanza oscuro di numero incommensurabile. Questo è quello che mi propongo di esporre in modo così breve come lo impone la natura elementare e arida di un simile argomento.

**II.** Comincio dalla dimostrazione dell'ultimo principio; questo punto non è privo di interesse, soprattutto se non si accettano le idee che esporrò a breve. Non si dimentichi che ammetto in questo momento l'esattezza dell'altra proposizione.

$1^o$ *Qualunque sia il numero $n$ esistono due quantità $l_k$, $L_k$ tali che si ha*

$$l_k < v_n < L_k$$

*per ogni valore di $n$ maggiore di $k$.*

In effetti, se il limite superiore $L_k$ non esistesse, $v_n$ potrebbe essere reso più grande di ogni quantità data, e sarebbe possibile scegliere successivamente e indefinitamente i numeri $k', k'', k''' \dots$ in modo da ottenere:

$$v_{k'} > v_k + a, \qquad v_{k''} > v_{k'} + a, \qquad v_{k'''} > v_{k''} + a, \qquad \dots$$

dove $a$ indica una quantità positiva qualunque. Adesso se ne concluderebbe, contrariamente all'ipotesi, che attribuendo ad $n$ i valori successivi $k, k', k'', k''', \dots$ che crescono all'infinito, e a $p$ i valori corrispondenti $k' - k, k'' - k', k''' - k'', \dots$, la differenza $v_{n+p} - v_n$ assumerebbe un valore superiore ad $a$.

L'esistenza di $l_k$ si ricava nello stesso modo.

$2^o$ *Qualunque sia $k$ è possibile, a meno di prendere $h$ abbastanza grande, supporre o che*

$$l_h > l_k, \qquad L_h \leq L_k;$$

*o che*

$$l_h \geq l_k, \qquad L_h < L_k.$$

Sennò, in effetti, immaginiamo due quantità $l', L'$, di cui la seconda sia maggiore della prima e che soddisfino tutte queste condizioni, cioè tali che si abbia:

$$l_k < l' < L' < L_k.$$

Qualunque valore di $v$ consideriamo, esisteranno delle successioni più discostate che saranno alcune maggiori o uguali a $L'$, altre minori o uguali a $l'$, poichè altrimenti si potrebbe prendere sia $l_h = l'$, sia $L_h = L'$. Così si può trovare un numero $h$ abbastanza grande da avere $v_h \geq L'$, poi un altro $h' > h$ che faccia $v_{h'} \leq l'$, poi un terzo $h'' > h$ che riporti la prima disuguaglianza $v_{h''} \geq L'$, e così via alternativamente fino all'infinito.

Succederebbe quindi, contrariamente all'ipotesi, che la differenza $v_{n+p} - v_n$ assumerebbe un valore numerico almeno uguale a $L' - l'$ per valori indefinitamente crescenti $h, h', h'', \ldots$ attribuiti a $n$, e valori corrispondenti $h' - h, h'' - h', h''' - h'', \ldots$ assegnati a $p$.

Si potrà quindi assegnare successivamente a $v$ due primi limiti $l_{h_0}, L_{h_0}$, poi altri due $l_{h_1}, L_{h_1}$, contenuti (almeno uno) nell'intervallo dei precedenti, poi ancora due nuovi $l_{h_2}, L_{h_2}$, ancora più vicini di questi, e così via indefinitamente.

$3^o$ *Se i termini della successione $l_{h_0}, l_{h_1}, l_{h_2}, \ldots$ non arrivano ad assumere un valore costante, essi tendono necessariamente verso un certo limite. Lo stesso vale per quelli di $L_{h_0}, L_{h_1}, L_{h_2}, \ldots$*

Poichè infatti i primi vanno sempre crescendo senza poter superare $L_{h_0}$, poichè sono inferiori a dei valori di $v$, che sono essi stessi minori di $L_{h_0}$. Gli ultimi dimisuiscono progressivamente restando comunque maggiori di $l_{h_0}$, e si può applicare a queste due successioni l'assioma 1.

Noi chiameremo $l$ e $L$ limiti di queste successioni oppure i valori costanti che i loro termini arrivano ad assumere. Quest'ultima particolarità non può aver luogo per tutte due contemporaneamente ($2^o$).

$4^o$ *Le quantità $l, L$ sono uguali.*

Poichè altrimenti si avrebbe $l < L$, e la considerazione delle due quantità $l', L'$, scelte in modo da sodisfare le condizioni

$$l < l' < L' < L,$$

porterebbero, come sopra ($2^o$), a trovare per $n$ dei valori crescenti all'infinito, e per $p$ dei valori corrispondenti che manterrebbero il valore numerico di $v_{n+p} - v_n$ almeno uguale a $L' - l'$.

$5^o$ *La variabile $v$ converge a $\lambda$, valore comune di $l, L$.*

In effetti, le quantità $\lambda - l_{n_i}, \lambda - L_{n_i}$ sono infinitamente piccole, e quindi anche la loro differenza $L_{n_i} - l_{n_i}$. Ora in valore assoluto questa è maggiore di $\lambda - v_{n_i}$, dunque quest'ultima ha per limite zero.

Adesso facciamo crescere $n$ indefinitamente in modo arbitrario; si ha

$$\lambda - v_n = (\lambda - v_{n_i}) + (v_{n_i} - v_n),$$

dove si può supporre $n_i$ maggiore di $n$, e dove quindi, in virtù dell'ipotesi fatta, $v_{n_i} - v_n$ è una quantità infinitamente piccola. Quindi, come si voleva provare, $v_n$ converge verso un certo limite $\lambda$.

Una volta dimostrata per le quantità reali, questa proposizione si estende anche alle quantità immaginarie.

**III.** Torniamo al primo principio. Ogni metodo adatto a constatare l'esistenza di una quantità che soddisfa determinate condizioni si basa essenzialmente su un qualche procedimento a supporto del quale si potrebbe calcolare in base ai dati il *valore* stesso di questa incognita. Ora, le nozioni fornite dal nostro assioma sulla natura della variabile non permettono da sole di scoprire il valore del suo limite; quindi non sono sufficienti neppure a stabilirne l'esistenza. E l'assioma stesso diventa inutile appena si tratta di una variabile i cui dati accessori del problema permettono di calcolare il limite. In questo caso, in effetti, è sufficiente sapere che l'esistenza del limite dipende da come la variabile si modifica progressivamente in un modo o nell'altro.

Ma, inoltre, non è in qualche modo contraddirsi il voler ricollegare l'esistenza *analitica* di un oggetto ad un'ipotesi che non lo costringe a corrispondere a nessun numero, e che, pertanto, non gli conferisce l'unico titolo per il quale sia permesso di introdurlo nei calcoli? Io sono portato a crederlo e ad attribuire precisamente a questo motivo la difficoltà che sempre si prova approfondendo la nozione di quantità incommensurabile.

Così la teoria della quale noi ci occupiamo si basa ancora su una verità che sarà sempre precaria e su una nozione che non sembra facile da precisare bene. Ma gli enunciati attuali nascondono le speciali proprietà dei numeri enunciati precisamente; ci sarà bisogno di ricavarli per superare questo doppio ostacolo. È così che si è dovuto procedere per riproporre la vera natura delle quantità immaginarie dimenticata per un istante nel rapido sviluppo di questa ammirabile concezione.

**IV.** Riserverò adesso la denominazione di numero o di quantità agli interi e alle frazioni; chiamerò *variabile progressiva* una qualsiasi quantità $v$ che assume successivamente diversi valori in numero illimitato.

Sia $v_n$ il valore $n$-simo di $v$; se per $n$ che cresce all'infinito esiste un numero $V$ tale che, a partire da un determinato valore di $n$, $V - v_n$ resta minore di una qualunque quantità arbitrariamente piccola, si dice che $v$ ha per limite

$V$, e si vede immediatamente che $v_{n+p} - v_n$ ha per limite zero, qualunque sia la legge di crescita simultanea imposta a $n$ e $p$.

Se non c'è nessun simile numero, non è più permesso, analiticamente parlando, affermare che $v$ ha un limite; ma, se in questo caso la differenza $v_{n+p} - v_n$ converge sempre a zero, la natura di $v$ presenta un'analogia straordinaria con quella delle variabili realmente dotate di limiti. Ci occorre un termine speciale per esprimere la proprietà notevole di questa differenza di cui si parla: dirò che la variabile progressiva $v$ è *convergente*, sia che questa abbia o no un limite numericamente assegnabile.

L'esistenza di un limite per una variabile convergente rende facile l'enunciazione di alcune delle sue proprietà che non dipendono affatto da questa particolarità, e che sarebbe spesso molto più scomodo da formulare direttamente. Si capisce dunque che è vantaggioso, nel caso in cui non c'è nessun limite, conservare il linguaggio abbreviato proprio di quello nel caso in cui ne esista uno; e, per esprimere la convergenza di una variabile, si dirà semplicemente: *questa ha un limite (fittizio).*

Ecco un'esempio dell'utilità di questa convenzione; se $m, n$ crescono entrambi all'infinito e la differenza $u_m - v_n$ di due variabili convergenti tende a zero per una certa dipendenza reciproca tra questi indici, si prova facilmente che resta infinitamente piccola per qualsiasi altra legge; dirò allora che le variabili $u, v$ sono *equivalenti*, e si vede subito che due variabili equivalenti a una terza, lo sono tra di loro. Quando $u_m - v_n$ non tende a zero, si prova che questa differenza è convergente e resta equivalente a se stessa, sia che la relazione tra $m$ e $n$ cambi, sia che si sostituisca $u, v$ con delle variabili rispettivamente equivalenti.

Adesso, supponiamo che $u, v$ abbiano dei limiti $U, V$: se $u, v$ sono equivalenti, $U, V$ saranno uguali, sennò $U - V$ sarà il limite di $u_m - v_n$, e il suo segno sarà quello che questa quantità finirà per assumere. Supponiamo, invece, che $u, v$ non abbiano alcun limite (numerico): sarà utile dire sempre (in senso figurato) che esse hanno lo stesso limite se sono equivalenti, sennò che il limite (fittizio) di $u$ è maggiore o minore a quello di $v$, a seconda che $u - v$ finisca per restare positivo o negativo.

Si potrà chiamare valore del limite reale o fittizio di $v$ *approssimato a* $\delta$ qualsiasi numero $\lambda$ tale che la differenza $\lambda - v_n$ finisca per assumere un valore numerico inferiore a $\delta$. Infine un simbolo qualunque volto a ricordare, volta per volta, la natura dei calcoli che definiscono $v_n$ e i valori numerici delle quantità sulle quali si deve svolgerli, indicherà comodamente nel linguaggio il limite fittizio; lo stesso segno potrà rappresentare nelle formule il numero indeterminato che ne rappresenta il valore approssimato, calcolato ad un livello di approssimazione sempre più e indefinitamente elevato, cioè, in fondo, ogni variabile progressiva equvalente a $v$.

**V.** Queste considerazioni si applicano a tutto ciò che chiamiamo numeri incommensurabili; stiamo per cercare cosa bisogna intendere per funzione di tali numeri, e cominciamo a esaminare le funzioni razionali.

Una funzione razionale $f(x, y, z, \ldots)$ è continua quando la differenza $f(x+h, y+k, \ldots) - f(x, y, \ldots)$ converge a zero per $h, k \ldots$ che tendono anch'essi a zero, qualunque siano la dipendenza reciproca di questi incrementi e il modo con cui possano variare contemporaneamente $x, y, z, \ldots$. Escludiamo, si capisce, i valori delle variabili che annullerebbero il denominatore della funzione.

Fatto ciò, sostituiamo ai numeri $x, y, z, \ldots$ delle variabili progressive convergenti $u_m, v_n, w_p, \ldots$ e facciamo crescere indefinitamente gli indici. Si dimostrerà facilmente la proposizione seguente:

*La variabile progressiva* $\omega = f(u_m, v_n, w_p, \ldots)$ *è convergente e resta equivalente a lei stessa sia che si cambi la dipendenza reciproca degli indici sia che si sostituiscano* $u_m, v_n, w_p, \ldots$ *con delle altre variabili rispettivamente equivalenti.*

Quando $u, v, w, \ldots$ hanno dei limiti (numerici) $U, V, W, \ldots$ la quantità $\Omega = f(U, V, W \ldots)$ è il limite di $\omega$ e l'affermazione di questo fatto equivale a quella del teorema precedente. Ma, se alcune di queste quantità ne sono sprovviste, sarà comunque lecito, per esprimere comodamente la dipendenza di $\omega$ da $u, v, w, \ldots$, affermare che $\omega$ ha un limite reale o fittizio uguale alla sostituzione dei limiti reali o fittizi di $u, v, w, \ldots$ a queste variabili in $f(u, v, w, \ldots)$, e scrivere simbolicamente:

$$\lim \omega = f(U, V, W, \ldots).$$

Ho ammesso implicitamente che i coefficienti di $f(x, y, z, \ldots)$ sono dei numeri propriamente detti; altrimenti, siano $a, b, c, \ldots$ delle variabili progressive aventi questi coefficienti $A, B, C, \ldots$ per limiti fittizi. La relazione di $\omega$ con $u, v, w, \ldots$ da una parte e $a, b, c, \ldots$ dall'altra si esprimerà ancora con l'uguaglianza simbolica:

$$\lim \omega = f(U, V, W, \ldots, A, B, C, \ldots);$$

ma si potrà, come sopra, ridurla a:

$$\lim \omega = f(U, V, W, \ldots),$$

sottintendendo che si tratta soltanto della dipendenza che stabilisce tra $\omega$ e $u, v, w, \ldots$ la natura della funzione razionale, e la condizione per $a, b, c, \ldots$ di rimanere equivalenti a loro stessi.

**VI.** Sia $\omega$ una variabile il cui valore deriva da certe operazioni razionali eseguite su delle variabili progressive convergenti $u_m, v_n, w_p, \ldots$, e su dei numeri interi $\mu, \nu, \varpi, \ldots$; se la natura dei calcoli è tale che $\omega$ sia convergente e resti equivalente a se stessa quando i numeri $m, n, p, \ldots, \mu, \nu, \varpi, \ldots$ crescono all'infinito seguendo una legge qualunque, e anche quando si sostituisce a $u, v, w, \ldots$ altre variabili equivalenti qualunque, si può ancora dire, sia in senso proprio, sia in senso figurato, che $\omega$ ha un limite. E indicando $U, V, W, \ldots$ i limiti reali o fittizi di $u, v, w, \ldots$, si scriverà:

$$\lim \omega = f(U, V, W, \ldots),$$

dove il simbolo $f$ ricorda la natura dei calcoli che definiscono $\omega$.

Se $\omega$ equivale a qualche funzione razionale di $u, v, w, \ldots$ a coefficienti costanti (almeno in relazione alla loro equivalenza), $f(U, V, W, \ldots)$ rappresenterà la stessa funzione di $U, V, W, \ldots$, sennò si avrà ottenuto una funzione trascendente (o irrazionale) di queste quantità ideali.

Questa è, secondo il nostro punto di vista, l'idea più generale che ci si possa formare di una funzione trascendente; non ce n'è alcuna alla quale non si possa attribuire una simile origine.

Adesso si deve vedere in cosa consiste un'equazione qualunque tra quantità commensurabili o incommensurabili: è l'enunciato conciso e pittoresco del fatto che alcuni calcoli operati su valori numerici delle prime, su delle variabili progressive che hanno le seconde per limiti fittizi, ed eventualmente su dei numeri interi crescenti all'infinito, danno una variabile progressiva che tende a zero, qualunque sia la relazione che si stabilisce tra questi numeri interi e in qualunque modo si cambi la natura delle variabili progressive soggette al calcolo, purchè queste restino equivalenti a loro stesse. Bisogna considerare il concetto di funzione di quantità incommensurabili come un semplice strumento per facilitare la descrizione, la classificazione e la notazione delle innumerevoli relazioni di questo genere che si possono immaginare tra diverse variabili convergenti.

**VII.** Riassumendo, a ogni quantità incommensurabile corrisponde un'infinità di variabili progressive (commensurabili) convergenti, la cui equivalenza si può esprimere dicendo che esse hanno per limite comune la quantità in oggetto.

A ogni funzione corrisponde una variabile progressiva convergente formandosi razionalmente per mezzo di interi indefinitamente crescenti, e di altre variabili progressive commensurabili, in modo da rimanere equivalente a lei stessa in tutte le sue determinazioni.

Infine, ogni relazione tra quantità commensurabili o incommensurabili esprime, per una certa variabile progressiva commensurabile dipendente dai dati in un modo che varia con la natura della relazione, la proprietà di convergere costantemente a zero.

Le quantità immaginarie, non essendo che combinazioni di due quantità reali, danno luogo alle stesse considerazioni.

Mi resta da chiarire queste generalità con qualche esempio.

$1^o$ Si può immaginare un'infinità di variabili progressive i cui quadrati tendono a un numero dato $a$, e si dimostra facilmente che queste sono tutte convergenti ed equivalenti. Questo fatto è talmente positivo che lo si esprime dicendo che *ogni numero ha una radice quadrata*, proposizione che non è vera quando si lascia alle parole il loro senso letterale.

Quando $a$ non è un quadrato, $\sqrt{a}$ indicherà nel linguaggio questa radice fittizia, e nei calcoli qualsiasi variabile progressiva il cui quadrato tende ad $a$. Se per strade diverse si ottiene una variabile convergente di cui si può verificare l'equivalenza a una di quelle il cui quadrato tende ad $a$, si dirà che il suo limite è uguale a $\sqrt{a}$.

La relazione

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

significa che essendo $\alpha, \beta, \gamma$ variabili commensurabili qualunque, i cui quadrati tendono ad $a, b, ab$, la differenza $\alpha\beta - \gamma$ tende a zero.

La notazione $\sqrt{\sqrt{a}}$ ricorderà che esistono delle variabili progressive tutte equivalenti tra loro e tali che i loro quadrati siano equivalenti a qualsiasi variabile il cui quadrato converge ad $a$. L'equazione

$$\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$$

significa che le variabili di cui si tratta sono anche equivalenti a tutte le altre la cui quarta potenza converge ad $a$.

$2^o$ Consideriamo la funzione intera:

$$u_{m,\mu} = 1 + \frac{x_m}{1} + \frac{x_m^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{x_m^\mu}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \mu}$$

dove $x_m$ rappresenta una variabile progressiva convergente. Si può provare che $u_{m,\mu}$ è anch'essa una variabile convergente, che resta equivalente a se stessa quando $m, \mu$ crescono all'infinito in tutti i modi possibili e anche quando si sostiuisce a $x_m$ una variabile equivalente qualsiasi.

# Appendice B

# Traduzione [Méray, 1872]

Charles Méray
**Nuovo compendio di analisi infinitesimale**
Capitolo primo

Preliminari

*Varianti. - Limiti. - Quantità infinitesime, infinite, finite.*

**1.** Chiameremo *variante* un numero variabile (intero o frazionario, positivo o negativo), $v_{m,n,\ldots}$ il cui valore dipende da numeri interi $m, n, \ldots$ che assumono tutte le combinazioni di valori possibili e che noi chiameremo i suoi *indici.*

Per esempio: $v_m = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m}$, $v_{m,n} = \frac{1}{mn}$, sono delle varianti a uno e due indici.

**2.** Se esiste un numero $V$ tale che si possa prendere $m, n, \ldots$ abbastanza grandi affinché la differenza $V - v_{m,n,\ldots}$ sia, in valore assoluto, minore di una quantità arbitrariamente piccola, per questi valori degli indici e per tutti i valori più grandi, si dice che la variante $v_{m,n,\ldots}$ *tende* o *converge* al *limite* $V$.

Quando $V = 0$, la variante $v_{m,n,\ldots}$ si chiama una quantità *infinitamente piccola*; tale è per esempio la differenza tra una variante e il suo limite.

Tra le varianti sprovviste di limite, si deve notare quelle il cui valore assoluto può diventare e restare più grande di un qualsiasi numero dato; le si chiamano quantità *infinite*; al contrario, quelle il cui valore resta numericamente inferiore a un certo numero fissato si dicono *finite*.

**3.** Si dimostrano senza alcuna difficoltà le seguenti proposizioni:

I. *La somma, il prodotto (o la potenza) di un qualsiasi numero determinato di varianti finite e di quantità invariabili sono delle quantità fisse. Lo stesso per il rapporto di due simili quantità il cui denominatore non è infinitamente piccolo.*

II. *Il prodotto di un infinitamente piccolo per una quantità invariabile o finita, la somma di un numero qualunque di simili prodotti, (le potenze positive) di un infintamente piccolo, l'inverso di una quantità infinita sono delle varianti infinitamente piccole.*

III. *Una potenza di esponente infinito (positivo) di una quantità invariabile o di una variante è infinita o infinitamente piccola a seconda che in valore assoluto sia (o meglio finisce per essere) superiore ad una quantità* $> 1$ *o minore di una quantità* $< 1$.

IV. *La somma, il prodotto (o la potenza) di un numero determinato qualsiasi di varianti provviste di limite e di quantità invariabili hanno per limiti i risultati che si ottengono sostituendo, negli stessi calcoli, i limiti alle varianti. Lo stesso per il quoziente di due simili quantità, se il divisore non è infinitamente piccolo.*

*Numeri incommensurabili.*

**4.** Chiameremo *convergente* qualsiasi variante $v_{m,n,\ldots}$ tale che la differenza

$$v_{m+p,n+q,\ldots} - v_{m,n,\ldots}$$

sia, qualunque siano $p, q, \ldots$, inferiore a una variante infinitamente piccola, con indici $m, n, \ldots$; o meglio, più brevemente, tale che questa differenza tende a zero per $m, n, \ldots$ infiniti qualunque siano $p, q, \ldots$.

Per esempio sono convergenti:

$1^o$ *Le varianti provviste di limite.* Poiché $v_{m+p,n+q,\ldots} - v_{m,n,\ldots} = (V - v_{m,n,\ldots}) - (V - v_{m+p,n+q,\ldots})$ differenza di due quantità infinitamente piccole.

$2^o$ *Le varianti finite che, a partire da certi valori degli indici, vanno sempre, o non crescendo, o non decrescendo (algebricamente parlando).* Lo si verifica senza difficoltà.

**5.** Due varianti $v_{m,n,\ldots}, v'_{m',n',\ldots}$ sono *equivalenti* quando la loro differenza $v_{m,n,\ldots} - v'_{m',n',\ldots}$, considerata come una variante con indici $m, n, \ldots, m', n', \ldots$ è infinitamente piccola. Se una è dotata di limite, anche l'altra converge necessariamente alla stessa quantità.

Detto questo, si dimostra facilmente ciò che segue:

*La somma, il prodotto (o la potenza) di un determinato numero qualsiasi di varianti convergenti e di quantità invariabili è una variante convergente che resta equivalente a lei stessa quando si sostituisce a queste altre varianti che sono a loro rispettivamente equivalenti. Lo stesso vale per un quoziente il cui divisore non è infinitamente piccolo.*

**6.** Questa proposizione non è che il teorema IV ($n^o$**3**), quando le variabili considerate hanno per limite certi numeri; ma quando alcune non tendono verso nessun limite *numericamente assegnabile*, non si può, considerando le parole con il loro senso proprio, sostituire uno degli enunciati con un altro.

Tuttavia, si può convenire in senso figurato che una variante tende verso un limite fittizio *incommensurabile*, quando questa è convergente e non ha nessun limite numericamente assegnabile; che i limiti incommensurabili di due varianti convergenti sono uguali quando queste sono equivalenti; che la somma, il prodotto, etc. di varianti convergenti ha per limite (vero o fittizio secondo i casi) la somma, il prodotto, etc., dei loro limiti commensurabili o incommensurabili. E, grazie a questa convenzione, la proposizione di cui abbiamo appena parlato si enuncerà, *in tutti i casi*, come il teorema citato.

Questa è per noi la natura dei numeri incommensurabili; sono delle finzioni che permettono di enunciare in modo più uniforme e pittoresco tutte le proposizioni relative alle varianti convergenti.

**7.** *Una variante convergente non infinitamente piccola finisce per conservare un determinato segno.* Poiché esiste per ipotesi un'infinità di combinazioni di valori di $m, n, \ldots$ che rendono $v_{m,n,\ldots}$ maggiore in valore assoluto a un determinato numero fissato $\delta$. Daremo a $m, n, \ldots$ tali valori che siano nello stesso tempo abbastanza grandi affinché $v_{m+p,n+q,\ldots} - v_{m,n,\ldots}$ sia numericamente inferiore a $\delta$ per qualsiasi $p, q, \ldots$. Poiché $v_{m+p,n+q,\ldots}$ è uguale a

$$v_{m,n,\ldots} + (v_{m+p,n+q,\ldots} - v_{m,n,\ldots}),$$

questa quantità conserverà necessariamente il segno di $v_{m,n,\ldots}$ per qualsiasi $p, q, \ldots$, cioè per tutti gli indici maggiori o uguali a $m, n, \ldots$.

Dopo di che, se due varianti convergenti senza limiti commensurabili $v_{m,n,\ldots}, v'_{m',n',\ldots}$ non sono equivalenti, la loro differenza $v_{m,n,\ldots} - v'_{m',n',\ldots}$ finisce per assumere un determinato segno. A seconda che il segno sia + o $-$, si dice che il limite incommensurabile della prima è *maggiore* o *minore* di quello della seconda.

Similmente, si dirà che un numero commensurabile $a$ è *maggiore* o *minore* di un numero incommensurabile definito dalla variante $v_{m,n,\ldots}$ a seconda che $a - v_{m,n,\ldots}$ finisce per essere $>$ o $< 0$.

Se, in valore assoluto, finisce per restare minore di $\delta$, $a$ si chiama il *valore* del numero incommensurabile *approssimato a* $\delta$, per eccesso nel primo caso, per difetto nel secondo.

*Si può assegnare a qualsiasi numero incommensurabile un valore approssimato a meno di una quantità data qualunque $\delta$ arbitrariamente piccola.*

Sia in effetti $v_{m,n,\ldots}$ la variante convergente corrispondente, e prendiamo $m, n, \ldots$ abbastanza grandi affinché da un certo punto in poi

$$v_{m+p,n+q,\ldots} - v_{m,n,\ldots}$$

resti in valore assoluto minore di $\frac{1}{2}\delta$, per qualsiasi $p, q, \ldots$.

Dall'identità:

$$v_{m+p,n+q,\ldots} = v_{m,n,\ldots} + (v_{m+p,n+q,\ldots} - v_{m,n,\ldots}),$$

si ricava che per quasiasi $p, q, \ldots$:

$$(v_{m,n,\ldots} + \frac{1}{2}\delta) - v_{m+p,n+q,\ldots} > 0 \text{ e } < \delta,$$

$$(v_{m,n,\ldots} - \frac{1}{2}\delta) - v_{m+p,n+q,\ldots} < 0 \text{ e in val. num. } < \delta.$$

Quindi $v_{m,n,\ldots} + \frac{1}{2}\delta, v_{m,n,\ldots} - \frac{1}{2}\delta$ sono dei valori approssimati a $\delta$ vicini al numero incommensurabile in questione, uno per eccesso, l'altro per difetto.

**8.** È bene chiarire queste considerazioni con un esempio. Un numero positivo non quadrato $a$ non ha nessuna radice quadrata numerica assegnabile, ma si può immaginare un'infinità di varianti quadrate che convergono a questo. Dico che le loro radici (positive) sono delle varianti convergenti e equivalenti le une alle altre.

In effetti, se si ha:

$$v_n^2 = a + t_n, \qquad v_{n+p}^2 = a + t_{n+p},$$

$t_n, t_{n+p}$ convergenti a zero per degli indici infiniti, si avrà anche:

$$v_{n+p} - v_n = \frac{t_{n+p} - t_n}{v_{n+p} + v_n}.$$

Il denominatore non è infinitamente piccolo, poiché altrimenti $v_n^2, v_{n+p}^2$ avrebbero 0 per limite e non $a$; invece il numeratore lo è, quindi $v_{n+p} - v_n$ tende a zero per $n$ infinito, indipendentemente da qualsiasi relazione tra $n$ e $p$; questo prova la convergenza della variante $v_n$.

Si dimostrerebbe nello stesso modo l'equivalenza delle due varianti i cui quadrati convergono verso uno stesso numero. *Tutto ciò si esprime dicendo che ogni numero positivo ha una radice commensurabile o incommensurabile.* E si indica questa radice fittizia con $\sqrt{a}$, simbolo impiegato per rappresentare la vera radice quando $a$ è un quadrato.

Così, invece di dire che i quadrati di diverse varianti hanno per limite comune $a$, si dirà che queste tendono tutte verso il limite incommensurabile $\sqrt{a}$.

L'equazione:

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

significa che se i quadrati delle due varianti convergono una ad 8 e l'altra a 2, la prima è equivalente al doppio della seconda.

Le disuguaglianze:

$$1 < \sqrt{2} < \sqrt{8}$$

esprimono che gli eccessi della prima sulla seconda e di questa sull'unità finiscono per assumere il segno $+$.

Similmente la relazione:

$$\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$$

vuol dire che la radice quarta di un biquadrato che converge ad $a$ è equivalente alla radice di una variante quadrata equivalente ad un'altra variante convergente ad $a$, etc.

Ragionando in questo modo, *si arriva sempre a ridurre le proposizioni sui numeri incommensurabili esprimendo certe relazioni tra numeri propriamente detti.*

**9.** Bisogna spendere una parola sulle varianti incommensurabili. Sia $u_{m,n,\dots}$ una quantità variabile di questa specie, e $v_{m,n,\dots}$ il suo valore approssimato a $t_{m,n,\dots}$, con quest'ultima quantità infinitamente piccola.

Se $v_{m,n,\dots}$ è una variante convergente, considereremo anche l'oggetto in questione come tale e avente per limite (commensurabile o incommensurabile) quello di $v_{m,n,\dots}$.

Poiché si ha in valore assoluto:

$$v_{m,n,\dots} - u_{m,n,\dots} < t,$$

$$v_{m+p,n+q,\dots} - u_{m+p,n+q,\dots} < t_{m+p,n+q,\dots},$$

da cui:

$$(v_{m+p,n+q,\dots} - v_{m,n,\dots}) < (u_{m+p,n+q,\dots} - u_{m,n,\dots}) + (t_{m,n,\dots} + t_{m+p,n+q,\dots}),$$

e poiché l'ultima parte del secondo membro è infinitamente piccola, la condizione affinché $u$ sia convergente è che i suoi valori successivi siano commensurabili. È neccessario e sufficiente che la differenza $u_{m+p,n+q,\ldots} - u_{m,n,\ldots}$ sia minore di una variante infinitamente piccola con indici $m, n, \ldots, p, q, \ldots$ per $m, n, \ldots$ infiniti, per qualsiasi $p, q, \ldots$.

Riteniamo adesso poco necessario insistere più a lungo sui numeri incommensurabili, e specialmente esprimere ciò che bisogna intendere per una quantità di questo tipo, infinitesima, infinita o finita, o di estendere a queste le proposizioni in **3**,**5**, etc.

*Quantità immaginarie.*

[...].

# Bibliografia

[Méray, 1869] Charles Méray, *Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données*, Revue des Sociétés Savantes, 1869.

[Méray, 1872] Charles Méray, *Nouveau précis d'analyse infinitésimale*, F. Savy libraire–éditeur, 1872.

[Méray, 1894] Charles Méray, *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques*, Tomo 1, Gauthier-Villars, 1894.

[Boyer, 1976] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Mondadori, 1976.

[Coen, 2012] Salvatore Coen, *Matematica elementare da un punto di vista superiore*, note del corso di Elementi di geometria, A.A. 2012/13.

# Ringraziamenti

Ma veniamo, infine, ai ringraziamenti.
Permettetemi di ringraziare, *in primis*, il mio Relatore, il Professor Coen, il quale non solo mi ha permesso di approfondire un argomento interessante e stimolante, ma mi ha anche insegnato, cosa a mio parere ancora più importante, il metodo attraverso il quale bisogna affrontare in modo rigoroso, scientifico e critico una ricerca di tipo storico nel campo della matematica; desidero ringraziarlo inoltre per la disponibilità e la dedizione che ha dedicato a me in questi mesi. Ringrazio inoltre il Professor Bolondi che ha svolto per me la funzione di Correlatore.
Ringrazio poi la mia famiglia, in modo particolare i miei genitori, che, anche se lontani, mi sono stati vicini, sia affettivamente che economicamente, e mia sorella Lucia, la quale, da brava sorella maggiore, mi ha saputo dare degli ottimi consigli, per la vita e per i miei studi.
Un grazie va, inoltre, ai miei colleghi di corso, in particolare a Chiara, Giulia, Ilaria, Mariagiulia, Marta e Lorenzo, compagni fondamentali di questa avventura, i quali hanno condiviso con me i successi di questi anni e mi hanno sostenuto nei momenti più difficili: vi porterò sempre nel cuore.
Desidero ringraziare la Professoressa Cagnacci, la quale è stata un'ottima insegnante durante la mia formazione liceale ed ha contribuito ad alimentare l'amore che ho per questa materia.
Per concludere, ringrazio per ultimi, ma non per importanza, tutti gli amici che mi vogliono bene e tutte le persone che, in questi anni, hanno creduto in me: grazie di cuore.